EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Vamos mostrar como resolver equações trigonométricas básicas, onde temos uma linha trigonométrica aplicada sobre uma função e igual a um determinado valor. Um exemplo desse tipo de equação é $\operatorname{sen}2x=\frac{1}{2}$. Normalmente, mesmo as equações trigonométricas mais complexas, terminam com a resolução de uma equação dessa forma.

1.1. EQUAÇÃO EM SENO

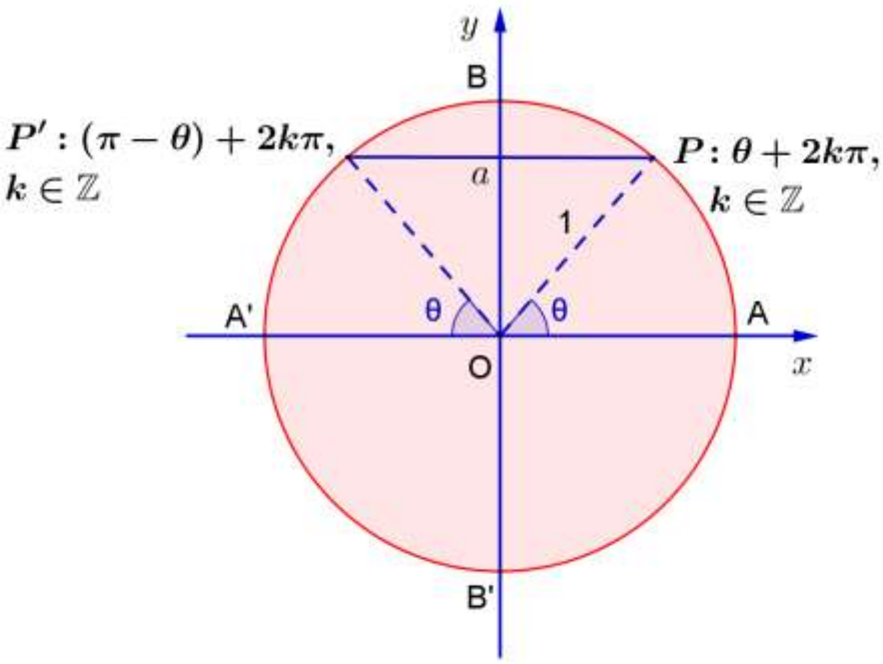
Seja $a\in\mathbb{R}$ tal que $|a|\le 1$, então

$$\mathbf{sen\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=arcsen\,a+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\ \vee\ \alpha=\pi-arcsen\,a+2k\pi,k\in\mathbb{Z}}$$

Notação resumida: $\alpha=k\pi+(-1)^k\cdot\operatorname{arcsen}a,\ k\in\mathbb{Z}$

Observe que representamos a solução da equação utilizando a função arco seno por se tratar de um caso geral. Na maioria dos problemas são apresentados ângulos cujos valores das linhas trigonométricas são conhecidos.

Ao resolver uma equação trigonométrica, é sempre útil identificar as soluções no ciclo trigonométrico, como na figura seguinte.



Exemplo: $\text{sen}2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12},k\in\mathbb{Z}$

Se, na equação $\text{sen}\alpha=a$, o valor de a for tal que $|a|>1$, então o conjunto solução da equação é vazio.

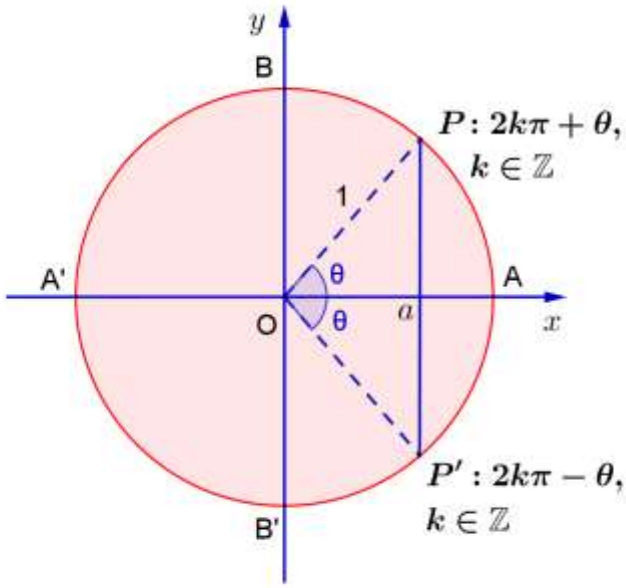
Exemplo: $\text{sen}x=2\Leftrightarrow S=\varnothing$

1.2. EQUAÇÃO EM COSSENO

Seja $a\in\mathbb{R}$ tal que $|a|\le 1$, então

$$\boldsymbol{\cos\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=2k\pi\pm\arccos a,k\in\mathbb{Z}}$$

A identificação das soluções da equação no ciclo trigonométrico encontra-se na figura seguinte.



Exemplo: $\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in\mathbb{Z}$

Se, na equação $\cos\alpha=a$, o valor de a for tal que $|a|>1$, então o conjunto solução da equação é vazio.

Exemplo: $\cos x=2\Leftrightarrow S=\varnothing$

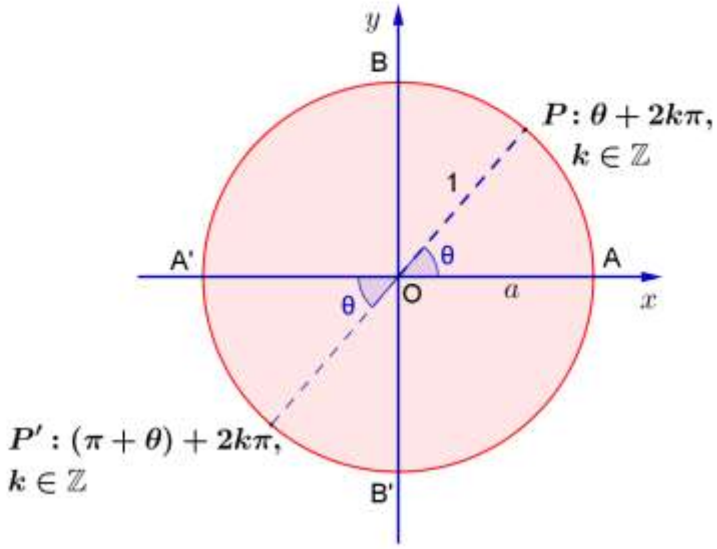
1.3. EQUAÇÃO EM TANGENTE

Seja $a\in\mathbb{R}$, então

$$\boldsymbol{\text{tg}\alpha=a\Leftrightarrow\alpha=\text{arctg}\,a+k\pi,k\in\mathbb{Z}}$$

Observe que a equação em tangente possui solução para qualquer valor de a real.

