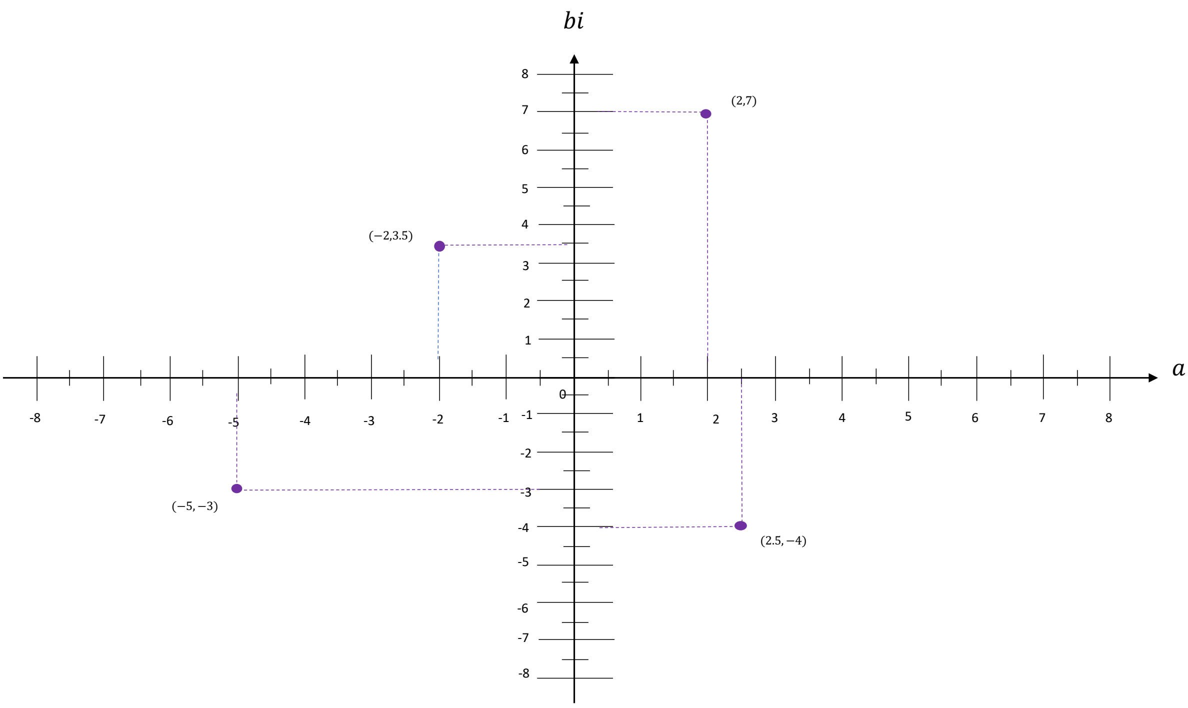
FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

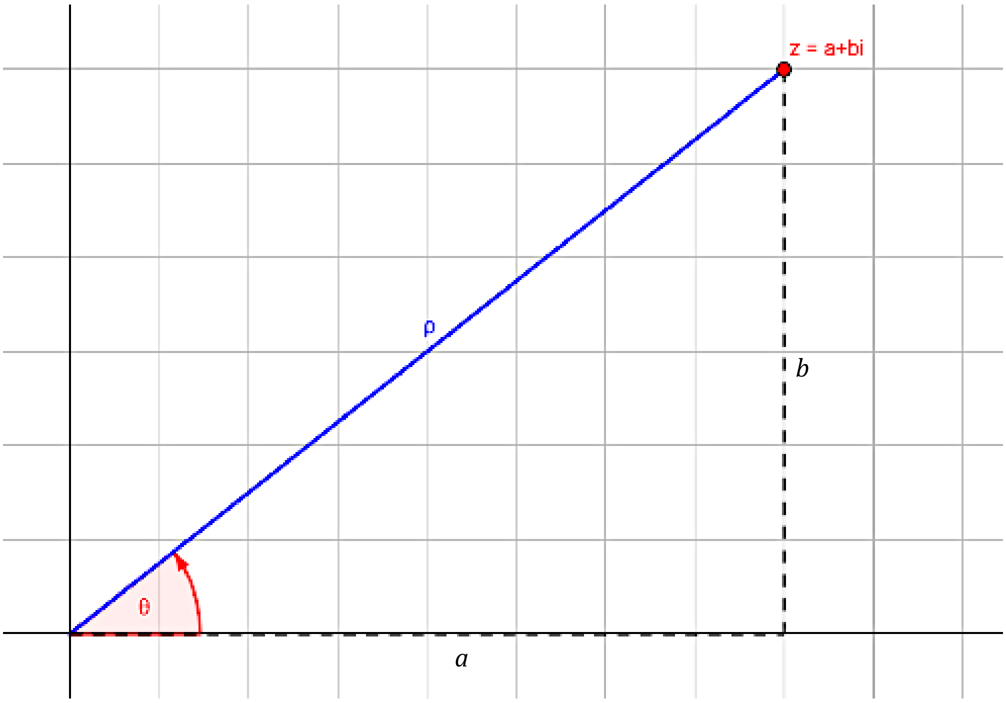
Um mesmo objeto matemático pode ser representado de vários modos. Para os números complexos, além de sua representação algébrica, existe também sua representação trigonométrica (ou polar). Sim, esse nome se dá pela associação dos números complexos com os conhecidos seno e cosseno.

