AULA 7
PROBABILIDADE

Diz-se geralmente que a teoria das Probabilidades se originou com Blaise Pascal e Pierre de Fermat, devido à curiosidade de um cavalheiro, Chevalier de Méré, jogador apaixonado, que em cartas discutiu com Pascal problemas relativos à Probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas. Despertado seu interesse pelo assunto, Pascal correspondeu-se com Fermat sobre o que hoje chamaríamos de Probabilidade finita. A primeira obra conhecida em que se estudam as Probabilidades é o livro De Ludo Aleae, (Sobre os jogos de Azar), de Jerônimo Cardano, publicado em 1663. É possível que o interesse de Cardano pelo assunto se deva a sua paixão pelos jogos de azar.

• INTRODUÇÃO

Encontramos na natureza dois tipos de fenômenos: **Determinísticos** e **Aleatórios**.

Os Fenômenos Determinísticos são aqueles em que os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas.

Se tomarmos um determinado sólido, sabemos que a uma certa temperatura haverá a passagem para o estado líquido. Este exemplo caracteriza um fenômeno determinístico.

Nos fenômenos aleatórios, os resultados não serão previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno. Nos experimentos aleatórios, mesmo que as condições iniciais sejam sempre as mesmas, os resultados finais de cada tentativa do experimento serão diferentes e não previsíveis.

Exemplo 1:

a) Lançamento de uma moeda honesta:

b) Lançamento de um dado:

c) Retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas

A cada experimento aleatório está associado o resultado obtido, que não é previsível, chamado
Evento aleatório.

No exemplo **a)** os eventos associados são cara e coroa: no exemplo **b)** poderá ocorrer uma das faces 1,2,3,4,5 ou 6.

Definição 1. Espaço Amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados do experimento. Os elementos do espaço amostral serão chamados também de pontos amostrais.

Representamos o espaço amostral por Ω. O evento aleatório pode ser um único ponto do espaço amostral ou uma reunião deles, como veremos no exemplo a seguir:

Lançam-se dois dados. Enumerar os seguintes eventos:

A: saída de faces iguais

B: saída de faces cuja soma seja igual a 10

D_1/D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Os eventos pedidos são:

A= {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

B={ (4,6) (5,5), (6,4)}

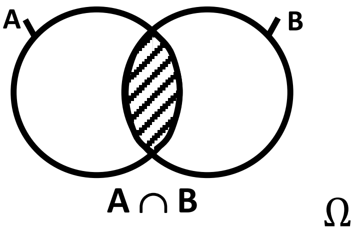
Definição 2. Dado um espaço amostral Ω, o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω é chamado de classe dos eventos aleatórios. Denotamos por *F*(Ω).

Definição 3. (OPERAÇÕES COM EVENTOS ALEATÓRIOS) Consideremos um espaço amostral Ω e sejam $A\ e\ B$ dois eventos de *F*(Ω) as seguintes operações são definidas:

(REUNIÃO) $A \cup B = \{x \in \Omega; x \in A\ ou\ x \in B\}$. O evento reunião é formado pelos pontos que pertencem o pelo menos um dos eventos

a) **(INTERSECÇÃO)** $A \cap B = \{x \in \Omega; x \in A\ e\ x \in B\}$. O evento intersecção é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos $A\ e\ B$.

b) **(INTERSECÇÃO)** $A \cap B = \{x \in \Omega; x \in A \; e \; x \in B\}$. O evento intersecção é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos $A \; e \; B$.



c) **(COMPLEMENTAÇÃO)** $\overline{A} = \Omega - A = \{x \in \Omega; x \notin A\}$.

Definição 4. (FUNÇÃO DE PROBABILIDADE) Sejam Ω um espaço amostral e $F(\Omega)$ a classe de eventos de Ω, a função $P: F(\Omega) \to [0,1]$ que satisfaz as três propriedades abaixo é chamada de função probabilidade.

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B), se \; A \cap B = \emptyset$

iii) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), se \; A_i \cap A_j = \emptyset, \forall \; i,j \in \{1,2,3,..,n\}$

Observação 1. Pela definição acima notemos que para todo evento $A, 0 \leq P(A) \leq 1$.

• PROBABILIDADE CONDICIONAL

Consideremos 250 alunos que cursam o primeiro semestre de uma universidade. Destes alunos 100 são homens e 150 são mulheres, 110 cursam física e 140 cursam química. A distribuição dos alunos é a seguinte:

	FÍSICA	QUÍMICA	TOTAL
HOMEN	40	60	100
MULHER	70	80	150
TOTAL	110	140	250

Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher? Pelo quadro vemos que esta probabilidade é de $\frac{80}{150}$ e representemos: $P(Q/M)$ como sendo a probabilidade de que o aluno curse química, condicionado ao fato de ser mulher.

Observamos, porém, que $P(M \cap Q) = \frac{80}{250} \; e \; P(M) = \frac{150}{250}$.

Para obtermos o resultado do problema basta considerar que:

$$P(Q/M) = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150}$$

Logo:

$$P(Q/M) = \frac{P(M \cap Q)}{P(M)}$$

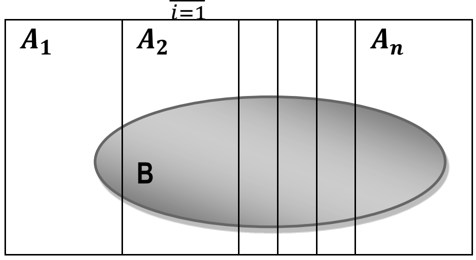
Definição 6. Sejam $A, B \subset \Omega$. Definimos **Probabilidade Condicional** de A dado que B ocorre (A/B) como segue:

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}, se \; P(B) \neq 0.$$

• TEOREMA DE BAYES

Teorema 1. (TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL) Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. Seja B um evento desse espaço. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$



Prova: Feito em Sala.

Teorema 2. (TEOREMA DE BAYES) Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. Seja B um evento desse espaço.Suponhamos conhecidas $P(A_i) \; e \; P(B/A_i), \forall \; i = 1,2,3,..,n$. Então temos:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, \forall j = 1,2,..,n.$$

Prova: Usando as probabilidades condicionais temos:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(BA_j)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}_{teorema \; da \; probabilidade \; total}}$$

• DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Consideremos n tentativas independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada tentativa admite apenas dois resultados: fracasso com probabilidade q e sucesso com probabilidade $p, p+q=1$. As probabilidades de sucesso e fracasso são as mesmas para cada tentativa.

