
TarasM/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

1

Teoria elementar dos conjuntos

Qualquer pessoa que tenha organizado, agrupado objetos ou qualquer outro tipo de elementos ou reunido indivíduos de acordo com uma característica colocou em prática a noção de conjunto. Embora aparentemente vagos, os conceitos de conjunto e elemento permitem uma análise lógica de informações numéricas ou não bastante precisa. A teoria de conjuntos, desenvolvida em boa parte do que conhecemos hoje por Georg Cantor (1845-1918), serve de base para a formalização de muitos assuntos da Matemática. Ela apresenta linguagem simples, que facilita a comunicação e a compreensão de conceitos mais complexos. Por meio de operações como união, interseção e complemento entre conjuntos, podemos criar uma lógica matemática que nos leva aos mais avançados sistemas de tecnologia.

Conjunto e elemento

O conceito de conjunto é intuitivo ou primitivo. Isso quer dizer que não há uma maneira formal de defini-lo. Você pode usar sinônimos como grupo, coleção ou agrupamento, sempre lembrando que os elementos pertencentes a um conjunto terão alguma propriedade ou característica em comum que os conecta como grupo. Por essa característica, podemos verificar se um elemento pertence ou não ao conjunto.

Vejamos a seguir as representações, operações e ideias que envolvem conjuntos; um assunto básico, porém importante para a Matemática.

Representações de conjuntos

Existem várias maneiras de representar um conjunto. Podemos enumerar cada um de seus elementos se não forem muitos ou até mesmo apresentar uma lógica clara, se forem infinitos. Outra possibilidade é apresentar uma propriedade que caracterize todos os seus elementos. Também podemos definir uma região que limita um conjunto em um diagrama. Vamos detalhar cada uma dessas representações.

Enumeração de elementos

De modo geral, um conjunto é representado por uma letra maiúscula, com seus elementos entre chaves e separados por vírgula; se for necessário, por ponto e vírgula, caso haja números decimais.

Exemplos: M = {3, 8, 9}
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}
P = {0,0002; 0,03}
Q = {a, e, i, o, u}

! Atenção

Não há ordem para os elementos de um conjunto. Geralmente escrevemos em ordem crescente, mas isso não é obrigatório.
Exemplo: {1, 2, 3} = {1, 3, 2} = {2, 1, 3} = {2, 3, 1} = = {3, 1, 2} = {3, 2, 1}.

Propriedades de elementos

Pode ser mais simples mencionarmos a propriedade dos elementos do conjunto do que citar cada um deles.

Exemplos:

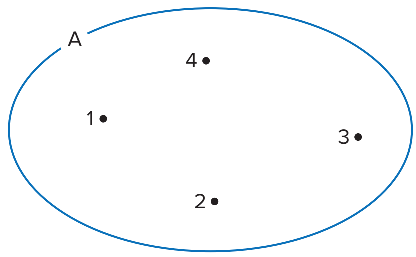
A: Conjunto dos números primos positivos menores que 100
A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97}.

B: Conjunto dos estados da região Sudeste
B = {São Paulo, Minas Gerais, Rio de Janeiro, Espírito Santo}.

Também podemos utilizar o nome de conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, complexos) ou intervalos de valores para representar um conjunto.

Diagramas de elementos

Também conhecidos como diagramas de Euler-Venn, os diagramas de elementos são regiões limitadas nas quais se apresentam os elementos de um conjunto. O conjunto A = {1, 2, 3, 4}, por exemplo, pode ser representado por:



Esses diagramas são muito úteis para mostrar visualmente a relação entre conjuntos.

! Atenção

Na representação de um conjunto, cada elemento deve ser escrito uma única vez. Por exemplo:
{2, 2, 2, 2, 3, 3} = {2, 3}

Conjuntos especiais

Conjunto vazio

Um conjunto sem nenhum elemento é chamado de vazio e pode ser representado por { } ou ∅. Por exemplo, dado o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}, os números pares que pertencem a ele podem formar o conjunto P = {2, 4}; já os números maiores que 3 de A formam o conjunto M = {4, 5}, e o conjunto formado pelos elementos negativos de A será representado por ∅, pois nenhum elemento de A é negativo.

Conjunto unitário

Um conjunto com apenas um elemento é chamado de unitário. O conjunto dos números primos pares, ou seja, C = {2}, é um exemplo desse conjunto.

Conjunto universo

Muitas vezes precisamos definir em qual universo estamos resolvendo nossas questões. O conjunto universo (U) envolve todos os conjuntos e elementos possíveis. Se considerarmos o lançamento de um dado tradicional, por exemplo, o conjunto universo é U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; já se vamos escolher um aluno de uma sala de aula, o conjunto universo é o conjunto com todos os alunos dessa sala.

Relação de pertinência

Cada elemento pode ou não pertencer a um conjunto. Para isso, usamos os símbolos ∈ (pertence) quando for elemento do conjunto, e ∉ (não pertence) caso contrário.

Exemplo: Se M = {1, 2, 3, 4}, então 1 ∈ M, 3 ∈ M e 5 ∉ M.

! Atenção

Note que os símbolos ∈ e ∉ relacionam elemento e conjunto, logo é errado escrever {2} ∈ {1, 2, 3, 4}, pois {2} não representa um elemento.

Subconjunto

Dado um conjunto X e considerados os seus elementos, todos os conjuntos que podemos formar utilizando apenas os elementos de X serão chamados de subconjuntos de X. A esses subconjuntos acrescentamos o conjunto vazio, e assim temos todos os subconjuntos de X.

Exemplo: Se M = {5, 6, 7}, os subconjuntos de M serão:

$$\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}$$

Assim, você pode responder às seguintes perguntas sobre o conjunto M:

a) Qual o subconjunto de M com elementos pares?
Resposta: {6}

b) Quais os subconjuntos de M cujos elementos são números inteiros?
Resposta: {5}, {6}, {7}, {5, 6}, {5, 7}, {6, 7}, {5, 6, 7}

c) Qual o subconjunto de M com números maiores que 10?
Resposta: $\varnothing$

Se A é subconjunto de B, escrevemos $A \subset B$ (que se lê "A está contido em B") ou $B \supset A$ (que se lê "B contém A"). Se A não é subconjunto de B, podemos afirmar que $A \not\subset B$.

! Atenção

O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. A afirmação $\varnothing \subset X$ é sempre verdadeira para qualquer conjunto X, até mesmo para $X = \varnothing$. Mas, cuidado: $\varnothing$ não é um elemento de X e sim um subconjunto de X.

Exercício resolvido

1. Conhecendo o conjunto N = {1, 2}, complete com os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$ e $\not\subset$.

a) 2 ____ N
b) {2} ____ N
c) {3} ____ N
d) N ____ {1}
e) {1, 2} ____ N
f) $\varnothing$ ____ N

Resolução:

Os elementos de N são 1 e 2. Os subconjuntos de N são: $\varnothing$, {1}, {2} e {1, 2}.

Assim, temos:

a) $2 \in N$
b) $\{2\} \subset N$
c) $\{3\} \not\subset N$
d) $N \supset \{1\}$
e) $\{1, 2\} \subset N$
f) $\varnothing \subset N$

Um conjunto formado por todos os subconjuntos de X é chamado de conjunto das partes de X, representado por $\wp$(X). Para facilitar, utilizaremos P(X).

Do **Exercício resolvido 1**, relativo ao conjunto N, temos: $P(N) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \varnothing\}$. Nesse caso podemos escrever $\{1\} \in P(N)$ e $\{2\} \in P(N)$, pois eles são elementos de P(N); e que $\{\{1\}\} \subset P(N)$, pois é subconjunto de P(N).

Propriedades da inclusão

Sendo um conjunto universo U e seus subconjuntos X, Y e Z, temos:

1) $X \subset U$
2) $X \subset X$ (reflexiva)
3) Se $X \subset Y$ e $Y \subset Z$, então $X \subset Z$ (transitiva)
4) Se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$ (igualdade)

Por meio de diagramas, essas propriedades podem ser facilmente verificadas.

Número de subconjuntos

Se um conjunto tem *n* elementos, então ele possui 2^n subconjuntos. Nos conjuntos apresentados anteriormente observamos que:

- M tem 3 elementos e $2^3 = 8$ subconjuntos;
- N tem 2 elementos e $2^2 = 4$ subconjuntos.

Isso é demonstrado pelo princípio fundamental da Contagem, que será posteriormente estudado em Análise Combinatória.

Igualdade de conjuntos e o símbolo "$\Leftrightarrow$"

Dois conjuntos A e B são iguais se possuírem os mesmos elementos. Também podemos afirmar que "todos os elementos de A pertencem a B e todos os elementos de B pertencem a A".

Uma maneira matemática de escrevermos isso é $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, ou seja, *x* pertencer a A é equivalente a *x* pertencer a B. O equivalente dá a ideia de "vice-versa".

Exercício resolvido

2. Determine os valores de *m* e *n* de modo que os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {*n*, 2, *m*} sejam iguais.

Resolução:

Para serem iguais, os conjuntos devem possuir os mesmos elementos, ou seja, {1, 2, 3} = {*n*, 2, *m*}; assim, são duas as possibilidades: $n = 1$ e $m = 3$ ou $m = 1$ e $n = 3$.

Inclusão e o símbolo "$\Rightarrow$"

Se A é subconjunto de B, podemos afirmar que "todos os elementos de A pertencem a B".

Uma maneira matemática de escrevermos isso é $x \in A \Rightarrow x \in B$, ou seja, *x* pertencer a A implica em *x* também pertencer a B. Nessa situação, não podemos concluir que a recíproca é verdadeira.

! Atenção

Ao escrevermos $2x + 3 = 7 \Leftrightarrow 2x = 4$, sabemos que o conjunto solução da primeira equação é igual ao conjunto solução da segunda.
Ao escrevemos $x + 3 = 7 \Rightarrow (x + 3)^2 = 49$, sabemos que o conjunto solução da primeira equação está contido no conjunto solução da segunda.

Exercício resolvido

3. Sendo A e B dois conjuntos não vazios e $A \subset B$, verifique se as sentenças são verdadeiras ou falsas:

I. Se $x \notin A$, então $x \notin B$.
II. Se $x \notin A$, então $x \in B$.
III. Se $x \notin B$, então $x \notin A$.
IV. Se $x \in B$, então $x \notin A$.
V. Sempre existe x, tal que se $x \in B$, então $x \notin A$.

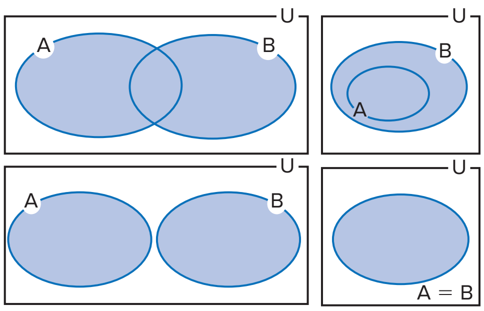
Resolução:

Considerando, por exemplo, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, temos para as sentenças de I a IV:
Sentença I: falsa. Para $x = 3$, temos $x \notin A$ e $x \in B$.
Sentença II: falsa. Para $x = 4$, temos $x \notin A$ e $x \notin B$.
Sentença III: verdadeira.
Sentença IV: falsa. Para $x = 1$, temos $x \in B$ e $x \in A$.
Sentença V: falsa. Os conjuntos A e B podem ser iguais.

Operações entre conjuntos

União

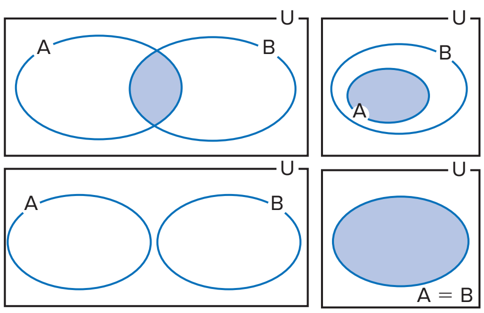
Considere dois conjuntos A e B em um universo U. A união entre eles ($A \cup B$) é um conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos.



Exemplos:
Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.
Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.
Se $A = \varnothing$ e $B = \{1, 2\}$, então $A \cup B = \{1, 2\}$.
Se $A = \{2, 4\}$ e $B = \{3, 5\}$, então $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Interseção

Considere dois conjuntos A e B em um universo U. A interseção ($A \cap B$) entre eles é o conjunto formado pelos elementos comuns aos dois conjuntos.



Exemplos:
Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, então $A \cap B = \{3, 4\}$.
Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, então $A \cap B = \{1, 2\}$.
Se $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, então $A \cap B = \varnothing$.
Se $A = \varnothing$ e $B = \{1, 2\}$, então $A \cap B = \varnothing$.

! Atenção

Quando $A \cap B = \varnothing$, A e B são chamados de conjuntos disjuntos.

PROPRIEDADES DA UNIÃO E DA INTERSEÇÃO

Conjunto vazio	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Conjunto universo	$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Subconjunto $B \subset A$	$A \cup B = A$	$A \cap B = B$
Associativa	$A \cup (B \cup C) =$ $= (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) =$ $= (A \cap B) \cap C$

! Atenção

Propriedade distributiva:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

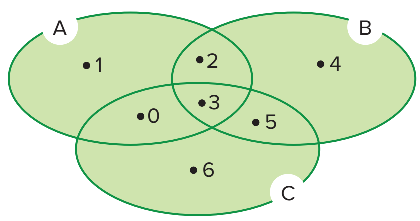
Exercício resolvido

4. Sendo $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{0, 3, 5, 6\}$, calcule e represente no diagrama de Euler-Venn:

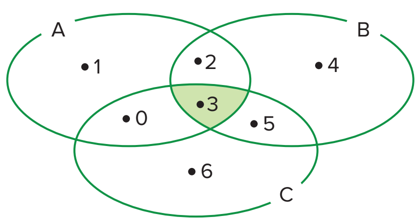
a) $A \cup B \cup C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $A \cup (B \cap C)$

Resolução:

a) Escrevendo os elementos de A, B e C em um único conjunto, temos:
$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

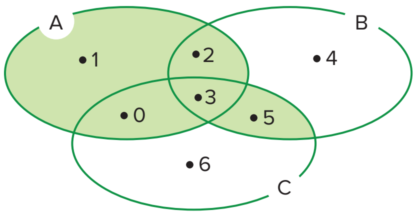


b) O elemento comum a A, B e C é:
$$A \cap B \cap C = \{3\}$$



c) Resolvemos inicialmente $B \cap C = \{3, 5\}$. Unindo os elementos desse conjunto aos elementos de A, temos:

$$A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 5\}$$



Saiba mais

Em um conjunto universo U, a união e a interseção entre A e B podem ser escritas através de suas descrições:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

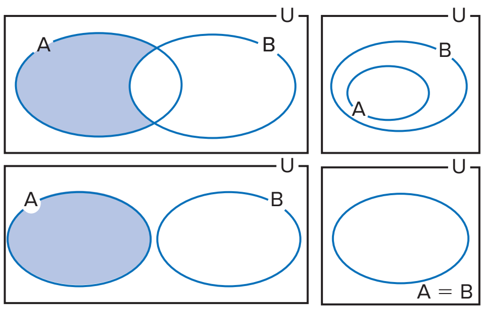
Suponha que exista um conjunto M de alunos que gostam de Matemática e um conjunto H de alunos que gostam de História; quando dizemos "alunos que gostam de Matemática **e** de História", devemos entender que são aqueles que gostam das duas disciplinas ao mesmo tempo, ou seja, temos a interseção.

Já se dissermos "alunos que gostam de Matemática **ou** de História", nos referimos àqueles que pertencem a M, pertencem a H e aqueles que pertencem a ambos; portanto, estamos nos referindo à união entre M e H. Não devemos excluir elementos que pertençam aos dois conjuntos.

Podemos utilizar também como símbolos os operadores lógicos $\wedge$ ("e") e $\vee$ ("ou").

Diferença

Considere dois conjuntos A e B em um universo U. A diferença A – B é um conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.



Exemplos:

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então $A - B = \{1\}$.
Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4\}$, então $A - B = \{1, 2, 3\}$.
Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A - B = \varnothing$.

Para obter A – B, "eliminamos de A os elementos que estão em B".

A diferença A – B pode ser escrita assim:

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

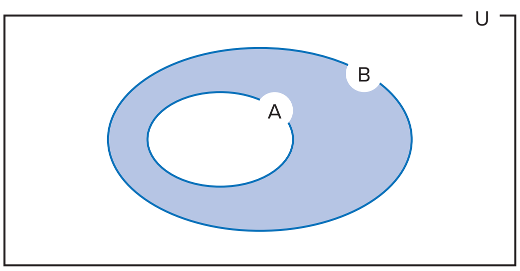
Atenção

Diferente da união e da interseção, não há a propriedade comutativa na diferença.

Note que se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, temos que $A - B = \{1, 2\}$ e $B - A = \{4, 5\}$, ou seja, A – B não é necessariamente igual a B – A.

Complementar de A em relação a B

Considere dois conjuntos A e B em um universo U, com $A \subset B$. O conjunto complementar de A em relação a B (C_B^A) será formado pelos elementos que faltam em A para que ele seja igual ao conjunto B, ou seja, B – A. Representando em diagrama:



Exemplos:

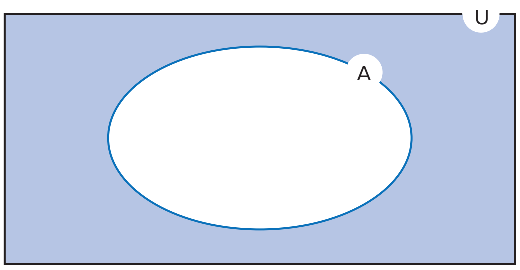
- $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $C_B^A = \{3\}$.
- $D = \{2, 3, 4\}$ e $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_E^D = \{1, 5\}$.

Atenção

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, não podemos aplicar o conceito de complementar de A em relação a B, pois a condição de um ser subconjunto do outro não será satisfeita ($A \not\subset B$).

Complementar de A em relação ao universo

Considere o conjunto A em um universo U. O conjunto complementar de A em relação ao universo é formado por todos os elementos do universo que não pertencem a A.



A expressão "em relação ao universo" pode ser omitida, e diremos apenas complementar de A, representando por $\overline{A}$ ou A' e escrito na forma:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

A partir do diagrama podemos concluir que $\overline{A} \cup A = U$ e $\overline{A} \cap A = \varnothing$.

! Atenção

O conjunto complementar está ligado à ideia de oposição. Por exemplo, sendo A o conjunto de alunos que gostam de Matemática, $\overline{A}$ é formado por aqueles que NÃO gostam de Matemática.

Leis de De Morgan

Há propriedades envolvendo o conjunto complementar com a união e com a interseção. São elas:

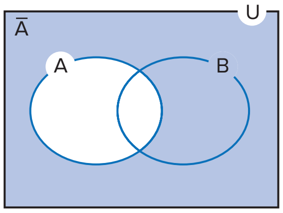
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

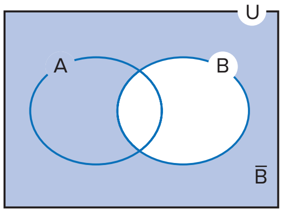
Exercício resolvido

5. Demonstre, utilizando diagramas, que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

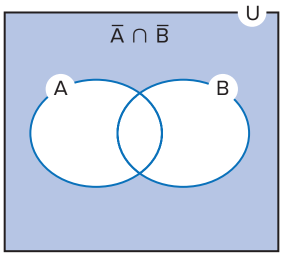
Resolução:

Os diagramas de $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são:





Ao fazer a interseção entre os complementos de A e B (regiões destacadas acima em azul), obtemos:



Logo, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

! Atenção

A negação da expressão "gostam de Matemática **ou** gostam de História" é "não gostam de Matemática **e** não gostam de História".

Estabelecendo relações

A maioria dos *sites* de busca na internet faz uso de uma técnica conhecida como busca booleana. A lógica booleana foi criada no século XIX pelo matemático inglês George Boole e tem como o objetivo combinar e excluir resultados. A busca booleana faz uso de palavras-chave que proporcionam filtros diferentes para os resultados de uma pesquisa: **AND**, **OR** e **NOT** (E, OU e NÃO, em português). Essas palavras interagem com os termos pesquisados da seguinte forma:

- **AND:** serve para combinar termos. Exemplo: ao pesquisar "gato **AND** preto", os resultados serão aqueles que apresentam o termo "gato" e o termo "preto" ao mesmo tempo. Ou seja, o resultado da busca será a **interseção** do conjunto de dados com o termo "gato" com o conjunto de dados com o termo "preto".
- **OR:** serve para incluir termos. Exemplo: ao pesquisar "gato **OR** preto", os resultados serão aqueles que apresentam o termo "gato", o termo "preto" ou os dois termos. Ou seja, o resultado da busca será a **união** do conjunto de dados com o termo "gato" com o conjunto de dados com o termo "preto".
- **NOT:** serve para excluir termos. Exemplo: ao pesquisar "gato **NOT** preto", os resultados serão aqueles que apresentam o termo "gato", mas não o termo "preto". Ou seja, o resultado da busca será a **diferença** entre o conjunto de dados com o termo "gato" e o conjunto de dados com o termo "preto".

Em geral, os *sites* de busca já são programados para oferecer resultados com o uso da palavra **AND**, mesmo sem digitá-la. Por exemplo: ao pesquisar "gato preto", os resultados serão os mesmos da pesquisa por "gato **AND** preto".

Número de elementos da união de conjuntos

Para representar o número de elementos de um conjunto X, usaremos a notação $n(X)$. Assim, $n(A \cap B)$ é o número de elementos da interseção entre A e B, $n(A \cup B \cup C)$ é o número de elementos da união de A, B e C.

Se dois conjuntos A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, percebemos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Exemplo:

Se $A = \{3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 4\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assim, observamos que $n(A \cup B) = 2 + 3 = 5$.

Agora, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, então $A \cap B = \{3\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Devemos notar que $n(A \cup B) = 5$, enquanto $n(A) = 3$ e $n(B) = 3$. Se considerarmos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, contaremos o elemento 3 duas vezes.

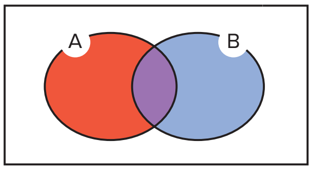
Podemos utilizar a mesma ideia se fizermos um "ajuste" na contagem, ou seja, retirando uma vez todos os elementos que pertencerem à interseção, para que, dessa forma, não sejam contados em duplicidade. Assim, para conjuntos não disjuntos temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exemplo:

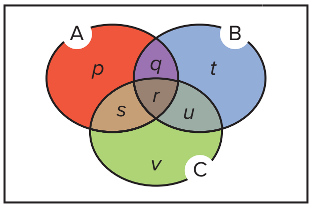
Note que se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {4, 5, 6} temos A ∩ B = {4, 5} e também A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, para o caso em questão teremos $n(A \cup B) = 5 + 3 - 2 = 6$.

Fazendo diagramas e destacando os conjuntos A e B, notamos que a interseção foi “contada” duas vezes.



$n(A \cap B)$

Fazendo diagramas para três conjuntos, percebemos a definição de 7 regiões e $n(A \cup B \cup C) = p + q + r + s + t + u + v$.



$n(A \cup B \cup C)$

Vamos deduzir uma expressão para definir $n(A \cup B \cup C)$.

Temos que $n(A) = p + q + r + s$, $n(B) = q + r + t + u$, $n(C) = r + s + u + v$, daí verificamos que $n(A) + n(B) + n(C) = p + t + v + 2q + 2s + 2u + 3r$.

Retirando as interseções temos:

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) =$$
$$= p + t + v + 2q + 2s + 2u + 3r - (q + r) - (s + r) - (r + u) =$$
$$= p + t + v + 2q + 2s + 2u + 3r - q - r - s - r - r - u =$$
$$= p + t + v + q + s + u$$

Finalmente acrescentamos $n(A \cap B \cap C)$:

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = p + t + v + q + s + u + r$$

Daí concluímos que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Apesar da expressão, é muito comum usar os diagramas para resolver esse tipo de problema, como mostra o exercício a seguir.

Exercícios resolvidos

6. Uma pesquisa revelou hábitos de leitura de livros, jornais e revistas em um grupo de pessoas.

Publicações	Nº de pessoas
livros	14
jornais	15
revistas	17
livros e jornais	5
livros e revistas	4
jornais e revistas	3
livros, jornais e revistas	1
nenhuma leitura	4

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas há no grupo?

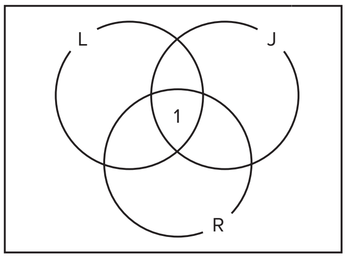
b) Quantas pessoas leem só revistas?

c) Quantas pessoas leem exatamente dois tipos de publicações?

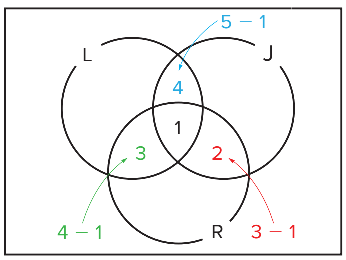
d) Quantas pessoas leem pelo menos dois tipos de publicações?

Resolução:

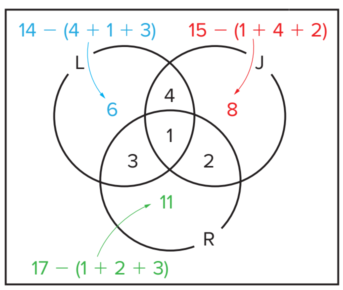
A montagem do diagrama é feita da parte “mais interna”, ou seja, a interseção dos três conjuntos (L, J e R), para a parte “mais externa”. Dessa forma, colocamos o número de elementos em cada região, como mostram as figuras a seguir.



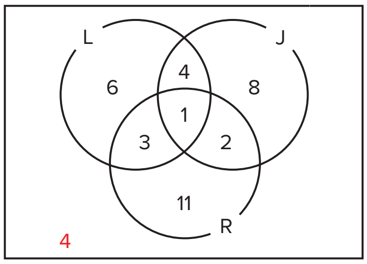
Para manter a coerência com as informações do quadro, devemos “descontar” as regiões que já foram preenchidas. Lembrando que “livros e jornais” deve ser entendido como “os leitores das duas publicações”, ou seja, a interseção entre L e J. Analogamente para “livros e revistas” e “jornais e revistas”.



Seguindo o preenchimento das demais regiões.



Encerramos o preenchimento do diagrama acrescentando aqueles que não leem nenhuma publicação; valor que está nesse universo, mas fora dos conjuntos L, J e R.



Com esse diagrama preenchido, podemos responder às perguntas.

a) Somamos todas as regiões $6 + 4 + 1 + 3 + 8 + 2 + 11 + 4 = 39$ pessoas.

b) São os elementos exclusivos do conjunto R, ou seja, 11 pessoas.

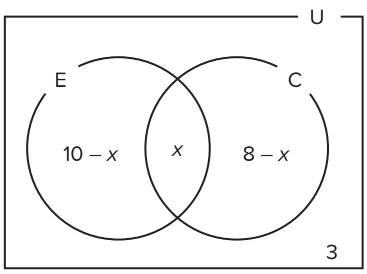
c) São os elementos que estão em apenas dois conjuntos: $3 + 4 + 2 = 9$ pessoas.

d) Pelo menos duas publicações significa que leem duas ou três publicações, ou seja, $3 + 4 + 2 + 1 = 10$ pessoas.

7. Os 20 alunos de uma sala responderam a um questionário sobre esportes que praticam. Verificou-se que 10 deles disseram que praticam esportes coletivos, 8 praticam ciclismo e 3 não praticam esportes. Quantos alunos praticam apenas ciclismo?

Resolução:

Nomeando o conjunto de alunos que praticam esporte coletivo de E, o conjunto de alunos que praticam ciclismo de C e supondo que x alunos praticam ciclismo e esportes coletivos, podemos montar o diagrama abaixo:



No conjunto universo há 20 alunos, portanto:

$$(10 - x) + x + (8 - x) + 3 = 20 \Rightarrow x = 1$$

Assim, verificamos que existem $8 - 1 = 7$ alunos que praticam apenas ciclismo.

8. Em um grupo de 100 pessoas, 60 falam português, 50 falam inglês e 23 são fluentes em espanhol. Sabemos ainda que 20 falam português e inglês, 8 falam português e espanhol e 11 dominam o inglês e espanhol. Se não há pessoas que não saibam nenhum dos três idiomas, quantas pessoas são fluentes nas três línguas?

Resolução:

Sendo P, I e E os conjuntos das pessoas que falam português, inglês e espanhol, respectivamente, temos que:

$$n(P \cup I \cup E) = n(P) + n(I) +$$
$$+ n(E) - n(P \cap I) - n(P \cap E) - n(I \cap E) + n(P \cap I \cap E) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100 = 60 + 50 + 23 - 20 - 8 - 11 + n(P \cap I \cap E) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(P \cap I \cap E) = 6$$

Portanto, 6 pessoas são fluentes nas três línguas.

Saiba mais

Filho de dinamarqueses, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petesburgo, na atual Rússia, em 1845 e, em seus estudos, se interessou pela continuidade e o infinito, concentrando-se em Filosofia, Física e Matemática, e terminando em 1867 seu doutorado, que tinha a teoria dos números como tese.

Por ser especialista nessa área, elaborou a teoria dos conjuntos, revelando muito do que conhecemos hoje. Essa teoria se mostrou muito proficiente, pois criou uma linguagem que unificou alguns ramos da Matemática e deu maior precisão a definições e conceitos.

Em 1874, publicou um revolucionário artigo no qual mostrava, por um processo chamado redução ao absurdo, que os conjuntos infinitos não são todos iguais, ampliando os horizontes da Matemática.

Conjuntos numéricos

Os conjuntos numéricos serão estudados mais detalhadamente em outro capítulo; por enquanto, vamos apenas lembrar como são seus elementos e algumas de suas propriedades.

- Conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

- Conjunto dos números inteiros:

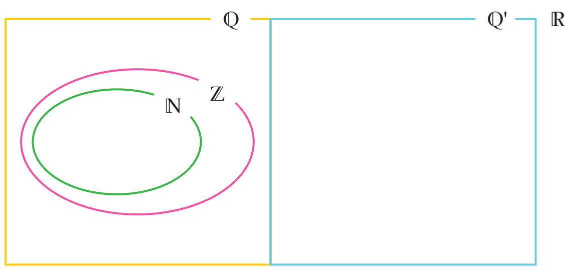
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

- Conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- Conjunto dos números irracionais: é o conjunto formado por números que não são racionais, representado por $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}'$ ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
- Conjunto dos números reais: corresponde à união entre os números racionais e os irracionais, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

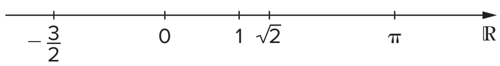
Esses conjuntos podem ser apresentados em um diagrama.



> **! Atenção**
>
> O conjunto dos números irracionais é o complemento do conjunto dos números racionais considerando-se como conjunto universo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Nenhum número pode pertencer aos dois conjuntos simultaneamente, ou seja, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$.

Intervalos reais

Os elementos do conjunto dos números reais podem ser dispostos em uma reta, fornecendo assim uma relação de ordem.



Quanto mais à direita o número estiver, maior ele será. Daí escrevemos:

$5 > 3 \qquad 1 > -2 \qquad -1 > -3$

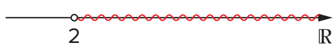
Quanto mais à esquerda, menor o número será. Podemos escrever:

$-7 < -6 \qquad -2 < 0 \qquad 5 < 8$

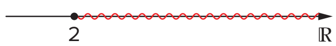
Como 4 está à esquerda de 6, então $4 < 6$ ou $6 > 4$. As duas afirmações são equivalentes.

Para destacarmos "partes" da reta, utilizamos a representação de intervalos.

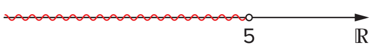
Os números x maiores que 2 são escritos na forma $x > 2$. Como o 2 não está incluído, utilizamos a notação de "bolinha aberta".



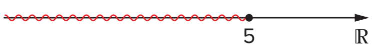
Se o número 2 estivesse incluído, escreveríamos $x \geqslant 2$ e utilizaríamos a notação de "bolinha fechada".



Para números menores que 5, escrevemos $x < 5$ e "bolinha aberta".



Novamente, incluindo o número 5, escrevemos $x \leqslant 5$ e "bolinha fechada".

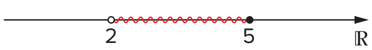


Em intervalos limitados, é necessário estabelecer os dois extremos e há as seguintes possibilidades:

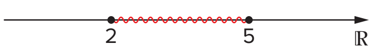
$x > 2$ e $x < 5$ ou
$2 < x < 5$

$x \geqslant 2$ e $x < 5$ ou
$2 \leqslant x < 5$

$x > 2$ e $x \leqslant 5$ ou
$2 < x \leqslant 5$



$x \geqslant 2$ e $x \leqslant 5$ ou
$2 \leqslant x \leqslant 5$



Utilizando a notação de conjuntos na representação dos intervalos apresentados anteriormente, temos:

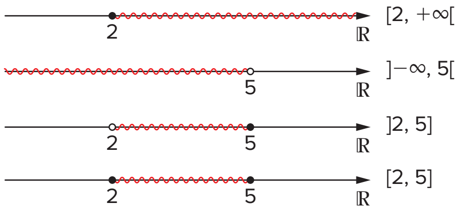
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

Utilizando colchetes

Também podemos representar intervalos numéricos reais utilizando colchetes. Quando incluímos a extremidade ("bolinha fechada"), o colchete fica voltado para dentro, já quando excluímos a extremidade do intervalo ("bolinha aberta"), o colchete fica voltado para fora.

Quando uma extremidade é livre (sem fim), usamos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ (mais e menos infinito) com colchetes voltados para fora.

Assim temos os exemplos:



Intervalos reais.

> **! Atenção**
>
> Também é correta a utilização de parênteses no lugar do colchete voltado para fora. Assim:
>
> $[2, +\infty[= [2, +\infty) \qquad [3, 6[= [3, 6)$

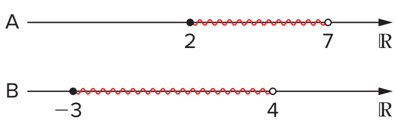
Exercício resolvido

9. Dados os intervalos $A = [2, 7[$ e $B = [-3, 4[$, represente na forma de colchetes os resultados de:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$

Resolução:

A representação na reta auxilia a visualização:



a) Unindo todos os elementos em um único intervalo, temos: $A \cup B = [-3, 7[$.

b) Os elementos comuns são $A \cap B = [2, 4[$.

c) Retirando de A os elementos que estão em B, temos: $A - B = [4, 7[$.

> **! Atenção**
>
> Os colchetes representam intervalos reais. No intervalo [5, 7], temos infinitos elementos entre o 5 e o 7, apesar de muitos lembrarem apenas dos números inteiros 5, 6 e 7.

Revisando

1. Sendo A = {1, 2, 3, 4, 5}, utilize os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ e $\supset$ para relacionar as informações.
   - a) 2 ____ A
   - b) {1} ____ A
   - c) {5, 6} ____ A
   - d) 6 ____ A
   - e) A ____ {3, 4}
   - f) $\varnothing$ ____ A

2. Escreva os subconjuntos de M = {1, 2, 3}.

3. Quantos subconjuntos há em um conjunto com 5 elementos?

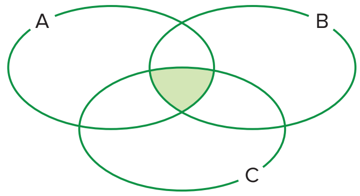
4. Dados os conjuntos A = {1, 2, 4, 8}, B = {3, 4, 7, 8} e C = {1, 4, 5}, escreva o conjunto resultante das operações a seguir.
   - a) $A \cup B$
   - b) $A \cap B$
   - c) $B - C$
   - d) $A \cap B \cap C$
   - e) $C \cap (A \cup B)$
   - f) $C \cup (A \cap B)$

5. Dado o conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e os conjuntos A = {1, 2, 4, 5} e B = {1, 5}, escreva os conjuntos indicados em cada item.
   - a) $\overline{A}$
   - b) $\overline{B}$
   - c) C_A^B

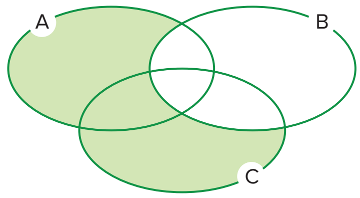
6. Verifique quais elementos de A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} tornam as sentenças verdadeiras:
   - a) $x > 5$ ou $x < 3$
   - b) $x > 2$ e $x < 5$
   - c) $x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 6$
   - d) $4 \leqslant x < 7$
   - e) $x < 6$ ou $x > 2$
   - f) $x < 4$ e $x > 6$

7. **FGV-BA 2017** Dois conjuntos A e B têm a mesma quantidade de elementos. A união deles tem 2 017 elementos e a interseção deles tem 1 007 elementos. O número de elementos do conjunto A é:
   - a) 505
   - b) 1 010
   - c) 1 512
   - d) 1 515
   - e) 3 014

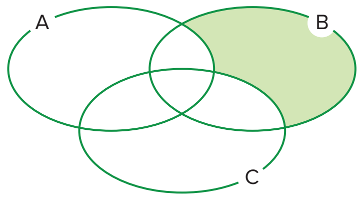
8. Descreva as regiões destacadas usando as operações de união, interseção e diferença.
   - a)



   - b)



   - c)



9. Foi observado em um hospital que 18 pacientes têm febre, 15 têm coriza e 12 têm dores no peito. Desses pacientes, 4 têm febre e coriza, 7 têm coriza e dores no peito, 5 têm febre e dores no peito e 3 apresentam os três sintomas. Pergunta-se:
   - a) Qual o número de pacientes sendo observados?
   - b) Qual o número de pacientes apenas com coriza?
   - c) Qual a quantidade de pacientes com febre ou coriza, mas sem dores no peito?

10. Utilizando o diagrama de Euler-Venn, mostre que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercícios propostos

1. Considere os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3}. Utilizando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ e $\supset$, indique a relação em cada item.
   - a) 1 ____ A
   - b) {1} ____ A
   - c) 4 ____ B
   - d) {4} ____ B
   - e) B ____ {1, 2}
   - f) $\varnothing$ ____ A
   - g) {1, 4} ____ A
   - h) $\varnothing$ ____ B
   - i) A ____ {2, 3}
   - j) A ____ B

2. Dados os conjuntos X = {1, 2, 3, 4, 5}, Y = {3, 4, 5, 6} e Z = {5, 6, 7}, efetue:
   - a) $X \cup Y$
   - b) $Y \cup Z$
   - c) $X \cup Y \cup Z$
   - d) $X \cap Y$
   - e) $X \cap Y \cap Z$
   - f) $X \cap (Y \cup Z)$
   - g) $(X \cap Y) \cup Z$
   - h) $(X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$

3. Para A = {2, 4, 6, 8, 10} e B = {1, 2, 4, 7, 8}, calcule:
   - a) $A - B$
   - b) $B - A$
   - c) $(A - B) \cup (B - A)$

4. Sendo o conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e os conjuntos M = {1, 2, 3, 4} e N = {1, 2}, determine:
   - a) $\overline{M}$
   - b) $\overline{N}$
   - c) C_M^N

5. Represente em um diagrama Euler-Venn os conjuntos A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 2, 3}, C = {2, 3, 4, 5} e D = {4, 5, 6}, indicando a posição correta de cada elemento.

6. Utilizando diagramas, verifique que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

7. Sejam x e y números tais que os conjuntos {0, 7, 1} e {x, y, 1} são iguais. É correto afirmar que:
   - a) $x = y$.
   - b) $x = 0$ e $y = 7$.
   - c) $x = 0$ e $y = 1$.
   - d) $x + 2y = 7$.
   - e) $x + y = 7$.

8. Os conjuntos X e Y são tais que X = {2, 3, 4, 5} e X ∪ Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. É necessariamente verdade que:

a) {1, 6} ⊂ Y
b) Y = {1, 2, 6}
c) X ∩ Y = {2, 3, 4, 5}
d) X ⊂ Y
e) 4 ∈ Y

9. A quantidade de conjuntos X que satisfazem a inclusão {1, 2} ⊂ X ⊂ {1, 2, 3, 4} é:

a) 4
b) 5
c) 3
d) 2
e) 1

10. Escreva todos os subconjuntos de P = {1, 2, 3, 4}.

11. Quantos subconjuntos tem um conjunto com 6 elementos?

12. Dados os conjuntos não vazios A e B, verifique quais sentenças são falsas e quais são verdadeiras:

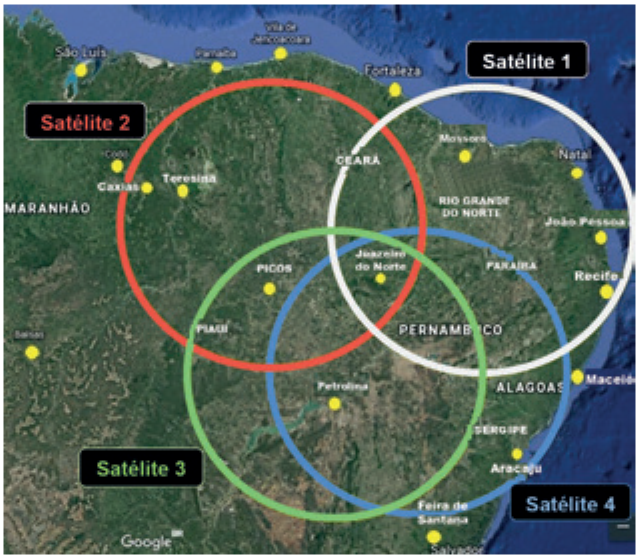
- ☐ $x \in A$ e $x \in B$, $x \in A \cap B$
- ☐ $x \in A$ e $x \notin B$, $x \in A - B$
- ☐ $x \in A$ ou $x \in B$, $x \in B - A$
- ☐ $x \in A$ ou $x \in B$, $x \in A \cup B$

13. Dados dois conjuntos, A e B, onde A ∩ B = {*b*, *d*}, A ∪ B = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*} e B − A = {*a*}, o conjunto B é igual a:

a) {*a*}
b) {*c*, *e*}
c) {*a*, *b*, *d*}
d) {*b*, *c*, *d*, *e*}
e) {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*}

14. **Uema 2020** A rede de satélites destinados para função GPS é de aproximadamente 30 satélites que circulam a Terra em seis diferentes órbitas preestabelecidas e distribuídas de uma maneira que, a qualquer momento e em qualquer ponto da Terra, estão visíveis aos satélites. A área circular de cobertura de cada satélite cobre um conjunto de cidades. Em Matemática, trabalhamos as operações de interseção, de união, de diferença de conjuntos, entre outras.

Analise a imagem a seguir, considerando que os círculos são conjuntos e as cidades indicadas são elementos.



Em relação à imagem, é correto afirmar que

a) a interseção das coberturas dos satélites 2, 3 e 4 compreende as cidades de Picos, Juazeiro do Norte e Petrolina.
b) a diferença entre os conjuntos das coberturas dos satélites 1 e 4 compreende as cidades de Petrolina, Aracaju e Juazeiro do Norte.
c) a união das coberturas dos satélites 3 e 4 compreende as cidades de Picos, Juazeiro do Norte, Petrolina, Aracaju e Salvador.
d) a diferença entre os conjuntos das coberturas dos satélites 2 e 3 compreende as cidades de Caxias, Teresina, Picos e Juazeiro do Norte.
e) a união das coberturas dos satélites 1, 2 e 3 compreende as cidades de Caxias, Picos, João Pessoa, Juazeiro do Norte, Natal, Petrolina, Recife, Teresina e Mossoró.

15. Em uma cooperativa de agricultores do município de Vitória de Santo Antão, foi realizada uma consulta em relação ao cultivo da cultura da cana-de-açúcar e do algodão. Constatou-se que 125 associados cultivam a cana-de-açúcar, 85 cultivam o algodão e 45 cultivam ambos. Sabendo que todos os cooperativados cultivam pelo menos uma dessas duas culturas, qual é o número de agricultores da cooperativa?

a) 210
b) 255
c) 165
d) 125
e) 45

16. **Uerj 2017** Crianças de uma escola participaram de uma campanha de vacinação contra a paralisia infantil e o sarampo. Após a campanha, verificou-se que 80% das crianças receberam a vacina contra a paralisia, 90% receberam a vacina contra o sarampo, e 5% não receberam nem uma, nem outra. Determine o percentual de crianças dessa escola que receberam as duas vacinas.

17. Em uma enquete realizada com pessoas de idade superior a 30 anos, pesquisou-se as que estavam ou não estavam casadas e se tinham ou não filhos. Constatou-se que 45 pessoas não eram casadas, 49 não tinham filhos, e 99 estavam casadas e com filhos. Sabendo-se que 180 pessoas responderam a essa enquete, o número das que se declararam não casadas e sem filhos foi de

a) 13
b) 23
c) 32
d) 34
e) 36

18. **UEG-GO 2019** Em uma pesquisa sobre a preferência para o consumo de dois produtos, foram entrevistadas 970 pessoas. Dessas, 525 afirmaram consumir o produto A, 250 o produto B e 319 não consomem nenhum desses produtos. O número de pessoas que consomem os dois produtos é

a) 124
b) 250
c) 525
d) 527
e) 775

19. Ibmec-SP Um grupo de arqueólogos descobriu uma série de registros de uma antiga civilização que viveu nas montanhas geladas do Himalaia. Entre esses registros, havia um sobre as classificações que eles estabeleceram para os números, que foi devidamente decifrado e está transcrito a seguir.

Todo número simpático é esperto. Alguns números elegantes são simpáticos, mas nenhum número elegante é legal. Todo número legal, por sua vez, é esperto.

A partir desses registros, conclui-se que, necessariamente,

a) existem números legais que são simpáticos.
b) pelo menos um número esperto não é legal.
c) existem números elegantes que não são espertos.
d) alguns números elegantes são espertos, mas não são simpáticos.
e) todo número esperto ou é elegante ou é legal.

20. PUC-Campinas Dentre as músicas que estão no celular de Eduarda, 85 são de artistas brasileiros. Na categoria Pop, há 73 músicas, das quais 27 são de artistas estrangeiros. Sabendo que fora da categoria Pop metade das músicas são de artistas brasileiros, o número total de músicas no celular de Eduarda é:

a) 166 **b)** 142 **c)** 159 **d)** 151 **e)** 172

21. Mackenzie-SP 2018 Em uma pesquisa com 120 pessoas, verificou-se que

- 65 assistem ao noticiário A;
- 45 assistem ao noticiário B;
- 42 assistem ao noticiário C;
- 20 assistem ao noticiário A e ao noticiário B;
- 25 assistem ao noticiário A e ao noticiário C;
- 15 assistem ao noticiário B e ao noticiário C;
- 8 assistem aos três noticiários.

Então o número de pessoas que assistem somente a um noticiário é

a) 7 **b)** 8 **c)** 14 **d)** 28 **e)** 56

22. UEPG-PR 2018 As marcas de celulares mais vendidas em um quiosque, em um certo mês, foram S, N e A. Os vendedores constataram que a venda se deu de acordo com a tabela abaixo.

Marcas vendidas	Número de compradores
S	35
N	40
A	40
S e N	15
S e A	12
N e A	10
S, N e A	5
Outras marcas	35

A partir do que foi exposto, assinale o que for correto.

01 115 compradores levaram apenas uma das marcas de celular.
02 83 compradores não levaram a marca S.
04 23 compradores não levaram a marca S e nem a N.
08 22 compradores levaram apenas duas das marcas de celular.

Soma:

23. IFPE 2019 Em uma pesquisa de opinião acerca dos processos de geração de energia e seus impactos na natureza, foi constatado que:

- 40 entrevistados aprovam o uso da energia nuclear;
- 180 entrevistados aprovam o uso da energia eólica;
- 150 entrevistados aprovam o uso da energia solar;
- 15 entrevistados aprovam a utilização das energias eólica e nuclear;
- 10 entrevistados aprovam a utilização das energias nuclear e solar;
- 50 entrevistados aprovam a utilização das energias eólica e solar;
- 5 entrevistados aprovam a utilização das energias nuclear, eólica e solar;
- 30 entrevistados não aprovam o uso de nenhum desses três mecanismos de geração de energia.

Determine o total de pessoas entrevistadas.

a) 280 **b)** 370 **c)** 480 **d)** 220 **e)** 330

24. IFSul-RS 2016 (Adapt.) Em um grupo de 60 jovens praticantes de vôlei, basquete e futsal, sabe-se que:

- 3 praticam os três esportes citados;
- 7 jogam vôlei e basquete;
- 25 jogam vôlei;
- 27 praticam basquete;
- 10 praticam basquete e futsal;
- 30 jogam futsal;
- 8 praticam vôlei e futsal.

Quantos jovens praticam apenas dois esportes?

a) 16 **b)** 17 **c)** 19 **d)** 25

25. Uece 2018 Em um grupo de 200 estudantes, 98 são mulheres das quais apenas 60 não estudam comunicação. Se do total de estudantes do grupo somente 60 estudam comunicação, o número de homens que não estudam esta disciplina é:

a) 60 **b)** 80 **c)** 85 **d)** 75.

26. PUC-RS Numa escola de idiomas, 250 alunos estão matriculados no curso de inglês, 130 no de francês e 180 no de espanhol. Sabe-se que alguns desses alunos estão matriculados em 2, ou até mesmo em 3 desses cursos. Com essas informações, pode-se afirmar que o número de alunos que estão matriculados nos três cursos é, no máximo,

a) 130 **b)** 180 **c)** 250 **d)** 310 **e)** 560

27. **Uece** Em uma pesquisa que envolveu 120 alunas de uma academia de dança, foram obtidos os seguintes dados: 80 delas querem ser atrizes, 70 querem ser cantoras e 50 querem ser atrizes e cantoras. Considerando estes dados, é correto concluir que o número de alunas que não querem ser cantoras nem atrizes é:

a) 30 **c)** 40
b) 50 **d)** 20

28. **UFSC 2018** Preocupado com a saúde de seus funcionários, o dono de uma empresa realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus empregados. Ele constatou que todos se alimentam ao menos uma vez ao dia e que, devido à rotina familiar e de trabalho, os únicos momentos de alimentação são: café da manhã, almoço e jantar. Os funcionários deveriam responder quando se alimentavam com algum tipo de proteína de origem animal. A pesquisa revelou que:

- 12 ingerem algum tipo de proteína animal apenas no café da manhã;
- 17 ingerem algum tipo de proteína animal apenas no jantar;
- 147 ingerem algum tipo de proteína animal no almoço;
- 97 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã e no almoço;
- 94 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã e no jantar;
- 87 ingerem algum tipo de proteína animal no almoço e no jantar; e
- 66 ingerem algum tipo de proteína animal no café da manhã, no almoço e no jantar.

Se o total de funcionários da empresa for 260, determine o número de funcionários que não se alimentam com proteína animal em nenhuma das refeições.

29. **Fuvest-SP 2018** Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;
II. 16 não obtiveram nota mínima em português;
III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;
IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;
V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;
VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês; e
VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

a) 44. **c)** 47. **e)** 49.
b) 46. **d)** 48.

30. Dados os intervalos M = [2, 7] e N =]4, 8], efetue:

a) $M \cup N$ **c)** $M - N$
b) $M \cap N$ **d)** $N - M$

31. Escreva os intervalos a seguir na notação de conjuntos, como mostra o exemplo:

$]5, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leqslant 6\}$

a) [2, 8] **b)** [3, 6[**c)**]1, +∞[**d)**]−∞, 7]

32. Considerando os intervalos de números reais, o resultado de $]5, 7[\cap [6, 9]$ é:

a)]5, 9] **c)** [6, 7[**e)**]6, 7[
b) ∅ **d)** {6}

33. Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$, subconjuntos de $\mathbb{R}$. Podemos afirmar que:

a) $(A - B) \subset B$ **c)** $(B - A) \subset A$
b) $(A - B) \subset A$ **d)** $A - B =]2, 4[$

34. **Urca-CE** Considere os conjuntos A = [3, 7], B = (2, 5] e C = (4, 6). Então $(A - B) \cap C$ é:

a) [4, 5) **d)** (5, 6)
b) (3, 6) **e)** (2, 5)
c) (4, 5)

35. **Mackenzie-SP** Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 60\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, então o número de elementos do conjunto das partes de $A \cap B$ é um número

a) múltiplo de 4, menor que 48.
b) primo, entre 27 e 33.
c) divisor de 16.
d) par, múltiplo de 6.
e) pertencente ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 32 < x \leqslant 40\}$.

36. Dado o conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, escreva os elementos dos conjuntos a seguir:

$A = \{x \in U \mid x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 8\}$
$B = \{x \in U \mid x > 3 \text{ e } x \leqslant 7\}$
$C = \{x \in U \mid 5 < x < 9 \text{ e } x = 7\}$
$D = \{x \in U \mid x < 4 \text{ e } x > 6\}$

Texto complementar

A teoria de conjuntos e a lógica matemática

Com base nas ideias simples de união, interseção e complemento, podemos entender melhor a lógica de sentenças matemáticas envolvendo os conectivos "e" (simbolicamente ∧), "ou" (simbolicamente ∨) e "não" (simbolicamente ∼ ou ¬). Dizer que $x < 2$ **ou** $x > 8$ é entendido como a união de dois intervalos numéricos. Utilizando o conectivo "e" e escrevendo a sentença $x > 5$ **e** $x < 8$, temos a interseção de intervalos numéricos, e quando afirmamos que $x \neq 3$, percebemos a ideia de complemento (todos, menos o 3).

Considere, por exemplo, os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {3, 4}.

Valor de x	$x \in$ A	$x \in$ B	$x \in$ (A $\cup$ B)
1	verdadeiro	falso	verdadeiro
2	verdadeiro	falso	verdadeiro
3	verdadeiro	verdadeiro	verdadeiro
4	falso	verdadeiro	verdadeiro
5	falso	falso	falso

A união é formada pelos elementos $x \in$ A ou $x \in$ B.

Agora vamos pensar em quatro pessoas:

A $\rightarrow$ é alta e tem cabelos escuros

B $\rightarrow$ é baixa e tem cabelos claros

C $\rightarrow$ é alta e tem cabelos claros

D $\rightarrow$ é baixa e tem cabelos escuros

Precisamos escolher uma pessoa que "é alta **ou** tem cabelos claros":

Pessoa	É alta	Tem cabelos claros	É alta **ou** tem cabelos claros
A	verdadeiro	falso	verdadeiro
B	falso	verdadeiro	verdadeiro
C	verdadeiro	verdadeiro	verdadeiro
D	falso	falso	falso

A tabela a seguir é igual à tabela anterior. Na lógica matemática trocamos "é alta" por "p", "tem cabelos claros" por "q" e "é alta ou tem cabelos claros" por "$p \vee q$". Daí temos:

p	q	$p \vee q$
V	F	V
F	V	V
V	V	V
F	F	F

Repetindo o raciocínio para a interseção e nos valendo dos mesmos conjuntos A e B citados inicialmente:

Valor de x	$x \in$ A	$x \in$ B	$x \in$ (A $\cap$ B)
1	verdadeiro	falso	falso
2	verdadeiro	falso	falso
3	verdadeiro	verdadeiro	verdadeiro
4	falso	verdadeiro	falso
5	falso	falso	falso

A interseção é formada pelos elementos tais que $x \in$ A e $x \in$ B.

Escolhendo, entre o mesmo grupo de pessoas já citadas, uma pessoa que "é alta **e** tem cabelos claros":

Pessoa	É alta	Tem cabelos claros	É alta e tem cabelos claros
A	verdadeiro	falso	falso
B	falso	verdadeiro	falso
C	verdadeiro	verdadeiro	verdadeiro
D	falso	falso	falso

Finalmente, trocando o "e" por $\wedge$, temos:

p	q	$p \wedge q$
V	F	F
F	V	F
V	V	V
F	F	F

Para o complemento é mais simples, pois ele está associado à negação. Afirmar que $x \in \overline{A}$ tem o mesmo significado de $x \notin$ A.

Valor de x	$x \in$ A	$x \notin$ A
1	verdadeiro	falso
4	falso	verdadeiro

Escolhendo uma pessoa que "é alta":

Pessoa	É alta	Não é alta
A	verdadeiro	falso
B	falso	verdadeiro

A negação é mais comumente representada por "$\sim$". Assim:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Essas tabelas de lógica matemática são chamadas de tabelas-verdade. A partir delas e das propriedades de conjuntos podemos deduzir outras.

Por exemplo: qual a negação de "com chuva e com frio"?

p: com chuva

q: com frio

$p \wedge q$: com chuva e com frio

Vamos utilizar a propriedade de De Morgan: $\overline{B \cap R} = \overline{B} \cup \overline{R}$. Como o complemento corresponde à negação, em lógica matemática teremos:

$$\sim (p \wedge q) \text{ é equivalente a } \sim p \vee \sim q$$

Assim, a negação de "com chuva e com frio" é "sem chuva ou sem frio".

Texto elaborado para fins didáticos.

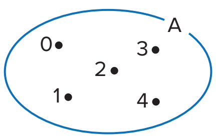
Resumindo

Representações de conjuntos

Enumeração: A = {0, 1, 2, 3, 4}

Propriedade: A = {$x \in \mathbb{N}$ | $x \leqslant 4$}

Diagrama de Euler-Venn:



Relação de pertinência ($\in$ e $\notin$)

Usado entre elementos e conjuntos, por exemplo: 1 $\in$ {1, 2, 3} e 4 $\notin$ {5, 6, 7}.

Subconjuntos

Os subconjuntos de {1, 2, 3} são: $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}.

O número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n.

Relação de inclusão ($\subset$, $\not\subset$ e $\supset$)

Usado entre conjuntos e seus subconjuntos, por exemplo: $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$ e $\{4\} \not\subset \{5, 6\}$.

Operações entre conjuntos

União: $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Interseção: $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Diferença: $A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Complemento: $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$

Número de elementos da união

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) +$
$+ n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Intervalos

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ $\quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ $\quad]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ $\quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ $\quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

Quer saber mais?

Sites

MARINHO, Adília. *Vida e obra de Georg Cantor. Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM)*, 3 mar. 2021. Disponível em: https://clube.spm.pt/news/vida-obra-de-georg-cantor.

Nesse *site*, você encontra a biografia de Georg Cantor, além de um vídeo que aborda a teoria de conjuntos desenvolvida por ele.

Acesso em: 8 jul. 2022.

O conceito de conjunto. *Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)*, 3 mar. 2008. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/itc2004cap2.pdf.

No endereço sugerido, há um capítulo abordando o conceito de conjunto e a relação da lógica matemática com os conjuntos, além de exercícios sobre o assunto.

Acesso em: 8 jul. 2022.

Exercícios complementares

1. UEPG-PR Considerando os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$

$B = \{3, 4, 6, 7, 9\}$

$M = (A \cup B) - (A \cap B)$, assinale o que for correto.

01 $4 \in M$

02 $\{1, 6\} \subset M$

04 $(A - B) \cup M = \{1, 2\}$

08 $\{3, 4, 6\} \subset M$

16 $A \cap M$ é um subconjunto unitário

Soma:

2. ITA-SP 2017 Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

a) 10. **b)** 11. **c)** 12. **d)** 13. **e)** 14.

3. Col. Naval-RJ 2017 Dados os conjuntos $A = \{f, g, h, k\}$, $B = \{g, h, k\}$ e $C = \{f, g\}$ e sabendo que X é construído a partir das seguintes informações:

I. $X \subset (A \cup B \cup C)$

II. $X \cap C = \{f\}$

III. $B - X = \{g, h\}$

Pode-se afirmar que:

a) $[(A - X) \cup C] - B = \{f, g\}$

b) $[(X - A) \cap C] = \{f, g, k\}$

c) $[(A - B) \cup X] - C = \{g, h\}$

d) $[X \cap (A - B)] \cup C = \{g, h, k\}$

e) $[(A - X) \cap (B - X)] = \{g, h\}$

4. Ifal 2016 A Lógica estuda a valorização das sentenças e suas relações, e muitas vezes usa a simbologia dos conjuntos para expressar essa linguagem. Por exemplo: sejam o conjunto dos jogadores de futebol e o conjunto dos atletas, denotados por F e A, respectivamente. A sentença lógica "TODO JOGADOR DE FUTEBOL É ATLETA" significa que, para qualquer elemento $X \in F$, tem-se também que $X \in A$. Representamos simbolicamente por $F \subset A$, ou seja, o conjunto F está contido no conjunto A.

Posto isto, a simbologia $F \not\subset A$ expressa corretamente pela lógica que:

a) nenhum jogador de futebol é atleta.

b) todo atleta é jogador de futebol.

c) existe jogador de futebol que é atleta.

d) existe atleta que não é jogador de futebol.

e) existe jogador de futebol que não é atleta.

5. Col. Naval-RJ Sejam A, B e C conjuntos tais que: $A = \{1, \{1, 2\}, \{3\}\}$, $B = \{1, \{2\}, 3\}$ e $C = \{\{1\}, 2, 3\}$. Sendo X a união dos conjuntos $(A - C)$ e $(A - B)$, qual será o total de elementos de X?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

6. Se o conjunto A tem 5 elementos e B tem 8 elementos, podemos concluir que o número de elementos de $A - B$ é no mínimo:

a) 0 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

7. Se $A \cup B$ tem 10 elementos e $A \cap B$ tem 3 elementos, podemos afirmar que:

a) A tem no máximo 3 elementos.

b) $A - B$ tem 2 elementos.

c) B tem 10 elementos.

d) $(A - B) \cup (B - A)$ tem 7 elementos.

e) A tem, no mínimo, 7 elementos.

8. A diferença simétrica entre A e B é uma operação representada por $A \Delta B$ tal que:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, escreva $A \Delta B$.

9. Mostre através de um diagrama que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Esta propriedade é chamada de distributiva da união em relação à interseção.

10. Dados A e B não disjuntos e não vazios, mostre através de diagramas que $A - B = A \cap \overline{B}$.

11. Sendo A e B dois conjuntos não vazios, prove que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

12. Dentre as afirmações

I. $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$
II. $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B \subset C$
III. $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B \cap C = \varnothing$

a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) só I e II são verdadeiras.
d) só III é verdadeira.
e) só II e III são verdadeiras.

13. Sejam os conjuntos A com três elementos, B com quatro elementos e C com cinco elementos. Então:

a) $A \cap B$ tem no máximo 2 elementos.
b) $A \cup C$ tem no máximo 6 elementos.
c) $A \cap B \cap C$ tem no máximo 3 elementos.
d) $(A \cap B) \cup C$ tem no máximo 5 elementos.
e) $A \cup B \cup C$ tem no máximo 6 elementos.

14. **PUC-Rio 2022** Todas as 200 crianças do Clube Olimpixs gostam de sorvete, mas as preferências variam entre os sabores creme, morango e chocolate. Dentre as 200 crianças, 80 preferem chocolate entre os três sabores, e 70 preferem morango. Sabemos, também, que 60 crianças têm chocolate como a terceira opção de escolha e que metade dessas 60 prefere creme a morango. Quantas crianças preferem chocolate a creme?

a) 120 **b)** 100 **c)** 93 **d)** 80

15. O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto finito A é chamado de conjunto das partes de A. Dado $A = \{1, 2\}$, o conjunto das partes de A é $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \varnothing\}$. Se um conjunto X possui 10 elementos, quantos elementos tem P(X)?

16. **Enem 2020** "1, 2, 3, GOL, 5, 6, 7, GOL, 9, 10, 11, GOL, 13, GOL, 15, GOL, 17, 18, 19, GOL, 21, 22, 23, GOL, 25, ..."

Para a Copa do Mundo de Futebol de 2014, um bar onde se reuniam amigos para assistir aos jogos criou uma brincadeira. Um dos presentes era escolhido e tinha que dizer, numa sequência em ordem crescente, os números naturais não nulos, trocando os múltiplos de 4 e os números terminados em 4 pela palavra GOL. A brincadeira acabava quando o participante errava um termo da sequência.

Um dos participantes conseguiu falar até o número 103, respeitando as regras da brincadeira.

O total de vezes em que esse participante disse a palavra GOL foi

a) 20. **b)** 28. **c)** 30. **d)** 35. **e)** 40.

17. Considere dois conjuntos A e B tais que: $A \subset B$, $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = A$. Nessas condições pode-se afirmar que:

a) os conjuntos A e B são iguais, isto é: A = B.
b) o conjunto A possui a mesma quantidade de elementos que o conjunto B.
c) o conjunto A possui mais elementos que o conjunto B.
d) o conjunto A possui menos elementos que o conjunto B.
e) o conjunto A pode ser um conjunto vazio.

18. **IME-RJ 2016** Dados três conjuntos quaisquer F, G e H. O conjunto $G - H$ é igual ao conjunto:

a) $(G \cup F) - (F - H)$
b) $(G \cap H) - (H - F)$
c) $(G \cup (H - F)) \cap \overline{H}$
d) $\overline{G} \cup (H \cap F)$
e) $(\overline{H} \cap G) \cap (G - F)$

19. **FGV-SP** Na assembleia de um condomínio, duas questões independentes foram colocadas em votação para aprovação. Dos 200 condôminos presentes, 125 votaram a favor da primeira questão, 110 votaram a favor da segunda questão e 45 votaram contra as duas questões.

Não houve votos em branco ou anulados.

O número de condôminos que votaram a favor das duas questões foi:

a) 80 **b)** 75 **c)** 70 **d)** 65 **e)** 60

20. **Udesc 2019** Foi solicitado que um grupo de 64 pessoas escolhesse um número natural maior do que 3. Após análise das escolhas, constatou-se que: 12 pessoas escolheram um número primo, 30 um número par, 14 um múltiplo de 3, e 6 um múltiplo de 6. O número de pessoas que escolheu um número ímpar, não múltiplo de 3, foi igual a:

a) 14
b) 26
c) 12
d) 20
e) 34

21. **UEPG-PR 2016** Os N alunos de uma turma realizaram uma prova com apenas duas questões. Sabe-se que 37 alunos acertaram somente uma das questões, 33 acertaram a primeira questão, 18 erraram a segunda e 20 alunos acertaram as duas questões. Se nenhum aluno deixou questão em branco, assinale o que for correto.

01 N é um número múltiplo de 4.
02 30 alunos erraram a primeira questão.
04 $N > 60$.
08 5 alunos erraram as duas questões.

Soma:

22. **EPCar-MG 2020** Uma pesquisa foi realizada com um grupo de Cadetes da AFA.

Esses Cadetes afirmaram que praticam, pelo menos, uma dentre as modalidades esportivas: voleibol, natação e atletismo.

Obteve-se, após a pesquisa, os seguintes resultados:

I. Dos 66 Cadetes que praticam voleibol, 25 não praticam outra modalidade esportiva;

II. Dos 68 Cadetes que praticam natação, 29 não praticam outra modalidade esportiva;

III. Dos 70 Cadetes que praticam atletismo, 26 não praticam outra modalidade esportiva; e

IV. 6 Cadetes praticam as três modalidades esportivas.

Marque a alternativa FALSA.

A quantidade de Cadetes que

a) pratica pelo menos duas das modalidades esportivas citadas é 59.

b) foram pesquisados é superior a 150.

c) pratica voleibol ou natação é 113.

d) pratica exatamente duas das modalidades esportivas citadas é um número primo.

23. **Uece 2019** Seja U o conjunto de todos os números inteiros positivos menores do que 200. Se

$X_2 = \{n \in U$ tal que n é múltiplo de $2\}$,

$X_3 = \{n \in U$ tal que n é múltiplo de $3\}$ e

$X_5 = \{n \in U$ tal que n é múltiplo de $5\}$

então, o número de elementos de $X_2 \cup X_3 \cup X_5$ é

a) 140. **b)** 135. **c)** 150. **d)** 145.

24. **Cefet-RJ 2019** Uma pequena indústria detectou falhas em seu maquinário que afetou a produção de algumas peças no tamanho e no peso. Para determinar o prejuízo decorrente dessas falhas, submeteu 180 peças produzidas a 2 testes. No teste de tamanho, 120 peças foram consideradas adequadas, enquanto, no teste de peso, 80 peças foram consideradas adequadas. Apenas 40 peças foram consideradas perfeitas, isto é, aprovadas em ambos os testes, e as peças reprovadas em ambos os testes foram descartadas. Os resultados dos testes foram entregues a 4 alunos do curso de Administração do Cefet-RJ para uma análise do fenômeno que afetou a produção. Cada aluno fez uma afirmação, conforme reproduzido a seguir:

- Aldo: "Das peças aprovadas em pelo menos um teste, apenas 20% são perfeitas".
- Baldo: "O número de peças descartadas corresponde a 20% do número de peças aprovadas em pelo menos um teste".
- Caldo: "Exatamente 12% das peças submetidas aos testes são perfeitas".
- Daldo: "Aproximadamente 11% das peças submetidas aos testes foram descartadas".

O aluno que fez a afirmação correta ganhou um estágio remunerado na indústria, no cargo de analista de produção. O aluno que ganhou o estágio foi:

a) Aldo **b)** Baldo **c)** Caldo **d)** Daldo

25. **EBMSP-BA 2018** Uma pessoa foi orientada pelo médico a fazer sessões de fisioterapia e Pilates durante um determinado período após o qual passaria por uma nova avaliação. Ela planejou fazer apenas uma dessas atividades por dia, sendo a fisioterapia no turno da manhã e o Pilates no turno da tarde.

Sabe-se que, no decorrer desse período,

- houve dias em que ela não fez qualquer das atividades;
- houve 24 manhãs em que ela não fez fisioterapia;
- houve 14 tardes em que ela não fez Pilates;
- houve 22 dias em que ela fez ou fisioterapia ou Pilates.

Com base nesses dados, pode-se afirmar que o período de tratamento foi de

a) 30 dias. **b)** 34 dias. **c)** 38 dias. **d)** 42 dias. **e)** 46 dias.

26. **Udesc 2017** Uma pesquisa sobre os fatores que influenciam na escolha de um livro para leitura foi realizada em um grupo de 80 pessoas. Elas foram questionadas se na hora de escolher um livro levavam em consideração o gênero de sua preferência, a indicação de amigos ou as listas dos mais vendidos, sendo que poderiam optar por uma, duas ou as três opções.

Ninguém respondeu ser influenciado apenas por listas dos mais vendidos, mas 20 pessoas responderam levar esse fator em consideração. Além disso, 28 responderam considerar apenas o gênero de sua preferência, enquanto 5 disseram que as três opções influenciam suas decisões.

Sabendo, ainda, que o número de pessoas que se baseiam apenas nas indicações dos amigos é igual aos que disseram levar em consideração apenas as indicações dos amigos e o gênero de sua preferência, então pode-se afirmar que a quantidade de pessoas que seguem apenas as indicações de amigos é:

a) 13 **b)** 10 **c)** 16 **d)** 32 **e)** 8

27. **Insper-SP** Em uma escola que funciona em três períodos, 60% dos professores lecionam de manhã, 35% lecionam à tarde e 25% lecionam à noite. Nenhum professor da escola leciona tanto no período da manhã quanto no período da noite, mas todo professor leciona em pelo menos um período. Considerando-se apenas essas informações, assinale a alternativa em que os dados apresentados sobre esses professores são necessariamente verdadeiros.

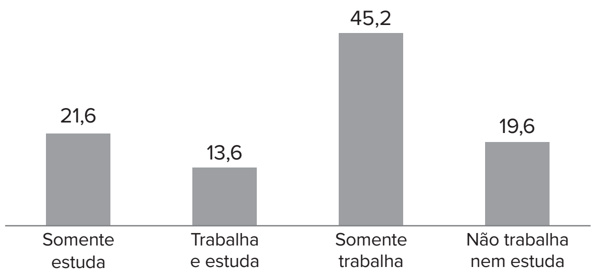
	Professores da escola que lecionam somente no período da tarde representam, em relação ao total,	Professores da escola que lecionam nos períodos da tarde e da noite representam, em relação ao total,	Professores da escola que lecionam somente no período da noite representam, em relação ao total,
a)	exatamente 15%	no máximo 20%	no mínimo 5%
b)	exatamente 15%	no mínimo 20%	no máximo 5%
c)	exatamente 20%	entre 5% e 15%	entre 10% e 20%
d)	exatamente 25%	no máximo 20%	no mínimo 5%
e)	exatamente 25%	no mínimo 20%	no máximo 5%

28. **Uefs-BA 2018** Em uma empresa com 33 funcionários, 22 são fluentes em italiano, 14 são fluentes em alemão e 27 são fluentes em francês. Sabe-se que todos os funcionários são fluentes em pelo menos uma dessas línguas e que, no total, 18 desses funcionários são fluentes em exatamente duas dessas línguas. O número de funcionários nessa empresa que são fluentes nessas três línguas é

a) 2. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 5. **e)** 6.

29. **Enem 2020** A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad) é uma pesquisa feita anualmente pelo IBGE, exceto nos anos em que há Censo. Em um ano, foram entrevistados 363 mil jovens para fazer um levantamento sobre suas atividades profissionais e/ou acadêmicas. Os resultados da pesquisa estão indicados no gráfico.

Jovens em atividade entre 15 e 29 anos (%)



Disponível em: http://noticias.uol.com.br. Acesso em: 20 ago. 2014.

De acordo com as informações dadas, o número de jovens entrevistados que trabalha é

a) 114 708. **b)** 164 076. **c)** 213 444. **d)** 284 592. **e)** 291 582.

30. Sendo A =]0, 7] e B = [2, 5], escreva o conjunto A − B.

31. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } x > 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$, encontre A − B.

32. Dados os conjuntos abaixo, assinale o que for correto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 3\}$$

01 $0 \in (A \cap B)$
02 $\{0, 1, 2, 3\} \subset (A \cup B)$
04 $-3 \in (A - B)$
08 $\{1, 2\} \subset (B - A)$
16 $1 \in (A \cap B)$

Soma:

33. Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Podemos afirmar que:

a) $(A - B) \subset B$
b) $(A - B) \subset A$
c) $(B - A) \subset A$
d) $(A - B) =]2, 4[$

34. Se os conjuntos A e B são tais que

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 25)^3 = 0\} \text{ e } B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{4}{3} < x < \frac{20}{3}\right\},$$

então é verdade que

a) $A \subset B$
b) $A = B$
c) $A \cap B = \varnothing$
d) $A \cap B = \{5\}$
e) $A \cup B = A$

35. Considere $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e os conjuntos

$A = \{x \mid x \in U \text{ e } 3 \leqslant x + 2 < 7\}$
$B = \{x \mid x \in U \text{ e } x^2 + 1 < 5\}$
$C = \{x \mid x \in U \text{ e } 132 < 10^x < 52\,412\}$

É correto afirmar:

a) $A - B = \{2, 3, 4\}$
b) $A \cup B = \{0, 1, 2\}$
c) $A \cap C = \{3\}$
d) $B - C = \varnothing$
e) $A \cup B \cup C = U$

36. Se A = [2, 5[e B =]0, 3], é correto afirmar que:

a) $A \cap B$ possui 2 elementos
b) $4 \in (A \cup B)$
c) $\{4, 5\} \subset A$
d) $A - B = [4, 5[$
e) $A \cup B = [0, 5]$

BNCC em foco

Use as informações a seguir para responder às questões de **1** a **3**.

Seis países (H, I, J, K, L, M) fazem parte de um acordo econômico para melhorar as transações comerciais entre eles.

Os produtos que cada um deles comercializa estão dispostos no quadro a seguir, assinalados com o número 1. Foram marcados com o número 0 aqueles que não comercializam.

	H	I	J	K	L	M
Café	1	1	0	1	0	1
Soja	1	0	0	1	1	0
Arroz	1	1	0	0	0	0
Petróleo	0	0	1	0	0	1
Ferro	0	1	1	0	1	0

EM13MAT407

1. Sendo C e S os conjuntos daqueles que comercializam, respectivamente, café e soja, podemos afirmar que o conjunto $C \cap S$ tem

a) 2 elementos.
b) 3 elementos.
c) 4 elementos.
d) 5 elementos.

EM13MAT407

2. Quantos países comercializam petróleo ou ferro?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

EM13MAT407

3. É um conjunto unitário aquele formado pelos países que comercializam:

a) soja e ferro.
b) petróleo e arroz.
c) soja e café.
d) petróleo ou café.

Robin Nieuwenkamp/Shutterstock.com

Leão da África Oriental observando um rebanho misto. Foto de 2018.

FRENTE 1

CAPÍTULO

2

Relações e funções

Relacionar elementos de dois conjuntos é uma das tarefas cotidianas que mais executamos. Associamos uma pessoa a um número; um nome a um animal de estimação; números de telefones a um endereço; e tantas outras coisas. Essas associações são exemplos de relações. O estudo dessas relações nos ajuda a compreender fenômenos e a prever comportamentos, como a interação entre duas espécies, incluindo o consumo de um predador e a densidade populacional de sua presa. Neste capítulo, vamos analisar como a Matemática relaciona conjuntos, além de apresentar a teoria das funções, algumas de suas características, suas propriedades e representações.

Par ordenado

Quando precisamos distinguir dois números e usamos a ordem como são apresentados para diferenciá-los, utilizamos o conceito de **par ordenado**.

Exemplo: Suponha que vamos representar a idade de um homem e de uma mulher. Para isso, criamos a notação (idade do homem, idade da mulher).

(20, 18) ⇒ homem tem 20 anos; mulher tem 18 anos

(15, 17) ⇒ homem tem 15 anos; mulher tem 17 anos

Vamos utilizar a notação (a, b) para representar um par ordenado. Quando números decimais estiverem envolvidos, utilizaremos a notação (a; b). Geralmente, o primeiro valor do par ordenado é denominado abscissa e o segundo, ordenada.

Dois pares ordenados são iguais se e somente se suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Note que, por isso, (2, 4) ≠ (4, 2), ou seja, invertendo a ordem em que os valores de a e b são apresentados, obtemos pares ordenados distintos.

Exercício resolvido

1. Determine m e n sabendo que $(m + 2, 5) = (3, n + 1)$.

Resolução:

Se $(m + 2, 5) = (3, n + 1)$, então $m + 2 = 3$ e $5 = n + 1$; assim, $m = 1$ e $n = 4$.

! Atenção

Diferentemente do par ordenado, na representação de conjuntos, a ordem em que escrevemos os elementos não importa.
Note que {1, 2, 3} = {2, 3, 1} = {3, 1, 2}.

Produto cartesiano

Dados dois conjuntos A e B, o **produto cartesiano** A × B é formado por todos os pares ordenados possíveis (x, y), em que x é elemento de A e y, elemento de B. Assim:

$$A \times B = \{x, y \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo: Dados os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {3, 4}, temos:

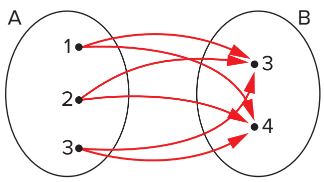
A × B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}

B × A = {(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

A × A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

B × B = {(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

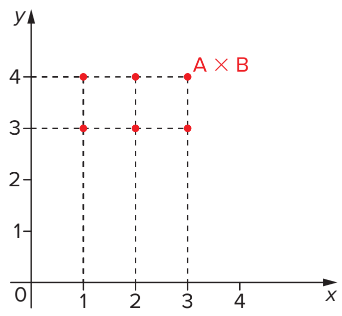
Também podemos utilizar na representação de um produto cartesiano um diagrama de flechas. Utilizando os conjuntos do exemplo anterior, o produto A × B é representado do seguinte modo:



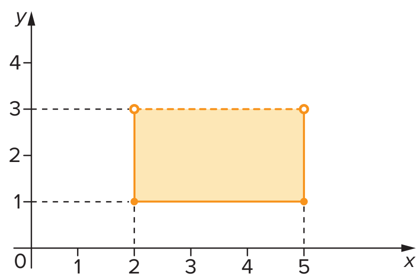
! Atenção

O produto cartesiano entre dois conjuntos não vazios A e B, com A ≠ B, não é comutativo, ou seja, A × B ≠ B × A.

Também podemos representar A × B utilizando o plano cartesiano. Os elementos de A são representados no eixo das abscissas (x) e os elementos de B no eixo das ordenadas (y). Do exemplo anterior, temos:



Dessa forma, podemos representar o produto cartesiano entre intervalos de números reais. Por exemplo, o produto [2, 5] × [1, 3[.



Perceba que, para $y = 3$, devemos ter "bolinha aberta" e lado tracejado, já que essa parte do retângulo não pertence ao produto cartesiano.

Se fizermos o produto cartesiano ℝ × ℝ, obtemos o plano cartesiano em sua totalidade.

É possível fazer produto cartesiano para três ou mais conjuntos. Assim, teremos triplas, quádruplas, quíntuplas ordenadas.

! Atenção

Podemos usar a notação de potência para produtos cartesianos do mesmo conjunto:

$$A^2 = A \times A$$

$$B^3 = B \times B \times B$$

Número de elementos do produto cartesiano

Para dois conjuntos A e B finitos, o número de elementos do produto cartesiano A × B é dado por:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Exemplo: Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, ..., 10} e B = {1, 2, 3, 4}. Vamos definir o número de elementos dos produtos cartesianos a seguir.

a) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) \Rightarrow n(A \times B) = 10 \cdot 4 = 40$

b) $n(B^2) = n(B \times B) = n(B) \cdot n(B) \Rightarrow n(B^2) = 4 \cdot 4 = 16$

c) $n(A^3) = n(A \times A \times A) = n(A) \cdot n(A) \cdot n(A) \Rightarrow$
$\Rightarrow n(A^3) = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

d) $n(B^4) = n(B \times B \times B \times B) = n(B) \cdot n(B) \cdot n(B) \cdot n(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow n(B^4) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

Relação

Uma **relação** de A em B é qualquer subconjunto do produto cartesiano A × B, normalmente seguindo alguma propriedade determinada.

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, os conjuntos abaixo são exemplos de relações de A em B.

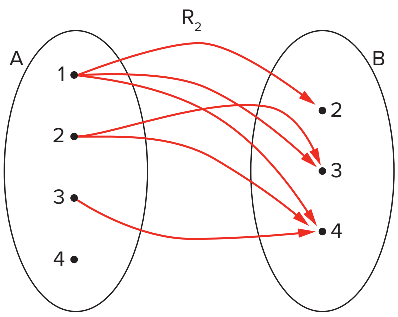
a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\} \Rightarrow R_1 = \{(1, 2), (2, 4)\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y > x\} \Rightarrow R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 5\} \Rightarrow R_3 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\} \Rightarrow R_4 = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

A relação também pode ser representada por um diagrama de flechas. Com os dados do exemplo anterior, a relação R_2 é representada por:

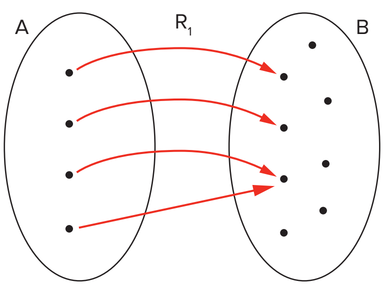


Função

Uma relação de A em B é chamada de **função** quando cada um dos elementos de A, sem exceção, estiver relacionado a um único elemento de B.

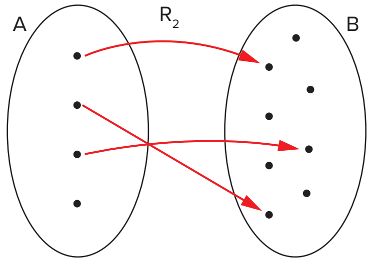
Exemplos: Considerando os conjuntos A e B, observe os diagramas a seguir com algumas relações:

a) R_1



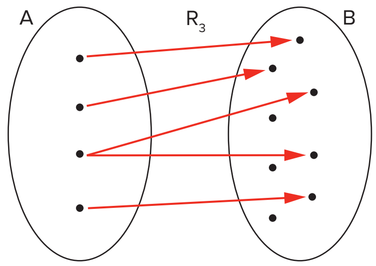
R_1 é uma função de A em B, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

b) R_2



R_2 **não** é uma função de A em B, pois um elemento de A não tem correspondente em B.

c) R_3



R_3 também **não** é uma função de A em B, pois há um elemento de A com mais de um correspondente em B.

Outros exemplos:

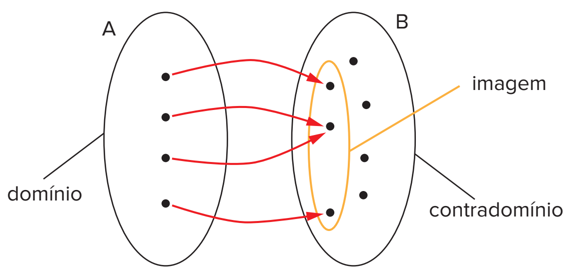
d) Uma relação que associa cada pessoa à sua idade é uma função, pois cada pessoa só tem uma idade.

e) Uma relação que associa cada pessoa a seus filhos não é uma função, pois uma pessoa pode não ter filhos ou ter um ou mais filhos.

f) Relacionar um número a seu quadrado é uma função, pois todo número ao quadrado tem um único resultado.

Em uma função *f* de A em B, chamamos o conjunto A de **conjunto de partida** ou **domínio** da função, e o representamos por D ou D(*f*). O conjunto B é o **conjunto de chegada** ou o **contradomínio** da função, e o representamos por CD ou CD(*f*).

A **imagem** de uma função *f*, representada por Im ou Im(*f*), é formada pelos elementos do contradomínio que estão associados aos elementos do domínio, ou seja, os elementos que efetivamente são "resultados" da função.



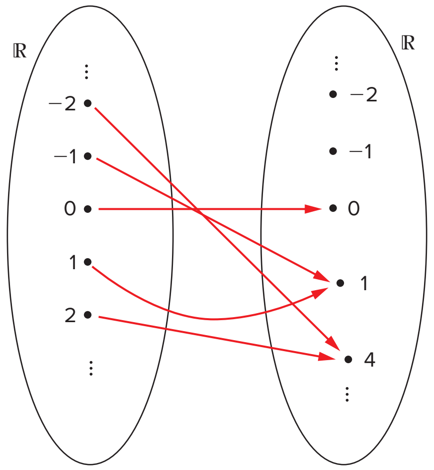
Para escrevermos uma função, devemos ter três informações: o seu domínio, seu contradomínio e uma lei de formação.

Em outras palavras, precisamos conhecer "de onde vem", "para onde vai" e "qual é o caminho".

Representações de função

Vamos representar uma função que calcula o quadrado de um número (lei de formação), sendo que o domínio e o contradomínio são o conjunto dos números reais.

- Podemos utilizar diagramas:



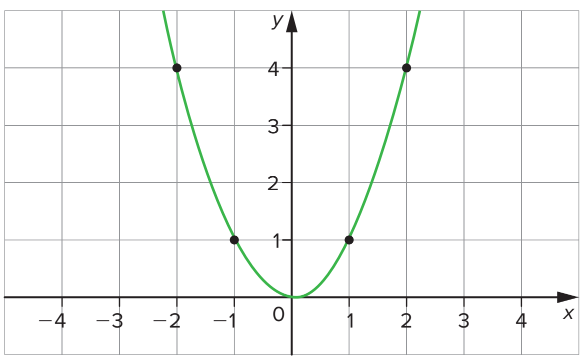
- Também podemos adotar x para representar os elementos do domínio e y para os "resultados" (imagens - subconjunto do contradomínio) e utilizar a notação a seguir:

domínio | contradomínio | lei de formação

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y = x^2$$

Assim, para $x = 1$ temos $y = 1^2 = 1$, para $x = 2$ temos $y = 2^2 = 4$, e podemos escolher qualquer elemento do domínio para substituir em x. Os valores de y são os "resultados", ou seja, a imagem da função para aquele valor de x.

- Ou, ainda, podemos representar a função no plano cartesiano considerando x e y o domínio e o contradomínio, respectivamente. Cada ponto corresponde a uma "flecha" da representação por diagramas.



Dessa forma, estamos representando as infinitas associações da função.

Notação $f(x)$

Para uma função f, podemos utilizar a notação $f(x)$ para representar a lei de formação dessa função. Por exemplo, considerando a função real $y = x^2$, podemos escrevê-la como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$, e assim:

- para $x = 2$, temos $y = 2^2 = 4$ ou $f(2) = 4$
- para $x = 5$, temos $y = 5^2 = 25$ ou $f(5) = 25$

Devemos entender que podemos substituir x por qualquer elemento do domínio, lembrando que, em qualquer lugar da lei de formação em que apareça a variável x, ela também deve ser substituída pelo valor escolhido inicialmente.

Exemplo: Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, determine:

a) $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

b) $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$

c) $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$

Perceba que o x representa "um lugar vago", "um espaço em branco" e você pode substituí-lo por qualquer valor do domínio, expressões ou até mesmo outras funções, mas lembre-se de que **todos** eles devem ser substituídos.

Uma função descrita por $f(x + 2) = 3x + 1$ interpretamos do seguinte modo:

$$f(\square + 2) = 3 \cdot \square + 1$$

Na situação citada, para calcular, por exemplo, $f(3)$, devemos utilizar $x = 1$, obtendo:

$$f(3) = f(1 + 2) = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow f(3) = 4.$$

! Atenção

Na expressão $f(2x) = x + 5$, para obtermos $f(6)$ fazemos $x = 3$, ou seja:

$$f(6) = f(2 \cdot 3) = 3 + 5 \Rightarrow f(6) = 8$$

Cuidado! Um erro muito comum é substituir x por valores diferentes na mesma expressão, como substituir x por 3 de um lado da expressão acima e por 6 do outro lado.

Exercícios resolvidos

2. Sendo $f(x + 1) = 4x - 3$, calcule $f(x)$.

Resolução:

Substituímos x por $x - 1$, obtendo:
$f(x - 1 + 1) = 4(x - 1) - 3 = 4x - 4 - 3 \Rightarrow f(x) = 4x - 7$

3. **Unesp** Uma função de variável real satisfaz a condição $f(x + 2) = 2f(x) + f(1)$, qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo-se que $f(3) = 6$, determine o valor de:

a) $f(1)$
b) $f(5)$

Resolução:

a) Para $x = 1$:
$f(1 + 2) = 2 \cdot f(1) + f(1) \Rightarrow f(3) = 3 \cdot f(1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 = 3 \cdot f(1) \Rightarrow f(1) = 2$

b) Para $x = 3$:
$f(3 + 2) = 2 \cdot f(3) + f(1) \Rightarrow f(5) = 2 \cdot 6 + 2 = 14$

! Atenção

Para qualquer função, a menos que o enunciado forneça alguma informação nesse sentido, **não existe** a propriedade $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Não podemos concluir de imediato, por exemplo, que seja verdadeira a sentença $f(4) = f(3) + f(1)$.

Domínio da função

Todos os elementos do domínio de uma função devem estar associados a elementos do contradomínio. Normalmente esse conjunto vem descrito na função, mas há a possibilidade de termos que encontrá-lo. Nesses casos, devemos obter o maior subconjunto possível de $\mathbb{R}$ que respeite as condições de existência da função.

Exercício resolvido

4. Determine o domínio das funções a seguir:

a) $f(x) = \dfrac{3}{2x - 10}$

b) $g(x) = \sqrt{3x - 6}$

c) $h(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x - 7}}$

Resolução:

a) Pelo fato de a expressão que representa a função ser uma fração, devemos observar que seu denominador não pode ser nulo; assim:
$2x - 10 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$, o que leva ao domínio $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$.

b) Pelo fato de a expressão que representa a função conter um radical de índice par (raiz quadrada), para a função existir, seu radicando não pode ser um número negativo:
$3x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$ e o domínio será $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$.

c) Pelo fato de a expressão que representa a função conter um radical de índice par como denominador de uma fração, para a função existir, o radicando deve ser exclusivamente positivo; assim:
$x - 7 > 0 \Rightarrow x > 7$ e teremos $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$.

! Atenção

Resumindo, as condições de existência vistas nos exemplos anteriores são:

$\dfrac{A}{B} \Rightarrow A \in \mathbb{R}$ e $B \neq 0$ $\qquad \dfrac{A}{\sqrt{B}} \Rightarrow A \in \mathbb{R}$ e $B > 0$

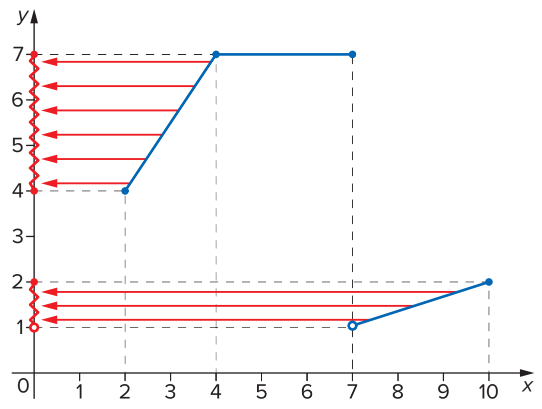
$\sqrt{A} \Rightarrow A \geqslant 0$

Contradomínio da função

Se o contradomínio da função não estiver explicitado na função, adotamos o conjunto dos números reais ou igualamos ao conjunto imagem por razões que veremos adiante.

Imagem da função

Se uma função está representada graficamente, podemos obter sua imagem projetando ortogonalmente sua representação no eixo das ordenadas, como mostra o exemplo a seguir:



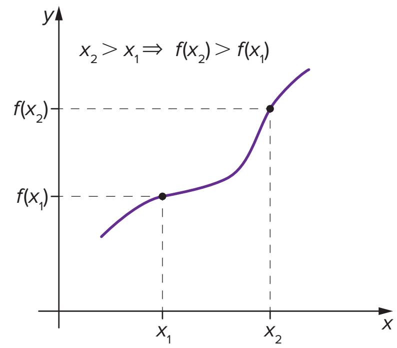
A imagem da função apresentada no gráfico é formada por dois intervalos:

$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y \leqslant 2 \text{ ou } 4 \leqslant y \leqslant 7\} =]1, 2] \cup [4, 7]$

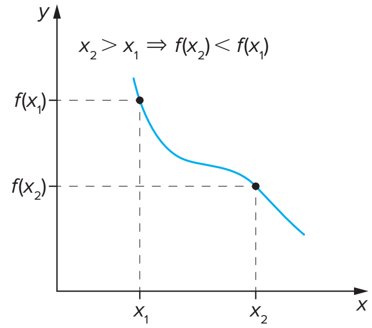
Classificações das funções

Crescente ou decrescente

A partir de um intervalo do domínio, escolhendo os valores x_1 e x_2, e verificando suas imagens, dizemos que uma função é **crescente** nesse intervalo se, para $x_2 > x_1$, tivermos $f(x_2) > f(x_1)$, quaisquer que sejam x_1 e x_2. Nesse caso, o gráfico da função f terá um comportamento ascendente.



Se nesse determinado intervalo para $x_2 > x_1$ tivermos $f(x_2) < f(x_1)$, quaisquer que sejam x_1 e x_2, dizemos que a função é **decrescente** e a curva que representa a função terá um comportamento descendente.



> **! Atenção**
>
> - A classificação crescente ou decrescente está associada a um intervalo contínuo da função. Uma mesma função pode, em intervalos distintos, ter classificações diferentes.
> - Se em um intervalo específico a função assumir sempre o mesmo valor para quaisquer valores de x, diremos que ela é **constante** nesse intervalo.

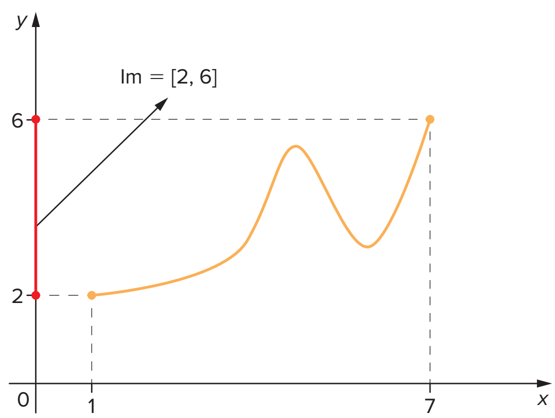
Sobrejetora

Se a imagem de uma função for igual ao contradomínio, diremos que ela é uma função **sobrejetora**.

Exemplos:

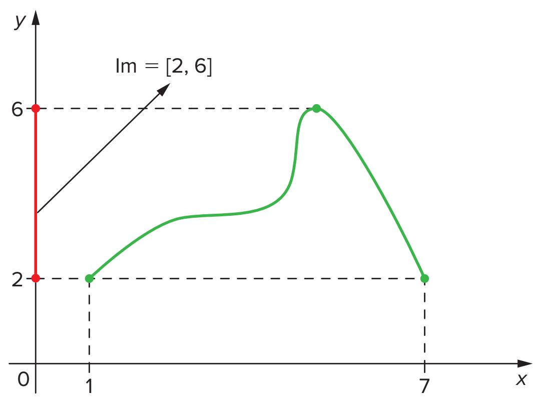
a) $f: [1, 7] \rightarrow [2, 6]$

Observando o gráfico dessa função, notamos que Im = CD. Logo, ela é sobrejetora.



b) $f: [1, 7] \rightarrow [2, 10]$

Já para esta função, podemos observar pelo gráfico que Im ≠ CD. Logo, ela não é sobrejetora.



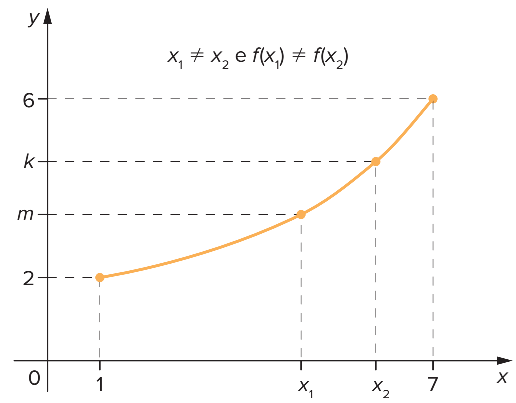
Injetora

Para uma função ser **injetora**, elementos diferentes do domínio devem possuir imagens diferentes, ou seja, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Assim, a partir de um valor de y da imagem, encontraremos um único x correspondente. Isso caracteriza uma função injetora.

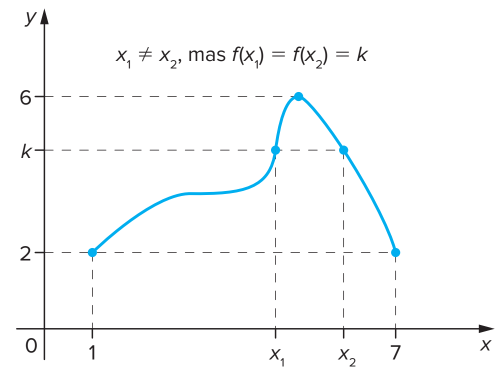
Uma maneira mais informal é dizer "cada x tem seu próprio y", ou seja, "não compartilha o mesmo y com ninguém".

Exemplos:

a) $f: [1, 7] \rightarrow [2, 6]$



b) $f: [1, 7] \rightarrow [2, 6]$



Uma função injetora será sempre crescente ou sempre decrescente, ou seja, "só sobe" ou "só desce".

As classificações sobrejetora e injetora são independentes.

Bijetora

Quando uma função for, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora, ela será chamada de função **bijetora**.

Ser bijetora significa que a função é inversível, ou, de maneira mais informal, que é "função na ida e na volta". Veremos mais sobre isso no capítulo 4. Quando uma função é bijetora, nós podemos encontrar um único par (x, y) pertencente à função conhecendo apenas um de seus valores.

Exemplos:

a) $f: [1, 5] \rightarrow [3, 11]$ e $y = 2x + 1$ é uma função bijetora:

$$\begin{cases} \text{Se } x = 4, \text{ temos: } y = 2 \cdot 4 + 1 = 9 \\ \text{Se } y = 9, \text{ temos: } 9 = 2x + 1 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow (4, 9) \in f$$

Para essa função, se $x = 4$, necessariamente $y = 9$, e vice-versa.

b) $f: [-3, 3] \rightarrow [-9, 9]$ e $y = x^2$ não é uma função bijetora:

$$\begin{cases} \text{Se } x = 2, \text{ temos: } y = x^2 = 4 \\ \text{Se } y = 4, \text{ temos: } 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2, 4) \in f \\ (-2, 4) \in f \end{cases}$$

Para essa função, se $y = 4$, há dois valores possíveis de x: -2 e 2.

Saiba mais

A igualdade entre funções injetoras tem resolução imediata e uma única solução.

$$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$
$$\log x = \log 2 \Rightarrow x = 2$$

Se as funções não forem injetoras, a resolução pode não ser imediata e às vezes teremos mais de uma solução. Funções trigonométricas e funções modulares, em geral, não são funções injetoras.

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$
$$|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$$

Função par

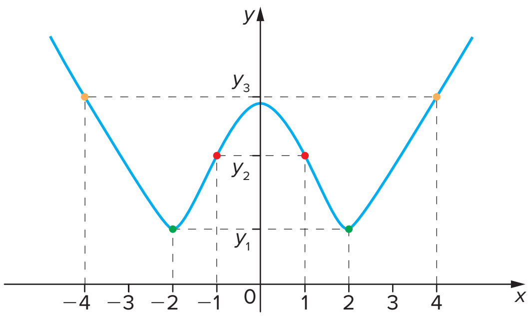
Se quaisquer dois elementos simétricos do domínio possuírem sempre a mesma imagem, diremos que a função é **par**. Em outras palavras, uma função é par se $f(-x) = f(x)$, para qualquer valor de x pertencente ao domínio.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ $\quad f(3) = 9$, $f(-3) = 9$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ $\quad f(5) = 5$, $f(-5) = 5$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.



Observação: Uma função par nunca é injetora.

Atenção

Se trocarmos o sinal de números ou expressões aplicados em uma função par, o resultado permanece o mesmo.

As funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = |x|$ são pares, logo:

$$\cos(-30°) = \cos 30°, \cos(-a - b) = \cos(a + b)$$
$$|-a| = |a|, |-x + 1| = |x - 1|$$

Função ímpar

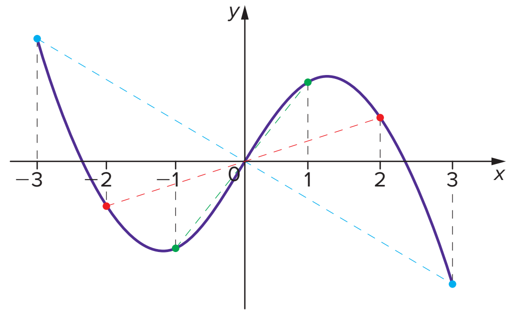
Se quaisquer dois elementos simétricos do domínio possuírem sempre imagens simétricas, diremos que a função é **ímpar**. Em outras palavras, uma função é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo valor de x pertencente ao domínio.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ $\quad f(2) = 8$, $f(-2) = -8$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ $\quad f(3) = 6$, $f(-3) = -6$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem. A origem sempre será o ponto médio do segmento obtido quando unimos dois pontos com valores simétricos de x.



Se $x = 0$ pertence ao domínio de uma função ímpar f, necessariamente temos $f(0) = 0$.

Atenção

Invertendo o sinal de números ou expressões aplicados em uma função ímpar, o resultado também terá seu sinal invertido.

As funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = x^3$ são ímpares, logo:

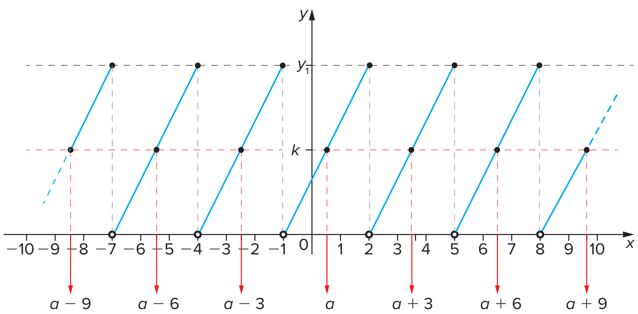
$$\text{sen}(-20°) = -\text{sen}\, 20°, \text{sen}(a - b) = -\text{sen}(b - a)$$
$$(-2)^3 = -(2)^3, (-a - b)^3 = -(a + b)^3$$

Existem funções que não são pares nem ímpares.

Função periódica

Escolhendo um elemento x do domínio e acrescentando um valor fixo p, se as imagens de x e $x + p$ forem iguais para qualquer valor de x, isto é, se $f(x) = f(x + p)$, diremos que a função é **periódica**. O menor valor positivo de p, se existir, é chamado de **período**.

