OBJETIVO

ITA

Matemática

Livro do Professor

9

MÓDULO 33

Funções I

1. **(OPM)** – Seja f uma função dada por: $f(1) = 17$ e $f(n) = \dfrac{n}{f(n-1)}$, para n natural, maior que 1. Calcule o produto $f(1) \,.\, f(2) \,.\, f(3) \,.\, \ldots \,.\, f(8)$.

RESOLUÇÃO:
Fazendo $P(n) = f(1) \,.\, f(2) \,.\, f(3) \,.\, \ldots \,.\, f(n)$, para todo $n \geq 1$, tem-se:

$$P(n) = P(n-1) \,.\, f(n) = P(n-2) \,.\, f(n-1) \,.\, \frac{n}{f(n-1)} =$$

$$= P(n-2) \,.\, n \Rightarrow P(n) = P(n-2) \,.\, n$$

$$\left.\begin{array}{l} P(8) = P(6) \,.\, 8 \\ P(6) = P(4) \,.\, 6 \\ P(4) = P(2) \,.\, 4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(8) = P(2) \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 =$$

$$= f(1) \,.\, f(2) \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 = f(1) \,.\, \frac{2}{f(1)} \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 = 384$$

<u>Outra resolução:</u>
$f(1) \,.\, f(2) \,.\, f(3) \,.\, \ldots \,.\, f(8) =$

$$= \cancel{f(1)} \,.\, \frac{2}{\cancel{f(1)}} \,.\, \cancel{f(3)} \,.\, \frac{4}{\cancel{f(3)}} \,.\, \cancel{f(5)} \,.\, \frac{6}{\cancel{f(5)}} \,.$$

$$.\, \cancel{f(7)} \,.\, \frac{8}{\cancel{f(7)}} = 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 = 384$$

2. **(OBM)** – Seja $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Quantas soluções têm a equação $f(f(f(\ldots f(x)))) = 2$, na qual f é aplicada 2001 vezes?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 2001 e) 2^{2001}

RESOLUÇÃO:
Considerando a função $f(x) = x^2 - 3x + 4$, observemos que:
1) não existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $f(a) = 1$, pois $f(a) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 - 3a + 4 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow \nexists a \in \mathbb{R}$.
2) se $b \in \mathbb{R}$, tal que $f(b) = 2$, então $b = 1$ ou $b = 2$, pois $b^2 - 3b + 4 = 2 \Leftrightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 1$ ou $b = 2$.
Assim sendo,
- **$f(f(f(\ldots f(x)))) = 2$, na qual f é aplicada 2001 vezes $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(f(\ldots f(x))) = 1$ ou $f(f(\ldots f(x))) = 2$, na qual f é aplicada 2000 vezes, porém, pelo exposto no item 1, $f(f(\ldots f(x))) = 1$ não serve.**
- **$f(f(\ldots f(x))) = 2$, na qual f é aplicada 2000 vezes $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(\ldots f(x)) = 1$ ou $f(\ldots f(x)) = 2$, na qual f é aplicada 1999 vezes, porém, pelo exposto no item 1, $f(\ldots f(x)) = 1$ não serve.**
- **Repetindo esse processo sucessivamente, obtém-se $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$. Portanto, a equação tem duas soluções.**

Resposta: C

3. Considere a função assim definida:

   * f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$
   * $f(n) = 0$, se o algarismo das unidades de n for 3
   * $f(10) = 0$
   * $f(n \,.\, m) = f(n) + f(m)$

   a) Calcular f(2).
   b) Calcular f(1991) e f(2008)
   c) Calcular f(n)

RESOLUÇÃO:

a) $f(10) = f(2 \,.\, 5) = f(2) + f(5) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(2) = f(5) = 0$, pois f(2) e f(5) são naturais.

b) 1) $f(3) = 0$, conforme definição da função. Da mesma forma $f(5973) = 0$
$f(5973) = f(1991 \times 3) = f(1991) + f(3) = f(1991) = 0$

2) $f(8) = f(2) + f(2) + f(2) = 0$
$f(2008) = f(251 \,.\, 8) = f(251) + f(8) = f(251)$ (I)

mas $f(753) = 0 \Rightarrow f(251 \,.\, 3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(251) + f(3) = 0 \Rightarrow f(251) = 0$ (II)

De (I) e (II) tem-se
$f(2008) = 0$

c) Seja p um número primo. Se p = 2 ou p = 5, então $f(p) = 0$, conforme item *a*. Se $p \neq 2$ e $p \neq 5$, então o algarismo das unidades de p é 1, 3, 7 ou 9.