Seja X: número de sucessos em n tentativas. Determinemos a função de probabilidade da variável X, isto é, $P(X=k)$

Um resultado particular (RP) é:

$$\underbrace{SSS\ldots.S}_{k-vezes}\ \underbrace{FFF..F}_{n-k-vezes}$$

Logo,

$$P(RP)=P\left(\underbrace{SS..S}_{k-vezes}\ \underbrace{FFF..F}_{n-k-vezes}\right)=\underbrace{ppp..p}_{k-vezes}\ \underbrace{qqq\ldots q}_{n-k-vezes}=p^k\cdot q^{n-k}$$

Teorema 3. (TEOREMA BINOMIAL) A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma seqüência de n tentativas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova é p, é igual a:

$$\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Prova: A probabilidade de obtermos k sucessos e $n-k$ fracassos em qualquer ordem é $p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ multiplicado pelo número de ordens possíveis que é $\binom{n}{k}$.

Exemplo . Uma moeda é lançada 20 vezes. Qual a probabilidade de saírem 8 caras?

Solução: $P(X=8)=\binom{20}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$.

- ## DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Consideremos tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada tentativa admite sucesso com probabilidade p e fracasso com probabilidade q, $p+q=1$.

Seja X: número de tentativas necessárias ao aparecimento do primeiro sucesso. Logo, X assume os valores:

$X=1$, corresponde ao sucesso (S) e $P(X=1)=p$

$X=2$, que corresponde ao fracasso (F) na 1ª tentativa e sucesso na segunda, (FS) e $P(X=2)=P(F\cap S)=q\cdot p$

$X=3$, que corresponde a (FFS) e $P(X=3)=q\cdot q\cdot p=q^2\cdot p$

Assim para $X=x$, que corresponde a $\underbrace{FF..FS}_{x}$ com $P(X=x)=q^{x-1}\cdot p$

Exemplo . A probabilidade de se encontrar aberto o sinal de trânsito numa esquina é 0,20. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 5 vezes, para encontrar o sinal aberto pela primeira vez?

Solução: Usando a fórmula acima temos que: $P(X=5)=(0{,}80)^4(0{,}20)=0{,}08192$.

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

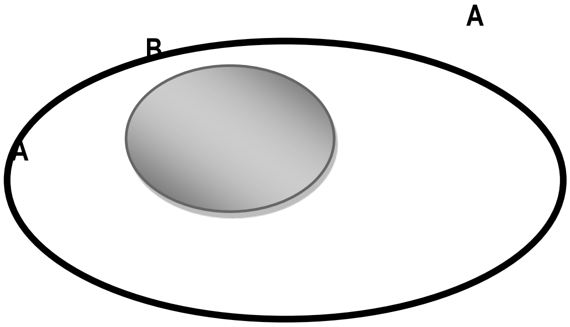
Alguns problemas de probabilidades são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em apreço, a probabilidade de um determinado evento se reduz à a relação ou ao seu limite, caso exista- entre medidas geométricas homogêneas, tais como comprimento, área ou volume.

Em diversos problemas, entretanto, precisaremos escolher um ponto de uma determinada "Linha". Se X e Y são pontos de uma linha de extremos A e B, admitimos que a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha XY (contida em AB) é proporcional ao comprimento XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB. Portanto, selecionado um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será:

$$P=\frac{comprimento\ de\ XY}{comprimento\ de\ AB}$$

Agora se tivermos uma região B do plano contida numa região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B será:

$$P=\frac{área\ de\ B}{área\ de\ A}$$



PROBLEMAS DE APRENDIZAGEM 7

1. **Determine o que se pede:**

a) Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então $\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$.

b) Se $\emptyset$ é o evento impossível, então $P(\emptyset)=0$.

c) **(TEOREMA DO EVENTO COMPLEMENTAR)** Para todo evento $A\subset\Omega, P(A)+P(\overline{A})=1$.

d) **(TEOREM DA SOMA)** Sejam $A, B\subset\Omega. Então\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

e) Consideremos um espaço amostral $\Omega=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ associado a um experimento aleatório. Os eventos e_i são ditos equiprováveis quando $P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n)$, isto é, quando todos têm a mesma probabilidade de ocorrer.Calcule a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$, onde

$$A = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}\}.$$

f) **(TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL)** Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. Seja B um evento desse espaço. Então: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$.

2. Um Dado cúbico com as face numeradas de 1 a 6, é tal que: $p(k) = k \cdot p(1), para\ k \in \{1,2..,6\}$. Lançado este Dado e observado a face superior, qual a probabilidade do número ser par?

3. Uma caixa contém 30 peças em boas condições e 15 em más condições. Uma amostra de 10 peças é extraída. Calcular a probabilidade de que ao menos uma peça na amostra seja defeituosa.

4. **(OBM/2002)** Duas pessoas vão disputar uma partida de **par ou ímpar**. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade. A probabilidade de que a pessoa que escolheu **par** ganhe é?

5. Duas bolas vão ser retiradas, uma após a outra, de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 bolas pretas e 4 bolas verdes. Qual a probabilidade de que ambas Sejam verdes?

6. Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas. Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que seja branca?

7. A probabilidade de que um sinal de trânsito esteja aberto numa esquina é 0,20. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 10 vezes para encontrá-lo aberto pela 4ª vez?

8. Sacam-se, com reposição, n $(n > 1)$ bolas de uma urna que contém 9 bolas numeradas de 1 a 9. Qual é a probabilidade do produto dos números das n bolas extraídas ser divisível por 10?

9. Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado não tendencioso para que a probabilidade de obter algum 6 seja superior a 0,9?

10. Formamos todos os pares ordenados $(a, b), com\ a, b \in \{1,2,3..,20\}$. Qual a probabilidade que

$$\frac{2^a + 2^b}{3} \in \mathbb{N}$$

11. Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele sabia a resposta?

12. Colocam-se aleatoriamente *10* bolas distintas em *10* urnas distintas. Calcular a probabilidade de que exatamente uma seja deixada desocupada.