Exemplo:



$p = 3$

$\ldots = f(a - 6) = f(a - 3) = f(a) = f(a + 3) = f(a + 6) = \ldots$

Exercícios resolvidos

5. Classifique a paridade das funções a seguir:

a) $g(x) = x^4 + 3x^2$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

c) $h(x) = 2x + 1$

Resolução:

a) $\begin{cases} g(a) = a^4 + 3a^2 \\ g(-a) = (-a)^4 + 3 \cdot (-a)^2 \Rightarrow g(-a) = a^4 + 3a^2 \end{cases}$

Logo, $g(a) = g(-a)$ e $g(x)$ é par.

b) $\begin{cases} f(a) = \dfrac{|a|}{a} \\ f(-a) = \dfrac{|-a|}{-a} \Rightarrow f(-a) = -\dfrac{|a|}{a} \end{cases}$

Logo, $f(-a) = -f(a)$ e $f(x)$ é ímpar.

c) $\begin{cases} h(a) = 2a + 1 \\ h(-a) = 2 \cdot (-a) + 1 \Rightarrow h(-a) = -2a + 1 \end{cases}$

Assim, $h(x)$ não é par nem ímpar.

6. Em uma função periódica de período igual a 4, sabemos que $f(2) = 10$ e $f(5) = 3$. Calcule $f(6)$ e $f(9)$.

Resolução:

Se a função é periódica de período igual a 4, temos:

$$f(2) = f(2 + 4) = f(6) = 10$$

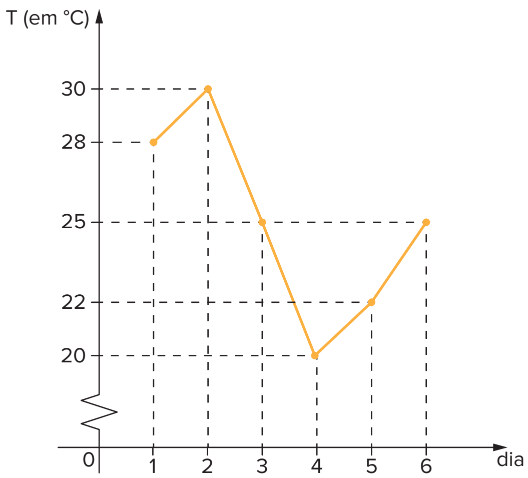
$$f(5) = f(5 + 4) = f(9) = 3$$

Interpretação de gráficos

Qualquer gráfico no plano cartesiano pode ser interpretado como uma relação entre dois conjuntos. Através do conceito de função, cada valor de x se associa a um único valor de y. A partir disso, quando perguntamos valores, sinais e variações de uma função, verificamos o que ocorre com os valores de y, mas respondemos utilizando valores ou intervalos de x.

Exercício resolvido

7. Observe o gráfico a seguir, que mostra a medida de temperatura ambiente às 15 horas durante 6 dias seguidos.



a) Em qual dia a temperatura foi 22 °C?

b) Em qual dia registramos a menor temperatura?

c) Em quais dias registramos, às 15 horas, temperaturas maiores que 23 °C?

Resolução:

a) Observando a ordenada com valor de 22 °C, verificamos que a abscissa corresponde ao dia 5.

b) No intervalo apresentado, observamos que a menor ordenada é a de valor 20 °C e a abscissa correspondente é a do dia 4.

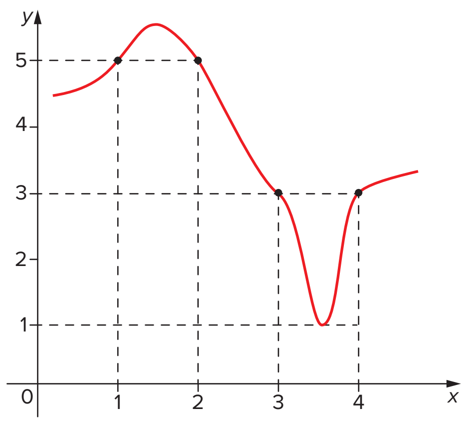
c) Temperaturas maiores que 23 °C nesse intervalo são 25 °C, 28 °C e 30 °C. As abscissas que correspondem a esses valores são, respectivamente, os dias 3 e 6, 1 e 2.

Intervalos da função

A partir do gráfico podemos verificar em quais intervalos as funções assumem determinados valores.

Por exemplo, considerando o gráfico abaixo, notamos que a função (valores de $y = f(x)$) apresenta valores maiores que 5 no intervalo entre 1 e 2, ou seja:

$$1 < x < 2 \Rightarrow y > 5$$

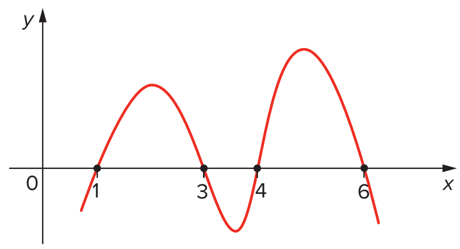


Novamente, observando os valores da função no eixo das ordenadas, mas respondendo utilizando os valores das abscissas, podemos afirmar que a função apresenta valores menores que 3 no intervalo entre 3 e 4, ou seja:

$$3 < x < 4 \Rightarrow y < 3$$

Raízes da função

As **raízes** de uma função são os valores das abscissas em que o gráfico corta esse eixo. Nesses pontos os valores de y são nulos.

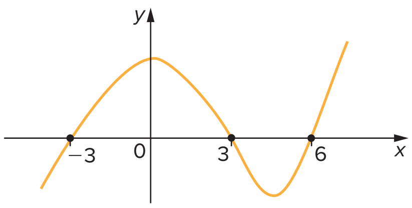


As raízes da função representada no gráfico são 1, 3, 4 e 6, que correspondem aos pontos (1, 0), (3, 0), (4, 0) e (6, 0).

Podemos determinar as raízes de uma função a partir de sua lei de formação resolvendo $y = 0$ ou $f(x) = 0$.

Estudo do sinal da função

Estudar o sinal de uma função corresponde a verificar para quais intervalos do eixo x os valores de y são positivos, negativos ou nulos. Para isso, basta observarmos os pontos do gráfico que estão acima, abaixo ou no eixo das abscissas.



O gráfico está acima do eixo das abscissas para valores de x entre −3 e 3 e maiores do que 6. Isso significa que a função é positiva nesses intervalos, ou seja:

$$-3 < x < 3 \text{ ou } x > 6 \Rightarrow y > 0$$

A função é negativa nos pontos abaixo do eixo das abscissas. Isso ocorre para valores de x menores que −3 e entre 3 e 6; assim:

$$x < -3 \text{ ou } 3 < x < 6 \Rightarrow y < 0$$

Por fim, podemos observar pelo gráfico que a função é nula quando $x = -3$ ou $x = 3$ ou $x = 6$.

! Atenção

Uma função pode ser positiva ($y > 0$) para valores negativos de x ($x < 0$) e vice-versa. Cuidado para não confundir esses sinais.

Uma função sempre positiva tem seu gráfico acima do eixo das abscissas para qualquer valor de x. Se a função for sempre negativa, seu gráfico estará sempre abaixo desse eixo.

Revisando

1. Se A = {1, 2}, B = {2, 3, 4} e C = {4, 5}, calcule os produtos cartesianos a seguir.

a) A × B
b) B × A
c) A^2
d) A × B × C

2. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x$, calcule:

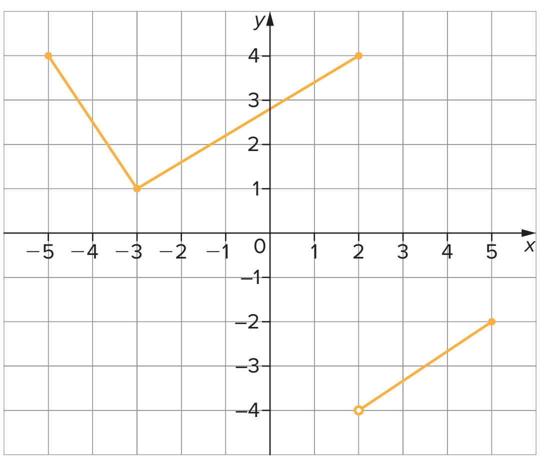
a) $f(2)$
b) $f(f(1))$
c) $f(3x)$
d) $f(-x)$

3. Determine o domínio das funções a seguir:

a) $y = \dfrac{x+1}{3x-18}$

b) $y = \sqrt{5x - 10}$

4. Qual é a imagem da função representada graficamente no plano cartesiano a seguir, definida para $-5 \leqslant x \leqslant 5$?



5. Qual será o conjunto B na função $f: \mathbb{R} \to B$, $f(x) = x^2$, para que a função seja sobrejetora?

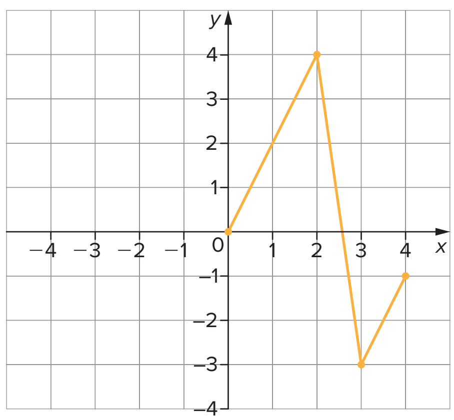
6. Para uma função ser injetora, dados x_1 e x_2 valores do domínio, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Outra maneira equivalente é: se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Utilizando essa segunda maneira, mostre que a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, é injetora.

7. Uma função é crescente em um determinado intervalo quando, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, temos $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Dê um exemplo para provar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, não é crescente em todo o domínio.

8. Considerando uma função par f, indique, no caderno, as afirmativas corretas.

a) $f(2) = f(-2)$
b) $f(-4) = -f(4)$
c) $f(6) = 2 \cdot f(3)$
d) $f(-k) = f(k)$

9. Complete o gráfico da função g abaixo, definida no intervalo $-4 \leqslant x \leqslant 4$, sabendo que g é uma função ímpar.



10. Considere uma função periódica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de período igual a 5. Se $f(2) = 5$ e $f(3) = 4$, determine os valores de:

a) $f(7)$
b) $f(8)$
c) $f(12)$
d) $f(13)$

Exercícios propostos

1. Em cada item, determine os valores de x e y e defina qual é o par ordenado:

a) $(x + 1, 8) = (4, 2y)$

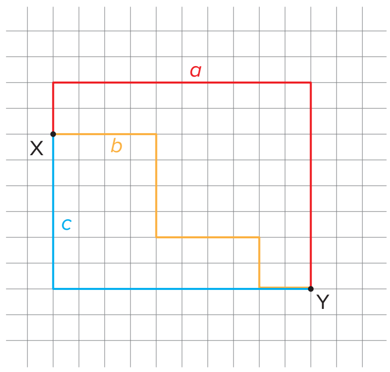
b) $(x + y, 3x + y) = (2y - 1, 12 - y)$

2. Se A é um conjunto com 4 elementos, B com 3 elementos e C com 2 elementos, quantos elementos têm os produtos cartesianos abaixo?

a) $A \times B$ **b)** B^2 **c)** $A \times B \times C$

3. Sendo $A = \{1, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3\}$, represente $A \times B$ no plano cartesiano.

4. **Fuvest-SP 2021**



A figura ilustra graficamente uma região de um bairro, com ruas ortogonais entre si. O ponto X indica um condomínio residencial, e o ponto Y indica a entrada de um parque. Três moradores realizam caminhos diferentes para chegar ao ponto Y, partindo do ponto X, ilustrados com cores diferentes. Se a, b e c representam as distâncias percorridas por esses moradores nesses caminhos, é correto afirmar que

a) $a = b = c$. **c)** $c < b < a$. **e)** $c < a = b$.

b) $b = c < a$. **d)** $b < c = a$.

5. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$, qual das relações abaixo é uma função de A em B?

a) $M = \{(x, y) \in A \times B \mid y - x = 1\}$

b) $N = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

c) $P = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

d) $Q = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x\}$

e) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 4\}$

6. Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 8, 9\}$ e a relação $\mathbb{R}$, de A em B, definida por

$$\mathbb{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ é divisor de } y\}$$

Nessas condições, $\mathbb{R}$ é o conjunto:

a) $\{(0, 2), (0, 8), (0, 9), (1, 2), (1, 8), (1, 9), (2, 2), (2, 8), (3, 9), (4,8)\}$

b) $\{(1, 2), (1, 8), (1, 9), (2, 2), (2, 8), (3, 9), (4, 8)\}$

c) $\{(2, 1), (2, 2), (8, 1), (8, 2), (8, 4), (9, 1), (9, 3)\}$

d) $\{(0, 2), (0, 8), (0, 9), (2, 2)\}$

e) $\{(2, 0), (2, 2), (2, 4)\}$

7. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$, determine:

a) $f(3)$ **b)** $f(2x)$ **c)** $f(-x)$ **d)** $f(f(1))$

8. **IFSul-RS 2020** Considerando que o aumento do número de novos institutos federais no país seja estimado pela função $I(t) = 30 - \frac{4}{t}$ (em milhares), onde t é dado em anos e $I(t)$ é o número de novos institutos federais, o crescimento desse número no quinto ano será de:

a) 2 900 **b)** 2 000 **c)** 290 **d)** 200

9. Determine $f(x)$ sabendo que:

a) $f(x - 2) = 3x + 5$ **b)** $f(3x) = 9x - 1$

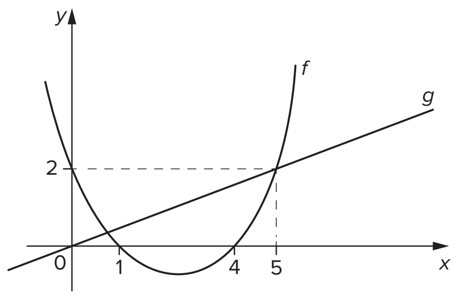
10. **Mackenzie-SP 2016** O polinômio do 2º grau $F(x)$ que verifica a identidade $F(x + 1) = x^2 - 7x + 6$ é

a) $F(x) = x^2 - 14x + 9$ **d)** $F(x) = x^2 - 9x + 14$

b) $F(x) = x^2 + 9x + 14$ **e)** $F(x) = x^2 - 7x + 4$

c) $F(x) = x^2 - 5x$

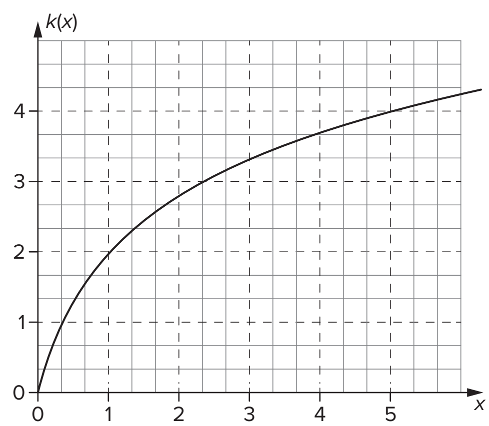
11. **Cefet-MG 2016** Na figura abaixo, estão representados os gráficos de duas funções reais, f e g, com domínios reais. Para cada $x \in \mathbb{R}$, a função h é definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.



Nessas condições, o valor de $h(5)$ é igual a

a) 0. **b)** 4. **c)** 10. **d)** 25.

12. **Insper-SP 2015** A relação entre o investimento x (em milhões de reais) na propaganda para a divulgação de um produto e o número k de potenciais consumidores (em milhões de pessoas) atingidos por essa campanha é dada por uma função $k(x)$, cujo gráfico está representado a seguir.



Para avaliar o retorno dessa campanha, calculam-se dois índices, como se segue:

- identificam-se os valores x_1, x_2 e x_3 para os quais 1, 2 e 4 milhões de potenciais consumidores são atingidos, respectivamente;
- a razão $\dfrac{x_2}{x_1}$ resulta no índice I_a;
- a razão $\dfrac{x_3}{x_2}$ resulta no índice I_b.

Para a função $k(x)$ acima, o valor de $\dfrac{I_b + I_a}{I_b - I_a}$ é

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

13. Determine o domínio das funções a seguir:

a) $y = \sqrt{24 - 8x}$
b) $y = \dfrac{x}{2x - 10}$
c) $y = \dfrac{\sqrt{3x - 12}}{\sqrt{22 - 2x}}$

14. Para treinar as operações em uma calculadora, um professor propõe o seguinte jogo para seus alunos:
Sorteia-se uma bola de uma urna que possui bolas numeradas de 1 a 40.
Os alunos devem substituir o número sorteado na função

$$V(x) = \sqrt{120 - 4x} + \frac{48}{3x - 66} + \frac{37}{\sqrt{5x - 75}}$$

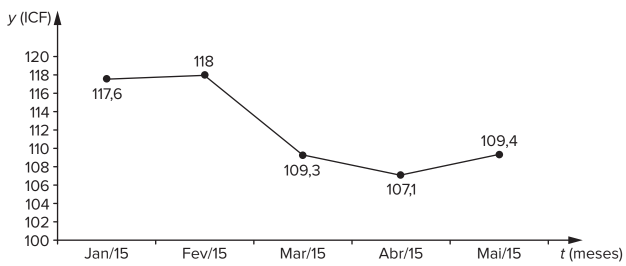
Quem chegar ao resultado primeiro vence a partida.
Antes do início, algumas bolas devem ser retiradas, pois não seria possível encontrar o resultado se forem sorteadas. Quantas bolas permanecerão na urna?

a) 8
b) 10
c) 14
d) 18
e) 21

15. **IFMT 2020** Considere a função vreal f dada por $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 15}}{x - 5}$. A respeito do domínio, podemos afirmar que:

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$

16. **Cefet-MG 2016** O gráfico abaixo mostra a Intenção de Consumo das Famílias (ICF) de Janeiro a Maio de 2015.



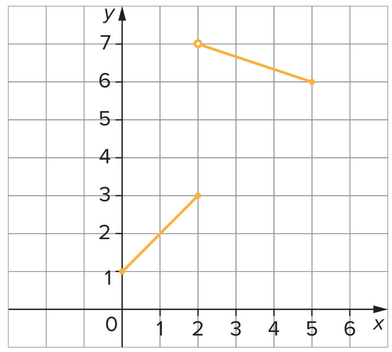
Disponível em: http://www.dm.com.br/economia/2015/05/comercio-espera-faturar-mais-no-mes-dos-namorados-revela-presidente-da-fecomercio.html (Adaptado. Acesso em: 26 ago. 2015.)

Se este gráfico representa uma função f que mostra o valor da ICF em função do tempo, de janeiro a maio, então seu conjunto imagem é

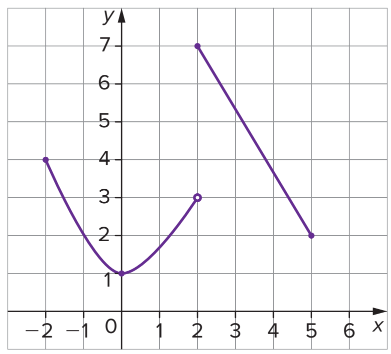
a) $Im(f) = [107,1; 118]$.
b) $Im(f) = [jan/15; mai/15]$.
c) $Im(f) = \{107,1; 109,3; 117,6; 118\}$.
d) $Im(f) = \{jan/15; fev/15; mar/15; abr/15; mai/15\}$.

17. Qual é a imagem de cada uma das funções abaixo?

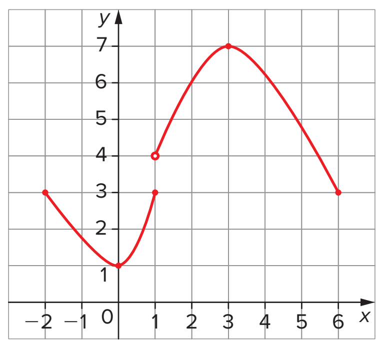
a)



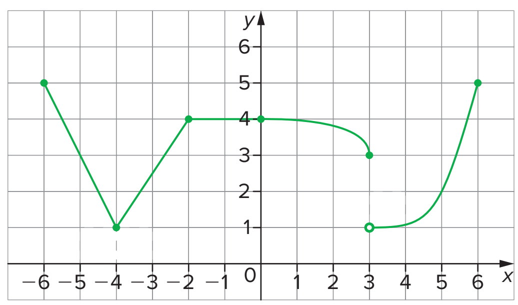
b)



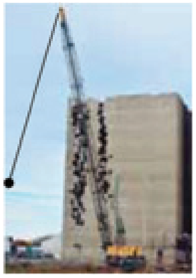
c)

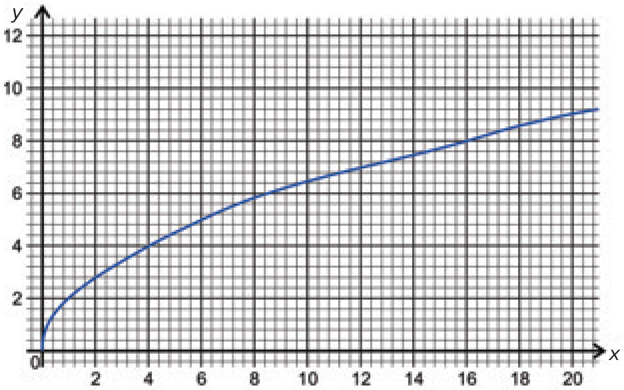


18. Determine os intervalos nos quais a função abaixo é crescente, decrescente ou constante.



19. **Unesp 2022** Sob certas condições ideais, o período y de oscilação do pêndulo de um guindaste de demolição, em segundos, é dado em função do comprimento x do cabo de aço, em metros, pela fórmula $y = k\sqrt{x}$, com k sendo um número real.
Essa função está representada no gráfico a seguir.

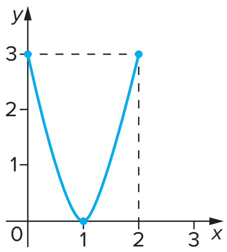

(https://journaltimes.com)

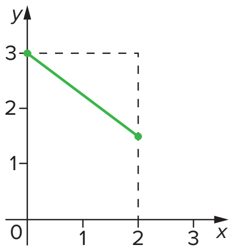


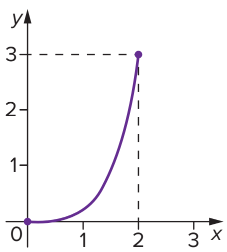
Considerando condições ideais, o período de oscilação do pêndulo do guindaste, quando o comprimento do cabo de aço está regulado em 28 m, é de

a) $8\sqrt{2}$ s.
b) $8\sqrt{7}$ s.
c) $4\sqrt{7}$ s.
d) $6\sqrt{7}$ s.
e) $9\sqrt{2}$ s.

20. Classifique as funções a seguir em sobrejetora, injetora ou bijetora, considerando $f: [0, 2] \to [0, 3]$.

a)


b)


c)


21. **Fuvest-SP 2020** A função E de Euler determina, para cada número natural n, a quantidade de números naturais menores do que n cujo máximo divisor comum com n é igual a 1. Por exemplo, E(6) = 2, pois os números menores do que 6 com tal propriedade são 1 e 5. Qual o valor máximo de E(n) para n de 20 a 25?

a) 19
b) 20
c) 22
d) 24
e) 25

22. Dada a função real $h(x) = 3x$, calcule $h(1)$, $h(-1)$, $h(2)$, $h(-2)$, $h(a)$ e $h(-a)$ e responda: esta função é par ou ímpar?

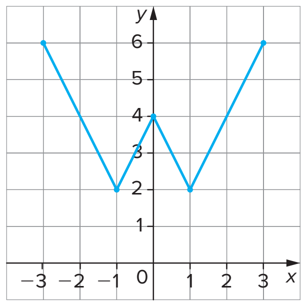
23. Dadas as funções reais $f(x) = x^4 + x^2$ e $h(x) = 3x$, a função $g(x) = f(x) \cdot h(x)$ é par ou ímpar?

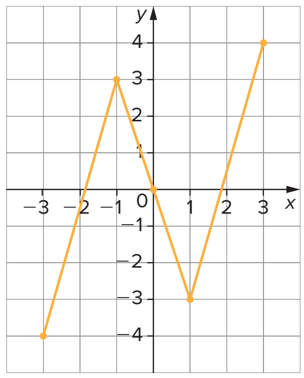
24. Em relação à função polinomial $f(x) = 2x^3 - 3x$, é válido afirmar que:

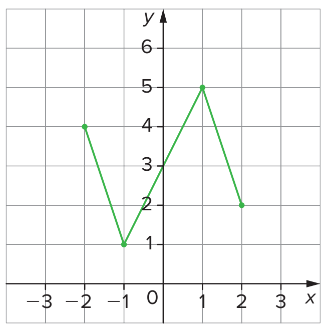
a) $f(-x) = f(x)$
b) $f(-x) = -f(x)$
c) $f(x^2) = (f(x))^2$
d) $f(ax) = a \cdot f(x)$
e) $f(ax) = a^2 \cdot f(x)$

25. Quais são as principais características dos gráficos de uma função par e de uma função ímpar?

26. Qual é a paridade das funções abaixo?

a)


b)


c)


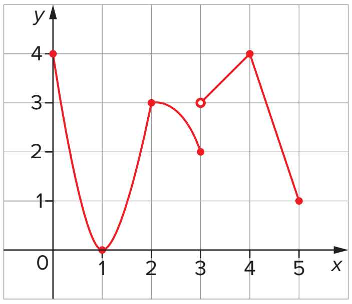
27. Dada uma função par $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma função ímpar $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere as afirmações a seguir.

I. Se $g(5) = 3$, então $g(-5) = 3$.
II. Se $f(2) = 1$, então $f(-2) = 1$.
III. $g(4) + g(-4) = 0$.
IV. $f(0) = 0$.

São verdadeiras as afirmações:

a) I e II.
b) I e III.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

28. A função $f: [0, 5] \to [0, 4]$ representada no gráfico é:

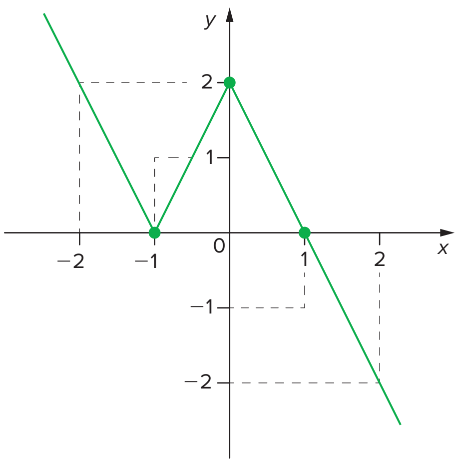


a) sobrejetora.
b) injetora.
c) par.
d) ímpar.
e) crescente.

29. Ifal 2016 Dada a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, assinale a alternativa **INCORRETA**.

a) É uma função injetora.
b) É uma função sobrejetora.
c) É uma função par.
d) É uma função ímpar.
e) É uma função linear.

30. Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pelo gráfico a seguir.



É correto afirmar que

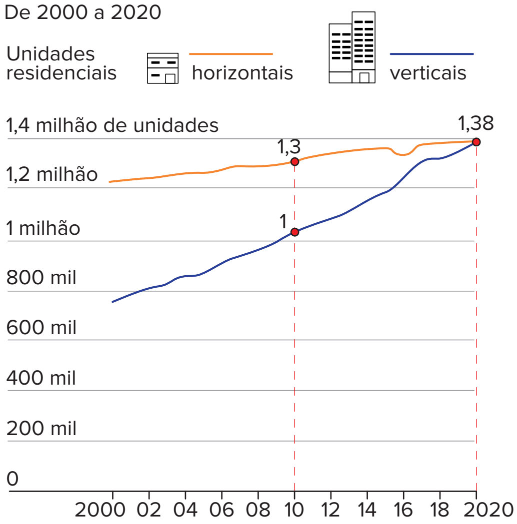
a) f é sobrejetora e não injetora.
b) f é bijetora.
c) $f(x) = f(-x)$ para todo x real.
d) $f(x) > 0$ para todo x real.
e) O conjunto imagem de f é $]-\infty, 2]$.

31. Em uma função periódica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de período igual a 8, sabemos que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$, $f(4) = 9$ e $f(5) = 0$. Assim, podemos afirmar que:

a) $f(9) = 3$
b) $f(12) = 0$
c) $f(10) = 4$
d) $f(17) = 2$
e) $f(21) = 8$

32. Unesp 2022 De acordo com modelos de projeções lineares de crescimento, estima-se que, em 2021, o número de unidades residenciais verticais já supere o de unidades residenciais horizontais na cidade de São Paulo, como mostra o gráfico.

Quantidade de unidades residenciais na cidade de São Paulo

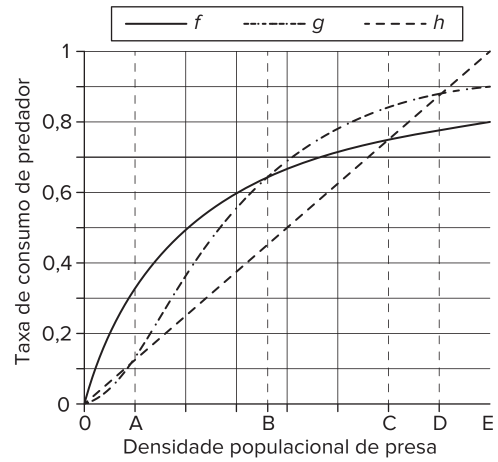


(www.nexojornal.com.br. Adaptado.)

Usando esses mesmos modelos e os dados em destaque no gráfico, a estimativa para 2022 é de que o total de unidades residenciais verticais supere o de unidades residenciais horizontais na cidade de São Paulo em

a) 16 mil.
b) 40 mil.
c) 160 mil.
d) 6 mil.
e) 60 mil.

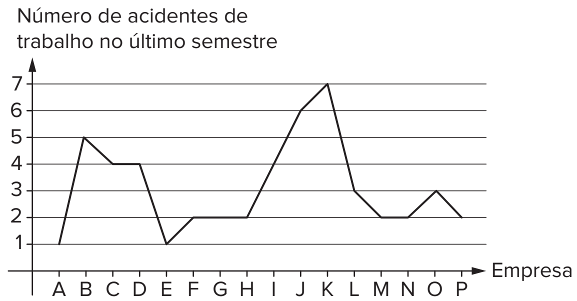
33. Enem PPL 2019 O modelo predador-presa consiste em descrever a interação entre duas espécies, sendo que uma delas (presa) serve de alimento para a outra (predador). A resposta funcional é a relação entre a taxa de consumo de um predador e a densidade populacional de sua presa. A figura mostra três respostas funcionais (f, g, h), em que a variável independente representa a densidade populacional da presa.



Qual o maior intervalo em que a resposta funcional $f(x)$ é menor que as respostas funcionais $g(x)$ e $h(x)$, simultaneamente?

a) (0, B)
b) (B, C)
c) (B, E)
d) (C, D)
e) (C, E)

34. **IFPE 2018** Ao realizar um estudo sobre acidentes de trabalho em empresas do polo de confecções do Agreste, Dirce, aluna do curso de Segurança do Trabalho no campus Caruaru, desenhou o gráfico a seguir:



Com base no gráfico feito pela aluna, é CORRETO afirmar que

a) o conjunto imagem da função representada pelo gráfico é o intervalo natural [2, 6].

b) a maioria das empresas pesquisadas teve mais de 4 acidentes de trabalho no semestre.

c) metade das empresas pesquisadas registraram menos de 3 acidentes de trabalho no semestre.

d) a empresa H teve mais acidentes de trabalho que a empresa O no último semestre.

e) a empresa P teve o menor número de acidentes de trabalho no último semestre.

35. **Unifesp 2020** Raquel imprimiu um número x de fotografias ao custo unitário de 54 centavos. Cada foto foi vendida ao preço de 75 centavos sobrando, no final do período de vendas, y fotografias sem vender, o que resultou em um prejuízo de 12 reais em relação ao custo total das impressões.

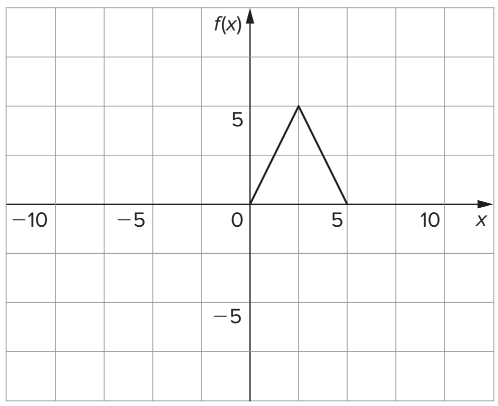
a) Calcule quantas fotografias foram impressas, para o caso em que $y = 100$.

b) Determine a expressão de y em função de x para a situação descrita no enunciado.

36. **Unicamp-SP (Adapt.)** Suponha que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$) e periódica, com período 10 (isto é, $f(x) = f(x + 10)$). O gráfico da função no intervalo [0, 5] é apresentado a seguir.

a) Complete o gráfico, mostrando a função no intervalo [−10, 10], e calcule o valor de $f(99)$.

b) Dadas as funções $g(y) = y^2 - 4y$ e $h(x) = g(f(x))$, calcule $h(3)$.



Texto complementar

Outras funções

Além das funções que vamos abordar em nosso curso, existem várias outras distribuídas pela Matemática. Vamos apresentar três exemplos.

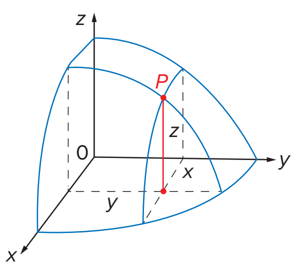
Funções de duas variáveis

Esse tipo de função associa um valor a partir de duas informações preliminares.

Por exemplo, se o risco de uma doença ser fatal está associado à idade e ao peso de determinada pessoa, podemos modelá-la como uma função de duas variáveis.

f(idade, peso) = risco

Esse tipo de função tem um gráfico tridimensional: $z = f(x, y)$.



Progressões

As progressões aritmética e geométrica podem ser representadas por funções. Cada uma das posições está associada a um número.

Uma progressão aritmética, por exemplo (2, 5, 8, 11, 14, ...), pode ser escrita com pares ordenados, nos quais a abscissa representa a posição e a ordenada o número correspondente a essa posição. No caso, os elementos dessa função são: {(1, 2), (2, 5), (3, 8), (4, 11), (5, 14), ...}.

Matrizes

As matrizes podem ser representadas por funções, que associam cada posição da matriz (indicada por um par ordenado) ao elemento da matriz nessa posição.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \{((1, 1), 4), ((1, 2), -3), ((2, 1), 2), ((2, 2), 1)\}$$

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Par ordenado

Se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

Se $(a, b) = (c, d)$, então $a = c$ e $b = d$.

Produto cartesiano

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

Função

Uma relação de A em B é chamada de função de A em B quando cada um dos elementos de A corresponder a um único elemento de B.

domínio contradomínio

$f: A \to B$

$y = x^2$ lei de formação

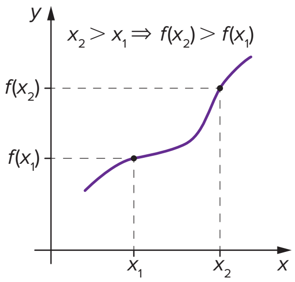
- Domínio: conjunto de partida.
- Contradomínio: conjunto de chegada.
- Imagem: elementos do contradomínio associados a elementos do domínio.

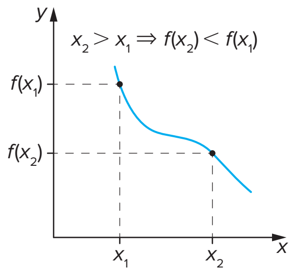
Crescente

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Decrescente

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$





Sobrejetora

Uma função é sobrejetora quando sua imagem é igual ao contradomínio.

Injetora

Uma função f é injetora quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Bijetora

Uma função f é bijetora quando for simultaneamente injetora e sobrejetora.

Função par

Uma função f é par quando $f(-x) = f(x)$.

Função ímpar

Uma função f é ímpar quando $f(-x) = -f(x)$.

Função periódica

Uma função f é periódica de período p quando: $f(x) = f(x + p)$.

Raízes da função

São os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

Quer saber mais?

Vídeo

CANAL MathGurl. *O que raio é uma derivada?*. YouTube. Disponível em: https://youtu.be/82OmGoShSvE.

Nos cursos de Exatas e Biológicas, uma das disciplinas mais comuns é Cálculo, que estuda, entre outros assuntos, a derivada de algumas funções. Conheça nesse vídeo mais sobre as funções e o significado de derivada. Acesso em: 15 jul. 2022.

Sites

PIRES, Rogério Fernando. O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. *Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)*, 13 a 16 jul. 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6006_2426_ID.pdf.

O *site* indicado traz a história das funções. Acesso em: 15 jul. 2022.

GRAVINA, Maria Alice. O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções? *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n.17. Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://p.p4ed.com/MHIEY.

No artigo sugerido, há um estudo sobre a construção de gráficos de funções quadráticas em que a tabela é mais um recurso para construção do gráfico e não o único. Tem também o intuito de mostrar que a construção do gráfico vai além de localizar pontos no plano cartesino, as etapas da sua contrução são fundamentais para a análise do comportamento da função.
Acesso em: 15 jul. 2022.

Livro

STEWART, Ian. *Os números da natureza*. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

Neste livro, discutem-se aplicações e padrões matemáticos encontrados na natureza.

Exercícios complementares

1. Por que {2, 3} = {3, 2} é verdadeiro e (2, 3) = (3, 2) é falso?

2. UFV-MG Os pares ordenados (1, 2), (2, 6), (3, 7), (4, 8) e (1, 9) pertencem ao produto cartesiano A × B. Sabendo-se que A × B tem 20 elementos, é CORRETO afirmar que a soma dos elementos de A é:

a) 9 **b)** 11 **c)** 10 **d)** 12 **e)** 15

3. UFRN 2013 O jogo da velha tradicional consiste em um tabuleiro quadrado dividido em 9 partes, no qual dois jogadores, alternadamente, vão colocando peças (uma a cada jogada). Ganha o jogo aquele que alinhar, na horizontal, na vertical ou na diagonal, três de suas peças.
Uma versão chamada JOGO DA VELHA DE DESCARTES, em homenagem ao criador da geometria analítica, René Descartes, consiste na construção de um subconjunto do plano cartesiano, no qual cada jogador, alternadamente, anota as coordenadas de um ponto do plano. Ganha o jogo aquele que primeiro alinhar três de seus pontos. A sequência abaixo é o registro da sequência das jogadas de uma partida entre dois jogadores iniciantes, em que um anotava suas jogadas com a cor preta e o outro, com a cor cinza. Eles desistiram da partida sem perceber que um deles havia ganhado.

((1, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2))

Com base nessas informações, é correto afirmar que o jogador que ganhou a partida foi o que anotava sua jogada com a cor

a) cinza, em sua terceira jogada.
b) preta, em sua terceira jogada.
c) cinza, em sua quarta jogada.
d) preta, em sua quarta jogada.

4. O que significa $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$?

5. **Uepa 2014** As atividades de comunicação humana são plurais e estão intimamente ligadas às suas necessidades de sobrevivência. O problema de contagem, por exemplo, se confunde com a própria história humana no decorrer dos tempos. Assim como para os índios mundurucus, do sul do Pará, os *waimiri-atroari*, contam somente de um até cinco, adotando os seguintes vocábulos: *awynimi* é o número 1, *typytyna* é o 2, *takynima* é o 3, *takyninapa* é o 4, e, finalmente, *warenipa* é o 5.

(Texto Adaptado: *Scientific American* – Brasil, "Etnomatemática". Edição Especial, Nº 11, ISSN 1679-5229)

Considere A o conjunto formado pelos números utilizados no sistema de contagem dos waimiri-atroari, ou seja, A = {1, 2, 3, 4, 5}. Nestas condições, o número de elementos da relação $R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geqslant x\}$ é igual a:

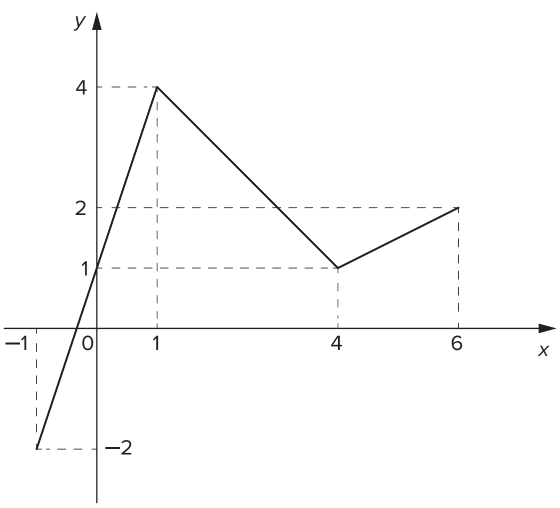
a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

6. **IME-RJ 2021** Seja $f: D \to \mathbb{R}$ uma função $D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0 \text{ e } x \neq 1\}$ e que satisfaz a equação $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + f(x) - x = 2$. O valor de f(2) é:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{7}{2}$

7. Determine $f(x)$ sabendo que $f(2x - 1) = \dfrac{2x + 3}{5 - 4x}$.

8. **Acafe-SC 2016** O gráfico a seguir representa a função real $f(x)$, definida no intervalo $[-1, 6]$.



Considerando a função $h(x) = f(x - 2)$, então o valor da expressão dada por $f(h(3)) + h(f(4))$ é igual a:

a) 7 b) –2 c) 5 d) –1

9. **UEL-PR 2018** Como podemos compreender a dinâmica de transformar números? Essa pergunta pode ser respondida com o auxílio do conceito de uma função real. Vejamos um exemplo. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x\sqrt{5} + 1 - 2x$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $f(a) = b$, então diremos que b é descendente de a e também convencionaremos dizer que a é ancestral de b.

Por exemplo, 1 é descendente de 0, já que $f(0) = 1$. Note também que 1 é ancestral de $\sqrt{5} - 1$, uma vez que $f(1) = \sqrt{5} - 1$.

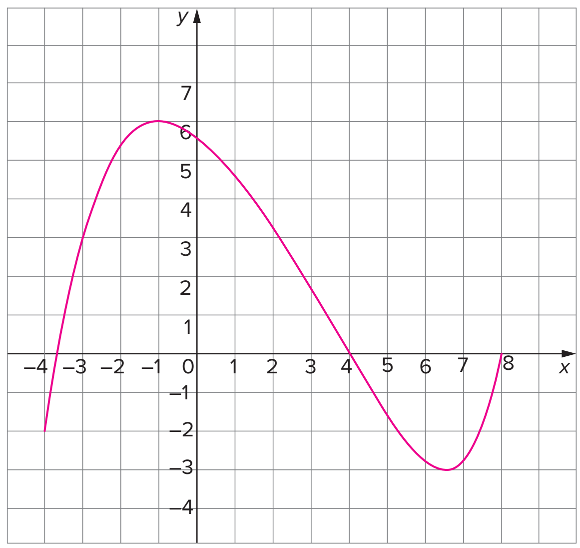
Com base na função dada, e nessas noções de descendência e ancestralidade, atribua V (verdadeiro) ou F (falso) às afirmativas a seguir.

- ( ) Todo número real tem descendente.
- ( ) $2 + \sqrt{5}$ é ancestral de 2.
- ( ) Todo número real tem ao menos dois ancestrais distintos.
- ( ) Existe um número real que é ancestral dele próprio.
- ( ) $6 - 2\sqrt{5}$ é descendente de 5.

Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.

a) F, F, F, V, V
b) F, V, F, F, V
c) V, V, F, V, F
d) V, V, V, F, V
e) V, F, V, V, F

10. **UPF-RS 2017** Observe a figura:



Ela representa o gráfico da função $y = f(x)$, que está definida no intervalo $[-4, 8]$. A respeito dessa função, é **correto** afirmar que

a) $f(3) > f(1)$
b) $f(f(2)) > 2$
c) $\text{Im}(f) = [-2, 6]$
d) $f(x) = 0$ para $x = 8$
e) O conjunto $\{-4 \leqslant x \leqslant 8 \mid f(x) = -1{,}2\}$ tem exatamente 2 elementos

11. **UEPG-PR** Considerando os conjuntos: R = {0, 1, 3, 5, 7}, S = {2, 4, 6} e P = {1, 2}, assinale o que for correto.

01 $1 \in (S - P)$.
02 Existe uma função f: S → P que é bijetora.
04 $(S \cap P) \cup R = R$.
08 $R \cap S \cap P = \varnothing$.
16 Nenhuma função f: S → R é sobrejetora.

Soma:

12. **UFRN** Sejam E o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e P o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E.
Se f: E → P é a função que a cada escola de E associa seu número de professores, então
a) f não pode ser uma função bijetora.
b) f não pode ser uma função injetora.
c) f é uma função sobrejetora.
d) f é necessariamente uma função injetora.

13. **Udesc 2013** A função f definida por $f(x) = 1 + x^2$ é uma função bijetora, se os conjuntos que representam o domínio (D(f)) e a imagem (Im(f)) são:
a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [1, +\infty[$
b) $D(f) =]-\infty, 0]$ e $Im(f) = \mathbb{R}$
c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$
d) $D(f) = [0, +\infty[$ e $Im(f) = [0, +\infty[$
e) $D(f) = [0, +\infty[$ e $Im(f) = [1, +\infty[$

14. Prove que a função $f: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, dada por $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+4}$, é injetora.

15. **ITA-SP 2013** Considere funções $f, g, f + g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das afirmações:
I. Se f e g são injetoras, $f + g$ é injetora;
II. Se f e g são sobrejetoras, $f + g$ é sobrejetora;
III. Se f e g não são injetoras, $f + g$ não é injetora;
IV. Se f e g não são sobrejetoras, $f + g$ não é sobrejetora,
é (são) verdadeira(s)
a) nenhuma.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas III e IV.
e) todas.

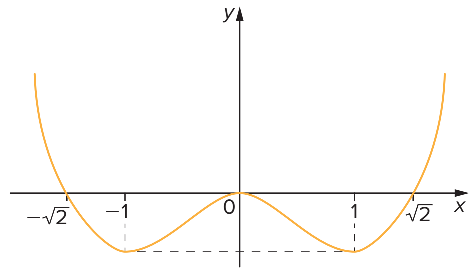
16. **UEM-PR 2017** Acerca da função real definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, assinale o que for correto.
01 A imagem de 1 por essa função é o próprio 1.
02 Essa função está definida em toda a reta real.
04 Considerando o contradomínio dessa função como o conjunto dos reais, ela é sobrejetora.
08 O valor mínimo que a função assume é 0, o que ocorre para $x = 0$.
16 No intervalo $[0, +\infty[$, a função é crescente.
Soma:

17. **ITA-SP 2017** Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$. Considere as seguintes afirmações:
I. Existe uma bijeção $f: X \to Y$.
II. Existe uma função injetora $g: Y \to X$.
III. O número de funções injetoras $f: X \to Y$ é igual ao número de funções sobrejetoras $g: Y \to X$.
É (são) verdadeira(s)
a) nenhuma delas.
b) apenas I.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) todas.

18. Sendo $f(x)$ uma função par e $g(x)$ uma função ímpar, verifique a paridade das funções a seguir:
a) $f(x) \cdot g(x)$
b) $2 \cdot f(x)$
c) $[g(x)]^2$

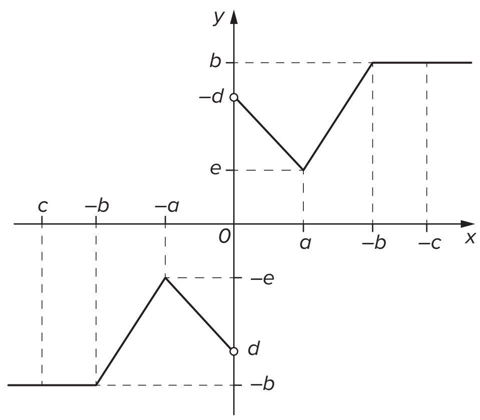
19. Verifique a paridade das funções a seguir:
a) $y = \dfrac{x-2}{x^2+2}$
b) $y = \dfrac{1}{x^2}$
c) $y = \dfrac{2}{x}$
d) $y = (x + 1) + (x - 1)$

20. Na figura temos o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = \dfrac{x^4 - 2x^2}{2}$.



É verdade que:
a) esse gráfico é simétrico em relação ao eixo das abscissas.
b) $f(x) < 0$ para $-1 < x < 1$.
c) $f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 1$.
d) $f(x) > 0$ para $x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2}$.
e) o valor máximo de f ocorre para $x = 0$.

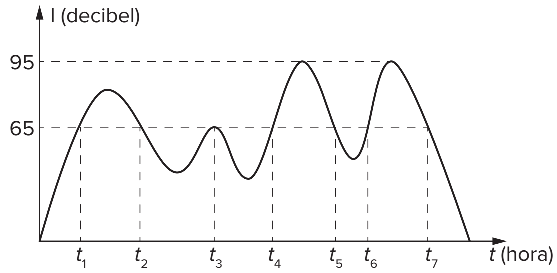
21. **AFA-SP 2013** O gráfico abaixo descreve uma função f: A → B



Analise as proposições que seguem.
I. $A = \mathbb{R}^*$
II. f é sobrejetora se $B = \mathbb{R} - [-e, e]$
III. Para infinitos valores de $x \in A$, tem-se $f(x) = -b$
IV. $f(-c) - f(c) + f(-b) + f(b) = 2b$
V. f é função par.
VI. $\nexists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -d$
São verdadeiras apenas as proposições
a) I, III e IV
b) I, II e VI
c) III, IV e V
d) I, II e IV

FRENTE 1

22. Enem PPL 2018 De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o limite de ruído suportável para o ouvido humano é de 65 decibéis. Ruídos com intensidade superior a este valor começam a incomodar e causar danos ao ouvido. Em razão disto, toda vez que os ruídos oriundos do processo de fabricação de peças em uma fábrica ultrapassam este valor, é disparado um alarme sonoro. Indicando que os funcionários devem colocar proteção nos ouvidos. O gráfico fornece a intensidade sonora registrada no último turno de trabalho dessa fábrica. Nele, a variável *t* indica o tempo (medido em hora), e I indica a intensidade sonora (medida em decibel).

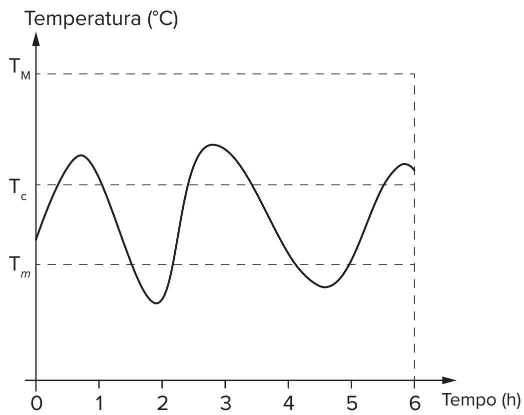


Disponível em: www.crmariocovas.sp.gov.br. Acesso em: 24 abr. 2015 (adaptado).

De acordo com o gráfico, quantas vezes foi necessário colocar a proteção de ouvidos no último turno de trabalho?

a) 7
b) 6
c) 4
d) 3
e) 2

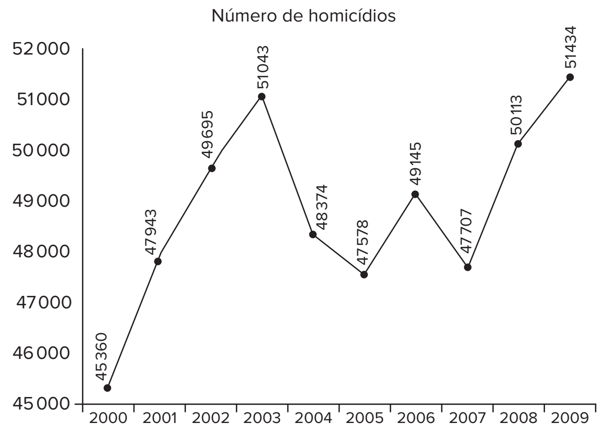
23. Enem 2016 Alguns equipamentos eletrônicos podem "queimar" durante o funcionamento quando sua temperatura interna atinge um valor máximo T_M. Para maior durabilidade dos seus produtos, a indústria de eletrônicos conecta sensores de temperatura a esses equipamentos, os quais acionam um sistema de resfriamento interno, ligando-o quando a temperatura do eletrônico ultrapassa um nível crítico T_C, e desligando-o somente quando a temperatura cai para valores inferiores a T_m. O gráfico ilustra a oscilação da temperatura interna de um aparelho eletrônico durante as seis primeiras horas de funcionamento, mostrando que seu sistema de resfriamento interno foi acionado algumas vezes.



Quantas foram as vezes que o sensor de temperatura acionou o sistema, ligando-o ou desligando-o?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 9

24. Enem PPL 2016 Ano após ano, muitos brasileiros são vítimas de homicídio no Brasil. O gráfico apresenta a quantidade de homicídios registrados no Brasil, entre os anos 2000 e 2009.



WAISELFISZ, J. J. **Mapa da violência 2012:** os novos padrões da violência homicida no Brasil. São Paulo: Instituto Sangari, 2011 (adaptado).

Se o maior crescimento anual absoluto observado nessa série se repetisse de 2009 para 2010, então o número de homicídios no Brasil ao final desse período seria igual a

a) 48 839.
b) 52 755.
c) 53 840.
d) 54 017.
e) 54 103.

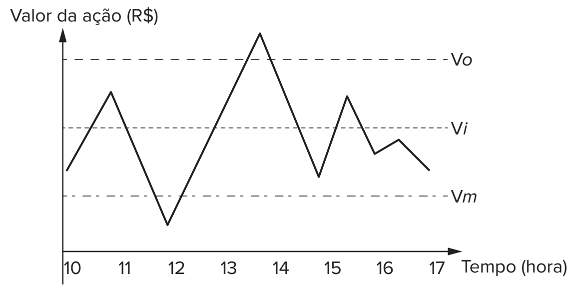
25. Enem 2015 Um investidor inicia um dia com *x* ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal (V*i*);

II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo (V*m*);

III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo (Vo).

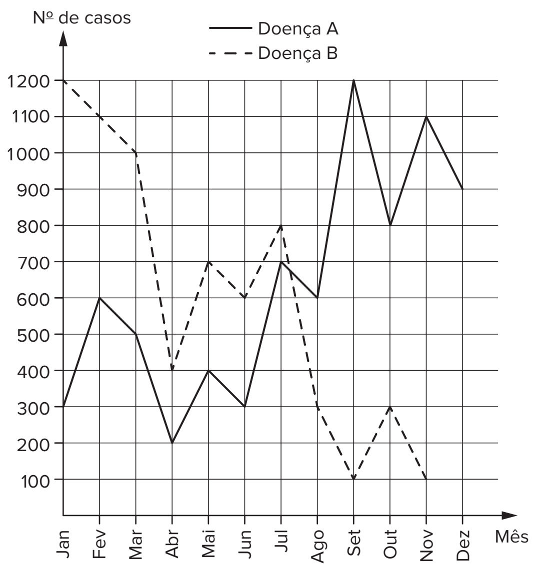
O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



Quantas operações o investidor fez naquele dia?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

26. Enem PPL 2015 Doenças relacionadas ao saneamento ambiental inadequado (DRSAI) podem estar associadas ao abastecimento deficiente de água, tratamento inadequado de esgoto sanitário, contaminação por resíduos sólidos ou condições precárias de moradia. O gráfico apresenta o número de casos de duas DRSAI de uma cidade:



Disponível em: http://dados.gov.br. Acesso em: 7 dez. 2012 (adaptado).

O mês em que se tem a maior diferença entre o número de casos das doenças de tipo A e B é

a) janeiro.
b) abril.
c) julho.
d) setembro.
e) novembro.

27. Fuvest-SP Sejam D_f e D_g os maiores subconjuntos de $\mathbb{R}$, nos quais estão definidas, respectivamente, as funções reais:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x - 2}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}}{\sqrt{x - 2}}$$

Considere, ainda, I_f e I_g as imagens de f e g, respectivamente.

Nessas condições,

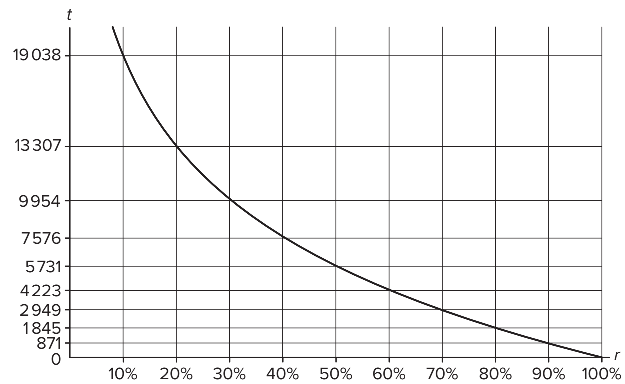
a) $D_f = D_g$ e $I_f = I_g$.
b) tanto D_f e D_g quando I_f e I_g diferem em apenas um ponto.
c) D_f e D_g diferem em apenas um ponto, I_f e I_g diferem em mais de um ponto.
d) D_f e D_g diferem em mais de um ponto, I_f e I_g diferem em apenas em ponto.
e) tanto D_f e D_g quanto I_f e I_g diferem em mais de um ponto.

28. UEL-PR 2020 Leia o texto a seguir.

Luzia é de inestimável valor científico por se tratar do mais antigo fóssil humano paleoamericano já encontrado no Brasil. O crânio e ossos da coxa e do quadril de Luzia foram achados em 1975, em uma gruta da região de Lagoa Santa, em Minas Gerais. Seu esqueleto foi datado de 11,5 mil anos e ela deve ter morrido aos 25 anos. Neste século, seu rosto foi reconstituído na Inglaterra.

Adaptado de: www.museunacional.ufrj.br

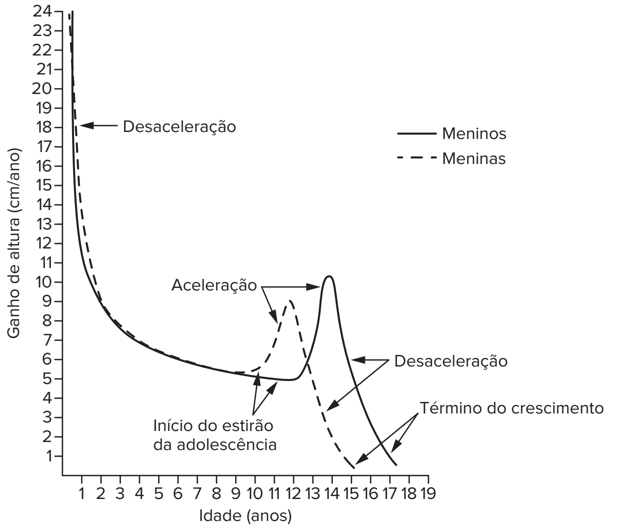
Um dos processos de datação arqueológica ocorre calculando o porcentual r da quantidade de carbono 14 presente no fóssil em relação à quantidade desse mesmo elemento encontrada em um ser vivo de características semelhantes. Suponha que para fósseis humanos paleoamericanos a figura a seguir exiba o gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ que associa, a cada r, a quantidade $t = f(r)$ de anos que se passaram desde a morte do ser humano em questão.



Com base no texto e no gráfico, assinale a alternativa correta.

a) No caso de Luzia, o porcentual r no momento de sua datação se encontrava entre 20% e 30%.
b) À medida que o tempo passa, o porcentual r de um fóssil humano paleoamericano cresce em relação a um ser vivo de características semelhantes.
c) Um fóssil humano paleoamericano, datado entre 2 949 e 4 223 anos, apresenta porcentual r de, no máximo, 50%.
d) O porcentual r apresentado por Luzia, imediatamente após sua morte, se encontrava entre 80% e 90%.
e) O tempo necessário para que um fóssil humano paleoamericano perca 10 pontos percentuais de r é constante.

29. Unesp 2016 No gráfico estão representadas as curvas típicas de velocidade de crescimento, em cm/ano, em função da idade, em anos, para meninos e meninas de 0 a 20 anos de idade. Estão indicados, também, para os dois gêneros, trechos de aceleração e desaceleração do crescimento e os pontos de início do estirão da adolescência e de término de crescimento.

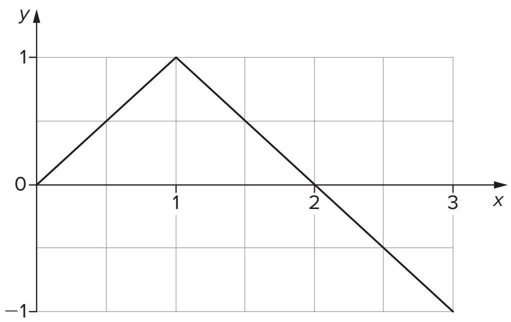


(Robert M. Malina e Claude Bouchard. *Atividade física do atleta jovem: do crescimento à maturação*, 2002. Adaptado.)

Considerando apenas as informações contidas no gráfico, é correto afirmar que:

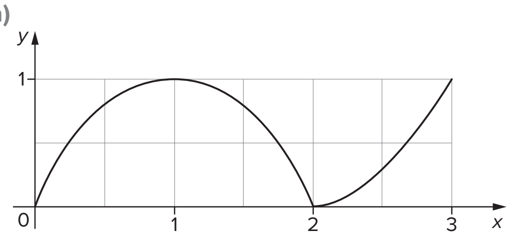
a) após o período de aceleração no crescimento, tanto os meninos quanto as meninas param de crescer.
b) as meninas atingem sua maior estatura por volta dos 12 anos de idade e os meninos, por volta dos 14 anos de idade.
c) se um menino e uma menina nascem com a mesma estatura, ao final do período de crescimento eles também terão a mesma estatura.
d) desde o início dos respectivos estirões do crescimento na adolescência, até o final do crescimento, os meninos crescem menos do que as meninas.
e) entre 4 e 8 anos de idade, os meninos e as meninas sofrem variações iguais em suas estaturas.

30. Unicamp-SP 2018 A figura a seguir exibe o gráfico de uma função $y = f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 3$.

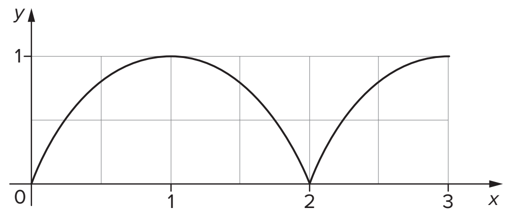


O gráfico de $y = [f(x)]^2$ é dado por

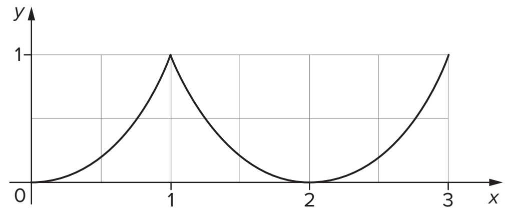
a)



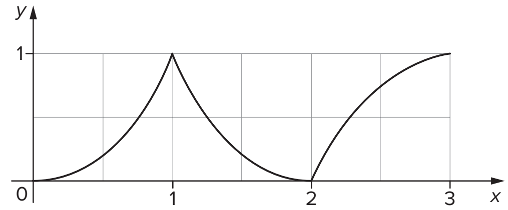
b)



c)



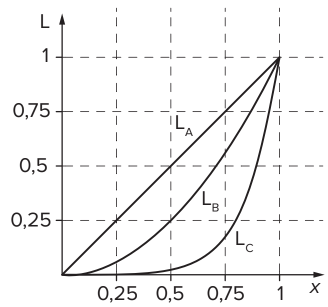
d)



31. UEM-PR 2014 A função de Lorenz de uma população P, denotada por LP(x), indica qual a porcentagem da renda dessa população está concentrada entre os x de menor renda. Sendo P a população do Brasil, tem-se, por exemplo, LP(0,8) = 42,3% indicando que os 80% de menor renda na população brasileira detêm apenas 42,3% do total de renda da população.

Fonte: IBGE/2013.

O gráfico adiante representa a função de Lorenz de três populações: A, B e C. Com base nessas informações e em outras de Geografia, assinale o que for **correto**.



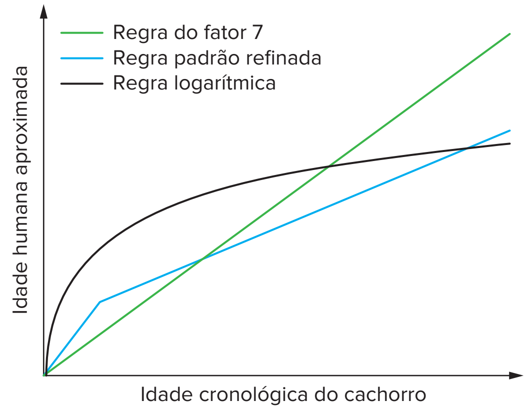
01 Mais de 60% do total de renda da população brasileira estão concentrados entre os 10% de maior renda.
02 $L_B(0,5) = 0,25$.
04 A desigualdade de renda entre os integrantes da população B é maior do que entre os integrantes da população C.
08 75% da renda da população C estão concentrados em menos de 25% da população.
16 Na população A, todos os integrantes têm a mesma renda.

Soma:

Utilize o texto para responder às questões **32** e **33**.

Há uma crença de que cada ano que um cão vive é equivalente a sete anos humanos, em qualquer estágio da vida do animal. Mas novas pesquisas sugerem que a relação não seja tão simples se considerarmos alguns marcos básicos do desenvolvimento canino.

O gráfico apresenta modelos baseados em diferentes regras que estabelecem uma equivalência entre a idade do cachorro e a idade humana aproximada.



(www.bbc.com, 11.01.2020.Adaptado.)

As regras que definem cada um desses modelos que associam a idade cronológica do cachorro (x), em anos, à idade humana aproximada (y), em anos, estão definidas pelas relações:

- Regra do fator 7: $y = 7 \cdot x$, para $0 < x \leq 16$
- Regra padrão refinada:

$$y = \begin{cases} 12 \cdot x, \text{ se } 0 < x \leq 2 \\ 24 + 4 \cdot (x - 2), \text{ se } 2 < x \leq 16 \end{cases}$$

- Regra logarítmica: $y = 31 + 16 \cdot \ln x$, para $0{,}15 < x \leq 16$

32. Unesp 2021 A idade do cachorro para a qual a regra do fator 7 e a regra padrão refinada se equivalem, ou seja, apresentam uma mesma idade humana aproximada, é

a) 5 anos e 3 meses.
b) 5 anos e 4 meses.
c) 2 anos.
d) 7 anos e 4 meses.
e) 1 ano e 5 meses.

33. Unesp 2021 Considere a tabela a seguir.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ln x	0,70	1,10	1,40	1,60	1,80	1,95	2,10	2,20	2,30

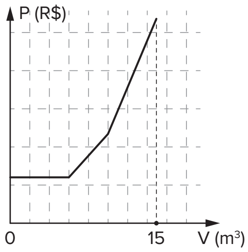
Seja N o menor número inteiro de anos completos de um cão para que, segundo a regra do fator 7, a idade humana equivalente ultrapasse 100 anos. Ao aplicar N na regra logarítmica, o número de anos completos da idade humana equivalente será igual a

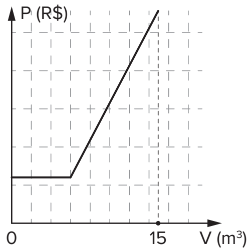
a) 79. **b)** 73. **c)** 80. **d)** 81. **e)** 74.

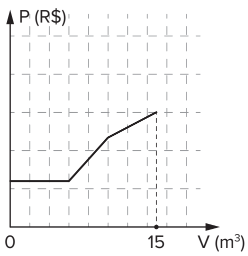
34. Enem 2019 Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

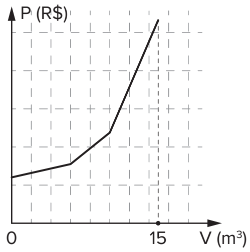
- Faixa 1: para consumo de até 6 m³, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m³ até 10 m³, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m³;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m³, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m³.

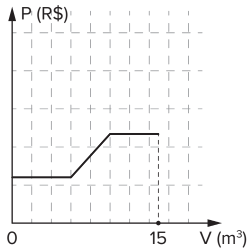
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 5 m³ por mês.
O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é

a)


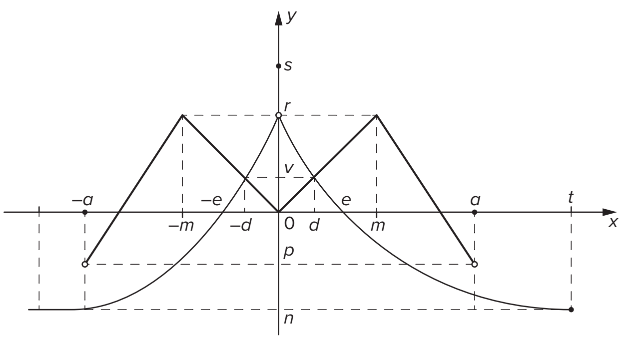
d)


b)


e)


c)


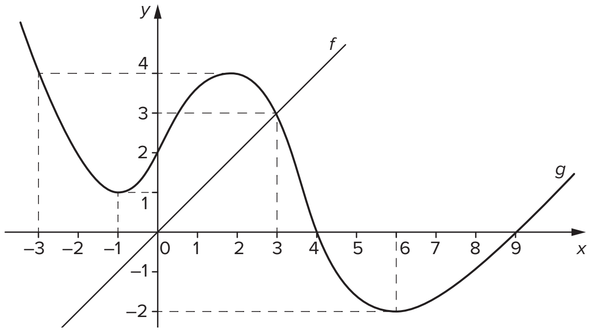
35. EPCar-MG Considere os gráficos das funções reais $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: B \to \mathbb{R}$.
Sabe-se que $A = [-a, a]$; $B =]-\infty, t]$; $g(-a) < f(-a)$; $g(0) > f(0)$; $g(a) < f(a)$ e $g(x) = n$ para todo $x \leq -a$.



Analise as afirmativas abaixo e marque a FALSA.

a) A função f é par.
b) Se $x \in]d, m[$, então $f(x) \cdot g(x) < 0$
c) $\text{Im}(g) = [n, r[\cup \{s\}$
d) A função $h: E \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ está definida se $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x < -d \text{ ou } d < x \leq a\}$

36. **AFA-SP 2016** Considere as funções reais $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados abaixo.



Sobre essas funções, é correto afirmar que

a) $\forall x \in [0, 4],\ g(x) - f(x) > 0$

b) $f(g(0)) - g(f(0)) > 0$

c) $\dfrac{g(x) \cdot f(x)}{[f(x)]^2} \leqslant 0 \quad \forall x \in\ ]-\infty, 0[\ \cup [4, 9]$

d) $\forall x \in [0, 3]$, tem-se $g(x) \in [2, 3]$

BNCC em foco

EM13MAT104

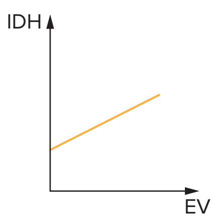
1. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é um número utilizado para classificar o desenvolvimento humano de países, com base na expectativa de vida da população (EV), no índice de escolaridade (IE) e na renda *per capita* (RP).

Atualmente é calculado a partir da média geométrica entre esses três dados:

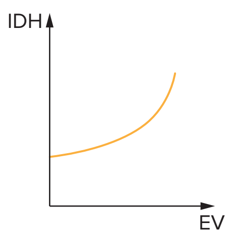
$$\text{IDH} = \sqrt[3]{\text{EV} \cdot \text{IE} \cdot \text{RP}}$$

Supondo que o IDH de um país seja atualmente 0,8 e que a renda *per capita* e a escolaridade se mantenham inalterados, o gráfico que melhor representa a evolução do IDH em função de EV é:

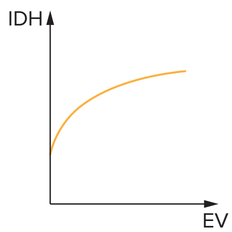
a)



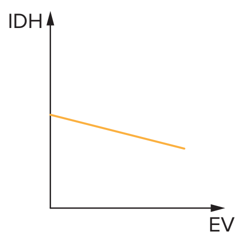
b)



c)



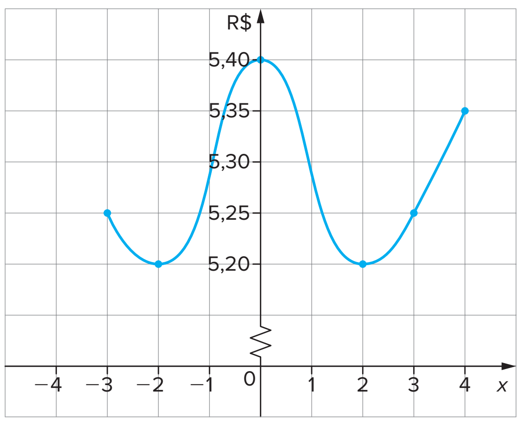
d)



Utilize as informações a seguir para responder às questões **2** e **3**.

O preço do dólar está muito instável nos últimos dias por causa das medidas tomadas pelo setor financeiro do país. Suponha que haja simetria no comportamento desse preço em relação ao dia 20 desse mês, ou seja, o valor no dia 19 é igual ao do dia 21, o valor do dia 18 é igual ao do dia 22.

Construindo um gráfico onde a origem ($x = 0$) corresponde ao dia 20, temos:



EM13MAT101

2. Podemos afirmar que a função representada nesse gráfico é:

a) par.

b) crescente.

c) injetora.

d) ímpar.

EM13MAT101

3. Qual é o valor do dólar no dia 16?

a) R$ 5,20.

b) R$ 5,25.

c) R$ 5,35.

d) R$ 5,40.


adamkaz/iStockphoto.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

3

Função do 1º grau

Quanto custará uma corrida de táxi ou quanto pagarei de celular este mês? Respostas para questões simples como essas dependem de muitas variáveis. Trajeto e extensão, tarifa por minuto e minutos utilizados interferem, respectivamente, na primeira e na segunda resposta. Há diversos outros fatores que podem alterar esses valores, mas é em momentos corriqueiros como esses que a Matemática surge como ferramenta, pois, com a criação de alguns modelos, podemos identificar leis que regem alguns comportamentos. Verificando como algumas variáveis se relacionam, podemos antecipar seus resultados.

Coletando dados de grandezas que variam linearmente, é possível utilizar uma reta que equacione essa relação. Por meio dessa reta, podemos prever valores que extrapolam os dados observados e que seguem a mesma variação. Para isso, precisamos conhecer as características e propriedades da função do 1º grau.

Função polinomial do 1º grau

Definição

Uma função será chamada de função do 1º grau (ou função polinomial do 1º grau) quando sua lei de formação tiver a forma:

$$f(x) = ax + b \text{ com } a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

b) $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = -4x + 5$

c) $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $h(x) = 6x$

Toda função do 1º grau também pode ser chamada de **função afim**.

Gráfico

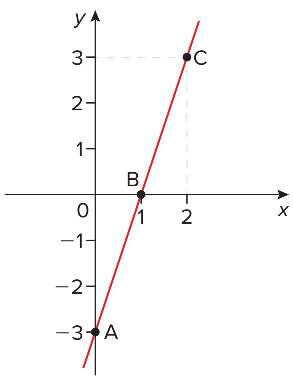
O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta. Para obtê-lo, precisamos determinar ao menos dois pontos, atribuindo valores para x ou para y.

Exemplos:

a) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y = 3x - 3 \end{cases}$

para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 3 = -3 \to A(0, -3)$
para $x = 1$, temos $y = 3 \cdot 1 - 3 = 0 \to B(1, 0)$
para $x = 2$, temos $y = 3 \cdot 2 - 3 = 3 \to C(2, 3)$

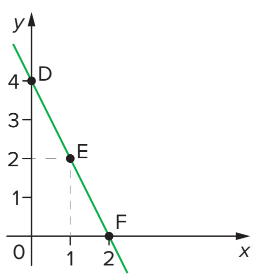
x	y
0	-3
1	0
2	3



b) $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

para $x = 0$, temos $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4 \to D(0, 4)$
para $x = 1$, temos $y = -2 \cdot 1 + 4 = 2 \to E(1, 2)$
para $x = 2$, temos $y = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \to F(2, 0)$

x	y
0	4
1	2
2	0



Vale destacar, novamente, que apenas dois pontos são suficientes para definir as retas.

Coeficiente linear

Na função $y = ax + b$, o termo independente b ($b \in \mathbb{R}$) é chamado de coeficiente linear.

O coeficiente linear pode ser obtido fazendo-se $x = 0$ ou observando o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas. Isso ocorre no ponto $(0, b)$.

Exemplos:

a) $y = 3x - 3$, temos $b = -3$.

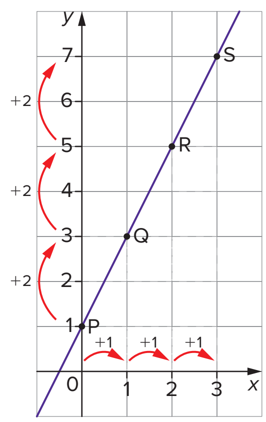
b) $y = -2x + 4$, temos $b = 4$.

> **! Atenção**
>
> Se $b = 0$, a reta passa pela origem e a função $f(x) = ax$ é chamada de função linear. Alguns autores utilizam a classificação linear para todas as funções do 1º grau.

Coeficiente angular

Na função $y = ax + b$, o coeficiente a é chamado de coeficiente angular.

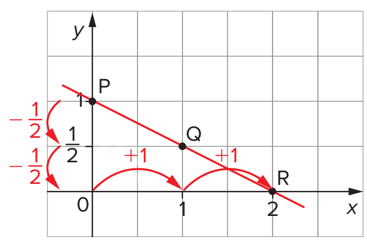
Observando o gráfico a seguir da função $y = 2x + 1$ em que $a = 2$, nota-se que, percorrendo a reta da esquerda para a direita, para cada aumento de 1 unidade no valor de x, o valor de y aumenta 2 unidades. Essa relação corresponde ao coeficiente angular da função.



$y = 2x + 1$

$a = 2$ e $b = 1$

O mesmo observa-se no gráfico a seguir da função $y = -\frac{1}{2}x + 1$ em que $a = -\frac{1}{2}$. Novamente, percorrendo a reta da esquerda para a direita, para cada aumento de 1 unidade no valor de x, o valor de y diminui de $\frac{1}{2}$ unidade. Isso ocorre porque o coeficiente angular é negativo.



$y = -\frac{1}{2}x + 1$

$a = -\frac{1}{2}$ e $b = 1$

Quando o coeficiente angular é positivo, a função é crescente; quando é negativo, a função é decrescente.

$a > 0 \to$ função crescente

$a < 0 \to$ função decrescente

Assim, o coeficiente angular mede a variação dos valores de y em relação aos valores de x.

Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), podemos calcular o coeficiente angular a partir de:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exercício resolvido

1. Calcule o coeficiente angular da função do 1º grau que passa pelos pontos abaixo e verifique se a função é crescente ou decrescente:

a) A(1, 5) e B(3, 11). **b)** C(4, 10) e D(7, 5).

Resolução:

a) $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow a = \frac{11 - 5}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$

Como $a > 0$, a função é crescente.

b) $a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \Rightarrow a = \frac{5 - 10}{7 - 4} = -\frac{5}{3}$

Como $a < 0$, a função é decrescente.

Equacionando com a função do 1º grau

Para obtermos uma função do 1º grau, devemos conhecer pelo menos dois pontos do gráfico ou um dos coeficientes e um ponto do gráfico.

Exercício resolvido

2. Defina a função do 1º grau que passa pelos pontos (2, −1) e (4, 3).

Resolução 1:

Sendo a função da forma $y = ax + b$, temos:

$$\begin{matrix} (2, -1) & \rightarrow & -1 = a \cdot 2 + b \\ (4, 3) & \rightarrow & 3 = a \cdot 4 + b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 & \text{(I)} \\ 4a + b = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (II) − (I), temos: $2a = 4 \Rightarrow a = 2$.

Substituindo $a = 2$ em (I): $2 \cdot 2 + b = -1 \Rightarrow b = -5$.

Portanto, a função é $y = 2x - 5$.

Resolução 2:

Vamos determinar o coeficiente angular:

$$a = \frac{3 - (-1)}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2x + b$$

Substituindo (qualquer) um dos pontos na função, por exemplo (4, 3):

$$y = 2x + b \Rightarrow 3 = 2 \cdot 4 + b \Rightarrow b = -5$$

Logo, a função é $y = 2x - 5$.

Quando se diz que "uma grandeza varia linearmente com outra", ou seja, que sua variação é constante, entendemos que há uma função do 1º grau que relaciona as duas.

Exercícios resolvidos

3. Suponha que a pressão atmosférica aumente 1 atm a cada 10 m de profundidade em um mergulho. Se na superfície do mar a pressão é de 1 atm, qual será seu valor a 22 metros de profundidade?

Resolução:

A função que relaciona as grandezas tem a forma $P = ax + b$, sendo P a pressão atmosférica e x a profundidade.

A informação "aumenta 1 atm a cada 10 m" corresponde ao coeficiente angular da função:

$$a = \frac{\text{variação da pressão}}{\text{variação da profundidade}} \Rightarrow a = \frac{1\text{ atm}}{10\text{ m}} = 0{,}1\text{ atm/m}$$

Assim: $P = 0{,}1x + b$.

Na superfície, a pressão é de 1 atm, ou seja, $P = 1$ para $x = 0$, logo:

$$1 = 0{,}1 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$$

Obtemos o valor da pressão a 22 metros de profundidade substituindo $x = 22$ na função $P = 0{,}1x + 1$:

$$P = 0{,}1 \cdot 22 + 1 = 2{,}2 + 1 = 3{,}2$$

Portanto, a pressão é $P = 3{,}2$ atm.

4. A taxa de inscrição em um curso decresce linearmente com o tempo. Uma pessoa que se matriculou após 2 meses do início pagou uma taxa de R$ 186,00, e outra que entrou após 5 meses pagou R$ 150,00. Quanto pagaria uma pessoa após um mês do início do curso?

Resolução:

Considerando V o valor em reais da taxa que deve ser paga após 1 mês do início do curso, temos alguns dos pontos pertencentes à função do 1º grau: A(2, 186), B(5, 150) e C(1, V).

Como o coeficiente angular é único, temos:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \Rightarrow \frac{150 - 186}{5 - 2} = \frac{V - 186}{1 - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-36}{3} = \frac{V - 186}{-1} \Rightarrow 3V - 558 = 36 \Rightarrow V = 198$$

Portanto, após 1 mês do início do curso, uma pessoa pagaria a taxa de R$ 198,00.

Raiz da função

A raiz da função do 1º grau é o valor de x no ponto em que o gráfico "corta" o eixo das abscissas. Nesse ponto, temos $y = 0$.

Exemplos:

a) A raiz da função $y = 2x - 10$ é o valor de x para que $2x - 10 = 0$, ou seja, $x = 5$.

b) A raiz da função $y = 3x + 14$ é o valor de x para que $3x + 14 = 0$, ou seja, $x = -\frac{14}{3}$.

Estudo do sinal de uma função

Estudar o sinal da função corresponde a analisar o sinal da variável *y* para os intervalos de *x*. Quando o gráfico está acima do eixo das abscissas, a função assume valores positivos; quando está abaixo desse eixo, ela assume valores negativos.

Conhecidos a raiz e o sinal do coeficiente angular de uma função, já temos as informações necessárias para elaborarmos o estudo do sinal.

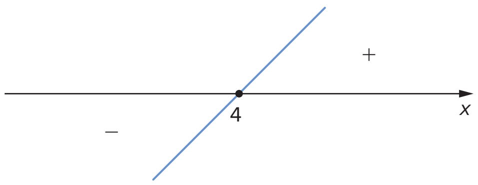
Exemplos:

a) $y = 2x - 8$

Sendo $a = 2$ o coeficiente angular, concluímos que a função é crescente.

A raiz da função é: $2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$.

O gráfico da função será da forma:



Assim, o estudo do sinal da função será:

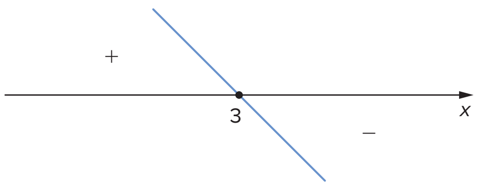
$$\begin{cases} \text{se } x > 4, \text{ então } y > 0 \\ \text{se } x = 4, \text{ então } y = 0 \\ \text{se } x < 4, \text{ então } y < 0 \end{cases}$$

b) $y = -3x + 9$

Sendo $a = -3$ o coeficiente angular, concluímos que a função é decrescente.

A raiz da função é: $-3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$.

O gráfico da função será da forma:



O estudo do sinal da função será:

$$\begin{cases} \text{se } x > 3, \text{ então } y < 0 \\ \text{se } x = 3, \text{ então } y = 0 \\ \text{se } x < 3, \text{ então } y > 0 \end{cases}$$

Grandezas proporcionais

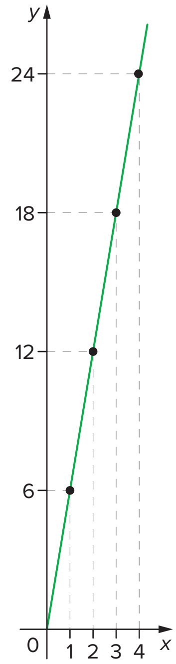
Ao obtermos pares ordenados (x, y) que relacionam duas grandezas, se as razões $\frac{x}{y}$ forem sempre iguais, diremos que essas grandezas são diretamente proporcionais.

Supondo que uma lanchonete venda doces a R$ 6,00, a quantidade de doces comprados e o valor a ser pago por eles são grandezas diretamente proporcionais.

Quantidade (x)	1	2	3	4	...
Valor pago (y)	6	12	18	24	...

Note que $\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \ldots$, ou seja, $\frac{x}{y}$ é constante.

O gráfico dessa função é representado pela reta $y = 6x$, uma função do 1º grau passando pela origem.



Se essa mesma lanchonete passasse a cobrar uma taxa extra de R$ 5,00 de estacionamento, para quem fosse de carro ou moto, os novos valores pagos por esses clientes seriam:

Quantidade (x)	1	2	3	4	...
Valor pago (y)	11	17	23	29	...

Note que $\frac{1}{11} \neq \frac{2}{17} \neq \frac{3}{23} \neq \frac{4}{29} \ldots$ e as grandezas não são mais proporcionais porque a razão $\frac{x}{y}$ **não** é constante.

Se considerarmos a razão entre a variação da quantidade de doces e a variação dos valores a pagar, temos:

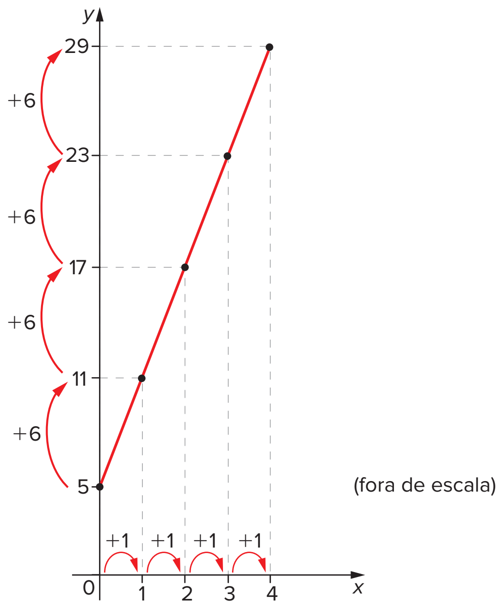
$$\frac{\text{variação da quantidade de doces}}{\text{variação dos valores a pagar}} = \text{constante}$$

Note:

$$\frac{2-1}{17-11} = \frac{3-2}{23-17} = \frac{4-3}{29-23} = \frac{3-1}{23-11} = \frac{4-1}{29-11} = \frac{4-2}{29-17} = \ldots = \frac{1}{6}$$

Concluímos que as grandezas *x* e *y* **não** são proporcionais, mas as variações Δx e Δy são diretamente proporcionais, ou seja, a cada aumento de uma unidade, a conta aumenta R$ 6,00.

O gráfico dessa função é representado pela reta $y = 6x + 5$, uma função do 1º grau que não passa pela origem.



Saiba mais

Dizemos que uma sequência numérica é uma progressão aritmética (PA) quando cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior adicionado a uma constante chamada de razão da PA (você futuramente estudará as progressões aritméticas e geométricas mais detalhadamente).

Por exemplo: (3, 7, 11, 15, 19, ...) é uma progressão aritmética de primeiro termo 3 e razão 4.

Considerando uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$, podemos observar que $(f(3), f(7), f(11), f(15), f(19), ...)$ também é uma PA. De fato, note que, sendo $f(x) = 2x - 1$, temos: $f(3) = 5$, $f(7) = 13$, $f(11) = 21$, $f(15) = 29$, $f(19) = 37$ ... e que a sequência (5, 13, 21, 29, 37, ...) é uma PA de primeiro termo 5 e razão 8.

De modo geral, sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, x_3, x_4, ...)$ elementos de uma PA de razão r, f é uma função afim se, e somente se, $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), ...)$ é uma PA de razão $a \cdot r$, em que a é o coeficiente angular de f.

Revisando

1. Construa os gráficos das funções reais a seguir:

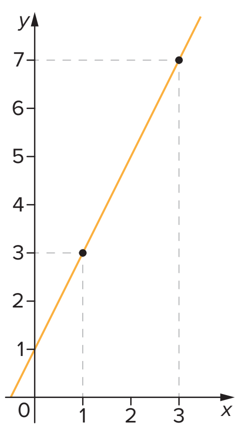
a) $y = 2x - 1$

b) $y = -2x + 6$

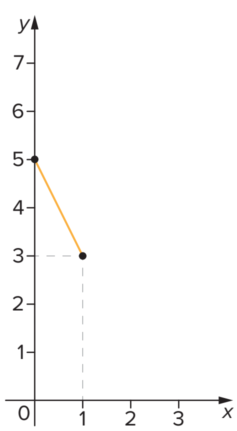
c) $y = x + 2$

2. Escreva as expressões, domínio e imagem das funções representadas nos gráficos a seguir:

a)

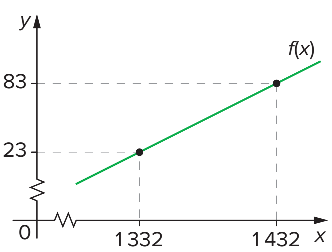


b)



3. Qual é a interseção entre as retas dadas pelas funções reais $f(x) = 2x - 8$ e $g(x) = -3x + 7$?

4. A partir do gráfico dado, determine o valor de $f(1352)$.



5. Uma torneira enche um tanque d'água com a vazão de 5 litros a cada 2 minutos. Sabendo-se que o volume inicial do tanque era de 3,5 litros, responda:

a) Qual é o volume de água no tanque após a torneira enchê-lo durante 8 minutos?

b) Qual é a expressão da função $V(t)$ que fornece o volume do tanque após t minutos?

c) Depois de quanto tempo o volume de água no tanque será de 46 litros?

6. O fluxo de entrada de pessoas em uma estação do metrô é constante. Considerando que no instante inicial 62 pessoas estavam na plataforma e, depois de 4 minutos sem que o trem tenha chegado, já eram 206 pessoas, calcule:

a) O fluxo de entrada de pessoas por minuto.

b) A função $N(t)$ que fornece o número de pessoas por minutos, após t minutos.

c) O número de pessoas, 150 segundos após o instante inicial.

7. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x + 4$. Calcule os valores de a e b tais que $f(a) = b$ e $f(b) = 11a + 12$.

8. Faça o gráfico da função real:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ se } x < -2 \\ 3, \text{ se } -2 \leqslant x < 1 \\ 2x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

9. Duas grandezas P e Q estão relacionadas por uma função do 1º grau. Verifique em cada caso abaixo se elas são proporcionais.

a) P = 3Q **b)** P = 2Q + 3 **c)** P = −5Q

10. Faça o estudo do sinal das funções:

a) $A(x) = 2x - 10$ **b)** $B(x) = -4x + 12$

Exercícios propostos

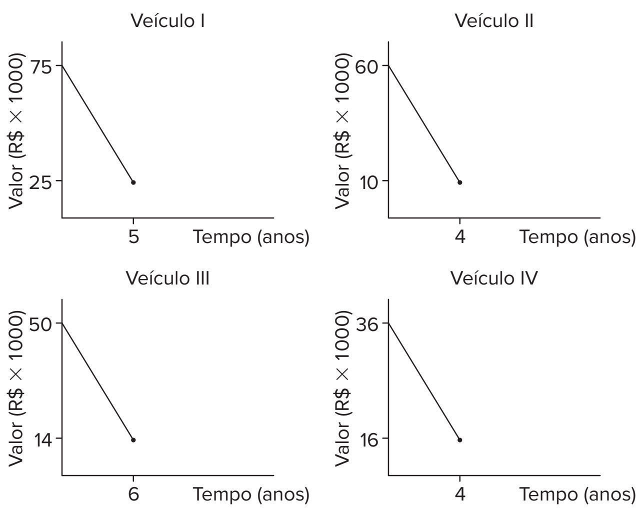
1. **Vunesp 2021** Um processo seletivo para o cargo de digitador em um escritório adota na prova prática o seguinte cálculo para nota:

$$\text{NOTA} = 10 - (D \cdot 0{,}05) - (F \cdot 0{,}2)$$

Nessa fórmula, D corresponde ao número de erros de digitação e F ao número de erros na formatação do documento.
Considere um candidato cujo número de erros de digitação superou o número de erros de formatação em 20 e que teve um total de erros, considerando digitação e formatação, igual a 28.
De acordo com o cálculo apresentado, a nota desse candidato será

a) 2,0.
b) 5,0.
c) 5,6.
d) 7,4.
e) 8,0.

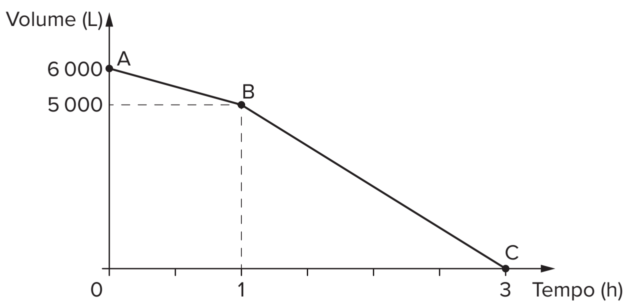
2. **Uerj 2018** Os veículos para transporte de passageiros em determinado município têm vida útil que varia entre 4 e 6 anos, dependendo do tipo de veículo. Nos gráficos está representada a desvalorização de quatro desses veículos ao longo dos anos, a partir de sua compra na fábrica.



Com base nos gráficos, o veículo que mais desvalorizou por ano foi:

a) I
b) II
c) III
d) IV

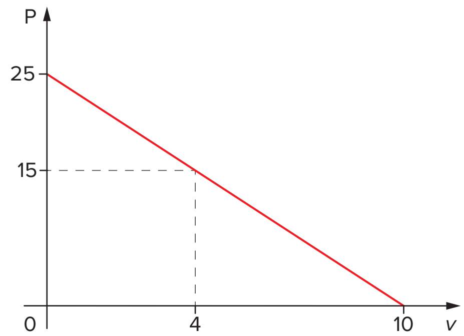
3. **Enem 2016** Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1 000
b) 1 250
c) 1 500
d) 2 000
e) 2 500

4. **Vunesp 2019** Uma professora propôs aos seus alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que analisassem o gráfico a seguir e respondessem às questões propostas.



a) Escreva uma sentença que estabeleça a relação entre as grandezas P e *v*.
b) As grandezas P e *v* são inversamente proporcionais? Justifique.

Alguns alunos fizeram as seguintes observações que seguem para responder às questões propostas:

Ana: A relação de dependência entre as grandezas P e *v* pode ser expressa por $P = 25 - 2{,}5v$.

André: A relação de dependência entre as grandezas P e *v* pode ser expressa por $P = 25 - 10v$.

Renato: A relação de dependência entre as grandezas P e *v* pode ser expressa por $P = 10 + 25v$.

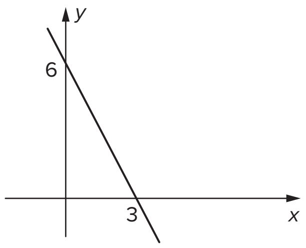
Júlia: As grandezas P e *v* são inversamente proporcionais, pois, se *v* aumenta, P diminui e vice e versa.

Diego: As grandezas P e *v* não são nem inversamente proporcionais, nem diretamente proporcionais.

As únicas duas observações corretas são as de

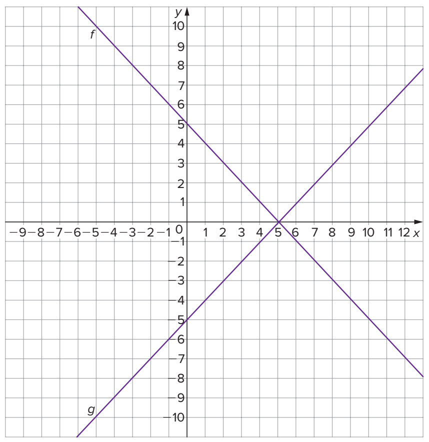
a) Ana e André.
b) Ana e Diego.
c) Renato e Júlia.
d) André e Júlia.
e) Diego e Renato.

5. **EEAR-SP 2019** A função que corresponde ao gráfico a seguir é $f(x) = ax + b$, em que o valor de a é



a) 3 **b)** 2 **c)** -2 **d)** -1

6. **UPF-RS 2021** As retas f e g estão representadas no sistema de coordenadas cartesianas xOy abaixo. A reta g pode ser escrita pela equação $g(x) = ax + b$, sendo a e b constantes. A equação que representa a reta f é:



a) $y = -ax + b$

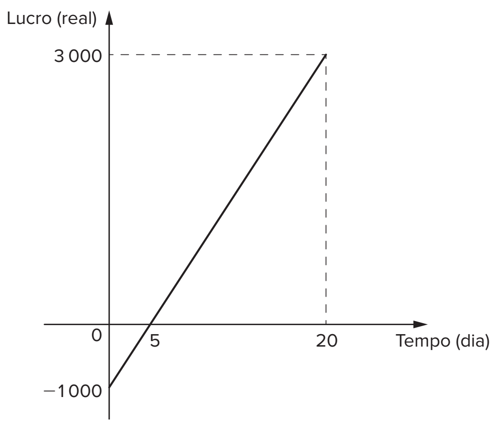
b) $-y = ax + b$

c) $y = ax - b$

d) $x = ay + b$

e) $-x = ay - b$

7. **Enem PPL 2017** Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

a) $L(t) = 20t + 3\,000$

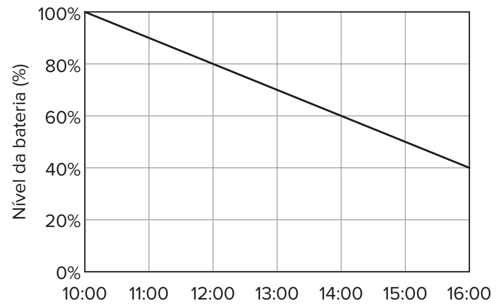
b) $L(t) = 20t + 4\,000$

c) $L(t) = 200t$

d) $L(t) = 200t - 1\,000$

e) $L(t) = 200t + 3\,000$

8. **UFPR 2017** O gráfico abaixo representa o consumo de bateria de um celular entre as 10h e as 16h de um determinado dia.



Supondo que o consumo manteve o mesmo padrão até a bateria se esgotar, a que horas o nível da bateria atingiu 10%?

a) 18h.

b) 19h.

c) 20h.

d) 21h.

e) 22h.

9. **UEA-AM 2020** A reta r, de equação $y = 3x + k$, com $k \neq 0$, passa pelo ponto $P(k, 1)$. A equação da reta que passa pelos pontos P e $Q(5k, 0)$ é dada por

a) $y = -\dfrac{x+5}{4}$

b) $y = -x + \dfrac{5}{4}$

c) $y = \dfrac{5x}{4} + 1$

d) $y = -\dfrac{4x}{5}$

e) $y = -\dfrac{x}{4} + 5$

10. **Cefet-MG 2018** Numa família com 7 filhos, sou o caçula e 14 anos mais novo que o primogênito de minha mãe. Dentre os filhos, o quarto tem a terça parte da idade do irmão mais velho, acrescidos de 7 anos. Se a soma de nossas três idades é 42, então minha idade é um número

a) divisível por 5.

b) divisível por 3.

c) primo.

d) par.

11. **Enem PPL 2019** Em um município foi realizado um levantamento relativo ao número de médicos, obtendo-se os dados:

Ano	Médicos
1980	137
1985	162
1995	212
2010	287

Tendo em vista a crescente demanda por atendimento médico na rede de saúde pública, pretende-se promover a expansão, a longo prazo, do número de médicos desse município, seguindo o comportamento de crescimento linear no período observado no quadro.

Qual a previsão do número de médicos nesse município para o ano 2040?

a) 387 **b)** 424 **c)** 437 **d)** 574 **e)** 711

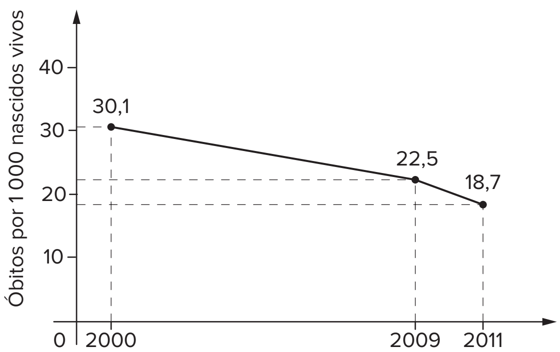
12. **IFPE 2019** A equivalência entre as escalas de temperatura geralmente é obtida por meio de uma função polinomial do 1º grau, ou seja, uma função da forma $y = a \cdot x + b$. Um grupo de estudantes do curso de Química do IFPE desenvolveu uma nova unidade de medida para temperaturas: o grau Otavius. A correspondência entre a escala Otavius (O) e a escala Celsius (C) é a seguinte:

°O	°C
6	18
60	36

Sabendo que a temperatura de ebulição da água ao nível do mar (pressão atmosférica igual a 1 atm) é 100 °C, então, na unidade Otavius, a água ferverá a

a) 112°.
b) 192°.
c) 252°.
d) 72°.
e) 273°.

13. **Enem PPL 2020** A taxa de mortalidade infantil vem decaindo a cada ano no Brasil. O gráfico, gerado a partir de dados do IBGE, apresenta a evolução da taxa de mortalidade infantil (número de óbitos para cada 1000 nascidos vivos) de crianças com até 5 anos, no Brasil, no período de 2000 a 2011.



Considere que, para os próximos anos, o decréscimo anual médio do número de óbitos para cada 1000 nascidos vivos registrado, no período de 2009 a 2011, será mantido.
A partir das informações fornecidas, a taxa de mortalidade infantil de crianças com até 5 anos tornar-se-á inferior a 10 no período de

a) 2011 a 2012
b) 2012 a 2013
c) 2013 a 2014
d) 2015 a 2016
e) 2017 a 2018

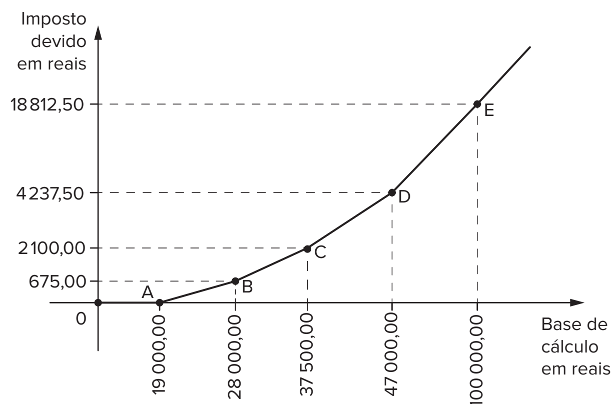
14. **UVA-CE 2020** Duas empresas alugam cama elástica, o famoso pula-pula, para eventos infantis. O valor cobrado leva em conta o custo de montagem e o tempo de uso do equipamento. Para disponibilizar um pula-pula por t horas de evento, a empresa A cobra $60 + 5t$ reais e a empresa B cobra $50 + 7t$ reais. Os equipamentos têm exatamente as mesmas especificações e medidas. Para cinco horas de evento, é correto afirmar:

a) A empresa A tem menor preço.
b) A empresa B tem menor preço.
c) A escolha entre estas empresas não faz diferença em termos de custo.
d) Não é possível saber qual a melhor escolha até que se saiba quantas crianças estarão presentes no evento.