1) Se o algarismo das unidades de p for 1, de 3p será 3 e $f(3p) = 0 \Rightarrow f(3) + f(p) = 0 \Rightarrow f(p) = 0$

2) Se o algarismo das unidades de p for 3, pela definição de f, $f(p) = 0$

3) Se o algarismo das unidades de p for 7, de 9p será 3 e $f(9p) = 0 \Rightarrow f(9) + f(p) = 0$
$\Rightarrow f(3) + f(3) + f(p) = 0 \Rightarrow f(p) = 0$

4) Se o algarismo das unidades de p for 9, de 7 p será 3 e $f(7p) = 0$. Como $f(63) = 0 \Rightarrow f(7 \,.\, 9) = 0 \Rightarrow$
$f(7) + f(3) + f(3) = 0 \Rightarrow f(7) = 0$, e
$f(7p) = 0$ temos $f(7) + f(p) = 0 \Rightarrow f(p) = 0$

Assim, $f(p) = 0$ para todo p primo.
Se n é um número natural, maior que um, pode ser decomposto em fatores primos.
Portanto $f(n) = 0$.
Além disso $f(1) = 0$, pois $f(3) = f(3 \,.\, 1) = f(3) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$
Logo $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

4. **(FUVEST-2006)** – Uma função f satisfaz a identidade $f(ax) = af(x)$ para todos os números reais a e x. Além disso, sabe-se que $f(4) = 2$. Considere ainda a função $g(x) = f(x - 1) + 1$ para todo o número real x.

   a) Calcule g(3).
   b) Determine f(x), para todo x real.
   c) Resolva a equação $g(x) = 8$.

RESOLUÇÃO:

(I) $f(ax) = a\,f(x), \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$
(II) $f(4) = 2$
(III) $g(x) = f(x - 1) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

a) 1) De (I) e (II), temos
$a = 2$ e $x = 2 \Rightarrow f(2 \,.\, 2) = 2 \,.\, f(2) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(4) = 2\,f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1$

2) Em (III), $x = 3 \Rightarrow g(3) = f(2) + 1 \Rightarrow g(3) = 2$

b) Em (I), se $x = 4 \Rightarrow f(4 \,.\, a) = a \,.\, f(4) \Rightarrow f(4a) = 2a$
Então: $f(x) = \dfrac{x}{2}$

c) Em (III), $g(x) = \dfrac{x - 1}{2} + 1 = 8 \Rightarrow x = 15$

Respostas: a) $g(3) = 2$ b) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ c) $x = 15$

MÓDULO 34

Funções I

1. **(OBM)** – Seja f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, uma função tal que $f(x)f(y) - f(xy) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, quaisquer que sejam os reais não nulos x e y.

a) Calcule f(1)

b) Encontre uma fórmula para f(x)

RESOLUÇÃO:

a) $\mathbf{f(x) \,.\, f(y) - f(x \,.\, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow f(1) \,.\, f(1) - f(1 \,.\, 1) = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1} \Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow (f(1))^2 - f(1) - 2 = 0 \Rightarrow f(1) = 2 \text{ ou } f(1) = -1 \notin \mathbb{R}_+^*}$

Assim, f(1) = 2

b) $\mathbf{f(x) \,.\, f(y) - f(x \,.\, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow f(x) \,.\, f(1) - f(x \,.\, 1) = \dfrac{x}{1} + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow f(x) \,.\, 2 - f(x) = x + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = x + \dfrac{1}{x}}$

2. **(ITA)** – Sejam três funções f, u, v: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que: $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ para todo x não nulo e $(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1$ para todo x real. Sabendo-se que x_0 é um número real tal que $u(x_0) \,.\, v(x_0) \neq 0$ e $f\left(\dfrac{1}{u(x_0)} \,.\, \dfrac{1}{v(x_0)}\right) = 2$, o valor de $f\left(\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)$ é:

a) –1 b) 1 c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) –2

RESOLUÇÃO:

1) **I)** $\mathbf{(u(x_0))^2 + (v(x_0))^2 = 1}$**, pois**

$\mathbf{(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}}$

II) Como $\mathbf{f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = f\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$ **para todo x não nulo, tem-se** $\mathbf{f\left(\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right) + \dfrac{1}{f\left(\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)} =}$

$$\mathbf{= f\left[\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)} + \dfrac{1}{\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}\right] = f\left[\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)} + \dfrac{v(x_0)}{u(x_0)}\right] =}$$

$$\mathbf{= f\left[\dfrac{(u(x_0))^2 + (v(x_0))^2}{u(x_0) \,.\, v(x_0)}\right] = f\left[\dfrac{1}{u(x_0).v(x_0)}\right] = 2}$$

III) Fazendo $\mathbf{f\left[\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right] = y}$**, tem-se** $\mathbf{y + \dfrac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\Leftrightarrow y = 1 \text{ e } f\left[\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right] = 1}$

Resposta: B

3. **(IME-2007)** – Seja f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008 \frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\dfrac{1}{f(2006)}$.

RESOLUÇÃO:

$$\sum_{k=0}^{2006} f(k) = 2008 \frac{(2006+1)}{(2006+2)} = 2007$$

$$\sum_{k=0}^{2005} f(k) = 2008 \frac{(2005+1)}{(2005+2)} = \frac{2008 \,.\, 2006}{2007}$$

$$f(2006) = \sum_{k=0}^{2006} f(k) - \sum_{k=0}^{2005} f(k) = 2007 - \frac{2008 \,.\, 2006}{2007} =$$

$$= \frac{2007^2 - 2008 \,.\, 2006}{2007} = \frac{2007^2 - (2007^2 - 1)}{2007} =$$

$$= \frac{1}{2007}\text{. Portanto, } \frac{1}{f(2006)} = 2007$$

Resposta: 2007

MÓDULO 35

Funções I

1. **(ITA)** – O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$ b) $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$ c) $\left]0, \frac{7}{4}\right[$

d) $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$ e) $\left]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$

RESOLUÇÃO:

$f(x) = \dfrac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$ está definida e é não negativa para todo x real se, e somente se:

$$\begin{cases} x^2 + (2m+3)x + (m^2+3) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 + (2m+1)x + (m^2+2) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (m^2+3) \leq 0 \\ (2m+1)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (m^2+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m - 3 \leq 0 \\ 4m - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{4} \\ m < \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$$

Resposta: D

2. **(OBM)** – Para todo n natural, definimos a função f por:

$f(n) = \dfrac{n}{2}$ se n é par, $f(n) = 3n + 1$ se n é ímpar. O número de soluções da equação $f(f(f(n))) = 16$ é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

RESOLUÇÃO:
Observe que f(n) é sempre inteira, seja n par ou ímpar.

$$f(f(f(n))) = 16 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(f(n))}{2} = 16 \Rightarrow f(f(n)) = 32 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(n)}{2} = 32 \Rightarrow f(n) = 64 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{n}{2} = 64 \Rightarrow n = 128 \\ \text{ou} \\ 3n + 1 = 64 \Rightarrow n = 21 \end{cases} \\ \text{ou} \\ 3f(n) + 1 = 32 \Rightarrow f(n) = \dfrac{31}{3} \text{ (impossível)} \end{cases} \\ \text{ou} \\ 3f(f(n)) + 1 = 16 \Rightarrow f(f(n)) = 5 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(n)}{2} = 5 \Rightarrow f(n) = 10 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{n}{2} = 10 \Rightarrow n = 20 \\ \text{ou} \\ 3n + 1 = 10 \Rightarrow n = 3 \end{cases} \\ \text{ou} \\ 3f(n) + 1 = 5 \Rightarrow f(n) = \dfrac{4}{3} \text{ (impossível)} \end{cases} \end{cases}$$

Resposta: C

3. Seja f: $\mathbb{R} - \{0; 1\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

Definindo $f_1(x) = f(x)$ e $f_n(x) = f(f(...f(x)...))$, em que f comparece n vezes $(n > 1)$, obtenha
$f_1(x) \,.\, f_2(x) \,.\, f_3(x)...f_{30}(x)$