A identificação das soluções da equação no ciclo trigonométrico encontra-se na figura seguinte.



Exemplo: $\text{tg}2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2. EQUAÇÕES COM IGUALDADE DE LINHAS TRIGONOMÉTRICAS

2.1. EQUAÇÃO COM IGUALDADE DE SENOS

$$\mathbf{sen\alpha = sen\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \alpha + \beta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Observe que dois arcos que possuem o mesmo seno ou são côngruos $(\alpha - \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$ ou suas imagens são simétricas em relação ao eixo Oy.

No segundo caso, os ângulos seriam dados, sem perda de generalidade, por $\alpha = \theta + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}$ e $\beta = (\pi - \theta) + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}$, o que implica $\alpha + \beta = \pi + 2(k_1 + k_2)\pi = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Outra maneira de resolver essa equação é usando as **fórmulas de Werner**:

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}\beta \Leftrightarrow \text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \vee \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$$

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha+\beta=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Notação resumida: $\alpha=k\pi+(-1)^k\cdot\beta,\ k\in\mathbb{Z}$

Exemplo: $\operatorname{sen}2x=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ 2x+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

2.2. EQUAÇÃO COM IGUALDADE DE COSSENOS

$$\mathbf{\cos\alpha=\cos\beta \Leftrightarrow \alpha\pm\beta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$$

Observe que dois arcos que possuem o mesmo cosseno ou são côngruos $(\alpha-\beta=2k\pi, k\in\mathbb{Z})$ ou suas imagens são simétricas em relação ao eixo Ox.

No segundo caso, os ângulos seriam dados, sem perda de generalidade, por $\alpha=\theta+2k_1\pi, k_1\in\mathbb{Z}$ e $\beta=-\theta+2k_2\pi, k_2\in\mathbb{Z}$, o que implica $\alpha+\beta=2(k_1+k_2)\pi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

A notação $\alpha\pm\beta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ representa a união das soluções de ambos os casos.

Outra maneira de resolver essa equação é usando as **fórmulas de Werner**:

$$\cos\alpha=\cos\beta \Leftrightarrow \cos\alpha-\cos\beta=0 \Leftrightarrow -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0 \vee \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha+\beta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha-\beta=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Exemplo: $\cos 3x=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x+\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z} \\ 3x-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Exemplo: (ITA 1993) O conjunto das soluções da equação $\operatorname{sen}5x=\cos 3x$ contém o seguinte conjunto:

a) $\left\{\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ b) $\left\{\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ c) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ e) $\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

RESOLUÇÃO: e

$$\operatorname{sen}5x=\cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=\cos 3x \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}-5x\right)\pm 3x=2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z} \vee x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\supset\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

2.3. EQUAÇÃO COM IGUALDADE DE TANGENTES

$$\mathbf{tg\alpha=tg\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta=k\pi, k\in\mathbb{Z}}$$

Observe que dois arcos que possuem o mesmo cosseno ou são côngruos $(\alpha-\beta=2k\pi, k\in\mathbb{Z})$ ou suas imagens são simétricas em relação à origem dos eixos ordenados.

No segundo caso, os ângulos seriam dados, sem perda de generalidade, por $\alpha=(\pi+\theta)+2k_1\pi, k_1\in\mathbb{Z}$ e $\beta=\theta+2k_2\pi, k_2\in\mathbb{Z}$, o que implica $\alpha-\beta=\pi+2(k_1-k_2)\pi=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

A notação $\alpha-\beta=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ representa a união das soluções de ambos os casos

Outra maneira de resolver essa equação é usando as **fórmulas de Werner**:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Exemplo: $\operatorname{tg}\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}2x \Leftrightarrow \left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-2x=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

3. OUTRAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

3.1. EQUAÇÃO DO TIPO: $\mathbf{a\,sen\,x+b\cos x=c}$

Seja a equação $a\operatorname{sen}x+b\cos x=c$, onde $a\cdot b\neq 0$, temos:

$$a\operatorname{sen}x+b\cos x=c \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Seja o ângulo θ tal que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, então

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}x + \cos\theta\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Se $-1 \le \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$, então $x = \theta \pm \arccos\left(\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.2. EQUAÇÃO DO TIPO: $a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen}x\cos x + c\cos^2 x = d$

Seja a equação $a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen}x\cos x + c\cos^2 x = d$, onde $abc \ne 0$, temos:

$$a\operatorname{sen}^2 x + b\operatorname{sen}x\cos x + c\cos^2 x = d\ \left(\div\cos^2 x\right) \Leftrightarrow a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg}x + c = d\sec^2 x$$

$$\Leftrightarrow a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg}x + c = d\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) \Leftrightarrow (a-g)\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg}x + (c-d) = 0$$

Observe que ao dividir a equação original por $\cos^2 x$, obtivemos uma nova equação em $\operatorname{tg}x$. Se a equação em $\operatorname{tg}x$ possuir raízes reais, então a expressão reduz-se a duas equações da forma $\operatorname{tg}x = p$.