15. **Fatec-SP 2017** Admita que a população da Síria em 2010 era de 20,7 milhões de habitantes e em 2016, principalmente pelo grande número de mortes e da imigração causados pela guerra civil, o número de habitantes diminuiu para 17,7 milhões. Considere que durante esse período, o número de habitantes da Síria, em milhões, possa ser descrito por uma função h, polinomial do 1º grau, em função do tempo (x), em número de anos.
Assinale a alternativa que apresenta a lei da função $h(x)$, para $0 \leqslant x \leqslant 6$, adotando o ano de 2010 como $x = 0$ e o ano de 2016 como $x = 6$.

a) $h(x) = -0{,}1x + 17{,}7$
b) $h(x) = -0{,}1x + 20{,}7$
c) $h(x) = -0{,}25x + 17{,}7$
d) $h(x) = -0{,}5x + 20{,}7$
e) $h(x) = -0{,}5x + 17{,}7$

16. **Fuvest-SP** O imposto de renda devido por uma pessoa física à Receita Federal é função da chamada *base de cálculo*, que se calcula subtraindo o valor das deduções do valor dos rendimentos tributáveis. O gráfico dessa função, representado na figura, é a união dos segmentos de reta $\overline{AO}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e da semirreta $\overline{DE}$. João preparou sua declaração tendo apurado como base de cálculo o valor de R\$ 43 800,00. Pouco antes de enviar a declaração, ele encontrou um documento esquecido numa gaveta que comprovava uma renda tributável adicional de R\$ 1000,00. Ao corrigir a declaração, informando essa renda adicional, o valor do imposto devido será acrescido de



a) R$ 100,00
b) R$ 200,00
c) R$ 225,00
d) R$ 450,00
e) R$ 600,00

17. Famerp-SP 2019 O gráfico de uma função polinomial do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, é uma reta de coeficiente angular positivo. Sabe-se ainda que $f(f(x)) = 25x + 9$. Assim, a interseção do gráfico de f com o eixo y se dá em um ponto de ordenada

a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{5}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{4}{3}$
e) $\frac{3}{2}$

18. FGV-SP Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R$ 45,00. Cada panela é vendida por R$ 65,00. Seja x a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita.
A soma dos algarismos de x é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

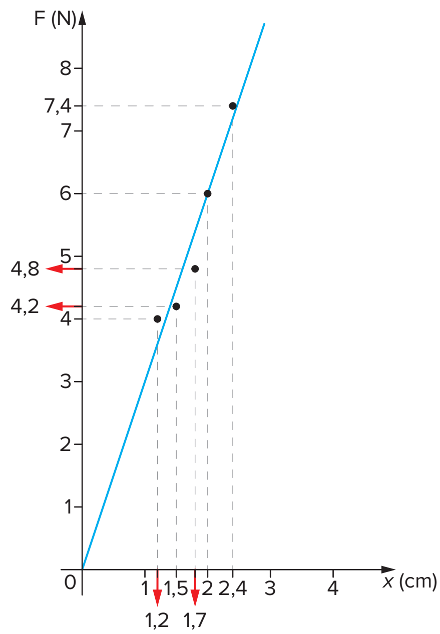
Texto complementar

Regressão linear

Regressão linear é um método que encontra uma função do 1º grau para representar a variação linear que existe entre duas grandezas.

Ao obtermos dados de um determinado experimento, eles nem sempre se encaixam perfeitamente em uma reta. Normalmente, cometemos erros na leitura, utilizamos equipamentos não apropriados para as medições ou muitas vezes essas relações de fato não variam linearmente.

Por exemplo, se registrarmos os dados de um experimento da lei de Hooke ("Quando aplicamos uma força sobre uma mola, ela se deforma, dando origem a uma força elástica que tem mesma direção da força aplicada, e sentido oposto."), registrando a força empregada (F), em newtons, e o deslocamento da mola estendida (x), em centímetros, obtemos a tabela e podemos esboçar o gráfico ao lado:



Deslocamento (x)	0 cm	1,2 cm	1,5 cm	1,7 cm	2,0 cm	2,4 cm
Força (F)	0 N	4,0 N	4,2 N	4,8 N	6,0 N	7,4 N

É possível encontrarmos a função $y = ax + b$ que mais se aproxima dos pontos do gráfico.

Pelos dados da tabela, sabe-se que $b = 0$. Já o coeficiente angular a da função pode ser encontrado utilizando-se o método dos mínimos quadrados por meio da fórmula:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$, em que $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são as médias amostrais de x e y.

Assim: $\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{0 + 1{,}2 + 1{,}5 + 1{,}7 + 2{,}0 + 2{,}4}{6} = \dfrac{8{,}8}{6} = 1{,}4\overline{6} \\ \overline{y} = \dfrac{0 + 4{,}0 + 4{,}2 + 4{,}8 + 6{,}0 + 7{,}4}{6} = \dfrac{26{,}4}{6} = 4{,}4 \end{cases}$. O coeficiente a será:

$$a = \frac{(-1{,}46\overline{6}) \cdot (-4{,}4) + (-0{,}2\overline{6})(-0{,}4) + (0{,}0\overline{3})(-0{,}2) + (0{,}2\overline{3})(0{,}4) + (0{,}5\overline{3})(1{,}6) + (0{,}9\overline{3})(3{,}0)}{(-1{,}4\overline{6})^2 + (-0{,}2\overline{6})^2 + (0{,}0\overline{3})^2 + (0{,}2\overline{3})^2 + (0{,}5\overline{3})^2 + (0{,}9\overline{3})^2}$$

$$a \cong \frac{6{,}45\overline{3} + 0{,}10\overline{6} - 0{,}00\overline{6} + 0{,}09\overline{3} + 0{,}85\overline{3} + 2{,}7\overline{9}}{2{,}151 + 0{,}071 + 0{,}001 + 0{,}054 + 0{,}284 + 0{,}871}$$

$$a \cong \frac{10{,}3}{3{,}432} \cong 3{,}00$$

Assim, concluímos que a melhor aproximação para os dados coletados é $F = 3x$ e, consequentemente, a constante elástica da bola é 3 N/cm.

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Representações da função do 1º grau

$y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$)

Coeficiente angular

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- $a > 0 \rightarrow$ função crescente
- $a < 0 \rightarrow$ função decrescente

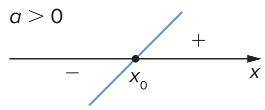
Coeficiente linear

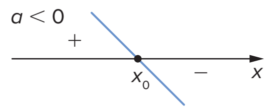
b (onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas)

Raiz da função

Onde o gráfico intersecta o eixo das abscissas. Valor de x para que $y = f(x) = 0$.

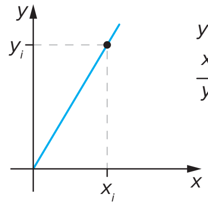
Estudo do sinal





x_0 é a raiz da função.

Grandezas proporcionais



$y = ax$

$\frac{x_i}{y_i}$ = constante

Grandezas com variação linear

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = constante

Quer saber mais?

Site

CALCULADORA gráfica. GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/graphing?lang=pt.

Gratuito e interativo, o GeoGebra permite a realização de gráficos, diagramas de dados e muito mais . Aproveite para construir gráficos de funções afins e analisar as características estudadas no capítulo.

Acesso em: 20 jul. 2022.

Vídeo

SECRETARIA de Educação do Paraná. Funções — Carro Flex. Unicamp. Disponível em: http://p.p4ed.com/NGUWT.

Assista ao curta-metragem *Carro flex*. Você verá como um frentista de um posto de gasolina pode ajudar o cliente a descobrir quais são as proporções de álcool e gasolina que devem ser colocadas em seu carro *flex* para que o custo tenha um valor preestabelecido.

Acesso em: 20 jul. 2022.

Filme

***Uma mente brilhante*. Direção: Ron Howard. EUA, 2001.**

O filme conta a vida do norte-americano John Nash (1928-2015), matemático brilhante que lutou contra a esquizofrenia entre 1958 e 1990 e que, em 1994, ganhou o Prêmio Nobel de Economia por um trabalho desenvolvido aos 21 anos: o teorema do equilíbrio em jogos não cooperativos (equilíbrio de Nash).

Exercícios complementares

1. **IFPE 2017** Os alunos do curso de mecânica e química do Campus Recife estão juntos desenvolvendo um novo combustível. Matheus ficou encarregado de observar o consumo no uso de um motor. Para isso, ele registrou a seguinte tabela:

Rotações do motor por minuto	2000	3000	4000	5000	6000
Quantidade de combustível consumida (mL)	30	35	40	45	50

A expressão algébrica que representa a quantidade Q de combustível consumido para um número R de rotações por minuto é

a) $Q = \frac{1}{200}R + 20$

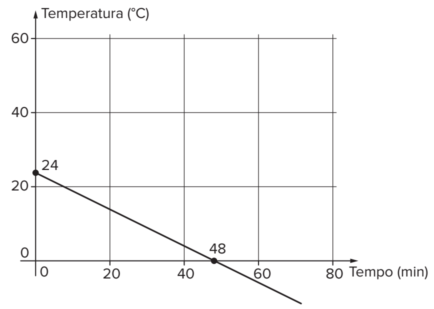
b) $Q = \frac{1}{1000}R + 30$

c) $Q = 30R + 2\,000$

d) $Q = R + 1970$

e) $Q = 0{,}5R + 20$

2. **ESPM-SP 2017** O gráfico abaixo mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada. Considere que essa variação seja linear nas primeiras 2 horas.



O tempo necessário para que a temperatura atinja −18 °C é de:

a) 90 min
b) 84 min
c) 78 min
d) 88 min
e) 92 min

3. **Unicamp-SP 2016** Considere a função afim $f(x) = ax + b$ definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que $f(4) = 2$, podemos afirmar que $f(f(3) + f(5))$ é igual a

a) 5.
b) 4.
c) 3.
d) 2.

4. **Enem PPL 2017** Os consumidores X, Y e Z desejam trocar seus planos de internet móvel na tentativa de obterem um serviço de melhor qualidade. Após pesquisarem, escolheram uma operadora que oferece cinco planos para diferentes perfis, conforme apresentado no quadro.

Plano	Franquia	Preço mensal de assinatura	Preço por MB excedente
A	150 MB	R$ 29,90	R$ 0,40
B	250 MB	R$ 34,90	R$ 0,10
C	500 MB	R$ 59,90	R$ 0,10
D	2 GB	R$ 89,90	R$ 0,10
E	5 GB	R$ 119,90	R$ 0,10

Dado: 1 GB = 1 024 MB

Em cada plano, o consumidor paga um valor fixo (preço mensal da assinatura) pela franquia contratada e um valor variável, que depende da quantidade de MB utilizado além da franquia. Considere que a velocidade máxima de acesso seja a mesma, independentemente do plano, que os consumos mensais de X, Y e Z são de 190 MB, 450 MB e 890 MB, respectivamente, e que cada um deles escolherá apenas um plano.

Com base nos dados do quadro, as escolhas dos planos com menores custos para os consumidores X, Y e Z, respectivamente, são

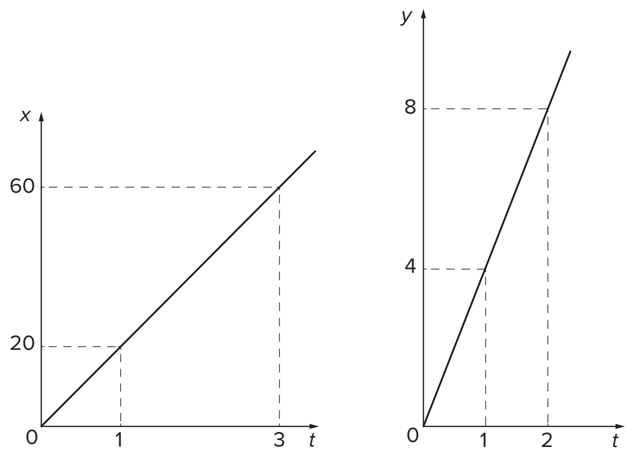
a) A, C e C.
b) A, B e D.
c) B, B e D.
d) B, C e C.
e) B, C e D.

5. **Enem 2019** Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

a) Y = 80X + 920.
b) Y = 80X + 1 000.
c) Y = 80X + 1 080.
d) Y = 160X + 840.
e) Y = 160X + 1 000.

6. **Enem PPL 2018** A quantidade *x* de peças, em milhar, produzidas e o faturamento *y*, em milhar de real, de uma empresa estão representados nos gráficos, ambos em função do número *t* de horas trabalhadas por seus funcionários.



O número de peças que devem ser produzidas para se obter um faturamento de R$ 10 000,00 é

a) 2 000.
b) 2 500.
c) 40 000.
d) 50 000.
e) 200 000.

7. **FGV-SP 2020** Para celebrar uma festa, o centro acadêmico de uma faculdade escolhe entre dois lugares cujos preços são:

Salão A

R$ 1000,00 mais R$ 5,00 por pessoa

Salão B

R$ 200,00 mais R$ 10,00 por pessoa

A capacidade máxima de ambos os lugares é de 300 pessoas. O centro não tem ainda o número de pessoas que irá à festa.

a) Para que número de pessoas é indiferente o salão a ser escolhido pelo centro acadêmico?
b) Represente graficamente em um mesmo par de eixos cada uma das duas funções que expressa o preço de cada salão em função do número de pessoas que irá à festa. Que salão deve ser escolhido caso o número de pessoas presentes na festa seja maior do que o número obtido no item a?

8. IFSC 2017 Durante a colheita em um pomar de uvas, o proprietário verificou que às 9 horas haviam sido colhidos 730 kg de uva. Considerando que a quantidade de uvas colhidas é linear durante o dia e que às 14 horas haviam sido colhidos 3650 kg de uva, analise as afirmativas:

I. A equação que permite calcular o número de quilogramas (y) em função do tempo (x) é dada pela expressão $y = 584x - 4526$.

II. Às 18 horas haviam sido colhidos 5986 kg.

III. A colheita teve início às 8 horas.

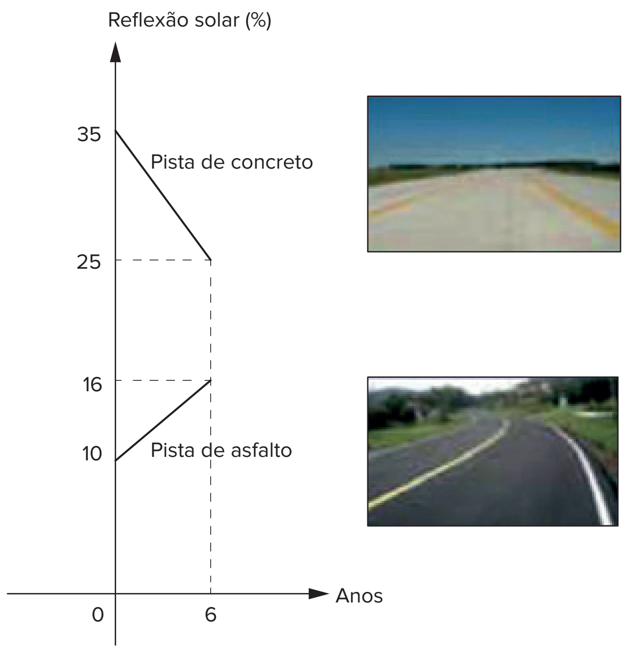
Assinale a alternativa CORRETA.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
b) Todas as afirmativas são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são falsas.

9. UEG-GO O celular de Fabiano está com 50% de carga na bateria. Quando está completamente carregado, ele demora exatamente 20 horas para descarregar toda bateria em modo *stand by*, supondo-se que essa bateria se descarregue de forma linear. Ao utilizar o aparelho para brincar com um aplicativo a bateria passará a consumir 1% da carga a cada 3 minutos. Quantos minutos Fabiano poderá brincar antes que a bateria se descarregue completamente?

a) Três horas
b) Duas horas e meia
c) Duas horas
d) Uma hora e meia

10. Unesp 2018 Dois dos materiais mais utilizados para fazer pistas de rodagem de veículos são o concreto e o asfalto. Uma pista nova de concreto reflete mais os raios solares do que uma pista nova de asfalto; porém, com os anos de uso, ambas tendem a refletir a mesma porcentagem de raios solares, conforme mostram os segmentos de retas nos gráficos.

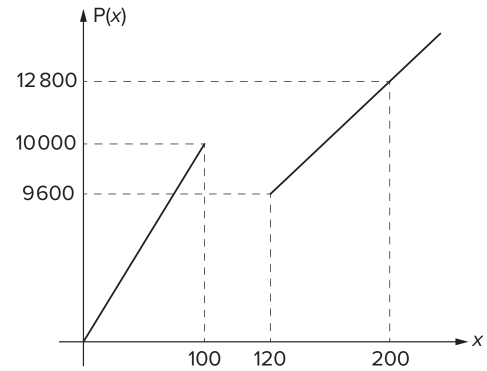


(www.epa.gov. Adaptado.)

Mantidas as relações lineares expressas nos gráficos ao longo dos anos de uso, duas pistas novas, uma de concreto e outra de asfalto, atingirão pela primeira vez a mesma porcentagem de reflexão dos raios solares após

a) 8,225 anos.
b) 9,375 anos.
c) 10,025 anos.
d) 10,175 anos.
e) 9,625 anos.

11. UFU-MG 2017 Com o objetivo de aumentar as vendas, uma fábrica de peças oferece preços promocionais aos clientes atacadistas que compram a partir de 120 unidades. Durante esta promoção, a fábrica só aceitará dois tipos de encomendas: até 100 peças ou, pelo menos, 120 peças. O preço P(x), em reais, na venda de x unidades, é dado pelo gráfico seguinte, em que os dois trechos descritos correspondem a gráficos de funções afins.

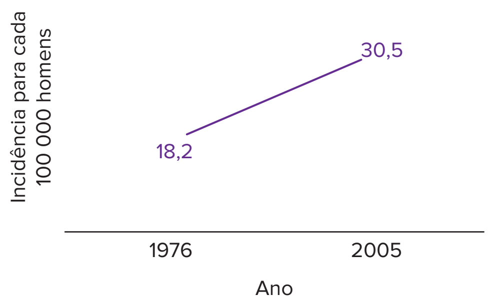


Nestas condições, qual o maior número de peças que se pode comprar com R$ 9800,00?

12. UFPR 2022 Uma fábrica de calçados possui um custo fixo mensal de R$ 20000,00 relacionado a pagamentos de salários, aluguel e outras despesas fixas. Sabendo que, a cada par de calçados produzido, essa fábrica fatura R$ 28,00, a expressão que descreve o lucro mensal, em reais, em função do número x de calçados produzidos é:

a) $20000x - 28$.
b) $28x - 20000$.
c) $28x + 20000$
d) $-28x + 20000$
e) $-20000x + 28$

13. FCMSCSP 2019 O gráfico ilustra o aumento da incidência da doença de Parkinson entre homens no período de 1976 a 2005.



Considerando esse aumento linear, e que ele se mantenha até os dias atuais, espera-se que a incidência dessa doença em 2018, para cada 100 000 homens, seja próxima de

a) 31,8.
b) 33,5.
c) 36,0.
d) 34,7.
e) 30,7.

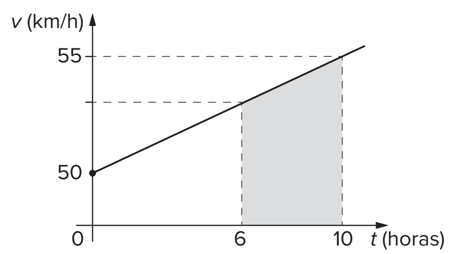
14. UEG-GO 2018 No centro de uma cidade, há três estacionamentos que cobram da seguinte maneira:

Estacionamento A	Estacionamento B	Estacionamento C
R$ 5,00 pela primeira hora R$ 3,00 por cada hora subsequente	R$ 4,00 por hora	R$ 6,00 pela primeira hora R$ 2,00 por cada hora subsequente

Será mais vantajoso, financeiramente, parar

a) no estacionamento A, desde que o automóvel fique estacionado por quatro horas.
b) no estacionamento B, desde que o automóvel fique estacionado por três horas.
c) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.
d) em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por duas horas.
e) no estacionamento C, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.

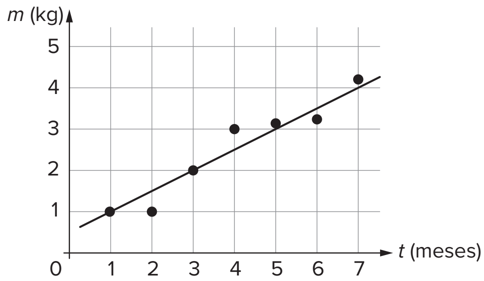
15. EPCar-MG 2018 O gráfico a seguir é de uma função polinomial do 1º grau e descreve a velocidade *v* de um móvel em função do tempo *t*:



Assim, no instante $t = 10$ horas o móvel está a uma velocidade de 55 km/h, por exemplo.
Sabe-se que é possível determinar a distância que o móvel percorre calculando a área limitada entre o eixo horizontal *t* e a semirreta que representa a velocidade em função do tempo. Desta forma, a área hachurada no gráfico fornece a distância, em km, percorrida pelo móvel do instante 6 a 10 horas.
É correto afirmar que a distância percorrida pelo móvel, em km, do instante 3 a 9 horas é de

a) 318
b) 306
c) 256
d) 212

16. Famerp-SP 2017 Um animal, submetido à ação de uma droga experimental, teve sua massa corporal registrada nos sete primeiros meses de vida. Os sete pontos destacados no gráfico mostram esses registros e a reta indica a tendência de evolução da massa corporal em animais que não tenham sido submetidos à ação da droga experimental. Sabe-se que houve correlação perfeita entre os registros coletados no experimento e a reta apenas no 1º e no 3º mês.



Se a massa registrada no 6º mês do experimento foi 210 gramas inferior à tendência de evolução da massa em animais não submetidos à droga experimental, o valor dessa massa registrada é igual a

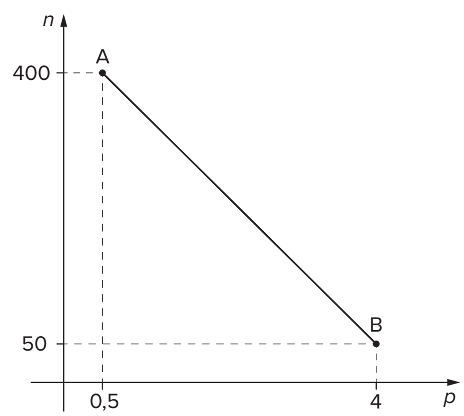
a) 3,47 kg.
b) 3,27 kg.
c) 3,31 kg.
d) 3,35 kg.
e) 3,29 kg.

17. EPCar-MG 2019 Para angariar fundos para a formatura, os alunos do 3º ano do CPCAR vendem bombons no horário do intervalo das aulas. Inicialmente, começaram vendendo cada bombom por R$ 4,00. Assim, perceberam que vendiam, em média, 50 bombons por dia.
A partir dos conhecimentos que os alunos tinham sobre função, estimaram que para cada 5 centavos de desconto no preço de cada bombom (não podendo conceder mais que 70 descontos), seria possível vender 5 bombons a mais por dia.
Considere:

- *p* o preço de cada bombom;
- *n* o número de bombons vendidos, em média, por dia;
- $x \in \mathbb{N}$ o número de reduções de 5 centavos concedidas no preço unitário de cada bombom; e
- *y* a arrecadação diária com a venda dos bombons.

Com base nessas informações, analise as proposições abaixo.

02 O gráfico que expressa *n* em função de *p* está contido no segmento $\overline{AB}$ do gráfico abaixo.



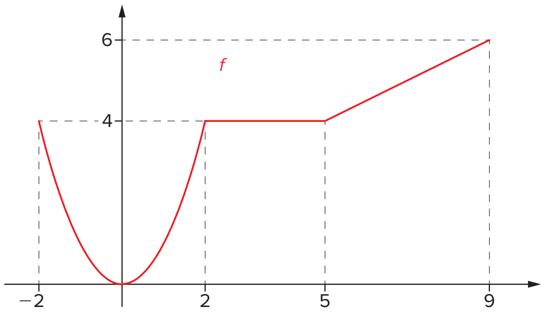
04 A maior arrecadação diária possível com a venda dos bombons, considerando os descontos de 5 centavos, ocorre quando concederem 35 descontos de 5 centavos.

08 Se forem concedidos 20 descontos de 5 centavos, serão vendidos mais de 100 bombons por dia.

A soma das proposições verdadeiras é igual a

a) 6
b) 10
c) 12
d) 14

18. Fuvest-SP 2022 (Adapt.) Uma função f está definida no intervalo $[-2, 9]$ da seguinte forma: para $x \in [-2, 2]$, f leva x em x^2 e, no restante do domínio, o seu gráfico é formado por dois segmentos de reta conforme mostra a figura.



a) Apresente todos os intervalos do domínio da função f nos quais ela é crescente.

b) Determine os valores de f nos pontos $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{7}{2}$ e $x = 8$.

BNCC em foco

Texto para as questões **1** e **2**.

A pressão exercida sobre uma substância influencia a temperatura em que ela muda de estado. Por exemplo, a água entra em ebulição, a nível do mar, em 100 °C, já em altitudes elevadas, em que a pressão atmosférica é menor, o ponto de ebulição ocorre antes de 100 °C, como no monte Everest (8 800 m de altitude), em que a água ferve a 72 °C.

Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/cref/amees/atmo.html. Acesso em: 20 jul. 2022.

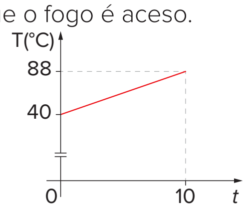
Com base nessas informações, analise a situação a seguir.

A temperatura da água em uma panela está aumentando linearmente. Após 2 minutos do acendimento do fogo, a temperatura já era de 40 °C e, depois de 10 minutos, atingiu 88 °C.

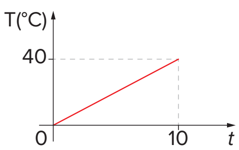
EM13MAT401

1. Assinale a alternativa que exibe o gráfico correspondente à função do 1º grau que representa a situação apresentada. Considere como $t = 0$ o momento em que o fogo é aceso.

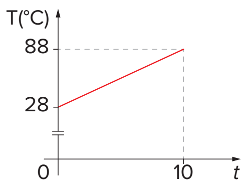
a)



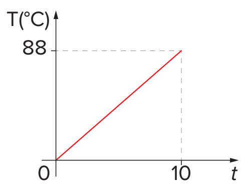
b)



c)



d)



EM13MAT401

2. Considerando-se que a situação ocorra ao nível do mar, depois de quantos minutos do acendimento do fogo é atingida a temperatura de ebulição da água?

a) 11

b) 12

c) 12,5

d) 16,6

EM13MAT501

3. José está economizando para comprar um imóvel que custa R$ 250 000,00. Com esse objetivo, no início deste ano (mês 1), ele começou a fazer aportes mensais em um investimento que possuía. Desconsiderando os juros gerados, nos últimos 3 meses, o extrato desse investimento mostrou os seguintes saldos:

Mês	Valor
7	R$ 110 000,00
8	R$ 115 000,00
9	R$ 120 000,00

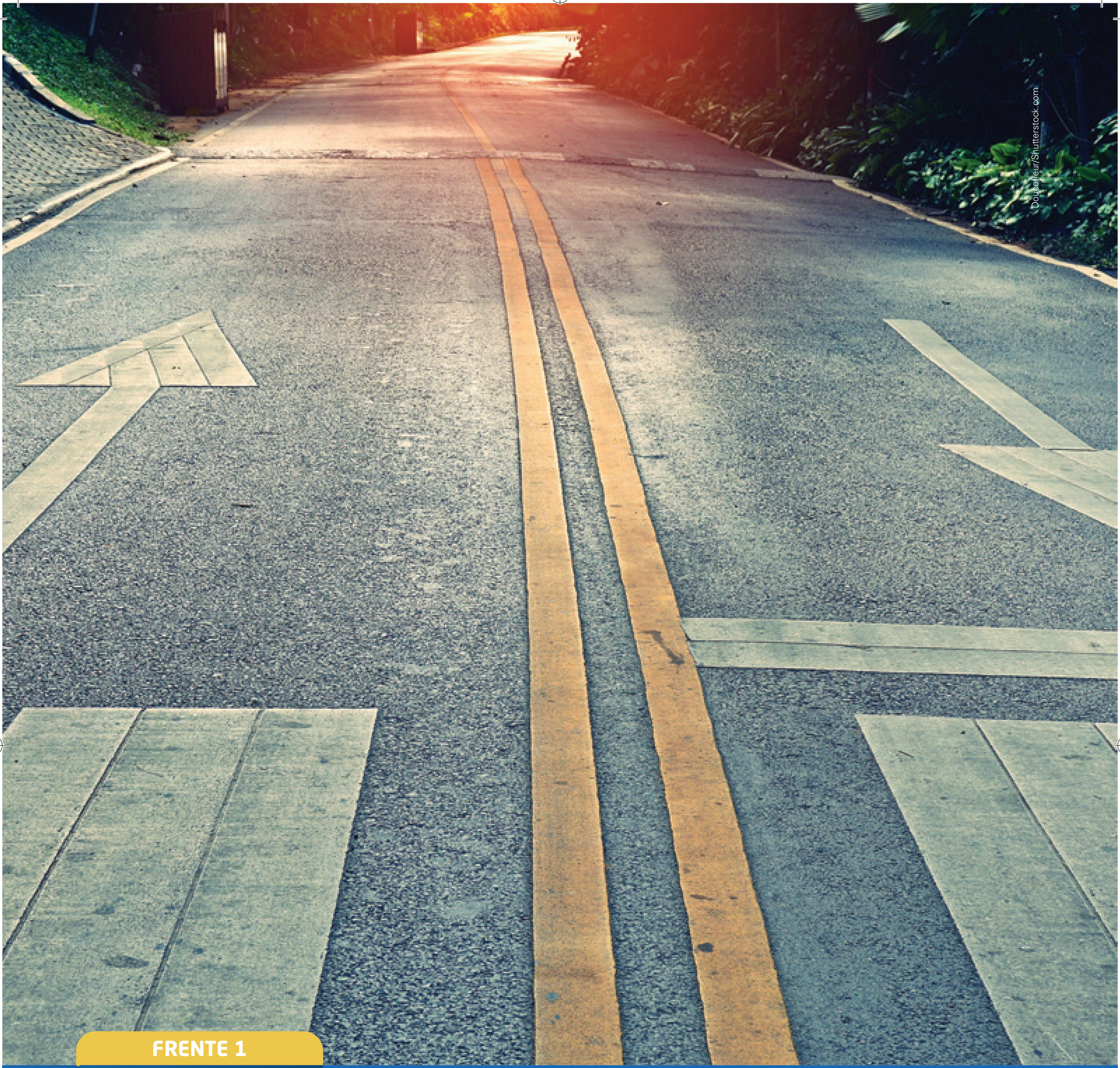
A função que relaciona o saldo (S) de seu investimento em função do mês (m) correspondente e o tempo, após o início dos aportes, que esse investimento atingirá, apenas com os aportes, a quantia de R$ 250 000,00 são:

a) $S = 5\,000m + 75\,000$ e 35 meses.

b) $S = 5\,000m + 110\,000$ e 28 meses.

c) $S = 5\,000m + 115\,000$ e 27 meses.

d) $S = 5\,000m + 120\,000$ e 26 meses.



FRENTE 1

CAPÍTULO

4

Função inversa e função composta

O trabalho com funções envolve, geralmente, a análise de leis específicas que relacionam dois conjuntos. Nesse contexto, muitas vezes precisamos encontrar o “caminho inverso percorrido por uma função”, isto é, a função que leva cada elemento da imagem da função original ao seu respectivo elemento do domínio. Também é comum necessitarmos encontrar uma função que corresponda à aplicação de várias funções em sequência. Essas ações ajudam a simplificar certos cálculos e a compreender melhor situações contextualizadas que envolvem funções.

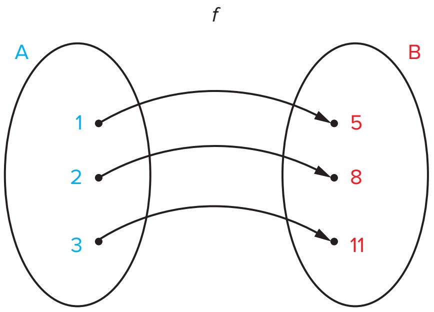
Neste capítulo, trabalharemos as ferramentas que nos ajudam a realizar essas tarefas: a função inversa e a função composta.

Função inversa

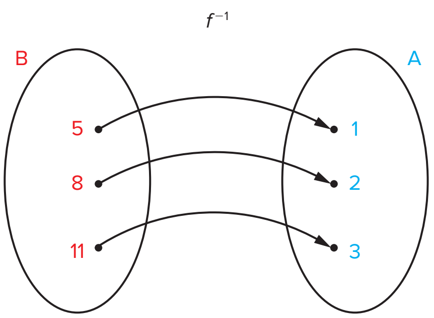
A função inversa é aquela que “desfaz o que outra fez”: por exemplo, se uma função *f* é tal que $f(a) = b$, então sua inversa *g*, se existir, é tal que $g(b) = a$. Por exemplo, qual é a função inversa de uma função que calcula o dobro de um número? É aquela que calcula a metade do número. Ou, então, qual é a função inversa de uma função que adiciona 3 a um número? É aquela que subtrai 3 daquele número.

Geralmente, representamos a função inversa de uma função *f* por f^{-1}.

Observe o diagrama de flechas a seguir, que representa uma função *f*.



A função *f* pode ser descrita por $f\colon A \to B$, $f = \{(1, 5), (2, 8), (3, 11)\}$ e a sua inversa por $f^{-1}\colon B \to A$, $f^{-1} = \{(5, 1), (8, 2), (11, 3)\}$. Podemos representar o diagrama de flechas para a função f^{-1} da seguinte maneira:



Observe a representação das duas funções no diagrama de flechas e como conjunto de pares ordenados e perceba as seguintes alterações:

- troca de domínio e imagem; isto é, o domínio de uma função é a imagem de sua inversa, e vice-versa;
- troca de posições entre *x* e *y* nos pares ordenados;
- inversão do sentido das flechas no diagrama de flechas.

Cálculo da função inversa

Para calcular a lei de formação da função inversa, devemos:

- trocar as variáveis *x* por *y*, e vice-versa;
- isolar a nova variável *y*.

Exemplos:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$:

$y = 2x + 1$

$x = 2y + 1 \Rightarrow -2y = -x + 1 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{2}$

Logo, $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

b) $g\colon \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

$y = \dfrac{x-1}{x+2}$

$x = \dfrac{y-1}{y+2} \Rightarrow y - 1 = xy + 2x \Rightarrow y - xy =$

$= 2x + 1 \Rightarrow y(1 - x) = 2x + 1 \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{1-x}$

Logo, $g^{-1}\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$, $g^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$.

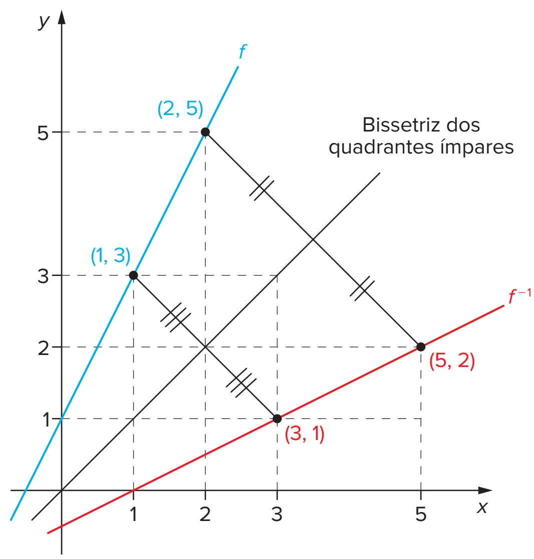
! Atenção

Perceba que, para $f(x) = 2x + 1$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$, temos $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f^{-1}(3) = 1$ e $f^{-1}(5) = 2$, ou seja, para os pontos (1, 3) e (2, 5) de *f*, temos os pontos (3, 1) e (5, 2) de f^{-1}.

Gráfico da função inversa

O gráfico de uma função e da sua inversa são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. A inversão $x \rightleftarrows y$ gerou essa simetria.

Exemplo: Considere as funções $f(x) = 2x + 1$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.



Essa simetria mostra que a bissetriz dos quadrantes ímpares funciona como um “espelho”, e uma das funções seria o “reflexo” da outra.

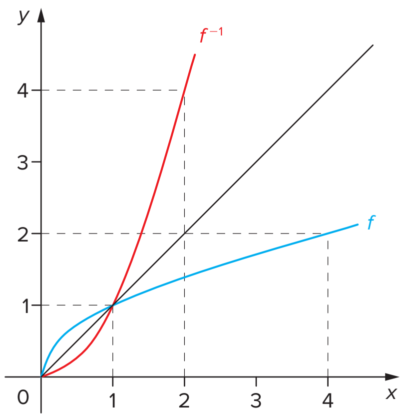
Note que os pontos (2, 5) e (5, 2) são equidistantes da bissetriz, ou seja, o ponto médio do segmento determinado por eles pertence à bissetriz. O mesmo ocorre para os pontos (1, 3) e (3, 1) e para todos os pares de pontos obtidos da troca de *x* com *y*.

Exercício resolvido

1. Considerando o universo $\mathbb{R}_+$, construa o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

Resolução:

A função inversa de $f(x) = \sqrt{x}$ é $f^{-1}(x) = x^2$ para $x \geqslant 0$. O gráfico de $f^{-1}(x)$ é uma parábola de concavidade voltada para cima e vértice na origem, e o de $f(x)$ é simétrico a essa parábola em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.



! Atenção

Os pontos de interseção entre uma função e sua inversa quando existirem, estão na bissetriz dos quadrantes ímpares.

Condição de existência da função inversa

Para existir f^{-1}, a função f deve ser bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora. Essa condição garante que a função f^{-1} será de fato uma função.

Por exemplo, se tomarmos a mesma lei de função do exercício resolvido anterior, $f(x) = x^2$, mas considerarmos como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, essa função não tem inversa, pois não é injetora, afinal $f(2) = f(-2) = 4$. Observe que, por exemplo, ao fazermos a inversão das coordenadas dos pontos (2, 4) e (−2, 4), que pertencem a f, temos (4, 2) e (4, −2). Se existisse a inversa f^{-1}, esses dois pares pertenceriam a f^{-1} e, para $x = 4$, teríamos dois valores de y para o mesmo valor de x, o que contradiz uma das características de uma função: "cada x se associa a um único y".

No entanto, fazendo restrições ao domínio e ao contradomínio, algumas funções passam a admitir a existência de inversa. A inversa de $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada pela lei $g(x) = x^2$, é $g^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, com $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Assim, deixando de considerar os números negativos de x, a função $y = x^2$ admite inversa.

Domínio, contradomínio e imagem de uma função inversa

Se a função f admite inversa, ela é sobrejetora, logo o contradomínio é igual à imagem.

Nesse caso, para a função $f: A \to B$, podemos chamar o conjunto B de imagem da função f. Na inversa, temos $f^{-1}: B \to A$ e concluímos:

$$\mathrm{Im}(f) = D(f^{-1}) = B \ \text{ e } \ D(f) = \mathrm{Im}(f^{-1}) = A$$

Exercício resolvido

2. Obtenha a imagem e o domínio de $h(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Resolução:

Como o denominador da fração da lei da função não pode ser igual a zero, temos $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$. Logo, o domínio da função h é $D(h) = \mathbb{R} - \{2\}$.

A imagem de h é o domínio de h^{-1}. Calculando a lei de h^{-1}:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \to x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow xy - 2x = y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy - y = 2x + 1 \Rightarrow (x-1)y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}$$

Logo, como a lei da função h^{-1} não pode assumir denominador nulo, temos $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$, e, assim, $D(h^{-1}) = \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Função composta

Muitas vezes, trabalhamos com a ideia de função composta sem perceber. Por exemplo, multiplicar um número N por 2 e com esse resultado efetuar outra multiplicação por 3 é o mesmo que calcular N · 6, ou seja, substituímos duas operações por uma só.

De maneira análoga, uma função composta é uma função que é equivalente à aplicação de duas (ou mais) funções em sequência.

Por exemplo, dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x + 3$, podemos montar o seguinte quadro:

x	f	g
0	$f(0) = 0^2 + 1 = 1$	$g(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
1	$f(1) = 1^2 + 1 = 2$	$g(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
2	$f(2) = 2^2 + 1 = 5$	$g(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

h

Qual é a lei da função h que relaciona os elementos da primeira coluna diretamente aos da terceira? Analisando o quadro, observamos que, dado um elemento x, a passagem da primeira para a segunda coluna e da segunda para a terceira coluna é dada por $x \to f(x) = k \to g(k)$ ou $x \to f(x) \to g(f(x))$. Então, temos $h(x) = g(f(x))$.

Com as leis $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x + 3$ das duas funções, podemos obter a lei de $g(f(x))$:

$$g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 3$$
$$g(f(x)) = 2 \cdot (x^2 + 1) + 3$$
$$g(f(x)) = 2x^2 + 5$$

Assim, a lei da função é $h(x) = g(f(x)) = 2x^2 + 5$. Essa função é chamada de composta de g com f e é representada por $g \circ f$.

Perceba que, calculando $g \circ f(x)$ para os valores de x da primeira coluna, obtemos os da terceira, “pulando” os valores da segunda coluna:

$$g \circ f(0) = 2 \cdot 0^2 + 5 = 5$$
$$g \circ f(1) = 2 \cdot 1^2 + 5 = 7$$
$$g \circ f(2) = 2 \cdot 2^2 + 5 = 13$$

Saiba mais

- Escrever $h \circ p(x) = h(p(x))$ é dizer que partimos de x, aplicamos inicialmente a função $p(x)$ e depois calculamos $h(p(x))$. Apesar de a função h vir em primeiro na leitura da notação, ela é a mais distante de x e é a última que será aplicada.
- Invertendo a ordem das funções f e g na função composta, geralmente obtemos funções compostas diferentes, ou seja, não é verdade que, para todas as funções f e g, vale $g \circ f(x) = f \circ g(x)$.

Exercícios resolvidos

3. Dadas as funções $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 2x - 5$, calcule:

a) $g \circ f(x)$

b) $f \circ g(x)$

c) $f \circ f(x)$

Resolução:

a) $g \circ f(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 5 = 2 \cdot (3x + 1) - 5 = 6x - 3$

b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 1 = 3 \cdot (2x - 5) + 1 = 6x - 14$

c) $f \circ f(x) = f(f(x)) = 3 \cdot f(x) + 1 = 3 \cdot (3x + 1) + 1 = 9x + 4$

4. Dadas as funções $f(x) = 2x - 1$ e $f \circ g(x) = 4x - 5$, calcule $g(x)$.

Resolução:

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 4x - 5$

Calculando $f(g(x))$ pela lei da função f, temos $f(g(x)) = 2g(x) - 1$, e, aplicando essa igualdade na igualdade acima, obtemos:

$2g(x) - 1 = 4x - 5 \Rightarrow 2g(x) = 4x - 4 \Rightarrow g(x) = 2x - 2$

5. Dadas as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g \circ f(x) = 6x + 8$, calcule $g(x)$.

Resolução:

$g \circ f(x) = g(f(x)) = 6x + 8 \Rightarrow g(2x + 3) = 6x + 8$

Substituindo x por $\frac{x}{2}$:

$$g\left(2 \cdot \frac{x}{2} + 3\right) = 6 \cdot \frac{x}{2} + 8 \Rightarrow g(x + 3) = 3x + 8$$

Substituindo x por $x - 3$:

$g(x - 3 + 3) = 3(x - 3) + 8 \Rightarrow g(x) = 3x - 1$

Domínio da função composta

Para existir a função $g \circ f(x)$ (composta de g com f), a imagem de f deve estar contida no domínio de g. Também podemos dizer que os possíveis valores de $f(x)$ devem respeitar as condições de existência de $g(x)$.

Por exemplo, dadas as funções $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x}$, e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, não existe a composta $g \circ f(x)$, pois a imagem de f é $\mathbb{R}$ e o domínio de $g(x)$ é $\mathbb{R}_+$. Observe que, escrevendo $g \circ f(x) = \sqrt{2x}$, não podemos calcular $g \circ f(-3)$.

Se os domínios e contradomínios não estiverem definidos, calculamos a função composta impondo as restrições necessárias para que ela exista.

Propriedades da função composta

- A composição de uma função com sua inversa resulta na função identidade (função que a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x isto é, $f(x) = x$); ou seja, a composta de uma função com sua inversa leva um número a ele mesmo. “O dobro da metade”, “subtrair 1 do número ao qual anteriormente foi adicionado 1” são exemplos de composição entre uma função e sua inversa.

$$f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$$

- Quando temos a composição entre três ou mais funções, podemos aplicar a propriedade associativa. Podemos iniciar a composição pelas funções mais internas ou mais externas da notação, mas sem inverter a ordem das funções.

$$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x))) = h \circ g(f(x)) = h(g \circ f(x))$$

- A função inversa de uma função composta é a composta das inversas, na ordem contrária.

$$(g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$$

Exemplo: Considere as funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x$.

As funções inversas são $f^{-1}(x) = x + 1$ e $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

$g \circ f$

f $\qquad$ g

x	k	m
5	4	8
7	6	12
8	7	14

f^{-1} $\qquad$ g^{-1}

$f^{-1} \circ g^{-1}$

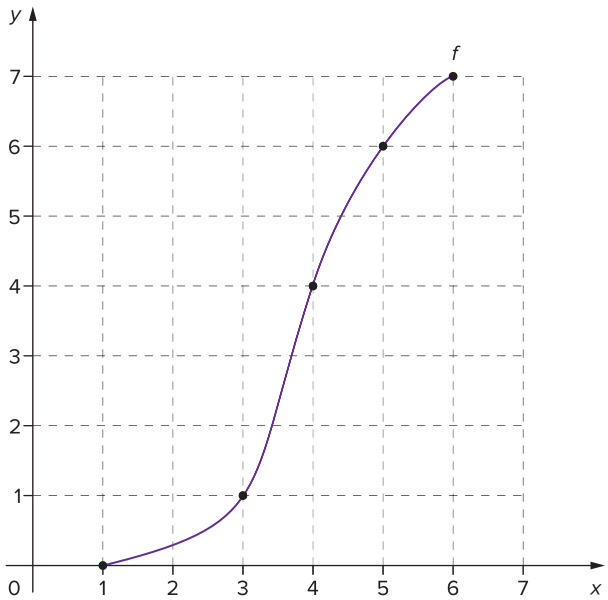
Revisando

1. Calcule as funções inversas de:
   a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$
   b) $g: [2, 4] \to [1, 5], g(x) = 9 - 2x$
   c) $h: \mathbb{R}_+ \to [4, +\infty[, h(x) = (x + 2)^2$
   d) $m: [6, +\infty[\to \mathbb{R}_+, m(x) = x^2 - 6x$

2. Por que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ não tem inversa?

3. Sabendo que $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ é invertível, obtenha a imagem de $f(x)$ e a expressão que define a função f^{-1}.

4. Dado o gráfico de f, representado abaixo, copie-o em folha a parte e construa no mesmo plano o gráfico de f^{-1}. Qual é o ponto de encontro entre eles?



5. Sendo $f(x)$ uma função bijetora tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 1$ e $f(4) = 3$, calcule:
   a) $f^{-1}(2)$
   b) $f^{-1}(1)$
   c) $f(f^{-1}(3))$
   d) $f^{-1}(f(f(3)))$

6. Dadas as funções reais $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 3$ e $h(x) = 5x + 2$, calcule:
   a) $h \circ g(x)$
   b) $g \circ h(x)$
   c) $g \circ f(x)$
   d) $g \circ g(x)$
   e) $h \circ g \circ f(x)$

7. Sejam f e g funções reais tais que $f(2x + 1) = 2x + 4$ e $g(x + 1) = 2x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dertemine a lei da função $f \circ g$.

8. Sendo f, g e h funções bijetoras, $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $g(4) = 1$, $g(1) = 2$, $h(1) = 5$ e $h(4) = 1$, calcule:
   a) $f \circ g(4)$
   b) $h \circ f(2)$
   c) $h \circ g \circ f(2)$
   d) $(f \circ g)^{-1}(2)$

9. **EsSA-MG 2021** Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Sabendo que $g(x) = -5x + 3$ e $g(f(x)) = x - 1$, então $f(-1)$ é igual a:
   a) -1
   b) 1
   c) 2
   d) -2
   e) 0

10. Dados $g(x) = 1 - 4x$ e $f \circ g(x) = 7 - 12x$, determine $f(x)$.

Exercícios propostos

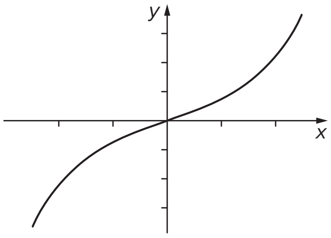
1. **EEAR-SP 2017** Sabe-se que a função $f(x) = \dfrac{x+3}{5}$ é invertível. Assim, $f^{-1}(3)$ é
   a) 3
   b) 4
   c) 6
   d) 12

2. **Mackenzie-SP 2017** Se a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}^*$ é definida por $f(x) = \dfrac{5}{2-x}$ e f^{-1} é a sua inversa, então $f^{-1}(-2)$ é igual a
   a) $-\dfrac{1}{2}$
   b) $\dfrac{9}{2}$
   c) $-\dfrac{9}{2}$
   d) $\dfrac{1}{2}$
   e) $\dfrac{5}{4}$

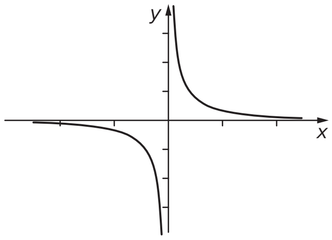
3. **UFPR 2017** Responda às seguintes perguntas a respeito da função $g(x) = \dfrac{3x-4}{1-4x}$:
   a) Qual é o domínio de g?
   b) Qual é a inversa de g?

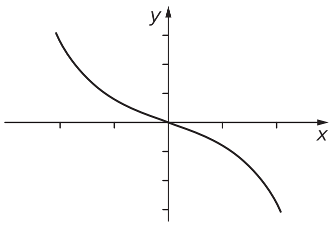
4. **ESPM-SP 2017** O conjunto imagem de uma função inversível é igual ao domínio de sua inversa. Sendo $f: A \to B$ tal que $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ uma função real inversível, seu conjunto imagem é:
   a) $\mathbb{R} - \{1\}$
   b) $\mathbb{R} - \{-1\}$
   c) $\mathbb{R} - \{-2\}$
   d) $\mathbb{R} - \{0\}$
   e) $\mathbb{R} - \{2\}$

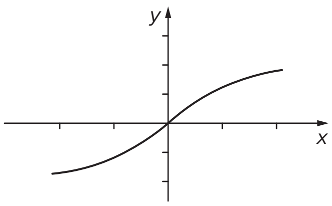
5. **Unicamp-SP 2016** Considere o gráfico da função $y = f(x)$ exibido na figura a seguir.

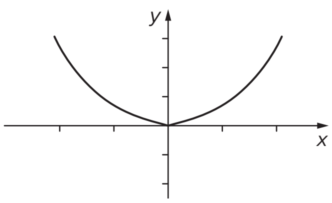


O gráfico da função inversa $y = f^{-1}(x)$ é dado por

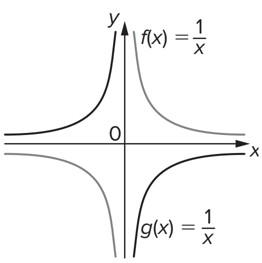
a)


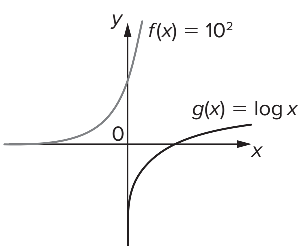
b)


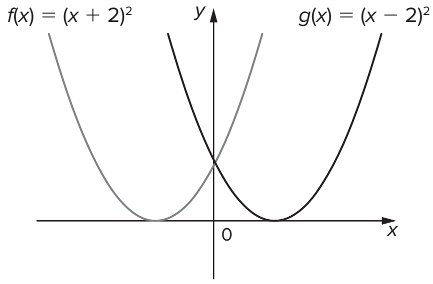
c)


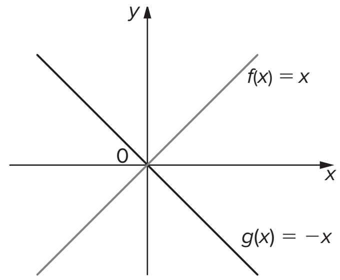
d)


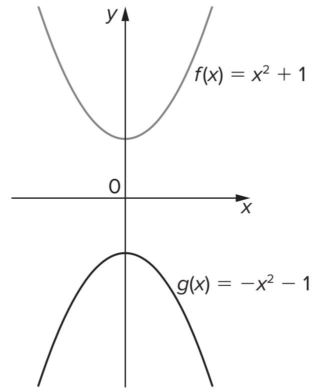
6. **UPF-RS 2015** Assinale a opção que apresenta o gráfico de duas funções reais inversas.

a)


b)


c)


d)


e)


7. A função f é tal que, para qualquer valor real de x, tem-se $f(x - 3) = 2x + 5$. É verdade que, para qualquer valor de x, tem-se:

a) $f(x) = 2x + 11$
b) $f(x) = 2x + 10$
c) $f(x) = x - 11$
d) $f(x) = x - 10$
e) $f(x) = 3x - 9$

8. **Unicamp-SP 2022** Certo modelo de carro é vendido em duas versões: uma a gasolina e outra híbrida. Essa última versão conta com um motor elétrico para funcionar em baixas velocidades, reduzindo, assim, o consumo de combustível e também os índices de poluição.
A versão a gasolina custa R$ 150 000,00 e a versão híbrida custa R$ 180 000,00. A tabela a seguir indica o consumo de combustível de cada uma das versões:

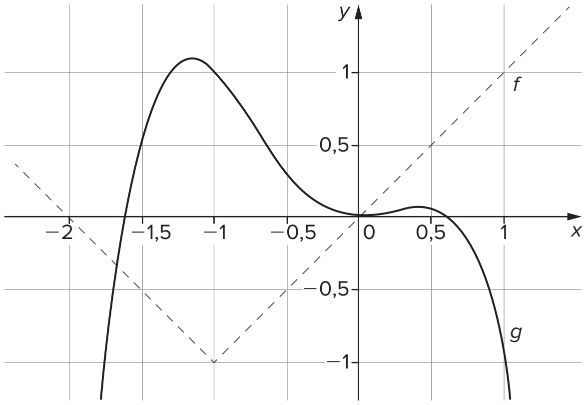
	Uso na cidade	Uso na estrada
Versão a gasolina	12 km/L	14 km/L
Versão híbrida	18 km/L	16 km/L

Note que a versão híbrida é mais econômica, porém custa mais caro.
Um motorista faz diariamente um percurso de 36 km na cidade e de 56 km na estrada. Considerando que

cada litro de gasolina custa R$ 5,00 e que, ao longo do tempo, esse preço será constante e o percurso não se alterará, quantos anos de uso serão necessários para que a economia no abastecimento compense o preço mais alto pago inicialmente pelo carro híbrido?

a) Mais que 8 e menos que 10 anos.
b) Mais que 10 e menos que 12 anos.
c) Mais que 12 e menos que 14 anos.
d) Mais que 14 e menos que 16 anos.

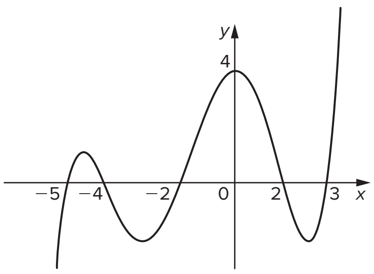
9. **PUC-RS 2019** Considere as duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$, esboçadas no plano cartesiano abaixo.



Com base no gráfico, sabendo que $a = g(f(1)) - g(f(-1))$, o valor de $f(a + 1)$ é:

a) 1 **b)** 0 **c)** -1 **d)** -2

10. **UPF-RS** Considere a função real g, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo $g \circ g$ a função composta de g com g, então, o valor de $(g \circ g)(-2)$ é:



a) 0 **c)** 2 **e)** -5
b) 4 **d)** -2

11. **Unicamp-SP 2020** Sabendo que a é um número real, considere a função $f(x) = ax + 2$ definida para todo número real x. Se $f(f(1)) = 1$, então

a) $a = -1$. **c)** $a = \frac{1}{2}$.
b) $a = -\frac{1}{2}$. **d)** $a = 1$.

12. **Unicamp-SP 2018** Seja a função $h(x)$ definida para todo número real x por

$$h(x) = \begin{cases} 2^{x+1} \text{ se } x \leq 1, \\ \sqrt{x-1} \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

Então, $h(h(h(0)))$ é igual a

a) 0. **b)** 2. **c)** 4. **d)** 8.

13. **Fasm-SP 2017** Considere as funções f e g, cujas leis de formação são $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = -2x + p$, onde $p \in \mathbb{Z}$. Se $f(g(-3)) = -1$, o valor de $g(f(1))$ é igual a:

a) 0
b) 12
c) -12
d) -24
e) -36

14. **Fuvest-SP 2019** Se a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ e a função $g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = f(f(x))$, então $g(x)$ é igual a

a) $\frac{x}{2}$
b) x^2
c) $2x$
d) $2x + 3$
e) x

15. **Uern** Sejam as funções $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^2 - 2x + 4$. Para qual valor de x tem-se que $f(g(x)) = g(f(x))$?

a) 2 **c)** 4
b) 3 **d)** 5

16. **Fuvest-SP** Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f(g(x)) = g(x)$ é igual a

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

17. **ITA-SP 2018** Considere as funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

a) $b + ad = d + bc$.
b) $d + ba = c + db$.
c) $a + db = b + cd$.
d) $b + ac = d + ba$.
e) $c + da = b + cd$.

18. Ao redor do mundo, os países adotam diferentes unidades de medida de temperatura, como o grau Celsius (C) ou o Fahrenheit (F).
Suponha três unidades de medida de temperatura fictícias: A, B e C. Para converter uma temperatura da unidade A para B, usa-se a função:

$$m(x) = \frac{8x}{3} + 15$$

E, da unidade C para B, usa-se a função:

$$p(x) = \frac{5x}{6} + k$$

a) Calcule o valor de k sabendo que 24° na unidade C equivalem a 29° na unidade A.
b) Quais são as leis das funções f e g, tais que f converte uma temperatura da unidade B para A e g transforma uma temperatura da unidade C para A?

Texto complementar

A expressão da arte faz parte do plano da imaginação, onde até mesmo formas abstratas são desenvolvidas através de formas concretas para o artista. Em se tratando de formas e expressão, há uma função para cada traço, bem como há o inverso deste.

Galeria de Arte e Matemática

Neste capítulo iremos apresentar a galeria de imagens construída apenas para este trabalho, utilizando como base funções de uma variável real a valores reais e suas transformações geométricas isométricas. [...]

Construindo a Galeria

A galeria que será apresentada neste capítulo, é semelhante a que foi criada na disciplina de Arte e Matemática, porém com uma regra adicional: Todas as obras devem conter pelo menos uma aproximação de traço do gráfico de uma função de uma variável real a valores reais e, preferencialmente, que as transformações geométricas destas também componham a obra.

O termo "aproximação" é utilizado devido ao fato de que o aplicativo *Amaziograph* tem como traço de pincel, o desenho livre, ou seja, não possui ferramentas de precisão na linha. Isso faz com que o movimento fique irregular durante o desenho, causado pela pequena tela do celular ou pela dureza do mouse (no caso do aplicativo para Windows), seja uma representação com aspectos visuais que permitam a identificação da função que se deseja copiar, sem a precisão do gráfico real.

As funções escolhidas para compor esta galeria, foram selecionadas levando em consideração o traço, o tipo de função e tudo que foi aprendido ao longo desta pesquisa [...]. A seguir, apresentaremos [...], como foi realizada a construção das obras de arte, desde a plotagem da função no *Wolfram|Alpha*, a etapa inicial da arte no *Amaziograph*, até a finalização da obra. As imagens dos exemplos irão seguir a ordem: gráfico, desenho inicial e arte final. [...]

$f(x)$ = sen x, sua reflexão em relação ao eixo x e sua inversa $g(x)$ = cossec x

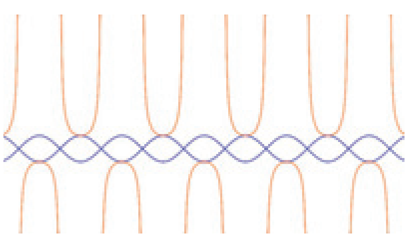
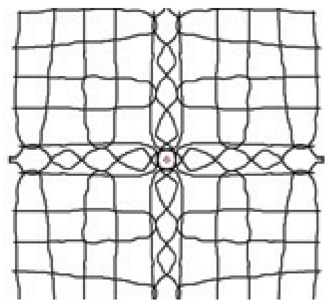
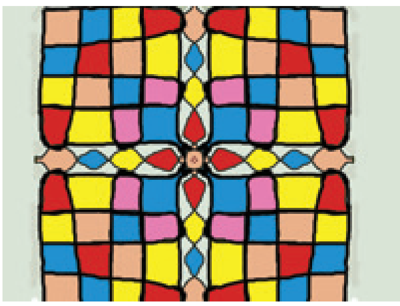

Daniel Alves Silva

Gráfico da função sen x, sua reflexão e sua inversa cossec x. Fonte: *Wolfram|Alpha*.


Daniel Alves Silva

Simetria feita a partir das funções sen x, sua reflexão e sua invesa cossec x. Fonte: Criada pelo autor no *Amaziograph*.


Daniel Alves Silva

Arte finalizada. Fonte: Criada pelo autor no *Amaziograph*.

SILVA, Daniel Alves. *Arte e Matemática*: contribuições para o aprendizado de funções de uma variável real a valores reais. 2022. 61 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2022, p. 47-48. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/34872/1/ArteEMatem%C3%A1tica.pdf. Acesso em: 25 jul. 2022 (Adapt.)

Resumindo

Função inversa

- Se o ponto (a, b) pertence a f, então o ponto (b, a) pertence a f^{-1}.
- Para existir f^{-1}, a função f deve ser bijetora.
- Os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.
- $D(f) = Im(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = Im(f)$.

Função composta

- A função composta de f com g é dada por $f \circ g(x) = f(g(x))$.
- Se for possível calcular as compostas $h \circ f$ e $f \circ g$, então vale a propriedade associativa no cálculo da composta $h \circ f \circ g$, isto é:

$$h \circ f \circ g(x) = h \circ f(g(x)) = h(f \circ g(x))$$

- Se f e g forem bijetoras, então $(f \circ g(x))^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$.

Quer saber mais?

Sites

VIANA, Marcelo. Nicolas Bourbaki, o matemático que não existiu. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 29 ago. 2018. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2018/08/nicolas-bourbaki-o-matematico-que-nao-existiu.shtml.

Apesar do nome, Nicolas Bourbaki não foi uma pessoa, e sim um grupo de matemáticos que, por trás desse pseudônimo, produziram diversas obras de referência em Matemática durante os séculos XX e XXI, incluindo trabalhos sobre funções, e em um dos trabalhos desse grupo é encontrado um dos primeiros usos do símbolo $\circ$ para representar a composição de duas funções. No artigo indicado acima, do matemático Marcelo Viana, é apresentada uma breve história desse grupo.

Acesso em: 25 ago. 2021.

ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição. Nicolas Bourbaki e o movimento matemática moderna. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 2, n. 3, set./dez. 2012. Disponível em: http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/1865.

Nesse breve artigo da *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, o prof. dr. Agnaldo Esquincalha, da UFRJ, apresenta mais detalhes sobre o grupo por trás do pseudônimo Bourbaki e suas influências na Matemática. O artigo também aborda algumas curiosidades sobre o grupo, como a aposentadoria compulsória dos membros aos 50 anos e o anonimato dos membros até alcançarem a aposentadoria.

Acesso em: 25 ago. 2021.

CALCULADORA de função inversa. *Symbolab*. Disponível em: https://pt.symbolab.com/solver/function-inverse-calculator.

Nesse *site*, há uma calculadora *on-line* que permite encontrar a lei da função inversa a uma função dada.

Acesso em: 25 ago. 2021.

Exercícios complementares

1. Uece 2021 Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^3$. Se $h = g \circ f$ é a função composta de g com f (isto é, $h(x) = g(f(x))$), então, a expressão que define a função h^{-1}, inversa da função h, é $h^{-1}(x)$ igual a

a) $2 \cdot \log_2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

b) $3 \cdot \log_3\left(\dfrac{x}{2}\right)$

c) $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3(x)$

d) $\dfrac{1}{3} \cdot \log_2(x)$

Nota: Se a e z são números reais positivos e $a \neq 1$, $\log_a(z)$ é o logaritmo de z na base a.

2. Uece 2020 A função $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ é invertível. Considerando-se g sua inversa, o valor positivo de k para o qual $f(k) + g(k) = \sqrt{3}$ é igual a

a) $3\sqrt{3}$.

b) $2\sqrt{3}$.

c) $\sqrt{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. EsPCEx-SP Considere a função bijetora $f: [1, +\infty[\to]-\infty, 3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a, b) o ponto de interseção de f com sua inversa. O valor numérico da expressão $a + b$ é

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

4. Uece 2017 A função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x+1}$, para $x \neq -\dfrac{1}{4}$ é invertível. Sua inversa g pode ser expressa na forma $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde a, b, c e d são números inteiros. Nessas condições, a soma $a + b + c + d$ é um número inteiro múltiplo de

a) 6.

b) 5.

c) 4.

d) 3.

5. UEPG-PR Considerando as funções $f(x)$ e $g(x)$, tais que $f(x) = \dfrac{x+3}{4}$ e $f\big(g(x)\big) = \dfrac{5x}{4x+4}$, assinale o que for correto.

01 O domínio de $g(x)$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

02 $g^{-1}(0) = \dfrac{3}{2}$

04 $g(1) = -\dfrac{1}{2}$

08 $g(f(5)) = \dfrac{1}{3}$

16 O domínio de $f(x)$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$.

Soma:

6. Encontre a lei da função $f \circ g$, dadas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x < 2 \\ 3x-3, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x-2, \text{ se } x < 0 \\ 5x+1, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

7. UFPR O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por $N(t) = 20t - t^2$, sendo que $0 \leqslant t \leqslant 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por $C(N) = 50 + 30N$.

a) Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora.

b) Em que instante t, de um dia de produção, o custo alcançará o valor de 2 300 milhares de reais?

8. Seja f: $]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. A expressão da função composta $g(x) = f(f(x+1))$ é

a) $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

c) $g(x) = x + 1$

d) $g(x) = x - 1$

e) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

9. AFA-SP 2021 Considere as funções f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{2\}$ e g: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{2\}$ definidas por $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2x}$ e $g(x) = x + 2$ e, também, a função real **h** definida por $h(x) = f^{-1}(g(x))$.
É correto afirmar que:

a) a função **h** é par.

b) $h(1) = 2$.

c) a função **h não** é injetora.

d) $h(x) = -2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.

10. EPCar-MG 2018 Considere a função real $f(x) = \dfrac{1}{2x+2}$, $x \neq -1$.

Se $f(-2+a) + \dfrac{1}{5} = f(-a)$, então $f\left(\dfrac{a}{2} - 1\right) + f(4+a)$ é igual a

a) 1

b) 0,75

c) 0,5

d) 0,25

11. ESPM-SP Considere as funções reais $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x - k$, com $k \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ para qualquer x real se o valor de k for igual a:

a) 0

b) 1

c) 2

d) -2

e) -1

12. Acafe-SC 2016 Dadas as funções f e g, com funções reais $f(2x + 1) = 4x + 12$ e $g(x + 2) = 2x - 1$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, então, pode-se afirmar o valor de x para que $f(g(x)) = 2$ é um número:

a) divisor de 10

b) múltiplo de 4

c) fracionário

d) primo

13. Unicamp-SP 2017 Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a

a) 1.

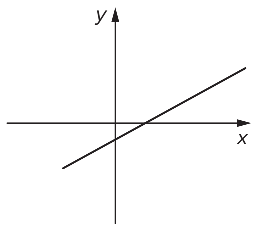
b) 2.

c) 3.

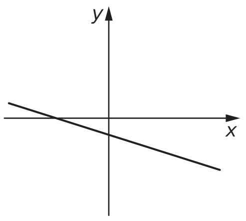
d) 4.

14. Fuvest-SP 2018 Sejam f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 5^x$ e $g(x) = \log_{10} x$, respectivamente. O gráfico da função composta $g \circ f$ é:

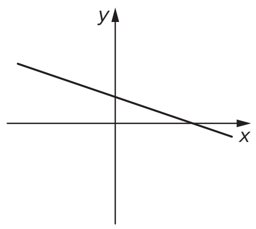
a)



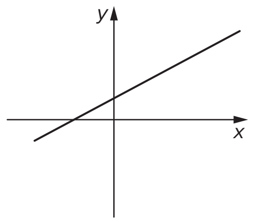
b)



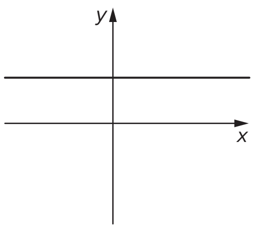
c)



d)



e)



15. Esc. Naval-RJ Considere f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = \dfrac{1}{4x-1}$ e $g(x) = 2x^2$. Qual é o domínio da função composta $f \circ g(x)$?

a) $\mathbb{R}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \text{ e } x \neq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \dfrac{1}{4}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \dfrac{1}{4} \text{ e } x \neq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -\dfrac{1}{4} \text{ e } x \neq -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

16. Esc. Naval-RJ Sejam f e g funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2, \text{ se } x < 0 \end{cases} \text{ e } g(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x > 2 \\ 1 - x^2, \text{ se } x \leqslant 2 \end{cases}.$$

Sendo assim, pode-se dizer que $(f \circ g)(x)$ é definida por

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, \text{ se } x > 2 \\ 1 - 4x^2, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x - 1, \text{ se } x > 2 \\ 1 - 4x^2, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, \text{ se } x \geqslant 2 \\ 1 - 4x^2, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$

d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, \text{ se } x \geqslant 2 \\ 1 - 4x^2, \text{ se } -1 < x \leqslant 1 \\ x^4 + x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2 \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1, \text{ se } x > 2 \\ -1 - 4x^2, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^4 - x^2, \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

17. Fuvest-SP 2018 Considere as funções $f: \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ e $g: [0, \pi] \to [-1, 1]$ definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$. Sendo f e g bijetoras, existem funções f^{-1} e g^{-1} tais que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$ e $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = id$, em que id é a função identidade.

a) Para $0 \leqslant x \leqslant 1$, mostre que $(g \circ f^{-1})(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

b) Mostre que $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + g^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

18. PUC-Rio Seja $f(x) = \dfrac{x + 1}{-x + 1}$.

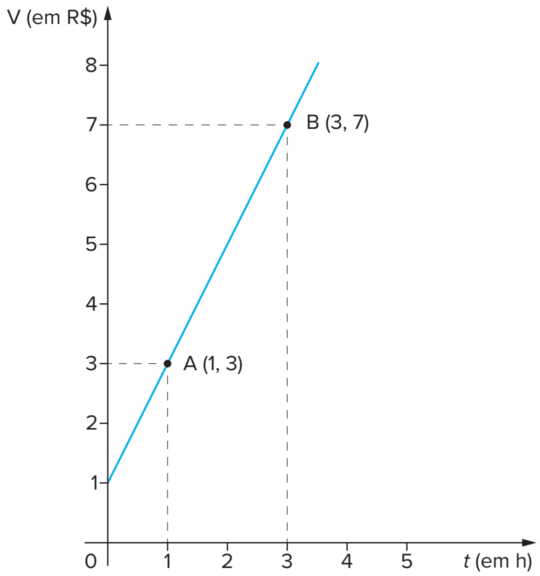
a) Calcule $f(2)$.
b) Para quais valores reais de x temos $f(f(x)) = x$?
c) Para quais valores reais de x temos $f(f(f(f(x)))) = 2011$?

FRENTE 1

BNCC em foco

Use as informações a seguir para responder às questões de **1** a **3**:

Considere a relação entre duas variáveis, V e t, representada no gráfico abaixo.



Essa função calcula o valor a ser pago em função do tempo que um carro fica em um estacionamento. Observe que essa relação V $\times$ t, com V em reais e t em horas, é representada por um segmento de reta sem descontinuidades: isso implica que o pagamento não é feito em função de horas inteiras, mas sim de forma contínua. Por exemplo, o ponto A representado no gráfico mostra que, depois de uma hora completa, o valor cobrado será de R$ 3,00; mas, para qualquer fração dessa hora, o valor será menor do que R$ 3,00.

EM13MAT302 e EM13MAT401

1. Entre as alternativas abaixo, qual delas representa a lei da função afim que relaciona o valor pago V(t), em reais, com o tempo t, em horas, de estacionamento?

a) $V(t) = 2t + 1$
b) $V(t) = 2t - 1$
c) $V(t) = 3t + 1$
d) $V(t) = 3t - 1$

EM13MAT302 e EM13MAT401

2. Pelo gráfico, é possível interpretar, pelas coordenadas do ponto B, que, se uma pessoa deixou seu carro estacionado por 3 horas, então ela pagou R$ 7,00 de estacionamento. Porém, essa informação também poderia ser lida de outra maneira: se uma pessoa pagou R$ 7,00 de estacionamento, então ela deixou seu carro estacionado por 3 horas.

Apesar de na prática essas duas afirmações parecerem a mesma, perceba que elas invertem a informação que é dada (t na primeira afirmação e V na segunda) e a informação que é concluída (V na primeira afirmação e t na segunda). Essa diferença está ligada ao conceito de função inversa: a primeira afirmação está relacionada à função V(t), cuja lei foi identificada na atividade anterior; já a segunda afirmação está relacionada à função inversa de V(t), que, dado o valor pago, indica o tempo estacionado. Podemos representar essa função inversa por t(V).

Dito isso, assinale a alternativa que apresenta a lei da função t(V).

a) $t(V) = \dfrac{3V + 1}{2}$ **b)** $t(V) = \dfrac{2V - 1}{2}$ **c)** $t(V) = \dfrac{V - 1}{2}$ **d)** $t(V) = \dfrac{V + 1}{2}$

EM13MAT510

3. A taxa de variação da função V(t) é de R$ 2,00 por hora, ou, simplesmente, 2 R$/h. Isso indica que, a cada 1 hora, o valor pago pelo estacionamento aumenta 2 reais. Qual das alternativas a seguir indica a taxa de variação da função t(V)?

a) 2 R$/h
b) 2 h/R$
c) 0,5 R$/h
d) 0,5 h/R$

Radiotelescópio do Observatório de Narrabri – Austrália. Foto de 2021.

mikulas1/iStockphoto.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

5

Função do 2º grau

O lançamento oblíquo, antenas parabólicas, espelhos de lanternas e faróis, cálculos de áreas máximas em figuras de perímetro constante são alguns dos exemplos práticos que utilizam funções do 2º grau (ou quadráticas), e sua conexão com a figura que a representa no plano cartesiano, a parábola, é imediata.

Girando uma parábola ao redor de seu eixo de simetria, obtém-se um paraboloide elíptico, uma superfície espacial com características geométricas especiais e inúmeras aplicações em nosso dia a dia. A superfície de uma antena parabólica tem esse formato, e as ondas eletromagnéticas que chegam até a superfície da antena convergem para um ponto único, chamado foco.

Neste capítulo, estudaremos a resolução de equações do 2º grau e inequações do 1º grau e como se comporta a função quadrática, suas características e aplicações a situações do nosso cotidiano.

Relembrando as equações do 1º grau

No estudo das equações e das funções do 2º grau, utilizamos muitas técnicas das equações do 1º grau. Por isso, veremos brevemente alguns conceitos.

Discussão da equação do 1º grau

Discutir uma equação é fazer uma análise sobre a quantidade de raízes dessa equação. A equação do 1º grau $ax = b$ tem as seguintes possibilidades:

- se $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$, então a equação tem uma única raiz (por exemplo, $2x = -4$ ou $-3x = 0$);
- se $a = 0$ e $b = 0$, então a equação tem um número infinito de raízes ($0x = 0$). Qualquer valor real de x torna a sentença verdadeira;
- se $a = 0$ e $b \neq 0$, então a equação não tem nenhuma raiz (por exemplo, $0x = 4$ ou $0x = -2$). Não há valores de x que tornam a sentença verdadeira.

Exercício resolvido

1. Discuta a equação $(m - 2)x = n + 3$.

Resolução:

- se $m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ e $n \in \mathbb{R}$, a equação tem uma única raiz;
- se $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$ e $n + 3 = 0 \Rightarrow n = -3 \rightarrow S = \mathbb{R}$;
- se $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$ e $n + 3 \neq 0 \Rightarrow n \neq -3 \rightarrow S = \varnothing$.

Equações produto

Quando um produto é igual a zero? Já ouvimos essa pergunta muitas vezes, e a resposta é simples: quando um dos fatores for zero. Podemos escrever:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Estendendo isso para equações, temos:

$$(x - 2) \cdot (3x - 9) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } 3x - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$

! Atenção

Cuidado! Não podemos generalizar a solução da equação produto para outros valores diferentes de zero. **Não é correto** afirmar que $a \cdot b = 1 \Rightarrow a = 1$ ou $b = 1$.

Equação do 2º grau

As equações completas do 2º grau têm a seguinte forma: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

As raízes dessa equação são obtidas por uma fórmula resolutiva, utilizando o discriminante Δ. Há muita discussão entre matemáticos (principalmente brasileiros) quanto à utilização do nome "fórmula de Bháskara", amplamente utilizado no Brasil.

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Veja como resolver a equação a seguir utilizando a fórmula resolutiva.

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow & x_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ \searrow & x_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{matrix} \therefore$$

$\therefore S = \{1, 6\}$

Para $c = 0$, temos uma equação incompleta do 2º grau e podemos utilizar a fatoração para transformar essa equação em uma equação produto.

Exemplo:

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3 \therefore S = \{0, 3\}$

Para $b = 0$, também temos uma equação incompleta do 2º grau e podemos isolar a variável da equação para resolvê-la mais rapidamente.

Exemplo:

$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \therefore S = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$

! Atenção

Note que $\sqrt{9} = 3$, já $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$. Apesar de sabermos que o cálculo da raiz quadrada de um número positivo sempre resulta em um número positivo, devemos lembrar que a resolução de uma equação do 2º grau no formato $x^2 = k$, com $k > 0$, sempre terá duas soluções, uma positiva e uma negativa.

Discussão de uma equação do 2º grau

A discussão de uma equação do 2º grau é feita analisando-se o valor do discriminante. Para a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos:

- se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas;
- se $\Delta = 0$, a equação tem uma raiz dupla ou duas raízes reais e iguais;
- se $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Exemplo: Considere a equação do 2º grau $mx^2 - 2x + 1 = 0$, com $m \neq 0$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 = 4 - 4m$$

- $\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4m > 0 \Rightarrow m < 1$ e $m \neq 0 \rightarrow$ duas raízes reais e distintas;
- $\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4m = 0 \Rightarrow m = 1 \rightarrow$ uma raiz dupla (ou duas raízes reais iguais);
- $\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1 \rightarrow$ nenhuma raiz real.

Outras considerações merecem atenção:

- $b = 0$ e $c < 0 \rightarrow$ a equação tem formato $x^2 = k$ e apresenta duas raízes reais simétricas;
- $c = 0 \rightarrow$ a equação tem formato $ax^2 + bx = 0$ e apresenta uma das raízes nula;
- $a \cdot c < 0 \rightarrow \Delta > 0$ e a equação apresentará duas raízes reais e distintas.

Soma e produto das raízes

A partir dos coeficientes da equação, podemos calcular a soma e o produto de suas raízes. Sendo $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, temos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Exemplos:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{1} = 5 \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

b) $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{6}{1} = -6 \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{8}{1} = 8$$

Com um pouco de “treino”, podemos resolver uma equação do 2º grau apenas observando os valores da soma e do produto de suas raízes.

Faça isso para os exemplos acima e perceba que, no primeiro item, as raízes são 2 e 3 (soma 5 e produto 6). Já no segundo, as raízes são −2 e −4 (soma −6 e produto 8).

Exercícios resolvidos

2. Sendo m e n as raízes da equação $3x^2 - 4x + 5 = 0$, calcule $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$ e $m^2 + n^2$.

Resolução:

A partir da equação e das relações de soma e produto, temos que:

$$\begin{cases} m + n = -\dfrac{(-4)}{3} = \dfrac{4}{3} \\ m \cdot n = \dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Assim:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{n+m}{m \cdot n} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

$$(m+n)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow m^2 + 2\underbrace{mn}_{\frac{5}{3}} + n^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 + 2 \cdot \frac{5}{3} + n^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 = \frac{16}{9} - \frac{10}{3} = -\frac{14}{9}$$

3. Calcule k de modo que uma das raízes da equação $2x^2 - 30x + k + 1 = 0$ seja o dobro da outra.

Resolução:

Sejam $x_1 = m$ e $x_2 = 2m$ as raízes da equação dada. Temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow m + 2m = -\frac{(-30)}{2} \Rightarrow 3m = 15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = 5$$

Assim, $x_1 = 5$ e, por ser uma raiz da equação, podemos substituí-la na equação, obtendo:

$$2 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + k + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 25 - 150 + k + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = -50 + 150 - 1 \Rightarrow k = 99$$

Equação do 2º grau a partir das raízes

Podemos escrever uma equação do 2º grau conhecendo a soma e o produto de suas raízes.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exemplos:

a) Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$, temos que $x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$ e $x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 3 = 3$; logo, uma equação que terá 1 e 3 como raízes é $x^2 - 4x + 3 = 0$.

b) Se $x_1 = 2$ e $x_2 = -5$, temos que $x_1 + x_2 = 2 + (-5) = -3$ e $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-5) = -10$; logo, uma equação que terá 2 e −5 como raízes é $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Equações redutíveis a uma equação do 2º grau

Algumas equações podem ser transformadas em equações do 2º grau pela substituição de suas variáveis.

Exemplos:

a) Na equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$, fazendo $x^3 = t$ e $x^6 = t^2$, temos:

$$t^2 - 9t + 8 = 0$$

b) Na equação $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 6) = 18$, fazendo $x^2 - 2x = t$, temos:

$$(t + 3)(t + 6) = 18$$

Função do 2º grau

Uma função do 2º grau, também chamada de função quadrática, é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

$f(x) = -2x^2 + 6x - 3$, em que $a = -2$, $b = 6$ e $c = -3$.

$g(x) = x^2 - 2x$, em que $a = 1$, $b = -2$ e $c = 0$.

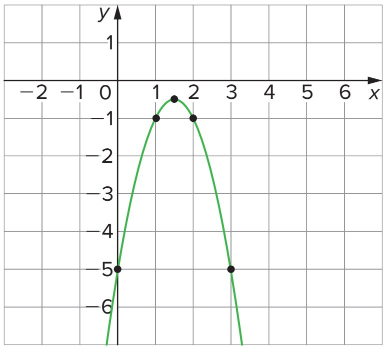
$h(x) = 4x^2 - \dfrac{1}{4}$ em que $a = 4$, $b = 0$ e $c = -\dfrac{1}{4}$.

Gráfico

O gráfico da função do 2º grau é uma curva chamada parábola. Atribuindo valores para x e calculando os correspondentes valores de y, vamos construir os gráficos das funções a seguir.

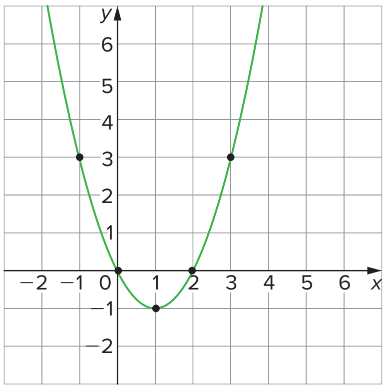
a) $f(x) = -2x^2 + 6x - 5$

x	y
0	−5
1	−1
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	−1
3	−5



b) $g(x) = x^2 - 2x$

x	y
−1	3
0	0
1	−1
2	0
3	3



Ao construir o gráfico de uma função do 2º grau, podemos observar que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Raízes (ou zeros)

Os valores de x tais que $f(x) = 0$ são chamados de raízes, ou zeros, da função do 2º grau. Exemplos:

a) Para obter os zeros da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$, fazemos:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Logo, as raízes são 1 e 1.

b) Para obter as raízes da função $g(x) = -x^2 + 4$, fazemos:

$$-x^2 + 4 = 0$$
$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 16$$
$$x = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{\pm 4}{-2} = \pm 2$$

Logo, as raízes são −2 e 2.

c) Para obter os zeros da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$, fazemos:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$$

Como vimos anteriormente, essa equação não tem raízes reais, logo, f também não tem zeros reais.

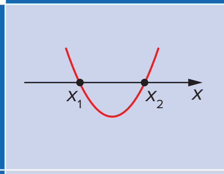
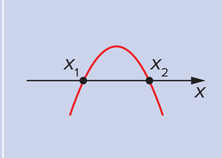
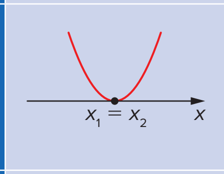
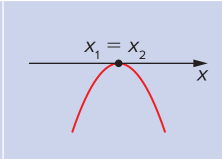
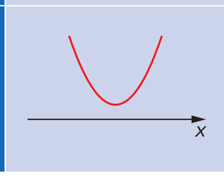
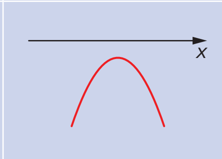
Saiba mais

Equação do 2º grau e função do 2º grau são conceitos diferentes. Em uma função do 2º grau, temos as raízes (ou zeros), o domínio, a imagem, a representação gráfica, entre outras informações. Já em uma equação do 2º grau, apenas obtemos as raízes e o conjunto verdade (ou solução).

Natureza das raízes

Na representação gráfica, as raízes (ou zeros) de uma função do 2º grau são os valores de x em que a parábola intersecta o eixo das abscissas. Além disso, a natureza das raízes da função do 2º grau está relacionada com o valor obtido para o discriminante Δ.

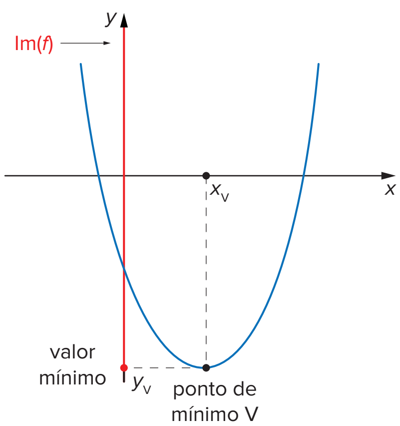
Observe, no quadro a seguir, como essas relações podem ser indicadas.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ duas raízes reais e distintas		
$\Delta = 0$ duas raízes reais e iguais		
$\Delta < 0$ não possui raízes reais		

Vértice da parábola e imagem da função do 2º grau

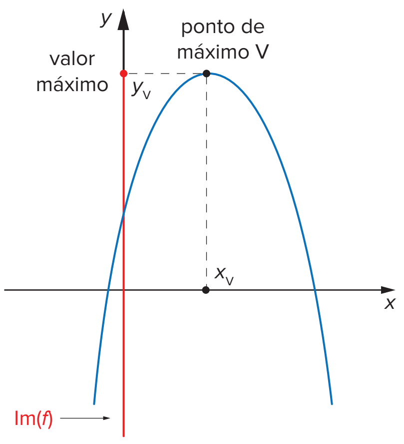
O vértice $V(x_V, y_V)$ é o ponto de maior ou menor ordenada da parábola, dependendo da sua concavidade.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V.



Podemos observar que, a partir do valor de y_V, é possível determinar a imagem da função. Nesse caso, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_V\}$ ou $\mathrm{Im}(f) = [y_V, +\infty)$.

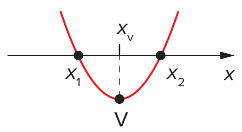
Se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V.



Podemos observar que, a partir do valor de y_V, é possível determinar a imagem da função. Nesse caso, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$ ou $\text{Im}(f) = (-\infty, y_V]$.

Coordenadas do vértice

Quando a função quadrática possui duas raízes distintas, ou seja, quando $\Delta > 0$ o x_V é a média aritmética das raízes (x_1 e x_2), ou seja, $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.



Pela relação anterior e sabendo que, em uma equação do 2º grau, a soma das raízes $x_1 + x_2$ é dada por $-\dfrac{b}{a}$, temos:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_V = \frac{-\frac{b}{a}}{2} \therefore x_V = -\frac{b}{2a}$$

! Atenção

Para os casos em que $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, a relação $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ também é válida.

Para obtermos a ordenada do vértice (y_V), podemos substituir o valor de x_V na função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$y_V = f(x_V) = a \cdot (x_V)^2 + b \cdot x_V + c$$

$$y_V = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$y_V = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Exemplo:

Quais são as coordenadas do vértice do gráfico de $f(x) = x^2 - 12x + 27$?

As coordenadas do vértice são:

$$\begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\dfrac{(-12)}{2 \cdot 1} = \dfrac{12}{2} = 6 \\ y_V = f(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 27 = 36 - 72 + 27 = -9 \end{cases}$$

O vértice da parábola é o ponto V(6, −9).

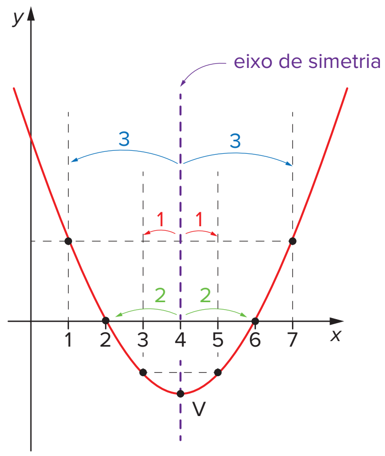
O valor da ordenada do vértice também poderia ter sido obtido por $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-[(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27]}{4 \cdot 1}$$

$$y_V = \frac{-[144 - 108]}{4 \cdot 1} = -9$$

Eixo de simetria

Ao traçar uma reta que passe pelo vértice da parábola e seja paralela ao eixo vertical, podemos notar que a parábola é simétrica em relação a esse eixo.



No gráfico acima, vemos que o eixo de simetria passa por $x = 4$. Assim:

$$f(4 + 1) = f(4 - 1) \Rightarrow f(5) = f(3)$$

$$f(4 + 3) = f(4 - 3) \Rightarrow f(7) = f(1)$$

Exercício resolvido

4. Dada a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$, faça o que se pede.

a) Determine suas raízes.

b) Obtenha o vértice.

c) Construa o gráfico.

d) Determine sua imagem.

Resolução:

a) Fazendo $f(x) = 0$, temos:

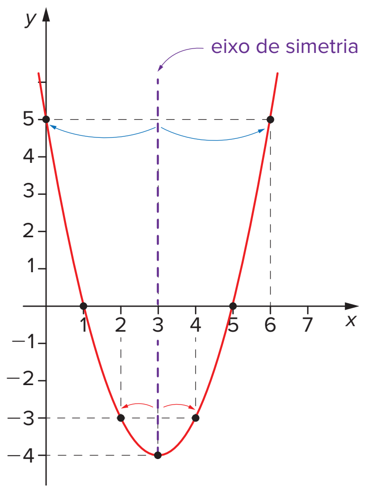
$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 5$$

Logo, suas raízes são 1 e 5.

b) Sendo $x_V = -\dfrac{(-6)}{2} = 3$ e $y_V = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$, o vértice da parábola é V(3, −4).

c) Considerando as informações obtidas nos itens anteriores e, como $y = f(0) = 5$, o gráfico de $f(x)$ é dado por:

FRENTE 1



Note que, por simetria, temos $f(0) = f(6)$ e $f(2) = f(4)$.

d) Como $y_V = -4$, temos que a imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$.

Valor máximo e mínimo

Como vimos anteriormente, a parábola pode ter um ponto de máximo ou um ponto de mínimo de acordo com sua concavidade, e esse ponto é o vértice. Quando nos referimos ao **valor máximo** ou ao **valor mínimo** da função quadrática, estamos nos referindo ao valor de y_V.

Exercícios resolvidos

5. Determine o valor de k para que 10 seja o valor máximo da função $f(x) = -2x^2 - 8x + k$.

Resolução:

O valor máximo da função corresponde ao y do vértice:

$$y_V = 10 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-[(-8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot k]}{4 \cdot (-2)} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-(64 + 8k)}{-8} = 10 \Rightarrow k = 2$$

6. Quando uma loja oferece um produto a R$ 20,00, consegue vendê-lo a 80 clientes. Para cada real de aumento, perde-se um cliente. Qual deve ser o valor anunciado para que a loja obtenha a receita máxima e qual é a receita máxima?

Resolução:

Se para cada 1 real de aumento a loja perde 1 cliente, podemos afirmar que, aumentado o valor do produto em x reais, a loja terá uma perda de x clientes.

A receita obtida é dada por $R(x) = (20 + x) \cdot (80 - x) \Rightarrow$ $\Rightarrow R(x) = -x^2 + 60x + 1600$.

O valor máximo ocorre no vértice, ou seja, $x_V = -\frac{60}{2 \cdot (-1)} = 30$, assim o preço deve ser o valor inicial acrescido do aumento calculado: R$ 20,00 + + R$ 30,00 = R$ 50,00.

A receita máxima será $R(30) = (20 + 30) \cdot (80 - 30) =$ $= 50 \cdot 50 = 2500$, ou seja, R$ 2 500,00.

! Atenção

Para cada exercício sobre máximo ou mínimo de uma função do 2º grau, verifique sempre se o que foi pedido é o valor de y_V (o máximo/mínimo da função) ou o de x_V (o valor de x que faz com que a função seja máxima/mínima).

Outras representações

A função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na sua forma fatorada. Para isso, precisamos conhecer suas raízes x_1 e x_2 e o coeficiente dominante (a).

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemplo: para escrever a função $y = 2x^2 - 4x - 6$ em sua forma fatorada, devemos conhecer suas raízes $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ e o coeficiente dominante $a = 2$. Assim, a forma fatorada da função será $y = 2(x + 1)(x - 3)$.

Também podemos escrever a função do 2º grau utilizando as coordenadas do vértice (x_V, y_V):

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = y_V + a(x - x_V)^2$$

Estudo do sinal

Do mesmo modo que fizemos com a função do 1º grau, faremos para a função quadrática. Basicamente, devemos analisar para quais valores de x temos y positivo, negativo ou nulo.

Devemos notar que, quando o gráfico está:

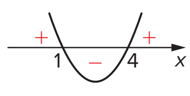
- acima do eixo das abscissas, temos y positivo;
- abaixo do eixo das abscissas, temos y negativo;
- sobre o eixo das abscissas, temos $y = 0$.

Para fazer o estudo do sinal, basta encontrarmos as raízes e verificarmos a concavidade da parábola.

Nos exemplos a seguir, vamos analisar o sinal das funções:

a) $y = x^2 - 5x + 4$

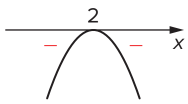
Calculando as raízes, obtemos $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$. Como $a = 1$, a concavidade da parábola está voltada para cima e, assim, teremos um esboço do gráfico com as seguintes características:



Com isso, verificamos que:

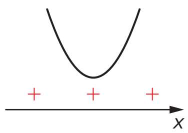
$$\begin{cases} \text{se } x < 1 \text{ ou } x > 4, \text{ então } y > 0 \\ \text{se } x = 1 \text{ ou } x = 4, \text{ então } y = 0 \\ \text{se } 1 < x < 4, \text{ então } y < 0 \end{cases}$$

b) $y = -x^2 + 4x - 4$
Calculando as raízes, obtemos $x_1 = x_2 = 2$. Como $a = -1$, a concavidade da parábola está voltada para baixo, logo:



Assim, temos que: $\begin{cases} \text{se } x < 2 \text{ ou } x > 2, \text{ então } y < 0 \\ \text{se } x = 2, \text{ então } y = 0 \end{cases}$.

c) $y = x^2 + 4x + 5$
Calculando as raízes, verificamos que $\Delta < 0$ e a função não tem raízes reais. Como $a = 1$, a concavidade da parábola está voltada para cima:



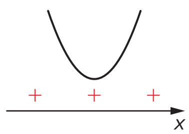
Portanto, observamos que para qualquer valor de x temos $y > 0$.

Exercício resolvido

7. Determine para quais valores de k o trinômio $x^2 + 4x + k$ é sempre positivo.

Resolução:

Transformamos o trinômio numa função: $y = x^2 + 4x + k$. Para y ser sempre positivo, o gráfico deve ter a forma a seguir:



Portanto, a parábola deve ter concavidade para cima ($a > 0$), e a função não pode ter raízes reais ($\Delta < 0$). Como $a = 1$, basta resolver:
$\Delta < 0 \Rightarrow 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \Rightarrow 16 - 4k < 0 \Rightarrow k > 4$

Resolução de inequações

Inequações do 1º grau

Vamos lembrar algumas propriedades de desigualdades.

- Adicionar ou subtrair números:

$$2 < 5 \Rightarrow 2 + 3 < 5 + 3 \Rightarrow 5 < 8$$
$$10 > 7 \Rightarrow 10 - 2 > 7 - 2 \Rightarrow 8 > 5$$

- Multiplicar ou dividir por números positivos:

$$-3 < 5 \Rightarrow -3 \cdot 2 < 5 \cdot 2 \Rightarrow -6 < 10$$
$$12 > 9 \Rightarrow 12 : 3 > 9 : 3 \Rightarrow 4 > 3$$

- Multiplicar ou dividir por números negativos invertendo o sinal da desigualdade:

$$-2 < 3 \Rightarrow -2 \cdot (-3) > 3 \cdot (-3) \Rightarrow 6 > -9$$

$$16 > -4 \Rightarrow 16 : (-4) < -4 : (-4) \Rightarrow -4 < 1$$

Resolver uma inequação em x consiste em determinar todos os valores possíveis de x que tornam aquela desigualdade verdadeira.

Exercício resolvido

8. Resolva as inequações a seguir no universo dos números reais.
a) $20 - 5x > 14 - 8x$
b) $12 + 3x > 18 + 5x$
c) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{4-2x}{3} < \dfrac{5x-9}{6}$

Resolução:

a)
$20 - 5x > 14 - 8x$
$8x - 5x > 14 - 20$
$3x > -6$
$x > -2$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

b)
$12 + 3x > 18 + 5x$
$-5x + 3x > 18 - 12$
$-2x > 6$
$x < -3$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$

c)
$\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{4-2x}{3} < \dfrac{5x-9}{6}$
$\dfrac{3(x-1) - 2(4-2x)}{6} < \dfrac{5x-9}{6}$
$3x - 3 - 8 + 4x < 5x - 9$
$-5x + 3x + 4x < -9 + 3 + 8$
$2x < 2$
$x < 1$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

Inequações do 2º grau

Para resolver uma inequação do 2º grau, podemos recorrer ao estudo do sinal da função do 2º grau.

Exercício resolvido

9. Resolva as inequações no universo dos números reais.
a) $x^2 - 5x - 6 > 0$
b) $x^2 + 4x \leq 4(x + 1)$
c) $-x^2 + 5x > 0$

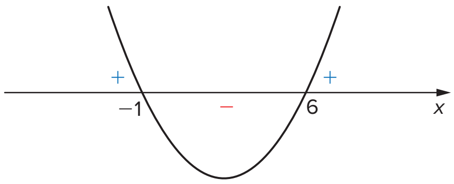
Resolução:

a) $x^2 - 5x - 6 > 0$

Considerando $y = x^2 - 5x - 6$, vamos obter as raízes:

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$.

Como $a = 1$, temos:

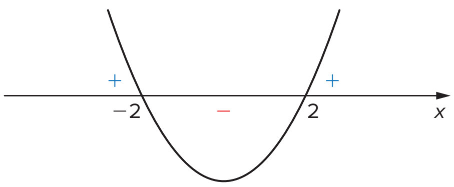


Observando o intervalo pedido na inequação: $x^2 - 5x - 6 > 0$, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1$ ou $x > 6\}$.

b) $x^2 + 4x \leqslant 4(x + 1) \Rightarrow x^2 - 4 \leqslant 0$

Considerando $y = x^2 - 4$, as raízes de $x^2 - 4 = 0$ são $x = -2$ ou $x = 2$;

Como $a = 1$, temos:

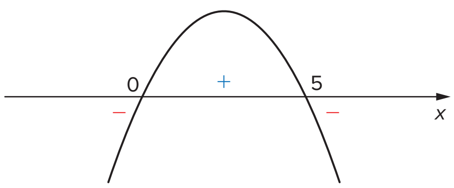


Observando o intervalo da inequação $x^2 - 4 \leqslant 0$, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$.

c) $-x^2 + 5x > 0$

Considerando $y = -x^2 + 5x$, as raízes de $-x^2 + 5x = 0$ são $x = 0$ ou $x = 5$.

Como $a = -1$, temos:



Observando o intervalo da inequação $-x^2 + 5x > 0$, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$.

! Atenção

Não devemos confundir o sinal da função com o sinal da variável. A função pode assumir valores negativos para valores positivos de x e vice-versa.

Inequações produto e quociente

São inequações com pelo menos dois fatores multiplicados ou divididos entre si, sempre comparados com o número zero.

Se nomearmos cada fator com as letras A, B e C, temos que elas podem ser, entre outras, da seguinte forma:

$A \cdot B \cdot C \geqslant 0 \qquad \dfrac{A}{B} < 0 \qquad \dfrac{A \cdot B}{C^2} > 0 \qquad \dfrac{A}{B \cdot C} \leqslant 0 \quad ...$

Inequações de grau maior que 2, se puderem ser fatoradas, serão resolvidas pelo mesmo processo que apresentaremos no exercício resolvido a seguir.

Exercício resolvido

10. Resolva as inequações no universo dos número reais.

a) $(2x - 6)(5 - x)(4x - 4) < 0$

b) $\dfrac{-x^2 + 8x - 7}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$

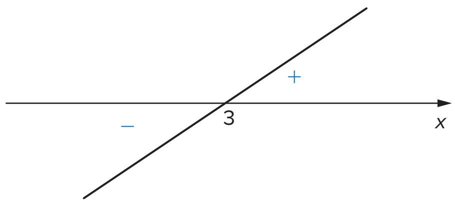
c) $\dfrac{-x + 8}{2x - 4} \geqslant 1$

Resolução:

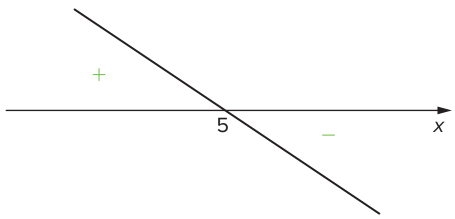
a) $(2x - 6)(5 - x)(4x - 4) < 0$

- Fazemos o estudo do sinal de todos os fatores:

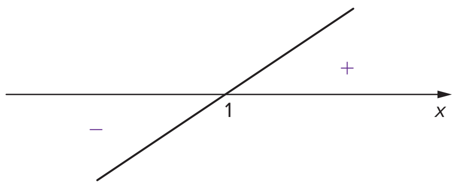
(A) $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$



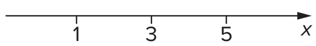
(B) $5 - x = 0 \Rightarrow x = 5$



(C) $4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$



- Transportamos todas as raízes para um único eixo que expresse todas as raízes de todos os fatores.



- Transportamos todos os estudos de sinais para um único quadro.

	1	3	5	x
A	−	−	+	+
B	+	+	+	−
C	−	+	+	+

- Utilizamos a regra de sinais do produto para obter a última linha.

	1	3	5	x
A	–	–	+	+
B	+	+	+	–
C	–	+	+	+
A · B · C	+	–	+	–

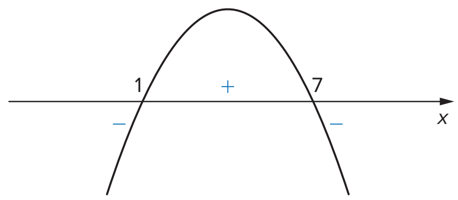
- Verificamos o sinal da inequação para analisar se desejamos os resultados positivos ou negativos (neste caso, a inequação indica "< 0") e, a partir do quadro, escrevemos a solução observando os intervalos do eixo x que correspondem ao resultado esperado:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$$

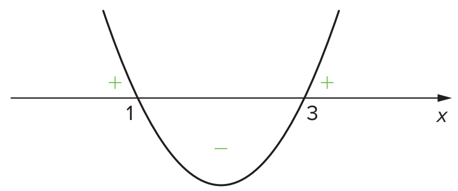
b) $\dfrac{-x^2 + 8x - 7}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$

- Fazemos o estudo do sinal do numerador e do denominador:

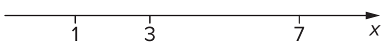
(A) $-x^2 + 8x - 7 = 0$



(B) $x^2 - 4x + 3 = 0$



- Transportamos todas as raízes para um único eixo que expresse todas as raízes de todos os fatores.