RESOLUÇÃO:

$$f_1(x) = f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f[f(x)] = f\left[\frac{x-1}{x}\right] =$$

$$= \frac{\dfrac{x-1}{x} - 1}{\dfrac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$

$$f_3(x) = f[f[f(x)]] = f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{-1}{x-1} - 1}{\dfrac{-1}{x-1}} = x$$

$$f_4(x) = f[f_3(x)] = f(x) = \frac{x-1}{x}$$

Assim,

$$f_1(x) \,.\, f_2(x) \,.\, f_3(x) = \frac{x-1}{x} \,.\, \frac{-1}{x-1} \,.\, x = -1$$

de modo análogo, tem-se

$$f_4(x) \,.\, f_5(x) \,.\, f_6(x) = \ldots =$$

$$= f_{28}(x) \,.\, f_{29}(x) \,.\, f_{30}(x) = -1 \text{ e}$$

$$f_1(x) \,.\, f_2(x) \,.\, f_3(x) \,.\, \ldots \,.\, f_{30}(x) = (-1)^{10} = 1$$

Resposta: 1

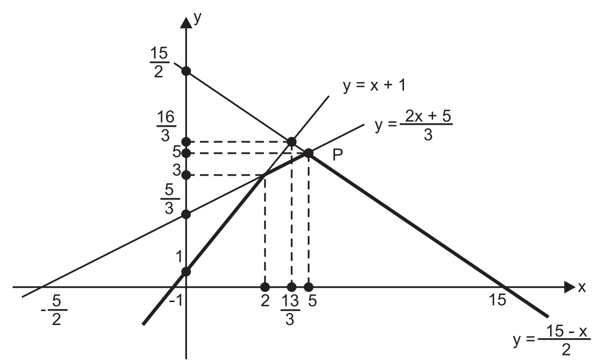
MÓDULO 36

Funções I

1. A função f associa a cada real x o menor elemento do conjunto $\left\{x + 1; \dfrac{15 - x}{2}; \dfrac{2x + 5}{3}\right\}$. O valor máximo de f(x) é:

a) 1 b) 3 c) $\dfrac{15}{2}$ d) $\dfrac{16}{3}$ e) 5

RESOLUÇÃO:



Como f associa a cada real x o menor elemento do conjunto $\left\{x + 1; \dfrac{15 - x}{2}; \dfrac{2x + 5}{3}\right\}$, o gráfico de f é constituído pelos "trechos" das três retas que, dentro de cada intervalo, se encontram mais abaixo.
Assim, o valor máximo de f ocorre no ponto P (5; 5) e é igual a 5.
Resposta: E

2. Sejam f, g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que
$g(x) = 1 - x$ e $f(x) = 2f(2 - x) = (x - 1)^3$, para todo x e $\mathbb{R}$.

Então $f[g(x)]$ é igual a

a) $(x - 1)^3$ b $(1 - x)^3$ c) x^3 d) x e) $2 - x$

RESOLUÇÃO:

Se $f(x) + 2f(2 - x) = (x - 1)^3$ para todo x e $\mathbb{R}$, então:

$$f(1 - x) + 2f(2 - (1 - x)) = [(1 - x) - 1]^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(1 - x) + 2f(1 + x) = -x^3 \text{ (I)}$$

e

$$f(1 + x) + 2f(2 - (1 + x)) = [(1 + x) - 1]^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(1 + x) + 2f(1 - x) = x^3 \text{ (II)}$$

De (I) e (II) tem-se $f(1 - x) = x^3 \Rightarrow f(g(x)) = x^3$

3. Considere duas funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $2.f(x) = 3x - g(x)$ e $2.g(x) = x + 6 - 2.f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O ponto P de intersecção dos gráficos de f e g:

a) pertence ao semieixo positivo das abscissas.
b) pertence ao semieixo positivo das ordenadas.
c) pertence a bissetriz do primeiro quadrante.
d) pertence a bissetriz do segundo quadrante.
e) pertence a bissetriz do terceiro quadrante.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 2f(x) = 3x - g(x) \\ 2g(x) = x + 6 - 2f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) + g(x) = 3x \\ 2g(x) + 2f(x) = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) + g(x) = 3x \\ g(x) = -2x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{5}{2} . x - 3 \\ g(x) = -2x + 6 \end{cases}$$

