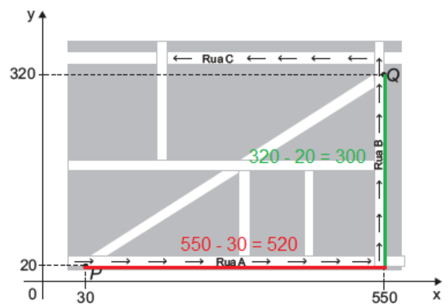
Resolução – Treinamento ENEM
S02.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

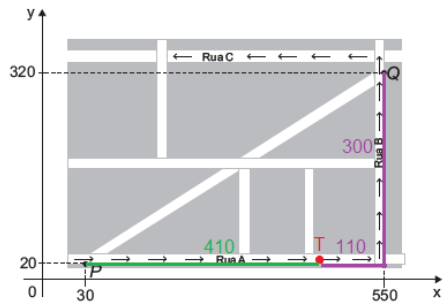
Item 01 ==

A nova parada T deverá estar exatamente na metade da distância percorrida entre P e Q. Então, nosso primeiro passo é descobrir quanto é a distância entre P e Q, que será a diferença entre suas coordenadas no gráfico apresentado:



Portanto, a distância percorrida na horizontal será 520, e na vertical será 300, totalizando um deslocamento de 820. Com isso, nós sabemos que o ponto T terá que estar na metade dessa distância, ou seja, a 410 de distância tanto do ponto P quanto do Q.

Partindo do ponto P, se afastar 410 no sentido da rota do ônibus fará com que o ponto T fique nessa posição:



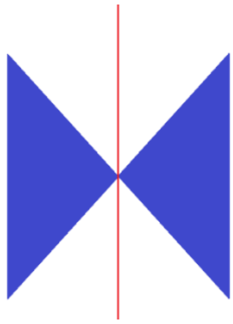
E, podemos ver que, de fato, ele está a 410 de ambos os pontos (410 = 300 + 110). Pela imagem, vemos que a coordenada y do ponto T é 20, então ficamos entre as alternativas A, C e E. O Ponto T também está 410 à frente do ponto P, que está no x = 30, logo T estará no x = 440, e ficamos então com a **Letra E**

Item 02 ==

A primeira coisa que temos que perceber é que a anticlepsidra é a região externa aos dois cilindros. Vamos fazer uma secção vertical da anticlepsidra a partir do seguinte plano:

Com isso, a secção que obteremos da anticlepsidra será a seguinte imagem:

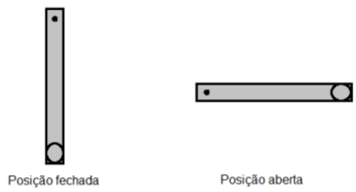
E podemos traçar um eixo de simetria nessa imagem, que também se tornará o eixo de rotação para a formação da anticlepsidra:



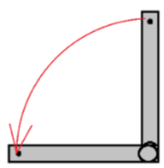
Com isso, percebemos que a figura a ser rotacionada sobre esse eixo é esse triângulo "de lado", assim como está na **Letra B.**

Item 03 ==

Se olharmos apenas para a haste com o ponto preto, ela é um segmento preso num eixo de rotação:



E a distância entre o ponto preto e o eixo de rotação é sempre constante, porque é o próprio comprimento de haste. Qual figura é caracterizada por um ponto se movendo, mantendo sempre a mesma distância de um ponto central? Uma circunferência! Portanto, a figura que o movimento desse ponto preto desenhará na parede será um arco de circunferência, conforma a imagem:



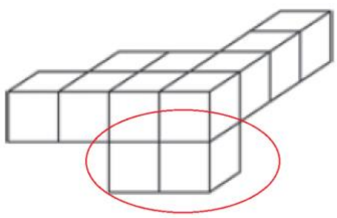
E ficamos com a **Letra A.**

Resolução – Treinamento ENEM
S02.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

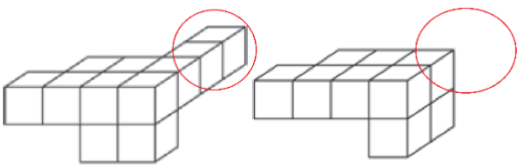
Item 04 ===

Vamos analisar cada item um a um, por eliminação, de trás pra frente:

Não pode ser a Letra E, porque os dois cubos embaixo estão virados pra esquerda, mas precisaram estar apontando para a parte de trás do cubo para se encaixar:

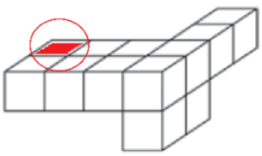


Não pode ser a Letra D por que ficaram faltando os dois cubinhos em cima pra completar a linha da profundidade da peça:



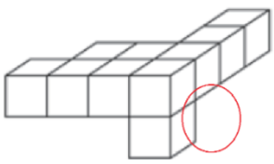
Como está na Letra E   E ficou faltando na Letra D

Na Letra C, tem um cubinho a mais na lateral direita que vai impedir de encaixar perfeitamente:



Cubo extra da Letra C

E na Letra B só tem um cubo embaixo, sendo que nós precisamos de dois pra completar a imagem:

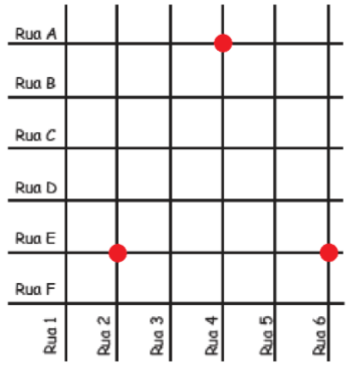


Faltou esse cubo na Letra B

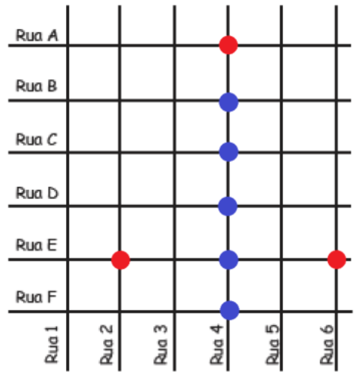
Com isso, ficamos com a **Letra A.** Se ainda não ficou claro pra você, tente identificar as diferenças entre as outras alternativas e a Letra A, pra identificar o que ficou errado em cada uma.

Item 05 ===

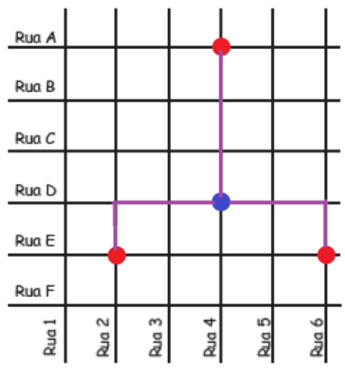
O imóvel ideal dessa família é equidistante de 3 pontos: o trabalho da mãe (6E), o consultório do pai (2E) e a escola (4A). Vamos marcar esses pontos no mapa antes de continuar:



Com isso, a gente sabe que o imóvel tem que estar na rua 4, pra estar equidistante tanto do trabalho da mãe quanto do pai. Com isso, nós temos 5 opções para o futuro imóvel:



De todas essas opções marcadas em azul para o futuro imóvel, só em uma delas a distância a todos os pontos vermelhos é igual:



Esse ponto fica a três blocos de distância de qualquer um dos 3 pontos vermelhos, e está no cruzamento entre as Ruas D e 4, portanto ficamos com a **Letra C.**

Resolução – Treinamento ENEM
S02.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 06 ==

Para resolvermos esse item teríamos que perceber que se trata de um poliedro de Platão e, portanto, podemos utilizar a fórmula de Euler: $V+F=A+2$, onde V representa o número de vértices do poliedro, F representa o número faces do poliedro e A representa o número de arestas do poliedro. Assim, substituindo as respectivas quantidades de arestas e vértices desse poliedro obtemos que a quantidade de faces desse poliedro é:

$$V+F=A+2$$
$$20+F=30+2$$
$$F=32-20$$
$$F=12\,faces$$

Resposta: Letra B.

Item 07 ==

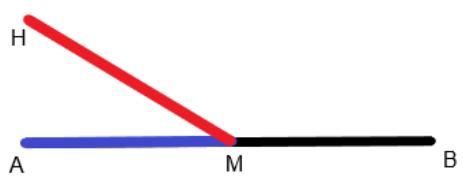
Para fazermos a projeção ortogonal do caminho percorrido pela lagartixa, vamos fazer a projeção desse caminho em passos, obtendo:

- 1º passo: a lagartixa sai de B e vai até A.

- 2º passo: a lagartixa sai de A e vai até M (ponto médio de EF), se deslocando pela parede.