3.3. EQUAÇÃO DO TIPO: $a(\operatorname{sen}x+\cos x) + b\operatorname{sen}x\cos x = c$

Vamos efetuar uma substituição de variável para resolver essa equação.

$$\operatorname{sen}x + \cos x = z \Rightarrow (\operatorname{sen}x+\cos x)^2 = z^2 \Leftrightarrow 1 + 2\operatorname{sen}x\cos x = z^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}x\cos x = \frac{z^2-1}{2}$$

Substituindo esses valores na equação original, temos:

$$a(\operatorname{sen}x+\cos x) + b\operatorname{sen}x\cos x = c \Leftrightarrow az + b\cdot\frac{z^2-1}{2} = c \Leftrightarrow bz^2 + 2az - (b+2c) = 0$$

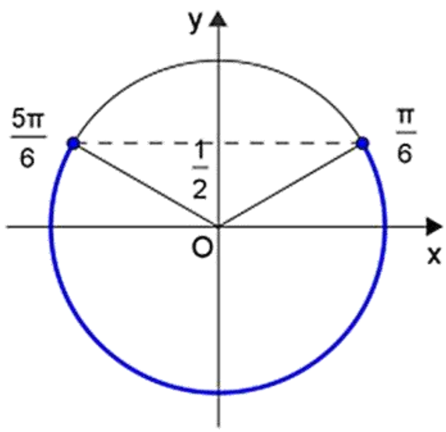
Basta agora resolver a equação em z e retornar a substituição, observando que $-\sqrt{2} \le \operatorname{sen}x + \cos x \le \sqrt{2}$ (vide a solução da equação do item 3.1).

4. INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para simplificar uma inequação trigonométrica são utilizadas as mesmas técnicas utilizadas nas equações trigonométricas., obtendo-se ao final uma inequação básica. Para resolver essa inequação, basta marcar as soluções da “equação” no ciclo trigonométrico e, posteriormente, identificar os intervalos que satisfazem à inequação.

Exemplo: Resolva a inequação $\operatorname{sen} x \le \frac{1}{2}$ em $[0, 2\pi]$.

Inicialmente, vamos marcar no ciclo trigonométrico as raízes de $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ que são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.



Os valores que satisfazem à inequação são aqueles cujo seno é menor ou igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, $S = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. A solução da equação $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1+\operatorname{sen} 2x$, onde $k \in \mathbb{Z}$, é:

a) $x=k\pi$

b) $x=2k\pi$

c) $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ ou $x=k\pi$

d) $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

e) $x=\frac{k\pi}{2}$

2. A área do polígono, cujos vértices são a representação no ciclo trigonométrico das soluções da equação $(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x)^2+(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)^2=1$, é:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) 2

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

3. (EsPCEx 1998) A soma das soluções da equação $\frac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}}=1$, para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

e) $\frac{5\pi}{6}$

4. (EsPCEx 2001) O número de soluções da equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \le x < 2\pi$, é

a) infinito

b) 4

c) 2

d) 1

e) 0

5. (EsPCEx 2002) Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w, ambos pertencentes ao 1º quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

a) $[0°, 15°]$

b) $[15°, 30°]$

c) $[30°, 45°]$

d) $[45°, 60°]$

e) $[60°, 90°]$

6. (EsPCEx 2005) Dadas as funções reais $f(x) = \text{sen}(2x)$ e $g(x) = \frac{1}{2}$ tal que $x \in [0, 2\pi]$. Então, o número de interseções entre os gráficos de f e g é:

a) 6

b) 2

c) 1

d) 4

e) 8

7. (EsPCEx 2010) O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

8. (EsPCEx 2015) 18) A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x)-\cos^2(x)-2\cos(x)+1=0$, que estão contidas no intervalo $[0,2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

9. (EN 2003) O número de soluções reais da equação $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=x-2$ é igual a n; assim, pode-se concluir que:

a) $n=0$

b) $n=1$

c) $n=2$

d) $n=3$

e) $n>3$

10. (EN 2004) O número de soluções da equação $(1-\cos x)+\frac{(1-\cos x)^2}{2}+\frac{(1-\cos x)^3}{4}+\ldots=2$ para x real, quando $0\le x\le 4\pi$ é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 6

11. (EN 2005) Os pontos $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$ são soluções do sistema de equações $\begin{cases}\text{sen}\,(x+y)+\text{sen}\,(x-y)=2\\ \text{sen}\,x+\cos\,y=2\end{cases}$ onde $x\in[0, 2\pi]$. A distância desde A até B é:

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

c) π

d) 2π

e) 3π

12. (EN 2006) No intervalo $[0, \pi]$ a equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ possui soma dos inversos das raízes igual à:

a) $\frac{15}{2\pi}$

b) $\frac{117}{10\pi}$

c) $\frac{15}{\pi}$

d) 2π

e) $\frac{117}{5\pi}$

13. (EN 2007) O conjunto de todos os valores de $\theta \in [0, \pi]$ que satisfazem ao sistema $\begin{cases} x^2 + x + \text{tg}\theta > \frac{3}{4} \\ \frac{1}{\ln\theta} + \frac{1}{1-\ln\theta} > 1 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, é

a) $]1, \pi[$

b) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

c) $\left]1, \frac{\pi}{2}\right[$

d) $\left]\frac{\pi}{2}, e\right[$

e) $]e, \pi[$

14. (EN 2008) Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = 2\text{sen}^2 x + 6\cos x$ e $g(x) = k + \cos 2x$, $k \in \mathbb{R}$. Se $f\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{19}{2}$, então a soma das soluções da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $\left]\frac{21\pi}{11}, \frac{16\pi}{5}\right[$ é

a) $\frac{13\pi}{6}$

b) $\frac{13\pi}{3}$

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) $\frac{25\pi}{6}$

e) $\frac{16\pi}{3}$

15. (EN 2009) O termo de mais alto grau da equação biquadrada $B(x)=0$ tem coeficiente igual a 1. Sabe-se que duas das raízes dessa equação são, respectivamente, o termo central do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6$ e a quantidade de soluções da equação $\text{sen}^2 x-6\,\text{sen}x\cos x+8\cos^2 x=0$ no intervalo $[0,2\pi]$. Pode-se afirmar que a soma dos coeficientes de $B(x)$ vale