13. Em um armário há 20 pares de sapatos. Retiram-se ao acaso 12 pés de sapatos desse armário. Qual a probabilidade de haver entre esses pés exatamente 3 pares de sapatos?

14. Um dia você captura dez peixes em um lago, marca-os e coloca-os de novo no lago. Dois dias após, você captura vinte peixes no mesmo lago e constanta que dois desses peixes haviam sido marcados por você.

a) Se o lago possui k peixes, qual era a probabilidade de, capturando vinte peixes, encontrar dois peixes marcados?

b) Para que valor de k essa proabilidade é máxima.

15. Cinco homens e cinco mulheres sentam-se aleatoriamente em dez cadeiras numeradas em círculo. Calcule:

a) A probabilidade de os homens e as mulheres se sentarem em lugares alternados.

b) A probabilidade das mulheres se sentarem juntas.

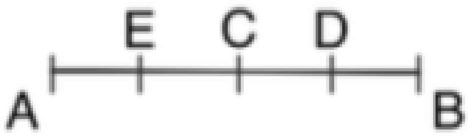
16. Há 8 carros estacionados em 12 vagas em fila.

a) Qual é a probabilidade das vagas vazias serem consecutivas?

b) Qual é a probabilidade não haver duas vagas vazias consecutivas?

17. **(OBM/ UNIVERSITÁRIA)** Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces equiprováveis numeradas de 1 a 6). Calcule a probabilidade de que a soma dos 10 resultados seja igual a 20.

18. Considere um segmento AB e E, C e D pontos pertencentes a esse segmento



Onde $AE = EC = \frac{CD}{2} = \frac{DB}{3}$

Escolhendo um ponto aleatoriamente em AB, qual a probabilidade que esteja entre:

a) A e C b) C e D c) E e C

19. Dividindo aleatoriamente um segmento de medida 1 cm em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

20. Luís e Farias disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem veceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhar e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se Farias iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Luis ganhar na centésima partida?

PROBLEMAS DE FIXAÇÃO 7

1. Uma classe tem 30 estudantes que receberam fichas numeradas de 1 a 30. Um dos alunos distraiu os amigos na hora de sorteio e pegou 5 fichas. Qual a probabilidade dele não ser sorteado?

2. Com dados do último censo, a Assistente Social de um Centro de Saúde constatou que das famílias da região, 20% não tem filhos, 30% apenas um filho, 35% exatamente dois filhos e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro e cinco filhos. Suponha que uma família dessa região é escolhida, aleatoriamente e o número de filhos é averiguado. Qual a probabilidade da família escolhida ter mais do que três filhos?

3. Numa determinada empresa há 20 trabalhadores dos quais 8 são eventuais e 12 são efetivos. Deseja-se formar uma comissaão de 2 trabalhadores para apresentar a empresa numa reunião sobre a concentração salarial. Qual a probabilidade de os dois trabalhadores escolhidos ao acaso serem efetivos?

4. Marcos e Paulo fazem parte de um grupo de 10 pessoas que serão dispostas aleatoriamente em fila. Qual a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Marcos e Paulo?

5. Em umjogo de tabuleiro para dois participantes, em cada rodada o atacante lança um dado e o defensor lança outro. O atacante vence se o número obtido no lançamento do seu dado for maior do que o número obtido no lançamento do dado do defensor. Caso contrário, vence o defensor. Os dados utilizados nesse jogo são dados convencionais, em formato cúbico, com suas faces numeradas de 1 a 6. Qual a probabilidade do atacante vencer uma rodada?

6. Numa urna são depositadas *n* etiquetas numeradas de 1 a *n*. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade dos números sorteados serem consecutivos?

7. Um bispo, um padre e mais quatro fiéis estão em uma fila indiana. Supondo que o bispo e o padre nãoficam juntos, qual a probabilidade de que as extremidades da fila sejam ocupadas por eles?

8. Existem dois tipos de anos bissextos: aqueles que são múltiplos de 4, mas não são de 100 e aqueles que são múltiplos de 400. Por exemplo, serão anos bissextos 2024, 2052 e 2400; não serão anos bissextos 2038, 2075 e 2100. Baseado na convenção acima, se escolhermos aleatoriamente um ano entre 2014 e 2413 (incluindo esses dois anos), qual a probabilidade do ano ser bissexto?

9. Uma urna contém cinco cartões, numerados de 1 a 5. Retira-se sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões da urna e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos. Qual é a probabilidade de esse número ser divisível por 4?

10. Quatro dados não viciados são jogados. Qual é a probabilidade que o produto dos números que aparecem nas faces superiores dos dados seja 36?

11. Dois eventos *A* e *B* de um espaço amostral são independentes. A probabilidade do evento *A* é *P*(*A*)

= 0,4 e a probabilidade da união de *A* com *B* é $P(A \cup B) = 0,8$. Pode-se concluir que a probabilidade do evento *B* é:

12. Jogando-se quatro vezes um dado comum de seis faces, não viciado, qual a probabilidade de obtermos um resultado maior ou igual a 5 apenas na quarta jogada?

13. João faz parte de um grupo de 10 pessoas. Desse grupo, três pessoas são sorteadas em uma premiação. Qual é a probabilidade de João ter sido sorteado?

14. Numa caixa estão três bolas numeradas de 1 a 3. Um dado, com seis faces numeradas de 1 a 6, é lançado e uma das bolas é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade da bola e do dado exibirem o mesmo número?

15. Um jogo é composto das seguintes regras:

I) Um dado não viciado é jogado;

II) Se sair o número 3, então o jogador *A* ganha;

III) Se sair um dos números dentre 4, 5 ou 6, então o jogador *B* ganha; e

IV) Se sair um dos números dentre 1 ou 2, o dado é lançado outra vez até resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.

Qual a probabilidade do jogador *B* vencer?

16. As probailidades de 3 jogadores, A, B e C marcarem um gol quando cobram um pênalti são 2/3, 4/5 e 7/10, respectivamente. Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de que pelo menos um marque um gol?

17. A urna X cont[em 2 bolas azuis, 2 balas brancas e 1 cinza, e uma urna Y contém 2 bolas azuis, 1 bola branca 1 cinza. Retira-se uma bola de cada urna. Calcule a probabilidade de saírem 2 bolas brancas sabendo que são bolas da mesma cor?