Observação: Nesse 2º passo, a projeção ortogonal do deslocamento de A até o ponto M ocorre exatamente sobre parte da projeção de A até B.

- 3º passo: a lagartixa sai de M e vai até H pelo teto.



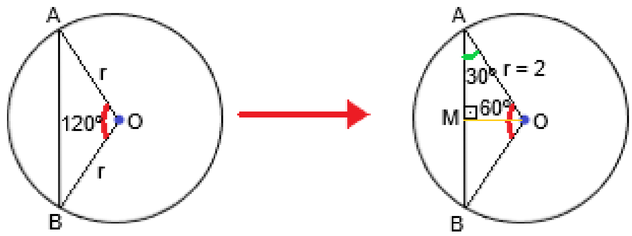
Dessa forma, temos que a projeção ortogonal dos deslocamentos da lagartixa levam a formação da imagem que temos na letra B.

Resposta: Letra B.

Item 08 ==

Para que possamos calcular a área aproximada do quadrilátero ABCD, devemos descobrir quanto vale os segmentos AB e BC desse retângulo.

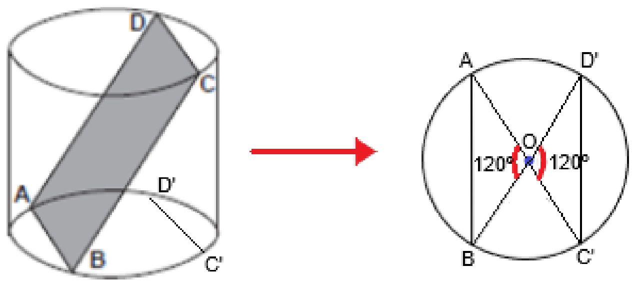
Primeiramente vamos calcular quanto vale o segmento AB, a partir da informação do texto de que o menor arco que por AB é de 120º, obtendo a imagem abaixo.



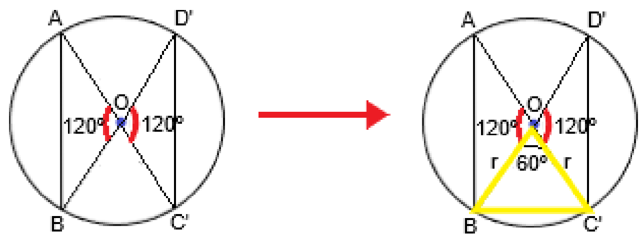
A partir da imagem acima e sabendo $AB=2\cdot AM$, temos que AB vale:

$$\frac{AM}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{1}\rightarrow AM=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AM=\sqrt{3}\Rightarrow AB=2\sqrt{3}$$

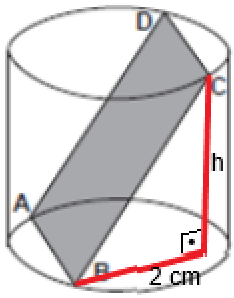
Agora para calcularmos o seguimento BC, devemos usar a informação de que DC também forma um arco menor de 120º, dessa forma ao fazermos a projeção ortogonal desse segmento no círculo da base obtemos a seguinte figura.



Com isso conseguimos calcular a distância entre esses segmentos (distância entre AB e C'D') que é de 2 cm como podemos ver na imagem abaixo já que o raio vale 2 cm e o triângulo OBC' é isoscéles:



Assim sabendo que essa distância é de 2 cm e que a altura vale $2\sqrt{2}\,cm$, conseguimos calcular quanto vale o segmento BC, por meio de Pitágoras como vemos abaixo, obtendo:



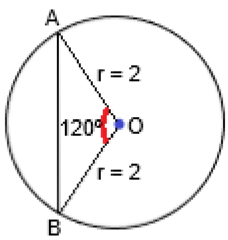
$$BC^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow BC^2 = 4 + 4 \cdot 2$$
$$BC^2 = 4 + 8 \rightarrow BC^2 = 12$$
$$BC = \sqrt{4 \cdot 3} \rightarrow BC = \sqrt{2^2 \cdot 3}$$
$$BC = 2\sqrt{3}\,cm$$

Por fim, como $AB = 2\sqrt{3}$ e $BC = 2\sqrt{3}$ temos que a área do quadrilátero ABCD vale:

$$\text{Área quadrilátero } ABCD = AB \cdot BC$$
$$\text{Área quadrilátero } ABCD = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$
$$\text{Área quadrilátero } ABCD = 4 \cdot 3$$
$$\text{Área quadrilátero } ABCD = 12\,cm^2$$

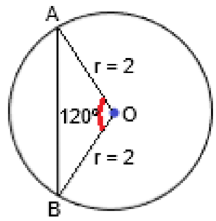
Resposta: Letra D.