a) -9

b) -6

c) 3

d) 7

e) 12

16. (EN 2011) Sejam A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x)=\sqrt{\frac{-1+2\,\text{sen}x}{1+2\,\text{sen}x}}$ no universo $[0,2\pi]$ e o conjunto solução da inequação $\frac{1}{\text{cossec}x}-\frac{1}{\sec x}>0$ para $0<x<\pi$, com $x\neq\frac{\pi}{2}$. Pode-se afirmar que $B-A$ é igual a

a) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{11\pi}{6}\right[$

b) $\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

c) $\varnothing$

d) $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[$

e) $\left]\frac{5\pi}{6},\pi\right[$

17. (EN 2012) Considere S, a soma das raízes da equação trigonométrica $4\text{sen}^3 x - 5\text{sen}x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0$, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Qual o valor de $\text{tg}\, S + \text{cossec}\, 2S$?

a) 2

b) 1

c) 0

d) -1

e) -2

18. (EN 2014) A soma das soluções da equação trigonométrica $\cos 2x + 3\cos x = -2$, no intervalo $[0, 2\pi]$ é

a) π

b) 2π

c) 3π

d) $\frac{5\pi}{3}$

e) $\frac{10\pi}{3}$

19. (EFOMM 2010) Considere a equação de incógnita real x: $2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos 4x$. Se $x_0 \in (0;\pi)$ é uma de suas soluções e x_0 centímetros é a medida da diagonal de um cubo, então a área da superfície total desse cubo, em cm^2, é igual a

a) $\frac{3}{8}\pi^2$

b) $\frac{1}{2}\pi^2$

c) 6

d) $\frac{27}{8}\pi^2$

e) $6\pi^2$

20. (EFOMM 2014) Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\text{sen}x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$. Então, o produto P e a soma S de todos os possíveis valores de $\text{tg}\, x$ são, respectivamente,

a) $P=1$ e $S=0$

b) $P=1$ e $S=5$

c) $P=-1$ e $S=0$

d) $P=-1$ e $S=5$

e) $P=1$ e $S=-5$

21. (AFA 2000) Os valores de $m\in\mathbb{R}$ para os quais a equação $\sqrt{2}(\text{sen}x-\cos x)=m^2-2$ admite soluções, são

a) $-1\le m\le 1$

b) $-2\le m\le 2$

c) $0\le m\le\sqrt{2}$

d) $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$

22. (AFA 2000) A inequação $2^{\text{sen}x}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}$, com $x\in[0,2\pi]$ e $\alpha=\frac{\log\sqrt{2}}{\log 2-\log 3}$, tem como solução os valores de x pertencentes a

a) $[0,\pi/3]\cup[2\pi/3,2\pi]$

b) $[0,\pi/2]\cup[3\pi/2,2\pi]$

c) $[0,\pi/6]\cup[5\pi/6,2\pi]$

d) $[0,4\pi/3]\cup[5\pi/6,2\pi]$

23. (AFA 2002) O conjunto dos valores reais de x que tornam verdadeira a desigualdade $\cos^2(x-\pi)\ge\pi$ é

a) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le-\sqrt{\pi}\text{ ou }x\ge\sqrt{\pi}\}$

b) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\sqrt{\pi}\le x\le\sqrt{\pi}\}$

c) $\mathbb{R}$

d) $\varnothing$

24. (AFA 2004) O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & \text{sen}a & 1\\ 4 & 1 & 2\text{sen}a\end{bmatrix}$ é igual ao menor valor da função $y=x^2-2x+1$. Então, o maior valor de a no intervalo $[0,2\pi]$ é

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{7\pi}{4}$

25. (AFA 2005) Considere m a raiz da equação $\cos 2x + 3\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 3 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$. O número $\operatorname{cotg} m - \sec 2m$ é

a) 0

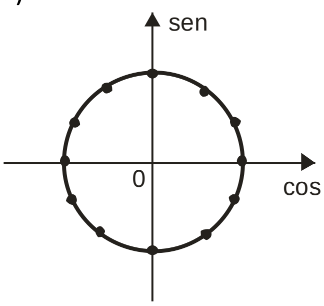
b) –1

c) 1

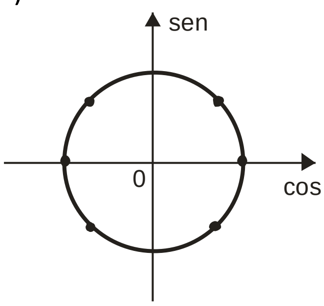
d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

26. (AFA 2010) Seja a função real f definida por $f(x) = \cos(4x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)$. Marque a alternativa que possui a melhor representação, no ciclo trigonométrico, de todas as raízes da função f.

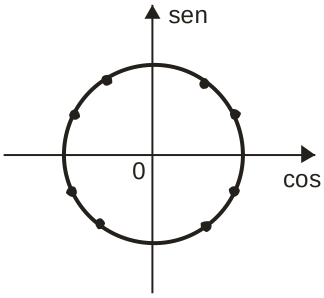
a)



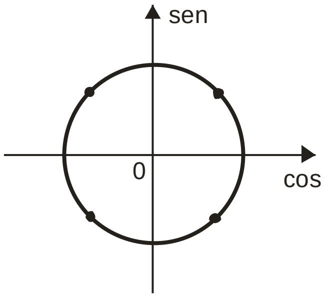
c)



b)

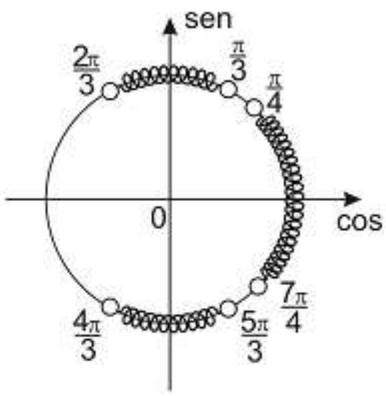


d)