18. A probabilidade de que um atleta A ultrapasse 17,30 metros num único salta triplo é de 0,7. O atleta de 4 saltos. Qual a probabilidade de que em pelo menos num dos saltos ultrapasse 17,30 m?

19. Uma urna X tem 6 bolas brancas e 4 azuis. A urna Y tem 3 bolas brancas e 5 azuis. Passam-se duas bolas de X para Y e a seguir retiram-se duas bolas de Y, com reposição. Sabendo-se que ocorram duas bolas azuis, qual a probabilidade que duas azuis tenham sido transferidas de X para Y?

20. A urna I tem 3 bolas brancas e 2 pretas, uma urna II tem 4 bolas brancas e 5 pretas, a urna III tem 3 bolas brancas e 4 pretas. Passa-se uma bola, escolhida aleatoriamente, de I para II. Feito isto, retira-se uma bola de II e retiam-se 2 boas de III. Qual a probabilidade de as três bolas serem da mesma cor?

21. Num certo colégio, 4% dos homens e 1% das mulheres têm mais de 1,75 de altura. 60% dos estudantes são mulheres é escolhido ao acaso e tem mais de 1,75. Qual a probabilidade de que seja homen?

22. Uma urna x tem 8 bolas pretas e 2 verdes. A urna y tem 4 pretas e 5 verdes, e a urna z tem 2 verdes e 7 pretas. Passa-se uma bola de x para y. Feito isso, passa-se uma bola de y para z. A seguir, retiram-se 2 bolas de z, com reposição. Qual a probabilidade de que ocorram duas boas verdes?

23. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas vermelhas; outra urna contém 3 bolas brancas e 6 vermelhas. Passa-se uma bola, escolhida ao acaso, da primeira para a segunda urna, e , em seguida, retiram-se 5 bolas desta última, com reposição. Qual a probabilidade de que ocorram 2 vermelhas e 3 brancas nessa ordem:

24. Um analista de uma empresa fotográfica estima que a probabilidade de que uma firma concorrente planeje fabricar equipamentos para fotografias instantâneas dentro dos próximos 3 anos é 0,30. Se a firma concorrente tem tais planos, será certamente construída uma nova fábrica. Se não tem tais planos, há ainda uma probabilidade de 0,60 de que, por outras rações, construa uma nova fábrica. Se iniciou os trabalhos de construção de uma nova fábrica, qual a probabilidade de que tenha decidido entrar para o campo da fotografia instantânea?

25. Um certo programa pode ser usado com uma entre duas sub-rotinas A e B, dependendo do problema. A experiência tem mostrado que a sub-rotina A é usada 40% das vezes e B é usada 60% das vezes.

Se A é usada, existe 75% de chance de que o programa chegue a um resultado dentro do limite. Se B é usada, a chance é de 50%. Se o programa foi realizado dentro do limite de tempo, qual a probabilidade de que a sub-rotina A tenha sido a escolhida?

26. 5 homens e 5 mulheres compraram 10 cadeiras consecutivas na mesma fila de um teatro. Supondo que se sentaram aleatoriamente nas 10 cadeiras, calcular:

a) A probabilidade de que homens e mulheres se sentem em cadeiras alternadas;

b) A probabilidade de que as mulheres se sentem juntas.

27. Um número entre 1 e 200 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que seja divisível por 5 ou 7.

28. Colocam – se ao acaso *n* botões em um tabuleiro *n x n*, não sendo permitido haver dois botões em uma mesma casa. Qual é a probabilidade de não haver dois botões nem na mesma linha nem na segunda coluna?

29. Nos cartões da sena, as dezenas são representadas em um quadro com 5 linhas e 10 colunas. Determine a probabilidade das 6 dezenas sorteadas:

a) Pertencerem a mesma linha;

b) Pertencerem a apenas duas linhas, 5 numa linha e 1 na outra;

c) Idem, 4 numa linha e 2 na outra;

d) Idem 3 numa linha e 3 na outra;

e) Pertencerem a apenas três linhas, duas em cada;

f) Pertencerem a linhas diferentes.

30. Doze pessoas são divididas em três grupos de 4. Qual é a probabilidade de duas determinadas pessoas ficarem no mesmo grupo?

31. Qual é a probabilidade de uma permutação dos números (1, 2, ..., 10) ter exatamente 5 elementos no seu lugar primitivo?

32. 2N rapazes e 2N moças são divididos ao acaso em dois grupos de 2N cada. Qual a probabilidade de em cada grupo haver tantos rapazes quanto homens quanto moças?

33. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 7 bolas brancas. A e B sacam alternamente, sem reposição, bolas dessa urna até que uma bola vermelha seja retirada. A saca a 1ª bola. Qual é a probabilidade de A sacr a bola vermelha?

34. Em uma cidade com $n + 1$ habitantes, uma pessoa conta um boato para uma outra pessoas, a qual por sua vez o conta para uma terceira pessoa, etc... calcule a probabilidade do boato ser contado m vezes:

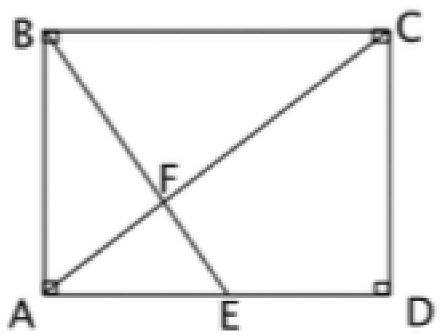
a) Sem retornar à primeira pessoa;

b) Sem repetir nenhuma pessoa.

35. Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade $\frac{1}{3}$. Suponha que A faz uma afirmação e que D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual é a probabilidade de A ter falado a verdade?

36. Seja M o ponto médio de um segmento AB. C é escolhido aleatoriamente em AM e D é escolhido aleatoriamente em MB, qual a probabilidade de que: $4 \cdot CD < AB$?