Observação 1: Uma outra forma de calcularmos AB mais diretamente, mas não muito comum e que o conteúdo quase não é abordado no ENEM seria usando lei dos cossenos ($a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\theta)$), obtendo que AB vale:



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos(120^o)$$
$$AB^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot - \cos(60^o)$$
$$AB^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot - \frac{1}{2}$$
$$AB^2 = 4 + 4 + 4 \rightarrow AB^2 = 4 \cdot 3$$
$$AB = \sqrt{2^2 \cdot 3} \rightarrow AB = 2\sqrt{3}\,cm$$

Observação 2: Uma outra forma de calcularmos AB mais diretamente, mas não muito comum e que o conteúdo quase não é abordado no ENEM seria usando lei dos senos ($\frac{A}{sen(\alpha)} = \frac{B}{sen(\beta)} = \frac{C}{sen(\theta)} = 2R$), obtendo que AB vale:



$$\frac{AB}{sen(120^o)} = 2R \rightarrow \frac{AB}{sen(60^o)} = 2 \cdot 2$$
$$\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \rightarrow AB = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AB = 2\sqrt{3}\,cm$$

Observação 3: caso você tenha calculado a distancia OM na primeira imagem e que é 1 cm, também teríamos pulado varias etapas para a resolução do exercício e seria bem mais rápido. Uma vez que saberíamos rapidamente que a distancia entre os segmentos AB e C'D' é de 2 cm.

Item 09 ===

Nessa questão para calcularmos qual deve ser a altura (h) do frasco cilíndrico, devemos igualar o volume do frasco esférico ($\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R)^3$) com o volume do frasco cilíndrico ($\pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h$), obtendo que a altura (h) do frasco cilíndrico vale:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R)^3 = \pi \cdot \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot h \rightarrow \frac{4}{3} \cdot R^3 = \frac{R^2}{9} \cdot h$$
$$h = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \frac{9}{R^2} \rightarrow h = 4 \cdot 3 \cdot R$$
$$h = 12 \cdot R$$

Resposta: Letra E.

Item 10 ===

Primeiro é importante estarmos atentos para perceber em qual sentido a folha foi dobrada da figura 1 para a figura 2, que conforme fala no texto e também podemos observar pela imagem os pontos B e C da figura 1 passaram a está sobre os pontos A e D na figura 2, sendo os pontos G e F os respectivos pontos médios dos segmentos DC e AB.

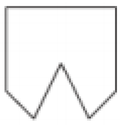
Percebendo esses detalhes acima e ainda que:

- os cortes estão conectados

Resolução – Treinamento ENEM
S02.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

- o ponto O está acima do ponto M
- os triângulos OFN e AMN, na figura 2, representam o corte feito no centro da folha e os cortes nas extremidades, respectivamente.

Obtemos que a bandeirinha formada ao abrimos a folha da figura 2 depois de feitos os cortes dos triangulo OFN e AMN é a imagem abaixo.



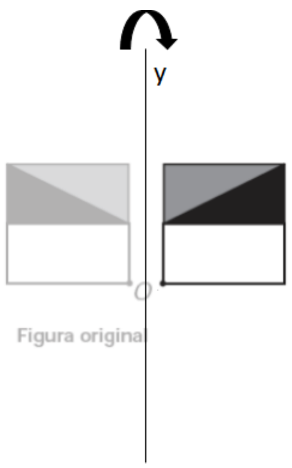
Resposta: Letra E.

Item 11 ==

A simetria em relação ao ponto O, pode ser feita em dois passos. O primeiro passo é uma simetria em relação ao eixo y (vertical) e o segundo passo é uma simetria em relação ao eixo x (horizontal). Mostrando esses passos abaixo:

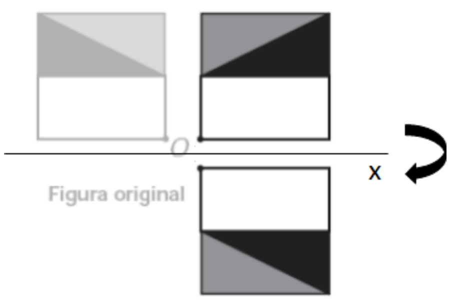
<u>1º Passo:</u>

Simetria/espelhamento em relação ao eixo y:



<u>2º Passo:</u>

Simetria/espelhamento em relação ao eixo x:



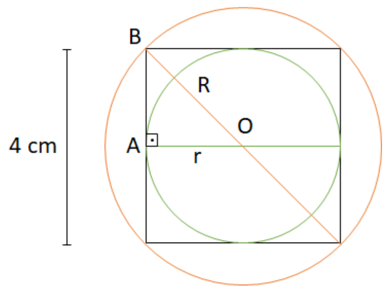
Resposta: Letra E.