- Transportamos todos os estudos para um único quadro de sinais.

	1	3	7	x
A	–	+	+	–
B	+	–	+	+

- Utilizamos a regra de sinais da divisão e obtemos a última linha.

	1	3	7	x
A	–	+	+	–
B	+	–	+	+
$\frac{A}{B}$	–	–	+	–

- Impondo a condição de existência para garantir que o denominador da fração seja diferente de zero, $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq 3$, eliminamos no quadro de sinais esses valores com o símbolo de "não existe" ($\nexists$).

	1	3	7	x
A	–	+	+	–
B	+	–	+	+
$\frac{A}{B}$	–	–	+	–
	$\nexists$	$\nexists$		

- Verificamos o sinal da inequação para analisar se desejamos um resultado positivo ou negativo (neste caso, a inequação indica "$\geqslant 0$") e, a partir do quadro, escrevemos a solução, observando os intervalos do eixo x que correspondem ao resultado esperado, incluindo as raízes permitidas:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 7\}$$

c) $\dfrac{-x + 8}{2x - 4} \geqslant 1$

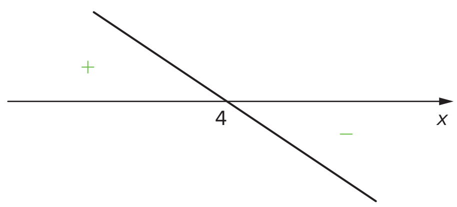
- Primeiro devemos ajustar a inequação para o procedimento comum, ou seja, comparando a divisão (ou multiplicação) com o número zero.

$$\frac{-x + 8}{2x - 4} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{-x + 8}{2x - 4} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow$$

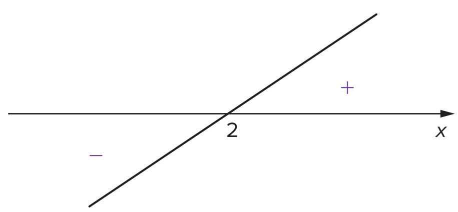
$$\Rightarrow \frac{-x + 8 - 2x + 4}{2x - 4} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{-3x + 12}{2x - 4} \geqslant 0$$

- Fazemos o estudo do sinal do numerador e do denominador.

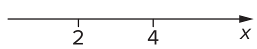
(A) $-3x + 12 = 0$



(B) $2x - 4 = 0$



- Transportamos todas as raízes para um único eixo que expresse todas as raízes de todos os fatores.



- Transportamos todos os estudos de sinais para um único quadro.

		2		4		x
A	+		+		−	
B	−		+		+	

- Utilizando a regra de sinais da divisão, obtemos a última linha.

		2		4		x
A	+		+		−	
B	−		+		+	
$\frac{A}{B}$	−		+		−	

- Impondo a condição de existência para que o denominador da fração seja diferente de zero, $2x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$, eliminamos esse valor.

		2		4		x
A	+		+		−	
B	−		+		+	
$\frac{A}{B}$	−	∄	+		−	

- Verificamos o sinal da inequação para analisar se desejamos um resultado positivo ou negativo (neste caso, a inequação indica "$\geqslant 0$") e escrevemos a solução, observando os intervalos do eixo x que correspondem ao resultado esperado, incluindo as raízes permitidas:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 4\}$$

! Atenção

Antes de "passar multiplicando" ou "passar dividindo" fatores em inequações, precisamos analisar o sinal desses fatores.

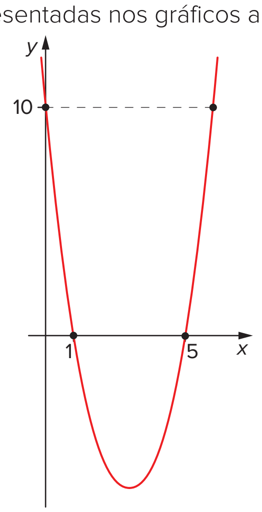
- Se $B > 0$, então $\frac{A}{B} \leqslant 1 \Rightarrow A \leqslant B$.
- Se $B < 0$, então $\frac{A}{B} \leqslant 1 \Rightarrow A \geqslant B$ (invertemos a desigualdade).

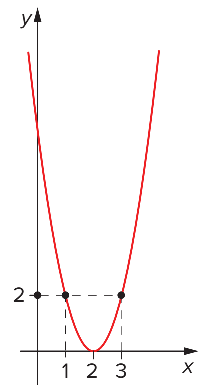
Revisando

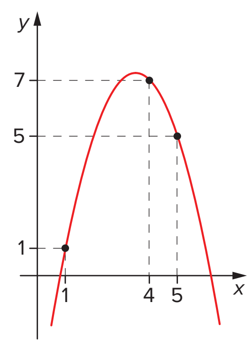
1. Determine os valores de m de modo que a equação do 2º grau $(m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m = 0$ tenha duas raízes reais e distintas.

2. Calcule k de modo que uma das raízes de $2x^2 - 16x + 3k + 9 = 0$ seja o triplo da outra.

3. Represente graficamente as funções a seguir, indicando o vértice de cada parábola, além de destacar os pontos onde o gráfico intersecta os eixos coordenados.
   a) $y = x^2 - 6x + 8$
   b) $y = x^2 - 6x + 9$
   c) $y = -x^2 + 9$
   d) $y = -2x^2 + 8x - 9$

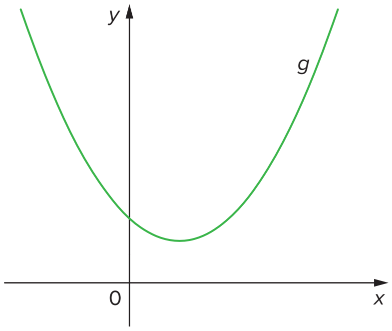
4. Determine a expressão de cada uma das funções representadas nos gráficos a seguir:
   a)


   b)


   c)


5. Qual é o conjunto imagem de cada função abaixo?
   a) $y = x^2 - 4x - 2$
   b) $y = x^2 - 2x + 5$
   c) $y = -x^2 + 1$
   d) $y = -2x^2 + 4x - 5$

6. **UPF-RS 2019** Na figura, está representado o gráfico de uma função quadrática g de domínio $\mathbb{R}$. Das expressões a seguir, aquela que pode definir a função g é:



a) $g(x) = x^2 + 2x + 3$
b) $g(x) = x^2 - x - 3$
c) $g(x) = -x^2 + x + 3$
d) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$
e) $g(x) = x^2 - 2x + 3$

7. Resolva a inequação $x^2 - 10x + 21 > 0$ no universo dos números reais.

8. Para quais valores de m a expressão $x^2 - 4x + m$ é sempre positiva?

9. Resolva a inequação produto $(x^2 - 6x + 8)(3x - 15) \leqslant 0$ no universo dos números reais.

10. Resolva no universo dos números naturais a inequação $\dfrac{x+5}{4x-4} \geqslant 1$.

Exercícios propostos

1. Resolva as equações a seguir, sendo $U = \mathbb{R}$.
   a) $2x + 5 = 13$
   b) $2 - 3x = 23$
   c) $3(x + 2) = 4(4 - x)$
   d) $3x + 2(5 - 3x) = 10$
   e) $2x = 2(x - 1)$
   f) $5(x - 2) + 10 = 5x$
   g) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{x+3}{10}$
   h) $\dfrac{x-2}{3} + 1 = \dfrac{x+5}{5}$
   i) $\dfrac{1-4x}{3} + \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{2x+4}{6}$
   j) $ax - 1 = a - x \quad (a \neq -1)$

2. Determine os valores de a e b de modo que $(a - 2)x = b + 3$ tenha:
   a) uma única solução;
   b) infinitas soluções;
   c) nenhuma solução.

3. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:
   a) $(x - 2)(x + 3)(x - 5) = 0$
   b) $(x + 3)(2x - 1) = 2x^2 + 7$
   c) $(2x - 1)(3x + 4) = (2x - 1)(x + 6)$
   d) $(3x - 2)(1 + 4x) = (x + 7)(3x - 2)$

4. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações do 2º grau:
   a) $x^2 - 4x + 3 = 0$
   b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
   c) $x^2 + x + 1 = 0$
   d) $x^2 - 5x = 0$
   e) $4x^2 - 25 = 0$
   f) $2x^2 + x - 1 = 0$
   g) $\dfrac{x^2+3}{4} + x = \dfrac{2x+4}{3}$
   h) $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{6}{x} = 4$

5. Para quais valores de m a equação do 2º grau $mx^2 + (2m - 1)x + m - 2 = 0$ não admite raízes reais?

6. Determine o valor de m para que a diferença entre as raízes da equação $x^2 - 10x + m + 9 = 0$ seja 6.

7. **UEA-AM 2020** Considere as equações I, II e III.
   I. $x + y + 3 = 0$
   II. $x^2 + 2y + 2 = 0$
   III. $x^2 + y^2 - 5 = 0$
   No plano cartesiano, as representações gráficas das equações I, II e III correspondem, respectivamente, a
   a) circunferência, parábola e reta.
   b) parábola, reta e circunferência.
   c) reta, circunferência e parábola.
   d) circunferência, reta e parábola.
   e) reta, parábola e circunferência.

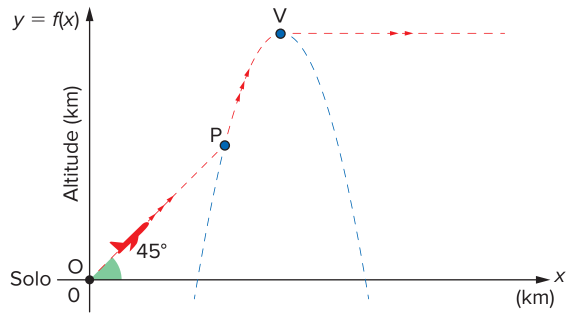
8. **UEA-AM 2020** A função real $f(x) = x^2 + kx + m$, com k e m números reais e $k \neq 0$, passa pelo ponto $P(-1, 0)$. Se $f(-k) = 2$, o valor de $f(k - m)$ é igual a
   a) 5.
   b) 6.
   c) 4.
   d) 3.
   e) 2.

9. **UFPR 2019** A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula $d(v) = \dfrac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.
   a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h?
   b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m?

10. UEG-GO 2019 As raízes da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são -1 e 3. Sabendo-se que o vértice é o ponto $(1, -4)$, os valores de a, b e c são, respectivamente:

a) $-1, -2$ e -3
b) $1, -2$ e -3
c) $-1, 2$ e 3
d) 1, 2 e 3
e) $-1, -2$ e 3

11. Unesp 2019 Em relação a um sistema cartesiano de eixos ortogonais com origem em O(0, 0), um avião se desloca, em linha reta, de O até o ponto P, mantendo sempre um ângulo de inclinação de 45° com a horizontal. A partir de P, o avião inicia trajetória parabólica, dada pela função $f(x) = -x^2 + 14x - 40$, com x e $f(x)$ em quilômetros. Ao atingir o ponto mais alto da trajetória parabólica, no ponto V, o avião passa a se deslocar com altitude constante em relação ao solo, representado na figura pelo eixo x.



Em relação ao solo, do ponto P para o ponto V, a altitude do avião aumentou

a) 2,5 km.
b) 3 km.
c) 3,5 km.
d) 4 km.
e) 4,5 km.

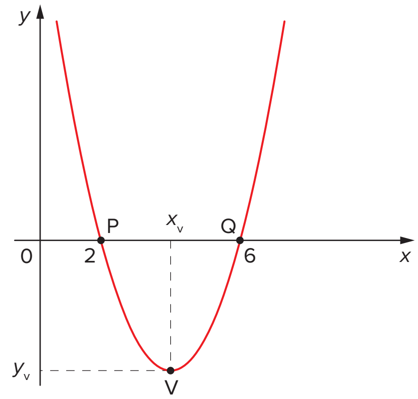
12. Enem Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa
b) baixa
c) média
d) alta
e) muito alta

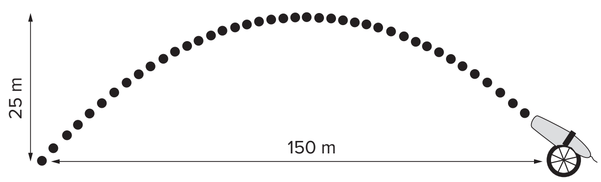
13. UEA-AM 2020 A figura mostra a representação gráfica, no plano cartesiano, da função $f(x) = x^2 - bx + c$, com b e c números reais não nulos.



Sabendo que os pontos P(2, 0), Q(6, 0) e (0, 12) pertencem à função $f(x)$ e que a abscissa do ponto V é igual a $\frac{b}{2}$, as coordenadas do ponto V são

a) $(-2, 4)$
b) $(4, -2)$
c) $(4, -4)$
d) $(-4, 4)$
e) $(2, -4)$

14. Enem PPL 2018 Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



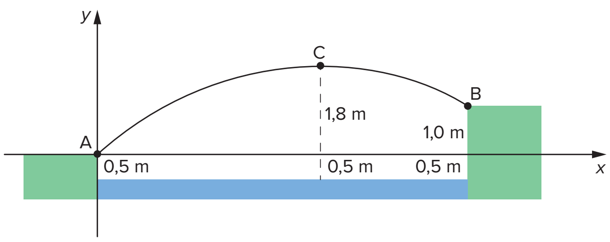
Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto (150, 0) e que o projétil atinge o solo no ponto (0, 0) do plano xy.
A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

a) $y = 150x - x^2$
b) $y = 3750x - 25x^2$
c) $75y = 300x - 2x^2$
d) $125y = 450x - 3x^2$
e) $225y = 150x - x^2$

15. **UEG-GO 2019** Em um jogo de futebol, um jogador chuta uma bola parada, que descreve uma parábola até cair novamente no gramado. Sabendo-se que a parábola é descrita pela função $y = 20x - x^2$, a altura máxima atingida pela bola é

a) 100 m
b) 80 m
c) 60 m
d) 40 m
e) 20 m

16. **Uerj 2019** Uma ponte com a forma de um arco de parábola foi construída para servir de travessia sobre um rio. O esquema abaixo representa essa ponte em um sistema de coordenadas cartesianas *xy*. Nele, os pontos A, B e C correspondem, respectivamente, à margem esquerda, à margem direita e ao ponto mais alto da ponte.



As distâncias dos pontos A, B e C até a superfície do rio são iguais, respectivamente, a 0,5 m, 1,5 m e 2,3 m.
Sabendo que o ponto C tem, nesse sistema, abscissa igual a 6 m, calcule, em metros, a largura do rio.

17. **Enem PPL 2019** No desenvolvimento de um novo remédio, pesquisadores monitoram a quantidade Q de uma substância circulando na corrente sanguínea de um paciente, ao longo do tempo *t*. Esses pesquisadores controlam o processo, observando que Q é uma função quadrática de *t*. Os dados coletados nas duas primeiras horas foram:

***t* (hora)**	0	1	2
Q (miligrama)	1	4	6

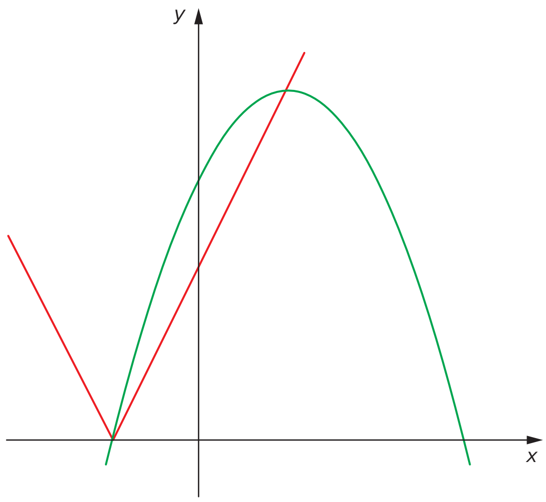
Para decidir se devem interromper o processo, evitando riscos ao paciente, os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que estará circulando na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado.
Nas condições expostas, essa quantidade (em miligrama) será igual a

a) 4.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

18. **Unicamp-SP 2020** Sabendo que *a* é um número real, considere a equação quadrática $2x^2 + ax + 10 = 0$. Se as soluções dessa equação são números inteiros, o módulo da soma das soluções é igual a

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.

19. **FICSAE-SP 2017** A função modular $f(x) = |ax + b|$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e a função quadrática $g(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 6$ têm dois pontos em comum, conforme o gráfico.



Um desses pontos corresponde à menor raiz da função *g* e o outro ponto corresponde ao maior valor dessa função. O produto *ab* vale

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10

20. **FCMSCSP 2019** Um agrônomo está analisando a influência do grau de compactação (G) do solo, em kg/dm^3, na altura (H), em cm, que determinada espécie de soja pode atingir durante certo período de tempo. Após a coleta de dados, o agrônomo obteve a seguinte relação entre a altura da planta e o grau de compactação do solo:

$$H(G) = -\frac{33}{2} + \frac{165}{2} \cdot G - \frac{125}{3} \cdot G^2, \text{ com } 0{,}50 \leqslant G \leqslant 1{,}50$$

Segundo essa relação, a altura máxima que essa espécie de soja pode atingir requer um grau de compactação do solo igual a

a) 1,25 kg/dm^3.
b) 1,37 kg/dm^3.
c) 0,99 kg/dm^3.
d) 1,13 kg/dm^3.
e) 0,66 kg/dm^3.

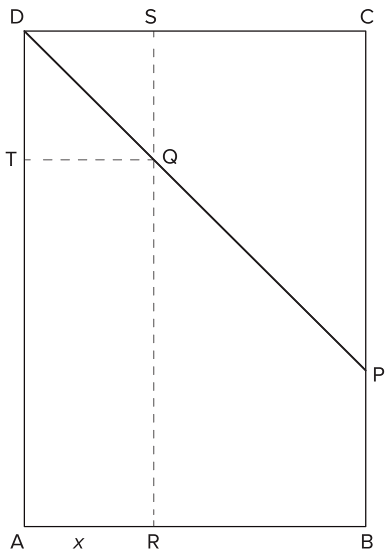
21. Unifesp 2016 A densidade populacional de cada distrito da cidade de South Hill, denotada por D (em número de habitantes por km^2), está relacionada à distância x, em quilômetros, do distrito ao centro da cidade. A fórmula que relaciona D e x é dada por $D = 5 + 30x - 15x^2$.

a) Um distrito, localizado no centro da cidade de São Paulo, tem densidade populacional de 16,5 hab/km^2. Comparando a densidade populacional do distrito que fica no centro da cidade de South Hill com a do distrito do centro da cidade de São Paulo, a segunda supera a primeira em y%. Calcule y.

b) Determine a que distância do centro da cidade de South Hill a densidade populacional é máxima. Qual é o valor dessa densidade máxima?

22. Fuvest-SP O retângulo ABCD, representado na figura, tem lados de comprimento AB = 3 e BC = 4. O ponto P pertence ao lado $\overline{BC}$ e BP = 1. Os pontos R, S e T pertencem aos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. O segmento $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e intercepta $\overline{DP}$ no ponto Q. O segmento $\overline{TQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$.

Sendo x o comprimento de $\overline{AR}$, o maior valor da soma das áreas do retângulo ARQT, do triângulo CQP e do triângulo DQS, para x variando no intervalo aberto]0, 3[, é



a) $\dfrac{61}{8}$

b) $\dfrac{33}{4}$

c) $\dfrac{17}{2}$

d) $\dfrac{35}{4}$

e) $\dfrac{73}{8}$

23. Uece 2022 A comissão de Formatura do Curso de Matemática contratou junto à empresa AIR.BR um avião para transportar um grupo de concludentes, nos seguintes termos:

I. O avião disponibiliza 90 assentos;

II. Para cada assento ocupado, a empresa recebe R$ 900,00 fixos mais um valor variável v;

III. O valor variável v é igual a $n \cdot$ R$ 50,00, onde n é o número de assentos desocupados.

Nessas condições, a maior receita que a empresa poderá obter está entre

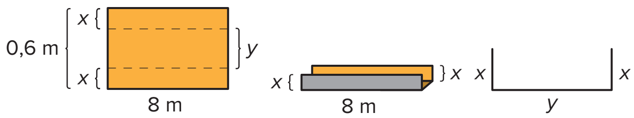
a) R$ 140 000,00 e R$ 150 000,00.

b) R$ 170 000,00 e R$ 180 000,00.

c) R$ 150 000,00 e R$ 160 000,00.

d) R$ 160 000,00 e R$ 170 000,00.

24. Uerj 2021 Para confeccionar uma calha, foi utilizada uma chapa retangular de 0,6 m × 8 m. A chapa foi dobrada no formato de um paralelepípedo retângulo de altura x, comprimento igual a 8 m, e largura y, conforme as imagens a seguir.



Para que esse paralelepípedo tenha volume máximo, a altura x, em centímetros, deve ser igual a:

a) 10

b) 12

c) 15

d) 17

25. Resolva as inequações abaixo, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $2x + 2(-3 - 3x) \geqslant 10$

b) $2x < 2(x - 1)$

c) $5(x - 2) + 12 \geqslant 5x$

d) $\dfrac{x-3}{4} \leqslant \dfrac{x+3}{10}$

e) $\dfrac{x-2}{3} + 1 > \dfrac{x+5}{5}$

f) $x^2 - 8x + 12 \leqslant 0$

g) $-x^2 + 10x - 25 \leqslant 0$

h) $x^2 - 9 \geqslant 0$

i) $x^2 - 3x + 10 \leqslant 0$

j) $-5x + x^2 < 0$

26. Quais são os valores de k que tornam verdadeira a inequação $x^2 + (2k + 1)x + k^2 > 0$ para todo x real?

27. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $(2x + 10)(3 - x)(4x - 4) < 0$

b) $(x^2 + x + 1)(2x - 3) > 0$

c) $(5x - x^2)(x^2 - 2x) \geqslant 0$

d) $x^3 - x > 0$

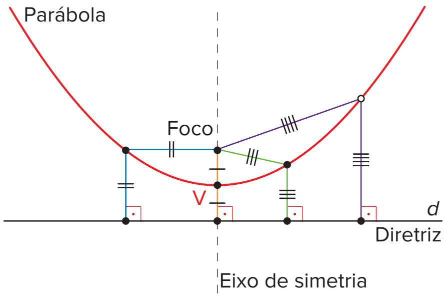
e) $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 6x + 9} \leqslant 0$

f) $\dfrac{x + 29}{x + 2} \geqslant -x + 11$

Texto complementar

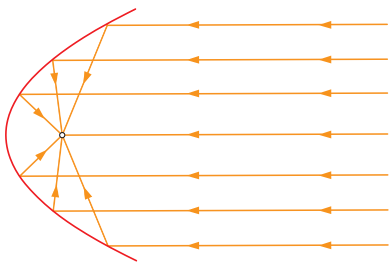
Aplicações da função do 2º grau

Definição de parábola: dada uma reta (diretriz) e um ponto fora dela (foco), uma parábola é o conjunto de pontos cuja distância até a diretriz é igual à distância até o foco.



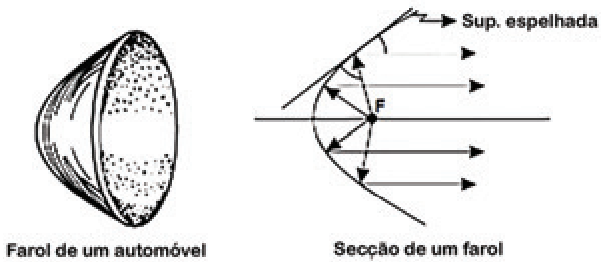
Espelhos e antenas

Uma das propriedades mais importantes da parábola é muito utilizada na óptica, no estudo de espelhos. Quando um feixe de raios de luz ou ondas eletromagnéticas, paralelos ao eixo de simetria, colidem com o espelho côncavo de formato parabólico, esses raios são refletidos na direção do foco da parábola. A partir dessa propriedade, são construídas as antenas parabólicas e de transmissão via satélite, sendo o receptor localizado no foco da parábola.



Chris Redan/Shutterstock.com

Uma lanterna ou farol de carro ou moto (ambos construídos com lâmpada comum e espelho, e não com *led*) utilizam a mesma propriedade, mas no sentido inverso. Os raios que saem do foco (lâmpada) para o espelho ao fundo são refletidos para a frente paralelamente ao eixo de simetria.



Reprodução

Esquema do funcionamento de um farol com a forma parabólica.

Trombax/Shuterstock.com

Farol de uma motocicleta com a forma de uma parábola.

Estruturas de pontes

A forma da parábola também é muito utilizada na construção de pontes. Estudos de engenharia concluíram que seu formato distribui melhor os esforços exigidos, sem sobrecarregar a estrutura.

Iakov Filimonov/Alamy/Fotoarena

Vista panorâmica da estrutura em arco parabólico da ponte ferroviária Viaduc de Garabit, que atravessa o rio Truyere, em Auvergne, França. Foto de 2020.

nito/Shutterstock.com

Edifício modernista Masia Freixa, com estrutura formada por arcos e abóbadas. A construção está localizada no Parque de Sant Jordi, em Terrassa, Espanha. Foto de 2017.

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

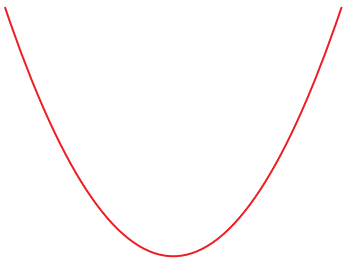
$$\text{Fórmula resolutiva: } \begin{cases} \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \text{duas raízes reais e distintas.} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{uma raiz dupla ou duas raízes reais e iguais.} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{nenhuma raiz real.} \end{cases} \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \end{cases}$$

$$\text{Sendo } x_1 \text{ e } x_2 \text{ as raízes da equação, temos: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

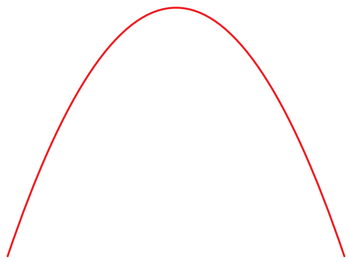
Função do 2º grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a > 0$



$a < 0$



Raízes ou zeros: são os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

Vértice: é o ponto de maior ou menor ordenada (dependendo da concavidade da parábola):

$$V(x_V, y_V) \rightarrow \begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

Imagem da função: $\begin{cases} \text{se } a > 0, \text{ a imagem será Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\} \\ \text{se } a < 0, \text{ a imagem será Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\} \end{cases}$

Forma fatorada: $\begin{cases} f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ onde } x_1 \text{ e } x_2 \text{ são as raízes da função} \\ f(x) = y_V + a(x - x_V)^2, \text{ onde } x_V \text{ e } y_V \text{ são as coordenadas do vértice} \end{cases}$

Quer saber mais?

Sites

FRAZÃO, Dilva. Bháskara. *eBiografia*, 19 dez. 2019. Disponível em: www.ebiografia.com/bhaskara/.

Você sabia que o método de resolução de equações do 2º grau é conhecido como fórmula de Bháskara apenas no Brasil? Conheça um pouco mais a história desse matemático indiano. Acesso em: 25 jul. 2022.

LIEB FILHO, Flavio; COSTA, Roberto. Variações de *a*, *b* e *c* na função do 2º grau. *GeoGebra*. Disponível em: www.geogebra.org/m/g4eezcdm.

Visualize as mudanças que os coeficientes de uma função do 2º grau causam no gráfico da função. Acesso em: 25 jul. 2022.

Livro

STEWART, Ian. *Os números da natureza*. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

Nesse livro discutem-se aplicações e padrões matemáticos encontrados na natureza.

Exercícios complementares

1. Resolva as equações em $\mathbb{R}$:
   a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
   b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
   c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
   d) $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$

2. Determine os valores de m de modo que a equação do 2º grau $mx^2 + (m + 1)x + m + 1 = 0$ tenha duas raízes reais e iguais.

3. **ESPM-SP 2019** O conjunto solução da equação em x: $x(x - 2) + a(x - 2) = 0$, no campo dos reais é $S = \{b\}$. O valor de $a - b$ é igual a:
   a) 0
   b) 2
   c) -2
   d) -4
   e) 4

4. **Uece 2019** Quantos são os valores inteiros que o número real k pode assumir, de modo que as raízes da equação $x^2 - 3x + k = 0$ sejam reais não nulas e de sinais contrários, e que a equação $x^2 + kx + 1 = 0$ não tenha raízes reais?
   a) 3.
   b) 1.
   c) 0.
   d) 2.

5. **CMRJ 2019** A equação do segundo grau cujas raízes são iguais ao triplo do valor das raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$ é
   a) $x^2 + 3bx + 9c = 0$
   b) $x^2 + 3bx + 3c = 0$
   c) $\dfrac{x^2}{3} + 3bx + 9c = 0$
   d) $3x^2 + 3bx + 3c = 0$
   e) $3x^2 + 3bx + 9c = 0$

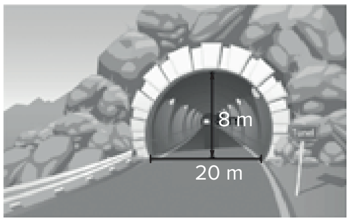
6. **FGV-SP (Adapt.)** As duas raízes da equação $x^2 - 63x + k = 0$ na incógnita x são números positivos e primos. O total de valores distintos que k pode assumir é
   a) 4
   b) 3
   c) 2
   d) 1
   e) 0

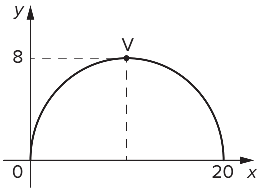
7. **UFPR 2020** Suponha que, num período de 45 dias, o saldo bancário de uma pessoa possa ser descrito pela expressão

$$S(t) = 10t^2 - 240t + 1400$$

sendo $S(t)$ o saldo, em reais, no dia t para $t \in [1, 45]$. Considerando os dados apresentados, é correto afirmar que:
   a) o saldo aumentou em todos os dias do período.
   b) o saldo diminuiu em todos os dias do período.
   c) o menor saldo no período ocorreu em $t = 12$.
   d) o menor saldo no período foi R$ 12,00.
   e) o saldo ficou positivo em todos os dias do período.

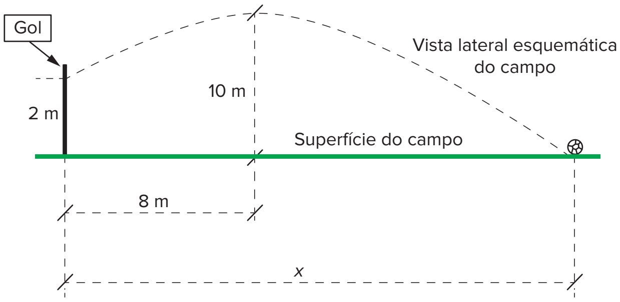
8. **Cefet-MG 2020** O corte transversal de um túnel, de pista única, em que a base tem 20 m de largura e a altura máxima é de 8 m, tem o formato de um arco de parábola, conforme representado na ilustração e no gráfico a seguir, sendo V o vértice da parábola.





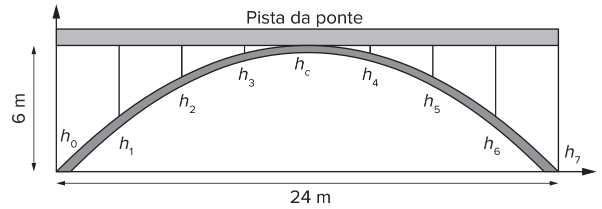
Um caminhão, cujo formato do corte transversal de sua carroceria é um retângulo, tem altura do chão até seu ponto mais alto igual a 6 m. O ponto mais alto desse caminhão está em sua carroceria. Para que ele consiga passar no túnel, a maior largura possível para a carroceria do caminhão, dentre as opções abaixo, em metros, é
   a) 6
   b) 8
   c) 11
   d) 13

9. **CMRJ 2020** Ao treinar chutes a gol, o atleta de futebol Pedro, num chute impressionante, fez com que uma das bolas utilizadas no treino descrevesse uma trajetória em forma de arco de parábola, desde o ponto em que recebeu o chute, no gramado, até ultrapassar completamente a linha do gol, a uma altura de 2 m do chão.



A altura máxima atingida pela bola nesse trajeto foi de 10 m e, nesse instante, sua distância horizontal do gol era de 8 m. A distância horizontal x entre o gol e a bola no momento em que ela recebeu o chute era
   a) menor que 17 m.
   b) igual a 17 m.
   c) entre 17 e 18 m.
   d) igual a 18 m.
   e) maior que 18 m.

10. UEL-PR 2020 Uma ponte, composta de pista, colunas e base de sustentação, será construída conforme a figura a seguir.



A pista da ponte é paralela ao solo e é apoiada por colunas de sustentação h_0, h_1, h_2, h_3, h_c, h_4, h_5, h_6 e h_7 perpendiculares à pista e que possuem duas extremidades: na pista e na base de sustentação, a qual possui formato parabólico, cujo lugar geométrico coincide com parte do gráfico de uma função polinomial de segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Suponha que as colunas têm espaçamentos iguais entre elas, que o comprimento da coluna central h_c é zero, que a pista da ponte tem 24 metros de comprimento e que sua altura é de 6 metros em relação ao solo.

Admitindo que as espessuras das colunas, da pista, do solo e da base de sustentação são desprezíveis, determine os comprimentos das colunas de sustentação h_1 e h_5.

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

11. UEPG-PR 2018 Ao construir o gráfico de uma função quadrática $f(x)$, um aluno nota que o ponto $(4, -4)$ é o vértice da parábola e o ponto $(0, 12)$ pertence ao gráfico. Em relação a essa função $f(x)$, assinale o que for correto.

01 $f(1) - f(7) = f(0) - f(8)$

02 $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{7}{2}\right)$

04 $f(x) > 0$ para x no intervalo real $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$

08 $f(x) < 2$ para todo x real

Soma:

12. Unicamp-SP 2017 Sejam C um número real e $f(x) = x^2 - 4x + C$ uma função quadrática definida para todo número real x. No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$.

a) Determine C no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \leq x \leq 4$.

b) Considere os pontos de coordenadas $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, onde a e b são números reais com $a < b$. Sabendo que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M(1, C)$, determine a e b.

13. Unesp 2017 Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que $f(x)$ pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a

a) -12.
b) -6.
c) 10.
d) -5.
e) -9.

14. Unicamp-SP Durante um torneio paraolímpico de arremesso de peso, um atleta teve seu arremesso filmado. Com base na gravação, descobriu-se a altura (y) do peso em função de sua distância horizontal (x), medida em relação ao ponto de lançamento. Alguns valores da distância e da altura são fornecidos na tabela a seguir.

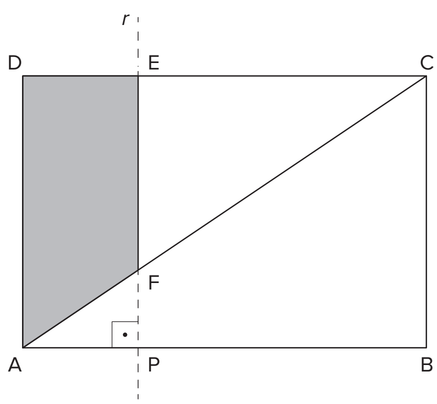
Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória (parabólica) do peso.

a) Determine os valores de a, b e c.

b) Calcule a distância total alcançada pelo peso nesse arremesso.

15. UFRGS 2020 Considere um retângulo ABCD, de lados AB = 12 e AD = 8, e um ponto P construído sobre o lado $\overline{AB}$. Traçando a reta r perpendicular ao lado $\overline{AB}$ que passa pelo ponto P, determina-se o polígono ADEF, em que E e F são pontos de interseção de r com os segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, como mostra a figura abaixo.



Tomando x como a medida do segmento $\overline{AP}$, a função A(x) que expressa a área de ADEF em função de x, entre as alternativas abaixo, é

a) $A(x) = 8x - \frac{x^2}{6}$, para $0 \leq x \leq 12$.

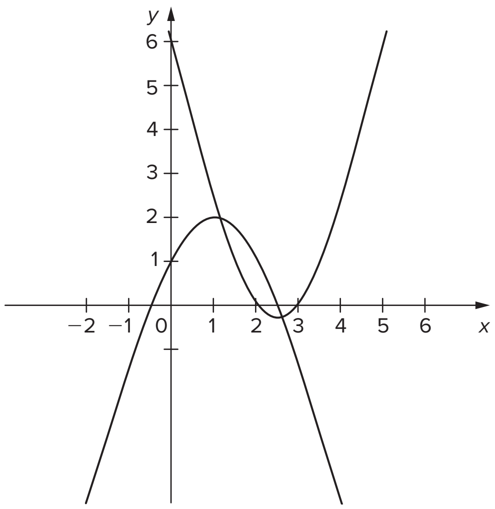
b) $A(x) = 8x - \frac{2x^2}{3}$, para $0 \leq x \leq 12$.

c) $A(x) = 16x - \frac{2x^2}{3}$, para $0 \leq x \leq 12$.

d) $A(x) = 8x - \frac{x^2}{3}$, para $0 \leq x \leq 12$.

e) $A(x) = 8x - \frac{3x^2}{4}$, para $0 \leq x \leq 12$.

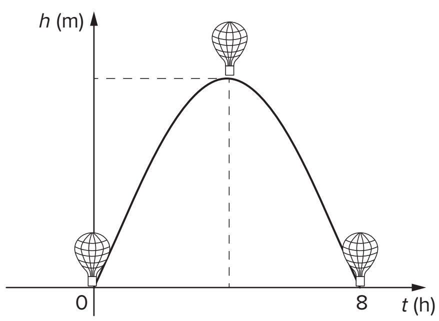
16. Cefet-MG 2019 Os gráficos das funções reais *f* e *g* definidas por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ estão representados na figura a seguir.



Sobre essas funções, é correto afirmar que se

a) $2 \leq x \leq 3$, então $f(x) \leq g(x)$.
b) $x > 0$, então $f(x) \leq 0$.
c) $x < 1$, então $f(x) > g(x)$.
d) $-2 < x < 2$, então $f(x) \neq g(x)$.

17. IFPE 2019 Um balão de ar quente sai do solo às 9h da manhã (origem do sistema cartesiano) e retorna ao solo 8 horas após sua saída, conforme demonstrado a seguir. A altura *h*, em metros, do balão, está em função do tempo *t*, em horas, através da fórmula $h(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 6t$.



SILVA, Marcos Noé Pedro da. *Exercícios sobre gráfico da função de 2º grau*. Uol notícias. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-grafico-funcao-2-o-grau.htm. Acesso 3 out. 2018 (adaptado).

A altura máxima atingida pelo balão é de

a) 21 m
b) 36 m
c) 8 m
d) 4 m
e) 12 m

18. ESPM-SP 2019 Seja *f* uma função real tal que: $f(x) = -x^2 + k \cdot x + 3k$, com $k > 0$. Sabe-se que, para $x \leq 0$, o valor máximo de *f* é igual a 12. Podemos concluir que, para $x > 0$, seu valor máximo é:

a) 16
b) 17
c) 14
d) 13
e) 18

19. Col. Naval-RJ 2019 Seja $y = mx^2 + (m - 1)x - 16$ um trinômio do 2º grau na variável '*x*' e com '*m*' pertencente ao conjunto dos números reais. Sabendo-se que as raízes r_1 e r_2 de *y* são tais que $r_1 < 1 < r_2$, a soma dos possíveis valores inteiros e distintos de '*m*' é:

a) 36
b) 42
c) 49
d) 53
e) 64

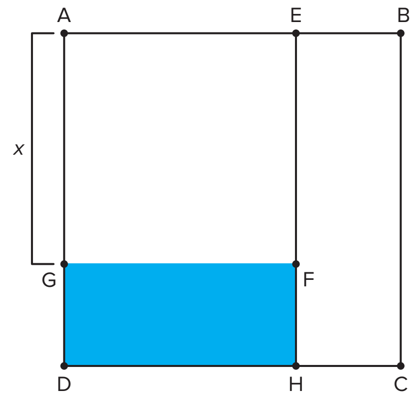
20. Unicamp-SP 2014 Sejam *a* e *b* reais. Considere as funções quadráticas da forma $f(x) = x^2 + ax + b$, definidas para todo *x* real.

a) Sabendo que o gráfico de $y = f(x)$ intercepta o eixo *y* no ponto (0, 1) e é tangente ao eixo *x*, determine os possíveis valores de *a* e *b*.
b) Quando $a + b = 1$, os gráficos dessas funções quadráticas têm um ponto em comum. Determine as coordenadas desse ponto.

21. Fuvest-SP No plano cartesiano O*xy* considere a parábola P de equação $y = -4x^2 + 8x + 12$ e a reta *r* de equação $y = 3x + 6$. Determine:

a) Os pontos A e B, de intersecção da parábola P com o eixo coordenado O*x*, bem como o vértice V da parábola P.
b) O ponto C, de abscissa positiva, que pertence à interseção de P com a reta *r*.
c) A área do quadrilátero de vértices A, B, C e V.

22. Uerj 2022 A figura a seguir representa um quadrado ABCD de lado igual a 5 cm. Nele, observa-se o quadrado AEFG, cujo lado mede *x* cm, sendo $0 < x < 5$.



A área máxima que o retângulo DGFH pode assumir, em cm^2, é igual a

a) 5,75
b) 6,25
c) 7,45
d) 8,15

23. FGV-SP Um hotel tem 30 quartos para casais. O gerente verificou que, cobrando R$ 120,00 por dia de permanência de cada casal o hotel permanecia lotado e cada aumento de R$ 5,00 na diária fazia com que um quarto ficasse vazio.

a) Chamando de *x* o preço da diária e *y* o número de quartos ocupados, qual é a relação entre *x* e *y*?
b) Qual é o preço que deve ser cobrado por dia para maximizar a receita do hotel?

24. UFPR 2017 Um agricultor tem arame suficiente para construir 120 m de cerca, com os quais pretende montar uma horta retangular de tamanho a ser decidido.

a) Se o agricultor decidir fazer a horta com todos os lados de mesmo tamanho e utilizar todo o arame disponível cercando apenas três dos seus lados, qual será a área da horta?

b) Qual é a área máxima que a horta pode ter se apenas três dos seus lados forem cercados e todo o arame disponível for utilizado?

25. Fuvest-SP 2022 Uma empresa construiu um poço para armazenar água de reuso. O custo para construir o primeiro metro foi de R$ 1000,00, e cada novo metro custou R$ 200,00 a mais do que o imediatamente anterior. Se o custo total da construção foi de R$ 48 600,00, a profundidade do poço é:

a) 15 m.
b) 18 m.
c) 21 m.
d) 24 m.
e) 27 m.

26. Verifique quantos são os números inteiros e positivos que satisfazem a sentença seguir:

$$\frac{1}{x-10} < \frac{1}{50-2x}$$

27. EPCar-MG 2019 Sobre a inequação $\frac{3x^2+2x}{x} \geqslant x^3$, considerando o conjunto universo $U \subset \mathbb{R}$, é INCORRETO afirmar que possui conjunto solução

a) unitário se $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x = 2k,\, k \in \mathbb{Z}_+^*\}$
b) vazio se $U = [2, +\infty[$
c) com infinitas soluções se $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k + 1,\, k \in \mathbb{Z}\}$
d) com infinitas soluções se $U = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \leqslant 2\}$

BNCC em foco

Use as informações a seguir para responder às questões de **1** a **3**.

Uma casa de espetáculos cobra, na entrada, R$ 50,00 por pessoa. Com esse valor, 300 pessoas assistem ao *show* em uma certa noite. Para aumentar a arrecadação, os responsáveis pelo local decidiram aumentar o preço do ingresso para R$ 55,00 por pessoa e, nesse caso, 290 espectadores compareceram. Sabe-se que o número de pagantes por noite varia linearmente em relação ao valor do ingresso.

EM13MAT302

1. Qual é a expressão que fornece o número de pessoas (N) em função do preço (p), em reais, do ingresso?

a) $N = 400 - 2p$
b) $N = 200 + 2p$
c) $N = 400 - 10p$
d) $N = 200 + 3p$

EM13MAT302

2. Qual é a expressão que fornece o valor arrecadado (V) em função do preço (p), em reais, do ingresso?

a) $V = 400p - p^2$
b) $V = 400p - 2p^2$
c) $V = 400p - 10p^2$
d) $V = 200 + 3p^2$

EM13MAT503

3. Qual deve ser o valor do ingresso para que a arrecadação seja a maior possível?

a) R$ 100,00
b) R$ 80,00
c) R$ 120,00
d) R$ 150,00

luchschenF/Shutterstock.com

Placa de Petri com colônia de micróbios patológicos.

FRENTE 1

CAPÍTULO

6

Função exponencial

Os fenômenos que podem ser interpretados por meio de uma função exponencial são aqueles que apresentam crescimento ou decrescimento em progressão geométrica, como o crescimento bacteriano em condições ideais (como mostra a cultura em uma placa de ágar), o decaimento de elementos radioativos, o aumento no número de infectados na fase inicial de uma epidemia, entre outros. Por isso, a aplicação de conceitos de função exponencial em contextos como esses permite a análise do comportamento atual e futuro desses fenômenos, o que é útil para diversas áreas do conhecimento.

Estudaremos neste capítulo equações e funções exponenciais, gráficos dessas funções e outros fundamentos desse importante conceito.

Revisão de potenciação

Potência de expoente natural

Considerando um número a, real, e n, um número natural, com $n \geqslant 2$, a potência de base a e expoente n é o número a^n, de tal forma que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Potência de expoente inteiro negativo

Considerando, agora, um número a real, não nulo, e um número n inteiro, a potência de base a e expoente $-n$ é o número a^{-n}, que é o inverso de a^n. Ou seja:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potência de expoente racional

Vamos agora relembrar o significado que pode ser dado à potência a^t, quando t é um número racional. Considerando que $t = \frac{m}{n}$, sendo m um número inteiro, e n, um número natural ($n \geqslant 1$), temos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\text{, com } a \text{ real positivo}$$

Propriedades

Essas propriedades são válidas para as situações expressas anteriormente, considerando dois números reais a e b, e dois números reais não nulos m e n. Observe:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \; (a \neq 0)$

III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

IV. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \; (b \neq 0)$

Equações exponenciais

Equações exponenciais são equações em que a incógnita aparece no expoente de pelo menos uma de suas potências. Por exemplo:

a) $2^x = 8$

b) $3^x - 1 = 5$

c) $5^{x-3} + 25 = 0$

Veremos mais adiante que as funções exponenciais são injetoras, isto é, para cada resultado de uma potência, só existe um expoente possível, ou seja, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Exemplos:

a) $2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Exercício resolvido

1. Resolva as equações abaixo:

a) $4 \cdot 8^x = 32$ **b)** $9^x = \sqrt[4]{27}$ **c)** $5^x \cdot 3^x = 7^x$

Resolução:

a) $4 \cdot 8^x = 32 \Rightarrow 2^2 \cdot (2^3)^x = 2^5 \Rightarrow 2^2 \cdot 2^{3x} = 2^5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{2+3x} = 2^5 \Rightarrow 2 + 3x = 5 \Rightarrow x = 1$

Portanto, S = {1}.

b) $9^x = \sqrt[4]{27} \Rightarrow (3^2)^x = \sqrt[4]{3^3} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{3}{4}} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8}$

Portanto, $S = \left\{\frac{3}{8}\right\}$.

c) $5^x \cdot 3^x = 7^x \Rightarrow \frac{5^x \cdot 3^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x} \Rightarrow \left(\frac{5 \cdot 3}{7}\right)^x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{5 \cdot 3}{7}\right)^x = \left(\frac{5 \cdot 3}{7}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, S = {0}.

Resolução de equações exponenciais com substituição de variáveis

Para resolver algumas equações exponenciais, como aquelas que apresentam adição ou subtração de potências, pode ser interessante utilizar uma variável auxiliar.

Saiba mais

A soma de potências de mesma base não é necessariamente igual à potência de mesma base elevada à soma dos expoentes. Além disso, a soma de potências de mesmo expoente não é necessariamente igual à potência cuja base é a soma das bases dos termos. Por exemplo, temos:

$$2^2 + 2^3 \neq 2^5 \qquad 5^2 + 3^2 \neq 8^2$$

Exercício resolvido

2. Resolva as equações abaixo:

a) $2^x + 2^{x+3} = 36$

b) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

c) $4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x = 0$

Resolução:

a) $2^x + 2^{x+3} = 36 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^3 = 36$

Fazendo $2^x = t$ e substituindo na equação, temos:

$$t + 8t = 36 \Rightarrow t = 4$$

Logo, $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$. Portanto, S = {2}.

Também podemos resolver essa equação sem utilizar a variável auxiliar:

$2^x + 2^x \cdot 2^3 = 36 \Rightarrow 2^x(1 + 8) = 36 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2$

b) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

Fazendo $3^x = t$, temos $(3^x)^2 = (t)^2 \Rightarrow 3^{2x} = t^2$ e, substituindo na equação, obtemos:

$$t^2 - 8t - 9 = 0 \Rightarrow t = 9 \text{ ou } t = -1$$

Logo, $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$ ou $3^x = -1$ (não convém).

Portanto, S = {2}.

c) $4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x = 0 \Rightarrow (2^2)^x - 2 \cdot (2 \cdot 3)^x + (3^2)^x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x} = 0$

Dividindo ambos os membros da equação por 3^{2x}:

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 2 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = 0$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, temos $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t^2$ e, substituindo na equação, obtemos:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Logo, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Portanto, $S = \{0\}$.

! Atenção

Se a base de uma potência é positiva, seu resultado sempre será positivo. Isto é, para todo número real a, temos $a > 0 \Rightarrow a^x > 0$.
Verifique os exemplos abaixo, com base igual a 2:

a) $2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$

b) $2^0 = 1 > 0$

c) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 0$

d) $2^{10} = 1\,024 > 0$

Funções exponenciais

Função exponencial é toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = (0{,}8)^x$

c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = \sqrt{2}^x$

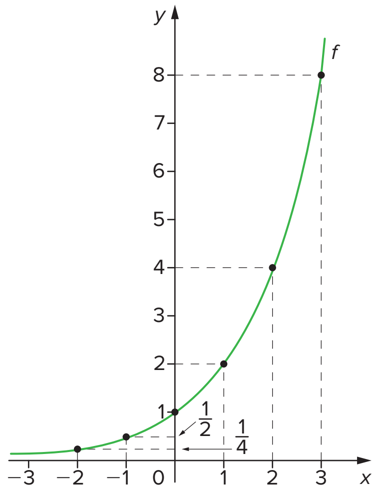
Gráfico da função exponencial

No estudo do gráfico das funções exponenciais, dividimos as funções em dois casos: $0 < a < 1$ e $a > 1$.

Base maior do que 1 ($a > 1$)

Tomemos, como exemplo, a função exponencial $f(x) = 2^x$. Vamos atribuir alguns valores para x, calcular os respectivos valores de y e construir o gráfico da função:

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Com base no gráfico, notamos que a função f:

- é crescente, ou seja, aumentando os valores de x, os valores de y também aumentam. Também podemos expressar isso da seguinte maneira:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- é injetora: diferentes valores de x correspondem a diferentes valores de y:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- tem como conjunto imagem os números reais positivos:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$$

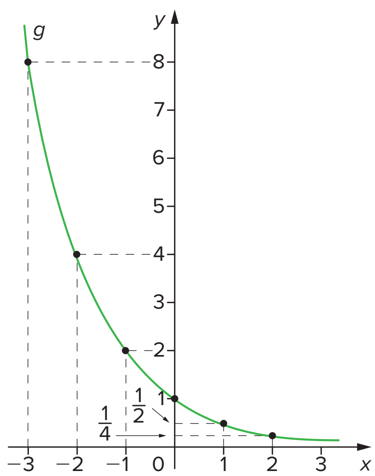
- é sobrejetora, ou seja, para todo $y \in \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$, existe $x \in D(f)$ tal que $f(x) = y$.

Essas quatro características valem para todas as funções exponenciais cuja base é maior do que 1.

Base entre 0 e 1 ($0 < a < 1$)

Como exemplo, tomemos a função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Novamente iremos atribuir valores para x, calcular os respectivos valores de y e construir o gráfico da função:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = g(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Comparando o gráfico da função f e o gráfico da função g, percebemos que este último é o resultado da reflexão, do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo y.

Observando o gráfico, notamos que a função g:

- é decrescente, ou seja, aumentando os valores de x, os valores de y diminuem:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

- é injetora: diferentes valores de x correspondem a diferentes valores de y.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

- tem como conjunto imagem os números reais positivos:

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R}_+^*$$

- é sobrejetora: ou seja, para todo $y \in \text{Im}(g) = \mathbb{R}_+^*$, existe $x \in \text{D}(g)$ tal que $g(x) = y$.

Assim como no caso anterior, essas quatro características valem para toda função exponencial de base entre 0 e 1.

! Atenção

- A principal diferença entre um gráfico e outro é o fato de um ser crescente e o outro decrescente. Isso ocorre pois funções exponenciais de base maior do que 1 são crescentes e funções exponenciais de base entre 0 e 1 são decrescentes. Portanto, observe com cuidado a base da exponencial antes de construir e analisar gráficos de funções exponenciais.
- A função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ também pode ser escrita como $g(x) = 2^{-x} = f(-x)$, o que justifica a alteração do sinal do x no quadro e a reflexão em torno do eixo y no gráfico.
- Perceba que, no gráfico de $f(x) = 2^x$, quanto menores são os valores de x, mais próximo o gráfico fica do eixo x, mas sem nunca cruzar esse eixo, mantendo-se sempre acima dele. Da mesma maneira, no gráfico de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, quanto maiores são os valores de x, mais próximo o gráfico fica do eixo x, sem nunca o cruzar. Por isso, dizemos que a reta $y = 0$, que coincide com o eixo x, é assíntota das funções f e g, e também de qualquer função exponencial da forma $f(x) = a^x$.

Exercícios resolvidos

3. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = 3^x$, responda:

a) Qual é o valor de $f(-2)$?

b) Para qual valor de $x \in \mathbb{R}$ vale $f(x) = 81$? Esse valor é único? Justifique sua resposta.

Resolução:

a) $f(-2) = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

b) $f(x) = 81 \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$

Esse valor é único, pois toda função exponencial é injetora.

4. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq b$, ambos positivos e diferentes de 1, considere as funções , $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = b^x$.

a) Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ vale $f(x) = g(x)$?

b) O que o resultado do item anterior implica em relação à interseção entre os gráficos de duas funções exponenciais de bases distintas?

Resolução:

a) $f(x) = g(x) \Rightarrow a^x = b^x$

Como b é diferente de zero, podemos dividir ambos os membros por b^x, obtendo:

$$\frac{a^x}{b^x} = \frac{b^x}{b^x} \Rightarrow \frac{a^x}{b^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

Nas condições do enunciado, temos que $\frac{a}{b}$ é tal que $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{b} > 0$ e $\frac{a}{b} \neq 1$. Logo, a equação acima implica $x = 0$.

b) Isso significa que os gráficos de duas funções exponenciais de bases distintas se intersectam apenas no ponto (0, 1).

Translação e reflexão de gráficos

Vimos em capítulos anteriores os gráficos de funções do 1º e 2º graus, além do gráfico da função exponencial. Vamos apresentar algumas alterações que podem ajudar na construção e na interpretação de gráficos.

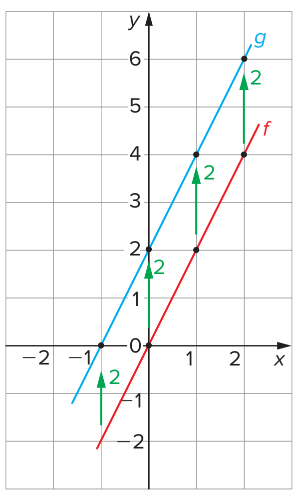
Translação vertical

Adicionando uma constante à lei de uma função conhecida, seu gráfico sofrerá uma translação vertical, mantendo seu formato. Isso significa que, dada uma função f, o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$, tem o mesmo formato do gráfico f, mas transladado verticalmente. Se $k > 0$, desloca-se para cima; se $k < 0$, para baixo.

Exemplo:

- Sendo $f(x) = 2x$, vamos obter o gráfico de $g(x) = 2x + 2$. Perceba que $g(x) = f(x) + 2$.

x	−1	0	1	2
$f(x)$	−2	0	2	4
$g(x) = f(x) + 2$	0	2	4	6



Translação horizontal

Substituindo as ocorrências de x na lei de uma função por $x + k$, $k \in \mathbb{R}$, o gráfico sofrerá uma translação horizontal, mantendo seu formato. Isso significa que, dada uma função f, o gráfico da função g definida por $g(x) = f(x + k)$ tem o mesmo formato do gráfico f, mas transladado horizontalmente. Se $k > 0$, desloca-se para a esquerda; se $k < 0$, para a direita.

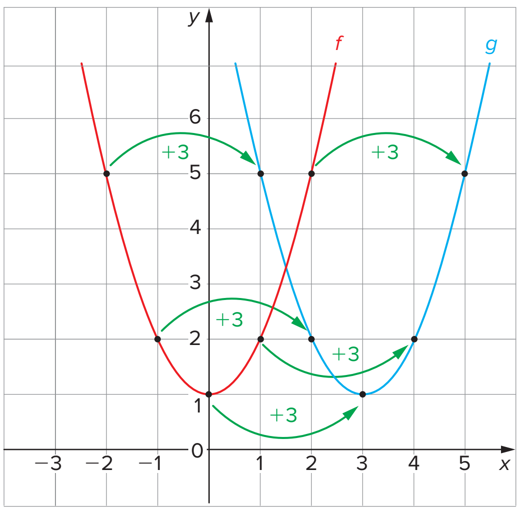
Exemplo:

- Sendo $f(x) = x^2 + 1$, vamos obter o gráfico de $g(x) = f(x - 3) = (x - 3)^2 + 1$.

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

Na construção do quadro de valores da função g, adotaremos valores de x três unidades maiores do que os usados no quadro de f para obtermos valores iguais na segunda linha de ambos os quadros. De fato, temos, por exemplo, $g(5) = f(5 - 3) = f(2)$, $g(3) = f(3 - 3) = f(0)$ etc.

x	1	2	3	4	5
g(x)	5	2	1	2	5



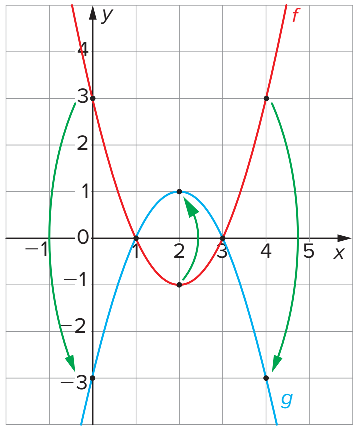
Reflexão em relação ao eixo *x*

Dada uma função f, o gráfico da função g definida por $g(x) = -f(x)$ é obtido pela reflexão, em relação ao eixo das abscissas, do gráfico de f.

Exemplo:

Sendo $f(x) = x^2 - 4x + 3$, vamos obter o gráfico de $g(x) = -f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

x	0	1	2	3	4
f(x)	3	0	−1	0	3
g(x) = −f(x)	−3	0	1	0	−3



! Atenção

Perceba que as raízes das duas funções do exemplo anterior são iguais. O mesmo vale para qualquer par de funções de mesmo domínio f e g tal que $g(x) = -f(x)$: observe que, se a é uma raiz de f, então $g(a) = -f(a) = -0 = 0$, e, analogamente, se a é raiz de g, então $f(a) = -g(a) = -0 = 0$.

Reflexão em relação ao eixo *y*

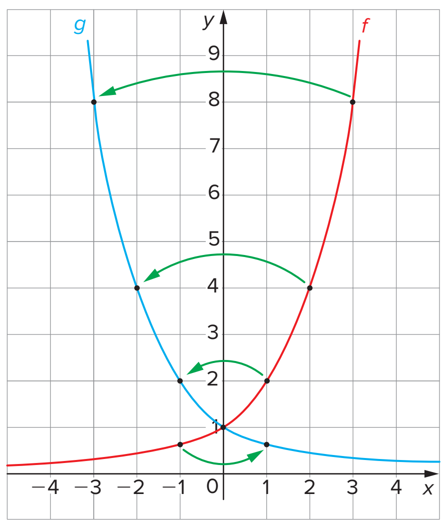
Substituindo as ocorrências de x na lei de uma função por $-x$, seu gráfico sofrerá uma reflexão em relação ao eixo y. Isso significa que, dada uma função f, o gráfico da função g definida por $g(x) = f(-x)$ tem o mesmo formato do gráfico f, mas refletido em torno do eixo das ordenadas.

Exemplo:

Sendo $f(x) = 2^x$, vamos obter o gráfico de $g(x) = f(-x) = 2^{-x}$.

x	−1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	−3	−2	−1	0	1
g(x) = f(−x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$



Inequações exponenciais

Inequações exponenciais são inequações que apresentam incógnitas no expoente e nas quais as bases são números reais positivos diferentes de 1.

Exemplos:

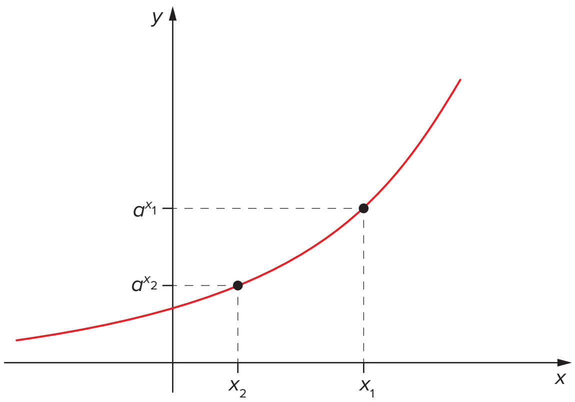
a) $2^x > 5$

b) $3^{x^2} < \dfrac{1}{9}$

c) $5^x + 5^{x+1} \geqslant 10$

Assim como feito para construir o gráfico de uma função exponencial, vamos analisar os dois casos:

1º) Quando $a > 0$ (função crescente).



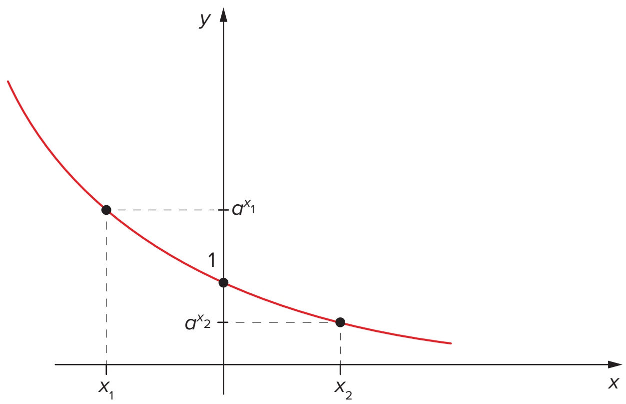
Observando o gráfico, vemos que, se $a^{x_1} > a^{x_2}$, então $x_1 > x_2$. Ou seja, considerando a mesma base, quando aumentamos o expoente, a potência também aumenta.

Exemplos:

$$2^x > 2^3 \Rightarrow x > 3$$

$$3^x \leqslant 3^5 \Rightarrow x \leqslant 5$$

2º) Quando $0 < a < 1$ (função decrescente).



Observando o gráfico, vemos que, se $a^{x_1} > a^{x_2}$, então $x_1 < x_2$. Ou seja, considerando a mesma base, quando diminuímos o expoente, a potência aumenta.

Exemplos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow x < 4$$

$$0{,}1^x \leqslant 0{,}1^{10} \Rightarrow x \geqslant 10$$

Exercícios resolvidos

5. Resolva as inequações abaixo:

a) $8 \cdot 4^x > 32$

b) $5^x < 0{,}04$

c) $0{,}01^x \geqslant 0{,}000001$

Resolução:

a) $8 \cdot 4^x > 32 \Rightarrow 2^3 \cdot (2^2)^x > 2^5 \Rightarrow 2^3 \cdot 2^{2x} > 2^5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{3+2x} > 2^5$

Perceba que, como a base 2 é maior do que 1, temos:

$$2^{3+2x} > 2^5 \Rightarrow 3 + 2x > 5 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

b) $5^x < 0{,}04 \Rightarrow 5^x < \dfrac{1}{25} \Rightarrow 5^x < 5^{-2}$

Como a base é 5, então:

$$5^x < 5^{-2} \Rightarrow x < -2$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$.

c) $0{,}01^x \geqslant 0{,}000001 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{100}\right)^x \geqslant \dfrac{1}{1000000} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{10}\right)^{2x} \geqslant \left(\dfrac{1}{10}\right)^6$

Neste caso, a base está entre 0 e 1, logo:

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2x} \geqslant \left(\frac{1}{10}\right)^6 \Rightarrow 2x \leqslant 6 \Rightarrow x \leqslant 3$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$.

6. Para quais números inteiros x vale $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+1} > \dfrac{1}{243}$?

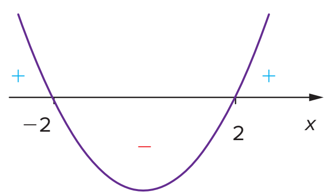
Resolução:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1} > \frac{1}{243} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

Como a base está entre 0 e 1, então:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow x^2 + 1 < 5 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$$

As raízes de $x^2 - 4 = 0$ são ± 2. Fazendo o estudo de sinal da função:



Logo, $x^2 - 4 < 0$ para $x \in\ ]-2, 2[$.

Portanto, os números inteiros que x pode assumir são -1, 0 e 1.

Revisando

1. Resolva as equações a seguir no universo dos números reais.

a) $4^x = 128$

b) $9^x \cdot 243 = 27$

c) $25^x = \sqrt{125}$

2. Resolva as equações a seguir no universo dos números reais.

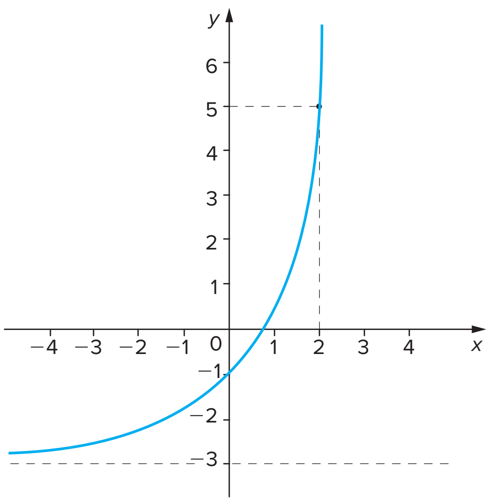
a) $2^x + 2^{x+2} = 20$

b) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

3. Construa o gráfico da função $y = 2^x + 3$. Em seguida, determine a imagem dessa função e a assíntota do gráfico.

4. Construa o gráfico da função $y = 4 - 2^x$, encontre a raiz dessa função e classifique a função em crescente ou decrescente.

5. Determine a lei da função cujo gráfico é representado abaixo, sabendo que a lei é da forma $y = A \cdot B^x + C$.



6. **Uerj 2021** Diferentes defensivos agrícolas podem intoxicar trabalhadores do campo. Admita uma situação na qual, quando intoxicado, o corpo de um trabalhador elimine, de modo natural, a cada 6 dias, 75% da quantidade total absorvida de um agrotóxico. Dessa forma, na absorção de 50 mg desse agrotóxico, a quantidade presente no corpo será dada por:

$$V(t) = 50 \cdot (0{,}25)^{\left(\frac{t}{6}\right)} \text{ miligramas}$$

Assim, o tempo t, em dias, necessário para que a quantidade total desse agrotóxico se reduza à 25 mg no corpo do trabalhador é igual a:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

7. Para fazer um exame de contraste, são injetados em um paciente 6 gramas de um elemento radioativo diluído em uma solução. A quantidade desse elemento em miligramas na corrente sanguínea desse paciente é dada pela função $R(t) = 6\,000 \cdot 5^{-t}$, em que t representa o número de horas após a injeção.

a) Quantos miligramas desse elemento estarão presentes na corrente sanguínea desse paciente após 4 horas?

b) O contraste fica sem efeito se sua quantidade ficar abaixo de 2 mg. Após quantas horas inteiras isso ocorrerá nesse paciente?

8. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $256 \cdot 2^{2x} \geqslant 2^{x-1} \cdot 16$.

9. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} \geqslant 125$.

10. Resolva em $\mathbb{N}$ a inequação $4^x - 18 \cdot 2^x + 32 \leqslant 0$.

Exercícios propostos

1. Resolva as equações abaixo.

a) $3^x = 81$

b) $4^x = 0{,}125$

c) $2 \cdot 4^x = 8^x$

d) $27^{x+2} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

e) $\sqrt{5^x} = \frac{25^x}{5}$

f) $4^x \cdot \sqrt[3]{2^x} = \frac{4}{2^x}$

2. Resolva as equações abaixo.

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

b) $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

c) $5^x - 2 = \frac{15}{5^x}$

d) $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$

e) $2^x + 2^{x+1} = 24$

f) $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} = \frac{3}{4}$

3. A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$ tem duas soluções reais. A soma dessas duas soluções é:

a) -5

b) 0

c) 2

d) 14

e) 1 024

4. Qual é o valor da soma de todas as soluções reais da equação abaixo?

$$(5^x)^2 - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

5. **Famema-SP 2017** Em um plano cartesiano, o ponto P(a, b), com a e b números reais, é o ponto de máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. Se a função $g(x) = 3^{-2x + k}$, com k um número real, é tal que $g(a) = b$, o valor de k é

a) 2. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 1. **e)** 0.

6. **IFSul-RS** A solução real da equação $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-3} - 3^{x-4} = 56$ é

a) 0 **b)** 1 **c)** 3 **d)** 4

7. Sabendo que x e y são, respectivamente, as soluções das equações exponenciais $16^{1-3x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-6}$ e $9 \cdot 3^{y-1} - 3^y = 18$, assinale o que for correto.

01 $x + y = 8$
02 $\frac{y}{x} = -2$
04 $x - y = -10$
08 $y + x = 1$
16 $x - y = -3$

Soma:

8. O valor de x na equação $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \frac{1}{27}$ é:

a) tal que $2 < x < 3$
b) negativo
c) tal que $0 < x < 1$
d) múltiplo de 2
e) 3

9. **EsSA-MG 2021** A soma dos possíveis valores de x na equação $4^x = 6 \cdot 2^x - 8$ é:

a) 6. **b)** 7. **c)** 3. **d)** 2. **e)** 0.

10. Construa o gráfico de cada uma das funções reais abaixo.

a) $y = 2^x + 2$
b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
c) $y = 2^{-x} + 1$
d) $y = 2^{x+1} - 2$
e) $y = 3 \cdot 2^x$
f) $y = -3 \cdot 2^{-x} - 2$

11. Determine as assíntotas e as imagens das funções do exercício anterior.

12. **Fuvest-SP** Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:

a) $a + b = 2$
b) $a + b = 1$
c) $a - b = 3$
d) $a - b = 2$
e) $a - b = 1$

13. **Uerj 2022** Um teste de material foi realizado com placas de vidro homogêneo. Considere I_0 a intensidade de luz que incide no vidro e I a quantidade de luz que o atravessa. Observe a equação que relaciona I_0 e I, a partir da constante e, sendo x a espessura do vidro, em milímetros, e k a constante do material com que foi fabricado:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx}$$

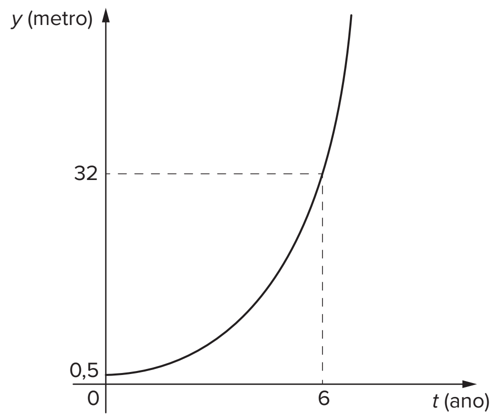
Considere a tabela a seguir, que apresenta valores aproximados para e^{-w}:

w	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24
e^{-w}	0,819	0,811	0,802	0,794	0,787

Para $k = 0,046$ e $x = 5$ mm, a porcentagem da intensidade da luz incidente que atravessa o vidro é:

a) 78,7%
b) 79,4%
c) 80,2%
d) 81,1%

14. **Enem** Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.
O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a:

a) 3
b) 4
c) 6
d) $\log_2 7$
e) $\log_2 15$

15. **Enem** O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00 propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1800 \cdot (1,03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais:

a) 7 416,00
b) 3 819,24
c) 3 709,62
d) 3 708,00
e) 1 909,62

16. **UVA-CE 2020** No filme Inferno, baseado no livro de Dan Brown, o personagem Bertrand Zobrist defende uma diminuição forçada da população do planeta para que não haja um colapso. Ele usa o exemplo da bactéria que se divide em duas a cada minuto, gerando uma população que, ao final de uma hora, ocupa totalmente uma proveta (recipiente de vidro). Se esse experimento se iniciou com apenas 1 bactéria, após quantos minutos a população ocupava metade da proveta?

a) 15 minutos.
b) 30 minutos.
c) 45 minutos.
d) 59 minutos.

17. IFPE 2016 Agrônomos e Matemáticos do IFPE estão pesquisando o crescimento de uma cultura de bactérias e concluíram que a população de uma determinada cultura P(t), sob certas condições, em função do tempo t, em horas, evolui conforme a função $P(t) = 5 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Para atingir uma população de 160 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a

a) 5
b) 15
c) 160
d) 32
e) 10

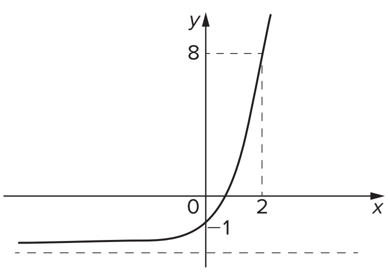
18. Ulbra-RS Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes, em função do tempo era $N(t) = C \cdot A^t$, com o tempo t dado em dias e A e C dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos. Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento?

a) 40
b) 30
c) 25
d) 20
e) 10

19. IFPE 2019 Em uma pesquisa feita por alguns alunos do curso de Zootecnia, na disciplina de Avicultura, ofertada pelo IFPE campus Vitória de Santo Antão, observou-se que, para o ano de 2015, o comportamento das variáveis das condições de ofertas de insumos e produção avícola na Região Sul foi baseado em equações de regressão exponencial. Considere $A(t) = 5 \cdot e^{0{,}04t}$ a equação de regressão aproximada, com A sendo a área plantada, em (ha), e t o tempo, em anos. Admitindo o ano de 2015 como $t = 0$, a área em 2020 será de (considere $e^{0{,}2} \cong 1{,}2$)

a) 6 hectares.
b) 10,4 hectares.
c) 10 hectares.
d) 8,6 hectares.
e) 8 hectares.

20. EPCar-MG 2017 A função real f definida por $f(x) = a \cdot 3^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



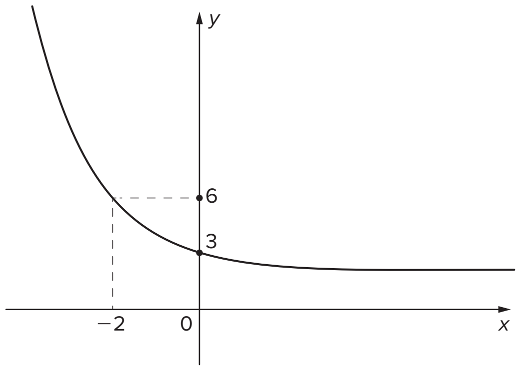
Pode-se afirmar que o produto $a \cdot b$ pertence ao intervalo real

a) $[-4, -1[$
b) $[-1, 2[$
c) $[2, 5[$
d) $[5, 8]$

21. Uece 2022 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = b \cdot a^x$, onde a e b são números reais positivos, $a \neq 1$. Se $f(1) = 8$ e $f(2) = 16$, então, o valor de $f(4)$ é

a) 48.
b) 24.
c) 32.
d) 64.

22. EsPCEx-SP 2019 A figura mostra um esboço do gráfico da função $f(x) = a^x + b$, com a e b reais, $a > 0$, $a = 1$ e $b = 0$. Então, o valor de $f(2) - f(-2)$ é igual a



a) $-\frac{3}{4}$.
b) $-\frac{15}{4}$.
c) $-\frac{1}{4}$.
d) $-\frac{7}{6}$.
e) $-\frac{35}{6}$.

23. UFJF-MG 2018 Durante o início de um experimento um pesquisador analisou uma população com 101 indivíduos. Após t anos a população passou a ser de 181 indivíduos, e depois de t^2 anos da análise inicial a população passou para 6 661 indivíduos. A função $y = b^x + c$ com $b > 1$, determina o crescimento da população após x anos. Marque a alternativa contendo o valor da soma $b + c$.

a) 103
b) 104
c) 109
d) 110
e) 111

24. Fuvest-SP Seja $f(x) = a + 2^{bx + c}$, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semirreta $]-1, \infty[$ e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1, 0) e $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. Então, o produto abc vale

a) 4
b) 2
c) 0
d) -2
e) -4

25. O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $3^{x-3} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+3}$, é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

26. No intervalo $[-1, 8]$, o número de soluções inteiras da inequação $2^x - 7 > 2^{3-x}$ é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

27. Resolva as inequações abaixo.

a) $3^{4x-3} > 243$

b) $11^{3x-9} \leqslant 1$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+6} \geqslant 0{,}0625$

d) $(0{,}1)^{x^2} > (0{,}01)^{3x-4}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+7} > \left(\frac{3}{2}\right)^{x-10}$

f) $8^{x^2-2x} \leqslant \frac{1}{8}$

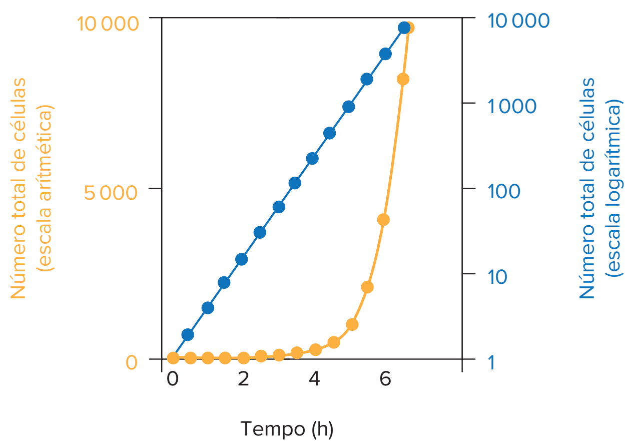
Texto complementar

Função exponencial

A função exponencial desempenha um papel fundamental em análises de experimentos dentro da Microbiologia. Os microrganismos são objetos de inúmeros estudos em que são expressos tanto o desenvolvimento quanto os resultados em gráficos de crescimento exponencial, contribuindo assim com avanços benéficos à saúde.

Crescimento exponencial

Cálculo da taxa específica de crescimento



Comparação entre a curva aritmética (a laranja) e a curva logarítmica (a azul) do aumento do número total de células ao longo do tempo durante a fase do crescimento exponencial.

Para uma população de células em **crescimento exponencial**, se representarmos graficamente os valores do número de células em função do tempo de crescimento, obtém-se uma função exponencial (**representação aritmética** no gráfico acima). Esta é representada pela equação (1):

$$N_t = N_0 \cdot e^{\mu t} \quad (1)$$

que traduz o caráter exponencial do crescimento microbiano, em que N_t é a concentração de células no tempo e N_0 é a concentração de células no início do crescimento exponencial.

Se aplicarmos logaritmos naturais de um e do outro lado da equação (1), obtém-se:

$$\ell n N_t = \ell n N_0 + \mu t$$

onde μ é a **taxa específica de crescimento do microrganismo** em causa, nas condições de crescimento testadas (as suas unidades são o inverso do tempo; por exemplo h^{-1}, min^{-1}). Este parâmetro do crescimento, que reflete a sua cinética, corresponde ao declive da reta que resulta da representação gráfica do logaritmo natural do número de células em função do tempo (**representação logarítmica** no gráfico acima).

A taxa específica de crescimento está relacionada com o número de gerações (ou o tempo de cada geração) que ocorrem por unidade de tempo em uma cultura em crescimento exponencial. De fato, quanto maior for a taxa específica de crescimento, mais rapidamente se divide a população, maior é o número de gerações que ocorrem no mesmo período de tempo e menor é o tempo de cada geração. A partir dos resultados de uma experiência de crescimento como os apresentados, é possível calcular o valor da taxa específica de crescimento da população microbiana.

Tempo	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	...	10
Nº total de células	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2 048	4 096	8 192	...	1 048 576

Assim, se considerarmos os resultados experimentais apresentados na tabela acima (representados graficamente na figura acima), o valor da taxa específica de crescimento, μ, pode ser calculado com base em uma análise de regressão linear dos valores de $\ell n N_t$ e ***t*** correspondentes à fase de crescimento exponencial. O valor de μ corresponde ao **declive** da reta representada pela equação (2) (não é de se esperar que os resultados experimentais se alinhem sobre a reta representada). Uma estimativa mais grosseira do valor de μ pode ser obtida do seguinte modo:

$$\mu = \frac{\ell n N_{5,5} - \ell n N_0}{5{,}5\,(\text{horas})} = \frac{\ell n 1024 - \ell n 1}{5{,}5\,(\text{horas})}$$

$$\mu = 1{,}3\,h^{-1}$$

A **taxa específica de crescimento** e o **tempo de duplicação ou geração** de uma população microbiana estão intimamente relacionados entre si e o valor de um pode ser calculado a partir do conhecimento do valor do outro, com base na equação (3):

$$\mu = \frac{\ell n 2}{g} = \frac{0{,}693}{g}$$

que se obtém por substituição de $N_t = 2N_0$ (que traduz uma duplicação celular) e $t = g$ na equação (2)).

Grupo de Ciências Biológicas do IST. Crescimento exponencial. *e-escola – Instituto Superior Técnico de Lisboa*, nov. 2005. p. 2. Disponível em: https://arquivo.pt/wayback/20080229212201/http://www.e-escola.utl.pt/site/topico.asp?topico=233. Acesso em: 9 ago. 2022.

Resumindo

Equação exponencial

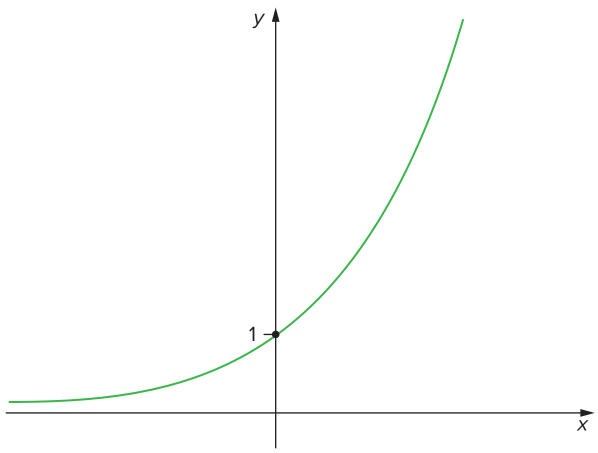
- Para resolver uma equação exponencial, deixamos ambos os membros como potências de mesma base e então igualamos os expoentes:

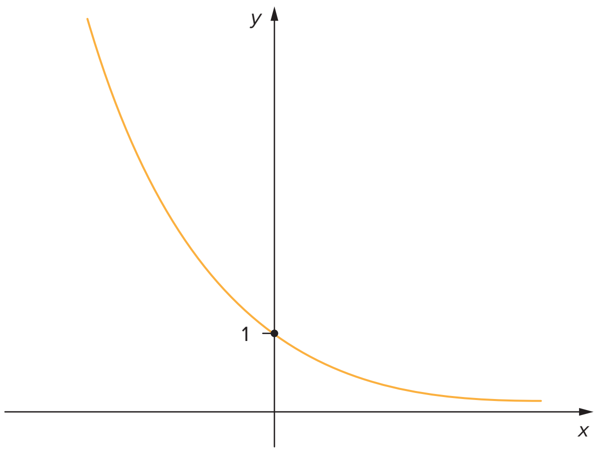
$$a^x = a^y \Rightarrow x = y$$

Função exponencial

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, y = a^x$

- As funções exponenciais são da forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.
- As funções exponenciais são bijetoras (isto é, são injetoras e sobrejetoras).
- se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente.
- se $0 < a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é decrescente.





Inequação exponencial

- se $a > 1$, $a^x > a^y \Rightarrow x > y$.
- se $0 < a < 1$, $a^x > a^y \Rightarrow x < y$.

Quer saber mais?

Vídeo

POR QUE a identidade de Euler é considerada a equação mais bonita que existe. *BBC News Brasil*, 1 mar. 2021. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-56245551.

Já ouviu falar na Identidade de Euler, considerada uma das relações mais bonitas da Matemática? Conheça mais sobre ela no vídeo indicado acima, que analisa essa identidade que relaciona as constantes matemáticas *e*, *i*, π, 1 e 0.
Acesso em: 26 jul. 2022.

Livro

MAOR, Eli. e: a história de um número. Rio de Janeiro: Record, 2003.

Nesse livro, o historiador palestino Eli Maor utiliza a história do número e para tratar de diversos fatos históricos, personagens e curiosidades relacionados à história da Matemática, com especial atenção ao período do ápice do desenvolvimento do cálculo, entre os séculos XVII e XIX.

Exercícios complementares

1. **ITA-SP 2021** A única solução real da equação

$$7^x = 59^{x-1}$$

pertence ao intervalo:

a) $\left(0, \dfrac{2}{5}\right]$ c) $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{2}\right]$ e) $\left(\dfrac{10}{3}, 4\right]$

b) $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{3}\right]$ d) $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{10}{3}\right]$

2. **Uece 2020** Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$, então, o número de elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 1\}$ é igual a

a) 0. c) 1.
b) 2. d) 3.

3. **Uece 2020** Se o número real k é a solução da equação $9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$, então, o número k cumpre a seguinte condição:

a) $1{,}5 < k < 3{,}5$. c) $5{,}5 < k < 7{,}5$.
b) $7{,}5 < k < 9{,}5$. d) $3{,}5 < k < 5{,}5$.

4. **USF-SP 2018** Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante t, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750$. De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

a) 5 horas. d) 9 horas.
b) 6 horas. e) 12 horas.
c) 7 horas.

5. **EsPCEx-SP** Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:

– Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
– Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
– Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".

O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de

a) 6 acertos e 2 erros d) 3 acertos e 5 erros
b) 5 acertos e 3 erros e) 2 acertos e 6 erros
c) 4 acertos e 4 erros

6. **EEAR-SP 2019** Considere que o número de células de um embrião, contadas diariamente desde o dia da fecundação do óvulo até o 30º dia de gestação, forma a sequência: 1, 2, 4, 8, 16, ...

A função que mostra o número de células, conforme o número de dias x_i é $f\colon \{x \in \mathbb{N};\, 1 \leq x \leq 30\} \to \mathbb{N}$; $f(x) =$

a) 2^{x-1} c) $2^x - 1$
b) $2x - 1$ d) $x^2 - 1$

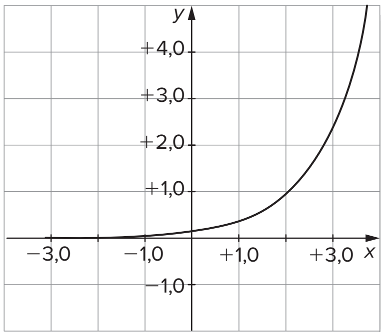
7. **UCS-RS** Considere as funções a seguir que representam quantidades de substâncias no tempo t.

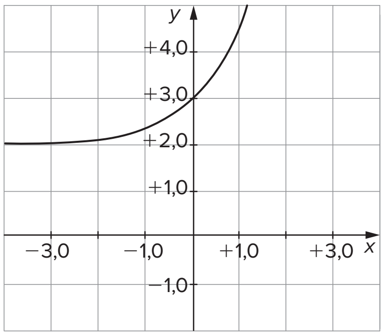
I. $Q(t) = 100 \cdot (1{,}07)^t$
II. $Q(t) = 300 \cdot (0{,}25)^t$
III. $Q(t) = 5 \cdot e^{0{,}08t}$

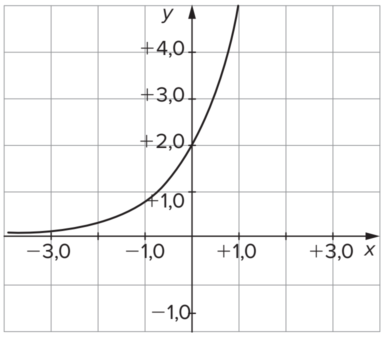
Das funções acima, indica(m) crescimento

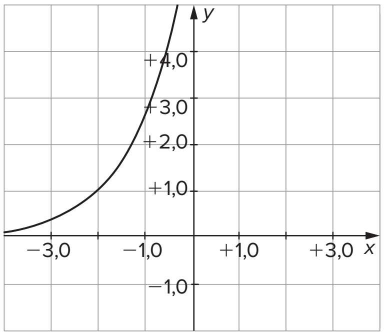
a) apenas I. d) apenas II e III.
b) apenas I e II. e) I, II e III.
c) apenas I e III.

8. **IFSul-RS** O esboço gráfico que melhor representa a função real de variável real $y = e^{x+2}$ é

a)


b)


c)




9. **UFPR 2016** A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1000 \cdot 2^{0,0625t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

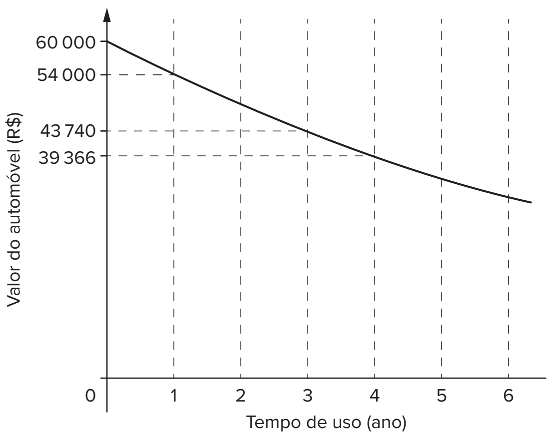
a) 8
b) 12
c) 16
d) 24
e) 32

10. **Unifesp 2022** Um estudo de caso acompanhou um homem que tinha 30 anos de vida e possuía inicialmente 100 mil fios de cabelo. Ao longo desse estudo, foi possível observar que, para esse homem, a taxa média de queda de cabelo foi de 4% ao ano.

a) Sendo N o número médio de fios de cabelo desse homem e t o tempo, em anos, decorrido desde os seus 30 anos de idade, determine a função $N(t)$ e utilize-a para calcular o número de fios de cabelo observados nesse homem quando ele completou 31 anos de vida.

b) Decorrido certo número de anos após os 30 anos de idade desse homem, ele terá a metade dos fios de cabelo que tinha aos 30 anos. Utilizando $\log_{10} 2 = 0,30$ e $\log_{10} 3 = 0,48$, determine qual será sua idade nessa ocasião.

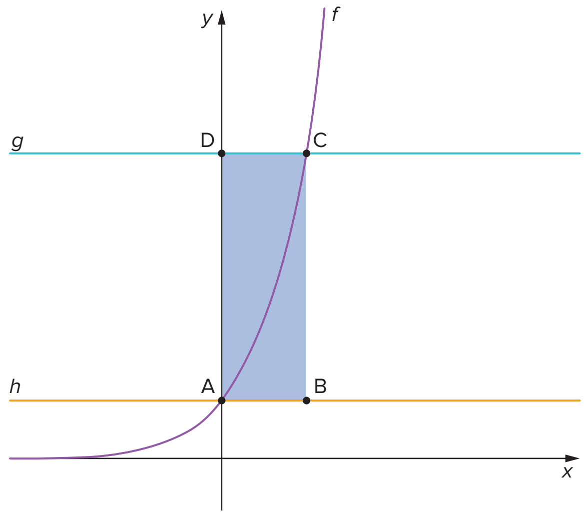
11. **Enem 2017** Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

a) 48 000,00
b) 48 114,00
c) 48 600,00
d) 48 870,00
e) 49 683,00

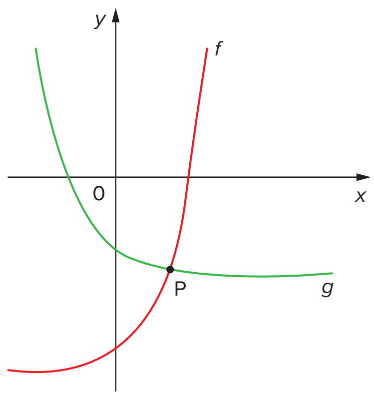
12. **Uerj 2017** Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 8$ e $h(x) = k$, sendo $x \in \mathbb{R}$ e k uma constante real.



No retângulo ABCD, destacado no plano, os vértices A e C são as interseções dos gráficos $f \cup h$ e $f \cup g$, respectivamente.

Determine a área desse retângulo.

13. **Famerp-SP 2022** A figura mostra os gráficos das funções f e g, definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas por $f(x) = 2^x - 8$ e $g(x) = \dfrac{1}{2^x} - 4$. O ponto P indica a interseção dos gráficos dessas funções.



A abscissa x, do ponto P, é igual a

a) $\log_2\left(2 + \sqrt{5}\right)$
b) $\log_2\left(2 + \sqrt{2}\right)$
c) $\log_2\left(1 + 2\sqrt{2}\right)$
d) $\log_2\left(3 + \sqrt{3}\right)$
e) $\log_2\left(3 + \sqrt{5}\right)$

14. **IFPE 2017** No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x. Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.

A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

a) 39 refrigeradores.
b) 13 refrigeradores.
c) 127 refrigeradores.
d) 69 refrigeradores.
e) 112 refrigeradores.

15. UFRGS 2020 A concentração de alguns medicamentos no organismo está relacionada com a meia-vida, ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade.

Considere que a meia-vida de determinado medicamento é de 6 horas. Sabendo que um paciente ingeriu 120 mg desse medicamento às 10 horas, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a concentração desse medicamento, no organismo desse paciente, às 16 horas do dia seguinte.

a) 2,75 mg
b) 3 mg
c) 3,75 mg
d) 4 mg
e) 4,25 mg

16. FCMMG 2017 Em 1798, Thomas Malthus, no trabalho “An Essay on the Principle of Population”, formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo. Esse modelo, utilizado para acompanhar o crescimento de populações ao longo do tempo t, fornece o tamanho $N(t)$ da população pela lei $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, onde N_0 representa a população presente no instante inicial e k uma constante que varia de acordo com a espécie de população. A população de certo tipo de bactéria está sendo estudada em um laboratório, segundo o modelo de Thomas Malthus. Inicialmente foram colocadas 2 000 bactérias em uma placa de Petri e, após 2 horas, a população inicial havia triplicado.

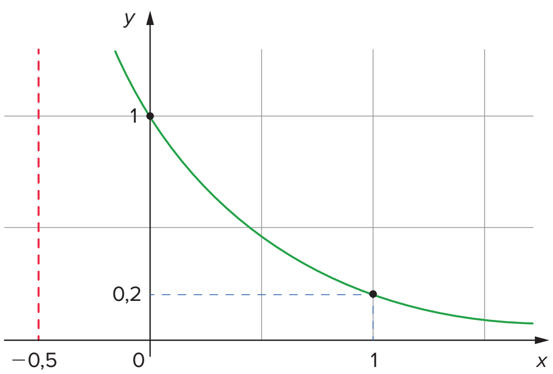
A quantidade de bactérias presente na placa 6 horas após o início do experimento deverá aumentar:

a) 6 vezes
b) 8 vezes
c) 18 vezes
d) 27 vezes

17. ITA-SP 2021 Seja S o subconjunto do plano cartesiano constituído pela união dos gráficos das funções $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$ e $h(x) = \log_2 x$, com $x > 0$. Para cada $k > 0$ seja n o número de interseções da reta $y = kx$ com S. Podemos afirmar que:

a) $n \neq 1$ para todo $k > 0$.
b) $n = 2$ para pelo menos três valores distintos de k.
c) $n = 2$ para exatamente dois valores distintos de k.
d) $n \neq 3$ para todo $k > 0$.
e) O conjunto dos $k > 0$ para os quais $n = 3$ é a união de dois intervalos disjuntos.

18. Unesp 2016 A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Nessa função, o valor de y para $x = -0{,}5$ é igual a

a) log 5
b) $\log_5 2$
c) $\sqrt{5}$
d) $\log_2 5$
e) 2,5

19. Fuvest-SP Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = ca^{-kt}$, em que a é um número real positivo, t é dado em anos, $m(t)$ a massa da substância em gramas e c, k são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

a) 10%
b) 5%
c) 4%
d) 3%
e) 2%

20. O par ordenado (0, 2) pertence ao gráfico da função $y = (k - 1)e^{-x}$. Sendo e o número de Euler, qual é o valor mínimo da função no intervalo [1, 2]?

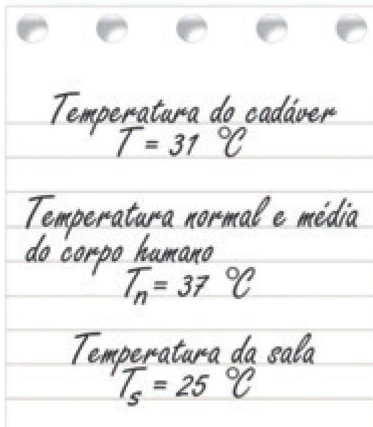
a) $\frac{3}{e}$
b) $\frac{3}{e^2}$
c) $\frac{2}{e^2}$
d) $\frac{1}{e}$

21. UEL-PR 2018 Leia o texto a seguir.

O processo de decomposição do corpo começa alguns minutos depois da morte. Quando o coração para, ocorre o *algor mortis* ou o frio da morte, quando a temperatura do corpo diminui até atingir a temperatura ambiente.

(Adaptado de: http://diariodebiologia.com/2015/09/o-que-acontece-com-o-corpo-logo-apos-a-morte/. Acesso em: 29 maio 2017.)

Suponha que um cadáver é analisado por um investigador de polícia às 5 horas da manhã do dia 28, que detalha as seguintes informações em seu bloco de anotações:



Imediatamente após escrever, o investigador utiliza a Lei de Resfriamento

$$T = (T_n - T_s)\left(\sqrt[6]{2}\right)^{-t} + T_s$$

para revelar a todos os presentes que faz t horas que a morte ocorreu. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a hora e o dia da morte, segundo o investigador.

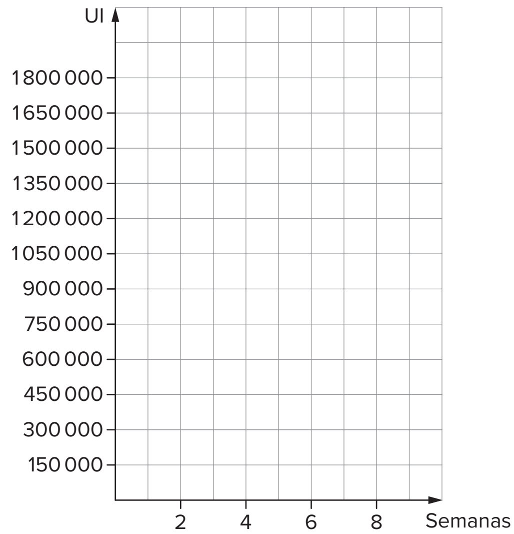
a) 11 horas da noite do dia 27
b) 8 horas da noite do dia 27
c) 2 horas da manhã do dia 28
d) 4 horas da manhã do dia 28
e) 10 horas da manhã do dia 27

22. Unesp 2020 A penicilina benzatina é um antibiótico indicado no tratamento de certas infecções, e sua meia-vida é de 336 horas. Ou seja, após esse período de tempo a quantidade de medicamento no sangue reduz-se pela metade. O tratamento convencional é feito com uma aplicação de 1200000 UI do medicamento e essa dose mantém-se em quantidade adequada no sangue (isto é, não inferior a 300000 UI) durante os 28 dias seguintes. A dosagem, o número de doses e o intervalo de tempo entre as doses depende da doença a ser tratada.

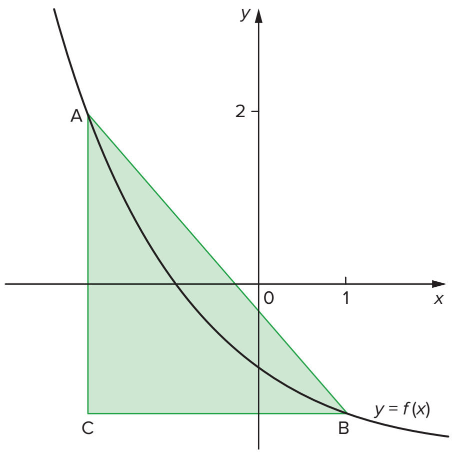
a) Considere um paciente que recebeu 2 doses, cada uma de 1200000 UI, desse medicamento, sendo que a segunda dose foi aplicada 28 dias após a primeira dose. Faça um esboço gráfico em uma malha como aparece a seguir, representando a quantidade desse medicamento no sangue ao longo de 8 semanas de tratamento.

b) Considere outro caso, em que um paciente foi tratado com 2 doses, cada uma de 2400000 UI, de penicilina benzatina, sendo a segunda dose aplicada 14 dias após a primeira. Determine a quantidade desse medicamento no sangue do paciente, em UI, logo após ele tomar a segunda dose e indique durante quantos dias completos, após essa segunda dose, a quantidade de medicamento permanecerá em quantidade adequada no sangue desse paciente.

Adote em seus cálculos log 2 = 0,30; log 3 = 0,48



23. UPF-RS 2018 Na figura abaixo, está representado um triângulo retângulo em que os vértices A e B pertencem ao gráfico da função *f*, definida por $f(x) = 2^{-x} - 2$.



Como indica a figura, a abscissa do ponto B é 1, a ordenada do ponto A é 2 e os pontos A e C têm a mesma abscissa. A medida da área do triângulo ABC é

a) $\frac{21}{2}$

b) $\frac{3}{2}$

c) 6

d) 12

e) $\frac{21}{4}$

24. Unicamp-SP 2022 Por volta de 1845, o matemático belga Pierre Verhulst começou a estudar um tipo de função que hoje é conhecida como função logística. Originalmente utilizada para modelar problemas envolvendo crescimento populacional, atualmente tem muitas outras aplicações em ecologia, biomatemática, sociologia e ciências políticas.

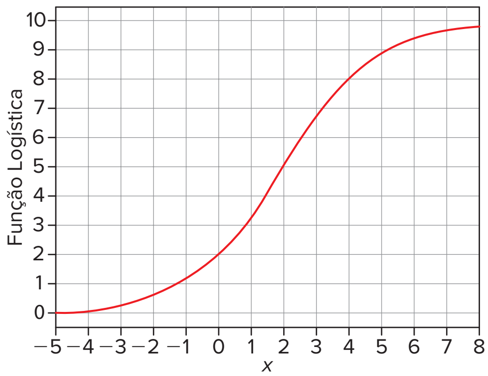
Uma função logística pode ser definida por

$$f(x) = \frac{L}{1 + 2^{-k(x - x_0)}}, x \in \mathbb{R},$$

em que $k > 0$, $L > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Seja f^{-1} a função inversa de f. Determine a expressão e o domínio de f^{-1}.

b) O gráfico abaixo é de uma função logística com $L = 10$. Determine os valores de x_0 e k.



25. EsPCEx-SP A inequação $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11\,111$, em que x é um número real,

a) não tem solução.

b) tem apenas uma solução.

c) tem apenas soluções positivas.

d) tem apenas soluções negativas.

e) tem soluções positivas e negativas.

26. PUC-RS O domínio da função definida por

$f(x) = \sqrt{2^x - 1}$ é

a) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

b) $[0, +\infty)$

c) $(-\infty; 0]$

d) $(1; +\infty)$

e) $(-\infty; -1)$

27. Resolva as inequações abaixo.

a) $0{,}01 < 100^x < 10\,000$

b) $3^x + 3^{x+1} \leqslant 12$

c) $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 < 0$

d) $7^x \cdot (2x - 3) \geqslant 0$

e) $(2^{x+1})^{2x-3} < 12$

f) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

BNCC em foco

Use as informações a seguir para responder aos exercícios de **1** a **3**.

Brasil detém crescimento exponencial de casos da Covid-19, mas "luta" continua, diz OMS

As infecções de coronavírus do Brasil não parecem mais estar aumentando exponencialmente, mas o país "ainda está no meio da luta", já que os casos novos e as mortes crescem aos milhares todos os dias, disse a Organização Mundial da Saúde (OMS) nesta sexta-feira.