37. Considere um alvo com forma de um quadrado como na Figura abaixo:

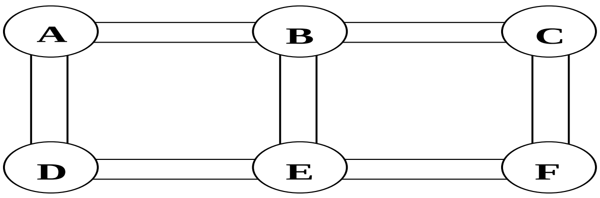


E é o ponto médio de AD. Se um dardo é arremessado aleatoriamente no alvo (e o acerta), qual a probabilidade de que atinja o interior do quadrilátero EFCD?

38. Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira a chegar ao local esperaria a outra em no máximo 15 minutos. Qual a probabilidade que este encontro aconteça, admitindo que os instantes de chegada de cada uma das pessoas é totalmente aleatório?

39. Considere um Tetraedro regular ABCD, onde cada areta mede 1cm. No vértice A, encontra-se um ratinho. Toda vez que soa um alarme, esse ratinho escolhe uma das arestas com igual probabilidade e corre 1cm, até um vértice oposto. Qual a probabilidade do ratinho estar no vértice A, depois de ter soado o alarme sete vezes?

40. (OBM/UNIVERSITÁRIA) Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola *A* e é treinado para mudar da gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Qual a probabilidade de que após o alarme soar 23 vezes o ratinho ocupe a gaiola *B*?



GABARITO

1) 5/6	11) 2/3	21) 8/11	31) 11/3600
2) 10%	12) 8/81	22) 0,066	32) $\frac{\binom{2N}{N}^2}{\binom{4N}{2N}}$.
3) 33/95	13) 3/10	23) 0,011862	33) 7/10
4) 1/9	14) 1/6	24) 0,4167	34) *
5) 5/12	15) ¾	25) 50%	35) 13/41
6) 6/n(n-1)	16) 49/50	26) a) 1/126 b) 1/42	36) 1/8
7) 10%	17) 2/7	27) 63/200	37) 5/12
8) 97/400	18) 0,9919	28) $\frac{n!}{C_{n^2}^{n}}$.	38) 7/16
9) 1/5	19) 0,1918	29) *	39) 182/729
10) 1/27	20) 11/50	30) 3/11	40) *

29) a) $\frac{5.C_{10}^6}{C_{50}^6}=\frac{1}{15.134}$ b) $\frac{5\,x\,C_{10}^4 \text{ x } 4 \text{ x}10}{C_{50}^6}=\frac{24}{7.567}$. c) $\frac{5\,x\,C_{10}^4 \text{ x } 4 \text{ x } C_{10}^2}{C_{50}^6}=\frac{90}{7.567}$.

a) d) $\frac{C_5^2\,.\,C_{10}^3\,.\,C_{10}^3}{C_{50}^6}=\frac{480}{52.969}$. e) $\frac{C_5^3\,.\,C_{10}^2\,.\,C_{10}^2\,.\,C_{10}^2}{C_{50}^6}=\frac{6.075}{105.938}$. f) 6 dezenas em linhas diferentes é impossível, pois só há 5 linha. A resposta é 0.

34) a) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$ b) $\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})!\cdot \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}}}$.

40) $a_{23}=\frac{3}{7}+\frac{3}{7\cdot 6^{23}}=\frac{3(6^{23}+1)}{7\cdot 6^{23}}$.

SUGESTÕES E/OU SOLUÇÕES

1)Solução:

A quantidade de elementos do Conjunto Universo U é $|U| = 30$. Se $|E|$ é a quantidade de chances dele ser sorteado e $|\overline{E}|$ o complementar disso, temos $|E| = 5$, $|\overline{E}| = 25$ e a probabilidade pedida é $P=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$.

2) Solução:

Sejam T, Q e C os conjuntos com as famílias com três, quatro e cinco filhos, respectivamente, e U o conjunto de todas as famílias. Daí, como $|U|/|U| = 20\% + 30\% + 35\% + |T|/|U| + |Q|/|U| + |C|/|U|$, com $|T| = |Q| = |C|$, temos $|T|/|U| + |Q|/|U| + |C|/|U| = 15\%$ e $|T|/|U| = |Q|/|U| = |C|/|U| = 5\%$. Foi pedida a probabilidade de ter mais de três filhos, ou seja $P(Q \cup C) = 10\%$.

3) Solução:

São possíveis $|U| = C_2^{20} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190$ duplas entre todos os funcionários e $|E_f| = C_2^{12} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$ duplas com efetivos. Assim, a probabilidade é $\frac{66}{190}=\frac{33}{95}$.

4)Solução:

Existem 10! permutações das pessoas. Existem cinco pares de locais nos quais haverá exatamente quatro pessoas entre Marcos e Paulo: 1° e 6° na fila, 2° e 7°, 3° e 8°, 4° e 9° e, por fim, 5° e 10°. Além disso, temos duas opções para colocá-los nesses pares. Como as outras 8 pessoas podem ser permutadas de 8! formas, o total de disposições em que existem apenas 4 pessoas entre eles é $5\cdot 2\cdot 8!$. Logo, a probabilidade procurada é

$$P=\frac{5\cdot 2\cdot 8!}{10!}=\frac{5\cdot 2}{10\cdot 9}=\frac{1}{9}.$$

5) Solução:

A probabilidade de ganhar varia de acordo com o dado do atacante. Observe os pares (x, y), onde x é o valor que o atacante obteve e y o valor que o defensor obteve. As vitórias do atacante são os pares do conjunto:

$$\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}.$$

Esse é um subconjunto do Conjunto Universo que tem $6 \times 6 = 36$ pares ordenados. Logo, a probabilidade é igual a

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

6) Solução:

O Conjunto Universo U possui $|U| = C_3^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ elementos. Agora perceba que os consecutivos são as triplas ordenadas $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$, $\ldots$, $(n-2, n-1, n)$, e na primeira coordenada que cada tripla observamos uma variação de 1 até $(n-2)$, ou seja, existem $n-2$ trios. A probabilidade procurada será

$$P = \frac{n-2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} = \frac{6}{n(n-1)}$$

7) Solução:

O total de disposições da fila é igual a $(6! - 2 \cdot 5!)$, isto é, o total de casos menos os casos com o bispo e o padre juntos. Os casos favoráveis, com eles nas pontas (Padre no início ou no final), correspondem a duas vezes a permutação dos quatro fiéis, ou seja $2 \cdot 4!$. A probabilidade pedida é igual a $\dfrac{2 \cdot 4!}{6! - 2 \cdot 5!} = 10\%$.