Item 12 ==

Nessa questão faremos cada caso separado, primeiro, o tamanho máximo da perfuração circular para que nenhuma peça das outras peças caiba nela. Depois, o tamanho mínimo da perfuração para que a peça de base circular não caiba nas demais perfurações.

Indicaremos por T o tamanho do raio de perfuração.

<u>Perfuração quadrada (L = 4 cm):</u>



Na figura acima, indicamos pela circunferência maior (laranja) de raio R, o tamanho máximo da perfuração circular para que a peça quadrada não caiba nela.

Na mesma figura acima, também indicamos pela circunferência menor (verde) de raio, o tamanho mínimo da perfuração para que a peça de base circular não caiba na perfuração quadrada.

Agora, calculando R e r a partir da figura:

Temos que o diâmetro da circunferência menor vale 2r e é igual ao lado do quadrado que vale 4 cm, dessa forma:

$2r = 4\,\text{cm}$

$r = 2\,\text{cm}$

Com isso o limite mínimo para a peça circular é 2 cm.

Na figura temos o triângulo retângulo OAB, retângulo em A. Fazendo o teorema de Pitágoras nele:

$AB^2 + AO^2 = OB^2$

$2^2 + r^2 = R^2$

$2^2 + 2^2 = R^2$

$4 + 4 = R^2$

$8 = R^2$

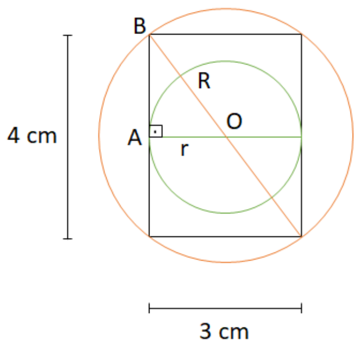
$R = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

Com base apenas na peça quadrada temos que T tem que satisfazer as seguintes condições:

$r < T < R \rightarrow 2\,\text{cm} < T < 2\sqrt{2}\,\text{cm}(\text{I})$

Resolução – Treinamento ENEM
S02.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Perfuração retangular (B = 3 cm; H = 4 cm):



Na figura acima, indicamos pela circunferência maior (laranja) de raio R, o tamanho máximo da perfuração circular para que a peça retangular não caiba nela.

Na mesma figura acima, também indicamos pela circunferência menor (verde) de raio, o tamanho mínimo da perfuração para que a peça de base circular não caiba na perfuração retangular.

Agora, calculando R e r a partir da figura:

Temos que o diâmetro da circunferência menor vale 2r e é igual à base do retângulo que vale 3 cm, dessa forma:

$$2r = 3\,\text{cm}$$

$$r = \frac{3}{2} = 1{,}5\,\text{cm}$$

Com isso o limite mínimo para a peça circular é 1,5 cm.

Na figura temos o triângulo retângulo OAB, retângulo em A. Fazendo o teorema de Pitágoras nele:

$$AB^2 + AO^2 = OB^2$$

$$2^2 + r^2 = R^2$$

$$2^2 + 1{,}5^2 = R^2$$

$$4 + 2{,}25 = R^2$$

$$6{,}25 = R^2$$

$$R = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$$

$$**1{,}5^2 = (1+0{,}5)^2 =$$

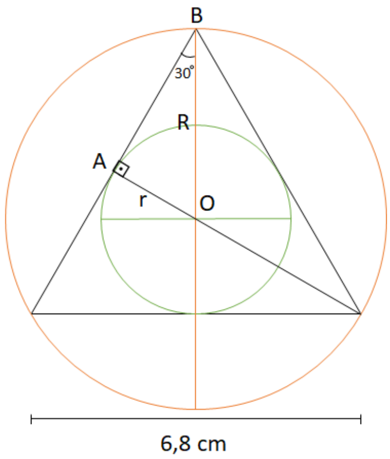
$$= (1^2 + 2\cdot 1\cdot 0{,}5 + 0{,}5^2) =$$

$$= 1+1+0{,}25 = 2{,}25**$$

Com base apenas na peça retangular temos que T tem que satisfazer as seguintes condições:

$$r < T < R \rightarrow 1{,}5\,\text{cm} < T < 2{,}5\,\text{cm}\,(\text{II})$$

Perfuração triangular (L = 6,8 cm):