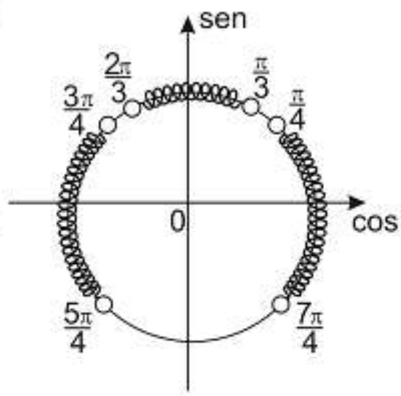


27. (AFA 2012) Sendo $x \in [0, 2\pi]$, a interpretação gráfica no ciclo trigonométrico para o conjunto solução da inequação $-8\text{sen}^4 x + 10\text{sen}^2 x - 3 < 0$ é dada por

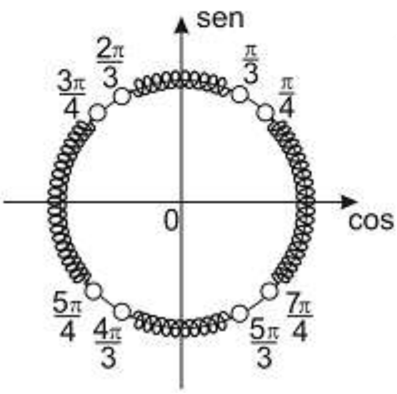
a)



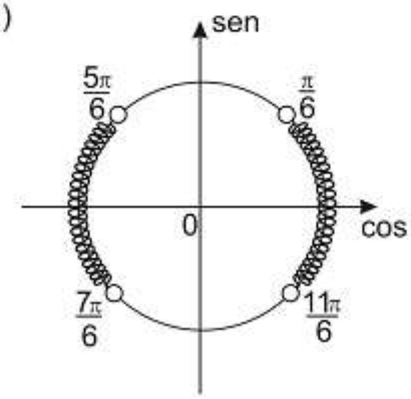
c)



b)



d)



28. (ITA 2009) A soma de todas as soluções distintas da equação $\cos 3x + 2 \cdot \cos 6x + \cos 9x = 0$ que estão no intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, é igual a:

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

29. (ITA 2007) Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sec(x)\geq 0$

a) $\pi / 2$

b) $\pi / 3$

c) $\pi / 4$

d) $\pi / 6$

e) $\pi / 12$

30. Resolvendo a equação $\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x+1=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, onde $x \in [0,2\pi[$, o número de soluções encontradas é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

e) 8

GABARITO

1. Inicialmente, observamos que $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $\text{tg}x \neq 1$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1+\text{tg}x}{1-\text{tg}x}=1+\text{sen}2x \Leftrightarrow \frac{1+\text{tg}x}{1-\text{tg}x}=1+\frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x} \Leftrightarrow \frac{1+\text{tg}x}{1-\text{tg}x}=\frac{(1+\text{tg}x)^2}{1+\text{tg}^2x}$$

I) $1+\text{tg}x=0 \Leftrightarrow \text{tg}x=-1 \Leftrightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

II) $1+\text{tg}x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{1-\text{tg}x}=\frac{1+\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x} \Leftrightarrow 1-\text{tg}^2x=1+\text{tg}^2x \Leftrightarrow \text{tg}x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, k \in \mathbb{Z}$

RESOLUÇÃO: C

2.

$$(\text{sen}x+\text{sen}2x+\text{sen}3x)^2+(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2 x+\text{sen}^2 2x+\text{sen}^2 3x+2\text{sen}x\,\text{sen}2x+2\text{sen}x\,\text{sen}3x+2\text{sen}2x\,\text{sen}3x+$$

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+2\cos x\cos 2x+2\cos x\cos 3x+2\cos 2x\cos 3x=1$$

$$\Leftrightarrow 1+1+1+2\cos(2x-x)+2\cos(3x-x)+2\cos(3x-2x)=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+2\cos x+1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+2\cos x+1=0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x=\pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Representando os pontos no ciclo trigonométrico, encontramos para vértices os pontos B, B' e A'. Assim, obtemos um triângulo de base 2 e altura 1 e que consequentemente possui área 1.

REFERÊNCIA: KöMaL – abril 2009

RESOLUÇÃO: B

3.

$$\frac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}}=1 \Leftrightarrow \frac{(25^2)^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}}=1 \Leftrightarrow 25^{2\cos^2 x}=25^{\cos x} \Leftrightarrow 2\cos^2 x=\cos x \Leftrightarrow \cos x\cdot(2\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \\ \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \quad \text{(lembre-se que } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\text{)}$$

Portanto, a soma das soluções é $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

RESOLUÇÃO: E

4. $\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x=1 \Leftrightarrow (\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)^2-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=1 \Leftrightarrow 1^2-\frac{1}{2}\cdot(2\operatorname{sen}x\cos x)^2=1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\operatorname{sen}2x)^2=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

$0\le x<2\pi \Rightarrow S=\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$

Portanto, há 4 soluções.

RESOLUÇÃO: B

5. $\cos k=2\cos w$

$k\in Q_I \Rightarrow 0\le\cos k\le 1 \Rightarrow 0\le 2\cos w\le 1 \Leftrightarrow 0\le\cos w\le\frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ\le w\le 90^\circ$

Note que no primeiro quadrante a função cosseno é decrescente.

RESOLUÇÃO: E

6. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}$

$k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

$k=2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$

$k=3 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}=\frac{17\pi}{12}$

Portanto, o número de interseções no intervalo $[0,2\pi]$ é 4.

RESOLUÇÃO: D

7.

$\cos\theta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

$$\frac{19\pi}{6}=3\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$\theta\in\left[0,\frac{19\pi}{6}\right]\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{3}\\ \theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\Rightarrow S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right\}\\ \theta=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}\end{array}\right.$$

Portanto, o número de arcos que satisfaz às condições é 3.