8) Solução:

De 2014 a 2413 temos um total de 400 anos. Neste intervalo temos anos bissextos de 4 em 4 anos, exceto nos anos de 2100, 2200 e 2300. Logo temos 97 anos bissextos. Portanto a probabilidade de um ano ser bissexto, entre 2014 a 2413, é igual a $\dfrac{97}{400}$.

9) Solução:

O total de números distintos que podem ser formados é $5! = 120$. Para que um número seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Assim, com os algarismos de 1 a 5, temos as possibilidades 12, 24, 32, 52 que são divisíveis por 4. Fixados os dois últimos algarismos, temos 3! números distintos. Assim, a probabilidade solicitada é $\dfrac{4 \cdot 3!}{5!} = \dfrac{1}{5}$.

10) Solução:

Seis dados podem gerar $6^4 = 1296$ resultados dispostos e temos quatro possíveis fatores para o produto ser igual a 36, a saber:

i) $\{1,1,6,6\}$, obtido de $P_{2,2}^4 = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ formas;

ii) $\{1,2,3,6\}$, obtido de $P^4 = 4! = 24$ formas;

iii) $\{1,3,3,4\}$, obtido de $P_{2,2}^4 = \dfrac{4!}{2!} = 12$ formas; e

iv) $\{2,2,3,3\}$, obtido de $P_{2,2}^4 = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ formas.

Por fim, a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{6+24+12+6}{6^4} = \frac{1}{27}.$$

11) Solução:

Se os eventos são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Substituindo os valores do enunciado ficaremos com

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\
0,8 &= 0,4 + P(B) - 0,4 \cdot P(B) \\
0,4 &= 0,6P(B) \\
P(B) &= \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{6} \\
P(B) &= \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

12) Solução:

A probabilidade de obter um resultado maior ou igual a 5 é $\dfrac{2}{6}$, logo, a probabilidade de seu complementar é $\dfrac{4}{6}$ (a cada lançamento). A probabilidade de ocorrer o valor maior do que ou igual a 5 apenas na quarta jogada significa que nos três lançamentos anteriores, não ocorreu tal resultado. Assim, como cada arremesso de dados é independente dos demais, temos

$$P = \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{8}{81}.$$

13) Solução:

Seja $P(J_i)$ a probabilidade de João ser sorteado para a vaga i, $i \in \{1,2,3\}$ e considerando todo sorteio equiprovável, então

i) $P(J_1) = \frac{1}{10}$ e $P(\overline{J_1}) = \frac{9}{10}$;

ii) $P(J_2) = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{10}$ e $P(\overline{J_2}) = \frac{9}{10}$; e

iii) $P(J_3) = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{10}$.

Assim, unindo os possíveis eventos, temos que ele pode ter sido sorteado em qualquer uma das vagas para vencer. Daí, chegamos a

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} = 3\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

14) Solução:

Sejam $B_n, n \in \{1,2,3\}$, e $D_i, i \in \{1,2,\ldots,6\}$, os resultados possíveis das/os retiradas/lançamentos de uma bola e um dado quaisquer. Para a bola sair com um número n , temos a probabilidade $P(B_n) = \frac{1}{3}$, para uma face qualquer do dado temos a probabilidade $P(D_n) = \frac{1}{6}$. A probabilidade procurada é dada por

$$\begin{aligned} P(B_1)\cdot P(D_1) + P(B_2)\cdot P(D_2) + P(B_3)\cdot P(D_3) &= \\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} &= \\ 3\cdot\frac{1}{18} &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

15) Solução:

Seja $P_i(n)$ a probabilidade do jogador n, $n \in \{A, B\}$ vencer na rodada i, com i inteiro positivo, e $P_i(\overline{n})$ a probabilidade do jogador n não vencer na rodada i. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} P_1(B) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \\ P_2(B) &= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{6} \\ P_3(B) &= \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{18} \\ &\vdots \\ P_n(B) &= \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por fim, a probabilidade do jogador B vencer será igual a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

16) Solução:

Resolução:

$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{4}{5}$ e $P(C) = \frac{7}{10}$

$P(A\cup B\cup C) = 1 - P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1 - P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) =$

$= 1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10} = 1 - \frac{1}{50} = \boxed{\frac{49}{50}}$

17) Solução:

Resolução:

$P(\text{mesma cor}) = P(A\cap A) + P(B\cap B) + P(C\cap C)$

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{20}$

$P(\text{mesma cor}) = \frac{7}{20}$

$P(B\cap B/\text{mesma cor}) = \frac{P(B\cap B)}{P(\text{mesma cor})} =$

$\frac{2/20}{7/20} = \boxed{\frac{2}{7}}$

$P(B\cap B)/\text{mesma cor}) = \frac{2}{7}$

18) Solução:

Resolução:

$P(u) = 0{,}7$

e $P(\bar{u}) = 0{,}3$

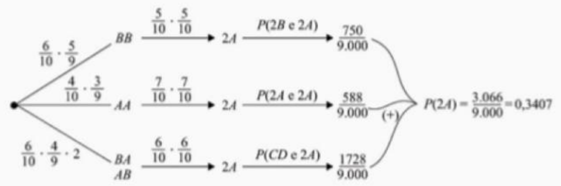
$P(u_1\cup u_2\cup u_3\cup u_4) = 1 - P(\bar{u}_1\cap\bar{u}_2\cap\bar{u}_3\cap\bar{u}_4) =$

$= 1 - P(\bar{u}_1)\cdot P(\bar{u}_2)\cdot P(\bar{u}_3)\cdot P(\bar{u}_4) =$

$= 1 - 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}0081 = \boxed{0{,}9919}$

19)Solução:

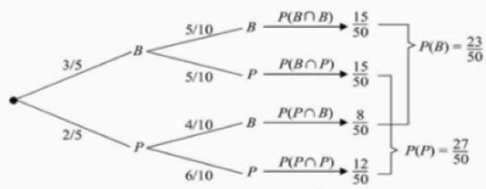
Resolução:



$P(2A/2A) = P\frac{(2Ae2A)}{P(2A)} = \frac{588/9.000}{3.066/9.000} = \frac{588}{3.066} = \boxed{0{,}1918}$