Na figura acima, indicamos pela circunferência maior (laranja) de raio R, o tamanho máximo da perfuração circular para que a peça triangular não caiba nela.

Na mesma figura acima, também indicamos pela circunferência menor (verde) de raio, o tamanho mínimo da perfuração para que a peça de base circular não caiba na perfuração triangular.

Agora, calculando R e r a partir da figura:

A medida de AB é metade do lado do triângulo equilátero, pois a altura, nesse caso, divide o lado exatamente no meio, de forma que A é o ponto médio do lado.

$$AB = \frac{L}{2}$$

$$AB = \frac{6{,}8}{2} = 3{,}4\,\text{cm}$$

Na figura temos o triângulo retângulo OAB, retângulo em A. Utilizando a trigonometria do ângulo 30º:

Para R:

Pela figura: $\cos 30^\circ = \dfrac{AB}{BO = R}$; $\cos 30^\circ = \dfrac{3{,}4\,\text{cm}}{R}$

Pela trigonometria: $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Com isso: $\dfrac{3{,}4}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $R = \dfrac{6{,}8}{\sqrt{3}}$

Resolução – Treinamento ENEM
S02.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Para r:

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{AO}{BO = R}$$

Pela figura: $\text{sen}\,30^\circ = \dfrac{r}{R} = \dfrac{r}{\frac{6,8}{\sqrt{3}}}$

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{6,8}$$

Pela trigonometria: $\text{sen}30^\circ = \dfrac{1}{2}$

Com isso:
$$\frac{r\sqrt{3}}{6,8} = \frac{1}{2}$$
$$r = \frac{3,4}{\sqrt{3}}$$

Com base apenas na peça triangular temos que T tem que satisfazer as seguintes condições:

$$r < T < R \rightarrow \frac{3,4}{\sqrt{3}}\,\text{cm} < T < \frac{6,8}{\sqrt{3}}\,\text{cm (III)}$$

Juntando as três inequações achadas anteriormente (I), (II) e (III):

$$r < T < R \rightarrow 2\,\text{cm} < T < 2\sqrt{2}\,\text{cm (I)}$$

$$r < T < R \rightarrow 1,5\,\text{cm} < T < 2,5\,\text{cm (II)}$$

$$r < T < R \rightarrow \frac{3,4}{\sqrt{3}}\,\text{cm} < T < \frac{6,8}{\sqrt{3}}\,\text{cm (III)}$$

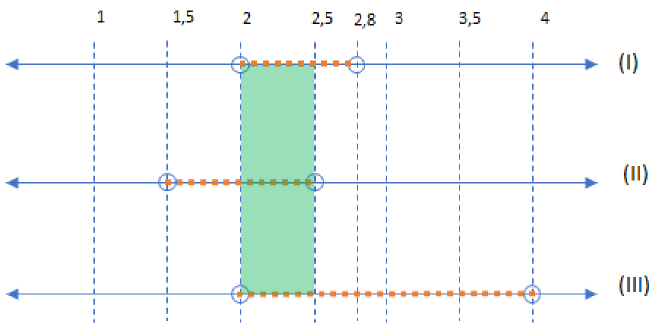
Substituindo $\sqrt{2}$ por 1,4 e $\sqrt{3}$ por 1,7 como indicado no enunciado:

$$r < T < R \rightarrow 2\,\text{cm} < T < 2,8\,\text{cm (I)}$$

$$r < T < R \rightarrow 1,5\,\text{cm} < T < 2,5\,\text{cm (II)}$$

$$r < T < R \rightarrow 2\,\text{cm} < T < 4\,\text{cm (III)}$$

Devemos agora achar a interseção desses intervalos:



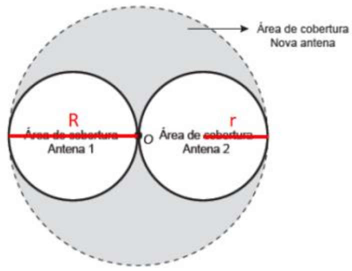
Pela figura acima podemos ver que o intervalo que satisfaz as condições impostas por (I), (II) e (III) é o [2; 2,5]. Logo, o raio da perfuração circular deve ser um número entre 2 e 2,5 cm.