Essa representação é obtida por meio do Plano Complexo, também chamado de Plano de Argand-Gauss. Esse plano é constituído por dois eixos ortogonais, assim como o plano cartesiano. Na verdade, é o mesmo plano, com a seguinte adaptação: o eixo das abscissas agora é o eixo da parte real dos números complexos (*eixo real*) e o eixo das ordenadas é o eixo da parte imaginária (*eixo imaginário*).



Por exemplo, os pares representados no plano (-5,-3), (2,7), (2.5,-4) e (-2,3.5) correspondem aos números complexos z_1=-5-3i, z_2=2+7i, z_3=2.5-4i e z_1=-2+3.5i, respectivamente.

Para cada ponto no plano complexo $z=a+bi$ é possível construir um triângulo retângulo com catetos de tamanho a e b, conforme ilustrado na imagem abaixo, no qual o ponto vermelho representa o número complexo $z=a+bi$, a hipotenusa (segmento azul) sempre terá tamanho igual à $\rho=|z|$ e o ângulo formado entre a hipotenusa e o eixo real é θ. Como temos um triângulo retângulo, podemos calcular os valores de seno e cosseno, resultando em:



$$cos\theta = \frac{a}{\rho} \text{ e } sen\theta = \frac{b}{\rho}$$

Desta relação anterior obtermos que $a = \rho\, cos\, \theta$ e $b = \rho\, sen\, \theta$. Se substituirmos esses valores em z, temos:

$$z = a + bi = \ \rho \cos\theta + i\, \rho \operatorname{sen}\theta = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Seja $z{=}a{+}bi$ um número complexo. Sua representação na fórmula trigonométrica será:

$$z{=}\rho{\cdot}(cos\ \theta + i\ sen\ \theta\ )$$

no qual o valor de θ é determinado por $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$ e $\rho = |z|$.

Exemplo:

Sejam $z = 1 + \mathrm{i}$ e $w = 4\mathrm{i}$. Para determinarmos sua representação polar, iniciamos por calcular o módulo de cada um deles:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|w| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

Na sequência, devemos determinar o valor de θ de modo que $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$. Para o número $z = 1 + i$ temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 45° = \dfrac{\pi}{4}$$

Portanto, o valor de θ cujo $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e o $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ é $\theta = 45° = \dfrac{\pi}{4}$. Logo,

$$z = \sqrt{2}\cdot(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Para o número w=4i temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{0}{4} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = 90° = \dfrac{\pi}{2}$$

Portanto, o valor de θ cujo cos $\theta=0$ e o sen $\theta=1$ é $\theta = 90° = \dfrac{\pi}{2}$. Logo,

$$w = 4\cdot(\cos 90° + i\operatorname{sen} 90°) = 4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

OPERAÇÕES ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Multiplicação de números complexos na forma polar

Sejam $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$ dois números complexos, cujas representações polares são $z_1 = \rho_1\cdot(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2\cdot(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$. O produto $z_1.z_2$ será:

$$z_1.z_2 = \rho_1\cdot(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\cdot\rho_2\cdot(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$

$$z_1.z_2 = (\rho_1.\rho_2)\cdot(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2))$$

Vamos aplicar $z_1 = \sqrt{2}\cdot(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)$ e $z_2 = 4\cdot(\cos 90° + i\operatorname{sen} 90°)$, o produto $z_1.z_2$ será:

$$z_1.z_2 = \sqrt{2}\cdot(\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)\cdot 4\cdot(\cos 90° + i\operatorname{sen} 90°)$$

$$z_1.z_2 = \left(\sqrt{2}.4\right)\cdot(\cos(45° + 90°) + i\operatorname{sen}(45° + 90°))$$

$$z_1.z_2 = 4\sqrt{2}\cdot(\cos(135°) + i\operatorname{sen}(135°))$$

Divisão de números complexos na forma polar

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos, cujas representações polares são $z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$. O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}{\rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

Vamos aplicar $z_1 = 10 \cdot (\cos 80° + i\,\mathrm{sen}\,80°)$ e $z_2 = 6 \cdot (\cos 35° + i\,\mathrm{sen}\,35°)$, O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{6} \cdot \frac{(\cos 80° + i\,\mathrm{sen}\,80°)}{(\cos 35° + i\,\mathrm{sen}\,35°)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{5}{3}\right) \cdot (\cos(80° - 35°) + i\,\mathrm{sen}(80° - 35°))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3} \cdot (\cos(45°) + i\,\mathrm{sen}(45°))$$

ANOTAÇÕES