20) Solução:

Resolução:



$$\text{III}\begin{cases} P(B\cap B) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} \\ P(P\cap P) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} \end{cases}$$

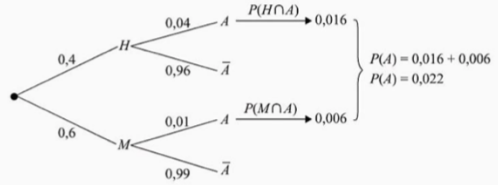
$P(MC) = P(B \text{ e } 2B) + P(P \text{ e } 2P)$

$P(MC) = \frac{23}{50}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{27}{50}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \boxed{\frac{11}{50}}$

21) Solução:

Resolução:

A: o estudante tem mais de 1,75 m

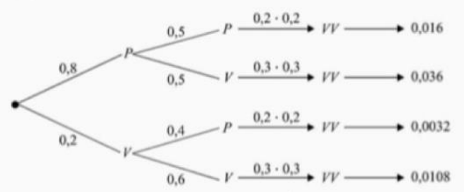


Logo:

$P(H/A) = \frac{P(H\cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}016}{0{,}022} = \boxed{\frac{8}{11}}$

22) Solução:

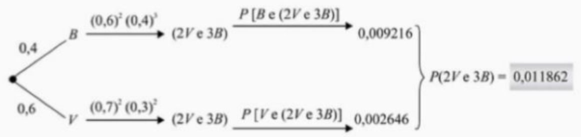
Resolução:



$P(V \cap V) = 0{,}016 + 0{,}036 + 0{,}0032 + 0{,}0108 = \boxed{0{,}066}$

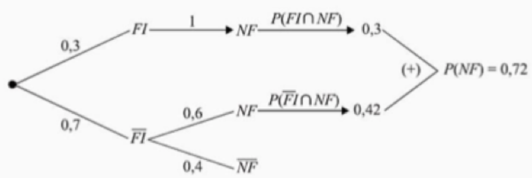
23) Solução:

Resolução:



24) Solução:

Resolução:



$P(FI/NF) = \frac{P(FI \cap NF)}{P(NF)} = \frac{0{,}3}{0{,}72} = \frac{5}{12} = \boxed{0{,}4167}$

25) Solução:

Resolução:

$P(A) = 0{,}4 \rightarrow P(R/A) = 0{,}75 \rightarrow P(A \cap R) = 0{,}300$

$P(B) = 0{,}6 \rightarrow P(R/B) = 0{,}50 \rightarrow P(B \cap R) = 0{,}300$

Logo: $P(R) = 0{,}300 + 0{,}300 = 0{,}600$

$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \boxed{0{,}5 \text{ ou } 50\%}$

26) Solução:

a) A probabilidade de que homens e mulheres se sentem em cadeiras alternadas;

Há 10! casos possíveis, dos quais 2.5!.5! são favoráveis, pois há dois modos de intercalar homens e mulheres (pode-se começar por homem ou por mulher), 5! modos de arrumar os homens nos lugares a eles destinados e 5! modos de arrumar as mulheres nos lugares a elas destinados.

A probabilidade é $\frac{2!.5!.5!}{10!} = \frac{1}{126}$.

b) A probabilidade de que as mulheres se sentem juntas.

Há 10! casos possíveis, dos quais 5!.6! são favoráveis, pois há 5! ordens de arrumar o bloco das mulheres e 6! modos de arrumar os 5 homens e o bloco das mulheres.

A probabilidade é $\frac{5!.6!}{10!} = \frac{1}{42}$.

27)

Solução: Sendo A e B os eventos “o número é divisível por 5” e “o número é divisível por 7”, respectivamente, A∩B é o evento “o número é divisível por 35”.

Temos P(A)=$\frac{\left[\frac{200}{5}\right]}{200} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$, P(B)=$\frac{\left[\frac{200}{7}\right]}{200} = \frac{28}{200} = \frac{7}{50}$, P(A∩B)=$\frac{\left[\frac{200}{35}\right]}{200} = \frac{5}{200}$

P($A \cup B$)=P(A)+P(B)- P(A∩B)=$\frac{63}{200}$

28)

Solução: Há n^2 casas no tabuleiro. O número de modos de selecionar as casas para colocar os botões é $C_{n^2}^{n}$. O número de modos de selecioná-los sem que haja duas na mesma linha ou na mesma coluna é *n*! porque, como cada linha e cada coluna conterão exatamente um botão, haverá *n* modos de escolher a casa que será utilizada na primeira linha, *n* – 1 modos de escolher a segunda linha, ... , 1 modo de escolher a da última linha. A resposta é $\frac{n!}{C_{n^2}^{n}}$.

29)

Solução: O número de modos de sortear as seis dezenas é $C_{50}^{6} = 15.890.700.$

b)Para sortear seis dezenas pertencentes à mesma linha, devemos escolher a linha (5 modos) e nela escolher 6 dezenas (C_{10}^{6} modos).

A resposta é $\frac{5.C_{10}^{6}}{C_{50}^{6}} = \frac{1}{15.134}$

c)Para sortear seis dezenas com 5 em uma linha e 1 em outra, devemos escolher a linha das cinco dezenas (5 modos), nela escolher a linha de 1 dezena (4 modos) e nela escolher uma dezena (10 modos).

A resposta é $\frac{5 \text{ x } C_{10}^{4} \text{ x } 4 \text{ x} 10}{C_{50}^{6}} = \frac{24}{7.567}$.

d)Para sortear seis dezenas com 4 em uma linha e 2 em outra, devemos escolher a linha das quatro dezenas (5 modos), nela escolher 4 dezenas (C_{10}^{4} modos), escolher a linha das 2 dezenas (4 modos) e nela escolher duas dezenas (C_{10}^{2}modos).

A resposta é $\frac{5 \text{ x } C_{10}^{4} \text{ x } 4 \text{ x } C_{10}^{2}}{C_{50}^{6}} = \frac{90}{7.567}$.

e)Para sortear seis dezenas com 3 em uma linha e 3 em outra, devemos escolher a duas linhas (C_5^2 modos), em cada uma delas escolher 3 dezenas (C_{10}^3 x C_{10}^3 modos).