NEBEHAY, Stephanie et al. "BRASIL detém crescimento exponencial de casos da Covid-19, mas 'luta' continua, diz OMS". *Jornal do Brasil*, 17 jul. 2020. Disponível em: https://economia.uol.com.br/noticias/reuters/2020/07/17/oms-diz-que-plato-em-casos-de-covid-19-no-brasil-e-oportunidade-para-conter-surto.htm. Acesso em: 3 ago. 2022.

No começo dos casos de infecção pelo novo coronavírus no Brasil, nos primeiros meses de 2020, o crescimento do número de casos era exponencial. Esse é o crescimento considerado padrão para modelos de contaminação quando não há nenhum tipo de medida de controle da doença. No entanto, conforme medidas sanitárias foram sendo tomadas no país, o crescimento do número de infecções deixou de ser exponencial, como indica o trecho acima, embora o número de contaminações e mortes tenha continuado alto.

Suponha que, durante um período de uma semana, o número de infectados pelo covid-19 cresça exponencialmente segundo a função $N_1(t) = 1000 \cdot 1{,}5^t$, com t $(0 \leqslant t \leqslant 7)$ o número de dias completos a partir do dia $t = 0$, estipulado como início do acompanhamento. Assuma também que, a partir do 8º dia, o número de infectados cresça pela função $N_2(t) = 17\,086 \cdot 1{,}2^{t-7}$, com $t \geqslant 8$.

EM13MAT304

1. Qual é o número de infectados após o 1º dia?

a) 1 500 **b)** 1 600 **c)** 1 700 **d)** 1 800

EM13MAT304

2. Qual é o número aproximado de infectados após o 8º dia de acompanhamento de casos?

a) 15 000 **b)** 18 500 **c)** 19 500 **d)** 20 500

EM13MAT304

3. Qual é o aumento percentual entre dias consecutivos na primeira semana?

a) 20% **b)** 30% **c)** 40% **d)** 50%


KT Stockphotos/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

1

Conjuntos numéricos

A princípio, a Matemática surge como a ciência que observa números nos mais diversos padrões da realidade. As técnicas de contagem, ordenação e mensuração, há tanto tempo estudadas na Matemática, mostraram-se tão úteis à humanidade que, hoje, centenas de anos depois, seus estudos continuam a proporcionar o surgimento de novas tecnologias.

Por trás dos avanços tecnológicos, estão números e estruturas numéricas usadas para transmitir e proteger informações, como a biometria facial, disponível em celulares e utilizada para reduzir fraudes, autenticar documentos, confirmar identidades em aplicativos e controlar o acesso em diversos segmentos. E, para que possam ser processadas, essas informações precisam ser codificadas por meio de números e sequências numéricas.

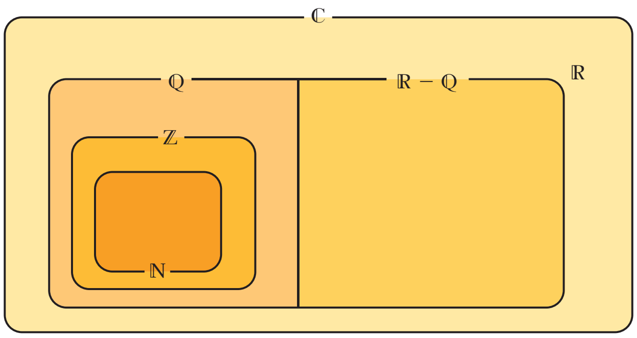
Este capítulo pretende explorar os aspectos práticos e a variedade de interpretações de cada tipo de número.

Introdução

A teoria dos números estabelece alguns critérios para a construção dos significados do número. Dois desses critérios merecem destaque. Um deles é a relação de inclusão entre os conjuntos numéricos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, em que:

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos.

O símbolo $\subset$ indica a relação de inclusão e pode ser lido como "está contido em".



O outro critério é uma propriedade específica dessas relações de inclusão. Sendo X e Y dois desses conjuntos, se X está contido em Y então todas as propriedades aritméticas válidas no conjunto X também são válidas no conjunto Y. Isso funciona como uma espécie de herança, pois o conjunto Y é construído a partir dos elementos do conjunto X.

Por outro lado, o conjunto Y deve possuir outras propriedades aritméticas que são impossíveis de serem enunciadas no conjunto X, de modo que o conjunto Y herda todas as propriedades de seu subconjunto X, mas também introduz novas propriedades e novas interpretações para os números que são seus elementos, sempre estendendo o significado do número.

Tipos de números

Da relação de ordem entre os conjuntos numéricos, pode-se entender que, se um número é natural, então ele também é inteiro, racional, real e complexo. Veja o número 10 (dez), por exemplo:

$$10 \in \mathbb{N} \Rightarrow 10 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 10 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 10 \in \mathbb{R} \Rightarrow 10 \in \mathbb{C}$$

Em contrapartida, números que não são inteiros não podem ser naturais. Veja o exemplo do número 0,2 (dois décimos):

$$0{,}2 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 0{,}2 \notin \mathbb{N}$$

Mas o fato de 0,2 ser um número racional implica ele também ser um número real e complexo:

$$0{,}2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 0{,}2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 0{,}2 \in \mathbb{C}$$

Além de pertencerem a pelo menos um dos cinco conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$), números podem ser classificados de muitas outras formas. Por exemplo, todo número inteiro pode ser classificado como número par ou ímpar.

Entre os números naturais há os que são primos, compostos, quadrados perfeitos, cubos perfeitos, triangulares etc.

Os números não inteiros podem ter quantidade finita ou infinita de casas decimais. Os números que admitem infinitas casas decimais em sua representação são separados em dízimas periódicas e números irracionais.

Pelo sinal, um número pode ser classificado como positivo ou negativo, havendo um único número que não é positivo nem negativo: o zero.

Operações com números

Os números são entidades matemáticas que interagem por meio de operações aritméticas, como a adição, por exemplo, produzindo um novo resultado numérico. Veja alguns exemplos:

$$3 + 7 = 10$$
$$-10 + 10 = 0$$
$$0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$$
$$\log(2) + \log(5) = 1$$
$$0 + \pi = \pi$$

Algumas operações são representadas por símbolos que se chamam operadores:

- O operador de adição é principalmente representado pelo símbolo (+).

$$1 + 2 = 3$$

- O operador de subtração é principalmente representado pelo símbolo (−).

$$3 - 2 = 1$$

- O operador de multiplicação é tanto representado por (×) quanto por (·), podendo ser omitido em alguns casos.

$$2 \cdot 3 = 6$$
$$4 \times 5 = 20$$

- O operador de divisão pode ser representado por (:), e ainda pela barra de fração.

$$6 : 3 = 2$$
$$20/5 = \frac{20}{5} = 4$$

- O operador de radiciação ou de extração de raízes é representado pelo símbolo $\left(\sqrt{\ }\right)$.

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Também há as operações aritméticas representadas por siglas:

- A extração de logaritmos é representada pela sigla **log**.

$$\log_2(8) = 3$$

- O mínimo múltiplo comum, pela sigla **mmc**.

$$\text{mmc}(4, 6) = 12$$

- O máximo divisor comum, pela sigla **mdc**.

$$\text{mdc}(4, 6) = 2$$

Entre essas operações, muitas são bem definidas em todos os conjuntos numéricos, desde os naturais até os complexos. Algumas não exatamente da mesma maneira, como a divisão, que nos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ produz quociente e resto, mas resulta apenas quociente nos demais conjuntos numéricos.

Fechamento de um conjunto em relação a uma operação

Considera-se um conjunto numérico K fechado em relação a uma operação aritmética se essa operação gera apenas resultados pertencentes a K, quando aplicada a seus elementos.

Representando por * uma operação aritmética genérica, um conjunto K é fechado em relação a * se, e somente se:

$$\left.\begin{matrix} a \in \text{K} \\ b \in \text{K} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a * b) \in \text{K}$$

Nessa implicação lógica, a e b representam números do conjunto K e $(a * b)$ representa o resultado produzido pela operação * aplicada aos números a e b.

O conjunto $\mathbb{N}$, por exemplo, é fechado em relação à adição, à multiplicação, à potenciação, ao mmc e ao mdc, mas não é fechado em relação à operação de subtração.

Quando um conjunto K não é fechado em relação a alguma operação *, a concepção de número pode ser ampliada para abranger o significado dos resultados que escapam de K. E assim, a partir dos elementos de $\mathbb{N}$, podem ser construídos os demais conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Operações comutativas e associativas

As propriedades comutativa e associativa de uma operação aritmética dizem respeito à ordem ou posição dos números que participam da operação.

A comutatividade de uma operação pode ser observada nos resultados de sua aplicação aos pares de números. Uma operação * é comutativa quando $a * b$ e $b * a$ produzem o mesmo resultado, quaisquer que sejam os números a e b.

Já a associatividade de uma operação precisa ser observada nos resultados de sua aplicação a uma sucessão de pelo menos três números. Uma operação * é associativa quando $(a * b) * c$ e $a * (b * c)$ produzem o mesmo resultado, quaisquer que sejam os números a, b e c. De modo que, se uma operação é associativa, não há necessidade de indicar por parênteses em qual ordem ela deve ocorrer, pois $a * b * c$ pode ser calculado tanto da direita para a esquerda quanto da esquerda para a direita sem modificação no resultado.

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

! Atenção

Entre as operações aritméticas mencionadas neste capítulo, apenas quatro são comutativas e associativas: a adição, a multiplicação, o mmc e o mdc.

Comutativas	Associativas				
$a + b = b + a$	$a + b + c$	$=$	$(a + b) + c$	$=$	$a + (b + c)$
$a \cdot b = b \cdot a$	$a \cdot b \cdot c$	$=$	$(a \cdot b) \cdot c$	$=$	$a \cdot (b \cdot c)$
$\text{mmc}(a, b) = \text{mmc}(b, a)$	$\text{mmc}(a, b, c)$	$=$	$\text{mmc}(\text{mmc}(a, b), c)$	$=$	$\text{mmc}(a, \text{mmc}(b, c))$
$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$	$\text{mdc}(a, b, c)$	$=$	$\text{mdc}(\text{mdc}(a, b), c)$	$=$	$\text{mdc}(a, \text{mdc}(b, c))$

A atribuição indevida dessas propriedades a outras operações aritméticas, como a divisão e a potenciação, por exemplo, é responsável por muitos dos erros cometidos em resoluções de questões.

Os números como soluções de equações

Na linguagem matemática, muitas perguntas podem ser expressas por sentenças algébricas em que um valor desconhecido x deve ser encontrado. Essas sentenças são chamadas de equações. Veja alguns exemplos no quadro a seguir.

Pergunta	Equação
Qual número deve ser somado ao número 3 para se obter o número 9?	$x + 3 = 9$
Qual número deve ser multiplicado por 3 para se obter o número 15?	$3 \cdot x = 15$
Qual número deve ser elevado ao expoente 3 para se obter o número 64?	$x^3 = 64$

Todas as equações do quadro foram enunciadas usando apenas números naturais (3, 9, 15 e 64) e possuem soluções que também são números naturais. Essas soluções resultam das aplicações das operações contrárias, respectivamente, à adição, multiplicação e potenciação, que são, nessa ordem, as operações de subtração, divisão e radiciação:

- $x + 3 = 9 \Rightarrow x = 9 - 3 = 6$
- $3 \cdot x = 15 \Rightarrow x = 15 : 3 = 5$
- $x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

Mas nem toda equação enunciada com números naturais admite solução natural. Veja alguns exemplos no quadro a seguir.

Pergunta	Equação
Qual número deve ser somado ao número 9 para se obter o número 4?	$x + 9 = 4$
Qual número deve ser multiplicado por 4 para se obter o número 9?	$4 \cdot x = 9$
Qual número deve ser multiplicado por 9 para se obter o número 4?	$9 \cdot x = 4$
Qual número deve ser elevado ao expoente 4 para se obter o número 9?	$x^4 = 9$

Observe que os resultados destas equações não pertencem ao conjunto dos números naturais:

- A solução da equação $x + 9 = 4$ é um número negativo.

$$x + 9 = 4 \Rightarrow x = 4 - 9 = -5$$

- A solução da equação $4 \cdot x = 9$ é um número que se escreve com apenas duas casas decimais.

$$4 \cdot x = 9 \Rightarrow x = 9 : 4 = 2{,}25$$

- A solução da equação $9 \cdot x = 4$ é um número que, para ser escrito na forma decimal, precisa de uma quantidade infinita de casas decimais repetidas. Representações numéricas desse tipo são chamadas de dízimas periódicas.

$$9 \cdot x = 4 \Rightarrow x = 4 : 9 = 0{,}444444444...$$

- A equação $x^4 = 9$ tem como solução um número que, para ser escrito na forma decimal, precisa de uma quantidade infinita de casas decimais em que não se observa padrão de repetição algum. Números desse tipo são chamados de irracionais.

$$x^4 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[4]{9} = 1{,}7320508075...$$

De tais resultados, derivam-se novas formas de representações numéricas que estudaremos no decorrer do capítulo.

Os números naturais

O conjunto dos números naturais pode ser definido por duas teorias diferentes: a ordinal e a cardinal. As diferenças de interpretação desses tipos de números naturais são tão profundas que as palavras usadas na língua portuguesa para designar os numerais de cada tipo pertencem a classes gramaticais diferentes.

Numeral ordinal
Primeiro (1º)
Segundo (2º)
Terceiro (3º)
⋮

Numeral cardinal
Zero (0)
Um (1)
Dois (2)
Três (3)
⋮

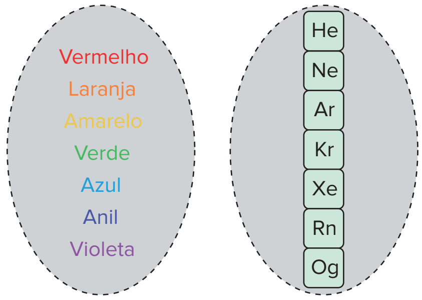
Os números cardinais

A cardinalidade de um conjunto finito é a quantidade de elementos distintos que ele possui. Indica-se por $n(K)$ a cardinalidade de um conjunto K.

Por exemplo, considere os conjuntos A dos meses do ano e J dos dias do mês de janeiro. Repare que, mesmo não tendo elementos numéricos, esses conjuntos definem números:

- $n(A) = 12$
- $n(J) = 31$

O número natural cardinal é aquele capaz de indicar a quantidade de elementos de um conjunto finito. Esse tipo de interpretação do número natural é o que há de comum entre dois conjuntos de elementos completamente diferentes, por exemplo, o conjunto dos gases nobres da tabela periódica e o conjunto das bandas do espectro luminoso estudado por Newton.



A construção formal do conjunto desses números naturais está fundamentada sobre dois conceitos da teoria dos conjuntos, que são o número zero e a relação de sucessão.

- O número zero indica a quantidade de elementos do conjunto vazio: $0 = n(\varnothing)$.
- A relação de sucessão é a que existe entre as cardinalidades de um conjunto K e do conjunto que se obtém acrescentando-se um único elemento ao conjunto K.

Com base nesses conceitos, enunciam-se os seguintes postulados:

I. Zero é um número natural.
II. Todo número natural possui sucessor.
III. Zero não é sucessor de nenhum número natural.
IV. Não há dois números naturais diferentes que possuam o mesmo sucessor.
V. Se um conjunto numérico possui o número zero e o sucessor de qualquer um de seus elementos, então esse é exatamente o conjunto dos números naturais.

Este último postulado é conhecido como o Princípio da Indução Matemática.

Postulado: princípio ou fato não demonstrado que se admite como verdadeiro.

Os números ordinais

Estes numerais servem de ferramenta para localização espacial, como na frase “Vire na 3ª rua à esquerda”, ou temporal, como em “Março é o 3º mês do ano”.

Observe que tanto a 3ª rua quanto o 3º mês são únicos em suas existências e que, nesses casos, o número 3 foi utilizado para indicar apenas uma unidade. Essa é a característica principal de um número natural ordinal.

! Atenção

Zero não é número natural ordinal.

Independentemente da interpretação, cardinal ou ordinal, dois números naturais são denominados consecutivos se diferem em apenas uma unidade.

Além disso, $\mathbb{N}$ é um conjunto numérico discreto. Isso significa que, entre dois números naturais consecutivos, não há nenhum outro número natural. Considere a ordem de chegada dos atletas que participam de uma corrida e observe, por exemplo, que não existe colocação intermediária entre o 3º e o 4º lugar.

Em linguagem matemática:

$$\left.\begin{array}{r} n \in \mathbb{N} \\ n < m < n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow m \notin \mathbb{N}$$

Defasagem cardinal ordinal

Usamos o asterisco para diferenciar os conjuntos de números naturais cardinais e ordinais. Assim:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$

Em todos os demais conjuntos numéricos o asterisco é usado para indicar que o número zero não é elemento do conjunto considerado.

É importante observar que há uma defasagem entre os elementos desse conjunto. Do fato de zero ser o primeiro número natural decorre que o número 12 é o 13º número natural, por exemplo.

A defasagem entre os elementos desses conjuntos é a responsável pelo ano de 2020 pertencer ao século 21, entre outros exemplos cotidianos.

! Atenção

Sendo a e b dois números inteiros tais que $a < b$, temos:
I. De a até b há exatamente $(b - a) + 1$ números inteiros.
II. Entre a e b há exatamente $(b - a) - 1$ números inteiros.

Exercícios resolvidos

1. Responda às seguintes perguntas:
a) Quantos números naturais podem ser contados a partir do número 10 até o número 100?
b) Quantos números naturais existem entre os números 10 e 100?

Resolução:

a) De 10 a 100, podem ser contados $(100 - 10) + 1 = 91$ números.
b) Entre 10 e 100, existem $(100 - 10) - 1 = 89$ números.

2. Uma corrida de rua disputada pelas crianças de um condomínio tinha as seguintes regras: na largada todas as crianças deveriam estar com uma das mãos encostadas no primeiro poste da calçada de um dos lados da rua, e a criança que encostasse primeiro a mão no oitavo poste dessa mesma calçada venceria a corrida.
A distância do primeiro para o segundo poste é de 50 metros, do segundo para o terceiro, 70 metros, do terceiro para o quarto, 90 metros, e assim por diante, ou seja, as distâncias entre dois postes consecutivos aumentam de vinte em vinte metros.
Com esses dados, podemos afirmar que a corrida toda tem
a) 190 metros.
b) 210 metros.
c) 770 metros.
d) 960 metros.
e) 1 170 metros.

Resolução:

Como oito postes consecutivos determinam apenas sete distâncias entre dois postes consecutivos, temos que o comprimento total da corrida, em metros, é igual à soma das seguintes sete parcelas:

$$50 + 70 + 90 + 110 + 130 + 150 + 170 = 770$$

A corrida tem 770 metros.
Resposta: alternativa C.

Operações com números naturais

Como já foi mencionado, esse conjunto numérico é fechado em relação às operações de adição, multiplicação, potenciação, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Isso significa que, sendo a e b dois números naturais quaisquer:

$(a + b) \in \mathbb{N}$ $(a \cdot b) \in \mathbb{N}$ $(a^b) \in \mathbb{N}$

$\text{mmc}(a, b) \in \mathbb{N}$ $\text{mdc}(a, b) \in \mathbb{N}$

Mas o conjunto $\mathbb{N}$ não é fechado em relação às operações de subtração, divisão, radiciação e extração de logaritmos. Por isso devem ser estabelecidas condições de existência (CE) para a execução dessas operações, com os elementos de $\mathbb{N}$.

Adição em $\mathbb{N}$

A operação de adição pode ser aplicada a qualquer quantidade de números naturais. Os números que participam da adição são chamados de parcelas, e o resultado da operação é chamado de soma.

Representando por n' o sucessor de um número natural n, a operação de adição começa a ser definida pelas seguintes proposições:

- $n + 0 = n$
- $n + 1 = n'$

A primeira sentença define o número zero como o elemento neutro da operação, e da segunda sentença deve-se entender que não existe número natural maior que n e menor que n'.

Representando por m' o sucessor de outro número natural m, a operação de adição fica finalmente definida por:

- $n + m' = (n + m)'$

Além das sentenças que a definem, a adição possui as propriedades comutativa e associativa:

- $n + m = m + n$
- $(n + m) + p = n + (m + p)$

Subtração em $\mathbb{N}$

A operação de subtração é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam da subtração são o minuendo e o subtraendo, e o resultado é chamado de diferença ou de resto.

O minuendo designa o número que será reduzido de certa quantidade que, por sua vez, é indicada pelo subtraendo da operação.

Sendo a e b dois números naturais, a diferença $(a - b)$ só é possível nesse conjunto se o número a for maior ou igual ao número b.

- $a \geqslant b \ \Rightarrow \ (a - b) \in \mathbb{N}$
- $a < b \ \Rightarrow \ (a - b) \notin \mathbb{N}$

A impossibilidade da subtração em outra ordem caracteriza essa operação como não sendo comutativa nem associativa. E como $(a - b) - c \neq a - (b - c)$, algumas propriedades devem ser observadas.

Veja:

- $a - b - c = (a - b) - c = a - (b + c)$
- $a - (b - c) = a - b + c = a + c - b$

O número zero funciona como elemento neutro da subtração apenas no lugar do subtraendo:

- $a - 0 = a$

O número zero também é o resultado da subtração de dois números iguais:

- $a - a = 0$

A subtração é a operação contrária da adição. Isso significa que, sendo a, b e c números naturais:

$$a + b = c \Rightarrow \begin{cases} a = c - b \\ b = c - a \end{cases}$$

Multiplicação em $\mathbb{N}$

A operação de multiplicação pode ser aplicada a qualquer quantidade de números naturais. Os números que participam da multiplicação são chamados de fatores, e o resultado da operação é chamado de produto.

A operação de multiplicação começa a ser definida pelas seguintes proposições:

- $1 \cdot n = n$
- $0 \cdot n = 0$

A primeira sentença define o número 1 como o elemento neutro da operação, e a segunda mostra que a multiplicação de qualquer número por zero resulta no próprio zero.

Representando por m' o sucessor do natural m, a operação de multiplicação fica finalmente definida por:

- $n \cdot m' = n \cdot m + n$

Dessa última expressão deduzem-se as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição e à subtração:

- $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$
- $n \cdot (m - p) = n \cdot m - n \cdot p$

Além das sentenças que a definem, a multiplicação também possui as propriedades comutativa e associativa:

- $n \cdot m = m \cdot n$
- $(n \cdot m) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

! Atenção

Em relação à participação do zero na multiplicação, é muito importante observar também a inexistência de dois números naturais diferentes de zero que produzam resultado zero quando multiplicados um pelo outro. Portanto, se um produto de números naturais é igual a zero, então um dos fatores deve, necessariamente, ser o próprio número zero.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Divisão euclidiana em $\mathbb{N}$

A operação de divisão é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam da divisão são o dividendo e o divisor, e os resultados são chamados de quociente e de resto.

No esquema a seguir, o dividendo n designa a quantidade que será repartida em partes iguais, o divisor d indica quantas são essas partes, o quociente q indica o valor de cada uma delas e o resto r indica quantas unidades sobram da partição.

$$\begin{array}{r|l} n & \underline{\quad d \quad} \\ r & \quad q \end{array}$$

Sendo n e d dois números naturais, a divisão n por d só é possível, nesse conjunto, se o número d for diferente de zero. Neste caso, para garantir que os valores do quociente e o resto sejam corretamente obtidos, duas relações algébricas devem ser verificadas, uma de igualdade e outra de desigualdade:

- $n = q \cdot d + r$
- $0 \leqslant r < d$

Observe que a relação de desigualdade não pode ser verificada quando $d = 0$, pois não há número natural r que satisfaça $0 \leqslant r < 0$. Note também que, como $0 \leqslant r < d$, o valor de q, que satisfaz a igualdade $n = q \cdot d + r$, deve ser máximo.

Exercícios resolvidos

3. Considere n como o maior número inteiro de dois algarismos que satisfaz às seguintes condições:

I. Dividindo-se o número n por 5 obtém-se resto igual a 3.

II. Dividindo-se por 5 o número formado pelos mesmos algarismos de n só que em ordem contrária, o resto obtido é igual a 2.

Nestas condições, a soma dos quadrados dos algarismos que formam o número n é igual a:

a) 113 **b)** 100 **c)** 85 **d)** 29 **e)** 14

Resolução:

Os números inteiros que deixam resto 3 na divisão por 5 terminam em 3 ou em 8, portanto, o algarismo das unidades de n é 3 ou 8.

Os números inteiros que deixam resto 2 na divisão por 5 terminam em 2 ou em 7, portanto, o algarismo das dezenas de n é 2 ou 7.

Assim, os únicos inteiros positivos que satisfazem às duas condições são: 23, 28, 73 ou 78.

Como n é o maior número, n é 78 e a soma dos quadrados dos seus algarismos é $7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$.

Resposta: alternativa A.

4. Qual é o 2017º algarismo da forma decimal da fração $\frac{2\,017}{7}$?

a) 1 **b)** 4 **c)** 2 **d)** 8 **e)** 5

Resolução:

O quociente inteiro da divisão de 2017 por 7 é 288 e o resto é igual a 1, ou seja, a parte inteira é 288 e a parte decimal é o resultado de 1 : 7.

Então a parte decimal é 0,142857142857142857..., uma dízima cujo período possui 6 algarismos.

Descontando os 3 algarismos da parte inteira, devemos procurar pelo 2014º algarismo da dízima.

Como a divisão de 2014 por 6 deixa resto 4, o algarismo procurado coincide com o 4º algarismo do período da dízima, que é o algarismo 8.

Resposta: alternativa D.

Múltiplos e divisores

Uma relação especial pode ser observada quando o resto da divisão de um número a por um número b é igual a zero. Ela é designada pelos termos múltiplo e divisor:

a é múltiplo de b $\Rightarrow$ b é divisor de a

Quando isso acontece, escreve-se $b|a$ que pode ser lido como "b divide a".

Dado um número natural qualquer k, o conjunto M(k) dos múltiplos naturais desse número k pode ser obtido multiplicando-o por todos os números naturais.

- $M(0) = \{0\}$
- $M(1) = \mathbb{N}$
- $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...\}$
- $M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, ...\}$

$\vdots$
- $M(k) = \{0, k, 2 \cdot k, 3 \cdot k, 4 \cdot k, 5 \cdot k, 6 \cdot k, 7 \cdot k, 8 \cdot k, 9 \cdot k, 10 \cdot k, 11 \cdot k, 12 \cdot k, ...\}$

$\vdots$

Observe que, com exceção de M(0), todos os demais conjuntos M possuem infinitos elementos. Além disso, nota-se também que o zero pertence a todos M(k), sendo o único elemento menor que o próprio k.

- $0 \in M(k)$
- $k \in M(k)$

Exercício resolvido

5. Bruno é um rapaz muito supersticioso. Um bom exemplo disso é a senha de quatro algarismos que ele escolheu para o seu cartão de crédito. Na senha de Bruno, não aparecem os algarismos 1 e 3, mas tanto o número formado pelos dois primeiros algarismos quanto o número formado pelos algarismos centrais e o número formado pelos dois últimos algarismos são múltiplos de 13.

Se os algarismos extremos da senha do cartão de Bruno são iguais, então, na senha do cartão de Bruno, a soma do maior algarismo com o menor algarismo deve ser igual a:

a) 12 **b)** 11 **c)** 10 **d)** 9 **e)** 8

Resolução:

Os múltiplos de 13 com apenas dois algarismos diferentes de 1 e 3 são: 26, 52, 65 e 78.

Portanto, a senha de Bruno só pode ser: 2652, 5265 ou 6526.

Em todos os casos, a soma do maior algarismo com o menor algarismo da senha é $2 + 6 = 8$.

Resposta: alternativa E.

Vamos encontrar o conjunto D(n) dos divisores naturais de um número n. Para isso, é necessário encontrar todos os valores de k para os quais $n \in M(k)$.

- $D(0) = \mathbb{N}$
- $D(1) = \{1\}$
- $D(2) = \{1, 2\}$
- $D(3) = \{1, 3\}$
- $D(4) = \{1, 2, 4\}$
- $D(5) = \{1, 5\}$
- $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$
- $D(7) = \{1, 7\}$
- $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$
- $D(9) = \{1, 3, 9\}$
- $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$
- $D(11) = \{1, 11\}$
- $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\vdots$

Observe que, exceto D(0), todos os demais conjuntos D são finitos. Além disso, temos que a unidade e n pertencem a todo D(n) e que não há no conjunto elemento maior que o próprio n.

- $1 \in D(n)$
- $n \in D(n)$

MDC

O máximo divisor comum de dois números naturais a e b é igual ao maior elemento positivo pertencente a ambos os conjuntos D(a) e D(b).

Sejam $a = 12$ e $b = 18$, por exemplo:

- o conjunto dos divisores de 12 é $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
- o conjunto dos divisores de 18 é $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$;

- o conjunto dos divisores comuns de 12 e 18 é D(12) ∩ D(18) = {1, 2, 3, 6};
- o maior número positivo desse conjunto de divisores comuns é mdc(12, 18) = 6.

Essa operação possui as propriedades comutativa e associativa:

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$$
$$\text{mdc}(a, \text{mdc}(b, c)) = \text{mdc}(\text{mdc}(a, b), c)$$

Além delas, é importante observar que, se $a \neq 0$, então:

$$\text{mdc}(0, a) = a$$
$$\text{mdc}(1, a) = 1$$

No caso de o número *a* ser múltiplo do número *b*:

$$\text{mdc}(a, b) = b$$

Quando o único divisor comum entre dois números naturais *a* e *b* é a unidade, dizemos que *a* e *b* são números primos entre si ou primos relativos um ao outro.

Sejam $a = 9$ e $b = 10$, por exemplo:

- o conjunto dos divisores de 9 é D(9) = {1, 3, 9};
- o conjunto dos divisores de 10 é D(10) = {1, 2, 5, 10};
- o conjunto dos divisores comuns de 9 e 10 é D(9) ∩ D(10) = {1};
- o único elemento desse conjunto de divisores comuns é mdc(9, 10) = 1.

Portanto, 9 e 10 são números primos entre si.

MMC

O mínimo múltiplo comum de dois números naturais *a* e *b* é igual ao menor elemento positivo pertencente a ambos os conjuntos M(*a*) e M(*b*).

Sejam $a = 12$ e $b = 18$, por exemplo:

- o conjunto dos múltiplos de 12 é M(12) = {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...};
- o conjunto dos múltiplos de 18 é M(18) = {0, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, ...};
- o conjunto dos múltiplos comuns de 12 e 18 é M(12) ∩ M(18) = {0, 36, 72, 108, ...};
- o menor número positivo desse conjunto de múltiplos comuns é mmc(12, 18) = 36.

Essa operação possui as propriedades comutativa e associativa:

$$\text{mmc}(a, b) = \text{mmc}(b, a)$$
$$\text{mmc}(a, \text{mmc}(b, c)) = \text{mmc}(\text{mmc}(a, b), c)$$

Além delas, é importante observar que:

$$\text{mmc}(0, a) = 0$$
$$a \neq 0 \Rightarrow \text{mmc}(1, a) = a$$

No caso de o número *a* ser múltiplo do número *b*:

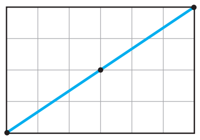
$$\text{mmc}(a, b) = a$$

No caso de *a* e *b* serem números primos entre si:

$$\text{mmc}(a, b) = a \cdot b$$

Exercícios resolvidos

6. Marcos pegou um caderno quadriculado e com uma régua uniu os vértices opostos de um retângulo de seis por quatro unidades, verificando que o segmento traçado passava sobre um único ponto da malha quadriculada situada no interior do retângulo, como mostra a figura:

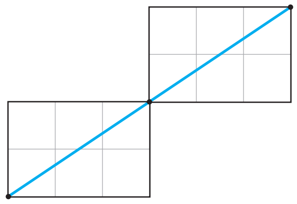


Se Marcos tivesse unido os vértices opostos de um retângulo de quinze por vinte unidades, o segmento traçado passaria por exatamente quantos pontos da malha quadriculada situada no interior desse retângulo?

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

Resolução:

Dividindo-se as dimensões do retângulo dado pelo seu máximo divisor comum mdc(6, 4) = 2, observa-se que este retângulo é formado por quatro retângulos menores de três por duas unidades. Além disso, pode-se observar que a diagonal do retângulo maior contém as diagonais de exatamente dois dos retângulos menores, que possuem apenas um ponto em comum.

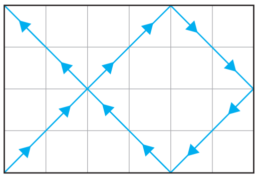


Assim, como mdc(15, 20) = 5, temos que a diagonal de um retângulo grande, com 15 por 20 unidades, conterá as diagonais de cinco retângulos menores com 3 por 4 unidades.

Portanto, essa diagonal passará por exatamente 4 pontos comuns a dois desses cinco retângulos menores.

Resposta: alternativa C.

7. Marina, irmã de Marcos, também tomou um retângulo de seis por quatro unidades do caderno quadriculado, mas fez um traçado diferente. Partindo do vértice inferior esquerdo do retângulo, ela traçou uma linha reta sobre as diagonais dos quadrados até que essa linha atingisse um dos limites laterais do retângulo. Quando isso aconteceu, ela mudou a direção de seu traçado, mantendo-o sempre sobre as diagonais dos quadrados no interior do retângulo, até atingir outro vértice desse retângulo, como mostra a figura:



Depois que Marina terminou seu desenho, ela verificou que havia traçado as diagonais de exatamente doze quadrados da malha. Se tivesse procedido dessa forma num retângulo de quinze por vinte unidades, ela teria traçado as diagonais de exatamente:

a) 30 quadrados da malha.
b) 40 quadrados da malha.
c) 45 quadrados da malha.
d) 50 quadrados da malha.
e) 60 quadrados da malha.

Resolução:

Sempre que a linha traçada por Marina atinge um limite lateral do retângulo, podemos observar que o número de quadrados por onde ela passou é múltiplo de uma das dimensões do retângulo.
Portanto, quando esta linha atingir um vértice, ou seja, um limite comum a dois lados do retângulo, o número de quadrados por onde ela passou será múltiplo comum das duas dimensões do retângulo.
Assim, na primeira vez que isto acontecer num retângulo de 15 por 20 unidades, o número de quadrados que terão suas diagonais traçadas será igual ao mmc(15, 20) = 60.
Resposta: alternativa E.

Divisão sem resto em $\mathbb{N}$

Quando um número a é múltiplo de um número b, o resto da divisão de a por b é nulo. Nesse caso, pode-se representar o quociente da divisão como $(a : b)$.

- a é múltiplo de $b \Rightarrow (a : b) \in \mathbb{N}$
- a não é múltiplo de $b \Rightarrow (a : b) \notin \mathbb{N}$

Trata-se de uma operação não comutativa, pois, se $a > b$, então b não é múltiplo de a, o que torna impossível o quociente $(b : a)$ no conjunto dos números naturais.

Também não é uma operação associativa, uma vez que $a : (b : c) \neq (a : b) : c$.

As propriedades a seguir servem para contornar essa desigualdade:

- $a : b : c = (a : b) : c = a : (b \cdot c)$
- $a : (b : c) = (a \cdot c) : b$

A unidade funciona como elemento neutro dessa divisão apenas no lugar do divisor:

- $a : 1 = a$

A unidade também é o resultado de um número positivo dividido por ele mesmo:

- $a > 0 \Rightarrow a : a = 1$

A divisão é a operação inversa da multiplicação. Isso significa que, sendo a, b e c números naturais:

$$a \cdot b = c \Rightarrow \begin{cases} a = c : b \\ b = c : a \end{cases}$$

Números primos e números compostos

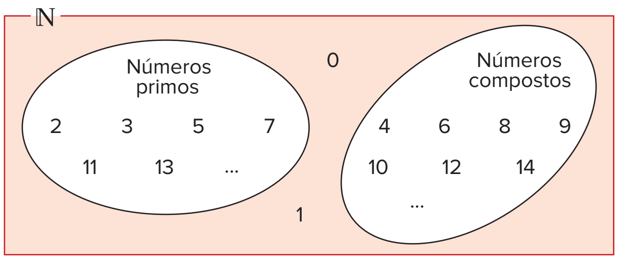
Um número natural é considerado primo absoluto ou simplesmente número primo se, e somente se, possuir exatamente dois divisores naturais distintos. Assim:

- O número 0 não é primo, pois possui infinitos divisores naturais. $D(0) = \mathbb{N}$.
- O número 1 também não é primo, pois possui apenas um divisor natural. $D(1) = \{1\}$.
- O número 2 é primo, pois possui exatamente dois divisores naturais. $D(2) = \{1, 2\}$.
- O número 3 também é primo, pois possui exatamente dois divisores naturais. $D(3) = \{1, 3\}$.
- O número 4 não é primo, pois possui três divisores naturais. $D(4) = \{1, 2, 4\}$.
- O número 5 é primo, pois possui exatamente dois divisores naturais. $D(5) = \{1, 5\}$.
- O número 6 não é primo, pois possui quatro divisores naturais. $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$.

  $\vdots$

Os números naturais que possuem mais de dois divisores são chamados de compostos. Assim, de acordo com a quantidade de divisores, os números naturais podem ser classificados em três categorias:

- Números que não são primos nem são compostos: 0 e 1.
- Números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- Números compostos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, ...



Se $n > 1$, então n é primo ou composto.

Se um número natural $p > 1$ é primo, então seus dois únicos divisores naturais são o número 1 e próprio número p:

- p é primo $\Rightarrow D(p) = \{1, p\}$

Se um número natural n é resultado do produto de dois números primos diferentes p_1 e p_2, então os divisores desse número são:

- $n = p_1 \cdot p_2 \Rightarrow D(n) = \{1, p_1, p_2, n\}$

Essa e outras características dos números primos e compostos são de grande utilidade para a ciência da criptografia, tão necessária nos dias de hoje.

O teorema fundamental da Aritmética garante que todo número composto é resultado do produto de uma única combinação de números primos. É fácil perceber que $2 \cdot 2$ e $2 \cdot 3$ são as únicas combinações de fatores que resultam em 4 e 6, mas pense em um número maior, como 3 628 800. O fato de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ ser a única sucessão crescente de fatores primos que resulta em 3 628 800 é mais difícil de se verificar.

Critérios de divisibilidade

Em alguns casos, pode-se perceber que um número composto é divisível por um número primo, mesmo sem efetuar a divisão euclidiana.

Observando o valor do algarismo das unidades de um número natural, verifica-se se ele é divisível por 2 ou 5:

- Números cujo último algarismo é 2, 4, 6, 8 ou 0 são divisíveis por 2.
- Números cujo último algarismo é 5 ou 0 são divisíveis por 5.

Observando a soma dos algarismos de um número natural, verifica-se se ele é divisível por 3. Números cuja soma dos algarismos é 3, 6 ou 9 são divisíveis por 3. Se a soma dos algarismos for maior que 9, então, os algarismos do resultado devem ser somados novamente, e assim sucessivamente, até que o resultado tenha apenas um algarismo. Pode-se perceber que o número 3 628 800 é múltiplo de 3, por exemplo, pois:

$$3 + 6 + 2 + 8 + 8 + 0 + 0 = 27 \text{ e } 2 + 7 = 9$$

Subtraindo e somando, alternadamente e nessa ordem, os algarismos de um número natural verifica-se se ele é divisível por 11 quando o resultado final dessas operações é zero e, caso este resultado seja maior que 9, então, as operações alternadas devem ser feitas novamente, até que o resultado tenha apenas um algarismo. Exemplos:

- 2 453 é múltiplo de 11, pois: $2 - 4 + 5 - 3 = 0$.
- 64 589 não é múltiplo de 11, pois: $6 - 4 + 5 - 8 + 9 = 8$.
- 7 092 954 é múltiplo de 11, pois: $7 - 0 + 9 - 2 + 9 - 5 + 4 = 22$ e $2 - 2 = 0$.

Também é possível perceber se um número composto é divisível por outro número composto, sem efetuar a divisão euclidiana. Exemplos:

- Números que terminam com 0 são sempre divisíveis por 10.
- Números cuja metade termina por 2, 4, 6, 8, ou 0 são sempre divisíveis por 4.
- Números cuja soma dos algarismos é igual a 9 são sempre divisíveis por 9. Se a soma dos algarismos for maior que 9, então, os algarismos do resultado devem ser somados novamente, e assim sucessivamente, até que o resultado tenha apenas um algarismo.

Além disso, se um número natural n é divisível por dois números a e b que são primos entre si, ou seja, tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$, então n também é divisível pelo produto $(a \cdot b)$. Exemplos:

- Números que são divisíveis por 2 e por 3 também são divisíveis por $2 \cdot 3 = 6$.
- Números que são divisíveis por 3 e por 4 também são divisíveis por $3 \cdot 4 = 12$.
- Números que são divisíveis por 3 e por 5 também são divisíveis por $3 \cdot 5 = 15$.
- Números que são divisíveis por 2, por 3 e por 5 também são divisíveis por $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Nos casos em que $\text{mdc}(a, b) > 1$, essa propriedade não se verifica. Veja o exemplo do número $n = 20$, que é divisível por $a = 4$ e por $b = 10$, mas não é divisível por $a \cdot b = 4 \cdot 10 = 40$:

- $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Decomposição em fatores primos

Todo número composto n pode ser decomposto em fatores primos efetuando-se sucessivas divisões sem resto por cada número primo do qual seja múltiplo, tantas vezes quantas forem possíveis. O número 3 628 800, por exemplo, pode ser dividido por 2 oito vezes sucessivas. Depois, o resultado dessas divisões pode ser dividido por 5 duas vezes sucessivas, depois, por 3 mais quatro vezes e finalmente por 7, até que o quociente final seja unitário. Observe a decomposição do número 3 628 800:

$$\begin{array}{r|l}
3\,628\,800 & \left.\begin{array}{l}2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\end{array}\right\}\text{8 fatores} \\
14\,175 & \left.\begin{array}{l}5\\5\end{array}\right\}\text{2 fatores} \\
567 & \left.\begin{array}{l}3\\3\\3\\3\end{array}\right\}\text{4 fatores} \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

3 628 800	2
1 814 400	2
907 200	2
453 600	2
226 800	2
113 400	2
56 700	2
28 350	2
14 175	5
2 835	5
567	3
189	3
63	3
21	3
7	7
1	

Nessa decomposição, por exemplo, também pode-se efetuar as divisões por 3 antes das divisões por 5, mas o fato é que a ordem dos fatores primos não importa, pois a multiplicação é uma operação comutativa. Desse modo, podemos efetuar as divisões como preferirmos, considerando, por exemplo, uma identificação mais rápida dos critérios de divisibilidade.

O algoritmo da decomposição tem duas colunas. A coluna da esquerda começa com o número a ser decomposto e segue com os quocientes das divisões até que o resultado seja igual a 1, e na coluna da direita escrevem-se os números primos que são os divisores no algoritmo.

Como o penúltimo número da coluna da esquerda sempre será um número primo, e ele pode ser relativamente grande, é recomendável que se tenha um bom repertório de números primos memorizados.

Os números primos menores, que possuem apenas um algarismo são: 2, 3, 5 e 7.

O quadro a seguir mostra a distribuição dos números primos de dois algarismos:

	Unidade 1	Unidade 3	Unidade 7	Unidade 9
Dezena 1	11	13	17	19
Dezena 2		23		29
Dezena 3	31		37	
Dezena 4	41	43	47	
Dezena 5		53		59
Dezena 6	61		67	
Dezena 7	71	73		79
Dezena 8		83		89
Dezena 9			97	

Exercício resolvido

8. Assinale a alternativa que apresenta um número que não pode ser obtido da soma dos algarismos de um número primo menor que 100.

a) 5
b) 7
c) 11
d) 13
e) 15

Resolução:

Como todas as alternativas apresentam números ímpares, devemos verificar a soma dos algarismos dos números primos de dois algarismos em que um desses algarismos é par. Estes números são:

$$23 \rightarrow 2 + 3 = 5$$
$$29 \rightarrow 2 + 9 = 11$$
$$41 \rightarrow 4 + 1 = 5$$
$$43 \rightarrow 4 + 3 = 7$$
$$47 \rightarrow 4 + 7 = 11$$
$$61 \rightarrow 6 + 1 = 7$$
$$67 \rightarrow 6 + 7 = 13$$
$$83 \rightarrow 8 + 3 = 11$$
$$89 \rightarrow 8 + 9 = 17$$

Resposta: alternativa E.

Números fatoriais

Chamamos os números que resultam do produto entre os primeiros números naturais positivos de números fatoriais. Indica-se o fatorial de um número natural n usando-se um ponto de exclamação (!).

Assim:

- $1! = 1$
- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

E para todo $n > 5$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n$$

Os números fatoriais maiores que 2 tendem a possuir muitos divisores. Comparando-se dois números fatoriais diferentes, pode-se afirmar que, se $a! > b!$, então:

- $a!$ é múltiplo de $b!$
- $b!$ é divisor de $a!$
- $\text{mmc}(a!, b!) = a!$
- $\text{mdc}(a!, b!) = b!$

Potenciação

A operação de potenciação é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam da potenciação são a base e o expoente. O resultado é chamado de potência.

Sendo b um número natural qualquer, a operação de potenciação começa a ser definida pelas seguintes proposições:

- $b^0 = 1$
- $b^1 = b$

A primeira sentença define que toda base elevada ao expoente zero resulta no número 1, e a segunda define que o número 1 funciona como expoente neutro.

Representando por n' o sucessor de outro número natural n, fica definido que:

$$b^{n'} = b \cdot b^n$$

Também é possível definir a potência de base b e expoente n como o resultado da multiplicação sucessiva do número 1 por n fatores iguais a b:

$$b^n = 1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplos:

- $3^2 = 1 \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ fatores}} = 9$
- $2^3 = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ fatores}} = 8$

Esses exemplos mostram que a potenciação não é uma operação comutativa, ou seja, $a^b \neq b^a$ com apenas uma exceção em $\mathbb{N}$: $a = 2$ e $b = 4$.

A potenciação tem propriedade distributiva em relação às operações de multiplicação e divisão:

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a : b)^n = a^n : b^n$

O produto de potências de mesma base é obtido conservando-se a base e adicionando-se os expoentes:

- $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

O quociente de potências de mesma base é obtido conservando-se a base e subtraindo-se os expoentes:

- $b^n : b^m = b^{n-m}$

A potenciação é usada para abreviar a notação decomposta de um número natural, como 3628800, por exemplo, cujos fatores são $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Na forma abreviada pela potenciação, esse número fica expresso por $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Exercícios resolvidos

9. Se a soma $2022^{2021} + 2022^{2021} + 2022^{2021} + ... + 2022^{2021}$ possui 2021 parcelas, então o total é de:

a) $2022^{2022} - 1$
b) 2022^{2022}
c) $2022^{2022} - 2022$
d) $2022^{2021} - 1$
e) $2022^{2022} - 2022^{2021}$

Resolução:

Com 2021 parcelas, essa soma pode ser expressa pelo produto: $2021 \cdot 2022^{2021}$.

Fazendo $2021 = 2022 - 1$ tem-se:

$(2022 - 1) \cdot 2022^{2021} = 2022 \cdot 2022^{2021} - 1 \cdot 2022^{2021} =$

$= 2022^{1+2021} - 2022^{2021} = 2022^{2022} - 2022^{2021}$

Resposta: alternativa E.

10. Determine a soma dos algarismos do resultado que se obtém efetuando-se $5^{2021} \cdot 2^{2023} - 2022$.

Resolução:

$5^{2021} \cdot 2^{2023} = 5^{2021} \cdot 2^{2021} \cdot 2^2 = (5 \cdot 2)^{2021} \cdot 4 =$

$= 4 \cdot 10^{2021} = 4\underbrace{00000...00000}_{2\,021 \text{ zeros}}$

$$\begin{array}{r} 4\,00000...00000 \\ -\quad 2\,022 \\ \hline \underbrace{39\,9999...97978}_{2\,022 \text{ algarismos}} \end{array}$$

Como o resultado possui exatamente 2022 algarismos, dos quais apenas 4 são diferentes de 9, temos que a soma desses algarismos é: $3 + 7 + 7 + 8 +$ $+ (2022 - 4) \cdot 9 = 25 + 2018 \cdot 9 = 25 + 18162 =$ $= 18187$.

Quadrados perfeitos e cubos perfeitos

Devido ao seu uso no cálculo de áreas e volumes, as potências de expoentes 2 e 3 são também chamadas de "quadrados" e "cubos", respectivamente.

- A segunda potência de uma base b é indicada por b^2 e pode ser lida como "b ao quadrado".
- A terceira potência de uma base b é indicada por b^3 e pode ser lida como "b ao cubo".

Com estes termos podem ser definidos dois importantes subconjuntos dos números naturais:

- O conjunto dos quadrados perfeitos $= \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- O conjunto dos cubos perfeitos $= \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 2 = 4 \\ 3 \cdot 3 = 9 \\ 4 \cdot 4 = 16 \\ 5 \cdot 5 = 25 \\ 6 \cdot 6 = 36 \\ 7 \cdot 7 = 49 \\ 8 \cdot 8 = 64 \\ 9 \cdot 9 = 81 \\ 10 \cdot 10 = 100 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{Quadrados perfeitos} \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \\ 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \\ 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \\ 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \\ 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 \\ 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 \\ 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 \\ 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{Cubos perfeitos}$$

Exercício resolvido

11. O menor número inteiro que pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos, de duas formas diferentes, é o número 50.

- $50 = 1^2 + 7^2$
- $50 = 5^2 + 5^2$

Qual é o próximo?

a) 58 **b)** 64 **c)** 85 **d)** 89 **e)** 92

Resolução:

O próximo número inteiro que pode ser escrito como soma de dois quadrados perfeitos é o 85:

$85 = 2^2 + 9^2$ $\qquad 85 = 6^2 + 7^2$

Resposta: alternativa C.

Radiciação e logaritmos em $\mathbb{N}$

A operação de radiciação ou extração de raízes é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam da radiciação são o índice do radical e o radicando. O resultado é chamado de raiz.

O índice do radical designa a ordem da radiciação, e o radicando, o número do qual será extraída a raiz.

Sendo p e n números naturais, a notação radical $\sqrt[n]{p}$ só é possível nesse conjunto se o número p for a n-ésima potência de algum número natural m, de modo que a radiciação se presta como uma das operações contrárias da potenciação:

$$\sqrt[n]{p} = m \Rightarrow m^n = p$$

O número 1 funciona como elemento neutro no lugar do índice do radical, de modo que a primeira raiz de um número natural é igual a ele mesmo, ou seja, $\sqrt[1]{p} = p$.

Quando o índice do radical é igual a 2, ele pode ser omitido, ou seja, $\sqrt[2]{q} = \sqrt{q}$. A segunda raiz de um número é denominada sua raiz quadrada, e os únicos números que possuem raiz quadrada natural são os quadrados perfeitos.

A terceira raiz de um número é denominada sua raiz cúbica, e os únicos números que possuem raiz cúbica natural são os cubos perfeitos.

A radiciação não é uma operação associativa e nem comutativa, mas possui propriedade distributiva em relação à multiplicação e à divisão:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

Além dessas propriedades, também é fato que:

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}} = \sqrt[n \cdot m]{p}$

A extração de logaritmos é aplicada a apenas dois números naturais de cada vez. Os números que participam dessa operação são o logaritmando e a base. O resultado é chamado de logaritmo.

Dada uma base b, os únicos números do conjunto $\mathbb{N}$ que possuem logaritmos nessa base são as potências de b, ou seja, os números do conjunto $\{1, b, b^2, b^3, b^4, ...\}$.

O logaritmo também se presta como operação inversa da potenciação:

$$b^n = p \Rightarrow n = \log_b(p)$$

A extração de logaritmos não é uma operação associativa nem comutativa, mas possui uma série de propriedades importantes, que serão estudadas em outra ocasião. Veja alguns exemplos comparando resultados de potenciações às suas duas operações contrárias: a extração de raízes e de logaritmos.

Radiciação	Potenciação	Logaritmo
$\sqrt[3]{8} = 2$	$2^3 = 8$	$\log_2(8) = 3$
$\sqrt{9} = 3$	$3^2 = 9$	$\log_3(9) = 2$
$\sqrt[4]{625} = 5$	$5^4 = 625$	$\log_5(625) = 4$
$\sqrt[5]{1024} = 4$	$4^5 = 1024$	$\log_4(1024) = 5$

Saiba mais

Zero elevado a zero

De acordo com a teoria dos conjuntos, sendo n a cardinalidade de um conjunto finito A e m a cardinalidade de um conjunto finito B, a potência m^n designa o número total de funções do conjunto A para o conjunto B.

Considerando o caso em que A e B são conjuntos vazios, ou seja, $m = n = 0$, existe uma única função que pode ser definida de A para B, que por sua vez também é um conjunto vazio de pares ordenados.

Portanto, no conjunto $\mathbb{N}$, o resultado da potência zero elevado a zero é unitário, ou seja, $0^0 = 1$.

Exercício resolvido

12. Se $\sqrt[m]{729} = 3$ e $\sqrt[n]{729} = 9$, então os índices m e n das raízes são tais que:

a) $m + n = 729$ **c)** $m = n + 9$ **e)** $m = 2n$
b) $m = n^2$ **d)** $m = 3n$

Resolução:

Decompondo o número 729 em fatores primos obtemos 3^6, portanto $m = 6$.
Como $3^6 = (3^2)^3 = 9^3$, temos que $n = 3$.
Logo, $m = 2n$.
Resposta: alternativa E.

Os números inteiros

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros extrapola o conceito de número natural admitindo a existência de números cardinais menores que zero, denominados inteiros negativos. Com isso, os números naturais maiores que zero passam a ser chamados de inteiros positivos.

Nesse conjunto, o zero é o único número que não é positivo nem negativo. Os números inteiros negativos são obrigatoriamente precedidos pelo sinal (−), e os números positivos podem ser precedidos pelo sinal (+) ou sem sinal algum.

$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$

Um dos principais subconjuntos de $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros não nulos:

$\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$

Esse subconjunto dos números inteiros também apresenta características ordinais, pois não possui o zero. Desse modo, pode-se contar em dois sentidos opostos, como se faz no ocidente para numerar os séculos da história, por exemplo. Os séculos negativos são indicados por a.C., os positivos, por d.C. e não há o século zero.

Além dos inteiros não nulos, outros quatro subconjuntos de $\mathbb{Z}$ merecem atenção.

- O conjunto dos números inteiros positivos:
  $\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$
- O conjunto dos números inteiros negativos:
  $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, ...\}$
- O conjunto dos números inteiros não negativos:
  $\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$
- O conjunto dos números inteiros não positivos:
  $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, ...\}$

Atenção

O conjunto $\mathbb{Z}$ também é discreto, ou seja, se $n \in \mathbb{Z}$ e $n < m < n + 1$, então $m \notin \mathbb{Z}$.

Exercício resolvido

13. A expansão da República Romana para além da península Itálica teve seu início no século III a.C. e término em meados do século IV d.C. Em quantos séculos da nossa história podemos afirmar que houve tal expansão?

a) 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 8

Resolução:

A expansão da República Romana para além da península Itálica ocorreu nos três últimos séculos a.C. e nos quatro primeiros séculos d.C.
Então, como não há o século zero, temos que essa expansão ocorreu durante $3 + 4 = 7$ séculos da nossa história.
Resposta: alternativa D.

Oposto do número natural

Cada número inteiro negativo é concebido como o oposto, ou simétrico, de um número natural e o sinal (−) indica essa oposição. Assim:

- −1 indica o oposto do número 1;
- −2 indica o oposto do número 2;
- −3 indica o oposto do número 3;

  ⋮
- $-n$ indica o oposto do número n.

Em $\mathbb{Z}$ o único número que não possui oposto é o número zero.

A relação de oposição é dual. Isso significa não haver uma terceira opção para essa relação, de modo que os opostos dos números inteiros negativos sejam os números positivos. Assim:

- 1 indica o oposto do número -1;
- 2 indica o oposto do número -2;
- 3 indica o oposto do número -3;

$\vdots$

- n indica o oposto do número $-n$.

Portanto, o oposto do oposto de um número n deve ser o próprio número n, ou seja, $-(-n) = n$. Perceba que todas essas afirmações são válidas para qualquer sinal de n.

Orientação ordinal

Entre as contribuições proporcionadas pelo advento dos números negativos está a ampliação do aspecto ordinal do número que adquire dupla orientação em relação a uma referência original, que pode ser espacial, temporal etc.

Veja o exemplo da escala Celsius de temperatura, em que o número zero é fixado como a temperatura de congelamento da água e as temperaturas mais frias são designadas por graus negativos, enquanto as mais quentes, por graus positivos, de modo que cada grau negativo corresponda à mesma variação de temperatura que cada grau positivo, mas em outro sentido.

No conjunto $\mathbb{Z}$, o número zero é sucessor do número -1 que, por sua vez, é o sucessor do número -2, e assim por diante. Nesse conjunto todo elemento possui um sucessor e um antecessor.

Módulo de um número inteiro

Todo número ordinal n está associado a dois números inteiros distintos, $+n$ e $-n$, de modo que entre eles esteja o número zero e exatamente a mesma quantidade de números positivos e negativos.

Natural ordinal (nº)	Inteiro positivo ($+n$)	Inteiro negativo ($-n$)	Inteiros entre $+n$ e $-n$
1º	+1	−1	0
2º	+2	−2	−1, 0, +1
3º	+3	−3	−2, −1, 0, +1, +2
4º	+4	−4	−3, −2, −1, 0, +1, +2, +3
⋮	⋮	⋮	⋮

Em contrapartida, eliminando a orientação positiva/negativa de dois números inteiros opostos, obtém-se sempre o mesmo número ordinal. Chamamos de módulo de um número inteiro, ou valor absoluto de um número inteiro, ao número natural que se obtém ao eliminar o sinal de um número inteiro. O módulo é representado por duas barras verticais, assim, o módulo do número a é indicado por $|a|$.

- $|+1| = |-1| = 1$
- $|+2| = |-2| = 2$
- $|+3| = |-3| = 3$

$\vdots$

Operações com números inteiros

O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações de adição, subtração e multiplicação. Assim, sendo a e b dois números inteiros quaisquer:

$(a + b) \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(a - b) \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(a \cdot b) \in \mathbb{Z}$

Outras operações entre números inteiros, como a potenciação, por exemplo, podem gerar resultados que escapam desse conjunto.

Adição em $\mathbb{Z}$

No conjunto $\mathbb{Z}$ a adição admite todas as propriedades que a definem no conjunto $\mathbb{N}$. A novidade é a existência de opostos aditivos, ou seja, pares de números cuja soma resulte no elemento neutro da operação: o número zero.

- $-1 + 1 = 0$
- $-2 + 2 = 0$
- $-3 + 3 = 0$

$\vdots$

- $-n + n = 0$

A soma de dois números inteiros a e b de mesmo sinal tem o mesmo sinal das parcelas.

A soma de dois números positivos equivale à soma de dois números naturais. Exemplo:

$$(+3) + (+5) = 3 + 5 = 8$$

A soma de dois números negativos é negativa, sendo que seu módulo é igual à soma dos módulos das parcelas. Exemplo:

$$(-3) + (-5) = -8$$

Para efetuar a adição de dois números inteiros com sinais diferentes, é necessário verificar qual deles possui o maior módulo. O sinal do número de maior módulo será o sinal da soma, e o módulo da soma será igual à diferença absoluta dos módulos das parcelas. Observe:

- $(-3) + (+5) = +2$
- $(+3) + (-5) = -2$
- $(-5) + (+3) = -2$
- $(+5) + (-3) = +2$

Eliminando o sinal das parcelas ficamos com os números 3 e 5, cuja diferença absoluta é de 2 unidades. Então, como $5 > 3$, o resultado final fica com o mesmo sinal da parcela 5.

Subtração em $\mathbb{Z}$

Cada número negativo em si pode ser tomado como o resultado da subtração de minuendo zero e algum subtraendo natural. Observe que:

- $-3 = 0 - 3$
- $-11 = 0 - 11$

Mas, de forma prática, no conjunto $\mathbb{Z}$ a subtração também pode ser interpretada como uma adição, desde que se tome para a segunda parcela o valor oposto ao subtraendo.

- $(-3) - (+5) = (-3) + (-5) = -8$
- $(+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8$
- $(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = -8$
- $(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = +8$

A subtração não é uma operação comutativa, por isso $(a - b)$ é diferente de $(b - a)$ quando a e b são números inteiros diferentes um do outro. Os valores de $(a - b)$ e $(b - a)$ são opostos, ou seja, $(a - b) = -(b - a)$.

Observando o fato de esses valores terem o mesmo módulo, pode-se concluir que a **diferença absoluta** de dois números inteiros é uma operação comutativa:

$$|a - b| = |b - a|$$

Multiplicação em $\mathbb{Z}$

A operação de multiplicação de números inteiros admite todas as propriedades que a definiram no conjunto $\mathbb{N}$, além das seguintes regras de sinal:

$(+) \cdot (+) = (+)$ $\quad$ $(-) \cdot (-) = (+)$

$(+) \cdot (-) = (-)$ $\quad$ $(-) \cdot (+) = (-)$

Efetuando a multiplicação de números inteiros, observa-se que o módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos fatores:

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

E, além disso, que:

- O produto de dois números inteiros de mesmo sinal é sempre positivo.
- O produto de dois números inteiros de sinais contrários é sempre negativo.

Divisão sem resto em $\mathbb{Z}$

Neste conjunto numérico também acontece de um número a ser múltiplo de um número b. Nesse caso, o resto da divisão é nulo e pode-se representar o quociente da divisão como $(a : b)$, onde vale a mesma regra de sinais da multiplicação:

$(+) : (+) = (+)$ $\quad$ $(-) : (-) = (+)$

$(+) : (-) = (-)$ $\quad$ $(-) : (+) = (-)$

Máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc)

Com a inclusão dos números negativos, os conjuntos dos múltiplos e dos divisores de um número adquirem novos elementos.

O conjunto dos divisores de 12, por exemplo, é igual ao conjunto dos divisores de -12:

$D(-12) = D(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Assim como o conjunto dos divisores de 18 é igual ao conjunto dos divisores de -18:

$D(-18) = D(18) = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

O conjunto dos múltiplos de -12 é igual ao conjunto dos múltiplos de 12:

$M(-12) = M(12) = \{..., -48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48, ...\}$

Assim como o conjunto dos múltiplos de -18 é igual ao conjunto dos múltiplos de 18:

$M(-18) = M(18) = \{..., -72, -54, -36, -18, 0, 18, 36, 54, 72, ...\}$

O máximo divisor comum de dois números inteiros segue a mesma definição dada no conjunto dos números naturais, pois os números positivos são maiores que os negativos.

Por conveniência, toma-se o mínimo múltiplo comum de números inteiros como um valor positivo, quaisquer que sejam os sinais dos números envolvidos. Observe que se os múltiplos negativos fossem incluídos como possibilidade para o mmc, a definição desta operação não encontraria resultado algum, pois o conjunto dos múltiplos inteiros de qualquer número diferente de zero decresce infinitamente.

- $\text{mdc}(-18, -12) = \text{mdc}(18, -12) = \text{mdc}(-18, 12) =$ $= \text{mdc}(18, 12) = +6$
- $\text{mmc}(-18, -12) = \text{mmc}(18, -12) = \text{mmc}(-18, 12) =$ $= \text{mmc}(18, 12) = +36$

Potenciação em $\mathbb{Z}$

A potenciação não é uma operação fechada em $\mathbb{Z}$, porque as potências de bases inteiras e expoentes negativos escapam desse conjunto.

- $(+5)^{-3} \notin \mathbb{Z}$
- $(+3)^{-2} \notin \mathbb{Z}$

Em relação às potências de base negativa e expoente positivo, aplica-se a regra de sinais da multiplicação, que dependerá exclusivamente da quantidade de fatores envolvidos, indicada pelo expoente da potenciação.

Assim, se o expoente for par então a potência será positiva, mas se o expoente for ímpar a potência será negativa. Exemplos:

- $(-3)^2 = +9$
- $(-3)^3 = -27$
- $(-3)^4 = +81$
- $(-3)^5 = -243$

$\vdots$

As bases negativas devem ser indicadas entre parênteses, caso contrário o sinal que antecede a potenciação também será o sinal do resultado, pois, nesse caso, tem-se o inverso de uma potência de base positiva. Exemplos:

- $-3^2 = -9$
- $-3^3 = -27$
- $-3^4 = -81$
- $-3^5 = -243$

$\vdots$

Exercício resolvido

14. O número de soluções inteiras da equação $x^y = 64$ é:

a) 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 2

Resolução:

O número 64 pode ser escrito na forma de uma potência de base e expoente naturais de quatro maneiras diferentes: $64^1 = 8^2 = 4^3 = 2^6$.

Como as potências de base negativa e expoente par são positivas, temos mais duas opções: $(-8)^2$ e $(-2)^6$.

Logo, a equação $x^y = 64$ admite exatamente seis soluções distintas, que são os pares (x, y) correspondentes.

Resposta: alternativa A.

Radiciação em $\mathbb{Z}$

A radiciação também não é uma operação fechada no conjunto dos números inteiros, exceto quando o radicando é unitário. Os radicais de índices negativos não pertencem a este conjunto.

- $n \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \sqrt[n]{1} = 1$
- $n < 0$ e $p \neq \pm 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Z}$

Além disso, se o radicando for negativo, as únicas raízes que podem gerar um resultado inteiro são aquelas cujos índices naturais não são divisíveis por 2, desde que o radicando seja uma potência adequada. Nesse caso, a raiz também será um número negativo. Exemplos:

- $\sqrt{-4} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$
- $\sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{Z}$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$

$\vdots$

Como a radiciação é uma das operações contrárias da potenciação, para resolver algumas equações também é necessário observar se o expoente é, ou não, múltiplo de 2.

Pergunta	Equação	Solução
Qual número inteiro deve ser elevado à segunda potência para se obter o número +9?	$n^2 = +9$	$n = \pm\sqrt{+9}$ $n = \pm 3$
Qual número inteiro deve ser elevado à segunda potência para se obter o número −9?	$n^2 = -9$	Não há solução.
Qual número inteiro deve ser elevado à terceira potência para se obter o número +8?	$n^3 = +8$	$n = \sqrt[3]{+8}$ $n = +2$
Qual número inteiro deve ser elevado à terceira potência para se obter o número −8?	$n^3 = -8$	$n = \sqrt[3]{-8}$ $n = -2$

Assim, se a segunda potência de um número inteiro n for um quadrado perfeito, por exemplo, então o valor de n pode ser positivo ou negativo.

Atenção

Em particular, as raízes quadradas de um quadrado perfeito devem ser indicadas com os dois sinais, pois a ausência do sinal antecedendo o radical indica apenas a raiz positiva. Exemplo:

$$\pm\sqrt{9} = \pm 3 \qquad -\sqrt{9} = -3 \qquad +\sqrt{9} = +3$$

A terceira das sentenças acima é a única que mantém seu significado quando escrita sem os sinais, de modo que $\sqrt{9} = 3$ também a representa.

Divisão com resto em $\mathbb{Z}$

Neste conjunto numérico, o algoritmo da divisão euclidiana também deve produzir quociente e resto. O sinal do quociente obedece à mesma regra de sinais da multiplicação, mas o resto produzido não pode ser negativo, ele independe dos sinais do dividendo e do divisor.

$$\begin{array}{r|l} n & d \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow \begin{cases} n = q \cdot d + r \\ 0 \leqslant r < |d| \end{cases}$$

É necessário observar que o resto r deve representar quanto o dividendo n ultrapassa o maior múltiplo do divisor d que seja inferior a n. Veja os exemplos a seguir.

- Dividendo e divisor positivos:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

- Dividendo positivo e divisor negativo:

$$\begin{array}{r|l} 13 & -5 \\ \hline 3 & -2 \end{array}$$

- Dividendo negativo e divisor positivo:

$$\begin{array}{r|l} -13 & 5 \\ \hline 2 & -3 \end{array}$$

- Dividendo e divisor negativos:

$$\begin{array}{r|l} -13 & -5 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

Saiba mais

A divisão com resto em $\mathbb{Z}$ pode ser útil para se encontrar o mdc e o mmc de dois números.

Para o mdc entre dois números existe o algoritmo da divisão sucessiva, que funciona da seguinte maneira:

- Primeiro divide-se o maior dos números pelo menor;
- Depois, se o resto for diferente de zero, deve-se dividir o divisor da divisão anterior por este resto, assim sucessivamente, até que seja efetuada uma divisão exata, ou seja, em que o resto é zero.
- O máximo divisor comum entre os números dados será o dividendo da última operação efetuada.

Veja, por exemplo, que para obter o mdc(280, 180) são necessárias quatro divisões sucessivas:

$$\begin{array}{r|l} 280 & 180 \\ \hline 100 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 180 & 100 \\ \hline 80 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r|l} 100 & 80 \\ \hline 20 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 80 & 20 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

Portanto, mdc(280, 180) = 20.

Para calcular o mmc de dois números inteiros $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ basta multiplicar os seus valores absolutos e dividir o resultado pelo mdc desses mesmos números:

$$\text{mmc}(a, b) = \frac{|a| \cdot |b|}{\text{mdc}(a, b)}$$

Exemplo: $\text{mmc}(280, 180) = \dfrac{280 \cdot 180}{20} = 2\,520$

Ideais e laterais

Todo número natural n está associado a um conjunto de números inteiros cujos elementos são os resultados das multiplicações de todos os números inteiros por n. Trata-se do conjunto dos múltiplos inteiros do número n, que podemos indicar por $n\mathbb{Z}$.

Assim, se o conjunto $\{..., -52, -39, -26, -13, 0, 13, 26, 39, 52, ...\}$ possui todos os múltiplos de 13, por exemplo, esse conjunto fica representado por $13\mathbb{Z}$.

O único conjunto finito que pode ser obtido dessa forma ocorre quando $n = 0$, pois $0\mathbb{Z} = \{0\}$.

Se $n = 1$, o conjunto resultante desse processo é o próprio conjunto dos números inteiros, $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Todos os outros valores de n geram conjuntos com uma infinidade de elementos denominados múltiplos de n:

- $2\mathbb{Z} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...\}$
- $3\mathbb{Z} = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, ...\}$
- $4\mathbb{Z} = \{..., -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, ...\}$
- $5\mathbb{Z} = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, ...\}$

$\vdots$

Sendo n um número natural, os conjuntos do tipo $n\mathbb{Z}$ são chamados de "ideais" por serem fechados às operações de adição, subtração e multiplicação. Assim, sendo a e b dois elementos de um mesmo ideal $n\mathbb{Z}$, tem-se que:

$(a + b) \in n\mathbb{Z}$ $\quad$ $(a - b) \in n\mathbb{Z}$ $\quad$ $(a \cdot b) \in n\mathbb{Z}$

Vamos demonstrar essas afirmações:

Considerando o ideal $n\mathbb{Z}$, se x_1 e x_2 são seus elementos, então devem existir inteiros k_1 e k_2 de modo que:

$$x_1 = n \cdot k_1 \text{ e } x_2 = n \cdot k_2$$

O conjunto $n\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações de adição e subtração, pois:

$$x_1 \pm x_2 = n \cdot k_1 \pm n \cdot k_2 = n \cdot (k_1 \pm k_2) \in n\mathbb{Z}$$

O conjunto $n\mathbb{Z}$ é fechado em relação à multiplicação, pois:

$$x_1 \cdot x_2 = n \cdot k_1 \cdot n \cdot k_2 = n \cdot (n \cdot k_1 \cdot k_2) \in n\mathbb{Z}$$

Além dessas propriedades de fechamento dos conjuntos ideais, toda potência de expoente ordinal de um elemento de $n\mathbb{Z}$ também é elemento de $n\mathbb{Z}$ e, em relação à divisão euclidiana, embora o quociente da divisão de a por b não seja, necessariamente, elemento do ideal $n\mathbb{Z}$, o resto da divisão certamente será elemento desse conjunto.

Vamos demonstrar a última afirmação.

Sendo q o quociente da divisão de x_1 por x_2 e r o resto dessa divisão:

$$x_1 = q \cdot x_2 + r \Rightarrow n \cdot k_1 = q \cdot n \cdot k_2 + r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n \cdot k_1 - q \cdot n \cdot k_2 = r \Rightarrow r = n \cdot (k_1 - q \cdot k_2) \in n\mathbb{Z}$$

! Atenção

Considerando o conjunto $n\mathbb{Z}$ com $n = 13$, por exemplo, as propriedades dos ideais, vistas até aqui, garantem que:

- Somando múltiplos de 13 obtêm-se múltiplos de 13.
- A diferença de dois múltiplos de 13 também é múltipla de 13.
- Multiplicando múltiplos de 13 obtêm-se múltiplos de 13.
- O resto da divisão de dois múltiplos de 13 também é múltiplo de 13.

Cada ideal $n\mathbb{Z}$, com $n \geqslant 2$ está associado a exatamente $n - 1$ subconjuntos de $\mathbb{Z}$, denominados conjuntos "laterais".

Particularmente, $2\mathbb{Z}$ designa o conjunto dos números pares, cujo único conjunto lateral associado é o conjunto dos números ímpares, formado por todos os inteiros que deixam resto 1 quando divididos pelo número 2.

Os números ímpares podem ser definidos pela expressão $2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$, e trata-se do único lateral do conjunto dos números pares, porque o número 1 também é o único resto diferente de zero que pode ser obtido da divisão de um número inteiro pelo número 2.

- O conjunto dos números pares é $\{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$.
- O conjunto dos números ímpares é $\{..., -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$.

Quando um número inteiro é dividido por 3, os possíveis restos da divisão são os números 1 e 2, por isso o ideal $3\mathbb{Z}$ pode ser associado a dois conjuntos laterais diferentes:

- o conjunto dos números da forma $3k + 1$, que deixam resto 1 quando divididos por 3;
- o conjunto dos números da forma $3k + 2$, que deixam resto 2 quando divididos por 3.

Quando um número inteiro é dividido por 4, os possíveis restos da divisão são os números 1, 2 e 3, por isso o ideal $4\mathbb{Z}$ pode ser associado a três conjuntos laterais diferentes:

- o conjunto dos números da forma $4k + 1$;
- o conjunto dos números da forma $4k + 2$;
- o conjunto dos números da forma $4k + 3$.

Exercícios resolvidos

15. Determine o menor inteiro positivo que deixa resto 7 ao ser dividido por 12 e ao ser dividido por 15.

Resolução:

Sendo n tal número, do enunciado temos que $n = 12 \cdot k_1 + 7$ e $n = 15 \cdot k_2 + 7$, ou seja, n pertence a dois laterais distintos com defasagem de 7 unidades dos ideais $12\mathbb{Z}$ e $15\mathbb{Z}$. Portanto:

- $(n - 7) \in 12\mathbb{Z}$
- $(n - 7) \in 15\mathbb{Z}$

Como $\text{mmc}(12, 15) = 60$ tem-se que $(n - 7) \in 60\mathbb{Z}$.

O menor elemento positivo desse conjunto é o número 60:

$$n - 7 = 60 \Rightarrow n = 67$$

16. Encontre o menor número inteiro positivo de três algarismos N tais que:

- N dividido por 17 deixa resto 5 e
- N dividido por 27 deixa resto 22.

Resolução:

Do enunciado, existem números inteiros positivos a, b e c tais que:

$N = 17a + 5 \Rightarrow N - 5 = 17a$
$N = 27b + 22 \Rightarrow N - 5 = 27b + 17$

Portanto, da igualdade $17a = 27b + 17$ pode-se concluir que b é múltiplo de 17. Então:

Com $b = 0$, tem-se: $N = 27b + 22 = 27 \cdot 0 + 22 = 22$.

Com $b = 17$, tem-se: $N = 27b + 22 = 27 \cdot 17 + 22 = 481$.

Os números racionais

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais vem suprir a necessidade de se anotar quantidades intermediárias entre dois números inteiros consecutivos. Os termos “dois terços”, “três quartos” e “um quinto” são alguns exemplos de numerais que designam quantidades entre zero e um.

Como entre dois números racionais a e b distintos quaisquer existe uma infinidade de outros números racionais, este não é um conjunto numérico discreto, pois nenhum número racional possui sucessor ou antecessor no conjunto $\mathbb{Q}$. Dizemos que o conjunto dos números racionais é “denso”.

Notação fracionária de um número racional

Juntando os sinais (+) e (−) aos dez algarismos do sistema decimal {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, obtém-se símbolos suficientes para representar qualquer número inteiro. Acrescentando-se a vírgula (,) e as reticências (...) a essa coleção de símbolos, torna-se possível representar os números que não são inteiros.

Em relação à representação decimal dos números racionais, eles podem ser separados em três categorias: a dos números inteiros, que não precisam ser escritos com o uso da vírgula, a dos números que possuem quantidade finita de casas decimais após a vírgula e a dos números que apresentam infinitas casas decimais após a vírgula. Estes últimos são conhecidos como dízimas periódicas.

- 3
- 3,3
- 3,3333...

Sendo X o conjunto dos números não inteiros que são representados com quantidade finita de casas decimais, e Y o conjunto das dízimas periódicas, o conjunto $\mathbb{Q}$ pode ser definido como a seguinte reunião de conjuntos: $\mathbb{Q} = X \cup Y \cup \mathbb{Z}$.

A forma de representação, o que todos os números racionais têm em comum, é chamada de fracionária. Todo número racional pode ser representado por uma fração de dois inteiros: o numerador e o denominador.

- $3 = \dfrac{3}{1}$
- $3{,}3 = \dfrac{33}{10}$
- $3{,}3333... = \dfrac{10}{3}$

Por poderem ser representados dessa forma, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais fica definido pela sentença

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{d} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\, d \in \mathbb{Z},\, d \neq 0\right\}.$$

O denominador de uma fração indica em quantas partes deve-se dividir a unidade, seja essa unidade positiva, seja negativa. O numerador indica quantas dessas partes de unidade devem ser tomadas, para se compreender o número racional que a fração expressa. Exemplos:

a) A fração $\frac{1}{5}$ indica a quinta parte de uma unidade, ou seja, o valor que resulta da divisão do número 1 pelo número 5. Sua forma decimal é 0,2.

b) A fração $\frac{2}{3}$ compreende duas das três partes iguais em que se divide uma unidade. Sua forma decimal é a dízima 0,6666....

c) A fração $\frac{5}{5}$ é equivalente ao número inteiro 1, pois compreende todas as cinco partes iguais de uma única unidade.

Tipos de frações

Existem muitas frações $\frac{n}{d}$, de diferentes numeradores n e diferentes denominadores d, que representam o mesmo número racional. Observe que:

$$... = \frac{180}{300} = \frac{90}{150} = \frac{60}{100} = \frac{45}{75} = \frac{36}{60} = \frac{30}{50} =$$
$$= \frac{18}{30} = \frac{15}{25} = \frac{12}{20} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Para verificar que todas essas frações representam o mesmo número, basta efetuar a divisão sem resto do numerador pelo denominador de cada uma e encontrar o quociente decimal 0,6.

Frações unitárias

Chama-se fração unitária toda fração cujo numerador é o número 1. Cada uma dessas frações representa um número denominado de recíproco ou inverso de algum número natural. Exemplos:

Número	Fração unitária	Representação decimal
Recíproco de 2	$\frac{1}{2}$	0,5
Recíproco de 3	$\frac{1}{3}$	0,3333333333333333...
Recíproco de 4	$\frac{1}{4}$	0,25
Recíproco de 5	$\frac{1}{5}$	0,2
Recíproco de 6	$\frac{1}{6}$	0,1666666666666666...
Recíproco de 7	$\frac{1}{7}$	0,1428571428571428...
Recíproco de 8	$\frac{1}{8}$	0,125

Recíproco de 9	$\frac{1}{9}$	0,1111111111111111...
Recíproco de 10	$\frac{1}{10}$	0,1
Recíproco de 11	$\frac{1}{11}$	0,0909090909090909...
Recíproco de 12	$\frac{1}{12}$	0,0833333333333333...
Recíproco de 13	$\frac{1}{13}$	0,0769230769230769...
⋮	⋮	⋮

Frações decimais

São aquelas com denominadores que são potências de 10.

Exemplos: $\frac{1}{10}, \frac{75}{100}, \frac{133}{1000}$.

Frações próprias

São frações que apresentam o numerador menor que o denominador.

Exemplos: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$.

Frações impróprias

São frações que apresentam o numerador maior que o denominador.

Exemplos: $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{12}{5}, \frac{25}{6}$.

Frações aparentes

São frações em que o numerador é múltiplo do denominador. Frações aparentes representam números inteiros.

Exemplos: $\frac{6}{3} = 2, \frac{24}{8} = 3, \frac{75}{15} = 5, \frac{60}{6} = 10$.

Frações redutíveis

São frações que indicam razões entre múltiplos de um mesmo número natural $n > 1$.

Exemplos:

O numerador e o denominador da fração $\frac{6}{4}$ são múltiplos de 2 ($n = 2$).

O numerador e o denominador da fração $\frac{24}{30}$ são múltiplos de 6 ($n = 6$).

O numerador e o denominador da fração $\frac{75}{100}$ são múltiplos de 25 ($n = 25$).

Frações irredutíveis

São frações formadas por dois números primos entre si, ou seja, números cujo maior divisor comum é 1.

Exemplos: $\frac{3}{2} \rightarrow \text{mdc}(3, 2) = 1$; $\frac{4}{5} \rightarrow \text{mdc}(4, 5) = 1$; $\frac{32}{45} \rightarrow \text{mdc}(32, 45) = 1$.

As frações redutíveis podem ser simplificadas, até sua forma irredutível, dividindo-se ambos os seus termos pelo maior divisor comum entre eles. Veja:

$$\frac{6}{4} = \frac{6 : 2}{4 : 2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{24}{30} = \frac{24 : 6}{30 : 6} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{75}{100} = \frac{75 : 25}{100 : 25} = \frac{3}{4}$$

Outras notações para os números racionais

A forma fracionária de um número racional deixa bem claro como a parte desejada deve ser obtida da unidade, porém não é muito eficiente quando se deseja comparar números racionais diferentes, a fim de decidir qual deles é o maior, por exemplo. Para isso recomendam-se as formas decimais.

Forma decimal

Para encontrar a forma decimal, partindo da fracionária, basta que se execute a divisão do numerador da fração pelo denominador dela até que o resto final seja igual a zero, ou até que os restos parciais da divisão comecem a se repetir.

Se a divisão gerar resto zero, então o quociente obtido será o representante decimal da fração, mas se o resto começar a se repetir, então o quociente terá uma infinidade de algarismos que se repetirão periodicamente.

Exercícios resolvidos

17. Coloque os elementos do conjunto $\left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{13}{20}, \frac{31}{50}\right\}$ em ordem crescente.

Resolução:

Efetuando as divisões indicadas por cada fração:

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$$

$$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{,}625$$

$$\frac{7}{10} = 7 : 10 = 0{,}7$$

$$\frac{13}{20} = 13 : 20 = 0{,}65$$

$$\frac{31}{50} = 31 : 50 = 0{,}62$$

Como $0{,}6 < 0{,}62 < 0{,}625 < 0{,}65 < 0{,}7$, a ordem crescente das frações será: $\frac{3}{5}, \frac{31}{50}, \frac{5}{8}, \frac{13}{20}$ e $\frac{7}{10}$.

18. **Enem** O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.
Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa.
Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

a) 68,21 mm.
b) 68,102 mm.
c) 68,02 mm.
d) 68,012 mm.
e) 68,001 mm.

Resolução:

Escrevendo em ordem decrescente, temos: 68,21 mm, 68,102 mm, 68,02 mm, 68,012 mm e 68,001 mm. O mais próximo do diâmetro 68 mm é 68,001 mm.
Resposta: alternativa E.

Mesmo não sendo necessário, na representação de um número decimal podemos escrever zeros à direita do último algarismo após a vírgula. A visualização da ordem crescente pode ficar mais clara se todos os números forem escritos com a mesma quantidade de casas decimais. Compare as colunas do seguinte quadro:

Número mínimo de casas decimais	Mesmo número de casas decimais
0,6	0,600
0,62	0,620
0,625	0,625
0,65	0,650
0,7	0,700

A notação monetária, por exemplo, padroniza a representação dos valores com duas casas decimais após a vírgula. Nos estudos da física e da química, muitos valores aproximados são representados com o uso de algarismos significativos. Nesse contexto, a representação 0,620 transmite uma aproximação mais precisa do que, por exemplo, a representação 0,62.

Em relação às representações periódicas dos números decimais, o uso de uma barra horizontal sobre os algarismos que se repetem à direita da vírgula é mais preciso do que o simples uso das reticências à direita do número.

Veja, por exemplo, como a cifra 0,4324... não deixa claro qual é o período da dízima que está sendo representada.

- $x = 0{,}432444444... \rightarrow$ Período: 4 (1 algarismo)
- $y = 0{,}432424242... \rightarrow$ Período: 24 (2 algarismos)
- $z = 0{,}432432432... \rightarrow$ Período: 432 (3 algarismos)

Mas, com o uso da barra horizontal, elimina-se esse tipo de ambiguidade:

- $x = 0{,}432\overline{4} \rightarrow$ Período: 4
- $y = 0{,}43\overline{24} \rightarrow$ Período: 24
- $z = 0{,}\overline{432} \rightarrow$ Período: 432

Frações geratrizes

Memorizar as dízimas periódicas oriundas de frações unitárias pode agilizar o processo de obtenção das frações geratrizes de outras dízimas periódicas. Assim:

- Saber que $0{,}111111111... = \dfrac{1}{9}$ permite concluir, por exemplo, que $0{,}444444444... = \dfrac{4}{9}$.
- Saber que $0{,}01010101... = \dfrac{1}{99}$ permite concluir, por exemplo, que $0{,}47474747... = \dfrac{47}{99}$.
- Saber que $0{,}001001001... = \dfrac{1}{999}$ permite concluir, por exemplo, que $0{,}473473473... = \dfrac{473}{999}$.

Mas também existe um processo algébrico eficiente para se encontrar frações geratrizes de dízimas periódicas.

Sendo *p* o número de algarismos do período da dízima gerada por uma fração F, o primeiro passo do processo é multiplicar a dízima por 10^p.

O segundo passo consiste em subtrair a dízima original do resultado obtido no primeiro passo, obtendo um resultado sem a infinidade de casas decimais da dízima.

O terceiro passo é resolver a equação obtida no segundo passo.

Observe os exemplos a seguir:

1) $F = 0{,}4444... \Rightarrow p = 1$

Primeiro passo:

$$F = 0{,}4444... \Rightarrow 10^1 \cdot F = 10 \cdot F = 4{,}4444...$$

Segundo passo:

$$\begin{array}{r} 10F = 4{,}4444... \\ -\quad F = 0{,}4444... \\ \hline 9F = 4{,}0000... \end{array}$$

Terceiro passo:

$$9F = 4 \Rightarrow F = \frac{4}{9}$$

2) $F = 0{,}47474747... \Rightarrow p = 2$

Primeiro passo:

$$F = 0{,}47474747...$$
$$10^2 \cdot F = 100 \cdot F = 47{,}47474747...$$

Segundo passo:

$$\begin{array}{r} 100F = 47{,}474747... \\ -\quad F = 0{,}474747... \\ \hline 99F = 47{,}000000... \end{array}$$

Terceiro passo:

$$99F = 47 \Rightarrow F = \frac{47}{99}$$

3) $F = 0{,}473473473473... \Rightarrow p = 3$

Primeiro passo:

$$F = 0{,}473473473...$$
$$10^3 \cdot F = 1\,000 \cdot F = 473{,}473473473...$$

Segundo passo:

$$\begin{array}{r} 1000F = 473{,}473473473... \\ F = 0{,}473473473... \\ \hline 999F = 473{,}000000000... \end{array} -$$

Terceiro passo:

$$999F = 473 \Rightarrow F = \frac{473}{999}$$

Forma percentual

As frações decimais cujos denominadores são iguais a 100 também podem ser representadas na forma de porcentagem. Por exemplo, $\frac{75}{100}$ pode ser representado por 75%.

Forma mista

As frações impróprias também podem ser expressas na forma de números mistos. Para isso, basta efetuar a divisão com resto do numerador pelo denominador e apresentar o quociente ao lado de uma fração própria, que deve ser escrita como se fosse um algarismo à direita do quociente. O numerador dessa fração própria é o resto da divisão efetuada, e o denominador é o mesmo da fração imprópria original. Observe:

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5} \quad \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$$

Operações com números racionais

O conjunto dos números racionais é fechado em relação às quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão, com exceção da divisão por zero. Assim, sendo a e b dois números racionais quaisquer:

$$(a + b) \in \mathbb{Q} \qquad (a - b) \in \mathbb{Q} \qquad (a \cdot b) \in \mathbb{Q}$$

Além disso, nos casos em que $b \neq 0$, tem-se:

$$(a : b) \in \mathbb{Q}$$

Adição e subtração em $\mathbb{Q}$

Na forma fracionária, as adições e subtrações de números racionais são executadas entre os numeradores das frações apenas quando todas as frações possuírem o mesmo denominador.

Se as frações não tiverem o mesmo denominador, elas devem ser substituídas por frações equivalentes que tenham um mesmo denominador. Para facilitar os cálculos, recomenda-se que esse denominador comum seja o mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores das frações originais.

Assim, sendo a, b, c e d números inteiros tais que $c \cdot d \neq 0$, tem-se:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot c' \pm b \cdot d'}{m}, \text{ em que: } \begin{cases} m = \text{mmc}(c, d) \\ c' = m : c \\ d' = m : d \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

19. Considere todos os números racionais entre 3 e 6 que são representados por frações irredutíveis com denominador igual a 6 e assinale a alternativa que apresenta o valor da soma desses números.

a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 29

Resolução:

Sendo $\frac{n}{6}$ uma menor fração irredutível entre 3 e 6, temos que $18 < n < 36$ e $\text{mdc}(n, 6) = 1$. Logo, os possíveis valores de n são: 19, 23, 25, 29, 31 e 35.

$$\frac{19}{6} + \frac{23}{6} + \frac{25}{6} + \frac{29}{6} + \frac{31}{6} + \frac{35}{6} =$$
$$= \frac{19 + 23 + 25 + 29 + 31 + 35}{6} = \frac{162}{6} = 27$$

Resposta: alternativa C.

20. Unisinos-RS Uma fração unitária é uma fração da forma $\frac{1}{n}$, onde n é um número natural.

Uma fração escrita como soma de frações unitárias é denominada fração egípcia.

Por exemplo: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ e $\frac{5}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{99}$.

A soma $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60}$ é a representação egípcia de qual fração?

a) $\frac{71}{120}$.
b) $\frac{3}{71}$.
c) $\frac{17}{60}$.
d) $\frac{19}{40}$.
e) $\frac{17}{30}$.

Resolução:

$\text{mmc}(3, 8, 60) = 120$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{60} = \frac{1 \cdot 40 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 2}{120} =$$
$$= \frac{40 + 15 + 2}{120} = \frac{57}{120} = \frac{19}{40}$$

Resposta: alternativa D.

Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Na forma fracionária, o produto de números racionais é obtido multiplicando-se numerador por numerador e denominador por denominador de cada fração multiplicada.

Assim, sendo a, b, c e d números inteiros tais que $c \cdot d \neq 0$, tem-se:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

Divisão em $\mathbb{Q}$

A operação inversa da multiplicação é chamada de divisão, seus termos são o dividendo e o divisor. No conjunto dos números inteiros, a divisão pode produzir dois resultados: o quociente e o resto, mas no conjunto dos números racionais a divisão produz apenas um resultado: o quociente, que também costuma ser chamado de razão.

A divisão não é uma operação comutativa, como se pode observar nos exemplos a seguir:

- A razão entre os números 3 e 5 é representada pelo número decimal 0,6.
- A razão entre os números 5 e 3 é representada pela dízima periódica 1,66666... = $1,\overline{6}$.

Na forma fracionária, o numerador do quociente de dois números racionais é obtido multiplicando o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração, e o denominador do quociente é obtido multiplicando o denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração.

Assim, sendo a, b, c e d números inteiros tais que $c \cdot b \cdot d \neq 0$, tem-se:

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$

Exercício resolvido

21. Multiplicar um número por 0,0125 equivale a dividi-lo por:

a) 8.
b) 80.
c) 1,25.
d) 12,5.
e) 125.

Resolução:

Sendo N um número qualquer:

$$N \cdot 0{,}0125 = N \cdot \frac{125}{10\,000} = N \cdot \frac{1}{80} = \frac{N}{80}.$$

Portanto, a multiplicação mencionada equivale à divisão pelo número 80.

Resposta: alternativa B.

Potenciação em $\mathbb{Q}$

A potenciação não é uma operação fechada no conjunto $\mathbb{Z}$, pois bases inteiras, diferentes de -1, 0 e 1, com expoentes negativos geram resultados que não são inteiros.

Os resultados dessas potências formam um subconjunto de $\mathbb{Q}$ ao qual pertencem todos os inversos multiplicativos ou recíprocos dos números inteiros, de modo que, para todo inteiro $b \neq 0$ e n natural, temos:

- $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$
- $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$

Se a base for um número racional $\dfrac{a}{b}$, com a e b inteiros:

- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$

A potenciação é uma operação distributiva em relação ao numerador e ao denominador de um número racional.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}$$

Se a base for positiva e o expoente for um número racional não inteiro, as potências também poderão ser expressas como radiciações, como veremos a seguir.

Exercício resolvido

22. Considere as dízimas periódicas $x = 0{,}12121212...$ e $y = 0{,}21212121...$ Determine:

a) A fração irredutível que representa o valor de $y - x$.

b) O valor da expressão $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{y + x}$.

Resolução:

a) $x = 0{,}12121212...$

$$\begin{array}{r} 100x = 12{,}121212... \\ -\quad x = 0{,}121212... \\ \hline 99x = 12{,}000000... \end{array}$$

$$99x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

$y = 0{,}21212121...$

$$\begin{array}{r} 100y = 21{,}212121... \\ -\quad y = 0{,}212121... \\ \hline 99y = 21{,}000000... \end{array}$$

$$99y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

Portanto: $y - x = \dfrac{7}{33} - \dfrac{4}{33} = \dfrac{3}{33} = \dfrac{1}{11}$

b) $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{y + x} = \dfrac{\left(\dfrac{4}{33}\right)^{-1} - \left(\dfrac{7}{33}\right)^{-1}}{\dfrac{7}{33} + \dfrac{4}{33}} =$

$= \dfrac{\dfrac{33}{4} - \dfrac{33}{7}}{\dfrac{11}{33}} = \dfrac{33\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{7}\right)}{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{33\left(\dfrac{7-4}{28}\right)}{\dfrac{1}{3}} =$

$= 33\left(\dfrac{3}{28}\right) \cdot \dfrac{3}{1} = \dfrac{297}{28}$

Radiciação em $\mathbb{Q}$

A radiciação também é uma operação distributiva em relação ao numerador e ao denominador de um número racional.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Potências de bases positivas e expoentes que são frações unitárias exprimem radiciações, cujo índice do radical coincide com o denominador do expoente. Exemplos:

$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$

Assim, sendo $b > 0$ e $d \neq 0$:

$$b^{\frac{1}{d}} = \sqrt[d]{b}$$

Quando o expoente de uma potência de base positiva é um número racional $\frac{n}{d}$, com $n > 1$, então o numerador n do expoente permanece como expoente da raiz:

$$b^{\frac{n}{d}} = \left(\sqrt[d]{b}\right)^n$$

Com $b > 0$, não importa a ordem de execução entre a potenciação e a radiciação. Assim, o expoente pode ser escrito dentro ou fora do símbolo radical:

$$\left(\sqrt[d]{b}\right)^n = \sqrt[d]{b^n}$$

Exercício resolvido

23. Se o volume de um cubo, em litros, é igual ao triplo da raiz quadrada de (4,33...+2,88...−0,11), então a medida, em centímetros, da aresta desse cubo é igual a:

a) 0,02
b) 0,2
c) 2
d) 20
e) 200

Resolução:

Sendo $0{,}11... = \frac{1}{9}$, $0{,}33... = \frac{3}{9}$ e $0{,}88... = \frac{8}{9}$, tem-se que:

$4{,}33... + 2{,}88... - 0{,}11... = 4 + \frac{3}{9} + 2 + \frac{8}{9} - \frac{1}{9} =$

$= 6 + \frac{10}{9} = \frac{54 + 10}{9} = \frac{64}{9}$

Portanto, o volume desse cubo é igual a

$3 \cdot \sqrt{\frac{64}{9}} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8$ litros.

Como 8 litros equivalem a 8 000 cm^3, temos que a medida da aresta desse cubo é igual a $\sqrt[3]{8\,000} = 20$ cm.
Resposta: alternativa D.

Logaritmo em $\mathbb{Q}$

Sendo a e b duas potências racionais de um mesmo número natural $c > 1$, então existem inteiros n e d tais que: $a = c^n$ e $b = c^d$.

Nessas condições, se $d \neq 0$, o logaritmo de a na base b será o número racional $\frac{n}{d}$.

$$\log_b(a) = \log_{c^d}(c^n) = \frac{n}{d}$$

Exemplo: $\log_8(16) = \log_{2^3}(2^4) = \frac{4}{3}$.

Os números reais

Por muito tempo, pensou-se que o conceito de número racional era suficiente para representar qualquer quantidade, mas as grandezas métricas da Geometria Euclidiana mostraram a insuficiência desse conceito. Para a escola pitagórica tudo era número e, dessa forma, todos os comprimentos poderiam ser expressos por números.

Tudo ia bem com os números racionais até que tentaram exprimir, em alguma unidade, os comprimentos das diagonais de quadrados e cubos. Nesse ponto, os pitagóricos encontraram dificuldades. Muita tinta se gastou até verificarem ser impossível representar essas medidas por razões entre números inteiros, ou seja, por números racionais. Conclusão: existem muitos números além dos elementos do conjunto $\mathbb{Q}$.

Assim, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais vem da necessidade geométrica de admitir, por hipótese, a continuidade numérica em suas medidas.

O conjunto $\mathbb{R}$ é construído acrescentando-se, ao conjunto dos números racionais, todos os números que tenham representação decimal infinita, mas não periódica. Esses números são denominados irracionais.

Números irracionais

Os números irracionais foram descobertos pela escola pitagórica pouco antes do século IV a.C. Muito tempo depois, o matemático escocês John Napier descobriu outros números irracionais estudando os logaritmos.

Embora não seja possível representar o valor exato de um número irracional usando-se apenas os algarismos e a vírgula, algumas aproximações podem ser feitas de acordo com a necessidade de se compreender a grandeza da resposta de um problema. Os números irracionais podem ser definidos como limites para sucessões de números racionais, com número cada vez maior de casas decimais.

No quadro a seguir, vemos séries decrescentes de números racionais que definem $\sqrt{2}$ e log (2):

x	x^2
2	4
1,5	**2**,25
1,42	**2,0**164
1,415	**2,00**2225
1,4143	**2,000**24449
1,41422	**2,0000**182084
1,414214	**2,00000**1237796
1,4142136	**2,000000**10642496
⋮	⋮
$\sqrt{2}$	2,00000000000000...

x	10^x
1	10
0,4	**2**,511886431509...
0,31	**2,0**41737944669...
0,302	**2,00**4472027365...
0,3011	**2,000**322407865...
0,30103	**2,0000000**19968...
0,301029996	**2,000000001**547...
0,3010299957	**2,000000000**165...
⋮	⋮
log (2)	2,000000000000...

No próximo quadro, vemos séries crescentes que definem o mesmo número:

x	x^2
1	1
1,4	**1,9**6
1,41	**1,9**881
1,414	**1,999**396
1,4142	**1,9999**6164
1,41421	**1,9999**899241
1,414213	**1,99999**8409369
1,4142135	**1,999999**82358225
⋮	⋮
$\sqrt{2}$	2,00000000000000...

x	10^x
0	1
0,3	**1,99**5262314968...
0,301	**1,999**861869632...
0,30102	**1,9999**53968795...
0,301029	**1,99999**5414803...
0,3010299	**1,999999**559451...
0,30102999	**1,9999999**73916...
0,301029995	**1,99999999**6942...
⋮	⋮
log (2)	2,000000000000...

Comparando as duas tabelas, é possível garantir que 1,414213 são os primeiros algarismos do número representado por $\sqrt{2}$ e que 0,30102999 são os primeiros algarismos do número representado por log(2).

A lista a seguir apresenta aproximações com dois algarismos decimais para alguns números irracionais importantes:

- $\sqrt{2} \cong 1{,}41$
- $\sqrt{3} \cong 1{,}73$
- $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}62$
- $\log(2) \cong 0{,}30$
- $\log(3) \cong 0{,}48$
- $\pi \cong 3{,}14$
- $e \cong 2{,}72$

Exercício resolvido

24. Assinale a alternativa que apresenta o número inteiro mais próximo do valor da expressão:

$$E = \frac{61}{3} + \frac{7\pi}{11} - \frac{10\sqrt{2}}{7}$$

a) 20
b) 15
c) 10
d) 5
e) 2

Resolução:

Dividindo-se o número 61 por 3 obtemos quociente igual à dízima 20,333... = $20{,}\overline{3}$.

Aproximando-se π para a fração $\frac{22}{7}$, usada no desenho geométrico, temos que $\frac{7\pi}{11}$ é, aproximadamente, igual a 2. Finalmente, usando-se o decimal 1,4 para aproximar a raiz quadrada de 2, temos que a fração $\frac{10\sqrt{2}}{7}$ também é, aproximadamente, igual a 2. Portanto: $E = \frac{61}{3} + \frac{7\pi}{11} - \frac{10\sqrt{2}}{7} = 20{,}333... + 2 - 2 \cong 20$.

Resposta: alternativa A.

Irracionais algébricos

Chamamos de algébricos a todos os números que são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros.

Todos os irracionais algébricos oriundos de equações polinomiais de grau menor ou igual a 4 podem ser expressos por somas e produtos entre radicais e números racionais.

Exemplos:

- O número racional $\frac{2}{3}$ é algébrico, por ser a solução da equação $3x - 2 = 0$.
- Os números irracionais $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ são algébricos, por serem as soluções de $x^2 - x + 1 = 0$.
- O número irracional $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ é algébrico, por ser uma das soluções de $x^3 - 6x - 6 = 0$.
- O número irracional $\sqrt[4]{3}$ é algébrico, por ser uma das soluções de $x^4 - 3 = 0$.

Do quinto grau em diante há muitas equações polinomiais cujas soluções não admitem representações por meio de radicais.

Radicais simples e radicais duplos

Um radical simples é um número irracional algébrico que pode ser expresso por uma única operação de radiciação, em que o índice do radical é um número natural $n \geqslant 2$ e o radicando é um número racional. São exemplos de radicais simples: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$, $-\sqrt[4]{4{,}2}$.

Radicais duplos são números irracionais, também algébricos, que precisam ser expressos por uma radiciação cujo radicando seja a soma de um número racional com um radical simples. São exemplos de radicais duplos: $\sqrt{3+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{5}}{4}}$, $-\sqrt[4]{1{,}5+\sqrt[3]{2}}$.

Os irracionais algébricos também podem ser representados por radicais triplos, quádruplos etc.

Operações com radicais simples

Em relação às operações aritméticas de adição e subtração, multiplicação e divisão, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais herda todas as propriedades que são válidas para essas operações no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mas como os irracionais não podem ser expressos por frações de números inteiros nem por números decimais com precisão, os resultados das operações entre números racionais e números irracionais, como os radicais simples, ficam simplesmente indicados, pelas próprias operações. Exemplos:

- A soma do número racional 2 com o número irracional $\sqrt{3}$ é simplesmente $2 + \sqrt{3}$.
- O produto do número racional $-\frac{2}{5}$ pelo número irracional $\sqrt[3]{6}$ é simplesmente $-\frac{2\sqrt[3]{6}}{5}$.

! Atenção

O resultado da adição de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.
O resultado da multiplicação de um número racional diferente de zero por um número irracional é sempre um número irracional.

Simplificações de radicais

Como a radiciação possui propriedade distributiva em relação à multiplicação, se o radicando de uma raiz n-ésima puder ser escrito como o produto de dois números de modo que um deles seja uma n-ésima potência, a representação do número irracional pode ser simplificada.

Simplificam-se raízes quadradas de números que são múltiplos de algum quadrado perfeito, como o número 18 que, por exemplo, é múltiplo de 9 (o quadrado do número 3).

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Simplificam-se raízes cúbicas de números que são múltiplos de algum cubo perfeito, como o número 40 que, por exemplo, é múltiplo de 8 (o cubo do número 2).

- $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

Outro tipo de simplificação ocorre quando o radicando é uma potência cujo expoente possui fator comum com o índice do radical.

Todo radical pode ser expresso por uma potência de expoente racional e, quando os termos de uma fração racional são múltiplos de um mesmo número natural $k > 1$, essa fração pode ser simplificada dividindo-se os termos da fração pelo número k.

