1. Resolva a equação $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$, sabendo que uma raiz é a unidade imaginária i.

$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$

1ª raiz $= i$

2ª raiz $= -i$

$(x+i)\cdot(x-i) = x^2 + \cancel{i} - \cancel{i} + 1 = x^2 + 1$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 & x^2+1 \\ \hline -x^4 - 0x^3 - 1x^2 & x^2 - 2x + 5 \\ \quad -2x^3 + 5x^2 - 2x & \\ \quad +2x^3 + 0x^2 + 2x & \\ \qquad 5x^2 + 5 & \\ \qquad -5x^2 - 5 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2 - 2x + 5 = 0$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

$\dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.5}}{2.1}$

$\dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \rightarrow \dfrac{2 \pm \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2}$

$\dfrac{2 \pm 4.i}{2}$ → $x' = 1 + 2i$; $x'' = 1 - 2i$

$\boxed{\text{Raízes} = \pm i, \ 1 \pm 2i}$

2. Calcule a e b reais de modo que a equação $x^3 + ax + b = 0$ admita a raiz complexa $2 + 3i$. Resolva a equação utilizando as relações de Girard.

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = a \quad d = b$

$x^3 + 0x^2 + ax + b = 0$

$-\dfrac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow -\dfrac{0}{1} = (2+3i) + (2-3i) + x_3$

$0 = 4 - 0.i + x_3 \rightarrow \boxed{x_3 = -4}$

$+\dfrac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_2$

$\dfrac{a}{1} = (2+3i).(2-3i) + (2+3i).(-4) + (2-3i).(-4)$

$a = 4 + \cancel{6i} - \cancel{6i} - 9i^2 - 8 - \cancel{12i} - 8 + \cancel{12i}$

$\boxed{a = -3}$

$-\dfrac{d}{a} = x_1 . x_2 . x_3 \longrightarrow -\dfrac{b}{1} = (2+3i).(2-3i).(-4)$

$-b = (4 - \cancel{6i} + \cancel{6i} - 9i^2).(-4) \rightarrow -b = (4+9).(-4)$

$-b = -52 .^{(-1)} \rightarrow \boxed{b = 5}$

Raízes $= \{2 \pm 3i, -4\}$, $a = -3$, $b = 52$

3. Forme uma equação de coeficientes reais e grau mínimo possível que admita as raízes $1, -1$ e $i + 1$.

Raízes: $\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{-1}_{x_2}, \underbrace{i+1}_{x_3} \rightarrow \underbrace{1-i}_{x_4}$ também é raiz pelo TFA.

São 4 raízes: ± 1, $1 \pm i$ → polinômio de grau 4.

• Relações de Girard

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \rightarrow (1 - 1 + (i+1) + (1-i)) = 2$

$\boxed{2 = -\dfrac{b}{a}}$

$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = +\dfrac{c}{a}$

$1(-1) + 1(i+1) + 1(1-i) + (-1)\cdot(1+i) + (-1)(1-i) + (1+i)\cdot(1-i) = \dfrac{c}{a}$

$-\cancel{1} + \cancel{i} + \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{i} - \cancel{1} - \cancel{i} - \cancel{1} + \cancel{i} + \cancel{1} - \cancel{i} + \cancel{i} - i^2 = \dfrac{c}{a}$

$\boxed{c/a = 1}$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\dfrac{d}{a}$

$1\cdot(-1)\cdot(1+i) + 1\cdot(-1)\cdot(1-i) + 1(1+i)(1-i) + (-1)\cdot(1+i)(1-i) = -\dfrac{d}{a}$

$-\cancel{1} - \cancel{i} - 1 + \cancel{i} + \cancel{1} - \cancel{i^2} + \cancel{i^2} - 1 = -\dfrac{d}{a}$

$\boxed{-d/a = -2}$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{e}{a} \longrightarrow (1)\cdot(-1)\cdot(1+i).(1-i) = \dfrac{e}{a}$

$-1 + i^2 = \dfrac{e}{a} \longrightarrow \boxed{e/a = -2}$

$-\dfrac{b}{a} = 2 \qquad \dfrac{c}{a} = 1 \qquad -\dfrac{d}{a} = -2 \qquad \dfrac{e}{a} = -2$

adotando → $a = 1$

$-\dfrac{b}{1} = 2 \rightarrow b = -2 \qquad \dfrac{c}{1} = 1 \rightarrow c = 1$

$-\dfrac{d}{1} = -2 \rightarrow d = 2 \qquad \dfrac{e}{1} = -2 \rightarrow e = -2$

→ $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$

4. Forme uma equação de coeficientes reais e grau mínimo possível que admita $2i$ como raiz dupla e $1/2$ como raiz simples.