RESOLUÇÃO: C

8. Vamos fatorar a equação a fim de identificar suas raízes.

$$2\cos^3(x)-\cos^2(x)-2\cos(x)+1=0\Leftrightarrow\cos^2x(2\cos x-1)-1(2\cos x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow(2\cos x-1)\left(\cos^2x-1\right)=0\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\cos x+1)(\cos x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\ \vee\ \cos x=-1\ \vee\ \cos x=1$$

Como $x\in[0,2\pi]$, temos:

$$\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\ \vee\ x=\frac{5\pi}{3}$$
$$\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi$$
$$\cos x=1\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=2\pi$$

Logo, a soma das soluções em $[0,2\pi]$ é $\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\pi+0+2\pi=5\pi$.

RESOLUÇÃO: D

9. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=x-2\Rightarrow-1\le x-2\le1\Leftrightarrow1\le x\le3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le1$

Nesse intervalo, a função $y=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é estritamente decrescente e varia de $\operatorname{sen}1$ a $\operatorname{sen}\frac{1}{3}$.

Como a função $y=x-2$ é estritamente crescente e varia de -1 até 1 para $x\in[1,3]$, então as duas funções possuem um único ponto de interseção e, consequentemente, a equação possui uma única solução.

10. O lado esquerdo da equação é a soma de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1=(1-\cos x)$ e razão $q=\frac{(1-\cos x)}{2}$.

Como $-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-\cos x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \frac{1-\cos x}{2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le q \le 1$.

Assim, a soma da progressão geométrica é dada por $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{(1-\cos x)}{1-\frac{(1-\cos x)}{2}} = \frac{2\cdot(1-\cos x)}{1+\cos x}$.

Voltando à equação, temos:

$$(1-\cos x) + \frac{(1-\cos x)^2}{2} + \frac{(1-\cos x)^3}{4} + \ldots = 2 \Leftrightarrow \frac{2\cdot(1-\cos x)}{1+\cos x} = 2 \Leftrightarrow 1-\cos x = 1+\cos x \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \le x \le 4\pi \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$$

Portanto, o número de soluções da equação é 4.

RESOLUÇÃO: D

11. Aplicando a transformação de soma em produto, temos:

$$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot \cos y = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos y = 1$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \\ \operatorname{sen} x + \cos y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 2 \\ \operatorname{sen} x \cdot \cos y = 1 \end{cases}$$

Assim, $\operatorname{sen} x$ e $\cos y$ são soluções da equação quadrática $z^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$.

Portanto, $\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ e $\cos y = 1 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 2\pi$.

Os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ podem ser escritos da seguinte forma $A = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $B = \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$, o que implica $AB = 2\pi$.

RESOLUÇÃO: D

12. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1^2 - \frac{1}{2}\cdot(2\operatorname{sen} x \cos x)^2 = \frac{5}{8}$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 2x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0, \pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Portanto, a soma dos inversos das raízes é $\frac{6}{\pi}+\frac{3}{\pi}+\frac{3}{2\pi}+\frac{6}{5\pi}=\frac{117}{10\pi}$.

RESOLUÇÃO: B

13.
$$x^2+x+\text{tg}\theta>\frac{3}{4}, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+x+\left(\text{tg}\theta-\frac{3}{4}\right)>0, \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \Delta=1^2-4\cdot1\cdot\left(\text{tg}\theta-\frac{3}{4}\right)<0 \Leftrightarrow \text{tg}\theta>1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\ln\theta}+\frac{1}{1-\ln\theta}>1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln\theta}+\frac{1}{1-\ln\theta}-1>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln\theta+\ln\theta-\ln\theta+(\ln\theta)^2}{\ln\theta\cdot(1-\ln\theta)}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\ln\theta)^2-\ln\theta+1}{\ln\theta\cdot(1-\ln\theta)}>0 \Leftrightarrow 0<\ln\theta<1 \Leftrightarrow e^0<\theta<e^1 \Leftrightarrow 1<\theta<e$$

Observe que $(\ln\theta)^2-\ln\theta+1>0, \forall\theta\in\mathbb{R}$, pois $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$.

Fazendo a interseção dos dois intervalos obtidos, obtemos para solução do sistema $1<\theta<\frac{\pi}{2}$ ou $\left]1,\frac{\pi}{2}\right[$.

RESOLUÇÃO: C

14.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\text{sen}^2\frac{\pi}{3}+6\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+6\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

$$g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=k+\cos\left(2\cdot\frac{7\pi}{4}\right)=k+\cos\frac{7\pi}{2}=k+0=k$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)+g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{19}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}+k=\frac{19}{2} \Leftrightarrow k=5$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2\text{sen}^2x+6\cos x=5+\cos 2x \Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2x\right)+6\cos x=5+\left(2\cos^2x-1\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2x-3\cos x+1=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2\pi \\ \vee \\ \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}\end{array}\right.$$

Note que $\left]\frac{21\pi}{11},\frac{16\pi}{5}\right[=\left]2\pi-\frac{\pi}{11},3\pi+\frac{\pi}{5}\right[$.

Portanto, a soma das soluções é $2\pi+\frac{7\pi}{3}=\frac{13\pi}{3}$.

RESOLUÇÃO: B

15. O termo de ordem $(p+1)$ no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^6$ é $T_{p+1}=\binom{6}{p}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^p\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6-p}$. Como esse desenvolvimento tem $6+1=7$ termos, o termo central é o termo de ordem 4 que é dado por $T_4=\binom{6}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6-3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{10}}$.

$$\text{sen}^2x-6\,\text{sen}x\cos x+8\cos^2x=0\overset{\div\cos^2x}{\Leftrightarrow}\text{tg}^2x-6\,\text{tg}x+8=0\Leftrightarrow \text{tg}x=2\ \vee\ \text{tg}x=4$$

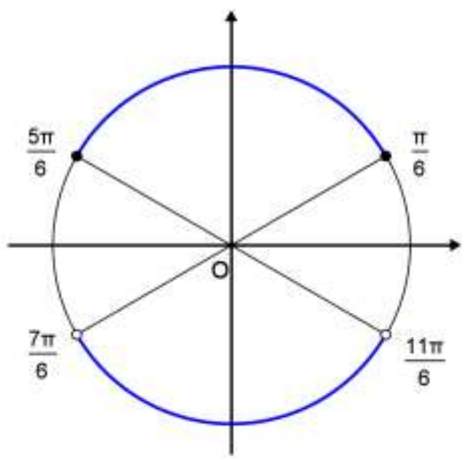
No intervalo $[0,2\pi]$ há 2 valores tais que $\text{tg}x=2$ e 2 valores tais que $\text{tg}x=4$. Logo, a equação trigonométrica possui 4 soluções no intervalo $[0,2\pi]$.