Ou seja, como $\sqrt[d]{a^n} = a^{\frac{n}{d}} = a^{\frac{n:k}{d:k}}$, para $a > 0$, $d > 0$ e $k > 0$, também é correto afirmar que:

$$\sqrt[d]{a^n} = \sqrt[d:k]{a^{n:k}}$$

Exemplos:

- $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4:2]{5^{2:2}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$
- $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6:3]{5^{3:3}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$
- $\sqrt[6]{625} = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6:2]{5^{4:2}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

Adição de radicais simples

Os radicais simples são somados apenas se possuírem o mesmo índice e o mesmo radicando. Exemplos:

- $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$
- $3\sqrt[4]{7} + 6\sqrt[4]{7} = 9\sqrt[4]{7}$

Multiplicação de radicais simples

Multiplicamos radicais simples de mesmo índice d, conservando o radical e multiplicando os radicandos.

$$\sqrt[d]{a} \cdot \sqrt[d]{b} = \sqrt[d]{a \cdot b}$$

Exemplos:

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$
- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{20}$
- $2\sqrt[4]{5} \cdot 3\sqrt[4]{6} = 6\sqrt[4]{30}$

Quando os índices d e d' dos radicais são diferentes, reescrevemos esses radicais usando o mínimo múltiplo comum dos índices d e d'. Observe o exemplo:

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[4]{5^1} \cdot \sqrt[6]{2^1} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^{1 \cdot 3}} \cdot \sqrt[6 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}} = \sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{2^2} =$$
$$= \sqrt[12]{125} \cdot \sqrt[12]{4} = \sqrt[12]{125 \cdot 4} = \sqrt[12]{500}$$

No exemplo anterior: $d = 4$, $d' = 6$ e $\text{mmc}(4, 6) = 12$.

Escrever radicais sempre com o mesmo índice permite, não apenas efetuar a multiplicação, como também facilitar a comparação entre números irracionais, para saber qual é o maior ou menor.

Exercícios resolvidos

25. Simplificando-se corretamente a expressão $\sqrt{18} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{18} + \sqrt{8}$, pode-se obter:

a) $3\sqrt{2} + 6$

b) $11\sqrt{2}$

c) $13\sqrt{3}$

d) $5\sqrt{2} + 12$

e) $2\sqrt{3} + 6$

Resolução:

$\sqrt{18} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{8 \cdot 18} + \sqrt{4 \cdot 2} =$
$= 3\sqrt{2} + \sqrt{144} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 12$

Resposta: alternativa D.

26. Considere os números irracionais $x = \sqrt[2]{3}$, $y = \sqrt[3]{5}$ e $z = \sqrt[4]{10}$. Assinale a alternativa que apresenta a correta relação de ordem crescente entre esses números:

a) $z < y < x$

b) $z < x < y$

c) $x < y < z$

d) $y < z < x$

e) $y < x < z$

Resolução:

$\text{mmc}(2, 3, 4) = 12$

$$x = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt[2 \cdot 6]{3^{1 \cdot 6}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$$
$$y = \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3 \cdot 4]{5^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$$
$$z = \sqrt[4]{10^1} = \sqrt[4 \cdot 3]{10^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{10^3} = \sqrt[12]{1\,000}$$

Portanto, $y < x < z$.

Resposta: alternativa E.

Racionalização de denominadores

Frações que apresentam denominadores do tipo $\sqrt[d]{a^n}$ podem ter o numerador e o denominador multiplicados pelo termo $\sqrt[d]{a^m}$, de modo que $m + n = d$. Esse termo é denominado fator racionalizante. Observe:

$$\frac{1}{\sqrt[d]{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[d]{a^n}} \cdot \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^m}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^n \cdot a^m}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^{n+m}}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{\sqrt[d]{a^d}} = \frac{\sqrt[d]{a^m}}{a}$$

Ao se fazer isso, o valor da fração não é alterado, mas sim a forma de escrevê-la, de modo que o denominador da fração equivalente obtida não é um número irracional.

Exemplos:

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{125}}{5}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}$

Irracionais transcendentes

Se um número irracional não é algébrico, então esse número é denominado transcendente. Assim, se α é um número real e não existe equação polinomial de coeficientes inteiros tal que α seja uma de suas soluções, então α é um número transcendente.

Em 1844, o matemático francês Joseph Liouville encontrou o primeiro número irracional transcendente e, em 1974, o matemático alemão Georg Cantor descobriu que o conjunto dos números transcendentes é infinitamente mais amplo que o conjunto dos números algébricos.

Os principais números transcendentes estudados no Ensino Médio são a constante geométrica π e a constante de Euler (e) usada como base para os logaritmos naturais. Os algarismos das casas decimais desses dois números podem ser obtidos efetuando-se as adições de séries específicas de números racionais.

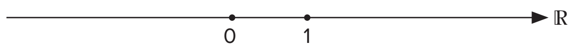
$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} + \frac{4}{21} - \frac{4}{23} + \ldots$$

$$e = 2 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \ldots$$

O eixo real

O conjunto dos números reais pode ser representado pelos pontos de uma única reta denominada reta real, ou eixo real. Para isso, basta tomar dois pontos distintos de uma reta e associá-los aos números zero e um. O ponto zero é denominado origem da reta real, e a distância do ponto zero (0) ao ponto um (1) é tomada como unidade de medida para todos os demais segmentos contidos na reta. Dessa forma, cada ponto da reta real fica associado a um único número do conjunto $\mathbb{R}$.

Quando o eixo real é representado na horizontal, é comum que a unidade fique localizada à direita da origem e, assim, os pontos localizados à esquerda da origem representam os números negativos.



Propriedades das potências em $\mathbb{R}$

Quando a base de uma potenciação é negativa e o expoente é uma fração própria de denominador par, a potência resultante não pertence ao conjunto dos números reais. Por exemplo $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

Assim, as propriedades a seguir são válidas apenas quando as bases das potências são não negativas e os denominadores das frações não são nulos.

Para potências de mesma base $a \geqslant 0$ e diferentes expoentes r e s reais:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = a^{s \cdot r} = (a^s)^r$$

Para potências de mesmo expoente real n, bases não negativas e denominadores diferentes de zero:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

! Atenção

A potenciação não admite propriedade distributiva em relação à adição ou à subtração. Assim, para todo $n \neq 1$, tem-se que:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n \qquad (a - b)^n \neq a^n - b^n$$

Particularmente, para potências de base $a > 0$ e expoentes no conjunto $\{1, 0, -1\}$, temos:

$$a^1 = a \qquad a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Para potências de base $a > 0$ e expoentes negativos e fracionários:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{n}{d}} = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n = \sqrt[d]{a^n}$$

Exercícios resolvidos

27. Escreva o número $16^7 \cdot 125^{10}$ em notação científica.

Resolução:

$16^7 \cdot 125^{10} = (2^4)^7 \cdot (5^3)^{10} = 2^{28} \cdot 5^{30} = 2^{28} \cdot 5^{28} \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^{28} \cdot 25 = 25 \cdot 10^{28} = 2{,}5 \cdot 10^{29}$

Portanto, $16^7 \cdot 125^{10} = 2{,}5 \cdot 10^{29}$.

28. Classifique as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) O produto entre dois números naturais é um número natural.

b) O produto entre dois números inteiros negativos é um número natural.

c) Uma potência de base e expoente naturais é um número natural.

d) A diferença entre dois números naturais é um número natural.

e) A razão entre dois números inteiros não nulos é um número inteiro.

f) A razão entre dois números racionais não nulos é um número racional.

g) A diferença entre dois números racionais pode ser um número irracional.

h) A soma de dois números irracionais é um número irracional.

i) Uma potência de base inteira e expoente racional é necessariamente um número real.

j) O quociente entre dois números reais é sempre um número real.

k) Uma potência de base real positiva e expoente real é necessariamente um número positivo.

l) A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.

m) O produto entre um número racional não nulo e um número irracional é sempre um número irracional.

Resolução:

Afirmação **a**: verdadeira. O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à operação de multiplicação.

Afirmação **b**: verdadeira. O produto de dois inteiros negativos é um inteiro positivo, portanto, natural.

Afirmação **c**: falsa. O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à operação de potenciação.

Afirmação **d**: falsa. O conjunto $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à operação de subtração: $3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$.

Afirmação **e**: falsa. O conjunto $\mathbb{Z}$ não é fechado em relação à operação de divisão: $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4 \notin \mathbb{Z}$.

Afirmação **f**: verdadeira. Com exceção da divisão por zero, o conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado em relação à operação de divisão.

Afirmação **g**: falsa. O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado em relação à operação de subtração.

Afirmação **h**: falsa. A soma de dois irracionais opostos é zero, por exemplo: $-\pi + \pi = 0$.

Afirmação **i**: falsa. Uma potência de base negativa e expoente fracionário pode não ser um número real.

Afirmação **j**: falsa. Não existe divisão por zero.

Afirmação **k**: verdadeira. Apenas potências de base negativa podem ser negativas ou não reais.

Afirmação **l**: verdadeira. Caso contrário, o conjunto dos racionais não seria fechado em relação à subtração.

Afirmação **m**: verdadeira. Caso contrário, o conjunto dos racionais não seria fechado em relação à divisão.

Teorema fundamental da Aritmética

Um enunciado possível para o teorema fundamental da Aritmética (TFA) é que, desconsiderando as permutações dos fatores de um produto, todo número natural maior que 1 possui decomposição única em fatores primos.

Para expressar algebricamente esse teorema consideram-se duas sequências numéricas:

- $(p_1, p_2, p_3, ...)$ a sequência dos números primos positivos em ordem crescente.
- $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$ uma série de números naturais tal que existe k para o qual $\alpha_i = 0$, sempre que $i > k$.

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$, tem-se:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot ... \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot ...$$

Nessa expressão, cada expoente α indica quantas vezes o número n é divisível pelo número primo p de mesmo índice i. Também é importante observar a existência de uma constante k que indica, em cada sequência de expoentes α, a posição a partir da qual todos os termos α são nulos.

O número 180, por exemplo, pode ser dividido pelo número:

- 2, duas vezes sucessivas $\Rightarrow \alpha_1 = 2$
- 3, duas vezes sucessivas $\Rightarrow \alpha_2 = 2$
- 5, apenas uma vez $\Rightarrow \alpha_3 = 1$

Além disso, o número 180 não é divisível por nenhum outro número primo maior ou igual a 7 e, como esse é o 4º termo da sequência dos números primos positivos, tem-se que $k = 4$, ou seja, $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = ... = 0$.

Portanto, pelo teorema fundamental da Aritmética a forma decomposta do número 180 é:

$$180 = \mathbf{2}^2 \cdot \mathbf{3}^2 \cdot \mathbf{5}^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot ...$$

Ou, de forma abreviada: $180 = \mathbf{2}^2 \cdot \mathbf{3}^2 \cdot \mathbf{5}^1$.

Veja outro exemplo com o número 280, que:

- Pode ser dividido por 2, três vezes sucessivas $\Rightarrow \alpha_1 = 3$
- Não pode ser dividido por 3 $\Rightarrow \alpha_2 = 0$
- Pode ser dividido por 5, apenas uma vez $\Rightarrow \alpha_3 = 1$
- Pode ser dividido por 7, apenas uma vez $\Rightarrow \alpha_4 = 1$

Além disso, o número 280 não é divisível por nenhum outro número primo maior ou igual a 11 e, como esse é o 5º termo da sequência dos números primos positivos, tem-se que $k = 5$, ou seja, $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = ... = 0$.

Portanto, pelo TFA, a forma decomposta do número 280 é:

$$280 = \mathbf{2}^3 \cdot 3^0 \cdot \mathbf{5}^1 \cdot \mathbf{7}^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot ...$$

Ou, de forma abreviada: $180 = \mathbf{2}^3 \cdot \mathbf{5}^1 \cdot \mathbf{7}^1$.

Observe um terceiro exemplo com o número 91, que só pode ser dividido pelos números primos 7 e 13, ambos apenas uma vez. Então, como esses são, respectivamente, o 4º e o 6º números primos, temos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$$
$$\alpha_4 = \alpha_6 = 1$$
$$k = 7 \Rightarrow \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \dots = 0$$

Portanto, pelo TFA, a forma decomposta do número 91 é:

$$91 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot \mathbf{7}^1 \cdot 11^0 \cdot \mathbf{13}^1 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot \dots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 91 = \mathbf{7}^1 \cdot \mathbf{13}^1$$

Como último exemplo, veja o número 17, que é o 7º número primo. Assim:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$$
$$\alpha_7 = 1$$
$$k = 8 \Rightarrow \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \dots = 0$$

Portanto, pelo TFA, a forma decomposta do número 17 é:

$$17 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot \mathbf{17}^1 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot \dots$$

Demonstrado em diversos períodos da história, de Euclides a Gauss, esse teorema permite afirmar que:

- Cada número natural positivo está associado a uma única sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$.
- Não há dois números naturais $n = m$ que estejam associados à mesma sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$.

Assim, esse teorema estabelece uma correspondência biunívoca entre cada número natural positivo e uma específica série de números naturais:

$$180 \leftrightarrow (2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$
$$280 \leftrightarrow (3, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$$
$$91 \leftrightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$$
$$17 \leftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

O número 1 fica associado a uma sequência nula:

$$1 \leftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

Recorrendo à notação de produtória (Π), pode-se escrever a expressão do TFA de maneira mais resumida:

$$n = \pm\prod p_i^{\alpha_i}$$

Exercícios resolvidos

29. Para todo número inteiro positivo n, indicamos por n! o produto de todos os números inteiros positivos menores ou iguais a n. Assim, por exemplo, temos que $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Qual é o menor número natural pelo qual devemos dividir 10! a fim de obter um quociente que seja quadrado perfeito?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Resolução:

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$

Como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação e os números 4, 6, 8, 9 e 10 não são primos, temos:

$10! = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5$

Assim, a decomposição em fatores primos do número 10! é $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.
Como 2^8, 3^4 e 5^2 são quadrados perfeitos, pode-se concluir que 7 é o menor número pelo qual se deve dividir 10! a fim de se obter um quociente que seja quadrado perfeito.
Resposta: alternativa C.

30. A decomposição em fatores primos do produto dos 19 primeiros números naturais positivos é uma expressão do tipo $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^w \cdot \dots$, em que os expoentes x, y, z e w são todos naturais. Nela, o valor de $x + y + z$ é

a) 17
b) 21
c) 27
d) 31
e) 37

Resolução:

Entre os 19 primeiros números inteiros positivos há 9 números pares, sendo que entre eles há 4 números que são múltiplos de quatro, 2 que são múltiplos de oito e 1 que é múltiplo de 16.
Portanto: $x = 9 + 4 + 2 + 1 = 16$.
Também entre os 19 números, há 6 múltiplos de três, sendo que 2 são múltiplos de nove.
Portanto: $y = 6 + 2 = 8$.
Finalmente, como há apenas 3 números múltiplos de cinco entre os 19 primeiros inteiros positivos e nenhum deles é múltiplo de vinte e cinco, temos que $z = 3$.
Logo: $x + y + z = 16 + 8 + 3 = 27$.
Resposta: alternativa C.

Aplicações da forma decomposta

Sendo a e b dois números inteiros, do TFA têm-se que:

- $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots = \Pi\, p_i^{\alpha_i}$
- $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \dots = \Pi\, p_i^{\beta_i}$

Comparando-se apenas as formas decompostas desses dois números, pode-se afirmar, por exemplo, que um número é múltiplo de outro se, e somente se, todos os expoentes da forma decomposta de um deles são menores ou iguais aos respectivos expoentes da forma decomposta do outro número. Assim:

- a é múltiplo de $b \Rightarrow \alpha_i \geqslant \beta_i$ para todo $\boldsymbol{i}$.
- a é divisor de $b \Rightarrow 0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i$ para todo $\boldsymbol{i}$.

Além disso, há muitas outras vantagens na observação das formas decompostas dos números naturais, como a possibilidade de simplificação de radicais simples, encontro de fatores para racionalização de denominadores, busca da quantidade de divisores, cálculo do mmc e do mdc, entre outras aplicações.

MMC e MDC

É possível obter o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números de acordo com o algoritmo da decomposição em fatores primos.

Veja o exemplo do mmc(280, 180):

280, 180	2
140, 90	2
70, 45	2
35, 45	3
35, 15	3
35, 5	5
7, 7	7
1, 1	

mdc(280, 180) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

Observe nessa decomposição que:

I. Se o fator primo na última coluna não divide algum dos números de sua linha, esse número apenas é repetido na linha posterior.

II. A decomposição é feita até que a última linha das primeiras colunas seja unitária.

III. O **mmc** é dado pelo produto dos números primos postos na última coluna. Cada um deles foi posto para decompor pelo menos um dos números em sua linha.

Seguindo outras regras, também é possível obter o máximo divisor comum de dois ou mais números de acordo com o algoritmo da decomposição em fatores primos.

Veja o exemplo do mdc(280, 180):

280,	180	2
140,	90	2
70	45	5
14	9	

mdc(280, 180) = $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

Observe nessa decomposição que:

I. Todo fator primo na última coluna deve dividir ambos os números de sua linha, nenhum número é repetido na linha posterior.

II. A decomposição é feita somente enquanto houver número primo que seja divisor de todos os números de sua linha.

III. O **mdc** é dado pelo produto dos números primos postos na última coluna. Cada um deles foi posto para decompor todos os números em sua linha.

Também é possível encontrar o mmc e o mdc de dois ou mais números naturais decompondo-os separadamente e comparando as sequências de expoentes de cada decomposição.

Assim, sendo $a = \prod p_i^{\alpha_i}$ e $b = \prod p_i^{\beta_i}$, para todo i considera-se:

- x_i como o maior valor entre α_i e β_i;
- y_i como o menor valor entre α_i e β_i.

De modo que:

$$\alpha_i > \beta_i \Rightarrow \begin{cases} x_i = \alpha_i \\ y_i = \beta_i \end{cases} \qquad \alpha_i < \beta_i \Rightarrow \begin{cases} x_i = \beta_i \\ y_i = \alpha_i \end{cases}$$

$$\alpha_i = \beta_i \Rightarrow x_i = y_i = \alpha_i = \beta_i$$

Este procedimento seleciona os maiores expoentes x_i para a série de expoentes do mínimo múltiplo comum entre os números a e b:

$$\text{mmc}(a, b) = \pm\, p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot p_4^{x_4} \cdot \ldots$$

Seleciona também os menores expoentes y_i para a série de expoentes do máximo divisor comum entre os números a e b:

$$\text{mdc}(a, b) = \pm\, p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot p_3^{y_3} \cdot p_4^{y_4} \cdot \ldots$$

Veja o método aplicado no cálculo do mmc e do mdc dos números 280 e 180:

$$\begin{matrix} 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \\ 280 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \text{ e } \beta_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ e } y_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \text{ e } \beta_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ e } y_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \text{ e } \beta_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 \text{ e } y_3 = 1 \\ \alpha_4 = 0 \text{ e } \beta_4 = 1 \Rightarrow x_4 = 1 \text{ e } y_4 = 0 \end{cases}$$

Observando que para $i \geqslant 5$ os expoentes α_i e β_i das decomposições são todos iguais a zero, conclui-se que:

- mmc(180, 280) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2520$
- mdc(180, 280) = $2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 20$

! Atenção

Sendo a e b dois números inteiros diferentes de zero, é correto afirmar que:

$|a| \cdot |b| = \text{mmc}(a, b) \cdot \text{mdc}(a, b)$

Exercícios resolvidos

31. Calcule o **mmc** e o **mdc** dos números 8 400 e 1 500.

Resolução:

8 400	2
4 200	2
2 100	2
1 050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$8\,400 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

1500	2
750	2
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$1500 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$

mmc $(8\,400, 1\,500) =$
$= 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^1 = 16 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 7 = 42\,000$

mdc $(8\,400, 1\,500) =$
$= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 = 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 1 = 300$

32. Em uma estação rodoviária, partem ônibus para a cidade A de 20 em 20 minutos, para a cidade B, de meia em meia hora, e para a cidade C, de 45 em 45 minutos. Se ao meio-dia de hoje partiram ônibus para as três cidades, a que horas isto acontecerá novamente?

Resolução:

As partidas para a cidade A ocorrem após 20 min, 40 min, 60 min, ou seja, em tempos que, em minutos, são múltiplos de 20. As partidas para a cidade B ocorrem após 30 min, 60 min, 90 min, ou seja, em tempos que, em minutos, são múltiplos de 30. As partidas para a cidade C ocorrem após 45 min, 90 min, 135 min, ou seja, em tempos que, em minutos, são múltiplos de 45.

O tempo que levará até saírem ônibus para as três cidades será o mmc$(20, 30, 45) = 180$ min.

Como 180 minutos equivalem a 3 horas, temos que o próximo horário em que os três ônibus partirão simultaneamente será às 3 da tarde ou às 15 horas.

Quantidade de divisores

O conjunto dos múltiplos de um número inteiro é infinito, por isso não faz sentido determinar a quantidade de múltiplos de um número. Mas o conjunto dos divisores de um número inteiro não nulo é sempre finito, e a quantidade de divisores desse número pode ser facilmente expressa pelo produto dos sucessores dos termos da série de expoentes associada ao número pelo TFA.

Assim, a quantidade de divisores positivos de um número inteiro $n \neq 0$ é dado pela expressão:

$$d^+(n) = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3) \cdot \ldots = \Pi(1 + \alpha_i)$$

E a quantidade de divisores inteiros de um número inteiro $n \neq 0$, pela expressão:

$$d(n) = 2 \cdot (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3) \cdot \ldots = 2 \cdot \Pi(1 + \alpha_i)$$

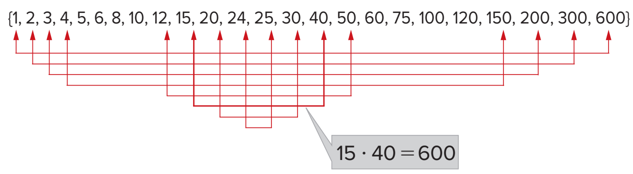
Veja, por exemplo, como obter a quantidade de divisores do número 600 a partir da sua forma decomposta em fatores primos:

- $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot \ldots$
- A série de expoentes dessa decomposição é (3, 1, 2, 0, 0, 0, ...).
- A série dos sucessores desses expoentes é (4, 2, 3, 1, 1, 1, ...).
- O produto dos termos dessa última série é $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots = 24$.

Assim, pode-se concluir que o número 600 possui 24 divisores positivos ou 48 divisores inteiros.

Uma vez determinada a quantidade de divisores de um número inteiro, o conjunto de todos esses divisores pode ser obtido multiplicando-se combinações desses fatores de todas as maneiras possíveis.

Colocando em ordem crescente o conjunto dos divisores de um número inteiro $n \neq 0$, pode-se observar que o produto dos termos equidistantes dos extremos desse conjunto é sempre igual a n.



Com o auxilio dessa propriedade, uma vez encontrada a primeira metade dos divisores positivos de um número inteiro $n \neq 0$, a segunda metade pode ser obtida pelos quocientes de n dividido por cada valor encontrado na primeira metade.

Se n for um quadrado perfeito, então a quantidade de divisores positivos de n será ímpar, sendo a raiz quadrada de n o termo central do conjunto de seus divisores positivos.

! Atenção

O número 1 possui apenas dois divisores inteiros:

$$d(1) = \{\pm 1\}$$

Todos os números primos, e apenas eles, possuem exatamente quatro divisores inteiros:

$$d(p) = \{\pm 1, \pm p\}$$

Os quadrados dos números primos possuem apenas seis divisores inteiros:

$$d(p^2) = \{\pm 1, \pm p, \pm p^2\}$$

Sistema de numeração decimal

O sistema de numeração decimal é usado corriqueiramente para indicar quantidades. O nome decimal vem do fato de que o sistema é dotado de dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cada algarismo sozinho representa uma quantidade de zero a nove, e os números maiores do que nove são representados por dois ou mais desses algarismos, de modo que os valores representados por cada algarismo dependem da posição que eles ocupam nas cifras numéricas.

Veja que, por exemplo, o número quinhentos e cinquenta e cinco é escrito com três algarismos iguais, mas cada algarismo 5, representa uma quantidade diferente desse número.

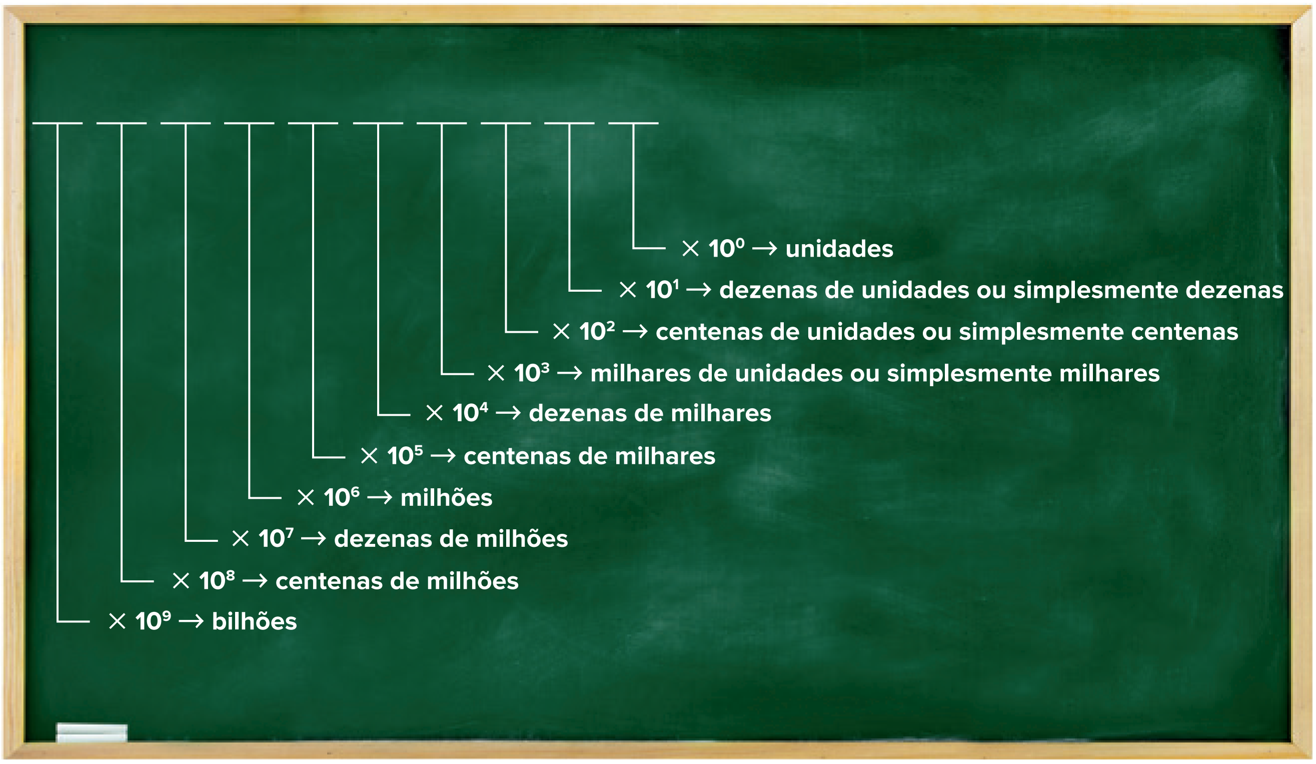
Da esquerda para a direita, na cifra **555**, o primeiro algarismo 5 representa **quinhentas** unidades, o segundo algarismo 5 representa **cinquenta** unidades, e o terceiro e último algarismo 5 representa apenas **cinco** unidades.

Há uma conexão entre a posição ocupada pelo algarismo e a quantidade de unidades que ele representa. Essa conexão combina os aspectos ordinal e cardinal dos números naturais, e relaciona esses valores por meio das operações de adição, multiplicação e potenciação.

$$555 \Rightarrow \begin{cases} 1^{\underline{o}} \text{ algarismo } 5 \rightarrow \text{quinhentos} = 500 = 5 \cdot 10^2 \\ 2^{\underline{o}} \text{ algarismo } 5 \rightarrow \text{cinquenta} = 50 = 5 \cdot 10^1 \\ 3^{\underline{o}} \text{ algarismo } 5 \rightarrow \text{cinco} = 5 = 5 \cdot 10^0 \end{cases}$$

Toda cifra numérica decimal com dois ou mais algarismos representa uma sentença aritmética formada pelas operações de adição, multiplicação e potenciação, na qual os símbolos (+) e (·) bem como os expoentes das potências são todos omitidos. As normas da leitura do número cifrado já consideram essas operações.

Nessas representações decimais, todo algarismo que não ocupa a posição final de uma cifra numérica deve ser lido como um múltiplo de uma potência de base 10. Veja a nomenclatura das posições dos algarismos de uma cifra numérica decimal:



Cifras numéricas

Toda sequência de algarismos $(\boldsymbol{a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_3\, a_2\, a_1\, a_0})_b$ com $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, b - 1\}$ representa o número natural obtido pelas seguintes operações:

$$n = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot b^3 + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0$$

O sistema decimal tem a base $b = 10$, que pode ser omitida no final da cifra:

$$(2\,345)_{10} = 2\,345 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 2\,000 + 300 + 40 + 5$$

Assim, quando um número como, por exemplo, 2 345 é lido em voz alta, ouve-se “dois mil e trezentos e quarenta e cinco”, o que indica a adição dos números 2 000, 300, 40 e 5, pois a conjunção “**e**” é aditiva.

No sistema decimal, pode-se usar um recurso mnemônico para cifrar números de até quatro algarismos, que é bastante útil.

As letras *u*, *d*, *c* e *m*, iniciais das palavras unidade, dezena, centena e milhar são colocadas nos lugares dos respectivos algarismos desconhecidos na cifra de um número.

Exemplos:

$$(du) = 10 \cdot d + u$$
$$(cdu) = 100 \cdot c + 10 \cdot d + u$$
$$(mcdu) = 1\,000 \cdot m + 100 \cdot c + 10 \cdot d + u$$

Assim, tem-se, por exemplo:

$$2\,345 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ c = 3 \\ d = 4 \\ u = 5 \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

33. Dividindo-se um número natural N, de dois algarismos distintos, pelo número *x*, obtemos quociente *y* e resto 1. Invertendo-se a ordem dos algarismos de N, formamos um número que dividido por *y* gera quociente *x* e resto *z*.
Nessas condições, pode-se afirmar que o resto da divisão do número *z* pelo número 9 é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução:

Sendo *a* e *b* os dois algarismos que formam o número N, temos: $\begin{cases} 10a + b = x \cdot y + 1 \\ 10b + a = y \cdot x + z \end{cases}$.

Subtraindo-se essas relações obtemos:

$$(10a + b) - (10b + a) = (x \cdot y + 1) - (y \cdot x + z)$$
$$9a - 9b = 1 - z$$
$$z = 1 + 9b - 9a$$
$$z = 9(b - a) + 1$$

Logo, dividindo-se o número *z* por 9 obtemos resto igual a 1.

Resposta: alternativa A.

34. Encontre todos os pares (X, Y) tais que X é o algarismo das centenas e Y o algarismo das unidades do número 5X4Y, sabendo que esse número é múltiplo de 19.

Resolução:

Como $5X4Y = 5\,040 + 100X + Y$, com $0 \leq X \leq 9$ e $0 \leq Y \leq 9$, efetuando-se a divisão parcial, temos:

$$\begin{array}{rl|l} & 5\,040 + 100X + Y & 19 \\ \cline{3-3} - & 5\,035 - 95X & 265 + 5X \\ \hline & 5 + 5X + Y & \end{array}$$

Então, para que 5X4Y seja múltiplo de 19 é necessário que $5 + 5X + Y$ também seja múltiplo de 19.

Como X e Y variam de 0 a 9, temos que:

$$5 \leq 5 + 5X + Y \leq 59$$

Portanto, $5 + 5X + Y \in \{19, 38, 57\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5X + Y \in \{14, 33, 52\}$.

As soluções (X, Y) de $5X + Y = 14$ são (2, 4) e (1, 9).
As soluções (X, Y) de $5X + Y = 33$ são (6, 3) e (5, 8).
A única solução (X, Y) de $5X + Y = 52$ é (9, 7).
Os pares que são soluções da questão são: (1, 9), (2, 4), (5, 8), (6, 3) e (9, 7).

Em um sistema de base $b = 8$, por exemplo, a mesma cifra representa um número bem diferente:

$$(2\,345)_8 = 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 =$$
$$= 2 \cdot 512 + 3 \cdot 64 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1 =$$
$$= 1\,024 + 192 + 32 + 5 = 1\,253$$

Para representar os naturais, os babilônios usavam um sistema de cifras sexagesimais. Imagine ter que memorizar 59 algarismos diferentes de zero e distintos entre si. Atualmente, além do sistema decimal, o estudo da computação faz uso do sistema hexadecimal, em que a base é $b = 16$, para a representação de valores em linguagem de máquina.

Com 16 algarismos, esse sistema usa as letras A, B, C, D, E e F como respectivos representantes dos números dez, onze, doze, treze, quatorze e quinze.

Assim $\mathbf{(xyz)_{16} = x \cdot 16^2 + y \cdot 16 + z}$ é uma cifra na qual *x*, *y* e *z* são algarismos hexadecimais.

Outro sistema muito utilizado na linguagem de computadores é o sistema binário, em que a base $b = 2$ determina que existem apenas dois algarismos para se representar todos os números naturais. Esses algarismos são 0 e 1. Assim:

$$\mathbf{(10011101)_2} = \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{0} \cdot 2^6 + \mathbf{0} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 +$$
$$+ \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 =$$
$$= 128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 157$$

Algarismo das unidades

Na sua forma decimal, o algarismo das unidades de cada inteiro informa diretamente se o número pertence ao ideal $10\mathbb{Z}$ ou a qualquer dos seus conjuntos laterais.

O número 280, por exemplo, pertence ao ideal $10\mathbb{Z}$ pois termina com zero. Já o número 2 345, por exemplo, pertence ao conjunto lateral de $10\mathbb{Z}$, cujos números são da forma $10 \cdot k + 5$, com *k* inteiro, pois termina com 5.

Então, sendo *u* o algarismo das unidades de um número inteiro *n* qualquer, tem-se que:

$$n \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 10 \cdot k + u, k \in \mathbb{Z}\}$$

Duas propriedades importantes podem ser enunciadas para o algarismo das unidades da soma e do produto de números naturais:

I. A unidade da soma depende apenas da soma das unidades das parcelas.

$$n_1 + n_2 = (10 \cdot k_1 + u_1) + (10 \cdot k_2 + u_2) =$$
$$= 10 \cdot (k_1 + k_2) + (u_1 + u_2)$$

II. A unidade do produto depende apenas do produto das unidades dos fatores.

$$n_1 \cdot n_2 = (10 \cdot k_1 + u_1) \cdot (10 \cdot k_2 + u_2) =$$
$$= 100 \cdot (k_1 \cdot k_2) + 10 \cdot (k_1 \cdot u_2 + k_2 \cdot u_1) + (u_1 \cdot u_2)$$

Revisando

1. Determine a forma irredutível dos seguintes números racionais:

a) 1,7
b) 0,32
c) 75%
d) 8,6666...
e) 0,54
f) $\frac{364}{56}$
g) $\frac{0,04}{1,2}$
h) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{18}}$
i) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{153}}$
j) $\frac{\pi - 2}{2 - \pi}$

2. O número irracional π é uma das mais importantes constantes matemáticas conhecidas. Seu valor é estipulado pelo quociente entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.
Hoje é sabido que o valor exato desse número não pode ser escrito na forma decimal, pois suas infinitas casas decimais não apresentam nenhum padrão de repetição. O que podemos fazer é aproximá-lo da melhor forma possível de acordo com a necessidade. Uma aproximação desse número com cinco casas decimais é 3,14159.
Os primeiros vestígios das estimativas do valor de π encontram-se no Papiro de Rhind escrito em torno de 1700 a.C. no antigo Egito. Os gregos usavam algumas frações para aproximar o valor de π e particularmente Arquimedes tinha preferência pela fração $\frac{22}{7}$. Os chineses também tinham verdadeira fascinação pelo número π e, em uma obra de Tsu Chúng-Chisch (430-501), o autor descreve o valor "arquimediano" $\frac{22}{7}$ para o número π como "inexato".
Obtenha a forma periódica do número racional $\frac{22}{7}$ e responda às seguintes perguntas:

a) De quantos algarismos é composto o período da dízima?
b) Qual é o valor do 2014º algarismo após a vírgula dessa dízima?
c) Considerando-se apenas o número formado pelos quatro primeiros algarismos desse número, qual é a diferença aproximada entre o número irracional π e a razão $\frac{22}{7}$?
d) Qual é o valor aproximado do comprimento de uma circunferência com 280 metros de diâmetro, que se obtém adotando-se o valor "arquimediano" inexato do número π?

3. Um professor do Ensino Fundamental propôs aos seus alunos a seguinte atividade: cada aluno deveria escolher um número x pertencente a um determinado intervalo de números reais determinado pelos números -1, 0 e 1, depois calcular suas cinco primeiras potências e escrever os resultados obtidos em ordem crescente.
Os intervalos dados foram:

$A =]+1, +\infty[$ $C =]-\infty, -1[$ $B =]0, +1[$ $D =]-1, 0[$

André escolheu um número x pertencente ao intervalo A, fez os cálculos, comparou seus resultados e respondeu corretamente que: $x^1 < x^2 < x^3 < x^4 < x^5$.
Se Bruno escolheu um número do intervalo B, Claudia, um número do intervalo C e Denise, um número do intervalo D, e todos fizeram corretamente seus cálculos e comparações, então, sendo x o número escolhido em cada caso, quais foram, em função de x, as respostas de:

a) Bruno?
b) Cláudia?
c) Denise?

4. Efetue as operações aritméticas indicadas nos seguintes itens, sem usar aproximações:

a) $2 + 3 \cdot 4^5$
b) $2^6 \cdot 5^6$
c) $25^{-1} + 25^0 + 25^{\frac{1}{2}} + 25^{-\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$
e) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{18}$
f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$
g) $\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

5. **Uece 2022** Dados dois números inteiros positivos p e q, diremos que p é um divisor de q se existe um inteiro positivo k, tal que $q = k \cdot p$. Um número inteiro positivo q, maior do que um, é chamado de número primo se seus únicos divisores positivos são o número um e o próprio número q. Note que o número 101101 possui n divisores positivos sendo m deles números primos. Assim, é correto concluir que o valor de $n - m$ é igual a:

a) 11.
b) 9.
c) 12.
d) 10.

6. Considere os números 4 200 e 1 500 e faça o que se pede em cada item.
   a) Decomponha esses números em fatores primos.
   b) Determine quantos são os divisores inteiros de cada um.
   c) Calcule o mmc entre esses números.
   d) Calcule o mdc entre esses números.

7. O manual de um veículo automotivo recomenda que o proprietário faça, numa concessionária autorizada, as revisões mecânica, elétrica e hidráulica, respectivamente, a cada 10 000, 8 000 e 12 000 quilômetros rodados.
   Se o proprietário seguir estas recomendações, após quantos quilômetros rodados ele deverá levar pela primeira vez à concessionária para fazer, no mesmo dia:
   a) as revisões elétrica e mecânica?
   b) as revisões elétrica e hidráulica?
   c) as revisões mecânica e hidráulica?
   d) as três revisões?

8. Uma remessa de doces deverá ser distribuída igualmente pela prefeitura para as festas de Dia da Criança das escolas da cidade. Sabendo que na remessa há 11 200 balas, 37 500 chicletes e 18 450 pirulitos e que cada escola receberá o mesmo número de balas, chicletes e pirulitos, determine:
   a) Qual é o maior número possível de escolas da prefeitura que há nessa cidade?
   b) Quantas balas cada escola irá receber?
   c) Quantos chicletes cada escola irá receber?
   d) Quantos pirulitos cada escola irá receber?

9. Determine o menor inteiro positivo que deixa o mesmo resto 7 quando dividido por 12 e por 15.

10. **UFJF-MG 2021** Representar a dízima periódica simples 0,232323... como uma fração irredutível.

Exercícios propostos

1. Em um dado momento em uma repartição pública, você é o 17º de uma fila de 20 pessoas e precisa sair dela para ir ao banheiro, sabendo que não é permitido guardar lugar na fila.
   A eficiência dessa repartição é muito boa, seus funcionários são capazes de atender 3 pessoas a cada dez minutos, mas nesse horário entram na fila 4 pessoas a cada cinco minutos. Se nenhuma pessoa furar a fila, ninguém sair dela e você voltar para ela exatamente vinte minutos após ter saído, sua posição na fila será a:
   a) 31ª.
   b) 30ª.
   c) 29ª.
   d) 28ª.
   e) 27ª.

2. **UEPG-MG 2021** Considerando que A é o conjunto dos números inteiros que satisfaz a condição $-1 \leqslant m^2 + 2m + 1 \leqslant 1$, B é o conjunto dos números inteiros que satisfaz a condição $-1 \leqslant 2k - 5 \leqslant 1$, assinale o que for correto.
   01 $A \cup B - \{-2, 0, 2\} = \{1, 3\}$
   02 $\{-2\} \in A$
   04 $A \cap B = \{2\}$
   08 Os elementos do conjunto B são números primos.
   16 $A - (A \cup B) = B$
   Soma:

3. **Fuvest-SP 2020** A função E de Euler determina, para cada número natural *n*, a quantidade de números naturais menores do que *n* cujo máximo divisor comum com *n* é igual a 1. Por exemplo, E(6) = 2 pois os números menores do que 6 com tal propriedade são 1 e 5. Qual o valor máximo de E(*n*), para *n* de 20 a 25?
   a) 19
   b) 20
   c) 22
   d) 24
   e) 25

4. **Fuvest-SP 2021** Alice quer construir um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 60 cm × 24 cm × 18 cm, com a menor quantidade possível de cubos idênticos cujas medidas das arestas são números naturais. Quantos cubos serão necessários para construir esse paralelepípedo?
   a) 60
   b) 72
   c) 80
   d) 96
   e) 120

5. **Enem 2021** Os diretores de uma escola precisam construir um laboratório para uso dos alunos. Há duas possibilidades:
   (i) Um laboratório do tipo A, com capacidade para usuários, a um custo de 180 mil reais e gastos de 60 mil reais por ano para manutenção;
   (ii) Um laboratório do tipo B, com capacidade para 80 usuários, a um custo de 120 mil reais e gastos com manutenção de 16 mil reais por ano.
   Considera-se que, em qualquer caso, o laboratório implantado será utilizado de um laboratório implantado será utilizado na totalidade de sua capacidade.
   A economia da escola, na utilização de um laboratório tipo B, em vez de um laboratório tipo A, num período de 4 anos, por usuário, será de:
   a) 1,31 mil reais.
   b) 1,90 mil reais.
   c) 2,30 mil reais.
   d) 2,36 mil reais.
   e) 2,95 mil reais.

6. Uma balança digital que mede massas em gramas tem precisão de apenas duas casas decimais, de modo que, se uma massa de 6,543 g, por exemplo, for colocada na balança, essa balança indicará apenas 6,54 g, pois não há em seu visor espaço para uma terceira casa decimal.

06,54 g

A balança mede desde 0,01 g até 99,99 g, mas não efetua aproximações considerando os valores de uma possível terceira casa decimal da massa medida, nesse caso, a balança simplesmente elimina os algarismos de todas as casas decimais que viriam após a segunda casa.
Considere que as frações nas alternativas a seguir representem as massas, em gramas, de cinco pequenos objetos e assinale aquele que terá a pior aproximação feita por essa balança.

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{9}$

7. **PUC-Rio 2022** Considere o número irracional $x = \sqrt{7} + \sqrt{11}$. Assinale a alternativa correta:

a) $x < 5$
b) $5 < x < 6$
c) $6 < x < 7$
d) $7 < x$

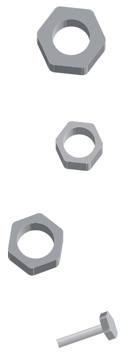
8. O sistema de numeração de uma marca de chaves de boca de aço inoxidável indica a abertura da "boca" usando como unidade de referência a fração de um dezesseis avos da polegada. Assim, se o numeral impresso na chave for 13, por exemplo, então a abertura da boca da chave é de $\frac{13}{16}$ de uma polegada.

Eugene Shapovalov/Shutterstock.com

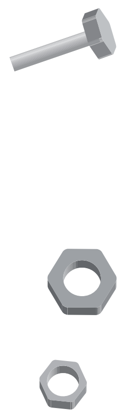
Um mecânico possui um conjunto de chaves de boca dessa marca cujos números são: 13, 18, 20, 24, 27 e 30. Ele precisa apertar uma porca cuja bitola é de 1,25 polegada.
Se a abertura da boca da chave deve, preferencialmente, coincidir com a bitola da porca que será apertada, o mecânico deverá escolher a chave de número:

a) 18.
b) 20.
c) 24.
d) 27.
e) 30.

9. Tanto o diâmetro interno de uma porca quanto o diâmetro externo dos parafusos são chamados de bitola e costumam ser apresentados como frações de polegadas. A tabela apresenta os valores das bitolas de algumas porcas e parafusos produzidos por uma determinada empresa.



Código	Bitola pol.
2 TX-S	1/8
3 TX-S	3/16
4 TX-S	1/4
5 TX-S	5/16
6 TX-S	3/8
8 TX-S	1/2
10 TX-S	5/8
12 TX-S	3/4
14 TX-S	7/8
16 TX-S	1
20 TX-S	1 1/4
24 TX-S	1 1/2
32 TX-S	2



Sabendo que uma polegada equivale a 2,54 centímetros, pode-se estimar a diferença entre os diâmetros internos das porcas de códigos 20 TX-S e 5 TX-S, que são produzidas por essa empresa, em, aproximadamente,

a) 24 mm.
b) 30 mm.
c) 35 mm.
d) 42 mm.
e) 54 mm.

10. Qual é o resultado que se obtém efetuando-se as operações aritméticas com as dízimas periódicas indicadas na expressão a seguir?

$$\frac{0,\overline{75} + 0,\overline{57}}{0,\overline{7} - 0,\overline{5}}$$

a) 4,8
b) 5,4
c) 6
d) 6,6
e) 8

11. Qual é o resultado da adição das dízimas periódicas a seguir?

$$\begin{array}{r} 0{,}54545454... \\ +\ 0{,}56565656... \\ \hline ??? \end{array}$$

a) 0,10101010...
b) 0,11111111...
c) 1,00000000...
d) 1,01010101...
e) 1,11111111...

12. **UFRGS 2020** Considere as seguintes afirmações sobre números racionais.

I. Se $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{c}{d}\right)^2$.

II. Se $\frac{a}{b} < 0 < \frac{c}{d}$, então $\frac{c}{d} + \frac{a}{b} > 0$.

III. Toda fração da forma $\frac{a}{b}$ é irredutível.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas II e III.
e) I, II e III.

13. **Cotuca-SP 2020** Calcule o valor numérico da expressão $E = 12\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12}\right) - 3^2$.

a) $E = 0$
b) $E = 1$
c) $E = 9$
d) $E = 16$
e) $E = 34$

14. No estudo do conjunto dos números reais, verificamos que os subconjuntos numéricos mais importantes são: naturais, inteiros, racionais e irracionais. A respeito das operações entre os elementos desses subconjuntos, assinale o que for correto:

☐ A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

☐ Uma potência em que a base é um número inteiro e o expoente é um número racional, resulta, necessariamente, em um número real.

☐ O quociente entre dois números reais é, necessariamente, um número real.

☐ A soma de um número racional com um número irracional é, necessariamente, um número irracional.

☐ Uma potência em que a base é um número real positivo e o expoente é um número natural pode resultar em um número negativo.

15. No estudo da Termodinâmica, a dilatação pode ser analisada sob o aspecto linear, superficial ou volumétrico. Nas expressões algébricas que modelam esse fenômeno constam os termos α, β e γ, respectivamente. Denominados coeficientes de dilatação, os valores desses termos algébricos variam de acordo com o material cuja dilatação está sendo analisada mas em todos os casos os valores desses coeficientes são tais que:

$\alpha^2 = \beta$ $\qquad$ $\alpha^3 = \gamma$ $\qquad$ $\beta^3 = \gamma^2$

De acordo com essas relações, se para um determinado material o coeficiente de dilatação volumétrico é $\gamma = 0{,}000008$, o coeficiente de dilatação superficial β será igual a:

a) 0,0004
b) 0,0002
c) 0,04
d) 0,02
e) 0,2

16. Entre as propriedades aritméticas relativas à noção das operações de potenciação, radiciação e adição, o fato de a radiciação não ser distributiva em relação à adição é essencial para que não sejam cometidos erros de cálculo. Nesse contexto, qual das sentenças fechadas a seguir é a correta?

a) $\sqrt{1^2 + 2^2} = 1 + 2$
b) $\sqrt[3]{1^2 + 2^2} = 1 + 2$
c) $\sqrt[3]{1^3 + 2^3} = 1 + 2$
d) $\sqrt{1^3 + 2^3} = 1 + 2$
e) $\sqrt{1 + 2} = 1 + 2$

17. Simplificando a expressão aritmética $\sqrt[4]{\frac{4^8 - 8^4}{48}}$, é possível escrevê-la na forma $p \cdot \sqrt[4]{q}$, com p e q inteiros positivos. Nessas condições, o menor valor possível da soma $p + q$ é igual a:

a) 6.
b) 9.
c) 15.
d) 32.
e) 65.

18. O número expresso pelo radical duplo $\sqrt[5]{25\sqrt{5}}$ também pode ser escrito como:

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt[3]{5}$
c) $\sqrt[3]{25}$
d) $\sqrt[4]{5}$
e) $\sqrt[4]{125}$

19. **PUC-Rio 2022** Considere os números inteiros $x = 5^5$, $y = 6!$ e $z = 172$. Assinale a alternativa correta:

a) $x < y < z$
b) $x < z < y$
c) $z < y < x$
d) $z < x < y$

20. Se $x \in \left\{1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1\right\}$ e $y = 25^x$, então a soma dos possíveis valores de y é:

a) 0,3124.
b) 3,124.
c) 31,24.
d) 312,4.
e) 3 124.

21. **Cefet-MG 2020** Sejam $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ respectivamente, os conjuntos dos números inteiros e racionais, o número que NÃO pertence ao conjunto $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$ é:

a) 3,14

b) 1,33333...

c) $-\frac{7}{5}$

d) -1

22. O número irracional representado pela expressão aritmética $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ também pode ser representado por:

a) $\frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6}}{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{3}$

c) $\frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6}}{3}$

d) $\frac{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{18}}{3}$

e) $\frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{18}}{3}$

23. Efetuando $4^{3^{-2^{-1}}}$ obtém-se:

a) 4 096.

b) 262 144.

c) $\frac{1}{8}$.

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

e) $\sqrt[3]{4}^{\sqrt{3}}$.

24. **Col. Naval-RJ 2020** Considere o conjunto $A = \left\{x \middle| x = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ um subconjunto da reta.

É correto afirmar que:

a) Existe um único elemento de A cuja distância a qualquer outro elemento, também de A, é inferior a qualquer número real positivo.

b) Zero é um elemento do conjunto A.

c) Fixado qualquer valor real positivo *p*, sempre existirão dois elementos do conjunto A cuja distância na reta é menor do que *p*.

d) Existe um elemento do conjunto A que não é racional.

e) Existem dois elementos do conjunto A, de tal modo que a diferença entre eles não é um racional.

25. **IFRS 2020** Os algarismos *x* e *y*, respectivamente, no algoritmo a seguir são

$$\begin{array}{r} 8\ 9\ x \\ +\quad y\ 7 \\ \hline 9\ 8\ 2 \end{array}$$

a) 5 e 8.
b) 4 e 9.
c) 5 e 9.
d) 4 e 8.
e) 3 e 8.

26. **ITA-SP 2020** Dizemos que um número natural *n* é um *cubo perfeito* se existe um número natural *a* tal que $n = a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

27. Dois trapezistas balançam em seus trapézios com períodos diferentes; um deles vai saltar e será aparado pelo outro. O período do balanço do trapezista saltador é de 12 décimos de segundo, ao passo que o período do balanço do trapezista aparador é de 16 décimos de segundo.
Um trapezista só pode saltar e ser aparado pelo outro com segurança quando os trapézios estão nos pontos de máxima aproximação. Esse é considerado o momento ideal para o salto.
Em um determinado instante, os trapezistas estavam na posição ideal para o salto, mas o saltador ficou inseguro e resolveu esperar pelo próximo momento ideal. Esse momento ocorrerá depois de:

a) 10,8 segundos.
b) 9,6 segundos.
c) 4,8 segundos.
d) 3,6 segundos.
e) 2,4 segundos.

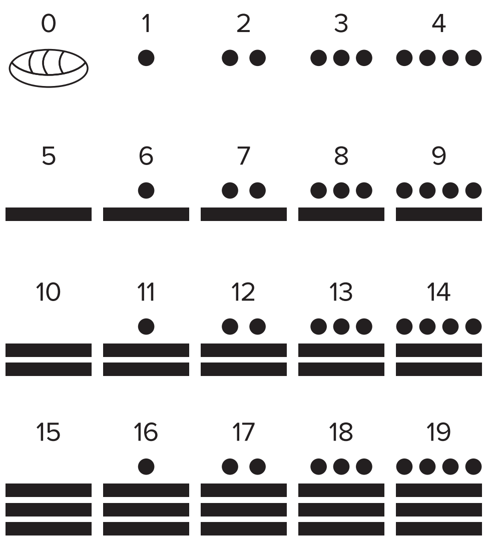
28. O ano de 2014 foi marcado pela passagem de três dos principais cometas conhecidos. Veja o quadro a seguir:

Nome	Ano da descoberta	Próxima passagem	Período aproximado
Halley	240 a.C.	2061	76 anos
Encke	1786	2010	3 anos
Pons-Winnecke	1819	2015	6 anos
Tuttle	1790	2021	13 anos
Tempel-Swift-LINEAR	1869	2014	6 anos
Pons-Brooks	1812	2024	71 anos
Olbers	1815	2024	70 anos
Lobo	1884	2017	9 anos
Brooks 2	1889	2014	6 anos
Holmes	1892	2014	7 anos

De acordo com os dados contidos nessa tabela é correto afirmar que, antes de 2014, a última vez que esses três cometas tinham passado próximos ao nosso planeta no mesmo ano foi em:

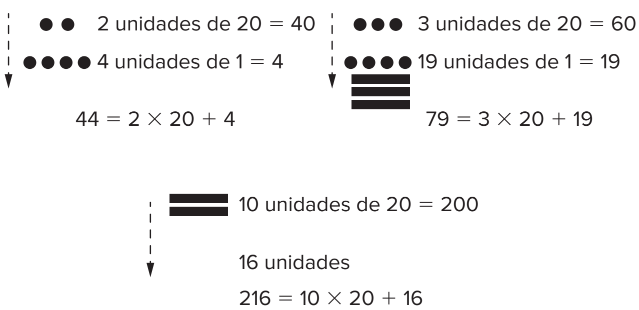
a) 2008.
b) 1972.
c) 1954.
d) 1898.
e) 1814.

29. Enem 2020 Embora a civilização maia já estivesse em declínio na época da chegada dos espanhóis à América, seu desenvolvimento em vários campos da ciência, em especial, na matemática e na astronomia, era notável. Eles possuíam um sistema numérico avançado e diferente do sistema decimal utilizado pelas sociedades modernas. A imagem representa o sistema de numeração maia, que consistia em 20 símbolos representando os números de 0 a 19.

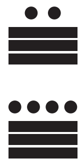


IMENES, L. M. P. *Os números na história da civilização*. São Paulo: Editora Scipione, 2003.

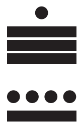
O zero era representado por uma espécie de tigela e todo número inteiro entre 19 e 360 era escrito em uma coluna vertical com duas figuras, na qual a superior representava a quantidade de grupos de 20 unidades e a inferior, a quantidade de unidades. O número era lido de cima para baixo e obtido somando-se as quantidades representadas. Por exemplo:

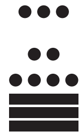


O número 359 é representado, no sistema de numeração maia, como

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Texto para as questões **30** e **31**.

Em 1968, Stanley Kubrick produziu e dirigiu o filme *2001: Uma odisseia no espaço*, baseado no livro escrito por Arthur C. Clarke em 1961. A trama da ficção tem início com a descoberta de gigantescos monólitos pretos cercados por superfícies planas e retangulares. Na obra, todos os monólitos encontrados tinham dimensões proporcionais a 1, 4 e 9.

Bruce Rolff/Shutterstock.com

30. Na obra literária, essa específica proporção numérica indicava a possibilidade de que os monólitos fossem produtos de uma inteligência alienígena, pois esses números são os três primeiros:

a) números primos positivos.
b) números ímpares positivos.
c) números racionais positivos.
d) quadrados perfeitos positivos.
e) cubos perfeitos positivos.

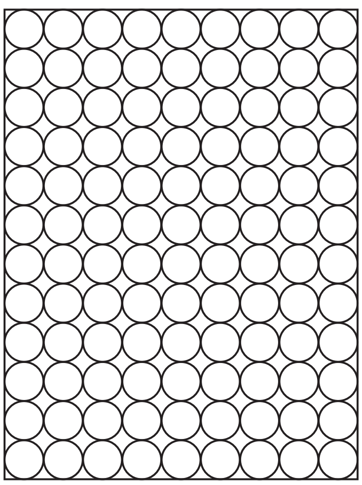
31. Para comemorar os 50 anos do livro de Clarke, foram confeccionadas miniaturas do monólito com dimensões de 1 cm × 4 cm × 9 cm para serem distribuídas como forma de *marketing* da obra. As miniaturas foram distribuídas em pacotes cúbicos e, dentro de cada pacote, elas encostavam-se, umas nas outras, sempre de modo que as faces em contato fossem congruentes entre si. Além disso, as miniaturas não deixavam espaço vazio algum no interior dos pacotes.
Então, se os pacotes com as miniaturas eram do menor tamanho possível, pode-se concluir que o espaço no interior de cada pacote era equivalente ao de um cubo de

a) 9 cm de aresta.
b) 18 cm de aresta.
c) 24 cm de aresta.
d) 36 cm de aresta.
e) 64 cm de aresta.

32. Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.
Atendendo ao pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a) 105 peças.
b) 120 peças.
c) 210 peças.
d) 243 peças.
e) 420 peças.

33. Carla deseja reformar a entrada de sua casa e, para isso, foi a uma serralheria encomendar um portão de ferro retangular de 90 cm × 120 cm. Assim que chegou ao local, viu um portão com as dimensões desejadas e que tinha uma grade formada por circunferências, como mostra a figura a seguir:



Carla gostou do padrão, mas preferia que as circunferências fossem maiores. Dessa forma, encomendou um portão, nas dimensões desejadas e nesse padrão, mas quis que as circunferências tangentes tivessem o maior raio possível. Dessa forma, para que nenhuma circunferência fique incompleta no interior do portão, a medida de seu raio deve ser de

a) 10 cm.
b) 12 cm.
c) 15 cm.
d) 20 cm.
e) 30 cm.

34. Uma barra de doce de leite com o formato de um paralelepípedo, cujas dimensões, em centímetros, são de 15 × 30 × 9, será cortada em pequenos pedaços cúbicos de mesmo tamanho que serão embalados para venda. Se a aresta desses pequenos cubos for a maior possível e não houver desperdício, então, o número de pedaços cúbicos que podem ser cortados da barra original será igual a:

a) 300.
b) 150.
c) 60.
d) 30.
e) 15.

35. Em uma corporação, para o uso da rede de computadores devem ser selecionadas senhas de 4 algarismos de acordo com os seguintes critérios:

I. Facilidade de memorização.

Nesse critério vários fatores são levados em consideração, entre eles a quantidade de algarismos repetidos conta positivamente para a adequação da senha, por exemplo.

II. Maior divisor primo.

Nesse critério não se leva em consideração os valores dos demais divisores do numeral formado pela senha. Assim, entre duas ou mais senhas, a mais adequada é aquela que é divisível pelo maior número primo que possuir.

III. Quantidade de divisores.

Nesse critério, quanto menor for a quantidade de divisores do numeral formado pela senha, mais adequada será a senha.
Um membro dessa corporação deve escolher entre as senhas 4 740 e 7 470 para entrar na rede de computadores. De acordo com os critérios listados e exemplificados, a senha mais adequada para essa pessoa escolher é

a) 4 740 pelo critério I.
b) 4 740 pelo critério II.
c) 4 740 pelo critério III.
d) 7 470 pelo critério I.
e) 7 470 pelo critério II.

36. **Uece 2020** Para cada número inteiro positivo k seja $x_k = \dfrac{k}{k+1}$. O menor valor do número inteiro positivo n para o qual o produto $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n$ é menor do que 0,02 é igual a:

a) 49.

b) 50.

c) 52.

d) 51.

37. Um brinquedo direcionado para a alfabetização infantil é composto de 36 pequenos cubos de madeira de mesmo tamanho com letras pintadas em suas faces. Todas as peças desse brinquedo devem ser embaladas em uma caixa de base quadrada de modo que cada dimensão interna da caixa seja, no mínimo, igual ao dobro das dimensões dos cubos de madeira.
Nessas condições, quantas opções há para as dimensões da caixa?

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

38. **EPCar-MG 2022** As divisões exatas de a e b por 4 e 6, respectivamente, são iguais. Multiplicando-se o mínimo múltiplo comum (mmc) de a e b pelo máximo divisor comum (mdc) de a e b, obtém-se 1536. A diferença $(a - b)$ é igual a

a) -18

b) -16

c) -14

d) -12

39. **UEL-PR 2021** Simão Botelho e Teresa Albuquerque moram em casas vizinhas e vivem um amor de perdição através de suas janelas em plena Portugal do século XIX. Quando são proibidos de se ver, combinam uma fuga para além das fronteiras de Portugal e precisam contabilizar suas economias. Teresa, com auxílio de uma lanterna a óleo acesa, quer informar a Simão sua quantia por meio de um código mutuamente combinado. Para isso, realiza de sua janela uma sequência de movimentos que simbolizam 6 algarismos m_5, m_4, m_3, m_2, m_1 e m_0, nesta ordem, de forma que cada algarismo pertença ao conjunto {0, 1} utilizando a seguinte convenção:

I. Levantar a lanterna ao seu lado esquerdo simboliza o número 0;

II. Levantar a lanterna ao seu lado direito simboliza o número 1.

A sequência transmitida por Teresa a Simão é transformada, por ele, em um número natural N através da seguinte regra:

$$N = m_5 2^5 + m_4 2^4 + m_3 2^3 + m_2 2^2 + m_1 2^1 + m_0 2^0$$

Sabendo que N = 42 é a quantia informada por Teresa a Simão, assinale a alternativa que apresenta, correta e ordenadamente, a sequência $m_5, m_4, m_3, m_2, m_1, m_0$ de algarismos simbolizados por ela.

a) 0, 0, 1, 1, 1, 1.

b) 0, 1, 0, 1, 0, 1.

c) 1, 0, 1, 0, 1, 0.

d) 1, 0, 1, 1, 0, 0.

e) 1, 1, 0, 0, 1, 0.

40. **PUC-Rio 2021** Lembre que um inteiro positivo p maior do que 1 é primo se os seus únicos divisores inteiros positivos forem 1 e p. Assim, por exemplo, 13 é primo, mas 15 não é primo.
Quantos números primos existem entre 40 e 50?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 5

41. **EPCar-MG 2020** Dois irmãos, Luiz e Guilherme, têm uma pequena fábrica de móveis de madeira.
Luiz fabrica 20 cadeiras do modelo A em 3 dias de 4 horas de trabalho por dia. Já Guilherme fabrica 15 cadeiras do modelo A em 8 dias de 2 horas de trabalho por dia.
Uma empresa fez uma encomenda à fábrica de 250 cadeiras do modelo A.
Para atender à demanda, os irmãos trabalharam juntos, no ritmo de 6 horas por dia, gastando então, y dias para concluir o trabalho e entregar a encomenda.
O número y é tal que

a) possui raiz quadrada exata.

b) divide 100.

c) é divisor de 150

d) é múltiplo de 12.

42. **Col. Naval-RJ 2020** Considerando os resultados das expressões A e B até a quarta casa decimal sem fazer aproximações e sabendo-se que:

$$A = \frac{(11\% \text{ de } 25) + 36\% \text{ de } (75 \times 3\% \text{ de } 50)}{(24\% \text{ de } 35) - (8\% \text{ de } 40)} = 8{,}a1b3e$$

e

$$B = \frac{(75\% \text{ de } 36 \times 50\% \text{ de } 3) + (25\% \text{ de } 11)}{(35\% \text{ de } 24) - (40\% \text{ de } 8)} = c{,}3d7e,$$

determine o resto da divisão de N por 11 sendo o número $N = (a + b)^{c+d+e}$

a) 0

b) 1

c) 4

d) 7

e) 9

43. Em uma reunião da coordenação do Poliedro Sistema de Ensino foi sugerido que os cadernos com as resoluções das provas dos vestibulares tivessem suas páginas marcadas com a sucessão das letras das palavras *sistema* e *poliedro*, separadas por um espaço com o tamanho de uma letra, de acordo com o seguinte padrão:

```
S I S T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A
I S T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A
S T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P
T E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O
E M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L
M A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I
A   P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E
  P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D
P O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R
O L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
L I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
I E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
E D R O   S I S T E M A   P O L I E D R O
```

Sabendo que todas as páginas desses cadernos teriam 55 linhas marcadas com o padrão ilustrado, pode-se concluir que a última linha de cada página começaria com

a) a letra I.
b) a letra T.
c) a letra A.
d) a letra D.
e) um espaço.

44. Uma atividade aritmética foi proposta pela professora de Matemática de uma turma com 35 alunos. A professora diz um número ao primeiro aluno da lista de chamada e esse aluno deve somar os algarismos do número que lhe foi dito. Depois deve elevar ao quadrado a soma obtida e dizer o resultado ao próximo aluno da lista. Se um aluno ouvir um número com apenas um algarismo, então deve apenas elevá-lo ao quadrado e dizer o resultado para o próximo aluno. O último aluno da sala deverá dizer seu resultado para a professora.
Se todos os alunos da sala participaram da atividade, ninguém errou seus cálculos e a professora disse o número 11 para o primeiro aluno, então, qual foi o número dito à professora no final da atividade?

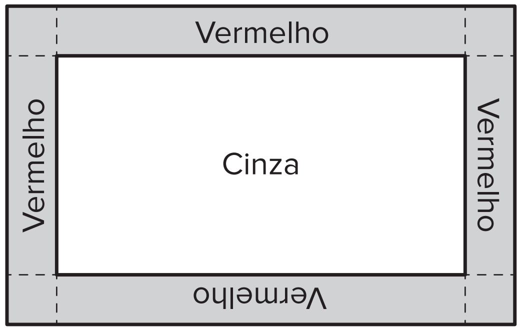
45. **EPCar-MG 2021** Considere, em $\mathbb{N}^*$, os seis menores números tais que

- a soma dos três menores é igual ao número A;
- a soma dos três maiores é igual ao número B;
- o número A é divisível por 5; e
- o número B é divisível por 6.

Analise as afirmações a seguir e marque a única correta.

a) A + B é um número múltiplo de 12.
b) O máximo divisor comum de A e B é um número maior que 10.
c) O produto de A por B é um número quadrado perfeito.
d) O mínimo múltiplo comum de A e B é igual a 120.

46. **EPCar-MG 2021** Na reforma que está sendo feita nas dependências da EPCAR, há uma via, por onde os alunos transitam, cujo piso é retangular, com dimensões 4,40 m por 2,75 m.
Essa via será pavimentada, e deve-se usar o menor número possível de bloquetes quadrados, todos inteiros e de mesmo tamanho. Há que se considerar que os bloquetes da borda externa desse pavimento serão na cor vermelha e os internos a essa borda, na cor cinza, como mostra a figura.



Serão usados x bloquetes na cor vermelha e y na cor cinza. Sobre os valores de x e y é correto afirmar que

a) x é 60% de $x + y$.
b) $\frac{x}{y} = 1{,}222...$
c) $x - y$ é maior que 5.
d) $x + y$ é maior que 42.

47. Bruna estudava métodos de criptografia e a aplicação dos números primos no processo de criação de senhas. Um dia, resolveu mudar a senha de 4 algarismos do seu cartão de banco aplicando os mecanismos que estudava.
Assim, diante de um quadro com todos os números primos de dois algarismos como a reproduzida a seguir, Bruna decidiu que sua senha satisfaria três condições:

1. A senha seria igual ao produto entre 2 números da tabela.
2. Os números primos escolhidos teriam apenas 2 unidades de diferença.
3. A senha teria apenas algarismos ímpares.

De 10 a 20	11 – 13 – 17 –19
De 21 a 30	23 – 29
De 31 a 40	31 – 37
De 41 a 50	41 – 43 – 47
De 51 a 60	53 – 59
De 61 a 70	61 – 67
De 71 a 80	71 – 73 – 79
De 81 a 90	83 – 89
De 91 a 100	97

Com essas condições, pode-se concluir que para a senha de Bruna

a) há duas possibilidades nas quais os 4 algarismos são diferentes um do outro.

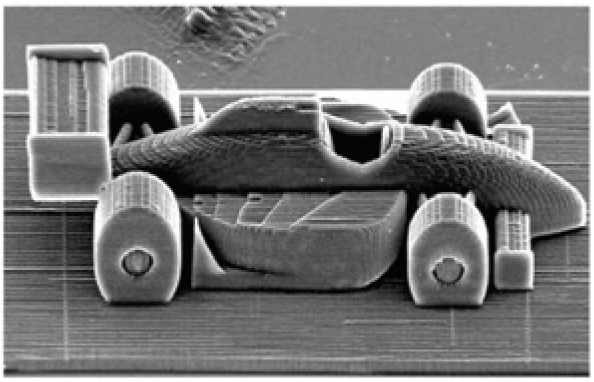
b) há apenas duas possibilidades nas quais os 4 algarismos são diferentes um do outro.

c) há uma possibilidade em que 4 algarismos são diferentes um do outro.

d) há apenas uma possibilidade em que os 4 algarismos são diferentes um do outro.

e) há apenas uma opção em que 2 dos algarismos são iguais.

48. **Enem 2020** Pesquisadores da Universidade de Tecnologia de Viena, na Áustria, produziram miniaturas de objetos em impressoras 3D de alta precisão. Ao serem ativadas, tais impressoras lançam feixes de *laser* sobre um tipo de resina, esculpindo o objeto desejado. O produto final da impressão é uma escultura microscópica de três dimensões, como visto na imagem ampliada.



A escultura apresentada é uma miniatura de um carro de Fórmula 1, com 100 micrômetros de comprimento. Um micrômetro é a milionésima parte de um metro. Usando notação científica, qual é a representação do comprimento dessa miniatura, em metro?

a) $1,0 \cdot 10^{-1}$

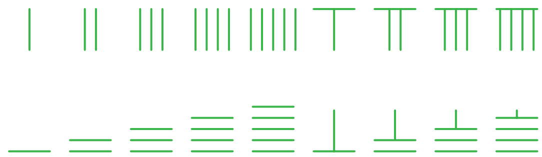
b) $1,0 \cdot 10^{-3}$

c) $1,0 \cdot 10^{-4}$

d) $1,0 \cdot 10^{-6}$

e) $1,0 \cdot 10^{-7}$

49. **Fuvest-SP 2022** O sistema de numeração conhecido como chinês científico (ou em barras) surgiu provavelmente há mais de dois milênios. O sistema é essencialmente posicional, de base 10, com o primeiro algarismo à direita representando a unidade. A primeira linha horizontal de símbolos da figura mostra como se representam os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 quando aparecem em posições ímpares (unidades, centenas etc.), e a segunda linha quando tais algarismos aparecem em posições pares (dezenas, milhares etc.). Nesse sistema, passou-se a usar um círculo para representar o algarismo zero a partir da Dinastia Sung (960-1126).



Howard Eves, Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Editora Unicamp, 2011 (5ª ed.).

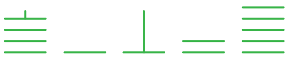
Assinale a alternativa que representa o número 91625 nesse sistema de numeração.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

50. Não é difícil confundir dois números grandes formados pelos mesmos algarismos, mas em ordens diferentes. Principalmente quando começam pelo mesmo algarismo como 263 e 236.
Imagine um caminhoneiro que viajando por uma rodovia federal deva acessar a saída do quilômetro (XYZ), mas por distração acessa outra saída no quilômetro (XZY) da mesma rodovia.
Nessa situação, a maior distância possível entre a saída correta e a saída incorreta seria de:

a) 9 km.

b) 36 km.

c) 55 km.

d) 74 km.

e) 81 km.

51. **EPCar-MG 2020** Em um jogo de videogame há uma etapa em que o personagem, para se livrar do ataque de monstros, precisa subir pelo menos 1 dos 20 andares de um prédio, utilizando, necessariamente, um elevador. O personagem encontra-se no térreo e pode escolher e acionar um dos 3 elevadores ali existentes. Todos eles estão em perfeito funcionamento e são programados de modo a parar em andares diferentes, conforme esquema a seguir:

Elevador	Programado para parar apenas nos andares de números
P	pares
T	múltiplos de 3
C	múltiplos de 5

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa, apenas para os andares de 1 até 20

- Não há possibilidade de um mesmo andar receber os três elevadores P, T e C.
- Em 6 andares desse prédio, chegam, exatamente, 2 elevadores.
- Se em *x* andares desse prédio chega apenas 1 elevador, então, *x* é menor que 7.

Sobre as proposições, tem-se que

a) apenas uma afirmação é verdadeira.
b) apenas duas afirmações são verdadeiras.
c) todas as afirmações são verdadeiras.
d) nenhuma afirmação é verdadeira.

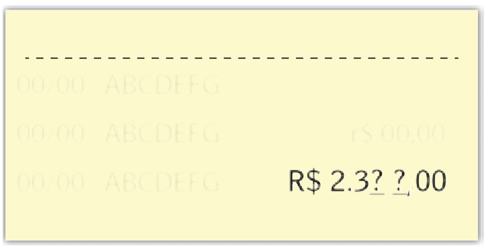
52. Acaba de ser revelada a primeira foto de um buraco negro supermassivo no centro de Messier 87, uma enorme galáxia no aglomerado de Virgem. Este buraco negro está a 53,5 milhões de anos-luz da Terra e tem uma massa de 6,5 bilhões de vezes a massa do Sol.

Dia histórico para a ciência: revelada a primeira imagem de buraco negro. *Jornal da USP*. Disponível em: https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-exatas-e-da-terra/dia-historico-para-a-ciencia-revelada-a-primeira-imagem-de-buraco-negro/. Acesso em: 27 jul. 2022.

De acordo com a notícia, e considerando S a massa do Sol, o quociente entre a massa do buraco negro encontrado e a distância do nosso planeta à região onde o buraco está localizado, em anos-luz, deve valer, aproximadamente:

a) $1{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot S$
b) $1{,}2 \cdot 10^{3} \cdot S$
c) $1{,}2 \cdot 10^{2} \cdot S$
d) $8{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot S$
e) $8{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot S$

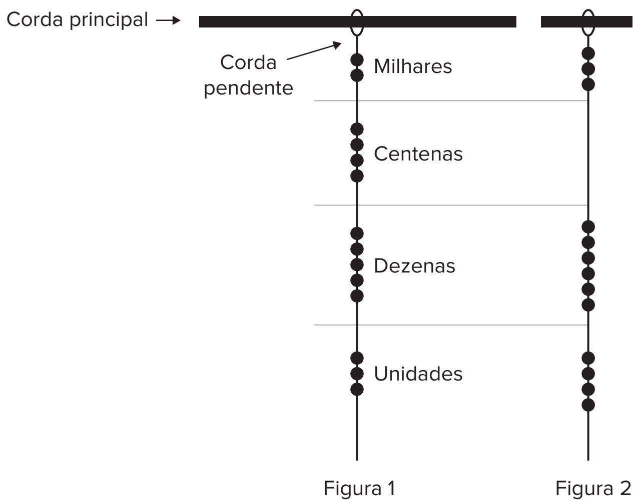
53. Marcos retirou seu extrato bancário, mas ele estava tão borrado que não se viam dois dígitos.



Mesmo assim, era possível perceber que os dígitos borrados eram diferentes um do outro e nenhum deles tinha "bolinhas" como 0, 6, 8 e 9. Marcos sabia que seu saldo era múltiplo de nove, então, raciocinando corretamente ele pôde concluir que:

a) os algarismos borrados eram 1 e 3.
b) o segundo algarismo borrado era 5.
c) o primeiro algarismo borrado era 7.
d) pelo menos um dos algarismos borrados era 4.
e) os dois algarismos borrados eram pares.

54. Enem Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus*. O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades dezenas, centenas e milhares. Na figura 1, o *quipus* representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.



Disponível em: www.culturaperuana.com.br. Acesso em: 13 dez. 2012.

O número da representação do *quipus* da Figura 2, em base decimal, é

a) 364.
b) 463.
c) 3 064.
d) 3 640.
e) 4 603.

55. Col. Naval-RJ 2021 A 157ª casa decimal do número equivalente a $\frac{1}{13}$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 7
e) 9

56. Um garoto resolveu guardar suas bolinhas de gude em saquinhos plásticos de forma que cada saquinho ficasse com a mesma quantidade de bolinhas. Tentou colocar cinco bolinhas em cada saquinho e percebeu que sobrava uma bolinha, tentou colocar seis bolinhas em cada saquinho, e novamente sobrou uma bolinha. Tentou com sete e depois com oito e aconteceu o mesmo em ambos os casos: sobrou uma bolinha.

Sabendo que a atual coleção desse garoto tem mais de 1500 bolinhas de gude, e que os saquinhos plásticos onde o garoto guardará suas bolinhas não são capazes de conter mais do que 50 bolinhas cada, determine:

a) Qual é o número mínimo de bolinhas de gude da coleção do garoto?

b) Qual é o número mínimo de saquinhos plásticos que o garoto deverá usar para guardar suas bolinhas de gude fazendo com que cada saquinho contenha a mesma quantidade de bolinhas dos demais? E qual seria, neste caso, a quantidade de bolinhas guardadas em cada saquinho?

57. **EPCar-MG 2020** Dona Lourdes trabalha em uma livraria, precisa guardar 200 livros em x caixas e vai utilizar todas elas.
Se em 30 das x caixas ela guardar 4 livros em cada caixa e, nas demais, guardar 5 livros em cada caixa, então, sobrarão alguns livros para serem guardados.
Entretanto, se em 20 das x caixas ela guardar 4 livros em cada caixa e 5 livros em cada uma das demais, então, não haverá livros suficientes para ocupar todas as caixas.
Assim, a soma dos algarismos do número x é igual a

a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 11.

58. Assinale a alternativa que apresenta, no sistema decimal, a diferença entre as quantidades representadas pela cifra 1010 no próprio sistema decimal e no sistema binário.

a) 1 000
b) 100
c) 10
d) 1
e) 0

59. Determine o algarismo X da cifra 3X4 sabendo que ela representa um número divisível por 7.

60. **UEM-PR 2020** Assinale o que for correto.

01 A soma de dois números reais não nulos dividida pelo produto desses números é igual à soma dos inversos desses números.

02 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$.

04 $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{3}$.

08 A soma de um número racional com um número irracional resulta sempre em um número irracional.

16) $\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1} > 2$.

Soma: ______

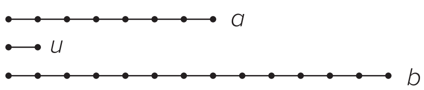
Texto complementar

Números comensuráveis e incomensuráveis

Os antigos gregos, intuitivamente, acreditavam que dados dois objetos quaisquer, de comprimentos a e b, sempre existia alguma unidade u, suficientemente pequena, de tal forma que ambos objetos pudessem ser medidos de modo "exato" com essa unidade u. Ou seja:

$\forall\ a$ e b, $\exists\ u$ tal que $a = m \cdot u$ e $b = n \cdot u$, onde $m, n \in \mathbb{N}$

Desse modo, usando a medida u, um objeto mediria m vezes u e o outro n vezes u. Os objetos (números) a e b são ditos comensuráveis. Para os antigos gregos, dois comprimentos quaisquer eram sempre comensuráveis. Em outras palavras, tudo se podia comparar ou medir utilizando números inteiros.



$a = m \cdot u$ $\qquad$ $b = n \cdot u$

Dizer que dois números a e b são sempre comensuráveis implica que o quociente de dois números a e b quaisquer é sempre racional.

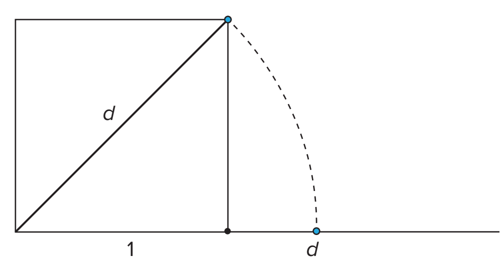
$$\frac{a}{b} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$$

sendo $m, n \in \mathbb{N}$, então $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Seria grande a surpresa desses gregos ao descobrirem que pudessem existir números não comensuráveis ou incomensuráveis. Acredita-se que foi Hípaso de Metaponto, membro da escola pitagórica, quem demonstrara (provavelmente por métodos geométricos) que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles e um dos seus catetos não eram comensuráveis. Ou, equivalentemente, que a diagonal d de um quadrado e um dos seus lados ℓ são incomensuráveis.

Sem perda de generalidade, suponha $\ell = 1$. Pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$



Se d e $\ell = 1$ fossem comensuráveis então teríamos que $\frac{d}{\ell} = d$ é racional.

Portanto, deveríamos admitir que, $\exists\ d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$.

Mostraremos que tal conclusão é absurda.

Lema 5.1. Não existe racional d tal que $d^2 = 2$.

Demonstração. Suponha que existe $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$. Ou seja, $d = \frac{m}{n}$, onde m e n são primos relativos (isto é, m e n não têm fatores em comum). Logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$$

Significa que m^2 é par. Logo, necessariamente m é par (se m fosse ímpar, o produto $m \cdot m = m^2$ seria ímpar). Sendo m par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$.

Assim, $m^2 = 4k^2$ e, portanto, $n^2 = 2k^2$. O que implica que n^2 é par. Desse modo, necessariamente, n é par. Isto é, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2r$. Isso mostra que m e n não podem ser primos relativos, pois têm como fator comum o 2. Tal contradição prova o lema.

Portanto, deve-se concluir que existem números incomensuráveis. Note que a diagonal *d* pode ser "levada" até a reta onde encontra o cateto do quadrado (rotando $\frac{\pi}{4}$ no sentido horário). Ou seja, o comprimento *d* corresponde a um ponto da reta, portanto, existe. Mas, quem era esse número *d*? Antes dessa descoberta, achavam que todo ponto da reta poderia ser representado por um racional.

Conta a lenda que essa descoberta teria levado a uma crise da matemática pitagórica. Na época, a escola pitagórica tratava os números como entidades místicas (números: amigáveis; primos; perfeitos; deficientes; abundantes; etc).

Fonte: AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina S. A construção dos números reais e suas extensões. *In*: *4º Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste*, nov. 2015, Catalão, p. 535. Disponível em: https://www.sbm.org.br/coloquio-centro-oeste-4/wp-content/uploads/sites/2/2016/01/Minicurso_6._A_construcao_dos_Reais.pdf. Acesso em 10 ago. 2022.

Resumindo

Operações aritméticas

Adição

A adição é a mais intuitiva das operações aritméticas. Não é necessário o uso de algarismos ou palavras para compreendermos que \\\ + \\ = \\\\\.

Os valores operados pela adição são chamados de parcelas, e o resultado é chamado de soma.

Multiplicação

A multiplicação entre os números inteiros positivos pode ser definida como uma adição de sucessivas parcelas iguais. O numeral que indica a quantidade de parcelas e o valor dessas parcelas são ambos, chamados de fatores. O resultado das multiplicações é chamado de produto.

Potenciação

A multiplicação de fatores iguais é expressa pela potenciação.

Operações inversas

Para descrever os processos de resolução algébrica das equações que representam as perguntas criadas com base na adição, na multiplicação ou na potenciação, usamos outros operadores simbólicos, como (−) e (:), que indicam as operações inversas da adição e da multiplicação.

A potenciação não é comutativa como a adição ou a multiplicação. Por isso, são necessárias duas operações distintas para invertê-la: uma para isolar a base invertendo o expoente – **a radiciação** – e outra para isolar o expoente invertendo a base, **o logaritmo**.

Propriedades das potências

Para potências de mesma base e expoentes diferentes temos três regras válidas.

Assim, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

I. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

II. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

III. $(a^r)^s = a^{r \cdot s} = a^{s \cdot r} = (a^s)^r$

A potenciação é uma operação distributiva em relação à multiplicação e à divisão, mas não é distributiva em relação à adição ou à subtração. Assim sendo, para $a > 0$ e $b > 0$, temos:

I. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ II. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

As principais consequências dessas propriedades são que:

- Para todo *a* real temos que: $\begin{cases} a^1 = a \\ a^0 = 1 \end{cases}$.
- Se $a \neq 0$, então $a^{-1} = \frac{1}{a}$ e se $a > 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.
- Sendo $a > 0$ e $d \neq 0$: $a^{\frac{n}{d}} = \left(\sqrt[d]{a}\right)^n = \sqrt[d]{a^n}$.

Devido ao fato de as potências pares dos números negativos serem positivas, um cuidado especial deve ser tomado em relação às equações do tipo $x^n = a$, no universo dos números reais, quando *n* é par diferente de zero:

- Se *a* for positivo, teremos: $x = \sqrt[n]{a}$.
- Se *a* for negativo, a equação $x^n = a$ não possui solução real.

Já nos casos em que *n* é **ímpar**, temos que $x^n = a$ implica $x = \sqrt[n]{a}$, não importando qual seja o sinal de *a*.

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 & &\Rightarrow & S &= \{-3, 3\} \\ x^2 &= -9 & &\Rightarrow & S &= \varnothing \\ x^3 &= 8 & &\Rightarrow & S &= \{2\} \\ x^3 &= -8 & &\Rightarrow & S &= \{-2\} \end{aligned}$$

Teorema fundamental da Aritmética

"Todo número inteiro não nulo pode ser decomposto em fatores primos de uma única maneira e não há dois números inteiros com a mesma decomposição."

$$N = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots$$

Quantidade de divisores

Sendo N um número inteiro não nulo:

- A quantidade de divisores positivos de N é dado por: $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \ldots$
- A quantidade de divisores inteiros de N é dado por: $2(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \ldots$

Divisão euclidiana

$$\begin{array}{r|l} N & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \rightarrow \begin{cases} N = d \cdot q + r \\ 0 \leq r < |d| \end{cases}$$

Em que: N é o dividendo;
d é o divisor diferente de zero;
q é o quociente e
r é o resto da divisão.

Se o resto da divisão é zero, então:

- *d* é divisor de N;
- N é múltiplo de *d*.

Cifras numéricas

No sistema decimal, um número de até 4 algarismos pode ser representado por:

$$N = (mcdu)_{10} = \\ = m \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + u \cdot 10^0 \text{ com } \begin{cases} 0 \leq m \leq 9 \\ 0 \leq c \leq 9 \\ 0 \leq d \leq 9 \\ 0 \leq u \leq 9 \end{cases}$$

Quer saber mais?

Sites

TEORIA dos números: a rainha da Matemática. *Só Matemática*. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/coluna/gisele/25052001.php.

O texto aborda uma breve apresentação da teoria dos números. Acesso em: 27 jul. 2022.

BATISTA, Pablo Diniz. *Números racionais – O que são? Conjunto, Representação Decimal e Geométrica*. Gestão Educacional, 25 fev. 2019. Disponível em: https://www.gestaoeducacional.com.br/numeros-racionais-o-que-sao/.

Texto básico sobre números racionais. Acesso em: 27 jul. 2022.

THIBES, Victoria. Como funciona o sistema binário? *Canaltech*. Disponível em: https://canaltech.com.br/produtos/como-funciona-o-sistema-binario/.

O texto ajuda a conhecer um pouco mais os sistemas de numeração. Acesso em: 27 jul. 2022.

REPRESENTAÇÃO de números em binário e hexadecimal. *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3643948/mod_resource/content/0/Representação%20de%20Números%20em%20Binário%20e%20Hexadecimal.pdf.

Leia o texto para aprofundar os conhecimentos acerca dos sistemas de numeração. Acesso em: 27 jul. 2022.

Vídeos

CRUISE, Brit. *Teorema fundamental da aritmética*. *Khan Academy*. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/modern-crypt/v/the-fundamental-theorem-of-arithmetic-1.

Vídeo para conhecer um pouco mais o teorema fundamental da Aritmética. Acesso em: 27 jul. 2022.

Exercícios complementares

1. "... a uma temperatura de **doze** graus abaixo de zero, foi disputada ontem à tarde, a final do campeonato japonês de futebol que terminou com vitória do Kashiwa Reysol por **três** a zero. O mais impressionante foi que todos os gols foram marcados nos últimos dez minutos do **segundo** tempo ...". Neste texto, os numerais em negrito têm conotações respectivamente:

a) Cardinal, ordinal e analítica.
b) Cardinal, analítica e ordinal.
c) Analítica, cardinal e ordinal.
d) Analítica, ordinal e cardinal.
e) Geométrica, analítica e cardinal.

2. Ana e seu irmão Beto moram em diferentes países da África, mas em cidades cuja característica comum é a de serem atravessadas pelo trópico de Câncer.
Como estão em férias, os irmãos viajaram de avião para outros países e, pouco antes de pegarem seus voos, falaram-se ao telefone quando eram 22 horas na cidade em que mora Ana e 1 h na cidade em que mora Beto.
Depois que chegaram aos seus destinos, os irmãos falaram-se novamente ao telefone, quando eram 8 horas para Ana e 17 horas para Beto. As cidades onde Ana e Beto passam suas férias também estão localizadas ao longo do trópico de Câncer. Ana viajou para o Caribe percorrendo uma distância igual a duas vezes a distância da viagem de Beto, que foi para o Oriente Médio.
De acordo com essas informações, quando forem 5 horas na cidade em que Beto passa suas férias, então, na cidade em que mora Ana será

a) meio-dia.
b) dez horas da manhã.
c) duas horas da madrugada.
d) meia-noite.
e) onze horas da noite.

3. Em 2012, algumas pessoas se preocupavam com o dia 20/12/2012 em que aconteceria o "fim do mundo" supostamente previsto pelo calendário maia, mas isso não aconteceu. Parte da superstição gira em torno do fato de que, na data em questão, os numerais que indicam dia e mês formam, juntos e nessa ordem, o numeral que indica o ano.
Considerando-se que as representações numéricas de dias e meses sejam feitas sempre com dois algarismos cada, como, por exemplo, 03/01 para o dia três de janeiro, quanto tempo se passará, aproximadamente, entre a próxima coincidência numérica similar à que aconteceu em 2012?

a) 2 anos.
b) 10 anos.
c) 90 anos.
d) 500 anos.
e) 900 anos.

4. Em 1779, o matemático francês Étienne Bézout publicou um trabalho sobre equações algébricas no qual demonstrava uma propriedade dessas equações que ficou conhecida como teorema de Bézout. De acordo com o teorema, sendo a, b e c três números inteiros não nulos, a equação $aX + bY = c$ somente admite soluções (X, Y) em que X e Y também são números inteiros e se o número c for múltiplo do máximo divisor comum entre os números a e b.
De acordo com esse teorema, qual é a única das equações a seguir que admite soluções (X, Y) em que X e Y são números inteiros?

a) $36X + 84Y = 800$
b) $40X + 80Y = 700$
c) $72X + 96Y = 600$
d) $42X + 70Y = 500$
e) $35X + 98Y = 400$

5. Em um jogo de tabuleiro, cada jogador joga com 2 dados numerados de 1 a 6. Para saber quantas casas sua peça deverá andar no tabuleiro, os jogadores devem obedecer às seguintes regras:

I. Se os resultados obtidos nos dados forem iguais, então o número de casas que o jogador deverá andar será a soma dos resultados obtidos nos dados.

II. Se os resultados obtidos forem consecutivos, então o número de casas será igual ao produto dos resultados.

III. Se os resultados não forem nem iguais nem consecutivos, então o número de casas será igual ao quadrado do menor resultado somado ao maior resultado.

IV. Três amigos jogam seus dados e descobrem que suas peças andarão o mesmo número de casas no tabuleiro, mesmo tendo obtido diferentes resultados em seus dados.

Quantas casas eles andaram ao todo?

a) 6 **c)** 18 **e)** 24
b) 12 **d)** 20

6. Encontre o maior divisor do número $N = 2017^2 - 1$ que seja:

a) um número primo;
b) um quadrado perfeito.

7. Encontre o menor número positivo x tal que o número $N = 2\,020 \cdot 2\,014 + x$ seja um quadrado perfeito.

8. A imagem a seguir é de um jogo de oito chaves fixas, também conhecidas como chaves de boca.

As medidas das aberturas ("bocas") dessas ferramentas costumam ser expressas por frações irredutíveis de uma polegada, nas quais os denominadores são expressos por potências do número 2 menores ou iguais a 32. O quadro a seguir apresenta, em ordem crescente, as frações marcadas em cada chave, com exceção da chave de número 4.

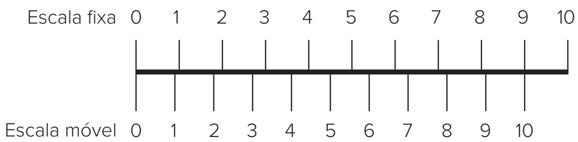
Chave	Boca menor	Boca maior
nº 1	5/32	3/16
nº 2	1/4	9/32
nº 3	5/16	11/32
nº 4		
nº 5	15/32	1/2
nº 6	9/16	19/32
nº 7	5/8	11/16
nº 8	23/32	3/4

Sendo assim, a soma dos numeradores das frações irredutíveis que completam essa tabela pode ser igual a

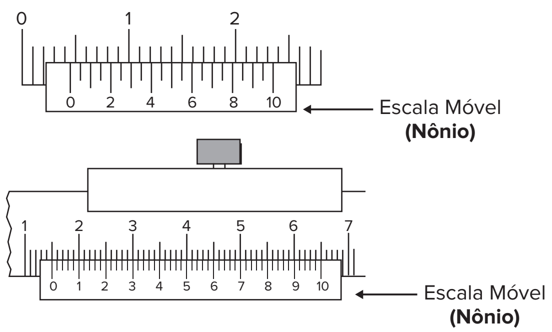
a) 10. **c)** 18. **e)** 25.
b) 14. **d)** 23.

Texto para as questões **9** e **10**.

O paquímetro foi desenvolvido a partir da invenção do nônio, que consiste numa gradação que é baseada na seguinte relação: "Sob uma escala fixa, com 10 graduações de 1 mm, foi colocada uma escala móvel, chamada de nônio, com as mesmas 10 graduações, porém ocupando o espaço de 9 graduações da escala fixa."



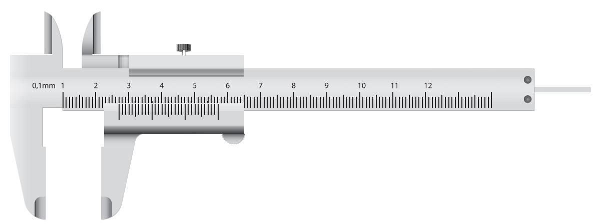
Posteriormente, a escala móvel foi ampliada para 20 graduações ocupando o espaço de 19 graduações, e também para 50 graduações, ocupando o espaço de 49.



A resolução **R** de um paquímetro é dada pela razão entre o valor da menor divisão da escala fixa (UEF) pelo número de divisões do nônio (NDN). Um paquímetro que, por exemplo, tem sua escala fixa graduada em milímetros e cujo nônio tem 20 divisões é de 0,05 mm.

$$R = \frac{UEF}{NDN} = \frac{1\text{ mm}}{20} = 0{,}05\text{ mm}$$

9. No sistema de polegadas decimais, alguns paquímetros são tais que cada divisão da escala fixa vale $\left(\frac{1}{40}\right)$ (um quarenta avos de polegada).



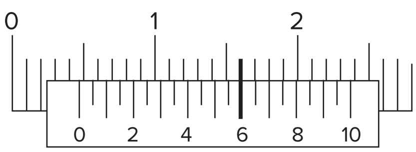
VitaminCo/Shutterstock.com

Qual é a resolução, em polegadas, de um paquímetro desse tipo cujo nônio possui 25 divisões?

a) 0,1 **d)** 0,005
b) 0,2 **e)** 0,001
c) 0,04

10. A leitura de um paquímetro leva em consideração o número x associado à última marca da escala fixa que foi ultrapassado pelo zero da escala móvel, e o número y de marcas da escala móvel anteriores à marca que coincide com alguma graduação da escala fixa. Determinados os valores de x e y, a medida será dada por $x + y \cdot R$, em que R é o valor da resolução do paquímetro.

A figura a seguir mostra a posição das escalas de um paquímetro cuja escala fixa está graduada em milímetros:



A medida, em centímetros, obtida na leitura das escalas desse paquímetro é de:

a) 4,6
b) 1,66
c) 1,06
d) 0,46
e) 0,406

11. Os números mistos são representados na forma $A\frac{B}{C}$, com A, B e C inteiros tais que $A \neq 0$ e que $0 < B < C$. Assim, o número A indica a parte inteira do número e a fração $\frac{B}{C}$ indica sua parte decimal. No exemplo da placa, temos $7\frac{1}{2} = 7{,}5$. Então, se $x = 2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$ e $y = \dfrac{2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{3}}{3\frac{1}{2}}$, a forma mista do número $x - y$ será:

a) $6\frac{1}{2}$
b) $6\frac{5}{9}$
c) $6\frac{7}{18}$
d) $7\frac{1}{2}$
e) $7\frac{5}{18}$

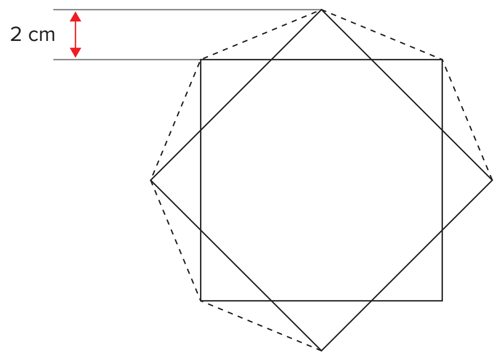
12. Sabendo que $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714285714...$ considere o número inteiro n tal que:

$$\frac{n}{14} = 0{,}71428571428571428...$$

O valor de n é

a) 10.
b) 9.
c) 8.
d) 7.
e) 6.

13. Um professor do Poliedro Sistema de Ensino propôs aos seus alunos que encontrassem a medida dos lados de dois quadrados congruentes, cujos vértices coincidiam com os vértices de um octógono regular. Sabe-se que a distância entre os vértices de um dos quadrados e o lado mais próximo do outro é de 2 cm, como mostra a figura a seguir:



João, Cassiano, Chico, Duda e Luiza foram os primeiros a resolver o problema e encontraram os seguintes valores, em centímetros:

- João: $\dfrac{4}{\sqrt{2} - 1}$
- Cassiano: $\dfrac{8 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
- Chico: $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$
- Duda: $\dfrac{4}{\sqrt{2} + 1}$
- Luiza: $\dfrac{4\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$

O professor ficou surpreso com as respostas aparentemente diferentes e resolveu racionalizar os denominadores de cada uma. Depois da racionalização, percebeu que apenas três desses alunos chegaram ao resultado correto. Esses alunos foram

a) João, Cassiano e Luiza.
b) Cassiano, Duda e Luiza.
c) Chico, Duda e Luiza.
d) Cassiano, Chico e Duda.
e) João, Cassiano e Chico.

14. Resolvendo um problema de trigonometria de uma prova de vestibular, um estudante descobre que o seno do ângulo agudo procurado é igual a $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Supondo que esse valor esteja correto, o ângulo em questão mede

a) 75°.
b) 60°.
c) 45°.
d) 30°.
e) 15°.

15. Sendo a e b os números reais que resultam das seguintes potências de expoentes irracionais:

$$a = 2^{\sqrt{2}} \qquad b = 8^{\sqrt{8}}$$

Nessas condições, é correto afirmar que

a) $b = a^8$.
b) $b = a^6$.
c) $b = a^4$.
d) $b = a^3$.
e) $b = a$.

16. Escrevendo o produto $E = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{5}$ na forma $a\sqrt[b]{c}$, com a, b e c inteiros e positivos, o valor da soma $a + b$ quando a é máximo e b é mínimo é igual a:

a) 17
b) 19
c) 21
d) 23
e) 25

17. Sendo α e β dois números reais não nulos tais que α é um número racional e β é um número irracional, considere as seguintes informações:

I. A soma $(\alpha + \beta)$ é, necessariamente, um número irracional.
II. O produto $(\alpha \cdot \beta)$ é, necessariamente, um número irracional.
III. A potência (α^β) é, necessariamente, um número irracional.
IV. A potência (β^α) é, necessariamente, um número irracional.

Estão corretas as afirmações:

a) I e II.
b) I e III.
c) II e III.
d) II e IV.
e) I, III e IV.

18. Considere o conjunto J de todos os números irracionais da forma $x = a + b\sqrt{2}$, em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Um elemento x do conjunto J é denominado unidade de J se, e somente se, $\frac{1}{x}$ também é elemento do conjunto J.

a) Mostre que o número $x = 3 - 2\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.
b) Mostre que o número $x = 5 + 3\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.
c) Encontre os valores de y para os quais $x = y + 5\sqrt{2}$ é uma unidade de J.

19. Considere todos os números reais y que podem ser expressos por um radical da forma $y = \sqrt[n]{m}$, em que n e m são números inteiros positivos.

a) Se $m = 729$, determine todos os valores de n para os quais y é um número inteiro.
b) Qual é o menor valor de m para o qual y pode assumir, exatamente, a mesma quantidade de valores inteiros que no item anterior?

20. Calculando-se $\sqrt[3]{\dfrac{2\,013^2 - 1987^2}{13}}$, o resultado obtido deve ser:

a) 2
b) 20
c) 40
d) 200
e) 400

21. Efetuando-se corretamente todos os cálculos da expressão $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt[3]{64} + \sqrt{64} + \sqrt{\sqrt[3]{64}}}$, encontra-se um número múltiplo de:

a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 11

22. Mostre que a expressão $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}$ representa um número racional, sabendo que para transformar um radical duplo como $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ na soma ou subtração de radicais simples como $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, basta encontrar números reais positivos x e y que satisfaçam o sistema $\begin{cases} x + y = a \\ 4xy = b \end{cases}$.

23. Sabe-se que há duas formas de se escrever a fração $\dfrac{26^{50}}{52^{25}}$ como uma única potência b^m de base e expoente naturais e maiores do que 1. A diferença entre o menor valor de b e o menor valor de m é:

a) 5
b) 8
c) 12
d) 15
e) 20

24. Sabendo que existem três pares de números inteiros (m, n) tais que $m^n = 1$ e $m + n = 3$, assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, o produto de todos os possíveis valores de m e a soma de todos os possíveis valores de n.

a) 3 e 2.
b) -3 e 6.
c) -1 e 6.
d) 1 e 2.
e) 6 e -1.

25. Determine todos os números inteiros a, b e c tais que $b^a = 1$, $a + c = 2$ e $b \cdot c = 4$.

26. Encontre os valores indicados por ? nas expressões a seguir:

a) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2016} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017} = \dfrac{?}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017}$

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2016} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017} = \dfrac{?}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2018}$

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2016 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2017 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2018}{?}$

27. Sejam a e b números inteiros, não nulos, tais que $a < b$, considere que $P(a, b)$ represente o produto de todos os números inteiros não nulos desde o número a até o número b. Exemplo:

$$P(-3, 2) = (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -12$$

Entre as alternativas a seguir, assinale a que apresenta o número inteiro mais próximo de zero, que multiplicado por $P(-7, 10)$ resulte em um cubo perfeito e positivo.

a) -7
b) -5
c) 2
d) 5
e) 7

28. Sendo $p_1 < p_2 < p_3$ três números primos positivos tais que $p_1 + p_2 = p_3$, determine todos os possíveis valores de p_1.

29. Sendo P e Q dois números primos, o número de divisores positivos e maiores do que 1 do número $(P \cdot Q)^{P+Q}$ é:

a) $(P + Q)^2$
b) $P^2 + Q^2$
c) $(P + Q + 1)^2$
d) $(P + Q - 1)^2$
e) $(P + Q) \cdot (P + Q + 2)$

30. Considere um conjunto C de números inteiros positivos e distintos tais que:

- C possui exatamente 3 elementos;
- Todos os elementos de C são números de 4 algarismos;
- O mínimo múltiplo comum dos elementos de C é 49 000;
- O máximo divisor comum dos elementos de C é 280.