Transformando para diâmetro, a serra copo deve ter um diâmetro entre 4 e 5 cm. Dessa forma o exemplar que se deve usar é a serra copo de 4,7 cm.

Resposta: Letra B.

Item 13 ==

Chamando de r o raio de cobertura das antenas que serão substituídas e de R o raio de cobertura da nova antena. Temos a figura abaixo:



Podemos perceber que o raio R é o dobro do raio r, logo:

$$R = 2r$$
$$R = 2 \cdot 2 = 4\,\text{km}$$

Calculando as áreas de cobertura inicial e final:

Área de cobertura inicial ($A_{inicial}$):

$$A_{inicial} = \pi r^2 \cdot 2\,(2\,\text{antenas})$$
$$A_{inicial} = \pi \cdot 2^2 \cdot 2$$
$$A_{inicial} = \pi \cdot 8 = 8\pi\,\text{km}^2$$

Área de cobertura final (A_{final}):

$$A_{final} = \pi R^2 \cdot 1\,(1\,\text{antena})$$
$$A_{inicial} = \pi \cdot 4^2 \cdot 1$$
$$A_{inicial} = \pi \cdot 16 = 16\pi\,\text{km}^2$$

Dessa forma, o aumento da área de cobertura foi de:

Resposta: Letra A.

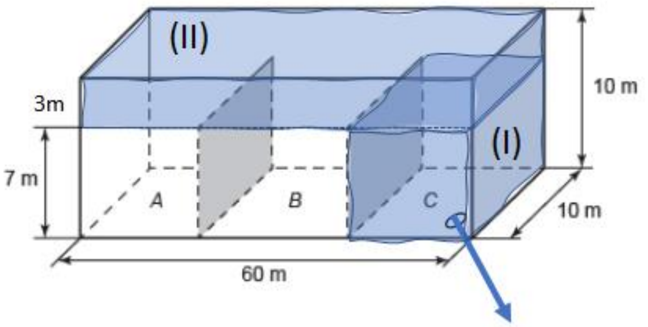
Item 14 ==

A figura 2 possui duas faces opostas, paralelas e iguais. Por definição, esse poliedro é um prisma. Como a base é um triângulo, logo, temos um prisma triangular reto.

Resposta: Letra E.

Item 15 ==

Na figura abaixo a seta azul indica o local do vazamento. Com isso, o volume de petróleo derramado será igual ao volume do compartimento C indicado por (I) e o volume acima dos três compartimento indicado por (II).



O volume acima dos três compartimentos (II) é dado por:

$$\text{Volume}_{(II)} = 3\,\text{m} \cdot 10\,\text{m} \cdot 60\,\text{m}$$

$$\text{Volume}_{(II)} = 1800\,\text{m}^3$$

Como os três compartimentos A, B e C possuem o mesmo volume, o volume do compartimento C (I) é dado pela diferença de volume entre o volume total do reservatório e o volume (II) calculado acima, dividido por 3:

$$\text{Volume}_{(I)} = \frac{\text{Volume}_{\text{Total}} - \text{Volume}_{(II)}}{3}$$

$$\text{Volume}_{(I)} = \frac{60\,\text{m} \cdot 10\,\text{m} \cdot 10\,\text{m} - 1800\,\text{m}^3}{3}$$

$$\text{Volume}_{(I)} = \frac{6000\,\text{m}^3 - 1800\,\text{m}^3}{3}$$

$$\text{Volume}_{(I)} = \frac{4200\,\text{m}^3}{3}$$

$$\text{Volume}_{(I)} = 1400\,\text{m}^3$$

O volume total derramado é a soma dos volume (I) e (II):

$$\text{Volume}_{\text{derramado}} = \text{Volume}_{(I)} + \text{Volume}_{(II)}$$

$$\text{Volume}_{\text{derramado}} = 1400\,\text{m}^3 + 1800\,\text{m}^3$$

$$\text{Volume}_{\text{derramado}} = 3200\,\text{m}^3$$

$$\text{Volume}_{\text{derramado}} = 3{,}2 \times 10^3\,\text{m}^3$$

Resposta: Letra D.