Sendo assim, a equação biquadrada $B(x)=0$ possui uma raiz $-\frac{2}{\sqrt{10}}$ e uma raiz 4. Portanto, suas 4 raízes são $\left\{-4,4,-\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right\}$. A equação do 2º grau resolvente tem raízes $4^2=16$ e $\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. Portanto, a equação biquadrada é dada por $B(x)=x^4-\left(16+\frac{2}{5}\right)x^2+16\cdot\frac{2}{5}=0\Leftrightarrow B(x)=x^4-\frac{82}{5}x^2+\frac{32}{5}=0$, cuja soma dos coeficientes é $1-\frac{82}{5}+\frac{32}{5}=-9$.

RESOLUÇÃO: A

16. O domínio da função é $f(x)=\sqrt{\frac{-1+2\,\text{sen}x}{1+2\,\text{sen}x}}$ no universo $[0,2\pi]$ é o conjunto solução da inequação

$$\frac{-1+2\,\text{sen}x}{1+2\,\text{sen}x}\ge0\Leftrightarrow \text{sen}x<-\frac{1}{2}\ \vee\ \text{sen}x\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[.$$



Logo, $A=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[$.

O conjunto solução da inequação $\frac{1}{\operatorname{cossec} x}-\frac{1}{\sec x}>0$, para $0<x<\pi$, com $x \neq \frac{\pi}{2}$ é

$$\frac{1}{\operatorname{cossec} x}-\frac{1}{\sec x}>0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x-\cos x>0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}>0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 0<x-\frac{\pi}{4}<\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$$

Como $0<x<\pi$ e $x \neq \frac{\pi}{2}$, então $B=\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Logo, $B-A=\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)-\left(\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[\right)=\left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$.

RESOLUÇÃO: E

17. $4\operatorname{sen}^3 x-5\operatorname{sen} x-4\cos^3 x+5\cos x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4(\operatorname{sen} x-\cos x)\left(\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x \cos x+\cos^2 x\right)-5(\operatorname{sen} x-\cos x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\operatorname{sen} x-\cos x)[4(1+\operatorname{sen} x \cos x)-5]=0 \Leftrightarrow(\operatorname{sen} x-\cos x)(2\operatorname{sen} 2x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\operatorname{sen} x-\cos x=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x=\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4} \\ \vee \\ 2\operatorname{sen} 2x-1=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6} \vee 2x=\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12} \vee x=\frac{5\pi}{12}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow S=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} S+\operatorname{cossec} 2S=\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}+\operatorname{cossec} \frac{3\pi}{2}=(-1)+(-1)=-2$$

RESOLUÇÃO: E

18.

$$\cos 2x+3\cos x=-2 \Leftrightarrow\left(2\cos^2 x-1\right)+3\cos x+2=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-1 \vee \cos x=-\frac{1}{2}$$

No intervalo $[0,2\pi]$, temos:

$$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi$$

$$\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{3}$$

Assim, o conjunto solução da equação é $S=\left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ e a soma das soluções é $\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=3\pi$.

RESOLUÇÃO: C

19. $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos 4x \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + \cancel{1} = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^4 x - 6\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 x\left(\cos^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$x_0 \in (0,\pi) \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$

Seja um cubo de aresta a, a sua diagonal mede $D = a\sqrt{3}$ e sua área total é $S_T = 6a^2$.

$$D = a\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \Rightarrow S_T = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

RESOLUÇÃO: B

20. Dividindo $\text{sen}x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$ por $\cos^2 x$ em ambos os lados, temos:

$$\text{sen}x \cdot \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{1}{5\cos^2 x} \Leftrightarrow \text{tg}x = \frac{\sec^2 x}{5} \Leftrightarrow 5\,\text{tg}x = 1 + \text{tg}^2 x \Leftrightarrow \text{tg}^2 x - 5\,\text{tg}x + 1 = 0$$

Analisando o discriminante da equação do 2° grau, temos: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$. Logo, a equação possui duas raízes reais.

Dessa forma, podemos afirmar que o produto P e a soma S de todos os possíveis valores de $\text{tg}x$ são $P = \frac{1}{1} = 1$ e $S = \frac{-(-5)}{1} = 5$.

RESOLUÇÃO: B

21.
$$\sqrt{2}(\text{sen}x - \cos x) = m^2 - 2 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{m^2 - 2}{2} \Leftrightarrow \text{sen}x\cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{m^2 - 2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m^2 - 2}{2}$$

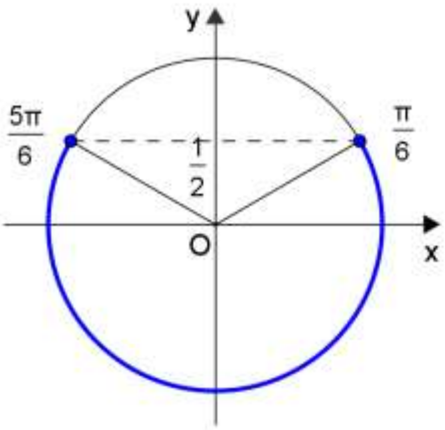
$$\Rightarrow -1 \le \frac{m^2 - 2}{2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{m^2}{2} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le m^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$$

RESOLUÇÃO: B

22. $\alpha=\dfrac{\log\sqrt{2}}{\log 2-\log 3}=\dfrac{\log\sqrt{2}}{\log\frac{2}{3}}=\log_{\frac{2}{3}}\sqrt{2}$

$2^{\operatorname{sen}x}\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\alpha}\Leftrightarrow 2^{\operatorname{sen}x}\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{\operatorname{sen}x}\le 2^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow \operatorname{sen}x\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{\pi}{6}\vee\dfrac{5\pi}{6}\le x\le 2\pi$

$\Rightarrow S=[0,\pi/6]\cup[5\pi/6,2\pi]$



COMENTÁRIO: Esta questão foi a 14a questão da prova de matemática do ITA 91/92.