Encontre todos os possíveis conjuntos que satisfazem essas condições.

31. Uma empresa distribui pirulitos em saquinhos plásticos, contendo sempre 70 pirulitos cada, e guarda esses saquinhos em caixas de papelão. Em cada caixa de papelão cabe sempre a mesma quantidade de saquinhos. Quantidade essa, maior do que 10 e menor do que 20. Certo dia, no depósito da empresa havia um caminhão carregado dessas caixas de papelão totalmente cheias de saquinhos com pirulitos. O caminhão já estava de saída para entregar uma encomenda de 2 520 pirulitos, levando exatamente a quantidade de pirulitos encomendada.
Qual entre as alternativas a seguir pode representar a quantidade de pirulitos em cada caixa de papelão dentro do caminhão da entrega?

a) 360
b) 630
c) 700
d) 840
e) 980

32. Fuvest-SP 2021

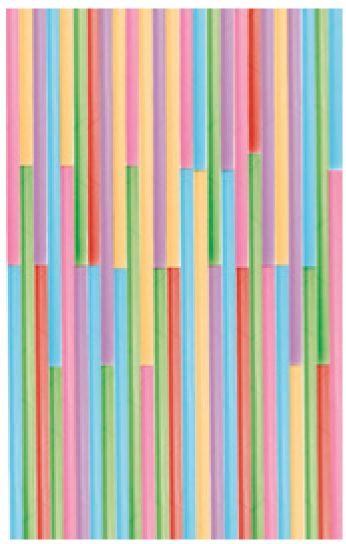
O quadrinho aborda o tema de números primos, sobre os quais é correto afirmar:

a) Todos os números primos são ímpares.
b) Existem, no máximo, 7 trilhões de números primos.
c) Todo número da forma $2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, é primo.
d) Entre 24 e 36, existem somente 2 números primos.
e) O número do quadrinho, 143, é um número primo.

33. Um aplicativo de celular faz automaticamente três tipos de atualizações periódicas. As atualizações do sistema operacional são feitas a cada 30 dias, as atualizações de configuração são feitas a cada 18 dias e as atualizações de segurança são feitas a cada 24 dias. Se hoje, esse aplicativo foi instalado em um celular e fez as três atualizações comentadas, determine:

a) Quando o aplicativo fará novamente as três atualizações em um mesmo dia?
b) Quando acontecerá de o aplicativo fazer pela primeira vez duas dessas três atualizações em um mesmo dia?

34. Um trabalho de Educação Artística consiste em fazer um painel retangular usando canudinhos plásticos coloridos de mesma espessura, mas com comprimentos diferentes. Para isso, os canudinhos podem ser emendados pelas pontas formando colunas de mesmo comprimento. Depois essas colunas de canudinhos são coladas lado a lado formando um painel retangular como o da ilustração a seguir:



Marina dispõe de 100 canudinhos plásticos de 12 cm, 80 de 15 cm e 60 de 18 cm, para fazer esse trabalho e não quer que nenhum canudinho seja cortado para ajustar o comprimento de uma coluna. Marina usará os três tipos de canudinhos nesse trabalho, e os que sobrarem ela guardará para um próximo trabalho. Nessas condições:

a) Qual é a quantidade máxima de colunas que o trabalho de Marina poderá ter?
b) Qual é a quantidade máxima de canudinhos que Marina poderá usar?

35. Se $\text{mmc}(x, y) = 2100$ e $\text{mdc}(x, y) = 21$, então o valor de $\sqrt{x \cdot y}$ é:

a) 12
b) 21
c) 102
d) 120
e) 210

36. Um número n entre 1000 e 1200 é tal que se dividido por 12 deixa resto 11, se dividido por 18 deixa resto 17 e se dividido por 20 deixa resto 19. A soma dos três últimos algarismos de n é:

a) 14
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18

37. Encontre o menor número inteiro positivo N que dividido por:

- 7 deixa resto 5;
- 17 deixa resto 12 e
- 27 deixa resto 19.

38. Marcos começou uma brincadeira com números N de quatro algarismos que era composta de três etapas: a primeira etapa era escrever os algarismos de um número N em ordem decrescente. A segunda etapa era escrever os algarismos do número N em ordem crescente. A terceira etapa era efetuar a subtração do número obtido na primeira etapa pelo número obtido na segunda etapa. Depois disso, a brincadeira recomeçava com o resultado obtido na última etapa.
Marcos começou com o número N = 2 017 e, assim, na primeira etapa ele obteve o número 7 210, na segunda etapa obteve o número 0127 e na terceira efetuou a subtração 7 210 − 127. Se Marcos repetir a brincadeira sucessivamente sempre com os resultados obtidos nas terceiras etapas, após 2 017 repetições da brincadeira ele encontrará, na terceira etapa, o número:

a) 5 986.
b) 6 027.
c) 6 144.
d) 6 174.
e) 7 416.

39. Bruno tinha 5 cartas com símbolos matemáticos, sendo quatro com algarismos e uma com operador aritmético da multiplicação.

| 2 | 0 | 1 | 7 | X |

Sua irmã pediu que ele colocasse a carta X em alguma posição entre as quatro cartas com os algarismos, de modo que a multiplicação indicada tivesse o maior resultado possível.
Qual é esse resultado?

a) 1 490
b) 1 470
c) 1 420
d) 1 407
e) 1 402

40. Considere um número natural N de quatro algarismos e também os naturais M_1 e M_2 tais que M_1 é o número formado pelos dois primeiros algarismos de N, e M_2 é o número formado pelos dois últimos algarismos de N. Sabe-se que M_1 é sucessor de M_2 e que ao dividir-se N por M_2 obtêm-se quociente 106 e resto 5.
Nessas condições, pode-se concluir que a soma dos valores de M_1 e M_2 é igual a:

a) 39.
b) 37.
c) 20.
d) 19.
e) 18.

41. Cláudio foi ao banco consultar o saldo de uma conta que não utilizava com frequência, mas chegando lá percebeu que não se lembrava completamente da senha de quatro algarismos do cartão da conta. Tudo o que lembrava era que:

I. O primeiro algarismo era 4.
II. O último algarismo era 6.
III. Os dois algarismos centrais eram iguais.
IV. A senha formava um número múltiplo de 7.

Nessas condições, quais são os algarismos que podem ser utilizados para que Cláudio possa fazer a consulta do saldo de sua conta?

a) 1 ou 7.
b) 2 ou 7.
c) 1 ou 8.
d) 2 ou 8.
e) 7 ou 8.

Um número natural N possui n algarismos $(2 < n < 10)$, de modo que:

- O primeiro algarismo de N é igual a n.
- O último algarismo de N também é igual a n.
- Todos os demais algarismos de N são iguais a 5.

f) Verifique que N não é divisível por 9 quando $n = 6$.
g) Determine todos os valores de n para os quais N é múltiplo de 9.

42. Mostre que a soma dos algarismos do número $N = 800 \cdot 2\,017 \cdot 6\,250$ é igual ao produto dos dois menores números primos que são divisores de N.

43. Qual é a soma dos algarismos ausentes no quociente da divisão de 10^6 por 7?

a) 8
b) 9
c) 12
d) 15
e) 18

44. Muito usado no estudo da computação, o sistema numérico hexadecimal é formado por 16 dígitos diferentes. Esses dígitos são representados pelos algarismos 0 a 9, e pelas letras A, B, C, D, E, e F que equivalem, no sistema decimal, aos números 10, 11, 12, 13, 14, 15, respectivamente.

O quadro a seguir apresenta a correspondência entre alguns números nos dois sistemas de numeração.

Decimal	Hexadecimal	Decimal	Hexadecimal	Decimal	Hexadecimal
0	0	22	16	44	2C
1	1	23	17	45	2D
2	2	24	18	46	2E
3	3	25	19	47	2F
4	4	26	1A	48	30
5	5	27	1B	49	31
6	6	28	1C	50	32
7	7	29	1D	51	33
8	8	30	1E	52	34
9	9	31	1F	53	35
10	A	32	20	54	36
11	B	33	21	55	37
12	C	34	22	56	38
13	D	35	23	57	39
14	E	36	24	58	3A
15	F	37	25	59	3B
16	10	38	26	60	3C
17	11	39	27	61	3D
18	12	40	28	62	3E
19	13	41	29	63	3F
20	14	42	2A	64	40
21	15	43	2B	65	41

De acordo com esse padrão de representação, o número representado por AB no sistema hexadecimal equivale, no sistema decimal, ao número:

a) 21. **b)** 27. **c)** 161. **d)** 171. **e)** 1611.

45. Quanto vale a soma dos algarismos da diferença entre os números 100^{100} e 10^{10}?

a) 890 **c)** 1520 **e)** 1890
b) 1240 **d)** 1710

46. A soma das soluções da equação $(x - 2)^{(x^2 - 9x + 20)} = 1$ é

a) 9. **b)** 10. **c)** 11. **d)** 12. **e)** 13.

47. Sendo a e b dois números inteiros, considere que M(a, b) represente o conjunto dos números que são múltiplos comuns dos números a e b. Considere também que P(a, b) represente o conjunto de todos os números primos que existem entre os números a e b. Sendo x o menor elemento de M(66, 99) e y o maior elemento de P(66, 99), o valor de $x + y$ é:

a) 265. **d)** 295.
b) 275. **e)** 305.
c) 285.

48. Se uma sequência numérica infinita começa com dois números primos e os termos, a partir do terceiro, são sempre iguais ao produto dos dois termos anteriores, então não há termo nessa sequência que seja um número:

a) par. **d)** múltiplo de 10.
b) impar. **e)** quadrado perfeito.
c) múltiplo de 3.

49. Sendo a e b dois números inteiros positivos tais que $m = \text{mmc}(a, b)$ e $d = \text{mdc}(a, b)$, então uma expressão equivalente a $\dfrac{m + d}{a \cdot b}$ é:

a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ **d)** $\dfrac{a}{m} + \dfrac{b}{d}$

b) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{d}$ **e)** $\dfrac{a + b}{m \cdot d}$

c) $\dfrac{m}{a} + \dfrac{d}{b}$

50. Qual é o algarismo das unidades do número $2017^5 - 2017$?

a) 6 **c)** 8 **e)** 0
b) 7 **d)** 9

51. Qual é o algarismo das unidades do número 2012^{2012}?

a) 2 **c)** 6 **e)** 0
b) 4 **d)** 8

52. **IME-RJ 2020** O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:

a) [1, 16000] **d)** [18001, 19000]
b) [16001, 17000] **e)** [19001, ∞)
c) [17001, 18000]

53. IME-RJ 2018 Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base $x - 1$ é 1431, então a sua representação na base binária é:

a) 10001111
b) 11011011
c) 11100111
d) 11011110
e) 11110001

54. IME-RJ 2018 Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2\,017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

a) 2008010
b) 2012061
c) 2034145
d) 2044145
e) 2052061

55. IME-RJ 2017 Assinale a alternativa verdadeira:

a) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$
b) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1}$
c) $\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$
d) $\sqrt{2016} - \sqrt{2015} < \left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$
e) $\left(2\sqrt{2016}\right)^{-1} < \sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$

56. ITA-SP 2020 A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer é igual a

a) 20.
b) 21.
c) 22.
d) 23.
e) 24.

57. ITA-SP 2019 Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

58. ITA-SP 2020 Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. Se p ou q é irracional, então a é irracional.
II. Se p e q são racionais, então a é racional.
III. Se q é irracional, então p é irracional.

É(São) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas I e III.
e) todas.

60. ITA-SP 2016 Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

a) 285.
b) 286.
c) 287.
d) 288.
e) 289.

BNCC em foco

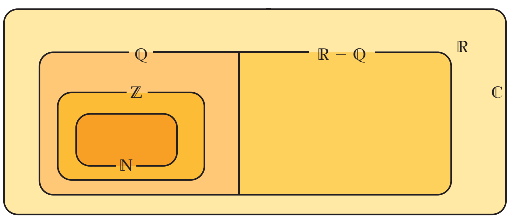
EM13MAT301

1. Um engenheiro fez um cálculo para um projeto e encontrou a expressão $\frac{(x+y)^2}{3(x-y)} - \left(\sqrt{x} + y^{-2}\right)$. Para montar um protótipo do projeto, ele considerou $x = 4$ e $y = -3$ e obteve como resultado o número:

a) $-\frac{130}{63}$
b) $\frac{8}{21}$
c) $-\frac{116}{63}$
d) $\frac{136}{63}$
e) $-\frac{18}{63}$

EM13MAT510

2. Observe a imagem a seguir e, em seguida, leia cada afirmação e classifique como **verdadeira** ou **falsa**.



I. Todo número natural é inteiro.
II. Todo número inteiro é natural.
III. Todo número inteiro é racional.
IV. Todo número irracional é racional.
V. Todo número inteiro é real.
VI. Todo número é real.

a) V – V – V – F – V – F
b) V – V – V – F – V – V
c) V – F – F – F – V – F
d) V – V – V – F – F – V
e) V – F – V – F – V – F

EM13MAT510

3. Um programa de computador recebe como entrada dois números e apresenta o resultado da divisão do primeiro pelo segundo. Sobre os possíveis resultados apresentados pelo programa, julgue as afirmativas as seguir:

I. Se os dois números inseridos no programa forem irracionais, o resultado sempre será um número irracional.
II. Se os dois números inseridos no programa forem um irracional e um racional, o resultado poderá ser uma dízima periódica.
III. Se os dois números inseridos no programa forem reais, o resultado poderá ser um número racional ou um número irracional.

Está(ão) **correta(s)** apenas a(s) alternativa(s):

a) I.
b) II.
c) III.
d) I e II.
e) II e III.

FRENTE 2

CAPÍTULO

2

Sentenças matemáticas e modelagens algébricas

Ideias matemáticas estão presentes em praticamente todos os momentos do dia. Podemos enxergar formas e padrões em diversos contextos e, até intuitivamente, criamos proporções e equações que nos possibilitam lidar com diversas situações corriqueiras, como analisar a quantidade de ingredientes de uma receita e querer dobrá-la ou mesmo estimar o gasto total a partir do custo de cada item.

Muitas situações como a citada anteriormente são transformadas em "problemas" nos vestibulares, não havendo um método formal específico ou um roteiro a seguir para resolvê-los. O sucesso reside na interpretação e compreensão adequada do enunciado, bem como em um conhecimento algébrico capaz de solucionar o problema proposto.

Sentenças matemáticas

Uma sentença matemática é composta de entes matemáticos, representando relações que podem ser de igualdade, desigualdade, equivalência, identidade, entre outras. Exemplos:

- $2 + 7 = 4 + 5$
- $x - 3 = 6 - 2x$
- $x = 0$
- $x + 4 > 3$
- $(x + 2)^2 \equiv x^2 + 4x + 4$
- $y = x + 1$

Sentenças matemáticas fechadas

As sentenças matemáticas fechadas são expressões aritméticas em que todos os valores numéricos são conhecidos. Elas não apresentam variáveis, parâmetros ou qualquer tipo de incógnita.

Existem apenas dois tipos de sentenças matemáticas fechadas: as **verdadeiras** e as **falsas**.

- $2 = 2$ **(Verdadeira)**
- $3 = 2$ **(Falsa)**
- $4 + 4 \cdot (4 - 4) < 4$ **(Falsa)**

Sentenças matemáticas abertas

As sentenças matemáticas abertas são obtidas a partir das sentenças fechadas, "mascarando-se" um ou mais de seus valores numéricos com termos algébricos representados por letras como x ou y.

Quando nos deparamos com uma sentença matemática aberta, não sabemos a princípio se ela foi obtida de uma sentença fechada verdadeira ou falsa. Então, os valores dos termos algébricos da sentença dependem apenas da sua natureza numérica: ordinal, cardinal, inteira, racional, real, positiva ou negativa. Isto é o que chamamos de domínio de uma variável.

Pode causar estranheza a alguns o fato de que a sentença aberta $x = 3$, por exemplo, pode ter sido obtida da sentença fechada $2 = 3$, que é evidentemente falsa!

É importante estar ciente de que estamos procurando a solução do problema e não da última sentença aberta que escrevemos na tentativa de resolvê-lo. Por isso, recomenda-se, sempre que possível, substituir a variável da equação original pelos valores que encontramos a fim de verificar a veracidade da solução.

Algumas dessas sentenças abertas são chamadas de equações. As equações expressam perguntas e, portanto, devem ser lidas como tal. É como se a equação quisesse saber: "Que valores me tornam verdadeira?" ou "Que valores me tornam falsa?".

Respondemos às perguntas expressas pelas equações, escrevendo o seu conjunto verdade, também conhecido como conjunto solução. O conjunto solução de uma equação deve possuir todos os valores da variável que a tornam verdadeira e apenas eles. Assim, pode-se dizer que resolver uma equação é escrever o seu conjunto solução. Exemplos:

- $x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$
- $x^2 = 2x \Rightarrow S = \{0, 2\}$
- $x^3 = 4x \Rightarrow S = \{-2, 0, 2\}$

As sentenças abertas nos exemplos anteriores são chamadas de **equações polinomiais** do 1º, 2º e 3º graus, respectivamente.

Saiba mais

O teorema fundamental da Álgebra garante que o número de soluções de uma equação polinomial nunca ultrapassa o grau da equação. Assim, uma equação de quarto grau, por exemplo, possui no máximo quatro soluções. Essa quantidade de soluções varia de acordo com as restrições (implícitas ou explícitas) impostas ao seu domínio. Por exemplo, uma equação do tipo $x^3 = 4x$ teria apenas duas soluções, se limitada ao conjunto dos números naturais, e três soluções se não houvesse essa restrição, considerando-se, assim, o conjunto mais amplo possível. Mas também existem outros tipos de equações não polinomiais, como as exponenciais, as irracionais e as trigonométricas. Nesses casos, não se aplica o teorema fundamental para prever o número de soluções.

O que todas as equações têm em comum é o fato de expressarem perguntas cujas respostas são os valores numéricos que as tornam sentenças matemáticas fechadas e verdadeiras.

Se uma equação é expressa por uma sentença aberta impossível, então o conjunto solução da equação é vazio. Exemplos:

$$5^x = -1 \Rightarrow S = \varnothing$$

Essa equação exponencial é impossível no universo dos números reais, pois a base (5) é um número positivo e a potência (-1) é um número negativo e, na operação de potenciação, bases positivas geram apenas potências positivas, qualquer que seja o expoente da operação, no caso representado por x.

$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow S = \varnothing$$

Essa equação também é impossível, pois o numerador da fração é o número 1 e, para uma fração representar o número zero, é necessário que seu numerador seja zero também.

Veja alguns exemplos de tipos de equações e seus respectivos conjuntos solução, no universo real:

- Equação irracional: $\sqrt[3]{2x + 7} = 3 \Rightarrow S = \{10\}$
- Equação logarítmica: $\log x = 2 \Rightarrow S = \{100\}$
- Equação quociente: $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = 0 \Rightarrow S = \{-2\}$
- Equação polinomial: $(x - 1)(x^2 - 3x)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow S = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$
- Equação modular: $|x - 3| = 1 \Rightarrow S = \{2, 4\}$
- Equação composta: $(x^2 - 4x + 4)^{x-2} = 1 \Rightarrow S = \{1, 2, 3\}$
- Equação trigonométrica: $\cos x = -1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Se uma equação é expressa por uma sentença aberta que é sempre verdadeira, então o conjunto solução da equação é o próprio conjunto dos números reais. Exemplos:

- $x + x = 2x \Rightarrow S = \mathbb{R}$
- $x - x = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$
- $x \cdot x = x^2 \Rightarrow S = \mathbb{R}$
- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow S = \mathbb{R}$

! Atenção

A sentença é fechada quando todos os seus componentes se apresentam determinados.

Exemplos: $2 + 7 = 4 + 5$

$8 + 5 > 7 - 1$

A sentença é aberta quando contém componentes de valor não determinado.

Exemplos: $x - 3 = 5$

$2y - 7 > 3$

Equações × identidades

Observe que a sentença matemática aberta a seguir não se encaixa na categoria de equação polinomial, pois, segundo o teorema fundamental da Álgebra, nenhuma equação polinomial do 2º grau admite três soluções distintas:

$$(x + 1)^2 - 2x = x^2 + 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x = 0 \Rightarrow (0 + 1)^2 - 2 \cdot 0 = 0^2 + 1 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow 0 \in S$$

$$x = 3 \Rightarrow (3 + 1)^2 - 2 \cdot 3 = 3^2 + 1 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow 3 \in S$$

$$x = 5 \Rightarrow (5 + 1)^2 - 2 \cdot 5 = 5^2 + 1 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow 5 \in S$$

A expressão $\mathbf{(x + 1)^2 - 2x = x^2 + 1}$ é uma sentença matemática que, embora aberta, é verdadeira para qualquer valor da variável x. As sentenças abertas desse tipo expressam fatos aritméticos e são chamadas de **identidades**.

Mas, se quisermos tratar a sentença do exemplo acima como uma equação e determinar seu conjunto solução, este será o próprio domínio da variável:

$$(x + 1)^2 - 2x = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; S = \mathbb{R}$$

As identidades são todas as sentenças matemáticas abertas que expressam uma relação de igualdade verdadeira para todos os valores de suas variáveis, desde que estejam de acordo com as condições de existência da expressão. O símbolo (=) é usado para expressar as relações de igualdade algébricas, sejam elas perguntas (equações) ou fatos (identidades), enquanto o símbolo (≡) só deve ser usado numa identidade. Assim, percebendo-se que uma sentença aberta indicada com o símbolo (=) é uma identidade, podemos trocar sua relação de igualdade pelo símbolo (≡), deixando claro que a sentença não deve ser tratada como uma pergunta, mas como um fato.

Exemplos:

- $x^2 \equiv x \cdot x$
- $(x^2 - 9)(x + 2) \equiv x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

Se tratadas como equações, as sentenças terão conjunto solução $\mathbb{R}$. Porém, existem identidades que possuem exceções no conjunto dos números reais e são relativas às condições de existência de suas expressões.

As identidades a seguir, por exemplo, são válidas apenas se $x \neq 0$:

- $\dfrac{x^2 + 4}{2x} \equiv \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$
- $\log(x^2) \equiv 2\log|x|$

! Atenção

O símbolo (≡) é usado para indicar sentenças que são verdadeiras sempre que a existência de suas expressões algébricas esteja garantida.

Algumas técnicas de manipulação de identidades

As técnicas algébricas que serão discutidas agora mostram estratégias para resolver equações oriundas ou não de problemas com enunciados limitados a termos matemáticos. Também são úteis para lidar com situações-problema cujas soluções exigem a tradução do enunciado para uma linguagem ou forma matemática.

Um exemplo de técnica algébrica é a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração:

$$A \cdot (B + C) \equiv A \cdot B + A \cdot C \qquad (B + C) \cdot A \equiv B \cdot A + C \cdot A$$

$$A \cdot (B - C) \equiv A \cdot B - A \cdot C \qquad (B - C) \cdot A \equiv B \cdot A - C \cdot A$$

$$(A + B) \cdot (X + Y) \equiv A \cdot (X + Y) + B \cdot (X + Y) \equiv$$
$$\equiv A \cdot X + A \cdot Y + B \cdot X + B \cdot Y$$

Exercício resolvido

1. Efetue o produto dos polinômios $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ e $D(x) = x^2 + 5x - 1$.

Resolução:

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2)(x^2 + 5x - 1) =$$
$$= x^3(x^2 + 5x - 1) + 4x^2(x^2 + 5x - 1) +$$
$$+ 3x(x^2 + 5x - 1) - 2(x^2 + 5x - 1) =$$
$$= x^5 + 5x^4 - x^3 + 4x^4 + 20x^3 - 4x^2 + 3x^3 +$$
$$+ 15x^2 - 3x - 2x^2 - 10x + 2 =$$
$$= x^5 + 9x^4 + 22x^3 + 9x^2 - 13x + 2$$

Além da propriedade distributiva, os produtos notáveis e a fatoração algébrica são técnicas de formação de identidades matemáticas. A relação entre os produtos notáveis e a fatoração é dual, e se comporta como uma via de mão dupla, em que há situações nas quais é necessário expandir os fatores e outras em que é necessário condensá-los.

Produtos notáveis

Ao longo dos desenvolvimentos algébricos notamos que alguns produtos são frequentes e seguem uma lei de formação que dispensa a aplicação da regra ordinária da multiplicação entre polinômios (distributiva).

Esses produtos são denominados produtos notáveis e apresentam importância significativa em identidades de grandiosa aplicação na álgebra.

Para melhor compreensão, vamos dividi-los em casos:

1º Caso: Quadrado de uma soma

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O quadrado de uma soma entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo.

Também é possível manipular os produtos notáveis para criar novas identidades algébricas bastante úteis para a resolução de certas questões, como a identidade que relaciona a soma dos quadrados com o quadrado da soma:

$$A^2 + B^2 \equiv (A + B)^2 - 2AB$$

$$A^2 + B^2 + C^2 \equiv (A + B + C)^2 - 2(AB + AC + BC)$$

A soma dos quadrados equivale ao quadrado da soma, menos o dobro da soma dos produtos.

Exemplos:

- $(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$
- $\left(\dfrac{3a}{2} + b^2\right)^2 = \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot b^2 + (b^2)^2 =$
  $= \dfrac{9a^2}{4} + 3ab^2 + b^4$
- $\left(\dfrac{3m^2}{5} + \dfrac{5n^3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3m^2}{5}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{3m^2}{5} \cdot \dfrac{5n^3}{2} +$
  $+ \left(\dfrac{5n^3}{2}\right)^2 = \dfrac{9m^4}{25} + 3m^2n^3 + \dfrac{25n^6}{4}$

2º Caso: Quadrado de uma diferença

$$(a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O quadrado de uma diferença entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo.

Exemplos:

- $(x - 5y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$
- $\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{2b^3}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2b^3}{3} + \left(\dfrac{2b^3}{3}\right)^2 =$
  $= \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{2ab^3}{3} + \dfrac{4b^6}{9}$
- $(-7 + 3x^2)^2 = (3x^2 - 7)^2 = (3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 7 + 7^2 =$
  $= 9x^4 - 42x^2 + 49$

O fato de dois termos terem sinal negativo não implica em uma operação de subtração. Observe:

Atenção

$$(-x - y)^2 = [-(x + y)]^2 = (-1)^2 \cdot (x + y)^2 = (x + y)^2$$

3º Caso: Produto da soma pela diferença

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

O produto da soma de dois termos pela diferença entre eles é igual ao quadrado do primeiro, menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

- $(2x + 3) \cdot (2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $\left(\dfrac{a^3b}{3} - \dfrac{1}{a^4}\right) \cdot \left(\dfrac{a^3b}{3} + \dfrac{1}{a^4}\right) = \left(\dfrac{a^3b}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{a^4}\right)^2 =$
  $= \dfrac{a^6b^2}{9} - \dfrac{1}{a^8}$
- $\left(\dfrac{m}{5} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{m}{5} - \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{m}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{m^2}{25} - \dfrac{1}{4}$

4º Caso: Produto de Stevin

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

O produto de dois binômios cujos primeiros termos são iguais e os segundos termos desiguais, é igual a um trinômio completo do 2º grau em que o coeficiente do primeiro termo é a unidade, o coeficiente do segundo termo é a soma algébrica dos termos desiguais e o terceiro termo é o produto dos termos desiguais.

Exemplos:

- $(x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$
- $(a + 7) \cdot (a - 1) = a^2 + (7 - 1)a + 7 \cdot (-1) = a^2 + 6a - 7$
- $(m - 12) \cdot (m + 2) = m^2 + (-12 + 2)m + (-12) \cdot 2 =$
  $= m^2 - 10m - 24$

5º Caso: Cubo da soma de dois termos

$$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro, mais três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo, mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo, mais o cubo do segundo.

Exemplos:

- $(x + 2y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (2y) + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 =$
  $= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$
- $(5a + c^2)^3 = (5a)^3 + 3 \cdot (5a)^2 \cdot c^2 + 3 \cdot (5a) \cdot (c^2)^2 +$
  $+ (c^2)^3 = 125a^3 + 75a^2c^2 + 15ac^4 + c^6$

Observação: O cubo da soma de dois termos equivale à soma dos cubos mais o triplo do produto desses termos vezes a soma deles.

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3 \cdot A \cdot B \cdot (A + B)$$

6º Caso: Cubo da diferença de dois termos

$$(a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro, menos três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo, mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo, menos o cubo do segundo.

Observação: O cubo da diferença de dois termos equivale à diferença dos cubos menos o triplo do produto desses termos vezes a diferença entre eles.

$$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3 \cdot A \cdot B \cdot (A - B)$$

Exemplos:

- $(2x - y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 - y^3 =$
  $= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
- $(3a^2 - 2b)^3 = (3a^2)^3 - 3 \cdot (3a^2)^2 \cdot (2b) + 3 \cdot (3a^2) \cdot (2b)^2 +$
  $+ (2b)^3 = 27a^6 - 54a^4b + 36a^2b^2 - 8b^3$

! Atenção

Podemos usar a estrutura das combinações para deduzir a sequência dos coeficientes do desenvolvimento geral da expressão $(a + b)^n$ quando n é natural. Essas sequências de coeficientes coincidem com os valores das combinações presentes nas linhas do triângulo de Pascal.

É o caso da relação de Stifel (a ser estudada mais detalhadamente no momento apropriado), que diz que todo elemento do triângulo ou é unitário ou pode ser obtido pela soma do termo que se situa acima dele e seu antecessor:

$(a + b)^0 \equiv 1$

$(a + b)^1 \equiv 1a + 1b$

$(a + b)^2 \equiv 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 \equiv 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1ab^3$

$(a + b)^4 \equiv 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$(a + b)^5 \equiv 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Alguns dos principais casos de fatoração consistem na simples leitura dos produtos notáveis no sentido oposto ao apresentado, ou seja, do segundo membro para o primeiro membro. O trânsito entre as formas fatorada e distribuída de uma identidade algébrica permite resolver equações, estruturar funções e, principalmente, responder a um teste de forma rápida e correta.

7º Caso: Quadrado do trinômio

$$(a + b + c) \cdot (a + b + c) =$$
$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

O quadrado de um trinômio é igual à soma dos quadrados de cada termo, mais os duplos produtos dos termos considerados dois a dois.

Exemplos:

- $(x + y + 3z)^2 = x^2 + y^2 + (3z)^2 + 2 \cdot x \cdot y +$
  $+ 2 \cdot x \cdot 3z + 2 \cdot y \cdot 3z =$
  $= x^2 + y^2 + 9z^2 + 2xy + 6xz + 6yz$
- $(a^2 + 5b^3 + 2c)^2 = (a^2)^2 + (5b^3)^2 + (2c)^2 +$
  $+ 2 \cdot a^2 \cdot 5b^3 + 2 \cdot a^2 \cdot 2c + 2 \cdot 5b^3 \cdot 2c =$
  $= a^4 + 25b^6 + 4c^2 + 10a^2b^3 + 4a^2c + 20b^3c$

Saiba mais

O produto de dois polinômios, cujos termos diferem somente nos sinais, equivale ao produto da soma pela diferença de dois termos (3º caso). Para isso, deve-se tomar como primeiro termo, a soma dos termos que têm os mesmos sinais em ambos os polinômios, e como segundo termo aquele com sinais contrários em cada polinômio.

Exemplos:

- $(x + y + z) \cdot (x + y - z) = [(x + y) + z] \cdot [(x + y) - z] =$
  $= (x + y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
- $(m^2 + 5mn - 3n^2) \cdot (m^2 - 5mn + 3n^2) =$
  $= [m^2 + (5mn - 3n^2)] \cdot [m^2 - (5mn - 3n^2)] =$
  $= (m^2)^2 - (5mn - 3n^2)^2 = m^4 - 25m^2n^2 + 30mn^3 - 9n^4$

! Atenção

Nós abordamos os casos principais e necessários dos produtos notáveis.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$
$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Saiba mais

Chamamos de canônico o polinômio de grau n na variável x cujos coeficientes são todos unitários:

$$\phi_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$$

Assim, $\phi_1(x) = x + 1$, $\phi_2(x) = x^2 + x + 1$, $\phi_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e assim por diante. Há duas propriedades relevantes em relação a este polinômio que caracterizam produtos notáveis: a primeira diz respeito ao quadrado de $\phi(x)$, que resulta num polinômio palíndromo ou recíproco de coeficientes inteiros e consecutivos.

$(x + 1)^2 \equiv 1x^2 + 2x + 1$

$(x^2 + x + 1)^2 \equiv 1x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$(x^3 + x^2 + x + 1)^2 \equiv 1x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Mas é a segunda propriedade que mais nos interessa, pois ela estrutura a expressão da soma dos termos de uma progressão geométrica (PG). Afinal os termos de um polinômio canônico formam uma PG de razão x.
Quando multiplicamos $\phi_n(x)$ por $(x - 1)$, obtemos um simples binômio de grau $n + 1$ e termo independente -1.

$$(x-1)\cdot(x+1) \equiv x^2 - 1$$
$$(x-1)\cdot(x^2+x+1) \equiv x^3 - 1$$
$$(x-1)\cdot(x^3+x^2+x+1) \equiv x^4 - 1$$
$$(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1) \equiv x^5 - 1$$
$$(x-1)\cdot(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) \equiv x^6 - 1$$
$$(x-1)\cdot\phi_n(x) \equiv x^{n+1} - 1$$

Produtos notáveis e racionalização

Além do tempo ganho no desenvolvimento de expressões, os produtos notáveis são úteis na racionalização de denominadores no estudo dos números irracionais.

Quando o denominador da expressão a ser racionalizada tem a forma de um binômio $\left(A\sqrt{B} \pm C\sqrt{D}\right)$ em que os dois termos ou, pelo menos um deles, é uma raiz quadrada, seu fator racionalizante se baseia no produto notável $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$.

Exemplos:

- O fator racionalizante de $\sqrt{7}+2$ é $\sqrt{7}-2$, pois $\left(\sqrt{7}+2\right)\cdot\left(\sqrt{7}-2\right) = 7 - 4 = 3$.
- O fator racionalizante de $5-3\sqrt{2}$ é $5+3\sqrt{2}$, pois $\left(5+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(5-3\sqrt{2}\right) = 25 - 18 = 7$.
- O fator racionalizante de $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ é $\sqrt{3+\sqrt{5}}$, pois $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$.

Para racionalizar os denominadores de frações irracionais, basta que se multiplique tanto o numerador quanto o denominador pelo fator racionalizante. Observe:

- $$\frac{3}{5-\sqrt{7}} = \frac{3\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)}{\left(5-\sqrt{7}\right)\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)} = \frac{3\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)}{25-7} = \frac{3\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)}{18} = \frac{5+\sqrt{7}}{6}$$
- $$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \frac{4\sqrt{6}-12}{2-3} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{6}-3\right)}{-1} = 4\cdot\left(3-\sqrt{6}\right)$$
- $$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{4-3}} = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
- $$\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)} = \frac{3\sqrt{5}-6+5-2\sqrt{5}}{5-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{1} = \sqrt{5}-1$$

Atribuições algébricas

A mudança de variável também é indicada por uma relação de equivalência que apresenta todas as características de uma identidade com mais de uma variável, mas transmite uma ideia diferente. Enquanto as identidades expressam fatos descobertos ao longo do estudo da Matemática, uma atribuição representa uma imposição momentânea que será verdadeira apenas durante a execução do processo algébrico desenvolvido a partir de sua declaração.

Atribuições matemáticas devem ser declaradas, por exemplo "*... então, fazendo* $y = \sqrt{x-1}$*, temos ...*". Elas servem para informar a relação entre a nova variável e a atual.

A relação $y = \sqrt{x-1}$ garante que conheceremos o valor de y sempre que soubermos o valor de x e este for no mínimo 1. Em outras palavras, ela expressa y em função de x para $x \geqslant 1$ (que é a condição de existência do segundo membro). A mesma relação pode ser escrita com x em função de y na forma $x = y^2 + 1$ com $y \geqslant 0$.

Essas atribuições surgem, na maioria das vezes, para reduzir a quantidade de símbolos usados numa sentença matemática. Quando se deseja resolver a equação $x + \sqrt{x-1} = 13$, por exemplo, associada à relação entre x e y imposta anteriormente, é gerada a sentença $y^2 + 1 + y = 13$, ou seja, $y^2 + y - 12 = 0$, que implica $y = 3$ ou $y = -4$. Mas como $y \geqslant 0$, temos que $y = 3$.

Um risco que corremos quando efetuamos mudanças de variável nos processos algébricos é tomar os valores das variáveis criadas como sendo as soluções do problema. Nesse caso, a solução do problema não é o número 3, mas sim o número 10.

Fatoração

Fatorar significa escrever na forma de produto e é uma tarefa que pode ser mais trabalhosa do que a simples execução da propriedade distributiva ou de um produto notável.

Em muitos momentos se faz necessária a decomposição de um polinômio e, para isso, existem alguns processos que abordaremos a seguir. A maioria desses casos se apoia em identidades decorrentes dos produtos notáveis que estudamos anteriormente.

1º Caso: Fator comum

Esse processo é usado quando a expressão a ser fatorada apresenta um fator comum a todos os seus termos.

$$ax + ay \equiv a(x + y)$$

Perceba que o fator comum (a) é colocado em evidência e cada termo da expressão é dividido por ele, gerando o outro fator ($x + y$).

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expressão a seguir:

- $3a^2 - 2ab \equiv a(3a - 2b)$
- $2x^3y + 8x^2y^4 - 6x^4y^3z \equiv 2x^2y(x + 4y^3 - 3x^2y^2z)$
- $6m^5n^2 - 10m^3n^3 + 2m^2n^2 \equiv 2m^2n^2(3m^3 - 5mn + 1)$

2º Caso: Agrupamento

Esse processo é utilizado quando a expressão a ser fatorada apresenta grupos de termos que possuem fatores comuns.

$$ax + ay + bx + by \equiv a(x + y) + b(x + y) \equiv (x + y)(a + b)$$

Perceba que inicialmente agrupamos os termos que possuíam fatores comuns e em seguida, em cada um desses grupos, colocamos o fator comum em evidência.

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expressão a seguir:

- $x^2 + 5x + ax + 5a \equiv x(x + 5) + a(x + 5) \equiv$
  $\equiv (x + 5)(x + a)$
- $6x^2 + 2xy - 3xz - yz \equiv 2x(3x + y) - z(3x + y) \equiv$
  $\equiv (3x + y)(2x - z)$
- $a^3 - 3a^2 - 8a + 24 \equiv a^2(a - 3) - 8(a - 3) \equiv$
  $\equiv (a - 3)(a^2 - 8)$

3º Caso: Diferença de quadrados

Esse processo é utilizado quando a expressão a ser fatorada se apresenta sob a forma de uma diferença entre dois quadrados.

$$a^2 - b^2 \equiv (a + b) \cdot (a - b)$$

Perceba que a expressão pode ser decomposta no produto da soma pela diferença das raízes dos dois termos quadrados.

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expressão a seguir:

- $x^2 - y^2 \equiv (x + y) \cdot (x - y)$
- $m^2 - 9 \equiv (m + 3) \cdot (m - 3)$
- $4a^2b^2 - 9c^2d^2 \equiv (2ab + 3cd) \cdot (2ab - 3cd)$
- $25x^2 - 1 \equiv (5x + 1) \cdot (5x - 1)$
- $x^2 - (y - z)^2 \equiv [x + (y - z)] \cdot [x - (y - z)] \equiv$
  $\equiv (x + y - z) \cdot (x - y + z)$

4º Caso: Trinômio quadrado perfeito (T.Q.P.)

Esse processo é utilizado quando a expressão a ser fatorada se apresenta com dois termos quadrados e o terceiro como um duplo produto das raízes dos termos quadrados.

$$a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2 \text{ ou } a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$$

Perceba que o T.Q.P. pode ser decomposto no quadrado da soma ou da diferença das raízes conforme o sinal do duplo produto.

Por exemplo, acompanhe a fatoração de cada expressão a seguir:

- $x^2 + 6x + 9 \equiv (x + 3)^2$
- $x^2 + 49 - 14x \equiv (x - 7)^2$
- $a^2 - 2a + 1 \equiv (a - 1)^2$
- $y^4 + 10xy^2 + 25x^2 \equiv (y^2 + 5x)^2$
- $-x^2 - \frac{1}{36} + \frac{x}{3} \equiv -\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) \equiv -\left(x - \frac{1}{6}\right)^2$

Exercício resolvido

2. Fuvest-SP As soluções da equação $\frac{x - a}{x + a} + \frac{x + a}{x - a} = \frac{2(a^4 + 1)}{a^2(x^2 - a^2)}$, onde $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $a \neq -1$, são:

a) $\frac{-a}{2}$ e $\frac{a}{4}$

b) $\frac{-a}{4}$ e $\frac{a}{4}$

c) $\frac{-1}{2a}$ e $\frac{1}{2a}$

d) $\frac{-1}{a}$ e $\frac{1}{2a}$

e) $-\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{a}$

Resolução:

$$\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=\frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(x-a)^2+(x+a)^2}{(x+a)\cdot(x-a)}=\frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2-2ax+a^2+x^2+2ax+a^2}{x^2-a^2}=\frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+a^2+x^2+a^2}{\cancel{x^2-a^2}}=\frac{2(a^4+1)}{a^2\,\cancel{(x^2-a^2)}}\Rightarrow$$

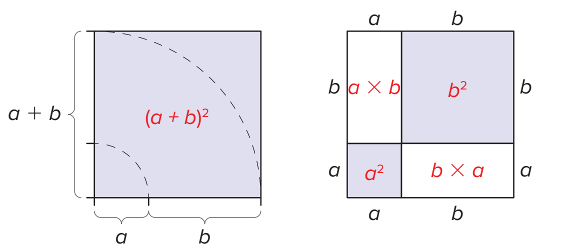
$$\Rightarrow a^2\cdot(2x^2+2a^2)=2(a^4+1)\Rightarrow 2a^2x^2+2a^4=2a^4+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2x^2=2\Rightarrow x^2=\frac{1}{a^2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\pm\frac{1}{a}\ \therefore\ S=\left\{\pm\frac{1}{a}\right\}$$

Resposta: alternativa E.

Saiba mais

No período da Renascença, os matemáticos europeus não dispunham de uma notação algébrica eficiente para descrever as sentenças matemáticas, isso era feito por meio de versos ou frases ritmadas. Até hoje esse recurso é usado para facilitar a memorização de identidades. A expressão resultante de $(a+b)^2$, por exemplo, é bastante conhecida, numa versão informal, como "*O quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo*". Uma versão em linguagem formal dessa identidade seria "*O quadrado da soma de dois números equivale à soma dos seus quadrados mais o dobro do produto desses números*". A mesma identidade pode ser ilustrada por meio de uma interpretação geométrica, construindo-se um quadrado cujo lado é formado pela soma das medidas de dois segmentos *a* e *b*, e verificando-se que nele cabem um quadrado de lado *a*, um quadrado de lado *b* e dois retângulos de lados *a* e *b*.



5º Caso: Trinômio do 2º grau

Esse processo é usado quando a expressão a ser fatorada se apresenta sob a forma de um trinômio completo do 2º grau, onde, quando ordenados em potências decrescentes da variável, o coeficiente do 1º termo é a unidade e o coeficiente do 2º termo é a soma de duas quantidades, cujo produto é o 3º termo.

$$x^2+(r_1+r_2)\cdot x+r_1\cdot r_2\equiv(x+r_1)\cdot(x+r_2)$$

Perceba que o trinômio pode ser decomposto num produto de dois binômios onde r_1 e r_2 **são as raízes da equação do 2º grau em que** podemos transformar o trinômio do 2º grau.

Por exemplo, acompanhe as fatorações das expressões a seguir:

- $x^2-5x+6\equiv(x-2)\cdot(x-3)$
- $x^2+5x-6\equiv(x-1)\cdot(x+6)$
- $y^2+8y+12\equiv(y+2)\cdot(y+6)$
- $z^2-8z+15\equiv(z-3)\cdot(z-5)$

6º Caso: Soma ou diferença entre dois cubos

É o processo usado quando a expressão a ser fatorada se apresenta sob a forma da soma de dois cubos ou sob a forma da diferença entre dois cubos.

$$a^3+b^3\equiv(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)\text{ ou}$$
$$a^3-b^3\equiv(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

Perceba que a expressão pode ser decomposta num produto de dois fatores, onde o 1º é um binômio com as raízes cúbicas e o segundo é um trinômio com o quadrado da 1ª raiz, o produto da 1ª pela 2ª raiz, mais o quadrado da 2ª raiz.

Por exemplo, acompanhe as fatorações das expressões a seguir:

- $8k^3+27\equiv(2k+3)\cdot(4k^2-6k+9)$
- $x^3-8\equiv(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$
- $27a^3+125b^3\equiv(3a+5b)\cdot(9a^2-15ab-25b^2)$
- $\frac{m^3}{8}-\frac{n^3}{64}\equiv\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\cdot\left(\frac{m^2}{4}+\frac{m\cdot n}{8}+\frac{n^2}{16}\right)$

Adequando um caso de fatoração

Quando nenhum dos casos pode ser aplicado, é possível empregar manipulações algébricas para que a expressão se encaixe em algum dos casos de fatoração. No 1º exemplo usaremos o artifício que chamamos de "completar o quadrado" e, no 2º exemplo, vamos evidenciar um fator que não é comum.

Exemplo 1: Fatorar a expressão x^4+4x^2+3.

Se, em vez de 3 tivéssemos 4, a expressão seria um trinômio quadrado perfeito, então vamos "somar e subtrair 1" da expressão para que o valor da mesma não se altere:

$$x^4+4x^2+3+1-1=\underbrace{x^4+4x^2+4}_{\text{T.Q.P.}}-1=\underbrace{(x^2+2)^2-1}_{\text{Diferença de quadrados}}=$$

$$=[(x^2+2)+1]\cdot[(x^2+2)-1]=(x^2+3)(x^2+1)$$

Exemplo 2: Fatorar a expressão:

$$x^4+2x^3y-3x^2y^2-4xy^3-y^4$$

Colocando y^4 em evidência, temos:

$$x^4+2x^3y-3x^2y^2-4xy^3-y^4=$$

$$=y^4\cdot\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{2x^3y}{y^4}-\frac{3x^2y^2}{y^4}-\frac{4xy^3}{y^4}-\frac{y^4}{y^4}\right)=$$

$$=y^4\cdot\left(\frac{x^4}{y^4}+2\frac{x^3}{y^3}-3\frac{x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}-1\right)$$

Chamando $\frac{x}{y} = m$, temos:

$$y^4(m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 4m - 1) =$$
$$= y^4\left[(m^4 - m^3 - m^2) + (3m^3 - 3m^2 - 3m) + (m^2 - m - 1)\right] =$$
$$= y^4\left[m^2(m^2 - m - 1) + 3m(m^2 - m - 1) + 1(m^2 - m - 1)\right] =$$
$$= y^4(m^2 - m - 1)\cdot(m^2 + 3m + 1)$$

Voltando com $m = \frac{x}{y}$, temos:

$$y^4\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} + 1\right) =$$
$$= y^2\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1\right)\cdot y^2\left(\frac{x^2}{y^2} + 3\frac{x}{y} + 1\right) =$$
$$= (x^2 - xy - y^2)\cdot(x^2 + 3xy + y^2)$$

! Atenção

Nós abordamos os casos principais e necessários dos produtos notáveis.

$ax + ay \equiv a(x + y)$

$ax + ay + bx + by \equiv a(x + y) + b(x + y) \equiv (x + y)(a + b)$

$a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$

$a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$

$x^2 + (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 \equiv (x + r_1)(x + r_2)$

$a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Equações recíprocas

Uma equação é chamada de recíproca quando for igual a sua transformada recíproca, isto é, se x_1 é uma de suas raízes, então $\frac{1}{x_1}$ também o será.

Dada a equação $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 1 = 0$, sua transformada recíproca é $\left(\frac{1}{x}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 0$ ou $y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 3y + 1 = 0$, que é a mesma equação da qual se partiu.

À primeira vista, pode parecer que nas equações recíprocas os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos devem ser iguais. Contudo, nem sempre isso ocorre, pois também são recíprocas equações do tipo: $x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$.

E como é resolvido esse tipo de equação recíproca? Vejamos um exemplo que ilustra o método de solução: Seja a equação $4x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 4 = 0$.

Dividindo-a por $x^2 = 0$, tem-se:

$$4x^2 - 5x + 7 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

Seja $x + \frac{1}{x} = y$. Portanto:

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

De modo que:

$$4x^2 - 5x + 7 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 + \frac{4}{x^2} - 5x - \frac{5}{x} + 7 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(y^2 - 2) - 5y + 7 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 1 = 0$$
$$\therefore y = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{8}$$

Assim, $x + \frac{1}{x} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{8} \Rightarrow x^2 - \left(\frac{5 \pm \sqrt{41}}{8}\right)x + 1 = 0$, de onde resultam as 4 raízes procuradas.

Problemas do 1º e 2º graus

Na sequência estudaremos a resolução desses problemas, mas primeiro explanaremos as equações e seus elementos.

Equação algébrica

Chama-se de equação uma sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. São exemplos de equações:

$5y - 3 = 7$ $\quad$ $3x^2 - 5x - 2 = 0$ $\quad$ $3^x = 5$

Observação: Numa equação, tudo que antecede o sinal de igualdade é denominado 1º membro e tudo que sucede o sinal de igualdade é denominado 2º membro. Assim, na equação $2x - 3 = 5$ temos que $2x - 3$ é o 1º membro e 5 é o 2º membro.

Saiba mais

A incógnita de uma equação é o **único valor** que podemos substituir na mesma para que tenhamos uma sentença verdadeira.

Na equação $x + y = 7$, temos que $x = 1$ e $y = 6$, $x = 4$ e $y = 3$, $x = -2$ e $y = 9$, ..., e muitos outros valores x e y tornam a sentença verdadeira. Dessa forma, x e y não são incógnitas, mas sim variáveis da equação.

Equação do 1º grau

Numa equação do 1º grau temos como forma geral de representação:

$$ax + b = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{1º membro: } ax + b \\ \text{2º membro: } 0 \\ \text{coeficientes: } a \text{ e } b \ (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}) \\ \text{incógnita: } x \end{cases}$$

Exemplos:

$2x - 5 = 0$ $\quad$ $x + 4 = 7$ $\quad$ $-7x + 9 = 1$ $\quad$ $32x = 0$

Resolver uma equação corresponde a encontrar o valor de sua incógnita (que chamamos de raiz). No caso das equações do 1º grau, encontramos de um modo muito simples sua única raiz. Observe:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo, $-\frac{b}{a}$ é a solução da equação do 1º grau.

Exemplos:

$5x - 10 = 0$	$7x = 4 - 2x$	$-2x + 1 = 2$
$5x = 10$	$9x - 4 = 0$	$-2x = 1$
$x = \frac{10}{5}$	$9x = 4$	$x = \frac{1}{-2}$
$x = 2$	$x = \frac{4}{9}$	$x = -\frac{1}{2}$

O conjunto solução ou conjunto verdade de uma equação é o conjunto de todos os valores que a tornam uma sentença verdadeira, ou seja, são os números que fazem com que o 1º membro fique igual ao 2º membro.

Como a equação do 1º grau admite uma única raiz, seu conjunto solução será um conjunto unitário. Observe:

$5x - 10 = 0$	$7x = 4 - 2x$	$-2x + 1 = 2$
$S = \{2\}$	$S = \left\{\frac{4}{9}\right\}$	$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Equações equivalentes

Também chamadas de simultâneas, são equações de mesmo grau que admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplos:

- $2x - 4 = 0$ e $x - 1 = 1$ são equivalentes, pois em ambos os casos o conjunto solução é $S = \{2\}$;
- $7x + 1 = 0$ e $3 = -21x$ são equivalentes, pois em ambos os casos o conjunto solução é $S = \left\{-\frac{1}{7}\right\}$.

Casos especiais

Observe a seguir exemplos de casos que apresentam soluções que merecem destaque:

$2(x + 3) = 6$	$2x + 5 = \frac{4x + 10}{2}$	$3x + 1 = 3(x + 2)$
$2x + 6 = 6$	$2(2x + 5) = 4x + 10$	$3x + 1 = 3x + 6$
$2x = 0$	$4x + 10 = 4x + 10$	$3x - 3x = 6 - 1$
$x = \frac{0}{2}$	$4x - 4x = 10 - 10$	$0x = 5$
$x = 0$	$0x = 0$	$0 = 5$
$S = \{0\}$	$0 = 0$	$S = \varnothing$
	$S = \mathbb{R}$	

Equação do 2º grau

Chamamos de equação do 2º grau, toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$. A incógnita é x e os números a, b e c são chamados de coeficientes.

Exemplos:

- $3x^2 - 5x + 9 = 0$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 9 \end{cases}$
- $-2x^2 + 7x = 0$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \\ c = 0 \end{cases}$
- $x^2 - 4 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$
- $-7x^2 = 0$ $\begin{cases} a = -7 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Equações incompletas do 2º grau

Chamamos de equações incompletas as equações cujos coeficientes b e/ou c são iguais a zero.

1º caso: $b = 0 \longrightarrow ax^2 + c = 0$

Exemplos:

$3x^2 - 12 = 0$	$x^2 + 3 = 0$
$3x^2 = 12$	$x^2 = -3$
$x^2 = 4$	$x \notin \mathbb{R}$
$x = \pm 2$	$S = \varnothing$
$S = \{\pm 2\}$	

Observação: Uma equação do 2º grau incompleta em b, quando tem solução, apresenta raízes opostas (simétricas).

2º caso: $c = 0 \longrightarrow ax^2 + bx = 0$

Exemplos:

$x^2 - 5x = 0$	$-3x^2 - 6x = 0$
$x(x - 5) = 0$	$-3x(x + 2) = 0$
$x = 0$ ou	$-3x = 0 \Rightarrow x = 0$
$x - 5 = 0$	$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
$x = 5$	$S = \{0, -2\}$
$S = \{0, 5\}$	

Observação: Uma equação do 2º grau incompleta em c sempre tem solução e uma das raízes é zero.

3º caso: $b = c = 0 \longrightarrow ax^2 = 0$

Exemplos:

$5x^2 = 0$	$-\frac{7}{3}x^2 = 0$
$x^2 = 0$	$x^2 = 0$
$x = 0$	$x = 0$
$S = \{0\}$	$S = \{0\}$

Observação: Uma equação do 2º grau incompleta em b e c sempre tem solução igual a zero.

Equações completas

Chamamos de equações completas aquelas cujos coeficientes a, b e c são diferentes de zero.

Em qualquer equação do 2º grau podemos optar por formas de resolução. Uma forma de resolver qualquer equação (incompleta ou completa) é utilizando a fórmula a seguir:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \text{ é o discriminante da equação} \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{matrix} \nearrow x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \searrow x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{matrix} \\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ são as raízes da equação} \end{cases}$$

Exemplo: Resolver a equação $3x^2 + x - 2 = 0$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 5}{6} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{-1-5}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \\ \searrow x_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array}$$

Portanto, $S = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$.

Discussão de raízes

Podemos dizer qual é o número de raízes reais de uma equação do 2º grau com coeficientes reais, observando o valor do discriminante da equação, assim:

- Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas.
- Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais (possui duas raízes não reais).
- Se $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais e iguais.

Exemplos:

Determine m de modo que a equação $-5x^2 + 7x - 3m = 0$ não admita raízes reais. Se a equação não deve admitir raízes reais, então $\Delta < 0$, logo:

$$7^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-3m) < 0 \Rightarrow 49 - 60m < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -60m < -49 \Rightarrow 60m > 49 \Rightarrow m > \frac{49}{60}$$

Determine o maior valor inteiro de k para que a equação $kx^2 - 6x + 2 = 0$ admita raízes reais.

Para que a equação admita raízes reais devemos ter $\Delta \geqslant 0$, logo:

$$(-6)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 \geqslant 0 \Rightarrow 36 - 8k \geqslant 0 \Rightarrow -8k \geqslant -36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8k \leqslant 36 \Rightarrow k \leqslant \frac{36}{8} \therefore k \leqslant \frac{9}{2}$$

Soma e produto das raízes (relações de Girard)

Numa equação do 2º grau que tenha como coeficientes números reais, podemos demonstrar uma relação existente entre suas raízes e seus coeficientes.

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e sejam as raízes: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Vamos estabelecer as seguintes relações:

- **Soma das raízes:**

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

- **Produto das raízes:**

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$
$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Exemplos:

- $2x^2 - 10x + 12 = 0$

  Soma: $\frac{-(-10)}{2} = 5$

  Produto: $\frac{12}{2} = 6$

  $x_1 = 2$ e $x_2 = 3 \Rightarrow S = \{2, 3\}$

- $x^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)x + \sqrt{21} = 0$

  Soma: $\frac{-\left[-\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\right]}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{7}$

  Produto: $\frac{\sqrt{21}}{1} = \sqrt{21}$

  $x_1 = \sqrt{3}$

  $x_2 = \sqrt{7} \Rightarrow S = \left\{\sqrt{3}, \sqrt{7}\right\}$

Forma fatorada da equação do 2º grau

Chamamos a forma fatorada de uma equação do 2º grau como “trinômio do 2º grau”. Observe:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

Exemplos:

- $2x^2 - 10x + 12 = 0$ — Forma fatorada:
  $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$ — $2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$
- $5x^2 + 9x - 2 = 0$ — Forma fatorada:
  $x_1 = -2$ e $x_2 = \frac{1}{5}$ — $5 \cdot (x + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right)$
- $x^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)x + \sqrt{21} = 0$ — Forma fatorada:
  $x_1 = \sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{7}$ — $1 \cdot \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{7}\right)$

Equações biquadradas e equações irracionais

Algumas equações podem ser transformadas ou reduzidas a equações do 2º grau. Chamamos de equação biquadrada e de equação irracional, respectivamente, aos exemplos no 1º e no 2º caso a seguir:

1º caso: $y^4 - 3y^2 + 2 = 0$

Chamando $y^2 = m$, temos:

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ ou } m = 2$$

Assim: $\begin{cases} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Portanto, $S = \left\{\pm 1, \pm\sqrt{2}\right\}$.

2º caso: $\sqrt{3x + 4} = x - 8$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$$3x + 4 = (x - 8)^2 \Rightarrow 3x + 4 = x^2 - 16x + 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 19x + 60 = 0$$

As raízes são $x = 4$ (não convém) ou $x = 15$.

Portanto, $S = \{15\}$.

Passagens da resolução de uma equação

Já vimos que uma equação polinomial de grau n admite um conjunto solução com no máximo n elementos distintos, qualquer que seja o domínio da variável. Esse fato é consequência direta do teorema fundamental da Álgebra, que, embora seja o alicerce de nosso estudo atual, será abordado apenas no final do curso. Por ora, consideraremos tal fato, em toda passagem algébrica, prestando atenção à possibilidade de alteração do conjunto solução das sentenças algébricas que usamos para representar uma mesma equação.

Passagens permitidas

São aquelas que não alteram o conjunto solução de uma equação em hipótese alguma:

I. Substituição de uma sentença algébrica por outra idêntica a ela.
Exemplo:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{T.Q.P.}} = \underbrace{2(x + 1)}_{\text{Distributiva}} \Rightarrow S = \{1, 8\}$$

$$\downarrow$$

$$(x - 3)^2 = 2x + 2 \Rightarrow S = \{1, 8\}$$

II. Adição ou subtração de um mesmo número real ou uma mesma expressão algébrica de domínio real em ambos os termos da equação.
Exemplo:

$$\begin{aligned} x + 3 &= 7 - x \quad \Rightarrow \quad S = \{2\} \\ \underline{+x - 3} \; & \; \underline{-3 + x} \\ 2x + 0 &= 4 + 0 \quad \Rightarrow \quad S = \{2\} \end{aligned}$$

III. Multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por um mesmo número real **não nulo**.
Exemplo:

$$\underbrace{2x^2 + 12}_{\div 2} = \underbrace{10x}_{\div 2} \Rightarrow S = \{2, 3\}$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + 6 = 5x \Rightarrow S = \{2, 3\}$$

Passagens proibidas

A divisão por zero não tem significado algébrico ou aritmético e, portanto, não tem propósito. Sua execução gera frequentemente uma contradição matemática.

Se multiplicarmos ambos os membros de uma equação por zero obteremos a sentença fechada $0 = 0$, que, embora seja verdadeira, não nos leva à solução de uma equação.

Passagens que exigem cuidado

São aquelas que incrementam certo número limitado de soluções numa equação, mas não eliminam as soluções da equação original.

Quando não for possível evitá-las, devemos executar as **verificações dos resultados obtidos**, substituindo-os na equação original a fim de excluir as respostas indesejadas.

I. Elevar ao quadrado ambos os membros de uma equação.
Exemplo: $x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$
$x^2 = 9 \Rightarrow S = \{-3, 3\}$

II. Multiplicar ambos os membros de uma equação por uma expressão algébrica.
Exemplo: $x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$
$x^2 = 3x \Rightarrow S = \{0, 3\}$

A fim de generalizar as técnicas de resolução das equações polinomiais do 1º e 2º graus, devemos nos acostumar com o conceito de parâmetro. Os parâmetros também são representados por letras que, bem como as variáveis, mascaram constantes numéricas de uma sentença matemática; mas, ao contrário das variáveis, não são os valores dos parâmetros que caracterizam os elementos dos conjuntos solução das equações.

Sobre como resolver um problema

Como dito anteriormente, não existe um roteiro que podemos seguir de forma certeira para resolver problemas matemáticos. Porém, vamos destacar alguns passos que podem nos auxiliar a alcançar essa meta.

Inicialmente, devemos praticar a tradução algébrica, que consiste na interpretação da descrição de uma situação-problema para a obtenção de uma equação que modele corretamente o problema. Raramente as equações são obtidas nos seus formatos mais simples, por isso é interessante dominar as técnicas algébricas que permitem reescrevê-las nos seus formatos ideais.

O domínio das técnicas algébricas só pode ser alcançado com a prática!

Uma vez feita a tradução algébrica, as variáveis das equações obtidas deverão estar diretamente associadas às incógnitas do problema.

I. Recomenda-se um uso mínimo de variáveis. Por exemplo, se um problema menciona três números inteiros consecutivos, não os represente por x, y e z, mas por $x - 1$, x e $x + 1$.

II. Recomenda-se também a escolha de variáveis mnemônicas; por exemplo: se um problema trata do número de vacas e do número de galinhas de uma fazenda, prefira utilizar as letras inciais v e g, eliminando, assim, o risco de confundi-los.

III. Durante toda a resolução de um determinado problema, esteja atento à natureza numérica das variáveis. Por exemplo: o número de filhos de um casal é necessariamente natural; a medida do lado de um polígono pode ser representada por qualquer número real, desde que positivo etc.

Uma característica muito importante da descrição em língua portuguesa de uma sucessão de operações matemáticas, é seguir a ordem contrária à qual as operações são executadas. Assim, enquanto o **quadrado da soma** de dois números é $\boldsymbol{(x + y)^2}$, ou seja, primeiro somamos e depois elevamos ao quadrado, a **soma dos quadrados** de dois números é $\boldsymbol{x^2 + y^2}$, ou seja, primeiro elevamos ao quadrado cada número para depois executar a adição. Para x e y não nulos temos que:

- A soma dos quadrados dos seus inversos é representada por $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2$.
- O inverso da soma de seus quadrados é representado por $\frac{1}{x^2 + y^2}$.

- O quadrado do inverso de sua soma é representado por $\left(\frac{1}{x+y}\right)^2$.

1º Passo: Compreender o problema.

Qual é a incógnita?
Quais são os dados?
Quais são as condições?

2º Passo: Planejar - conexão entre dados e incógnita.

Já viu esse problema antes?
Já viu algum problema parecido antes?
É possível reformular o problema (ainda que de outra maneira)?

3º Passo: Executar o plano.

Verifique cada passo.
É possível verificar se cada passo está correto?

4º Passo: Verificar a solução encontrada.

É possível verificar o resultado?
É possível usar o resultado num caminho diferente?

Exercícios resolvidos

3. Hoje Chico e Luísa têm, respectivamente, 15 e 4 anos. Daqui a quantos anos a idade de Chico será o dobro da idade de Luísa?

Resolução:

	Hoje	Daqui a x anos
Chico	15	$15 + x$
Luísa	4	$4 + x$

Daqui a x anos:

$$\begin{aligned} 15 + x &= 2 \cdot (4 + x) \\ 15 + x &= 8 + 2x \\ 15 - 8 &= 2x - x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

A idade de Chico será o dobro da de Luísa daqui a 7 anos.

4. Na fazenda de Sérgio há galinhas e coelhos em um grande cercado de tela. Sabendo que ao todo nesse cercado tem 120 patas (pés) e 48 animais, quantas galinhas e quantos coelhos Sérgio possui?

Resolução:

Considerando que cada uma das g galinhas tem duas patas e que cada um dos c coelhos tem 4, temos:

$$\begin{cases} g + c = 48 \\ 2g + 4c = 120 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos: $g = 36$ e $c = 12$.
Portanto, Sérgio possui 36 galinhas e 12 coelhos no cercado.

5. Que horas são quando o tempo que falta para terminar o dia é $\frac{3}{5}$ do tempo que já se passou?

Resolução:

Se agora são x horas, desde meia-noite (0 hora) passaram-se x horas e ainda faltam $(24 - x)$ horas para terminar o dia. Logo:

$$24 - x = \frac{3}{5}x \Rightarrow 120 - 5x = 3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 120 = 8x \Rightarrow x = 15$$

Portanto, agora são 15 horas.

6. Em um passeio de férias escolares, Cassiano calcula que se gastasse R\$ 100,00 por dia poderia permanecer viajando por 4 dias a mais do que se gastasse R\$ 140,00 por dia. Com quanto dinheiro Cassiano começou a viagem?

Resolução:

Supondo que Cassiano comece a viagem com x reais e que a viagem dure y dias, temos:

$$\begin{cases} 1^{\underline{o}} \text{ caso: } \frac{x}{y} = 140 \Rightarrow x = 140y \\ 2^{\underline{o}} \text{ caso: } \frac{x}{y+4} = 100 \Rightarrow x = 100y + 400 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} 140y &= 100y + 400 \\ 40y &= 400 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Assim:

$$x = 140 \cdot 10 \Rightarrow x = 1400$$

Portanto, Cassiano tinha R\$ 1400,00 quando começou a viagem.

7. Um número é composto de dois algarismos cuja diferença é 3. Quando trocada a ordem dos algarismos, o número obtido é $\frac{4}{7}$ do número dado. Que número é esse?

Resolução:

Se ao inverter a ordem dos algarismos o número se torna menor que o dado $\left(\frac{4}{7} \text{ do número dado}\right)$, concluímos que o primeiro algarismo é maior que o segundo. Supondo que o primeiro algarismo seja x e o segundo y, podemos escrever que $x - y = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 3 + y$ e também que $10y + x = \frac{4}{7}(10x + y)$.
Dessas igualdades tem-se:

$$\begin{cases} 10y + x = \frac{4}{7}(10x + y) \\ x = 3 + y \end{cases} \Rightarrow 10y + (3 + y) = \frac{4}{7}\left(10 \cdot (3 + y) + y\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11y + 3 = \frac{4}{7}(30 + 11y) \Rightarrow 7(11y + 3) = 4(30 + 11y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 77y + 21 = 120 + 44y \Rightarrow 33y = 99 \Rightarrow y = 3$$

Assim, $x = 3 + 3 = 6$ e o número dado é 63.

8. Quando seu filho nasceu, Agenor tinha 36 anos. O produto da idade do filho e do pai atualmente é igual ao quádruplo do quadrado da idade do filho. Calcule a idade, hoje, de pai e filho.

Resolução:

Supondo que o filho tenha hoje x anos, Agenor terá $(36 + x)$ anos; logo, se hoje o produto das idades é igual ao quádruplo do quadrado da idade do filho, então:

$$x \cdot (36 + x) = 4 \cdot x^2 \Rightarrow 36x + x^2 = 4x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 36x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 12x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x - 12) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ (não convém) ou } x = 12$$

Agenor tem hoje 48 anos e seu filho tem 12 anos.

9. **Unicamp-SP** Em um restaurante todas as pessoas de um grupo pediram o mesmo prato principal e uma mesma sobremesa. Com o prato principal o grupo gastou R$ 56,00 e com a sobremesa, R$ 35,00. Cada sobremesa custou R$ 3,00 a menos do que o prato principal.

a) Encontre o número de pessoas neste grupo.
b) Qual é o preço do prato principal?

Resolução:

a) Se o grupo tem n pessoas e x é o preço do prato principal, podemos afirmar que $n = \frac{56}{x}$ ou que $n = \frac{35}{x - 3}$, logo: $\frac{56}{x} = \frac{35}{x - 3} \Rightarrow 56(x - 3) = 35x \Rightarrow$ $\Rightarrow 56x - 168 = 35x \Rightarrow 21x = 168 \Rightarrow x = 8.$

Se $x = 8$, então $n = \frac{56}{8}$, ou seja, o grupo tem 7 pessoas.

b) Como $x = 8$, o prato principal custa R$ 8,00.

10. **Enem 2014** Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionando a Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) × consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

a) 134,1
b) 135,0
c) 137,1
d) 138,6
e) 143,1

Resolução:

Com o consumo de 150 kWh o morador pagará:

$$150 \cdot 0{,}50 + 4{,}50 = \text{R\$ } 79{,}50$$

Como ele deseja uma redução de 10% no custo, temos que o novo valor deverá ser no máximo de:

$$79{,}50 \cdot 0{,}9 = \text{R\$ } 71{,}55$$

Perceba que o maior valor pago na terceira faixa de consumo é $140 \cdot 0{,}50 + 3{,}00 =$ R$ 73,00, ou seja, o morador deverá sair da 4ª faixa de consumo.
Chamando de x um consumo na 3ª faixa que resulta em um custo de R$ 71,55, temos:

$$x \cdot 0{,}5 + 3{,}00 = \text{R\$ } 71{,}55 \Rightarrow x = 137{,}10$$

Portanto, o consumo máximo será de 137,1 kWh.
Resposta: alternativa C.

11. **Enem 2018** Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

a) 34
b) 42
c) 47
d) 48
e) 79

Resolução:

Sendo x o número de alunos e y a quantidade de alunos que compraram 3 bilhetes, pode-se concluir que:

$$x = \underbrace{45}_{\substack{\text{alunos que}\\ \text{compraram}\\ \text{2 bilhetes}}} + \underbrace{0{,}2 \cdot \overbrace{(x + 33)}^{\substack{\text{total de bilhetes}\\ \text{vendidos}}}}_{\substack{\text{alunos que}\\ \text{compraram}\\ \text{1 bilhete}}} + \underbrace{y}_{\substack{\text{alunos que}\\ \text{compraram}\\ \text{3 bilhetes}}} + \underbrace{80}_{\substack{\text{alunos que não}\\ \text{compraram}\\ \text{bilhetes}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0{,}8x - 131{,}6 \quad \text{(I)}$$

$$\underbrace{0{,}2 \cdot (x + 33)}_{\substack{\text{quantidade de} \\ \text{1 bilhete}}} + \underbrace{2 \cdot 45}_{\substack{\text{quantidade de} \\ \text{2 bilhetes}}} + \underbrace{3y}_{\substack{\text{quantidade de} \\ \text{3 bilhetes}}} = \underbrace{x + 33}_{\substack{\text{total de} \\ \text{bilhetes}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y = 0{,}8x - 63{,}6 \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), tem-se:

$$3(0{,}8x - 131{,}6) = 0{,}8x - 63{,}6 \Rightarrow x = 207 \text{ alunos}$$

Portanto, o número de alunos que compraram um bilhete é dado por: $0{,}2 \cdot (207 + 33) = 48$.

Resposta: alternativa D.

12. Insper-SP 2014 Por um terminal de ônibus passam dez diferentes linhas. A mais movimentada delas é a linha 1: quatro em cada sete usuários do terminal viajam nessa linha. Cada uma das demais linhas transporta cerca de 1 300 usuários do terminal por dia. Considerando que cada passageiro utiliza uma única linha, a linha 1 transporta por dia cerca de

a) 5 200 usuários do terminal.
b) 9 100 usuários do terminal.
c) 13 000 usuários do terminal.
d) 15 600 usuários do terminal.
e) 18 200 usuários do terminal.

Resolução:

Se $\frac{4}{7}$ dos usuários viajam pela linha 1, $\frac{3}{7}$ viajam pelas demais linhas, logo:

$$\frac{3}{7} \cdot x = 9 \cdot 1300 \Rightarrow 3x = 81900 \Rightarrow x = 27\,300$$

Assim, a linha 1 transporta por dia:

$$\frac{4}{7} \cdot 27300 = \frac{109\,200}{7} = 15\,600 \text{ passageiros}$$

Resposta: alternativa D.

13. Unesp Em uma loja, todos os CDs de uma determinada seção estavam com o mesmo preço, y. Um jovem escolheu, nesta seção, uma quantidade x de CDs, totalizando R$ 60,00.

a) Determine y em função de x.
b) Ao pagar sua compra no caixa, o jovem ganhou, de bonificação, 2 CDs a mais, da mesma seção e, com isso, cada CD ficou R$ 5,00 mais barato. Com quantos CDs o jovem saiu da loja e a que preço saiu realmente cada CD (incluindo os CDs que ganhou)?

Resolução:

a) $x \cdot y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{x}$

b) $(x + 2) \cdot (y - 5) = 60$

$$(x + 2) \cdot \left(\frac{60}{x} - 5\right) = 60$$

$$60 - 5x + \frac{120}{x} - 10 = 60$$

$$-5x^2 - 10x + 120 = 0$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

Resolvendo a equação obtemos $x = -6$ (não convém) ou $x = 4$.

Assim, verificamos que o jovem saiu com $4 + 2 = 6$ CDs e cada um custou R$ 60,00 : 6 = R$ 10,00.

Revisando

1. Desenvolva os produtos notáveis:

a) $(5x + 3)^2$
b) $(3a - b^2)^2$
c) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y\right)^2$
d) $(2x - 3y - 5)^2$
e) $(2a + b)^3$
f) $(3x - 5y)^3$
g) $\left(2m^3 - \frac{1}{2}\right)^3$
h) $(3a + 1) \cdot (3a - 1)$
i) $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{y^3}{2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^3}{2}\right)$
j) $(x - 7) \cdot (x - 3)$
k) $(y + 2) \cdot (y - 11)$
l) $\left(\frac{1}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + x^2\right)$
m) $\left(a^3 - \frac{b^2}{2}\right) \cdot \left(a^6 + \frac{a^3b^2}{2} + \frac{b^4}{4}\right)$

2. Se $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{5}$, calcule:

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

3. Enem 2018 Em certa página de um livro foi anotada uma senha. Para se descobrir qual é a página, dispõe-se da informação de que a soma dos quadrados dos três números correspondentes à página da senha, à página anterior e à página posterior é igual a um certo número k que será informado posteriormente.

Denotando por n o número da página da senha, qual é a expressão que relaciona n e k?

a) $3n^2 - 4n = k - 2$
b) $3n^2 + 4n = k - 2$
c) $3n^2 = k + 2$
d) $3n^2 = k - 2$
e) $3n^2 = k$

4. Fatore as expressões:

a) $x^2 - xy - 5x + 5y$

b) $a^2b - abm - ac + cm$

c) $4x^2 + 9y^2 + 12xy$

d) $1 - \dfrac{a}{b} + \dfrac{a^2}{4b^2}$

e) $x^2 - 4x - 45$

f) $y^2 + y - 2$

g) $3x^2 - 11x - 4$

h) $5x^2 + 9x - 2$

i) $1 - 25x^2$

j) $\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{z^2}{81}$

5. Decomponha em 3 fatores: $x^4 - 1$.

6. **Cefet-MG 2015** Simplificando a fração algébrica $\dfrac{x^2 - y^2 + 2x + 2y}{x^2 - y^2}$, sendo x e y números reais, tais que $x + y \neq 0$ e $x - y = 4$, obtém-se o valor:

a) 1,5

b) 1,0

c) 0,5

d) 0,0

7. **CPII-RJ 2019** Vanessa participará de uma corrida que acontecerá no dia 31 de dezembro de 2018.
No programa elaborado pelo seu treinador, ela deveria correr 6 km todos os dias por um período de n dias consecutivos. Desse modo, o treino terminaria 2 dias antes do evento. Vanessa, porém, verificou que, nesse período, planejado inicialmente, não poderia treinar por 4 dias. Então, para compensar, resolveu correr, por dia, 1 km a mais do que o planejado, de modo que a distância total percorrida por ela fosse a mesma, terminando também 2 dias antes do evento.
De acordo com o programa de treinamento de Vanessa, a data em que ela teria de começar a se preparar para a corrida é

a) 01/12/2018.

b) 02/12/2018.

c) 03/12/2018.

d) 04/12/2018.

8. Em uma árvore pousam pássaros. Se pousarem dois pássaros em cada galho, fica um galho sem pássaros. Se pousar um pássaro em cada galho fica um pássaro sem galho. Calcular o número de pássaros.

9. Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 + 7x = 0$

b) $2x^2 - 11x = 0$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $9x^2 + 1 = 0$

e) $x^2 + 2x - 15 = 0$

f) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

g) $x^2 - 6x + 10 = 0$

h) $x^2 - \left(3 + \sqrt{7}\right)x + 3\sqrt{7} = 0$

i) $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)x + \sqrt{10} = 0$

j) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

k) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

l) $\sqrt{x + 4} - x = -2$

m) $\sqrt{5 + \sqrt{x + 1}} = \sqrt{x}$

10. Para que valores de t a equação $x^2 + tx + 4 = 0$ admite raízes reais e iguais?

Exercícios propostos

1. **CMRJ 2021** O Prof. Pinheiro, do CMRJ, resolveu desafiar seus três melhores alunos do 9º ano, Huguinho, Zezinho e Luizinho, com um problema para cada um. Depois de resolvê-los, os alunos entregaram suas respostas.

Huguinho

Resposta: O valor de $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$ é igual a $1 + \sqrt{3}$.

Zezinho

Resposta: O quadrado da expressão
$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ é igual a um número inteiro.

Luizinho

Resposta: A soma dos algarismos do número
$10^{2021} - 10^{2019}$ é um múltiplo de 3.

O Prof. Pinheiro concluiu que:

a) todos os três alunos acertaram.

b) apenas um aluno acertou.

c) apenas Huguinho e Zezinho acertaram.

d) apenas Huguinho e Luizinho acertaram.

e) apenas Zezinho e Luizinho acertaram.

2. **Uece 2022** O número irracional $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^6$ é igual a:

a) $198 - 485\sqrt{6}$

b) $485 - 198\sqrt{6}$

c) $-198 + 485\sqrt{6}$

d) $-485 + 198\sqrt{6}$

3. **IME-RJ 2021** Considere que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $(a + b) \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$, determine o valor de $\frac{a^2 + b^2}{2(a + b)^2}$.

a) 0,1
b) 0,3
c) 0,6
d) 0,8
e) 1,0

4. **Esc. Naval-RJ 2021** Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4x - 1 \\ x^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4y - 1 \\ x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 4u - 1 \\ x^2 + y^2 + u^2 + w^2 = 4v - 1 \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4w - 1 \end{cases}$$

Se $x = a$, $y = b$, $u = c$, $v = d$ e $w = e$ constituem a solução do sistema, assinale a opção que apresenta a soma $a + b + c + d + e$.

a) $\frac{5}{2}$
b) $\frac{2}{7}$
c) $\frac{1}{7}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{2}{3}$

5. Sendo $A = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, então, A + B é igual a:

a) $-2\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $-2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{3}$

6. Fatore:

a) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$
b) $x^4 + x^2 + 1$

7. **ITA-SP** Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

a) $x \in]0, 2[$
b) x é racional
c) $\sqrt{2x}$ é irracional
d) x^2 é irracional
e) $x \in]2, 3[$

8. Se x e y são números reais não nulos tais que $xy = \frac{x}{y} = x - y$, então o valor de $x + y$ é igual a

a) $-\frac{3}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) 0
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{3}{2}$

9. Seja F a forma fatorada irredutível equivalente à expressão algébrica a seguir:

$$\frac{x^2 \cdot (x - 1) + (x - 2)^2 - (x - 2) \cdot (x - 1) - 1}{x^2 - 1}$$

a) Escreva F.
b) Calcule o valor numérico de F quando $x = 2$.

10. Considere o conjunto de todos os valores de m e n para os quais a expressão algébrica A, abaixo, está definida.

$$A = \frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m \cdot n} + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m - n)^{-2}}{(m^2 - n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é:

a) $m^2 + n^2$
b) $m^2 - n^2$
c) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$
d) $\frac{m^2 + n^2}{m - n}$

11. As técnicas de resolução das equações do 3º grau descobertas pelos matemáticos italianos do período da renascença, como Tartáglia e Cardano, eram fundamentadas em identidades do 3º grau.
Tartáglia tinha preferência por uma identidade do 3º grau que relaciona, numa mesma igualdade, o cubo da diferença e a diferença de cubos.
Assinale a alternativa que apresenta uma identidade do 3º grau com estas características:

a) $u^3 - v^3 = (u - v)^3 + 3uv(u + v)$
b) $u^3 - v^3 = (u - v)^3 - 3uv(u - v)$
c) $(u - v)^3 = 3uv(v - u) + (u^3 - v^3)$
d) $(u - v)^3 = 3uv(v + u) + (u^3 - v^3)$
e) $(u - v)^3 = 3uv(v^2 + u^2) + (u^3 - v^3)$

12. Fatorando-se completamente o polinômio do 5º grau $x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 8x^2 + 80x + 200$ no universo dos números reais, obtemos três fatores do 1º grau e um fator do 2º grau.
Assinale a alternativa que apresenta a afirmação correta sobre estes fatores.

a) Os três fatores do 1º grau são distintos entre si e o fator do 2º grau é $x^2 - 2x + 4$.
b) Os três fatores do 1º grau são distintos entre si e o fator do 2º grau é $x^2 + 2x + 4$.
c) Há dois fatores do 1º grau idênticos e o fator do 2º grau é $x^2 - 2x + 4$.
d) Há dois fatores do 1º grau idênticos e o fator do 2º grau é $x^2 + 2x + 4$.
e) Há dois fatores do 1º grau idênticos e o fator do 2º grau é $x^2 - 4x + 4$.

13. Encontre todos os pares (x, y) que solucionam o sistema $\begin{cases} xy^2 = 30 + x^2y \\ x - y = 11 + xy \end{cases}$.

14. Simplificando-se $\dfrac{\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{2x^2}{x^2+4} + \dfrac{4x^4}{x^4+16}}{\dfrac{x^4}{x^4-16}}$ obtém-se:

a) $x^4 - \dfrac{16}{x^4}$
b) $\dfrac{8x^4}{x^4 - 16}$
c) $\dfrac{8x^4}{x^4 + 16}$
d) $\dfrac{x^4 + 16}{8x^4}$
e) $x^4 + \dfrac{16}{x^4}$

15. Calculando-se $\sqrt[3]{\dfrac{2\,013^2 - 1987^2}{13}}$ o resultado obtido deve ser:
a) 2
b) 20
c) 40
d) 200
e) 400

16. Sendo x um número real diferente de 1, determine qual número real y não pode ser escrito na forma $y = \dfrac{3x - 2\,013}{x - 1}$.
a) 1
b) 3
c) 2010
d) 2013
e) 2016

17. Sabendo que 1 201 é um número primo, qual é a soma de todos os números primos positivos entre 1 e 100 que dividem $7^8 - 1$?
a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

18. Se x e y são números reais positivos tais que $x^2 + y^2 = 3xy$, então $x^3 + y^3$ é igual a:

a) $(xy)^{\frac{3}{2}}$
b) $2(xy)^{\frac{2}{3}}$
c) $2(xy)^{\frac{3}{2}}$
d) $2\sqrt{5}(xy)^{\frac{3}{2}}$
e) $3(xy)^{\frac{2}{3}}$

19. O algarismo das unidades do número $2\,017^5 - 2\,017$ é?
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 0

20. Se $x + y = a$ e $x^2 + y^2 = b$, então $x^3 + y^3$ é igual a:

a) $\dfrac{3ab - a^3}{2}$
b) $\dfrac{ab - a^3}{2}$
c) $\dfrac{ab + a^3}{2}$
d) $ab + a^3$
e) ab

21. Lembrando que os catetos de um triângulo retângulo e isósceles têm a mesma medida, que a soma dos quadrados das medidas dos catetos equivale ao quadrado da medida da hipotenusa e que perímetro significa o comprimento do contorno de uma figura, assinale a alternativa que apresenta a medida, em metros, dos catetos de um triângulo retângulo e isósceles de perímetro 10m.

a) $10 - 5\sqrt{2}$
b) $5 - \sqrt{2}$
c) $5 + \sqrt{2}$
d) $2\sqrt{5}$
e) $5\sqrt{2}$

22. FGV-SP 2020 Em certo dia, a cotação da libra esterlina em Nova Iorque era de 1,25 dólar americano por 1,00 libra, e a cotação de 1,00 dólar americano era de 4,10 reais. Nesse mesmo dia, em Londres, 1,00 libra era cotada a 5,09 reais e 1 dólar americano era cotado a 4,15 reais. Bianca e Carolina compraram, nesse mesmo dia, 415 libras cada uma. Bianca fez sua compra trocando reais por dólares no mercado de Nova Iorque e, em seguida, trocando esses dólares por libras no mercado de Londres. Carolina fez sua compra trocando reais por libras no mercado de Londres. A partir dessas informações, pode-se concluir que

a) Bianca gastou R$ 6,75 a mais do que Carolina.
b) Bianca gastou R$ 12,25 a mais do que Carolina.
c) Carolina gastou R$ 18,25 a mais do que Bianca.
d) Carolina gastou R$ 25,45 a mais do que Bianca.
e) Carolina gastou R$ 26,75 a mais do que Bianca.

23. Col. Naval-RJ 2021 Para qualquer x real e maior que zero, associe os polinômios da 1ª coluna aos seus correspondentes, na forma fatorada, da 2ª coluna e assinale a opção que corresponde à sequência correta.

I. $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$	( ) $x^3 + 8$
II. $(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$	( ) $x^6 + 2x^3 + 1$
III. $(x - 4) \cdot (x^2 + 4x + 16)$	( ) $x^6 - 1$
IV. $(x + 1)^2 \cdot (x^2 - x + 1)$	( ) $x^3 - 64$
V. $(x + 5) \cdot (x^2 - 5x + 25)$	( ) $x^5 - x^2$
VI. $(x + 8) \cdot (x + 3)$	

a) (II) (I) (IV) (III) (VI)
b) (III) (VI) (I) (V) (–)
c) (V) (I) (VI) (II) (–)
d) (II) (IV) (I) (III) (–)
e) (VI) (III) (–) (V) (I)

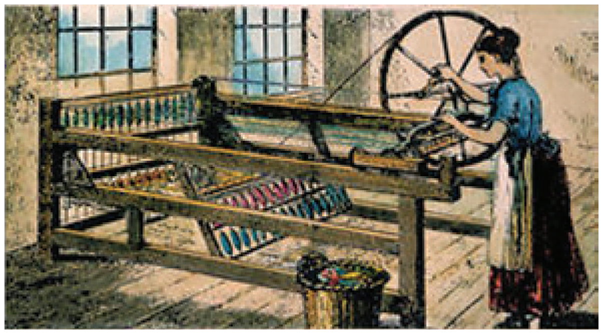
24. Fuvest-SP 2022 Os funcionários de um salão de beleza compraram um presente no valor de R$ 200,00 para a recepcionista do estabelecimento. No momento da divisão igualitária do valor, dois deles desistiram de participar e, por causa disso, cada pessoa que ficou no grupo precisou pagar R$ 5,00 a mais que a quantia originalmente prevista. O valor pago por pessoa que permaneceu na divisão do custo do presente foi:

a) R$ 10,00
b) R$ 15,00
c) R$ 20,00
d) R$ 25,00
e) R$ 40,00

25. Col. Naval-RJ 2020 Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* | 17(x^2 + + y^2) = 30xy\}$, é correto afirmar que:

a) $A = \varnothing$.
b) existem 7 elementos distintos no conjunto A.
c) A é um conjunto infinito.
d) A é um conjunto unitário.
e) existem 8 subconjuntos próprios de A.

26. UEL-PR 2018 Analise as figuras a seguir e responda à questão.



Máquina de tear manual

(Disponível em: http://*cmapspublic*2.ihmc.us/rid=1PZQNHNNF-L7R6322M31/capitalismo%204.jpg. Acesso em: 2 maio 2017.)

Máquina de tear industrial

(Disponível em: http://www.sohistoria.com.br/resumos/revolucao industrial_clip_*image*001.jpg. Acesso em: 2 maio 2017.)

Considere que um tear manual produza 20 metros de tecido por hora de funcionamento e que um tear mecânico produza, no mesmo tempo, o dobro. Uma tecelagem britânica substituirá todos os seus teares manuais por mecânicos, adotando a seguinte regra: a cada tear mecânico adquirido, um tear manual é imediatamente descartado, até que o processo de mecanização dessa tecelagem se complete. Com essa regra, o número total C de teares se mantém constante ao longo do processo.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a média de produção dos teares desta tecelagem no instante em que o quociente, do número de teares manuais pelo número total de teares, é R.

a) 30 metros de tecido por hora de funcionamento.
b) 30 + 20R metros de tecido por hora de funcionamento.
c) $R\frac{1}{2}$ metros de tecido por hora de funcionamento.
d) 40 − 20R metros de tecido por hora de funcionamento.
e) 30R − 40 metros de tecido por hora de funcionamento.

FRENTE 2

27. Enem 2017 Chegando ao destino de uma mesma viagem, os turistas X e Y alugarão, cada um deles, um carro. Fizeram, previamente, cotações com as mesmas três locadoras de automóveis da região. Os valores dos aluguéis estão representados pelas expressões dadas no quadro, sendo *k* o número de quilômetros percorridos, e *n* o número de diárias pagas pelo aluguel.

Empresa	Valor cobrado, em real, pelo aluguel do carro
I	$100n + 0{,}8k$
II	$70n + 1{,}2k$
III	$120n + 0{,}6k$

O turista X alugará um carro em uma mesma locadora por três dias e percorrerá 250 km. Já a pessoa Y usará o carro por apenas um dia e percorrerá 120 km.
Com o intuito de economizarem com as locações dos carros, e mediante as informações, os turistas X e Y alugarão os carros, respectivamente, nas empresas

a) I e II.
b) I e III.
c) II e II.
d) II e III.
e) III e I.

28. Perguntando-se a Guto que idade tem, obteve-se como resposta: se do triplo de minha idade subtrairmos o quíntuplo da idade que tinha há 12 anos, teremos minha idade atual. Que idade tem Guto?

29. Um grupo de alunos do curso de mecânica decidiu comprar um torno mecânico para montar uma oficina assim que se formassem. O valor de R$ 3 600,00 seria igualmente dividido por todos. Devido a alguns problemas financeiros, oito alunos que estavam no grupo desistiram, e a parte que cada um do grupo deveria pagar aumentou R$ 75,00. Quantos alunos faziam parte do grupo inicialmente?

a) 20 alunos.
b) 16 alunos.
c) 18 alunos.
d) 24 alunos.
e) 12 alunos.

30. Uma fábrica utiliza sua frota particular de caminhões para distribuir as 90 toneladas de sua produção semanal. Todos os caminhões são do mesmo modelo e, para aumentar a vida útil da frota, adota-se a política de reduzir a capacidade máxima de carga de cada caminhão em meia tonelada. Com essa medida de redução, o número de caminhões necessários para transportar a produção semanal aumenta em 6 unidades em relação ao número de caminhões necessários para transportar a produção, usando a capacidade máxima de carga de cada caminhão.
Qual o número atual de caminhões que essa fábrica usa para transportar a produção semanal, respeitando-se a política de redução de carga?

a) 36
b) 30
c) 19
d) 16
e) 10

31. Enem 2020 Segundo indicação de um veterinário, um cão de pequeno porte, nos dois primeiros meses de vida, deverá ser alimentado diariamente com 50 g de suplemento e tomar banho quatro vezes por mês. O dono de um cão de pequeno porte, seguindo orientações desse veterinário, utilizou no primeiro mês os produtos/serviços de um determinado *pet shop*, em que os preços estão apresentados no quadro.

Produtos/Serviços	Valor
Suplemento	R$ 8,00 (pacote de 500 g)
Banho	R$ 30,00 (preço unitário)

No mês subsequente, o fabricante reajustou o preço do suplemento, que, nesse *pet shop*, passou a custar R$ 9,00 cada pacote de 500 g. Visando manter o mesmo gasto mensal para o dono do cão, o gerente do *pet shop* decidiu reduzir o preço unitário do banho. Para efeito de cálculos, considere o mês comercial de 30 dias.

Disponível em: http://carodinheiro.blogfolha.uol.com.br. Acesso em: 20 jan. 2015 (adaptado).

Nessas condições, o valor unitário do banho, em real, passou a ser

a) 27,00.
b) 29,00.
c) 29,25.
d) 29,50.
e) 29,75.

32. UFRGS 2020 Se a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$ tem as raízes *a* e *b*, então o valor de $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$ é

a) $-\frac{1}{16}$
b) $-\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{16}$
d) $\frac{1}{4}$
e) 1

33. Dada a equação $(k - 2)x^2 - 2kx + k + 3 = 0$, responda:

a) Para quais valores de k é uma equação do 2º grau?

b) Para quais valores de k a equação apresenta raízes reais e iguais?

34. Encontre o valor de m, de modo que a soma e o produto das raízes da equação $(m - 2)x^2 - 3mx + 1 = 0$ sejam iguais.

35. Calcule o valor de p na equação $x^2 - 7x + p = 0$, de modo que a soma dos inversos das raízes seja $\frac{7}{10}$.

36. Unifor-CE 2021 Para reforçar junto à sociedade a importância do uso da máscara como forma de proteção e combate ao Coronavírus, a Agência Nacional de Saúde Suplementar (ANS) está fazendo uma campanha em suas redes sociais para incentivar a medida. As mensagens alertam que o cuidado é pessoal, mas os benefícios da utilização do equipamento são coletivos: ao usar a máscara, além de se proteger contra o vírus que pode estar circulando à sua volta, a pessoa impede a transmissão da Covid-19 aos demais, caso esteja doente e ainda não saiba. Sensibilizado com a campanha, o dono de uma loja está fazendo uma promoção na venda de máscaras por unidades: "Compre x máscaras e ganhe x% de desconto". A promoção é válida para compras até 60 máscaras, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Paulo, Edno, Pedro, João e Ricardo compraram 15, 20, 30, 35 e 40 máscaras, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais máscaras e gastado a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática?

a) Paulo.

b) Edno.

c) Pedro.

d) João.

e) Ricardo.

37. UFGD-MS 2022 José recebeu uma herança de R$ 50 000,00. Seu consultor financeiro sugeriu que investisse em três fundos diferentes: um fundo do mercado monetário, um fundo de ações preferenciais e um fundo de ações de alta tecnologia. O avaliador estima que o fundo do mercado monetário renderá 5% no ano seguinte, o fundo de ações preferenciais dará 9% e o de alta tecnologia renderá 16%. José quer ter um retorno de 8% sobre o valor total investido no fim do primeiro ano. Para evitar risco excessivo, ele decidiu investir três vezes mais no fundo do mercado monetário do que no fundo de ações de alta tecnologia. Então, o valor investido,

a) no mercado monetário, é R$ 10 000,00 a menos que no de ações preferenciais.

b) no mercado monetário, é R$ 10 000,00 a mais que no de ações preferenciais.

c) nas ações preferenciais, é R$ 15 000,00 a menos que no de mercado monetário.

d) no mercado monetário, é R$ 20 000,00 a mais que no de ações preferenciais.

e) no fundo de ações de alta tecnologia, é R$ 10 000,00 a menos que no de ações preferenciais.

38. PUC-Rio 2022 Para quantos valores inteiros do parâmetro b, a equação $x^2 + bx + 40 = 0$ não admite raiz real?

a) 0

b) 25

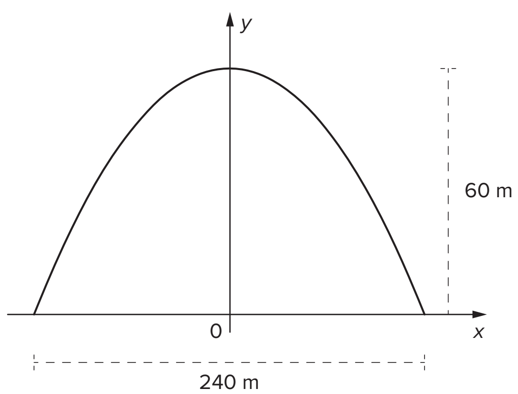
c) 40

d) Infinitos

39. Unifenas-MG 2020 A Ponte Juscelino Kubitschek, também conhecida como Ponte JK ou Terceira Ponte, está situada em Brasília, ligando o Sul à parte central de Brasília.

A estrutura da ponte conta com três arcos parabólicos, que sustentam, por meio de cabos de aço, três tabuleiros com vão de 240 metros cada um, e altura aproximada de 60 metros acima do nível do lago, apoiados em quatro bases submersas.

A figura representa, matematicamente, um dos arcos parabólicos.



A expressão algébrica para esse arco é igual a

a) $y = -\frac{1}{240}x^2 + 60$

b) $y = -\frac{1}{120}x^2 + 60$

c) $y = -\frac{1}{240}x^2 + 60x$

d) $y = -120x^2 + 60$

e) $y = -60x^2 + 60$

40. Enem 2020 Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2 385,00

b) 2 650,00

c) 3 300,00

d) 3 950,00

e) 5 300,00

41. PUC-Rio 2020 Ao receber seu salário, Maria gasta 30%, pagando seu aluguel. Em seguida, Maria usa 20% do que lhe restou, pagando a conta do cartão de crédito. Neste momento, Maria observa que lhe restam R$ 840,00.

Quanto Maria recebeu de salário?

a) R$ 890,00

b) R$ 1 500,00

c) R$ 1 680,00

d) R$ 1 965,00

e) R$ 4 200,00

42. Enem 2020 Muitos modelos atuais de veículos possuem computador de bordo. Os computadores informam em uma tela diversas variações de grandezas associadas ao desempenho do carro, dentre elas o consumo médio de combustível. Um veículo, de um determinado modelo, pode vir munido de um dos dois tipos de computadores de bordo:

- Tipo A: informa a quantidade X de litro de combustível gasto para percorrer 100 quilômetros;
- Tipo B: informa a quantidade de quilômetro que o veículo é capaz de percorrer com um litro de combustível.

Um veículo utiliza o computador do Tipo A, e ao final de uma viagem o condutor viu apresentada na tela a informação "$\frac{X}{100}$".

Caso o seu veículo utilizasse o computador do Tipo B, o valor informado na tela seria obtido pela operação

a) $X \cdot 100$

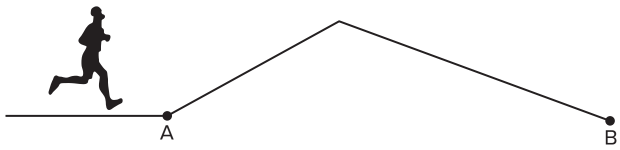
b) $\frac{X}{100}$

c) $\frac{100}{X}$

d) $\frac{1}{X}$

e) $1 \cdot X$

43. Col. Naval-RJ 2020 Observe a figura a seguir:



Ela esboça o percurso de um atleta amador, que partiu do ponto A e fez um trajeto que tem uma subida e uma descida. Ele chegou ao ponto B e retornou pelo mesmo caminho, seguindo o sentido oposto, onde o que era descida passou a ser subida e o que era subida passou a ser descida, finalizando no ponto de partida A. Sabendo que ele desenvolve uma velocidade média de 8 km/h na subida e uma velocidade média de 12 km/h na descida e que gastou 1h e 30m na ida e 1h 45m na volta, é correto afirmar que o percurso total corrido por ele em quilômetros é igual a:

a) 30,8

b) 31,2

c) 32,6

d) 34,4

e) 35,2

44. CMRJ 2021 Para o Concurso de Admissão, o Comandante do CMRJ solicitou que fizessem a higienização dos bebedouros. O primeiro passo nesse processo consiste em esvaziar cada um dos bebedouros, pois sempre sobra água em seus reservatórios. O Cabo Aurélio, encarregado de esvaziar 4 bebedouros iguais, observou que, em cada um deles, havia ainda $\frac{2}{9}$ de sua capacidade total. Para esvaziá-los, Aurélio utilizou um cantil, com capacidade de $\frac{3}{10}$ de litro. Ele encheu completamente o cantil 75 vezes para esvaziar cada bebedouro. Quando o Cabo Aurélio iniciou o processo de higienização, quantos litros de água já haviam sido consumidos nesses 4 bebedouros juntos, levando em consideração a capacidade máxima deles?

a) 78,25

b) 90,00

c) 101,25

d) 315,00

e) 405,00

45. FMC-RJ 2022 Em um recente concurso para ingresso em uma empresa estatal, temos os seguintes dados relativos ao número total de candidatos inscritos: 52% faltaram, 30% foram aprovados e 81 foram reprovados. O número de candidatos que se inscreveram em tal concurso é igual a:

a) 450

b) 460

c) 480

d) 490

e) 500

46. UEMG 2019 No ano de 2018, foi realizada uma pesquisa, utilizando-se questionários sobre educação. Nessa pesquisa, João, Alfredo e Enéias tabularam as respostas dos questionários, respondidos pelos usuários de uma determinada universidade.
Sabendo-se que João tabulou um quarto do total de questionários, Alfredo tabulou três quintos do que sobrou e Enéias tabulou os 1020 questionários restantes, a diferença entre os números de questionários tabulados por Enéias e João foi de:

a) 170
b) 150
c) 120
d) 100

47. Fuvest-SP 2018 Dois atletas correm com velocidades constantes em uma pista retilínea, partindo simultaneamente de extremos opostos, A e B. Um dos corredores parte de A, chega a B e volta para A. O outro corredor parte de B, chega a A e volta para B. Os corredores cruzam-se duas vezes, a primeira vez a 800 metros de A e a segunda vez a 500 metros de B. O comprimento da pista, em metros, é

a) 1 000.
b) 1 300.
c) 1 600.
d) 1 900.
e) 2 100.

48. Enem 2020 Para chegar à universidade, um estudante utiliza um metrô e, depois, tem duas opções:

- Seguir num ônibus, percorrendo 2,0 km;
- Alugar uma bicicleta, ao lado de uma estação de metrô, seguindo 3,0 km pela ciclovia.

O quadro fornece as velocidades médias do ônibus e da bicicleta, em km/h, no trajeto metrô–universidade.

Dia da semana	Velocidade média	
	Ônibus (km/h)	Bicicleta (km/h)
Segunda-feira	9	15
Terça-feira	20	22
Quarta-feira	15	24
Quinta-feira	12	15
Sexta-feira	10	18
Sábado	30	16

A fim de poupar tempo no deslocamento para a universidade, em quais dias o aluno deve seguir pela ciclovia?

a) Às segundas, quintas e sextas-feiras.
b) Às terças e quintas-feiras e aos sábados.
c) Às segundas, quartas e sextas-feiras.
d) Às terças, quartas e sextas-feiras.
e) Às terças e quartas-feiras e aos sábados.

49. CPII-RJ 2020 Duas irmãs viajaram juntas nas férias de julho. Ao retornarem, elas selecionaram 12 dezenas de fotos para postar, durante alguns dias em uma rede social.
Considere que a quantidade de fotos postadas a cada dia correspondeu ao dobro da quantidade do dia anterior, e que o tempo gasto para postar todas as fotos foi de 4 dias.
Foram postadas no último dia:

a) 64 fotos.
b) 32 fotos.
c) 16 fotos.
d) 8 fotos.