Raízes: $(\pm 2i) \times 2$, $1/2$

$P(x) = (x - 2i)^2 \cdot (x + 2i)^2 \cdot (x - 1/2) = 0$

$P(x) = (x - 2i)\cdot(x + 2i)\cdot(x - 2i)\cdot(x + 2i)\cdot(x - 1/2) = 0$

$(x^2 - \cancel{2xi} + \cancel{2xi} - 4i^2)\cdot(x^2 - \cancel{2xi} + \cancel{2xi} - 4i^2)\cdot(x - 1/2) = 0$

$(x^2 + 4)\cdot(x^2 + 4)\cdot(x - 1/2) = 0$

$(x^4 + 4x^2 + 4x^2 + 16)\cdot(x - 1/2) = 0$

$(x^4 + 8x^2 + 16)\cdot(x - 1/2) = 0$

$x^5 + 8x^3 + 16x - \dfrac{x^4}{2} - 4x^2 - 8 = 0 \ .(2)$ para eliminar a fração

$\boxed{P(x) = 2x^5 - x^4 + 16x^3 - 8x^2 + 32x - 16 = 0}$

5. Empregando as relações de Girard, resolva a equação $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$, sabendo que uma raiz é $1 - i$.

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$

$x_1 = (1 - i) \qquad x_3 = ?$

$x_2 = (1 + i) \qquad x_4 = ?$

→ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$

$(1 - i) + (1 + i) + x_3 + x_4 = -\dfrac{(-4)}{1}$

$2 + x_3 + x_4 = 4 \rightarrow x_3 + x_4 = 2$

→ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{e}{a}$

$(1 - i)\cdot(1 + i)\cdot x_3 \cdot x_4 = -\dfrac{2}{1}$

$(1^2 + i - i - i^2).\ x_3 \cdot x_4 = -2$

$2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -2 \rightarrow x_3 \cdot x_4 = -1$

Temos que $x_3 + x_4 = 2$ e $x_3 \cdot x_4 = -1$

$x_3 = -\dfrac{1}{x_4}$

$-\dfrac{1}{x_4} + x_4 = 2 \rightarrow -1 + x_4^2 = 2x_4$

$x_4^2 - 2x_4 - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1\cdot(-1)$

$\Delta = 8$

$x_4 = \dfrac{-(-2) \pm 2\sqrt{2}}{2}$ ($\sqrt{8}$)

$\boxed{x_4 = 1 \pm \sqrt{2}}$

2 raízes: x_3 e x_4

$\boxed{x_3 = 1 - \sqrt{2}, \ x_4 = 1 + \sqrt{2}}$

6. Qual é o grau mínimo que pode ter uma equação de coeficientes reais que admite a raiz simples 1 e a raiz dupla $2 + i$?

$P(x) = \underbrace{(x - 1)}_{\substack{\text{raiz simples} \\ x = 1}} . \underbrace{(x - (2+i))^2}_{\substack{\text{raiz dupla} \\ 2+i}} \cdot \underbrace{(x - (2-i))^2}_{\substack{\text{raiz dupla} \\ 2-i}}$

z

São 5 raízes, portanto o menor grau possível é 5.

7. Calcule os números reais p e q de modo que a equação $2x^2 - px + q = 0$ admita a raiz complexa $z = 1 + i$.

$2x^2 - px + q =$

$x_1 = \underbrace{1+i}_{z} \rightarrow$ logo, $x_2 = \underbrace{1-i}_{\bar{z}}$

$(x - (1+i)).(x - (1-i) = 2x^2 - px + q = 0$

$x^2 - x - \cancel{xi} - x + 1 + \cancel{i} + \cancel{xi} - \cancel{i} - i^2 = 2x^2 - px + q$

$2.(x^2 - 2x + 2) = 2x^2 - px + q$

$2x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - px + q$

$\boxed{\begin{array}{l} p = 4 \\ q = 4 \end{array}}$