A resposta é $\frac{C_5^2 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{10}^3}{C_{50}^6} = \frac{480}{52.969}$.

f) Para sortear seis dezenas com 2 em uma linha e 2 em outra, e 2 em uma terceira linha, devemos escolher as três linhas (C_5^3 modos), e, em cada uma delas escolher 2 dezenas (C_{10}^2 x C_{10}^2 x C_{10}^2 modos).

A resposta é $\frac{C_5^3 \cdot C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_{10}^2}{C_{50}^6} = \frac{6.075}{105.938}$.

g) 6 dezenas em linhas diferentes é impossível, pois só há 5 linha. A resposta é 0.

30)Solução: Imagine o resultado do sorteio como uma fila de 12 lugares: o primeiro lugar corresponde a primeira pessoa sorteada para o primeiro grupo; o segundo, à segunda pessoa sorteada para o segundo grupo;...; o último, à quarta pessoa sorteada para o terceiro grupo. Colocada a terceira pessoa, há 11 posições para a segunda, em 3 das quais ela fica no mesmo grupo da primeira. A resposta é $\frac{3}{11}$

31)Solução: O número total de permutações é 10!. Para formar uma permutação com exatamente 5 elementos (C_{10}^5 modos), colocá-los em seus lugares (1 modo) e colocar, caoticamente, os restantes 5 elementos nos restantes 5 lugares (D_5^1 modos). A resposta é $\frac{C_{10}^5 .1 .D_5^1}{10!} = \frac{11}{3600}$.

32) Solução: Chamemos os grupos de A e B. Para fazer a divisão, basta selecionar os componentes de A, pois, selecionar os elementos de A, os restantes formarão o grupo B.

O número de modos possíveis de formar o grupo A é C_{4N}^{2N}. O número de modos de formar o grupo A com N homens e N mulheres é C_{2N}^{N}. O número de modos de formar o grupo A com N mulheres é $C_{2N}^{N} \cdot C_{2N}^{N}$. A resposta é

$$\frac{C_{2N}^{N} \cdot C_{2N}^{N}}{C_{4N}^{2N}} = \frac{\binom{2N}{N}^2}{\binom{4N}{2N}}.$$

33)

Solução: A probabilidade A sacar uma bola vermelha em sua primeira jogada é $\frac{3}{10}$.

Para A sacar uma bola vermelha em sua segunda jogada, as bolas sacadas devem ser

branca-branca-vermelha. A probabilidade de isso ocorrer é $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{10}$.

Para A sacar uma bola vermelha em sua terceira jogada, as bolas sacadas devem ser

branca-branca-branca-branca-vermelha.

A probabilidade de isso ocorrer é $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$.

Para A sacar um bola vermelha em sua quarta jogada, as bolas sacadas devem ser

branca-branca-branca-branca-branca-branca-vermelha.

A probabilidade de isso ocorrer é $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10}$.

A resposta é $\frac{3}{10} + \frac{7}{40} + \frac{1}{12} + \frac{1}{40} = \frac{7}{10}$.

34)Solução:

a) Cada pessoa tem n modos de escolher a quem conta o boato.

Logo, o número de modos de o boato ser contado m vezes é n^m.

O número de modos de o boato ser contado m vezes, sem retornar à primeira pessoa ´$n(n-1)^{m-1}$, pois o primeiro ouvinte pode ser selecionado de n modos e os demais de $n-1$ modos. A resposta é $\frac{n(n-1)^{m-1}}{n^m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$.

b) Cada pessoa tem n modos de escolher a quem conta o boato. Logo o número de modos de o boato ser contado m vezes é n^m.

Para o boato ser contado m vezes, sem repetir nenhuma pessoa, o primiro ouvinte pode ser selcionado de n modos; o segundo, de $n-1$ modos; o terceiro , de $n-2$ modos;...; o m-ésimo, de $n-(m-1) = n-m+1$ modos. O número de boato ser contado $m$vezes, sem retornar à primeira pessoa, é $n \cdot (n-1) \ldots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$. **A resposta é** $\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})! \cdot \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{m}}}$.

35)

Solução: Considere os eventos:

A=A falou a verdade;

B=B disse que A falou a verdade;

C=C disse que B disse que A falou a verdade;

D=D disse que C disse que B disse que A falou a verdade.

Vamos aliviar a notação escrevendo XY para representar $X \cap Y$.

Queremos calcular $P(A|B) = \frac{P(AD)}{P(D)}$.

$$P(AD) = P(ABCD) + P(A\bar{B}CD) + P(AB\bar{C}E) + P(\overline{ABC}D)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{13}{81}$$

$$P(AD) = P(\bar{A}BCD) + P(\overline{AB}CD) + P(\bar{A}B\bar{C}D) + P(\overline{ABC}D)$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{28}{81}$$

$$P(D) = P(AD) + P(\bar{A}D) = \frac{13}{81} + \frac{28}{81} = \frac{41}{81}.$$

A resposta é $P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{13/81}{42/81} = \frac{13}{41}$.

40) Solução:

Seja a_n a probabilidade de que após n apitos o ratinho esteja na coluna central (B ou E). Temos $a_0 = 0$ (o ratinho não começa na coluna central). Claramente após o apito soar um número par de vezes o ratinho estará em A, C ou E e após um número ímpar de vezes em B, D ou F. Assim, queremos calcular a_{23}. Se, antes de soar o alarme, o ratinho está na coluna central ele tem 1/3 de probabilidade de permanecer lá (independentemente da gaiola onde o ratinho estava ser B ou E). Por outro lado, se ele não está na coluna central ele tem probabilidade 1/2 de ir para lá (novamente independentemente da gaiola onde o ratinho começou). Assim,

$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}(1-a_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}a_n$ ou $a_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}(a_n - \frac{3}{7})$. A sequência $b_n = a_n - \frac{3}{7}$ é portanto uma progressão geométrica de razão $-\frac{1}{6}$ com $b_0 = -\frac{3}{7}$. Assim $b_{23} = \frac{3}{7\cdot 6^{23}}$ e

$$a_{23} = \frac{3}{7} + \frac{3}{7\cdot 6^{23}} = \frac{3(6^{23}+1)}{7\cdot 6^{23}}.$$