RESOLUÇÃO: D

23. Sabe-se que $|\cos(x-\pi)|\le 1\Rightarrow|\cos^2(x-\pi)|\le 1<\pi$, então o conjunto solução da inequação $\cos^2(x-\pi)\ge\pi$ é $S=\varnothing$.

RESOLUÇÃO: D

24. O menor valor da função $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$ é $y_V=0$.

$\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & \operatorname{sen}a & 1\\ 4 & 1 & 2\operatorname{sen}a\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2a-1=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2a=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\operatorname{sen}a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, o maior valor de a no intervalo $[0,2\pi]$ é $2\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4}$.

RESOLUÇÃO: D

25.

$\cos 2x+3\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x-3=0\Leftrightarrow(1-2\operatorname{sen}^2x)+3\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x-3=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x-2=0$
$\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=-1\vee\operatorname{sen}x=2$ (não convém)

$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = m = \frac{3\pi}{2}$

$\text{cotg}\, m - \sec 2m = \text{cotg}\frac{3\pi}{2} - \sec 3\pi = 0 - (-1) = 1$

RESOLUÇÃO: C

26.

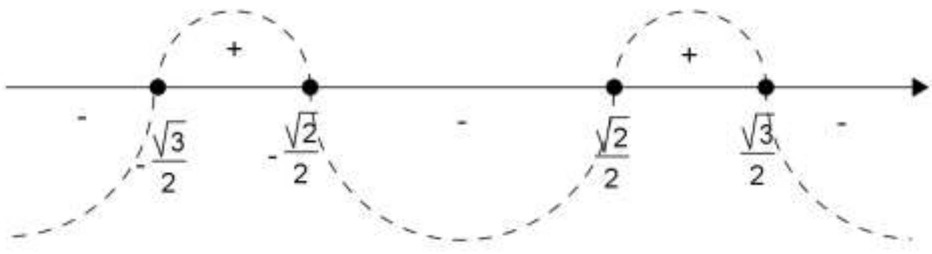
$$f(x) = \cos(4x) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) - \cos(6x) = 0 \Leftrightarrow -2\,\text{sen}\left(\frac{4x - 6x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{4x + 6x}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow -2\,\text{sen}(-x)\,\text{sen}(5x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x)\,\text{sen}(5x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 5x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Na primeira volta do ciclo trigonométrico, teremos 0, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, π, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ e $\frac{9\pi}{5}$.

RESOLUÇÃO: A

27. $-8\,\text{sen}^4 x + 10\,\text{sen}^2 x - 3 < 0 \Leftrightarrow -(2\,\text{sen}^2 x - 1)(4\,\text{sen}^2 x - 3) < 0$

Fazendo $\text{sen}\,x = z$, vamos realizar um estudo de sinal de $f(z) = -(2z^2 - 1)(4z^2 - 3)$. As raízes de f são $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dispondo as raízes sobre a reta real e analisando o sinal da função com base no método dos intervalos, temos:



$$f(z) < 0 \Leftrightarrow z < -\frac{\sqrt{3}}{2} \lor -\frac{\sqrt{2}}{2} < z < \frac{\sqrt{2}}{2} \lor z > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, devemos ter $\text{sen}\,x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \lor -\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}\,x < \frac{\sqrt{2}}{2} \lor \text{sen}\,x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

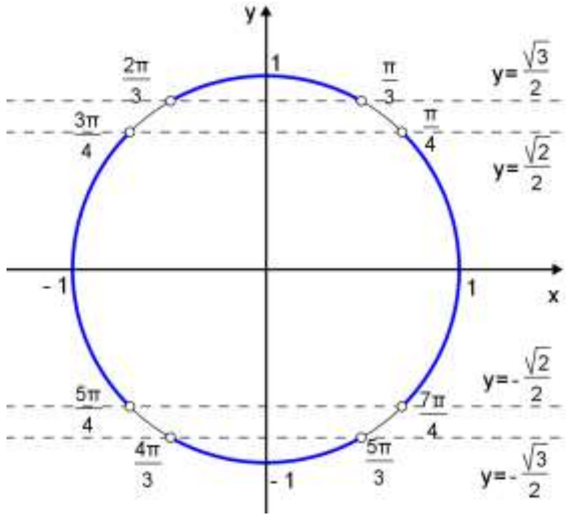
Como $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$\text{sen}\,x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ ou

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] \text{ ou}$$

$$\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

Representando a união desses intervalos no ciclo trigonométrico, temos:



A figura acima corresponde à alternativa (b).

RESOLUÇÃO: B

28. $\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 6x \cos 3x + 2\cos 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 6x(\cos 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \overset{0 \le x \le \frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right\} \\ \text{ou} \\ \cos 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \overset{0 \le x \le \frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} x \in \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \end{cases}$$

A soma de todas as soluções distintas é $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$.

RESOLUÇÃO: E

29. Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, a desigualdade equivale a $\frac{1}{2} \cot x - \sqrt{3}\left(\frac{2\cos^2 \frac{x}{2} - 1}{2}\right) \sec x \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \,.\, \sec x \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cot x - \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \cot x \ge \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{\pi}{6}$$

Assim, o menor intervalo contendo todas as soluções é $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$, cujo comprimento vale $\frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$.

RESOLUÇÃO: D

30. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Pela desigualdade das médias $\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| \geq 2$ e como $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1, 1]$, devemos ter $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -2$ e $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0, 2\pi[\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Logo, só há 1 solução

REFERÊNCIA: KöMaL – fevereiro 2009

RESOLUÇÃO: B