No ponto de intersecção dos gráficos, temos f(x) = g(x). Assim,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{5}{2} . x - 3 = -2 . x + 6 \Leftrightarrow \frac{9}{2} . x = 9 \Leftrightarrow x = 2 \text{ e}$$

$$f(2) = \frac{5}{2} . 2 - 3 = 2$$

O ponto de intersecção é P(2, 2), que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.
Resposta: C

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 33

1. **(ITA)** – Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{x}\,\text{sen}\,x & \text{se } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

onde $a > 0$ é uma constante. Considere $k = \{y \in R;\ f(y) = 0\}$. Qual o valor de a, sabendo-se que $f(f(\frac{\pi}{2})) \in k$?

a) $\pi/4$ b) $\pi/2$ c) π d) $\pi^2/2$ e) π^2

2. **(ITA)** – Os valores de α, $0 < \alpha < \pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$, para os quais a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = 4x^2 - 4x - tg^2\,\alpha$ assume seu valor mínimo igual a -4, são:

a) $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$ b) $\dfrac{\pi}{5}$ e $\dfrac{2\pi}{5}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{2\pi}{3}$

d) $\dfrac{\pi}{7}$ e $\dfrac{2\pi}{7}$ e) $\dfrac{2\pi}{5}$ e $\dfrac{3\pi}{5}$

■ MÓDULO 34

1. **(IME)** – Dada a função $f(x) = \dfrac{(156^x + 156^{-x})}{2}$, demonstre que:

$f(x + y) + f(x - y) = 2\, f(x)\, f(y)$

2. **(IME)** – Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, tal que $\begin{cases} f(4) = 5 \\ f(x + 4) = f(x)\ .\ f(4) \end{cases}$. O valor de $f(-4)$ é:

a) $-\dfrac{4}{5}$ b) $-\dfrac{1}{4}$ c) $-\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{4}{5}$

■ MÓDULO 35

1. **(ITA)** – O domínio D da função

$$f(x) = \ell n \left[\frac{\sqrt{\pi x^2 - (1 + \pi^2)\,x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x} \right]$$

é o conjunto

a) $D = \{x \text{ e } \mathbb{R} : 0 < x < 3\pi/2\}$
b) $D = \{x \text{ e } \mathbb{R} : x < 1/\pi \text{ ou } x > \pi\}$
c) $D = \{x \text{ e } \mathbb{R} : 0 < x \leq 1/\pi \text{ ou } x \geq \pi\}$
d) $D = \{x \text{ e } \mathbb{R} : x > 0\}$
e) $D = \{x \text{ e } \mathbb{R} : 0 < x < 1/\pi \text{ ou } \pi < x < 3\pi/2\}$

2. **(IME)** – Considere os conjuntos $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e seja a função $f : A \to B$ tal que:

$$f(x, y) = x + y$$

É possível afirmar que f é uma função:

a) injetora b) sobrejetora c) bijetora
d) par e) ímpar

■ MÓDULO 36

1. **(ITA)** – Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ell n\, x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Se D é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, tal que $f: D \to \mathbb{R}$ é injetora, então:

a) $D = \mathbb{R}$ e $f(D) = [-1, +\infty[$
b) $D =]-\infty, 1] \cup]\,e, +\infty\,[$ e $f(D) =]-1, +\infty[$
c) $D = [0, +\infty[$ e $f(D) =]-1, +\infty[$
d) $D = [0, e]$ e $f(D) = [-1, 1]$
e) n. d. a.

Notação: $f(D) = \{y, \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\}$ e $\ell n\, x$ denota o logaritmo neperiano de x.
Observação: Esta questão pode ser resolvida graficamente.

2. **(ITA)** – Considere a função $y = f(x)$, definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, para cada x real.
Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) $y = f(x)$ é uma função par.
b) $y = f(x)$ é uma função ímpar.
c) $f(x) \geq 0$ para todo real x.
d) $f(x) \leq 0$ para todo real x.
e) $f(x)$ tem o mesmo sinal de x, para todo real $x \neq 0$.

■ MÓDULO 33

1) a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{\frac{\pi}{2}} \,.\, \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} < \frac{\pi}{2}$, pois $a > 0$

c) Como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in k, f\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ e $a > 0$, temos:

$a \,.\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a \,.\left(\pi - \frac{2a}{\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\pi^2}{2}$

Resposta: D

2) O minimante de f é $x = -\frac{-4}{2\,.\,4} = \frac{1}{2}$

Se o valor mínimo de f é – 4 então:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\,.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\,.\left(\frac{1}{2}\right) - tg^2\,\alpha = -4 \Leftrightarrow tg^2\,\alpha = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\,\alpha = \pm\sqrt{3}$

Se $0 < \alpha < \pi$ então $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Resposta: C

■ MÓDULO 34

1) Considerando uma função f do tipo $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, como $0 < a \neq 1$.

$f(x + y) + f(x - y) = \frac{a^{x+y} + a^{-(x+y)}}{2} + \frac{a^{x-y} + a^{-(x-y)}}{2} =$

$= \frac{a^x\,.\,a^y + a^{-x}\,.\,a^{-y} + a^x\,.\,a^{-y} + a^{-x}\,.\,a^y}{2} =$

$= \frac{a^x\,.\,(a^y + a^{-y}) + a^{-x}\,.\,(a^y + a^{-y})}{2} =$

$= \frac{(a^y + a^{-y})\,.\,(a^x\,. + a^{-x})}{2} = 2.\,\frac{(a^x\,. + a^{-x})}{2}\,.\,\frac{(a^y + a^{-y})}{2} =$

$= 2\,.\,f(x)\,.\,f(y)$

Se a igualdade é válida para qualquer valor real de a, com $0 < a \neq 1$, é válida também para a = 156, demonstrando a igualdade proposta.

Resposta: Demonstração.

2) $f(x + 4) = f(x)\,.\,f(4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(0 + 4) = f(0)\,f(4) \Leftrightarrow 5 = f(0)\,.\,5 \Leftrightarrow f(0) = 1$

$f(-4 + 4) = f(-4)\,.\,f(4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(0) = = f(-4)\,.\,f(4) \Leftrightarrow 1 = f(-4)\,.\,5 \Leftrightarrow f(-4) = \frac{1}{5}$

Resposta: D

■ MÓDULO 35

1) $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi x^2 - (1 + \pi^2)\,x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x^2 - (1 + \pi^2)\,x + \pi > 0 \\ \text{e} \\ -2x^2 + 3\pi x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x < 1/\pi \text{ ou } x > \pi) \\ \text{e} \\ 0 < x < 3\pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow$

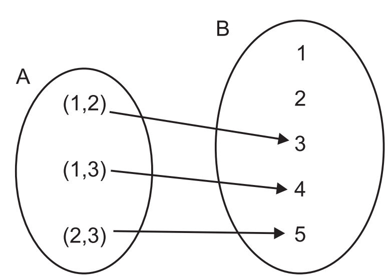
$\Leftrightarrow \boxed{0 < x < 1/\pi \text{ ou } \pi < x < 3\pi/2}$

Resposta: E

2) $f(1, 2) = 1 + 2 = 3$

$f(1, 3) = 1 + 3 = 4$

$f(2, 3) = 2 + 3 = 5$



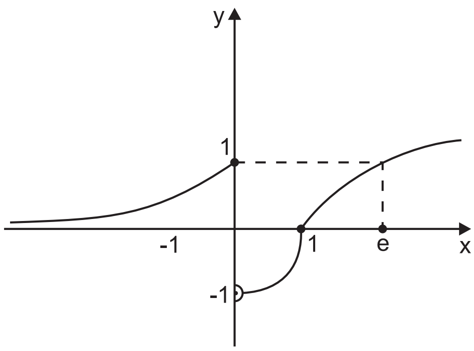
Pelo diagrama de flechas ao lado, tem-se que a função e injetora, mas não é sobrejetora.

Resposta: A

■ MÓDULO 36

1) O gráfico de função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ell n\, x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$ é:



Nos intervalos $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$ e $[0, e]$ a função f não é injetora, pois $f(0) = f(e) = 1$.
Observemos, pelo gráfico, que $\forall\ y \in]-1, +\infty[$, existe um único $x \in]-\infty, 1] \cup]e, +\infty[$ tal que $f(x) = y$.
Assim, f é injetora no intervalo
$D =]-\infty, 1] \cup]e, +\infty[$ e $f(D) =]-1, +\infty[$
Resposta: B

2) Considerando que:
1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x = x\,(x^2 - 2x + 5)$
2) $x^2 - 2x + 5 > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$,
conclui-se que f(x) tem o mesmo sinal de x, para todo real $x \neq 0$.
Resposta: E