50. CMRJ 2020 Em um grupo de 32 alunos da escolinha de natação do Colégio Militar do Rio de Janeiro, foi verificado que todas as crianças têm alturas diferentes. O mais baixo dos meninos é mais alto do que três meninas; o segundo menino mais baixo é mais alto do que quatro meninas; o terceiro menino mais baixo é mais alto do que cinco meninas e assim por diante, observando-se que o mais alto dos meninos é mais alto do que todas as meninas. Quantas meninas há nesse grupo?

a) 21
b) 19
c) 18
d) 17
e) 15

51. Fuvest-SP 2021 Uma treinadora de basquete aplica o seguinte sistema de pontuação em seus treinos de arremesso à cesta: cada jogadora recebe 5 pontos por arremesso acertado e perde 2 pontos por arremesso errado. Ao fim de 50 arremessos, uma das jogadoras contabilizou 124 pontos. Qual é a diferença entre as quantidades de arremessos acertados e errados dessa jogadora?

a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 20

52. Fuvest-SP 2019 Em uma família, o número de irmãs de cada filha é igual à metade do número de irmãos. Cada filho tem o mesmo número de irmãos e irmãs.
O número total de filhos e filhas da família é

a) 4
b) 5
c) 7
d) 10
e) 15

53. **FGV-SP 2021** Fátima usou suas economias para comprar dólares, gastando R$ 46 400,00. Se Fátima tivesse feito a compra um ano atrás, com o mesmo montante, em reais, ela teria comprado US$ 1 280,00 a mais, já que o preço de compra do dólar era R$ 0,80 menor. Desconsiderando-se taxas e impostos, a cotação de compra de um dólar, em reais, quando Fátima fez o investimento era um número pertencente ao intervalo de números reais dado por

a) [5,70; 5,74[
b) [5,74; 5,78[
c) [5,78; 5,82[
d) [5,82; 5,86]
e) [5,86; 5,90].

54. **Unifesp 2018** Um estudo médico recrutou 160 pacientes homens com histórico de alterações no antígeno prostático específico (PSA). Os pacientes foram submetidos aos exames laboratoriais de PSA total e de PSA livre e, em seguida, a uma biópsia da próstata. A biópsia apontou, em cada caso, se a patologia era maligna ou benigna. A tabela apresenta os resultados das médias dos exames laboratoriais do grupo de pacientes com patologia maligna e do grupo de pacientes com patologia benigna.

PSA (média)	Biópsia com indicação de patologia maligna	Biópsia com indicação de patologia benigna
PSA total (ng/mL)	10	8
PSA livre (ng/mL)	1,9	2
PSA livre ÷ PSA total	0,19	0,25

Pedro foi um dos pacientes que participou do estudo e seus exames indicaram PSA total = 9,5 ng/mL e PSA livre = 2,28 ng/mL.

a) Calcule o quociente entre o PSA livre e o PSA total de Pedro. Usando esse indicador como referência na comparação com os dados da tabela, indique se o resultado do exame de Pedro está numericamente mais próximo ao resultado médio do exame de quem tem a patologia maligna ou de quem tem a patologia benigna.
b) Sabendo que 40% dos pacientes foram diagnosticados com patologia maligna, calcule a média do PSA total dos 160 pacientes que participaram do estudo.

55. **Cefet-MG 2020** Se $x + y = 4$, então $P = x^3 + x^2y + x^2 - y^2$ é equivalente a expressão algébrica:

a) $3x - 16$
b) $x^3 + 8x$
c) $3x^2 + 2x - 1$
d) $4x^2 + 8x - 16$

56. **Unicamp-SP 2021** A soma dos valores de x que resolvem a equação:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

É igual a:

a) $\frac{14}{3}$
b) $\frac{16}{3}$
c) $\frac{18}{3}$
d) $\frac{20}{3}$

57. **Uece 2022** O professor Abder comprou alguns exemplares de um livro para presentear seus alunos, gastando R$ 640,00. Ganhou quatro livros de bonificação e, com isso, o preço de cada livro ficou R$ 8,00 mais barato. Assim, é correto afirmar que o número de livros que o professor destinou para presentear seus alunos é

a) 20
b) 12
c) 18
d) 14

58. **EPCar-MG 2017** Considere, em $\mathbb{R}$ a equação $(m + 2)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$ na variável x, em que m é um número real diferente de -2. Analise as afirmativas a seguir e classifique-as em V (verdadeira) ou F (falsa).

☐ Para todo $m > 2$ a equação possui conjunto solução vazio.
☐ Existem dois valores reais de m para que a equação admita raízes iguais.
☐ Na equação, se $\Delta > 0$, então m só poderá assumir valores positivos.

A sequência correta é

a) V – V – V
b) F – F – V
c) F – V – F
d) V – F – F

59. Dois irmãos gêmeos, Lucas e Mateus, em sua festa de aniversário, ganharam um certo número de camisas, cada um. Se Lucas der uma dessas camisas a Mateus, eles passarão a ter a mesma quantidade de camisas. Entretanto, se fosse Mateus que doasse a Lucas uma de suas camisas este então teria o dobro do número de camisas de Mateus. Considerando apenas as camisas recebidas de presente no aniversário, é correto afirmar que:

a) Mateus ganhou 40% menos camisas do que Lucas.
b) Se x é o número de camisas de Lucas e y é o número de camisas de Mateus, então x e y são números primos entre si.
c) Os dois irmãos ganharam juntos mais de 12 camisas.
d) O número que representa a quantidade de camisas que Mateus ganhou é um número divisor de 63.

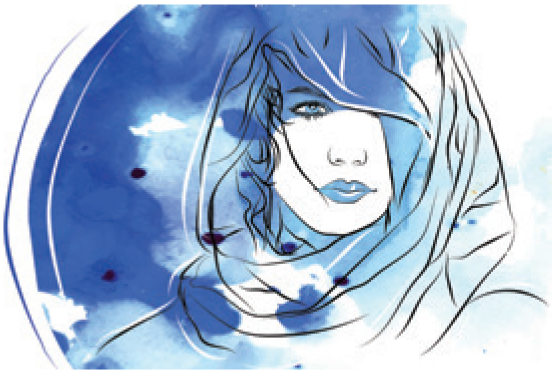
60. O trinômio $y = x^2 - 14x + k$, onde k é uma constante real positiva, tem duas raízes reais distintas. A maior dessas raízes pode ser:

a) 4
b) 6
c) 11
d) 14
e) 17

Texto complementar

Uma história de Malba Tahan

No Livro *O homem que calculava*, Malba Tahan narra algumas histórias com uma lógica muito interessante. Leia a última delas, adaptada do capítulo XXXIII.



Art_by_Danko/Shutterstock.com

O califa tinha cinco sobrinhas: duas tinham olhos negros e três tinham olhos azuis. As sobrinhas que tinham olhos negros sempre diziam a verdade, porém as sobrinhas que tinham olhos azuis nunca diziam a verdade.

Beremiz, o calculista, foi desafiado pelo califa a descobrir quais eram as cores dos olhos de cada uma das sobrinhas. Ele poderia escolher três das sobrinhas e fazer apenas uma pergunta para cada escolhida e, a partir das três respostas, deveria descobrir as cores dos olhos das garotas.

Assim, elas foram posicionadas lado a lado, todas com seus rostos cobertos por véus, e o calculista fez a primeira pergunta para a garota que estava na extrema esquerda dele: "De que cor são os seus olhos?". A resposta foi dada em chinês, língua inacessível para o calculista. Algumas sobrinhas do califa não eram árabes. O calculista protestou, mas, apesar de seu protesto, lhe foi negada a tradução da resposta, no entanto teve a garantia de que as respostas seguintes deveriam ser dadas em árabe. Porém, só lhe restavam duas perguntas. Como ele conseguiria descobrir as cores dos olhos de todas as sobrinhas com apenas duas perguntas e duas respostas?

Será que a primeira resposta não serviu de nada?

Sem esboçar desânimo, o calculista interpelou a segunda sobrinha na ordem em que estavam postas, nestes termos: "Qual foi a resposta que a sua companheira acabou de proferir?". A sobrinha respondeu com clareza: "As palavras dela foram 'os meus olhos são azuis' ". Essa resposta aparentemente ainda não esclarecia o que quer que fosse. O que Beremiz pretendia com essas perguntas tão vagas? É nesse momento que entra a lógica de um calculista em ação. Preste atenção à terceira pergunta...

A terceira pergunta foi feita para a sobrinha que estava no centro: "De que cor são os olhos dessas duas jovens à sua direita, que acabo de interrogar?". A resposta foi: "A primeira tem os olhos negros e a segunda tem os olhos azuis!". Após alguns minutos de reflexão, Beremiz respondeu:

"A primeira sobrinha (à direita) tem olhos negros; a segunda tem os olhos azuis; a terceira tem os olhos negros e as duas últimas têm olhos azuis!".

Após erguerem-se os véus, verificou-se, para espanto de todos os presentes, que as sobrinhas tinham os olhos das cores informadas e na ordem indicada pelo calculista. Mas como ele fez tanto com tão pouco? Ele fez três perguntas, mas apenas as duas últimas respostas foram inteligíveis; a primeira resposta veio em chinês. A explicação será sintetizada da forma que o livro aborda:

Para a primeira pergunta só havia uma resposta – "os meus olhos são negros" –, pois independentemente da índole da sobrinha, sendo sincera ou mentirosa, ela responderia a mesma coisa. Sendo assim, não importaria se a primeira sobrinha respondesse em chinês, em alemão, em inglês ou mesmo se fosse muda. Como a primeira resposta era fixa ("meus olhos são negros"), a segunda resposta ("os olhos dela são azuis") era certamente uma mentira. Nesse momento, o calculista já sabia que a primeira sobrinha tinha olhos negros (sincera) e a segunda tinha olhos azuis (mentirosa). A terceira resposta ("a primeira tem os olhos negros e a segunda tem os olhos azuis!") provou que a terceira sobrinha falara a verdade, ou seja, tinha olhos negros. Por dedução, as duas últimas sobrinhas tinham olhos azuis.

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Propriedade distributiva da multiplicação

$$A \cdot (B + C) \equiv A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C \equiv A \cdot C + B \cdot C$$

$$(A + B) \cdot (X + Y) \equiv A \cdot X + A \cdot Y + B \cdot X + B \cdot Y$$

Principais identidades do 2º grau

$$(A + B)^2 \equiv A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$(A - B)^2 \equiv A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

$$A^2 - B^2 \equiv (A + B) \cdot (A - B)$$

$$(A + B + C)^2 \equiv A^2 + B^2 + C^2 + 2 \cdot A \cdot B + 2 \cdot A \cdot C + 2 \cdot B \cdot C$$

Trinômio do 2º grau

$$x^2 - Sx + P \equiv (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

Principais identidades do 3º grau

$$(A + B)^3 \equiv A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$$

$$A^3 + B^3 \equiv (A + B) \cdot (A^2 - A \cdot B + B^2)$$

$$(A - B)^3 \equiv A^3 - 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 - B^3$$

$$A^3 - B^3 \equiv (A - B) \cdot (A^2 + A \cdot B + B^2)$$

Equações do 1º grau

Uma vez escritas na forma $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, as equações do 1º grau apresentam solução única igual a $-\frac{b}{a}$.

$$ax + b = 0,\ a \neq 0 \Rightarrow S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Equações do 2º grau

Uma vez escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, as equações quadráticas podem apresentar até duas soluções distintas. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, as soluções (ou raízes) da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas pelas expressões:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soma e produto das raízes da equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Discussão das raízes da equação de 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x_1 \text{ e } x_2 \\ \text{são números reais diferentes} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x_1 \text{ e } x_2 \\ \text{são números reais iguais} \\ \Delta < 0 \Rightarrow x_1 \text{ e } x_2 \\ \text{não são números reais} \end{cases}$$

Quer saber mais?

Sites

SILVA, Luiz Paulo Moreira. Exercícios sobre fatoração de expressões algébricas. *Mundo Educação*. Disponível em: https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-fatoracao-expressoes-algebricas.htm.
Faça mais alguns exercícios envolvendo a fatoração algébrica.
Acesso em: 21 jun 2022.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. Resolução de Problemas Envolvendo Equações Fracionárias. *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-envolvendo-equacoes-fracionarias.htm.
Veja outros exemplos de modelagem por equações algébricas fracionárias.
Acesso em: 21 jun 2022.

PEDROSO, Hermes Antonio. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista Eletrônica de Matemática*. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122614/ISSN2177-5095-2010-02-01-13.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
Conheça um pouco mais sobre a história da equação do 2º grau.
Acesso em: 21 jun 2022.

Exercícios complementares

1. Obmep 2017 Se $a - b = 1$ e $ab = 1$, qual é o valor de $a^2 + b^2$?
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2. Obmep 2017 Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?
a) 0
b) 1
c) 8
d) 10
e) 80

3. Efomm-RJ 2019 Seja $f(k) = k^2 + 3k + 2$ e seja W o conjunto de inteiros {0, 1, 2, ..., 25}. O número de elementos de W, tais que $f(W)$ deixa resto zero, quando dividido por 6, é:
a) 25
b) 22
c) 21
d) 18
e) 17

4. EPCar-MG 2022 Se $Y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + x - x^{\frac{1}{2}} - 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}$ com $x \geqslant 0$ e $x \neq 1$ então Y é igual a:
a) $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$
b) $x - 1$
c) $x^{\frac{3}{2}} - 1$
d) $x^{\frac{1}{2}} - 1$

5. Col. Naval-RJ 2017 Sejam a, b e c números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 2b - 2c + 6 = 0$. Sobre a, b e c são feitas as seguintes afirmações:
I. $a^b < b^a$.
II. $c^{b^a} = 1$.
III. $b^{(-a)} = (-c)^b$.
IV. $a > b > c$.

Sendo assim, é correto afirmar que a quantidade de afirmativas verdadeiras é
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

6. **Col. Naval-RJ 2021** Sejam a, b e c números reais positivos com $a + b > c$, considere também que $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + a + b - c = 21$ e que simultaneamente $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 9$. Um estudante fatorou os primeiros membros das igualdades e encontrou uma relação sempre verdadeira entre a, b e c. Assinale a opção que apresenta essa relação.

a) $a + b = c + 1$
b) $b - a = c - 6$
c) $a - c = 4 - b$
d) $c - a = b - 2$
e) $b - c = a + 4$

7. A expressão $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}}$ representa um número inteiro. Que número é esse?

8. Sendo x, y, z e w números reais considere as expressões:

$$A = x + 2y + 3z + 4w$$
$$B = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

Determine o valor máximo da diferença A − B.

9. Determine todos os valores reais e não nulos de m, para os quais a equação $\dfrac{\left(\dfrac{m-x}{m+x}\right)+\left(\dfrac{m+x}{m-x}\right)}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{m^2+m\sqrt{2}+1}{m+x}\right)\left(\dfrac{m^2-m\sqrt{2}+1}{m-x}\right)}{m^2}$ não admite solução.

10. Encontre todos os possíveis valores inteiros de x e y tais que $x > y$ e $x + y + 2xy = 5$.

11. Verifique se são equações ou identidades as sentenças a seguir:

a) $(x - 1)^3 + 3x^2 = x(x^2 + 3) - 1$
b) $\left(x + \sqrt{5}\right)^2 = x^2 + 5$
c) $x^4 + 11x^2 = 6x^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

12. **Obmep 2016** Quantos são os números naturais n tais que $\dfrac{5n-12}{n-8}$ é também um número natural?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

13. **Fuvest-SP 2020** Se $3x^2 - 9x + 7 = (x - a)^3 - (x - b)^3$, para todo número real x, o valor de $a + b$ é

a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 9.
e) 12.

14. **Col. Naval-RJ 2020** A soma e o produtos das raízes x_1 e x_2 de uma equação do 2º grau são iguais. Se s é a soma das raízes da equação, é correto afirmar que a expressão $x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{s^2}{x_1^2} + \dfrac{s^2}{x_2^2}$ é:

a) $s^2 - 4s$
b) $s^2 - 8s$
c) $4s^2 - 16s$
d) $2s^2 + 8s$
e) $2s^2 - 4s$

15. **UEL-PR 2017** Leia o texto a seguir.

Por que não dividir um segmento unitário em duas partes iguais? A resposta é que, simplesmente, com a igualdade não existe diferença, e sem diferença não há universo perceptivo. O "número de ouro" é uma razão constante derivada de uma relação geométrica que os antigos chamavam de "áurea" ou de divisão perfeita, e os cristãos relacionaram este símbolo proporcional com o Filho de Deus.

Adaptado de: LAWLOR, R. *Mitos - Deuses - Mistérios - Geometria Sagrada*. Madrid: Ediciones del Prado, 1996. p. 46.

O número de ouro, denotado pela letra grega ϕ, é definido como a única raiz positiva da equação a seguir.

$$x^2 = x + 1$$

Com base no texto e na definição do número de ouro, atribua V (verdadeiro) ou F (falso) às afirmativas a seguir.

- ☐ $2\phi = 1 + \sqrt{5}$
- ☐ O número de ouro ϕ pode ser expresso como um quociente de números inteiros não nulos.
- ☐ Os números ϕ, $\phi + 1$, $2\phi + 1$ estão em progressão geométrica de razão ϕ.
- ☐ $\phi^{-1} = \phi - 1$
- ☐ ϕ não pode ser expresso através de uma equação, por ser derivado de uma relação geométrica.

Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.

a) V, V, V, F, F.
b) V, F, V, V, F.
c) V, F, F, F, V.
d) F, V, V, F, V.
e) F, V, F, V, F.

16. **Enem 2018** Um produtor de milho utiliza uma área de 160 hectares para as suas atividades agrícolas. Essa área é dividida em duas partes: uma de 40 hectares, com maior produtividade, e outra, de 120 hectares, com menor produtividade.
A produtividade é dada pela razão entre a produção, em tonelada, e a área cultivada. Sabe-se que a área de 40 hectares tem produtividade igual a 2,5 vezes à da outra. Esse fazendeiro pretende aumentar sua produção total em 15%, aumentando o tamanho da sua propriedade. Para tanto, pretende comprar uma parte de uma fazenda vizinha, que possui a mesma produtividade da parte de 120 hectares de suas terras.
Qual é a área mínima, em hectare, que o produtor precisará comprar?

a) 36
b) 33
c) 27
d) 24
e) 21

17. CMRJ 2021 O conhecimento algébrico contribui, dentre outras coisas, para a simplificação de expressões algébricas. Dessa forma, para $x = 21$ e $y = 20$, o valor da expressão $\dfrac{x^3 - y^3}{x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3}$ é igual a

a) $-\dfrac{1261}{32\,440}$

b) $-\dfrac{1}{1261}$

c) $\dfrac{41}{32\,440}$

d) $\dfrac{1}{41}$

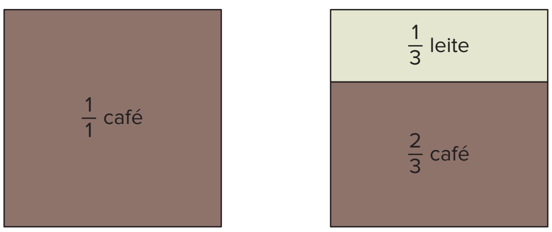
e) $\dfrac{41}{1261}$

18. Unicamp-SP 2017 Diversas padarias e lanchonetes vendem o "cafezinho" e o "cafezinho com leite". Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, **A** e **B**, que vendem esses produtos com um volume de 60 mL, conforme mostra a tabela abaixo.

Produto	A	B
Cafezinho	R$ 2,00	R$ 3,00
Cafezinho com leite	R$ 2,50	R$ 4,00

a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento **A** para o estabelecimento **B**, para os dois produtos.

b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos conforme indica a figura abaixo. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento **B**, calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite.



Cafezinho

Cafezinho com leite

19. AFA-SP 2020 Três amigas: Tereza, Ana e Kely entram juntas numa loja de chocolates. A tabela abaixo indica a quantidade de caixas e o tipo de trufas que cada uma comprou na loja.

	Trufas de morango	Trufas de nozes	Trufas de coco
Tereza	3	7	1
Ana	4	10	1
Kely	1	1	1

Com as compras, Tereza gastou 315 reais e Kely gastou 105 reais.

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) O valor da caixa de trufas de coco é o dobro do valor da caixa de trufas de nozes.

( ) Ana gastou o quádruplo do que Kely gastou.

( ) As três juntas gastaram menos de 800 reais.

Sobre as proposições, tem-se que

a) todas são verdadeiras.

b) apenas uma é falsa.

c) apenas duas são falsas.

d) todas são falsas.

20. Fuvest-SP Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

21. Unifesp 2017 O gasto calórico no exercício da atividade física de corrida é uma função de diversas variáveis, porém, a fórmula simplificada pode dar uma estimativa desse gasto.

Gasto calórico (em calorias por hora) = velocidade da corrida (em km/h) × massa do indivíduo (em kg)

Considere que, no exercício da corrida, o consumo de oxigênio, que em repouso é de 3,5 mL por quilograma de massa corporal por minuto, seja multiplicado pela velocidade (em km/h) do corredor.

a) Turíbio tem massa de 72 kg e pratica 25 minutos de corrida por dia com velocidade constante de 8 km/h. Calcule o gasto calórico diário de Turíbio com a prática dessa atividade.

b) Seja c o consumo de litros de oxigênio em uma hora de corrida de um indivíduo de massa m (em kg) em velocidade constante v (em km/h). Calcule o valor da constante $\dfrac{c}{m \cdot v}$ na prática de uma hora de corrida desse indivíduo.

22. ITA-SP 2019 Considere as seguintes afirmações:

I. se n é um número natural, então

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

II. se x é um número real e $x^3 + x + 1 = 0$, então

$$x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0.$$

III. se a, b e c são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\dfrac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

É (são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) todas.

23. ITA-SP 2018 Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

a) $5x^2 + 7x + 9$
b) $3x^2 + 6x + 8$
c) $13x^2 + 16x + 12$
d) $7x^2 + 5x + 9$
e) $9x^2 + 3x + 10$

24. IME-RJ 2019 Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

a) 23
b) 26
c) 29
d) 32
e) 39

25. Sendo A e B dois números naturais tais que $A^2 - B^2 = 2027$, a soma dos algarismos de $A^2 + B^2$ é:

a) 20
b) 25
c) 28
d) 29
e) 31

26. Demonstre que $\sqrt{101} - 10 < \dfrac{1}{20} < 10 - \sqrt{99}$.

27. Obmep 2019 Dois estudantes precoces do Nível 3 participaram de um torneio de xadrez universitário. Cada participante joga contra todos os outros exatamente uma vez. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale 0,5 ponto e uma derrota vale 0 ponto. A soma das pontuações dos dois estudantes do Nível 3 é 6,5. Todos os estudantes universitários obtiveram a mesma pontuação. Quantos estudantes universitários participaram da competição?

28. Fuvest-SP 2020 A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

a) R$ 2000,00
b) R$ 3200,00
c) R$ 3600,00
d) R$ 4000,00
e) R$ 4800,00

29. IFRS 2020 O piso de uma garagem retangular tem de área 42 m². As medidas dos lados desse piso, em metros, são $x + 2$ e $2x - 1$. Quais são as medidas dos lados?

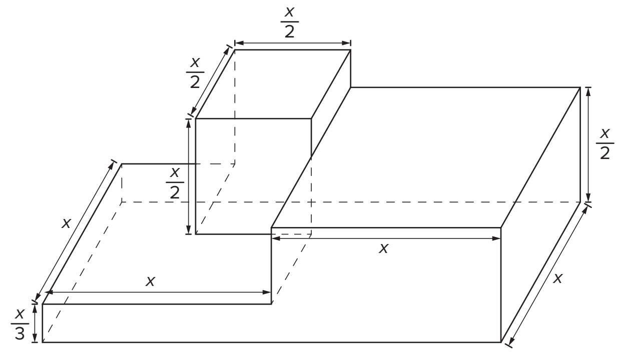
a) 6 e 7.
b) 9 e 7.
c) 3 e 14.
d) 6 e 10.
e) 7 e 8.

30. EPCar-MG 2021 Sejam a e b, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, as raízes da equação $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.

É correto afirmar que $\left[\left(\dfrac{1}{a+b}\right)^{-ab}\right]^{a^2+b^2}$ é igual a

a) 12^2
b) 12^3
c) 12^5
d) 12^4

31. EPCar-MG 2021 Na EPCAR, durante o ano letivo, os alunos das três séries se enfrentam em uma competição esportiva denominada "Troféu Tenente Lima Mendes". Para o ano de 2021, o comandante ordenou que fosse construído um novo pódio no qual a posição mais alta tenha forma de um cubo e as posições inferiores tenham forma de paralelepípedos retos retângulos conforme figura abaixo, com dimensões indicadas numa mesma unidade de medida.



Depois de construído em sua totalidade, o pódio deverá ser pintado, com exceção da parte inferior que estará apoiada no solo.
A expressão que melhor representa a área a ser pintada, em função de x, em unidade de área, é

a) $\dfrac{35x^2}{6}$
b) $\dfrac{67x^2}{12}$
c) $\dfrac{11x^2}{2}$
d) $\dfrac{23x^2}{2}$

32. EPCar-MG 2020 Considere as expressões P e Q, com os números a, b e c reais positivos e distintos entre si.

$$P = \frac{(a^6 + b^6 + c^6)^2 - (a^6 - b^6 - c^6)^2}{b^6 + c^6}$$

$$Q = \frac{(b^{-1} - a^{-1})^{-1} - (b^{-1} + a^{-1})^{-1}}{(a^{-1} + b^{-1})^{-1} - (a^{-1} - b^{-1})^{-1}}$$

A expressão $\sqrt{Q\sqrt{P}}$ é representada por

a) $b\sqrt{2a}$
b) $a\sqrt{2b}$
c) $a\sqrt{\dfrac{b}{2}}$
d) $\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{b}{2}}$

FRENTE 2

33. EPCar-MG 2020 Seja $S \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução, na variável x, da equação irracional dada por

$$\sqrt[4]{(x^2+x)^4} + \sqrt[8]{(x^2+x)^4} = 420$$

Sugestão: use $(x^2 + x) = y$. Analise as alternativas e marque a **FALSA**.

a) Os elementos de S são tais que $S \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.
b) O produto dos elementos de S é um número positivo.
c) A soma do maior e do menor elemento de S é igual a -1.
d) A soma dos elementos de S é igual a 2.

34. EPCar-MG 2020 Para homenagear os aniversariantes do mês de junho, um grupo de alunos das turmas FOX e GOLF do esquadrão SABRE decidem fazer um churrasco comemorativo e dividir a despesa total. Na véspera do churrasco, 6 desses alunos foram convocados pelo seu Comandante para uma atividade que os impediu de comparecerem ao evento comemorativo, sendo esses 6 alunos excluídos do rateio da despesa total. Com a ausência desses 6 alunos, foi cobrado de cada um dos demais, certo valor a mais. Ao fazerem o rateio, os alunos perceberam que a despesa total era igual ao valor cobrado a mais de cada um dos alunos que contribuíram, multiplicado por 180. Se o número de alunos que foram ao churrasco é k, então, a soma dos algarismos de k é

a) 3.
b) 5.
c) 7.
d) 9.

35. Obmep 2020 Considere os números reais p e q e a equação cúbica:

$$x^3 + px + q = 0$$

a) Se x_0 é uma raiz real da equação, então

$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + ax + b)$$

Verifique que $a = x_0$.

b) Verifique que $p^2 \geqslant 4x_0q$.

36. Obmep 2020 O professor M. A. Luco escreveu no quadro a expressão:

$$\frac{n^2 - 5n + 4}{n - 4}$$

Então, ele diz aos alunos que n pode ser qualquer número natural, com exceção de 4.

a) Qual o valor da expressão para $n = 1$?
b) Marcos substituiu n por um número natural e verificou que o valor da expressão é 5.
Marcos substituiu n por qual número?
c) Quais são os números naturais que não podem ser o valor numérico da expressão?

37. ITA-SP 2016 Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

38. ITA-SP A expressão $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^5 - \left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^5$ é igual a

a) $2\,630\sqrt{5}$
b) $2\,690\sqrt{5}$
c) $2\,712\sqrt{5}$
d) $1584\sqrt{15}$
e) $1604\sqrt{15}$

39. IME-RJ 2016 Seja a equação $n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49$. Determine todos os pares inteiros (m, n) que satisfazem a esta equação.

40. IME-RJ 2015 Seja $P(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ têm uma raiz em comum. Pode-se afirmar que para todo valor a e b

a) $P(-1)P(1) < 0$
b) $P(-1)P(1) = 0$
c) $P(-1) + P(1) = 2$
d) $P(0)P(1) = 0$
e) $P(0) + P(1) = 0$

41. IME-RJ 2014 Qual é o menor número?

a) $\pi \cdot 8!$
b) 9^9
c) $2^{2^{2^2}}$
d) 3^{3^3}
e) $2^{13} \cdot 5^3$

42. IME-RJ 2013 Considere as inequações abaixo:

I. $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$
II. $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$
III. $(a^2 - b^2) \geqslant (a - b)^4$

Esta(ão) correta(s), para quaisquer valores reais positivos de a, b e c, a(s) inequação(ões)

a) II apenas.
b) I e II apenas.
c) I e III apenas.
d) II e III apenas.
e) I, II e III.

43. Obmep 2020 Ache todos os valores de x satisfazendo

$$\frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}} = \frac{11}{5}$$

44. IME-RJ Considere o sistema

$$\begin{cases} xy + x - y = 5 \\ x^3y^2 - x^2y^3 - 2x^2y + 2xy^2 = 6 \end{cases}$$, onde x e y são números inteiros. O valor de $x^3 + y^2 + x^2 + y$ é:

a) 14
b) 18
c) 20
d) 32
e) 38

45. IME-RJ 2022 Quantos pares ordenados (x, y) de números inteiros satisfazem a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{23}$?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

46. ITA-SP Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor “flex” (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor “flex” sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 567 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

a) 246.
b) 252.
c) 260.
d) 268.
e) 284.

47. UEPG-PR 2017 Fabio fez compras em duas lojas. Na 1ª loja, gastou a metade do que tinha na carteira, mais R$ 3,00 de estacionamento. Na 2ª loja, gastou a terça parte do que restou na carteira, mais R$ 5,00 de estacionamento. Se ele ainda ficou com R$ 53,00 na carteira, assinale o que for correto.

01 Ele tinha mais de R$ 200,00 na carteira.

02 Na 2ª loja, ele gastou 20% do que tinha inicialmente.

04 Na 1ª loja, ele gastou mais de R$ 85,00.

08 No total, ele gastou menos de R$ 130,00.

Soma:

48. IME-RJ Seja x um número real ou complexo para o qual $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. O valor de $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

49. IME-RJ Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes da equação $y^{\frac{3}{2}} + 5y + 2y^{\frac{1}{2}} + 8 = 0$

a) 5
b) 2
c) 21
d) $5^{\frac{1}{2}}$
e) 0,5

50. Se a equação $a(2x + 3) + 3bx = 12x + 5$ possui infinitas soluções para x, determine os valores de a e b.

51. Se a, b, c são constantes positivas, resolva a equação $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$.

52. Se os números positivos a, b, c satisfazem $abc = 1$, resolva a equação em x: $\frac{2ax}{ab+a+1} + \frac{2bx}{bc+b+1} + \frac{2cx}{ca+c+1} = 1$.

53. Mostrar que $\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$.

54. O valor da expressão: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} + \ldots + \frac{1}{10+\sqrt{99}}$ é:

a) -10
b) -9
c) $\frac{1}{9}$
d) 9
e) 10

55. ITA-SP Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

a) $x = 2$ não é raiz de p.
b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.
c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.
d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.
e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

56. ITA-SP 2019 Considere as seguintes afirmações:

I. Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$, então $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$ são as raízes da equação $y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

II. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

III. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É (são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas II e III.
e) todas.

FRENTE 2

57. Sendo x e y dois números reais positivos quaisquer, considere a expressão: $E = \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}$.

a) Use o fato de que $E^2 \geqslant 0$ quaisquer que sejam x e y, para obter o valor mínimo da soma $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

b) Prove que $(x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geqslant 4$ para quaisquer x e y reais positivos.

c) Encontre o valor mínimo da expressão $F = x^{-1} + (2\,020 - x)^{-1}$.

58. Considere o conjunto J de todos os números irracionais da forma $x = a + b\sqrt{2}$ em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Um elemento x do conjunto J é denominado unidade de J se, e somente se, $\frac{1}{x}$ também é elemento do conjunto J.

a) Mostre que o número $x = 3 - 2\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.

b) Mostre que o número $x = 5 + 3\sqrt{2}$ é uma unidade do conjunto J.

c) Encontre os valores de y para os quais $x = y + 5\sqrt{2}$ é uma unidade de J.

59. Sendo S o conjunto solução da equação $(k - 1)x^2 - 2(k - 13)x + (11 - k) = 0$ na variável x, em que o parâmetro k é um número real, determine:

a) Todos os valores de k tais que S é um conjunto unitário.

b) O conjunto S para cada valor de k encontrado no item anterior.

60. Mostre que a equação $x^3 - 6 = \sqrt[3]{x + 6}$ admite apenas uma solução real.

BNCC em foco

EM13MAT302

1. Para projetar um arco parabólico, que será construído na entrada de uma cidade, um engenheiro estima que o formato do arco será semelhante ao gráfico da função $f(x) = -x^2 - 4x + 5 = 0$, em um plano cartesiano no qual o chão é representado pelo eixo horizontal e cada unidade de medida de comprimento do plano corresponde a 1 metro no real. Após a construção, a distância, em metros, entre as extremidades do arco será:

a) 4 m

b) 5 m

c) 6 m

d) 7 m

e) 8 m

EM13MAT301

2. Um fabricante vende a unidade de certo produto por R$ 110,00. O custo total consiste em uma taxa fixa de R$ 7 500,00 somada ao custo de produção de R$ 60,00 por unidade.
Se forem vendidas 100 unidades o fabricante terá

a) lucro de R$ 3 000,00.

b) lucro de R$ 25 000,00.

c) prejuízo de R$ 4 000,00.

d) prejuízo de R$ 2 500,00.

e) prejuízo de R$ 25 000,00.

EM13MAT103

3. Uma mesa retangular com área de 16 200 cm^2 tem a medida do comprimento equivalente a duas vezes a medida da sua largura. As dimensões dessa mesa, em metros, são:

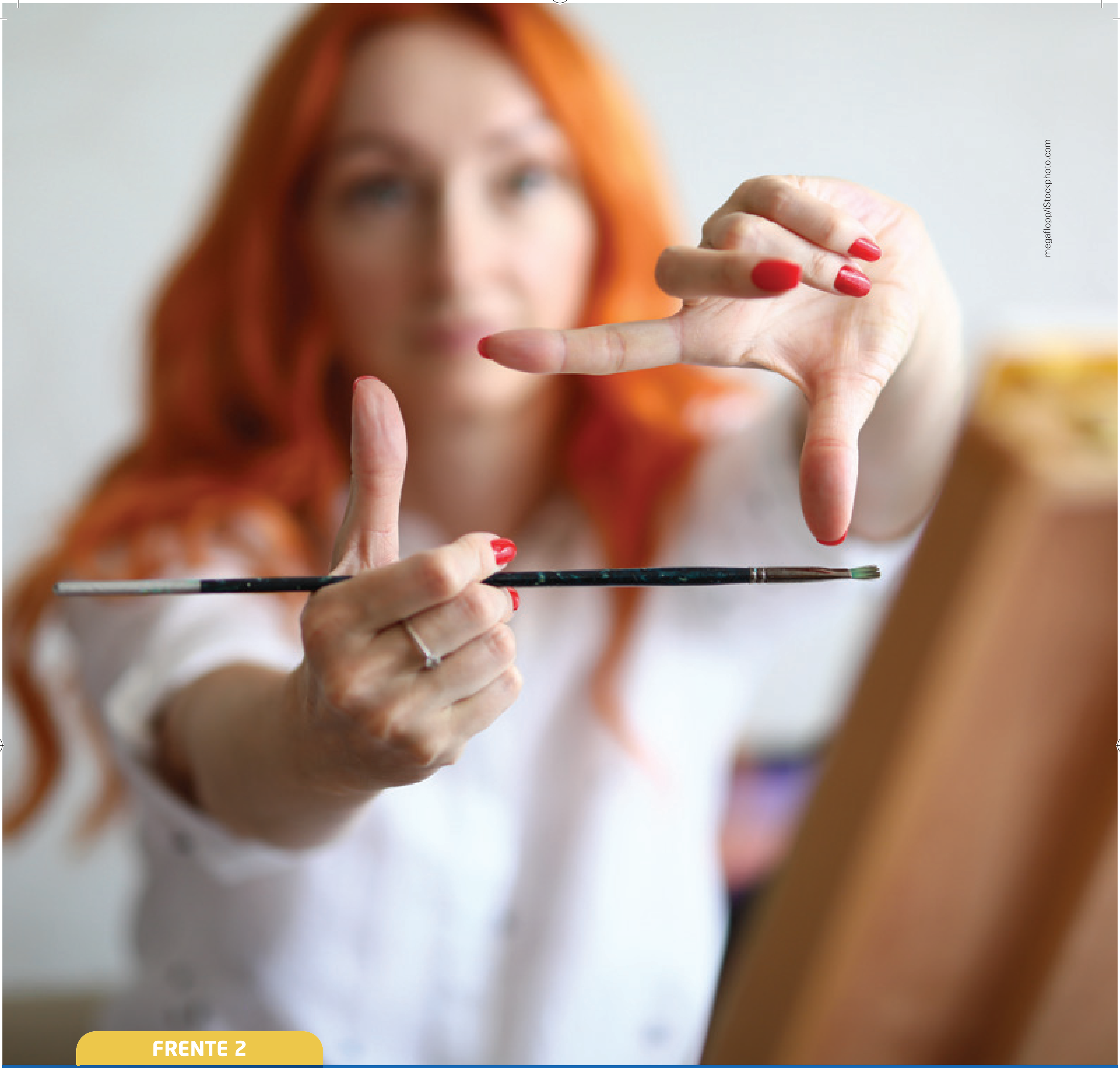
a) 1,6 m e 0,9 m.

b) 1,8 m e 9 m.

c) 9 m e 1,6 m.

d) 0,90 m e 1,80 m.

e) 0,90 m e 16 m.



megaflopp/iStockphoto.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

3

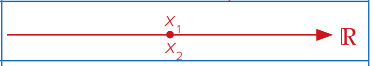
Razões e proporções

Nas artes visuais muitas vezes os artistas usam a ideia de razão e proporção para reproduzir uma imagem do mundo real em seu trabalho artístico. Por exemplo, uma artista pode pintar a representação de uma árvore de 4 metros em um quadro de 30 centímetros, ou um escultor pode produzir uma estátua de 5 metros para representar uma pessoa de 1,60 metro.

O estudo das razões e proporções possibilita compreender o valor de uma grandeza de forma relativa, estabelecendo parâmetros de comparação próprios, que permitem avaliações mais precisas a respeito da magnitude dos números.

Comparando números

O princípio da tricotomia é uma característica própria do conjunto dos números reais. Segundo esse princípio, dados os números reais x_1 e x_2, só há três situações a se considerar:

x_1 é menor que x_2	$x_1 < x_2$	
x_1 é igual a x_2	$x_1 = x_2$	
x_1 é maior que x_2	$x_1 > x_2$	

O símbolo $=$ indica uma relação de igualdade. Os símbolos $<$ e $>$ indicam relações de ordem e podem ser lidos em qualquer sentido.

Relação de ordem	Leitura da esquerda para a direita	Leitura da direita para a esquerda
$x_1 < x_2$	x_1 é menor do que x_2	x_2 é maior do que x_1
$x_1 > x_2$	x_1 é maior do que x_2	x_2 é menor do que x_1

Por esse motivo, dependendo do sentido da leitura, fica estabelecida uma ordem crescente ou decrescente, qualquer que seja o símbolo usado para representar a relação.

Com apenas três situações, a negação de qualquer uma dessas relações equivale à reunião das outras duas. Assim, para a negação de uma relação de ordem, deve-se considerar também a relação de igualdade.

- A negação de $x_1 < x_2$ abrange tanto $x_1 > x_2$ quanto $x_1 = x_2$ e é representado por $x_1 \geqslant x_2$.
- A negação de $x_1 > x_2$ abrange tanto $x_1 < x_2$ quanto $x_1 = x_2$ e é representado por $x_1 \leqslant x_2$.

Por fim, para a negação da igualdade basta considerar ambas as relações de ordem.

- O contrário de $x_1 = x_2$ abrange tanto $x_1 < x_2$ quanto $x_1 < x_2$ e é representado por $x_1 \neq x_2$.

Exercício resolvido

1. Considere as seguintes relações numéricas:

I. $3 \leqslant 5$

II. $4 \geqslant 4$

III. $2 \geqslant 6$

É correto afirmar que:

a) todas as afirmações são verdadeiras.
b) apenas a afirmação I é verdadeira.
c) apenas a afirmação II é verdadeira.
d) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
e) todas as afirmações são falsas.

Resolução:

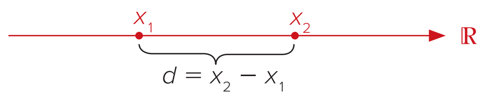
Relação numérica I: verdadeira. $3 \leqslant 5$ é a negação de $3 > 5$, que é falso.
Relação numérica II: verdadeira. $4 \leqslant 4$ é a negação de $4 > 4$, que é falso.
Relação numérica III: falsa. $2 \geqslant 6$ é a negação de $2 < 6$, que é verdadeiro.
Resposta: alternativa D.

Nosso estudo avança de modo a se obter de valores reais x_1 e x_2 outros números capazes de informar e formar escalas comparativas entre as infinitas possibilidades em que $x_1 \neq x_2$.

Esses terceiros números, destinados a avaliar quanto x_1 **não é igual a** x_2, são o que chamamos de razões matemáticas. Assim, por princípio, a razão entre dois números reais deve informar algo sobre a não igualdade de dois números reais, possibilitando que se saiba algo a respeito deles, mesmo sem saber quais são os seus valores.

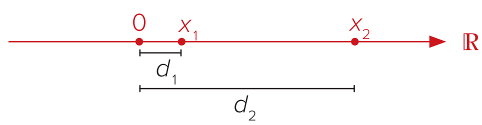
Basicamente, há duas operações matemáticas capazes de obter razões a partir de diferentes números reais x_1 e x_2: a subtração e a divisão.

O resultado da subtração é a diferença dos números x_1 e x_2. O resto, resíduo ou diferença de dois números informa quão distante x_1 e x_2 estão localizados no eixo real.



Subtraindo os anos de nascimento e morte de uma pessoa, por exemplo, obtém-se o seu tempo de vida, o que permite inferências a seu respeito.

Além da diferença, outra operação cujo resultado possibilita inferências sobre valores não necessariamente conhecidos é a divisão. O quociente, resultado da divisão entre os números x_1 e x_2, permite outra forma de comparação numérica dada em termos de multiplicidade.



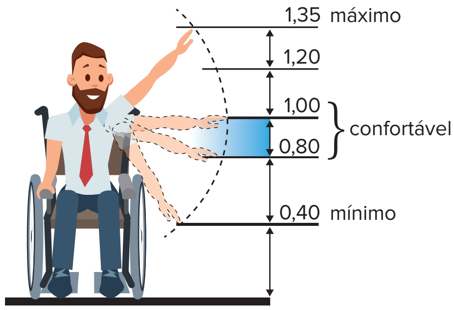
O que ocorre aqui, de fato, é uma comparação da distância do número zero ao número x_1 com a distância do número zero ao número x_2. Comparando-se essas distâncias, é possível saber, por exemplo, se uma quantia vale o dobro da outra, ou o triplo, a metade, três quartos, 25% etc.

Esse tipo de comparação permite tantas possibilidades informativas a respeito de números diferentes que, no estudo da Matemática, o termo razão está mais frequentemente associado ao quociente de uma divisão, do que à diferença de uma subtração.

Exercício resolvido

2. **Enem** Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades.

Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é

a) 0,20 m e 1,45 m.
b) 0,20 m e 1,40 m.
c) 0,25 m e 1,35 m.
d) 0,25 m e 1,30 m.
e) 0,45 m e 1,20 m.

Resolução:

De acordo com a imagem, a pessoa consegue alcançar uma altura x, em metros, tal que:
$0{,}40 < x < 1{,}35$
Como $0{,}40 < 0{,}45$ e $1{,}20 < 1{,}35$, a alternativa **e** é a única proposta que atenderá ao comprador.
Resposta: alternativa E.

Comparação por subtração

Dados os números reais x_1 e x_2, da relação de igualdade matemática, há apenas dois casos a se considerar:

- Eles têm o mesmo valor: $x_1 = x_2$.
- Eles não têm o mesmo valor: $x_1 \neq x_2$.

Algebricamente, a operação de subtração permite expressar cada caso de outra maneira:

- $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$
- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0$

Dizer que x_1 e x_2 são iguais de fato equivale a dizer que não há diferença entre x_1 e x_2, mas também é correto, nesse caso, dizer que a diferença entre x_1 e x_2 é zero.

Lembrando que, em termos matemáticos, diferença é o nome dado ao resultado de uma subtração, que não se trata de uma operação comutativa, quando os números x_1 e x_2 não são iguais podem ser consideradas duas diferenças distintas:

- $x_1 - x_2$
- $x_2 - x_1$

A letra grega Δ (delta maiúscula) é bastante usada para representar diferenças entre números reais, e, como as duas diferenças possíveis são opostas, quando uma delas é igual a Δ, a outra é igual a $-\Delta$.

A diferença entre dois valores específicos de uma quantidade indicada por x também costuma ser denominada variação de x. Além disso, tais variações são representadas algebricamente por Δx.

Variação orientada e absoluta

A variação de uma quantidade x que assume os valores x_1 e x_2 pode ser calculada de duas maneiras distintas: $(x_1 - x_2)$ ou $(x_2 - x_1)$, dependendo da situação em que se aplica.

Imagine estar numa sala com o ar-condicionado regulado para 22 °C e depois ter de sair para a rua, em um dia ensolarado, a uma temperatura de 30 °C.

Nessa situação, tem-se $x_1 = 22$ °C e $x_2 = 30$ °C, e a variação térmica enfrentada é de +8 °C. Isso significa, portanto, sentir a temperatura aumentar em 8 °C:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 30\ °C - 22\ °C = 8\ °C$$

Já para uma pessoa que veio da rua e entrou na sala, a variação térmica é −8 °C, pois a sensação é de que a temperatura diminui 8 °C:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 22\ °C - 30\ °C = -8\ °C$$

A variação absoluta de uma quantidade é definida como o módulo das variações orientadas ou relativas:

$$|\Delta x| = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

Portanto, em ambas as situações, pode-se dizer que houve uma variação absoluta de 8 °C na temperatura dos ambientes citados.

Note que o conhecimento da variação de 8 °C nas temperaturas é suficiente para se ter uma noção do choque térmico enfrentado por quem muda de um ambiente para o outro, mesmo sem conhecer a temperatura exata de cada ambiente.

Exercício resolvido

3. Enem O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,00 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.
Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que ele precisa.
Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

a) 68,21 mm.
b) 68,102 mm.
c) 68,02 mm.
d) 68,012 mm.
e) 68,001 mm.

Resolução:

Quanto mais próximos são dois números reais, menor é a diferença absoluta entre eles.
Calculando as diferenças absolutas, em mm, dos valores disponíveis para o valor procurado:

68,210 − 68,000 = 0,210
68,102 − 68,000 = 0,102
68,020 − 68,000 = 0,020
68,012 − 68,000 = 0,012
68,001 − 68,000 = 0,001
Como $0{,}001 < 0{,}012 < 0{,}020 < 0{,}102 < 0{,}210$, a menor diferença é 0,001.
Resposta: alternativa E.

Saiba mais

Conheça alguns conceitos básicos de Matemática finaceira:
Lucro nominal: Se um comerciante compra uma mercadoria e a revende por um valor maior, a diferença positiva entre os valores da venda e da compra é chamada de lucro nominal.

Venda > Compra ⇒ Lucro = Venda − Compra

Prejuízo nominal: Se um comerciante compra uma mercadoria e a revende por um valor menor, a diferença positiva entre os valores da compra e da venda é chamada de prejuízo nominal.

Venda < Compra ⇒ Prejuízo = Compra − Venda

No caso das empresas, as entradas de capital financeiro contabilizadas em determinado período totalizam o que chamamos de receita da empresa. Em contrapartida, empresas arcam com uma grande diversidade de custos: matéria-prima, salários, aluguel, impostos etc.
Assim, quando a receita supera os custos em determinado período, tem-se:
Lucro = Receita − Custos
Quando os custos superam a receita em determinado período, tem-se:
Prejuízo = Custos − Receita


cifotart/iStockphoto.com

Atenção

Em termos algébricos, lucros e prejuízos nominais são variações absolutas de valores monetários diferentes. Também se pode entender o prejuízo como um lucro negativo e vice-versa.

Variação temporal

Quando a variação decorre dos valores assumidos por x_1 e x_2 ao longo do tempo, de modo que x_2 ocorre após x_1, é comum designá-los valores final e inicial respectivamente.

Em acordo com a própria natureza do tempo, a variação deve ser considerada do seguinte modo:

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$$

Exercícios resolvidos

Texto para responder às questões **4** e **5**.

A população atual de um país já atingiu a marca dos 700 milhões e, segundo pesquisas, para o reequilíbrio dos índices de natalidade e mortalidade, a média mundial de filhos por mãe teria de baixar de 2,5 para 2,1. Se isso acontecer, a estabilização demográfica será alcançada em aproximadamente um século, quando a população do país terá chegado a 1 bilhão de pessoas.


hobbit/Shutterstock.com

4. De acordo com o texto, o aumento estimado da população desse país, até que se atinja a estabilização demográfica, será de:
a) 100 milhões de pessoas.
b) 300 milhões de pessoas.
c) 400 milhões de pessoas.
d) 700 milhões de pessoas.
e) 1 bilhão de pessoas.

Resolução:

Atualmente: $x_{inicial} = 700\,000\,000$ pessoas
Um século depois: $x_{final} = 1\,000\,000\,000$ pessoas
Assim, a variação na população será:
$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$
$\Delta x = 1\,000\,000\,000 - 700\,000\,000 = 300\,000\,000$
Resposta: alternativa B.

5. Qual deve ser a variação da média de filhos por mãe, para o reequilíbrio dos índices de natalidade e mortalidade?
a) 2,4
b) 0,4
c) 0,1
d) −0,2
e) −0,4

Resolução:

Atualmente: $y_{inicial} = 2{,}5$ filhos por mãe
Um século depois: $y_{final} = 2{,}1$ filhos por mãe
Assim:
$\Delta y = y_{final} - y_{inicial} = 2{,}1 - 2{,}5 = -0{,}4$
Resposta: alternativa E.

Para responder às questões **6** e **7**, considere a tabela a seguir, que apresenta dados sobre a evolução de preços do barril de petróleo em certa localidade.

Preço do barril de petróleo por ano

Ano	Preço (em U$)
1967	3
1979	22
2005	40
2011	100

Fonte: Dados fictícios.

6. Qual é o aumento no preço do barril de petróleo durante todo o período considerado na tabela?

a) U$ 97 **c)** U$ 70 **e)** U$ 7
b) U$ 90 **d)** U$ 9

Resolução:

Em 1967, o preço, em dólares, era $\text{Preço}_{\text{inicial}} = 3$.
Em 2011, o preço, em dólares, chegou a $\text{Preço}_{\text{final}} = 100$.
Assim, a variação no preço durante o período considerado na tabela, em dólares, foi de:

$\Delta\text{Preço} = \text{Preço}_{\text{final}} - \text{Preço}_{\text{inicial}} = 100 - 3 = 97$

Resposta: alternativa A.

7. Em quanto tempo o preço do petróleo subiu de 22 para 100 dólares o barril?

a) 78 anos **c)** 32 anos **e)** 6 anos
b) 44 anos **d)** 17 anos

Resolução:

O preço estava em 22 dólares em $t_{\text{inicial}} = 1979$.
O preço chegou a 100 dólares em $t_{\text{final}} = 2011$.
Assim temos, em anos:

$\Delta t = t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}} = 2011 - 1979 = 32$

Resposta: alternativa C.

! Atenção

A subtração não é uma operação comutativa.

$$a \neq b \Leftrightarrow a - b \neq b - a$$

Para incorporar essa propriedade, representa-se a diferença absoluta pelo módulo da diferença, assim:

$$|a - b| = |b - a|$$

A subtração também não é uma operação associativa.

$$(a - b) - c \neq a - (b - c)$$

Para contornar a ausência dessa propriedade, pode-se aplicar alguma das seguintes identidades:

$$(a - b) - c = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$
$$(a - b) - c = a - (b + c)$$
$$a - (b - c) = (a + c) - b$$

Comparação por quociente

Voltemos ao fato de que dados os números reais x_1 e x_2 diferentes de zero:

- ou eles têm o mesmo valor: $x_1 = x_2$
- ou eles não têm o mesmo valor: $x_1 \neq x_2$

Agora, a operação de divisão possibilita expressar algebricamente cada caso de outra maneira:

- $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = 1$
- $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} \neq 1$

Assim, desde que seus valores não sejam nulos, dizer que x_1 e x_2 são iguais equivale a dizer que sua razão por quociente é unitária.

Lembrando que a divisão não é uma operação comutativa, quando os números x_1 e x_2 não são iguais a zero nem iguais um ao outro, há dois quocientes diferentes possíveis: $\dfrac{x_1}{x_2}$ e $\dfrac{x_2}{x_1}$.

É comum utilizar letras como q e k para representar razões por meio de quocientes de números reais e, como as duas razões possíveis são recíprocas, quando uma delas é indicada por k, a outra fica indicada por k^{-1}. Exemplos no quadro abaixo.

k	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	0,5	4	2,5	100	80%
k^{-1}	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{7}$	2	0,25	0,4	0,01	125%

Saiba mais

As razões também estão presentes nas sequências numéricas, acompanhe.

Uma sequência numérica crescente ou decrescente, em que a diferença de dois termos consecutivos é constante, é denominada Progressão Aritmética (PA). Em uma PA, a razão é definida como a constante que se obtém pela subtração de dois termos consecutivos:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n) \text{ é uma PA}$$
$$\text{Razão} = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$$

Exemplos:

a) (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...) é uma PA de razão 2, pois: $6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 12 - 10 = 14 - 12 = 16 - 14 = 2$

b) (30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65) é uma PA de razão 5, pois: $35 - 30 = 40 - 35 = 45 - 40 = 50 - 45 = 55 - 50 = 60 - 55 = 65 - 60 = 5$

c) (600, 500, 400, 300, 200, 100, 0) é uma PA de razão -100, pois: $500 - 600 = 400 - 500 = 300 - 400 = 200 - 300 = 100 - 200 = 0 - 100 = -100$

Uma sequência numérica em que é constante o quociente de dois termos consecutivos denomina-se Progressão Geométrica (PG). Em uma PG, a razão é definida como a constante que se obtém na divisão de dois termos consecutivos:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n) \text{ é uma PG}$$
$$\text{Razão} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Exemplos:

a) (4, 8, 16, 32, 64, 128) é uma PG de razão 2, pois:
$$\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \frac{128}{64} = 2$$

b) (2, 10, 50, 250, 1 250, 6 250) é uma PG de razão 5, pois:
$$\frac{10}{2} = \frac{50}{10} = \frac{250}{50} = \frac{1250}{250} = \frac{6250}{1250} = 5$$

c) (2, −6, 18, −54, 162) é uma PG de razão −3, pois:
$$\frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = \frac{-54}{18} = \frac{162}{-54} = -3$$

d) (48, 24, 12, 6, 3) é uma PG de razão 0,5, pois:
$$\frac{24}{48} = \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

FRENTE 2

Razões simples

Os quocientes de duas grandezas de mesma espécie são denominados razões simples, sejam essas grandezas geométricas, físicas, químicas etc.

Razões simples podem ser obtidas efetuando-se a divisão, sem resto, entre valores de dois comprimentos, duas áreas, dois volumes, duas massas, duas forças, dois preços, duas densidades, duas populações e muito mais.

As razões simples são valores adimensionais, ou seja, que não possuem unidade. Elas indicam apenas as relações de multiplicidade existente entre as grandezas divididas. Quando o maior valor é dividido pelo menor, a relação de multiplicidade ($k > 1$) obtida entre grandezas geométricas pode ser interpretada como a quantidade de vezes que o menor valor cabe no maior. Observe os exemplos:

- A razão $\frac{48\text{ m}}{12\text{ m}} = 4$ indica, por exemplo, que cabem **quatro** veículos com 12 m de comprimento em uma garagem com 48 m de comprimento.
- A razão $\frac{20\text{ m}^2}{0{,}5\text{ m}^2} = 40$ indica, por exemplo, que para cobrir uma superfície de 20 m^2 de área são suficientes **quarenta** pisos de cerâmica com 0,5 m^2 cada um.
- A razão $\frac{700\text{ mL}}{200\text{ mL}} = 3{,}5$ indica, por exemplo, que o conteúdo em uma garrafa com 700 mL enche **três e meio** copos de 200 mL.

! Atenção

Para o estudo de razão, retome as propriedades e operações com frações.

I. Simplificação de frações.
II. Adição e subtração de frações.
III. Multiplicação de frações.
IV. Fração de frações.

Exercícios resolvidos

8. Considere a tabela a seguir, utilizada anteriormente nos exercícios resolvidos **6** e **7**.

Preço do barril de petróleo por ano

Ano	Preço (em U$)
1967	3
1979	22
2005	40
2011	100

Fonte: Dados fictícios.

Quantos barris de petróleo poderiam ser adquiridos em 1967 pelo preço de um único barril em 2011?

a) 66
b) 60
c) 33
d) 30
e) 6

Resolução:

Para responder a essa pergunta, basta calcular o quociente entre o preço de 2011 e o preço em 1967, mas, como essa razão não é expressa por um número inteiro $\left(\frac{100}{3} = 33{,}333...\right)$, é comum que se dê como resposta um valor inteiro aproximado, ou seja, poderiam ser adquiridos 33 barris.

Resposta: alternativa C.

9. **Enem** A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista Veja. Ano 41, nº 25, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

a) 406
b) 1 334
c) 4 002
d) 9 338
e) 28 014

Resolução:

Geometricamente, as informações apresentadas nessa questão são razões entre os volumes de alguns planetas, e o que se solicita também é outra razão simples entre esses volumes, afinal não seria fisicamente possível colocar um planeta dentro do outro.

Como nenhum volume é fornecido explicitamente, recomenda-se a modelagem algébrica. Assim, representar os volumes dos planetas Mercúrio, Terra, Marte, Júpiter e Netuno, respectivamente, pelas siglas Me, Te, Ma, Ju e Ne, possibilita expressar as razões dadas no enunciado da seguinte maneira:

Marte é o segundo menor e nele cabe o equivalente a três Mercúrios: $Ma = 3 \cdot Me \Rightarrow \frac{Ma}{Me} = 3$

Terra é o único com vida e comporta o equivalente a sete Martes: $Te = 7 \cdot Ma \Rightarrow \frac{Te}{Ma} = 7$

Netuno é o quarto maior e nele cabe o equivalente a 58 Terras: $Ne = 58 \cdot Te \Rightarrow \frac{Ne}{Te} = 58$

Júpiter, o maior dos planetas, comporta o equivalente a 23 Netunos: $Ju = 23 \cdot Ne \Rightarrow \frac{Ju}{Ne} = 23$

Assim, a razão solicitada de quantas Terras podem ser comportadas por Júpiter deve ser o valor da fração $\frac{Ju}{Te}$.

Para obter esse valor, basta analisar as razões $\frac{Ne}{Te}$ e $\frac{Ju}{Ne}$, pois nessa multiplicação ocorre o cancelamento do volume do planeta Netuno. Assim:

$$\frac{\cancel{Ne}}{Te} \cdot \frac{Ju}{\cancel{Ne}} = \frac{Ju}{Te} \Rightarrow 58 \cdot 23 = \frac{Ju}{Te} \Rightarrow \frac{Ju}{Te} = 1\,334$$

Resposta: alternativa B.

O conceito de taxa

Quando se calcula uma razão simples, dividindo o menor valor pelo maior, a relação de multiplicidade ($k < 1$) obtida entre grandezas geométricas pode ser interpretada como uma taxa unitária. Taxas unitárias indicam qual parte do maior valor é representada pelo menor valor. Como se o maior dos valores fosse adotado para ser a unidade de comparação. Observe os exemplos:

- A razão $\frac{1{,}40\text{ m}}{4{,}20\text{ m}} = \frac{1}{3}$ indica, por exemplo, que um poste com 1,4 m tem apenas **um terço** da altura de um poste com 4,2 m.
- A razão $\frac{80\text{ cm}^2}{200\text{ cm}^2} = 0{,}4$ indica, por exemplo, que uma folha de papel com 80 cm^2 cobre apenas **quatro décimos** de um mural de 200 cm^2.
- A razão $\frac{90\text{ mL}}{750\text{ mL}} = 0{,}12$ indica, por exemplo, que 90 mL de água ocupam apenas **12 centésimos** de uma garrafa com 750 mL de capacidade.

Razões da parte para o todo são taxas que podem ser expressas por números racionais na forma fracionária ou decimal, havendo ainda uma terceira representação, que é a forma percentual. As formas decimais e percentuais muitas vezes admitem aproximações:

- $\frac{1}{3} = 0{,}333... \cong 33\%$
- $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$
- $\frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%$

No estudo da demografia são muito comuns os dados na forma de quociente. Quando se trata do quociente entre populações, as taxas demográficas obtidas são razões simples.

Fazendo algumas aproximações, pode-se considerar que em meados de 2010 a população da China tenha alcançado 1,4 bilhão de habitantes e, nesse mesmo período, a população mundial tenha atingido a incrível marca de 7 bilhões de habitantes. A razão entre as populações da China e do mundo é $q = \frac{1\,400\,000\,000}{7\,000\,000\,000}$ que, em sua forma irredutível, equivale a $q = \frac{1}{5}$. Desse valor, conclui-se que em meados de 2010 a China era povoada por um de cada cinco habitantes do planeta ou que, a cada cinco habitantes do planeta, um vivia na China.

Embora o decimal 0,2 represente o mesmo número que a fração $\frac{1}{5}$, não é comum afirmar, por exemplo, que a China era povoada por 0,2 de cada habitante do planeta. Aqui se percebe a utilidade da representação percentual, que pode ser obtida multiplicando-se por 100 a taxa e acrescentando-se o símbolo % ao resultado:

$$0{,}2 = 0{,}2 \cdot 100\% = 20\%$$

É mais compreensível transmitir a razão dessas populações usando a taxa percentual, pois a afirmação de que a China era povoada por 20% dos seres humanos é menos abstrata que a anterior, pois se pode imaginar, em termos de números inteiros, que 20 de cada 100 habitantes do planeta viviam na China, em meados de 2010.

Estabelecendo relações

Muitas razões simples são usadas para indicar a composição de misturas. Em Química, o termo "título" é usado para nomear razões simples obtidas por quocientes de massas ou de volumes. Tanto o "título em massa" quanto o "título em volume" costumam ser apresentados como taxas percentuais. O título em massa, por exemplo, relaciona a massa de um soluto, substância que se dissolve, presente em cada unidade de massa de determinada solução. Essa taxa é representada pela letra grega τ (tau) e pode ser obtida pela fórmula:

$$\tau = \frac{m_1}{m}$$

Dado que:
$m_1 \rightarrow$ massa do soluto
$m \rightarrow$ massa da solução
Em embalagens de soro fisiológico, solução aquosa de NaCℓ (cloreto de sódio), podemos encontrar a porcentagem em massa de 0,9%, isso significa que existe 0,9 grama de NaCℓ para cada 100 gramas de solução.

Razões compostas

Quando se comparam quantidades de espécies diferentes, como distância e período de tempo ou massa e volume, por exemplo, a comparação deve sempre ser feita na forma de quociente e seu resultado é uma razão composta.

Nesses casos, embora a razão obtida não indique relação de multiplicidade, muitas delas podem ser interpretadas como taxas médias de variação por unidade de tempo ou como concentrações médias por unidade de espaço. Por isso, as razões compostas sempre devem vir acompanhadas de suas unidades específicas, como m/s (metros por segundo) ou g/mL (gramas por mililitro), por exemplo.

Taxas periódicas

As razões compostas de quocientes, entre uma grandeza qualquer não temporal por uma quantidade de tempo, são bastante informativas e têm amplo uso no estudo de diversas ciências. Essas taxas periódicas são conhecidas, entre outros conceitos, como velocidades e vazões.

Sejam y_1 e y_2 dois valores reais de determinada grandeza e x_1 e x_2 dois instantes quaisquer no tempo, tais que y_1 e y_2 são os respectivos valores da grandeza y nos instantes $x_1 < x_2$.

- A variação da grandeza y no período considerado é:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

- A duração do período considerado é:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

- A taxa de variação média da grandeza y no período considerado é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exercícios resolvidos

10. Considerando a tabela a seguir, responda: De quanto foi, aproximadamente, a variação anual média do preço do barril de petróleo no período de 1979 a 2005?

Preço do barril de petróleo por ano

Ano	Preço (em U$)
1967	3
1979	22
2005	40
2011	100

Fonte: Dados fictícios.

a) 7 centavos de dólar por ano.
b) 77 centavos de dólar por ano.
c) 7 dólares por ano.
d) 7,7 dólares por ano.
e) 70 centavos de dólar por ano.

Resolução:

As grandezas relacionadas na tabela são de espécies diferentes: temporal e monetária.

A grandeza temporal é dada em anos: $x_1 = 1979$ e $x_2 = 2005$.

A variação de grandeza temporal é: $\Delta x = x_2 - x_1 = 2005 - 1979 = 26$ anos.

A grandeza monetária está em dólares: $y_1 = 22$ e $y_2 = 40$.

A variação de grandeza monetária é: $\Delta y = y_2 - y_1 = 40 - 22 = 18$ dólares.

A partir das variações das grandezas, temporal e monetária, a taxa de variação anual média do preço do barril de petróleo resulta do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18}{26} \cong 0{,}6923 \text{ dólares por ano}$$

É importante observar que a taxa periódica encontrada, de aproximadamente 70 centavos de dólar por ano, é apenas uma média e não significa que o aumento ocorreu com esse mesmo valor ano após ano. Resposta: alternativa E.

11. Uma embarcação que partiu da Inglaterra com destino à África do Sul percorreu sua trajetória numa média de 510 léguas a cada 3 dias. Considerando que uma légua marítima equivale a 6,6 quilômetros, determine a velocidade média, em quilômetros por hora, da embarcação nessa viagem.

Resolução:

Se uma légua marítima equivale a 6,6 km, 510 léguas marítimas equivalem a $510 \cdot 6{,}6$ km $= 3\,366$ km.

Como um dia tem 24 horas, temos que 3 dias têm $3 \cdot 24\text{h} = 72\text{h}$.

Assim, a velocidade média v dessa embarcação na referida viagem foi: $v = \frac{3366 \text{ km}}{72\text{h}} = 46{,}75$ km/h.

Concentrações como razões compostas

No estudo da Química, o termo concentração indica a composição de uma mistura. Seus valores são razões que podem ser obtidas por quocientes de grandezas diferentes, como massa ou quantidade de matéria, divididas por alguma grandeza de espaço, como volume ou capacidade.

No estudo da Física há uma grandeza chamada densidade que também expressa concentração de massa, não de uma mistura, mas sim de um único corpo. A densidade é uma razão composta obtida pelo quociente entre a massa de determinado corpo pelo seu próprio volume.

Múltiplos e submúltiplos das principais unidades de medida são amplamente usados para apresentar as unidades desse tipo de razão composta.

Concentrações em massa podem ser expressas em miligramas por litro (mg/L) ou gramas por centímetro cúbico (g/cm^3), por exemplo. Concentrações por quantidade de matéria são geralmente expressas em mols por litro. No Sistema Internacional, a unidade de densidade é o quilograma por metro cúbico (kg/m^3), mas é bastante comum encontrarmos densidades expressas em gramas por centímetro cúbico (g/cm^3) ou gramas por mililitro (g/mL).

No estudo da Economia, o conceito de concentração de renda local é uma razão composta obtida pelo quociente de uma grandeza monetária por uma grandeza de área.

No estudo da Geografia, o conceito de concentração faz referência às populações de determinados locais. Densidade demográfica é o nome dado à razão composta obtida pelo quociente entre uma população e a área que ela ocupa.

Exercícios resolvidos

12. **Enem 2016** Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é a

a) A. **c)** C. **e)** E.
b) B. **d)** D.

Resolução:

A concentração é dada pela razão entre a massa de fibras e a massa de pão, que é $\frac{2}{50}, \frac{5}{40}, \frac{5}{100}, \frac{6}{90}$ e $\frac{7}{70}$ para as marcas A, B, C, D e E, respectivamente. Note que $\frac{5}{40}$ é a única maior que 0,1 e, portanto, é a maior, ou seja, a marca escolhida deve ser a B.

Resposta: alternativa B.

13. **Enem 2016** Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

a) 360
b) 485
c) 560
d) 740
e) 860

Resolução:

Às 10 horas da manhã, o organizador verificou que a área ocupada equivalia a um quadrado de lado 500 m. Logo, a área do quadrado, em m², é:

$$A = 500 \cdot 500 = 25 \cdot 10^4$$

Como a densidade estimada é de 4 pessoas por metro quadrado, conclui-se que, às 10 horas da manhã, o número de pessoas era de:

$$N = 4 \cdot 25 \cdot 10^4 = 10^6$$

Nas horas seguintes, o número de pessoas aumenta a uma taxa de 120 000 pessoas por hora. Portanto, o número de pessoas às 16 horas é de:

$$10^6 + 6 \cdot 120000 = 1\,720\,000$$

Para cada 2 000 pessoas, deve haver 1 policial; logo, a quantidade de policiais deve ser:

$$\frac{1\,720\,000}{2000} = 860$$

Resposta: alternativa E.

Proporção

Toda relação de igualdade entre duas frações estabelece uma proporção. Assim, as proporções são as sentenças matemáticas do tipo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Uma leitura possível é "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*".

Em termos algébricos, há equivalência entre uma razão $\left(\frac{a}{b}\right)$ do primeiro membro da igualdade e a razão $\left(\frac{c}{d}\right)$ do segundo membro. Essa proporção obedece à seguinte nomenclatura:

I. *a* é o termo antecedente da 1ª razão;
II. *b* é o termo consequente da 1ª razão;
III. *c* é o termo antecedente da 2ª razão;
IV. *d* é o termo consequente da 2ª razão.

Além disso:

V. *a* e *d* são os termos extremos da proporção;
VI. *b* e *c* são os termos médios da proporção.

Características básicas

Toda proporção se presta a informar equivalências comparativas entre os valores de duas grandezas, calculando-se suas razões por meio do quociente. Proporções são expressas por sentenças do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, em que os números *b* e *d* devem ser diferentes de zero.

Em $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com $b \cdot d \neq 0$, tem-se que:

- $a = 0 \Leftrightarrow c = 0$
- $|a| = |b| \Leftrightarrow |c| = |d|$
- $|a| < |b| \Leftrightarrow |c| < |d|$
- $|a| > |b| \Leftrightarrow |c| > |d|$

Se a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é formada por razões simples de números positivos, cujo quociente é maior que uma unidade ($q > 1$), então ela pode ser interpretada da seguinte maneira:

"*b* cabe em *a* tantas vezes quantas *d* cabe em *c*".

Simplificações

A equação gerada por uma proporção pode ser simplificada dividindo-se ambos os termos antecedentes por um mesmo número real não nulo, produzindo-se assim uma nova relação de proporcionalidade.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{n}}{b} = \frac{\frac{c}{n}}{d}$$

A equação $\frac{12}{x} = \frac{20}{y}$, por exemplo, pode ser simplificada dividindo-se por 4 cada um dos termos antecedentes:

$$\frac{\frac{12}{4}}{x} = \frac{\frac{20}{4}}{y} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y}$$

A mesma equação também pode ser simplificada dividindo-se ambos os termos consequentes por um mesmo número real não nulo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{b}{n}} = \frac{c}{\frac{d}{n}}$$

A equação $\frac{x}{45} = \frac{y}{35}$, por exemplo, pode ser simplificada dividindo-se por 5 cada um dos termos consequentes:

$$\frac{x}{\frac{45}{5}} = \frac{y}{\frac{35}{5}} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$$

Há casos em que a simplificação pode ser obtida por uma multiplicação dos termos antecedentes ou dos termos consequentes por um mesmo número real não nulo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \cdot n}{b} = \frac{c \cdot n}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b \cdot n} = \frac{c}{d \cdot n}$$

A equação $\frac{2,5}{x} = \frac{0,75}{y}$, por exemplo, pode ser simplificada multiplicando-se por 4 cada um dos termos antecedentes:

$$\frac{2,5 \cdot 4}{x} = \frac{0,75 \cdot 4}{y} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{3}{y}$$

Produto cruzado

Em uma proporção, o produto dos termos extremos equivale ao produto dos termos médios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Representações

As oito maneiras diferentes de se representar a proporção entre números *a*, *b*, *c* e *d* geram quatro diferentes razões:

Proporção 1	Proporção 2	Razão
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$	k
$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$	k^{-1}
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$	k'
$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$	$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$	k'^{-1}

Exercícios resolvidos

14. Enem Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

a) 4 mil.
b) 9 mil.
c) 21 mil.
d) 35 mil.
e) 39 mil.

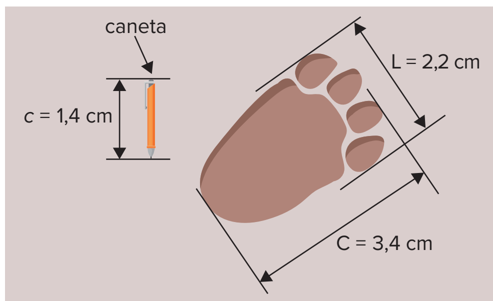
Resolução:

Do enunciado, temos que a proporção de mulheres internadas para a de homens na mesma situação (em milhares) é $\frac{32}{28}$, ou seja, $\frac{8}{7}$. Sendo H (em milhares) o número de homens na nova proporção, temos:

$$\frac{32 + 8}{H} = \frac{8}{7} \Rightarrow 8 \cdot H = 40 \cdot 7 \Rightarrow H = \frac{280}{8} = 35$$

Resposta: alternativa D.

15. Enem 2015 Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (*c*), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

a) 4,9 e 7,6.
b) 8,6 e 9,8.
c) 14,2 e 15,4.
d) 26,4 e 40,8.
e) 27,5 e 42,5.

Resolução:

A razão entre o comprimento real da caneta e o de sua foto é $\frac{16,8}{1,4} = 12$.

Isso significa que as medidas das pegadas são iguais ao que está indicado nas fotos multiplicado por 12, ou seja, temos, em cm:

$$2,2 \cdot 12 = 26,4$$
$$3,4 \cdot 12 = 40,8$$

Resposta: alternativa D.

Propriedades

Novas razões

Da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com $b \cdot d \neq 0$, uma terceira razão equivalente à $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ pode ser obtida adicionando-se os dois termos antecedentes e os dois termos consequentes das razões originais, desde que as somas não sejam nulas. Assim, se $a + b \neq 0$ e $b + d \neq 0$, tem-se que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

Demonstração:

Da propriedade do produto cruzado na proporção original, tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Adicionando o produto $c \cdot d$ aos dois membros da equação:

$$a \cdot d = b \cdot c \Leftrightarrow a \cdot d + c \cdot d = b \cdot c + c \cdot d$$

Fatorando as expressões em cada membro da equação:

$$a \cdot d + c \cdot d = b \cdot c + c \cdot d \Leftrightarrow (a + c) \cdot d = (b + d) \cdot c$$

Como d e $(b + d)$ são diferentes de zero, dividindo-se ambos os membros da equação por $(b + d) \cdot d$ e simplificando cada razão, teremos:

$$\frac{(a + c) \cdot d}{(b + d) \cdot d} = \frac{(b + d) \cdot c}{(b + d) \cdot d} \Leftrightarrow \frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}$$

Esse procedimento pode ser executado inúmeras vezes, gerando sempre novas razões equivalentes às razões anteriores:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} = \frac{2a + c}{2b + d} = \frac{3a + 2c}{3b + 2d} = \ldots$$

Também é possível aplicar essa propriedade a proporções formadas por três ou mais razões:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c}$$

Novas proporções

De uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com $b \cdot d \neq 0$, novas proporções podem ser obtidas adicionando-se os consequentes aos antecedentes de cada razão. As razões relacionadas nessa nova proporção não devem ter o mesmo valor das razões originais.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

Para demonstrar essa proposição basta adicionar 1 aos dois membros da equação e efetuar a soma das frações:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

Outra forma de se obter novas proporções é adicionando os antecedentes aos consequentes de cada razão.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b + a} = \frac{c}{d + c}$$

Essa propriedade também pode ser aplicada inúmeras vezes, produzindo uma infinidade de proporções. Assim, quaisquer que sejam os números não nulos m, n, p e q, satisfazendo $p \cdot a + q \cdot b \neq 0$ e $p \cdot c + q \cdot d \neq 0$, tem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{n \cdot a + m \cdot b}{p \cdot a + q \cdot b} = \frac{n \cdot c + m \cdot d}{p \cdot c + q \cdot d}$$

Porcentagens

As primeiras formas percentuais de representação de razões e proporções surgiram na Antiguidade romana, quando o ostensivo modo de vida dos imperadores era sustentado pelos impostos cobrados de cada cidadão.

Na época e local, as transações comerciais eram taxadas pelo estado em termos de razões centesimais de forma padronizada. Por exemplo, as riquezas herdadas por uma pessoa, no caso de morte de um parente, eram taxadas em "XIII *per centus*", forma antiga para o que hoje representamos como 13%.

O que não deve ter mudado daquela época para a atual são as formas como as porcentagens são calculadas. Uma dessas formas consiste em dividir o valor do bem transferido em uma centena de partes iguais e tomar exatamente treze dessas partes.

Para calcular, por exemplo, a porcentagem de 13% sobre uma riqueza herdada de 46 mil *aureus* (moeda romana usada entre os séculos II a.C. e III d.C.), divide-se 46 000 por 100 e multiplica-se o quociente obtido por 13, obtendo-se:

$$\begin{cases} 46000 : 100 = 460 \\ 460 \cdot 13 = 5980 \end{cases}$$

Assim, tem-se que a quantia de 5 980 *aureus* representa 13% de 46 mil *aureus*.

Outra forma de fazer isso é dividir 13 por 100, obtendo o que chamamos de taxa unitária, e multiplicar essa taxa pelo valor principal de 46 mil *aureus*: $\begin{cases} 13 : 100 = 0{,}13 \\ 0{,}13 \cdot 46000 = 5980 \end{cases}$

Exercícios resolvidos

16. Calcule as seguintes porcentagens:

a) 7% de R$ 180,00

b) 15% de 540 L

c) 25% de 400 pessoas

Resolução:

a) $\frac{7}{100} \cdot 180 = 0{,}07 \cdot 180 =$ R$ 12,60

b) $\frac{15}{100} \cdot 540 = 0{,}15 \cdot 540 = 81$ L

c) $\frac{25}{100} \cdot 400 = 0{,}25 \cdot 400 = 100$ pessoas

FRENTE 2

17. Dos 750 alunos de um colégio, 420 são garotas. Qual é a porcentagem de rapazes nesse colégio?

Resolução:

O número de rapazes é $750 - 420 = 330$.

A porcentagem de rapazes é $\frac{330}{750} = \frac{11}{25} = 0{,}44 = 44\%$.

18. Se dois quintos da mesada de Aline equivalem a 20% da mesada de Beatriz, então:

a) a mesada de Aline é igual ao dobro da mesada de Beatriz.

b) a mesada de Beatriz é igual ao dobro da mesada de Aline.

c) a mesada de Aline é igual ao triplo da mesada de Beatriz.

d) a mesada de Beatriz é igual ao triplo da mesada de Aline.

e) a metade da mesada de Aline é igual ao dobro da mesada de Beatriz.

Resolução:

Sendo A e B os respectivos valores das mesadas de Aline e Beatriz, do enunciado temos que $\frac{2}{5} \cdot A = 20\% \cdot B$.

Como $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, temos: $\frac{2}{5} \cdot A = \frac{1}{5} \cdot B \Rightarrow 2A = B$.

Portanto, a mesada de Beatriz é igual ao dobro da mesada de Aline.
Resposta: alternativa B.

Apresentação de taxas

O valor de uma grandeza, razão simples ou razão composta, pode ser representado de forma exata ou de forma aproximada. Em muitos casos, para representar alguns valores de forma exata, é necessário que sejam usadas frações ou mesmo números irracionais. No entanto, para as aproximações, usa-se apenas a forma decimal dos números racionais, frequentemente com somente duas casas, como é o caso da notação financeira.

Os países de língua latina herdaram a prática centesimal dos antigos romanos, enquanto alguns países de língua inglesa aos poucos foram mudando sua forma de representação e adaptando-se a esse padrão decimal de representação, mas ainda hoje os norte-americanos referem-se à sua moeda de 25 centavos como um quarto de dólar $\left(\frac{1}{4} = 0{,}25\right)$. O valor dessa moeda é apenas uma pequena parte do dólar. Assim, esse valor representa uma taxa dessa unidade monetária.

- Na forma fracionária, a taxa de $\frac{1}{4}$ indica que a moeda possui apenas **uma** das **quatro** partes iguais que somam um dólar.
- Na forma decimal, o numeral 0,25 é denominado taxa unitária e indica que a moeda possui 25 centésimos da unidade monetária.

O numeral 0,25 também indica que essa moeda tem 25% do valor de um único dólar. Aqui a representação 25% é denominada taxa percentual.

O símbolo **%** indica a divisão de uma quantia em exatamente 100 partes iguais.

Escreve-se o símbolo % à direita de um valor numérico como forma alternativa para a representação de uma fração centesimal, ou seja, $25\% = \frac{25}{100}$.

As formas mais usadas para a representação das partes de um todo são as taxas unitárias e as taxas percentuais. As taxas unitárias são números racionais compreendidos no intervalo entre os números 0 e 1. Note que $0 < 0{,}25 < 1$. As taxas percentuais são números racionais compreendidos entre 0 e 100, seguidos do símbolo de porcentagem (%). Note que $0\% < 25\% < 100\%$.

Encontra-se a taxa unitária dividindo-se o valor absoluto da parte de uma quantia pelo seu valor total. Considere, por exemplo, que em uma sala de aula há 92 alunos e que apenas 23 são rapazes. A taxa unitária de rapazes nessa sala é expressa por $\frac{23}{92} = 0{,}25$.

Uma taxa unitária pode ser transformada em taxa percentual se for multiplicada por 100. Ao fazer isso, deve-se acrescentar o símbolo da porcentagem à notação:

$$0{,}25 = 0{,}25 \cdot 100\% = 25\%$$

Uma taxa percentual pode ser transformada em taxa unitária se for dividida por 100. Ao fazer isso, deve-se eliminar o símbolo da porcentagem:

$$25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

Calcula-se uma porcentagem de determinado valor multiplicando-se o valor total dessa grandeza pela taxa percentual e, depois, dividindo-se o produto obtido por 100. Por exemplo, para calcular quantos alunos correspondem a 25% de 92 alunos, fazemos:

$$\frac{25}{100} \cdot 92 = \frac{2\,300}{100} = 23$$

Calcula-se uma porcentagem de outra porcentagem multiplicando-se a taxa unitária correspondente a uma das porcentagens pela taxa percentual correspondente a outra. Por exemplo:

30% de 70%: $0{,}3 \cdot 70\% = 0{,}7 \cdot 30\% = 21\%$

60% de 50%: $0{,}6 \cdot 50\% = 0{,}5 \cdot 60\% = 30\%$

Exercício resolvido

19. Escreva em forma de porcentagem os resultados dos seguintes cálculos:

a) $(90\%)^2$

b) $\sqrt{81\%}$

c) 90% de 80%

Resolução:

a) $(90\%)^2 = \left(\frac{90}{100}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100} = 81\%$

b) $\sqrt{81\%} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = \frac{90}{100} = 90\%$

c) 90% de 80% corresponde a $0{,}9 \cdot 80\% = 72\%$

Taxas unitária e percentual

Chamam-se taxas unitárias as razões simples, que são obtidas por quocientes entre as partes de determinada quantia e o valor total dessa quantia.

$$\text{Taxa unitária} = \frac{\text{parte}}{\text{todo}}$$

Chamam-se taxas percentuais os numerais que precedem o símbolo % nas representações padronizadas das razões simples como frações centesimais. Assim:

$$\text{Taxa percentual} = (100 \cdot \text{Taxa unitária})\%$$

Exercícios resolvidos

20. Represente as seguintes porcentagens como taxas unitárias.

a) 22% **d)** 200%
b) 20% **e)** 2,2%
c) 2% **f)** 0,2%

Resolução:

a) 22% = 22 : 100 = 0,22
b) 20% = 20 : 100 = 0,20 = 0,2
c) 2% = 2 : 100 = 0,02
d) 200% = 200 : 100 = 2
e) 2,2% = 2,2 : 100 = 0,022
f) 0,2% = 0,2 : 100 = 0,002

21. Represente as seguintes taxas unitárias como porcentagens.

a) 0,75 **d)** 0,075
b) 0,7 **e)** 1,5
c) 0,05 **f)** 3

Resolução:

a) 0,75 = 0,75 · 100% = 75%
b) 0,7 = 0,7 · 100% = 70%
c) 0,05 = 0,05 · 100% = 5%
d) 0,075 = 0,075 · 100% = 7,5%
e) 1,5 = 1,5 · 100% = 150%
f) 3 = 3 · 100% = 300%

22. Enem Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% deles foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.
Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

a) 16%. **c)** 32%. **e)** 64%.
b) 24%. **d)** 48%.

Resolução:

Chamando de p o número de pacientes inicialmente submetidos ao tratamento tradicional, usando-se a representação das taxas unitárias, tem-se que a expressão $0{,}4 \cdot p$ representa o número de pacientes inicialmente curados e a expressão $0{,}6 \cdot p$ representa o número de pacientes divididos em dois grupos e, como esses grupos devem ter a mesma quantidade de pacientes, a expressão $0{,}3 \cdot p$ representa essa quantidade.
Assim, de acordo com o enunciado, o número de pacientes curados pelos tratamentos inovadores pode ser expresso por:

$$0{,}35 \cdot 0{,}3 \cdot p + 0{,}45 \cdot 0{,}3 \cdot p = (0{,}35 + 0{,}45) \cdot 0{,}3 \cdot p = \\ = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot p = 0{,}24 \cdot p$$

Portanto, os tratamentos inovadores proporcionaram a cura de 24% dos pacientes inicialmente submetidos ao tratamento tradicional.
Resposta: alternativa B.

23. UFV-MG Uma indústria tem matriz na capital e duas filiais, I, II no interior do estado. Na matriz trabalham 45% dos funcionários e na filial I, 30%. Uma porcentagem de 36% dos funcionários da indústria optou por um determinado plano de saúde. Sabendo-se que 25% dos funcionários da capital e 30% dos funcionários da filial I optaram por esse plano, a porcentagem dos funcionários da filial II que também optaram pelo plano é:

a) 67% **b)** 63% **c)** 59% **d)** 51%

Resolução:

Chamando de p a porcentagem dos funcionários da filial II que também optaram pelo plano, do enunciado temos que:

$$25\% \cdot 45\% + 30\% \cdot 30\% + p \cdot (100\% - 45\% - 30\%) = 36\%$$
$$0{,}25 \cdot 0{,}45 + 0{,}30 \cdot 0{,}30 + p \cdot (1 - 0{,}45 - 0{,}30) = 0{,}36$$
$$0{,}1125 + 0{,}09 + 0{,}25 \cdot p = 0{,}36$$
$$0{,}25 \cdot p = 0{,}36 - 0{,}2025$$
$$p = \frac{0{,}1575}{0{,}25}$$
$$p = 0{,}63 = 63\%$$

Resposta: alternativa B.

24. Uma liga metálica de 50 kg é composta de 40% de chumbo e 60% de estanho. Quantos quilogramas de chumbo devem ser acrescentados a essa liga para que a porcentagem de estanho se reduza a apenas 30%?

Resolução:

A massa atual de chumbo na liga é de 40% dos 50 kg, ou seja, $0{,}4 \cdot 50 = 20$ kg.
Se a porcentagem de estanho deve se reduzir a 30% então, a porcentagem de chumbo deve, necessariamente, subir para 100% − 30% = 70%.

Assim, sendo x a massa, em kg, de chumbo que deve ser acrescentada:

$$\frac{20 + x}{50 + x} = \frac{70}{100}$$
$$100(20 + x) = 70(50 + x)$$
$$2000 + 100x = 3500 + 70x$$
$$100x - 70x = 3500 - 2000$$
$$30x = 1500$$
$$x = 50$$

Portanto, devem ser acrescentados 50 kg de chumbo a essa liga.

! Atenção

Há duas maneiras distintas de se expressar a taxa de lucro (ou prejuízo) obtido em uma transação comercial do tipo compra e venda.
Uma delas é calculada tendo como referência o preço de compra ou custo, e a outra, tendo como referência o preço de venda. Veja como a formação das frações que representam essas razões simples segue literalmente cada designação.

$$\text{Taxa de lucro sobre o valor de compra} = \frac{\text{Lucro}}{\text{Valor de compra}}$$

$$\text{Taxa de lucro sobre o valor de venda} = \frac{\text{Lucro}}{\text{Valor de venda}}$$

Exercício resolvido

25. Em uma transação comercial, um produto que custou R$ 400,00 para o comerciante foi vendido por R$ 500,00.

a) Qual é o valor do lucro nominal nessa transação comercial?

b) Qual é a taxa percentual de lucro sobre o preço de custo?

c) Qual é a taxa percentual de lucro sobre o preço de venda?

Resolução:

a) Lucro nominal: R$ 500,00 − R$ 400,00 = R$ 100,00

b) Taxa de lucro sobre o preço de custo:

$$\frac{\text{R\$ } 100{,}00}{\text{R\$ } 400{,}00} = 0{,}25 = 25\%$$

c) Taxa de lucro sobre o preço de venda:

$$\frac{\text{R\$ } 100{,}00}{\text{R\$ } 500{,}00} = 0{,}2 = 20\%$$

Aumentos e reduções

A variação de uma grandeza, em determinado período, é dada pela diferença entre o valor da grandeza ao final do período e o seu valor no início do período.

Considere o período em que determinada grandeza teve:

- Valor inicial: V_I
- Valor final: V_F

Assim, o valor nominal da variação dessa grandeza é:

$$\Delta V = V_F - V_I$$

Quando positiva, a variação de uma grandeza é chamada de aumento nominal e, quando negativa, é chamada de redução nominal.

- $\Delta V > 0$ indica que houve aumento no valor da grandeza observada.
- $\Delta V < 0$ indica que houve redução no valor da grandeza observada.

Quando, no período considerado, tem-se $\Delta V = 0$, não se deve concluir que o valor da grandeza se manteve constante. É bem provável que os aumentos e as reduções ocorridos durante o período anularam-se uns aos outros, fazendo o valor final da grandeza coincidir com o seu valor inicial ($V_F = V_I$).

! Atenção

No estudo da Matemática Financeira, o valor final resultante de um ou mais aumentos também é chamado de **montante** acumulado.

As variações nos valores de grandezas também podem ser informadas por taxas percentuais ou unitárias, sejam elas referentes a aumentos ou reduções. Nesses casos, costuma-se tomar como referência o valor inicial da grandeza que sofreu a variação.

Se $\Delta V > 0$, a taxa unitária de aumento é dada pela razão simples $\frac{\Delta V}{V_I}$.

$$\frac{\Delta V}{V_I} = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{V_F}{V_I} - \frac{V_I}{V_I} = \frac{V_F}{V_I} - 1$$

Se $\Delta V < 0$, a taxa unitária de redução é dada pela razão simples $\frac{-\Delta V}{V_I}$.

Se $\Delta V = 0$, a taxa de variação também é nula.

Exercícios resolvidos

Leia a notícia a seguir para responder às questões **26** e **27**:

Piauí apresenta crescimento de 4,32% na geração de novos empregos

O Caged (Cadastro Geral de Empregados e Desempregados) divulgou recentemente dados referentes ao saldo de emprego e desemprego no Estado do Piauí, acumulados nos 12 meses do ano passado. O resultado foi positivo em relação ao mesmo período de 2013, vez que o montante de postos de trabalho foi de 11 692, correspondendo a um aumento de 4,32%.

Segundo os dados do CAGED, em janeiro de 2014 foram eliminados 135 empregos celetistas, equivalentes a uma redução de 0,05% em relação ao estoque de assalariados com carteira assinada do mês anterior.

Fonte: ARAUJO, Edivan. Piauí apresenta crescimento de 4,32% na geração de novos empregos. *Agora ED*, Picos, 2 mar. 2014. Geral. Disponível em: https://agoraed.com/site/materia/16776/. Acesso em: 15 jul. 2021.

26. Tomando como base as informações da notícia, pode-se concluir que o número de postos de trabalho no estado do Piauí, criados durante o período considerado, foi de, aproximadamente:

a) 480 postos.
b) 570 postos.
c) 660 postos.
d) 750 postos.
e) 840 postos.

Resolução:

O primeiro parágrafo dessa notícia informa a ocorrência de um aumento percentual de 4,32% no número de postos de trabalho, e como o termo montante sempre faz referência ao valor final da grandeza em questão, é correto concluir que: $\begin{cases} V_F = 11\,692 \\ \dfrac{\Delta V}{V_I} = 4{,}32\% \end{cases}$.

Como $\Delta V = V_F - V_I$, pode-se concluir que:

$$\frac{V_F - V_I}{V_I} = 0{,}0432$$

Substituindo-se V_F por 11 692, obtém-se a equação:

$$\frac{11\,692 - V_I}{V_I} = 0{,}0432$$

$$11\,692 - V_I = 0{,}0432 \cdot V_I$$

$$11\,692 = 0{,}0432 \cdot V_I + V_I$$

$$11\,692 = 1{,}0432 \cdot V_I$$

$$V_I = \frac{11\,692}{1{,}0432} \cong 11\,208$$

Portanto, de acordo com a notícia, no início do período considerado, o número de postos de trabalho no estado do Piauí foi de, aproximadamente, 11 208.
Além disso, também é correto concluir que o aumento nominal no número de postos de trabalho no período considerado de 2013 a 2014 foi $\Delta V = V_F - V_I = 11\,692 - 11\,208 = 484$, o que torna consistente o argumento de que no Piauí foram criados 484 novos empregos durante esse período.
Resposta: alternativa A.

27. Ainda com base nas informações da notícia, o número de empregos celetistas, no estado do Piauí, em janeiro de 2013 era de:

a) 330 mil.
b) 300 mil.
c) 270 mil.
d) 240 mil.
e) 210 mil.

Resolução:

O segundo parágrafo da notícia informa a ocorrência de uma redução nominal de 135 empregos celetistas no período de um único mês, e que essa redução representa um percentual de 0,05% em relação aos meses de dezembro de 2013 e janeiro de 2014.

Dessas informações, é correto concluir que no período de um mês: $\begin{cases} \dfrac{\Delta V}{V_I} = 0{,}05\% \\ \Delta V = 135 \end{cases}$.

Assim, substituindo-se ΔV por 135 na primeira equação do sistema, tem-se que:

$$\frac{135}{V_I} = \frac{0{,}05}{100}$$

$$0{,}05 \cdot V_I = 135 \cdot 100$$

$$V_I = \frac{13\,500}{0{,}05} = 270\,000$$

Portanto, da notícia é correto concluir que havia 270 mil empregos celetistas no Piauí em janeiro de 2013.
Resposta: alternativa C.

Fator de correção

O montante ou valor final que resulta de um único aumento de taxa *p*% é expresso por:

$$V_F = V_I + p\% \cdot V_I$$

Fatorando essa expressão, tem-se $V_F = (1 + p\%) \cdot V_I$.

O montante ou valor final que resulta de uma única redução de taxa *p*% é expresso por:

$$V_F = V_I - p\% \cdot V_I$$

Fatorando essa expressão, tem-se $V_F = (1 - p\%) \cdot V_I$.

As expressões do tipo $\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right)$ presentes nas fórmulas $V_F = \left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right) \cdot V_I$, do montante acumulado, são chamadas de fatores de correção. Assim:

- Para aumentos de *p*%, tem-se um fator de aumento $F_A = 1 + \dfrac{p}{100}$.
- Para reduções de *p*%, tem-se um fator de redução $F_R = 1 - \dfrac{p}{100}$.

Assim, com o auxílio desses fatores de correção, o montante final pode ser calculado efetuando-se uma única multiplicação:

$$V_F = V_I \cdot F$$

Esses fatores de correção podem ser facilmente encontrados se considerarmos que, inicialmente, qualquer valor é igual a 100% de si mesmo. Depois, basta adicionar ou subtrair as taxas percentuais *p* e efetuar a divisão por 100. Veja nos quadros a seguir como encontrar os fatores de correção para uma taxa de 30%, por exemplo.

Aumento de 30%	Redução de 30%
F > 1	**0 < F < 1**
Valor inicial → 100% +	Valor inicial → 100% −
Aumento → 30%	Redução → 30%
130% ⇒ F = 1,3	70% ⇒ F = 0,7

Exercícios resolvidos

28. Escreva os fatores de correção referentes a:

a) um aumento de 30%.
b) um aumento de 8%.
c) um aumento de 300%.
d) um desconto de 20%.
e) um desconto de 80%.
f) um desconto de 8%.
g) um desconto de 1,25%.

Resolução:

a) $F = 1 + 30\% = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$
b) $F = 1 + 8\% = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$
c) $F = 1 + 300\% = 1 + 3 = 4$
d) $F = 1 - 20\% = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
e) $F = 1 - 80\% = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
f) $F = 1 - 8\% = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$
g) $F = 1 - 1{,}25\% = 1 - 0{,}0125 = 0{,}9875$

29. Determine se são referentes a aumentos ou reduções os fatores de correção a seguir e identifique suas taxas percentuais.

a) 1,23 **c)** 1,2 **e)** 0,9
b) 1,03 **d)** 2,1 **f)** 0,25

Resolução:

a) Como $F > 1$, tem-se: $1 + p\% = 1{,}23 \Rightarrow p\% = 0{,}23 = 23\%$.
b) O fator de correção 1,23 representa um aumento de 23%.
c) Como $F > 1$, tem-se: $1 + p\% = 1{,}03 \Rightarrow p\% = 0{,}03 = 3\%$.
d) O fator de correção 1,03 representa um aumento de 3%.
e) Como $F > 1$, tem-se: $1 + p\% = 1{,}2 \Rightarrow p\% = 0{,}2 = 20\%$.
f) O fator de correção 1,2 representa um aumento de 20%.
g) Como $F > 1$, tem-se: $1 + p\% = 2{,}1 \Rightarrow p\% = 1{,}1 = 110\%$.
h) O fator de correção 2,1 representa um aumento de 110%.
i) Como $F < 1$, tem-se: $1 - p\% = 0{,}9 \Rightarrow p\% = 0{,}1 = 10\%$.
j) O fator de correção 0,9 representa uma redução de 10%.
k) Como $F < 1$, tem-se: $1 - p\% = 0{,}25 \Rightarrow p\% = 0{,}75 = 75\%$.
l) O fator de correção 0,25 representa uma redução de 75%.

30. Fuvest-SP A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é:

a) $f(x) = x - 3$
b) $f(x) = 0{,}97x$
c) $f(x) = 1{,}3x$
d) $f(x) = -3x$
e) $f(x) = 1{,}03x$

Resolução:

Como o fator de correção de um desconto de 3% é 0,97, temos que $f(x) = 0{,}97x$.
Resposta: alternativa B.

31. Uma mercadoria recebeu um aumento de 35%, passando a custar R$ 702,00. Determine:

a) Qual era o preço dessa mercadoria antes do aumento?
b) Qual será o preço dessa mercadoria se receber um desconto de 35% sobre o seu valor atual?

Resolução:

a) Sendo P o preço antes do aumento, temos:

$$1{,}35 \cdot P = 702 \Rightarrow P = \frac{702}{1{,}35} \Rightarrow P = 520$$

O preço da mercadoria antes do aumento era de R$ 520,00.

b) Aplicando um desconto de 35% sobre o valor atual, temos: $(1 - 0{,}35) \cdot 702 = 0{,}65 \cdot 702 = 456{,}30$. Se receber um desconto de 35% sobre o valor atual, a mercadoria custará R$ 456,30.

32. UFMG O preço de venda de determinado produto tem a seguinte composição: 60% referentes ao custo, 10% referentes ao lucro e 30% referentes a impostos. Em decorrência da crise econômica, houve um aumento de 10% no custo desse produto, porém, ao mesmo tempo, ocorreu uma redução de 20% no valor dos impostos.
Para aumentar as vendas do produto, o fabricante decidiu, então, reduzir seu lucro à metade.

É **CORRETO** afirmar, portanto, que, depois de todas essas alterações, o preço do produto sofreu **redução** de

a) 5%
b) 10%
c) 11%
d) 19%

Resolução:

Sendo V o preço inicial e V' o preço final dessa mercadoria, temos:

$$\begin{array}{llllll}
V' = & \text{Custo de produção} & + & \text{Lucro} & + & \text{Imposto} \\
V' = & 60\% \cdot V & + & 10\% \cdot V & + & 30\% \cdot V \\
 & \downarrow (+10\%) & & \downarrow (-50\%) & & \downarrow (-20\%) \\
V' = & 1{,}1 \cdot 0{,}60 \cdot V & + & 0{,}5 \cdot 0{,}10 \cdot V & + & 0{,}8 \cdot 0{,}30 \cdot V \\
V' = & 0{,}66 \cdot V & + & 0{,}05 \cdot V & + & 0{,}24 \cdot V = 0{,}95 \cdot V
\end{array}$$

Logo, o preço do produto sofreu uma redução de 5% no seu valor.

Resposta: alternativa A.

33. Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo igual a X. Contudo, ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 40% ao preço X, pois sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual, dentre as alternativas a seguir, apresenta o maior desconto que ele pode conceder a um cliente, sobre o preço de tabela, de modo a não ter prejuízo?

a) 40%
b) 35%
c) 28%
d) 25%
e) 18%

Resolução:

Sendo T o preço de tabela, temos que $T = 1{,}4 \cdot X$.
Sendo D o valor nominal do maior desconto possível, temos que $T - D = X$.
Logo, $D = 0{,}4 \cdot X$ e, portanto, o desconto percentual sobre o preço de tabela é $\frac{D}{T} = \frac{0{,}4 \cdot X}{1{,}4 \cdot X} \cong 28{,}57\%$.
Resposta: alternativa C.

Em situações em que o valor inicial V_I de uma grandeza sofre dois ou mais aumentos e/ou reduções sucessivas, o produto dos fatores de correção associados pode ser usado para se determinar uma única taxa de variação que seja equivalente à aplicação de todas as outras.

Indicando por $(F_1, F_2, F_3, ...)$ a sequência dos fatores de correção correspondentes aos aumentos ou reduções ocorridas, o montante final, após a incidência de todos eles, será dado por:

$$V_F = V_I \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ... \Leftrightarrow \frac{V_F}{V_I} = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ...$$

Indicando por F o fator de correção equivalente a todas essas alterações:

$$V_F = V_I \cdot F \Leftrightarrow F = \frac{V_F}{V_I}$$

Das equações anteriores, tem-se que $F = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ...$.

Sendo *p* a taxa percentual de variação equivalente a todas as possíveis alterações no valor da grandeza estudada, tem-se:

$$1 + \frac{p}{100} = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ... \Leftrightarrow \frac{p}{100} = (F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ...) - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p = 100 \cdot \left[(F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot ...) - 1 \right]$$

Analisando essa expressão, da propriedade comutativa da multiplicação, pode-se concluir que tanto a taxa equivalente quanto o valor final de uma grandeza, após a ocorrência de diversos aumentos e/ou reduções, não depende da ordem de ocorrência dos aumentos e/ou reduções individuais.

Exercícios resolvidos

34. Enem 2012 Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.
Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de:

a) hipoglicemia.
b) normal.
c) pré-diabetes.
d) diabetes melito.
e) hiperglicemia.

Resolução:

Os fatores de correção referentes às reduções ocorridas são:

$F_1 = 100\% - 30\% = 70\% = 0{,}7$

$F_2 = 100\% - 10\% = 90\% = 0{,}9$

Assim, pode-se calcular o valor final da taxa de glicose após as etapas do tratamento efetuando-se o produto:

$$V_F = F_1 \cdot F_2 \cdot V_I = 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 300 \text{ mg/dL} = 189 \text{ mg/dL}$$

Portanto, o paciente estava na categoria de diabetes melito.
Resposta: alternativa D.

35. Enem 2013 A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.
Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em:

a) 4%
b) 20%
c) 36%
d) 64%
e) 96%

Resolução:

A área de um retângulo é igual ao produto entre as medidas de seus lados perpendiculares. Então, sendo x e y as medidas desses lados, a área inicial desse retângulo fica expressa por:

$$A_I = x \cdot y$$

Como todos os lados do retângulo sofreram uma redução de 20% e o fator de correção referente a essa redução é F = 100% − 20% = 80% = 0,8, pode-se concluir que a área final desse retângulo fica expressa por:

$$A_F = 0{,}8 \cdot x \cdot 0{,}8 \cdot y$$
$$A_F = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot x \cdot y$$
$$A_F = 0{,}64 \cdot A_I$$

Então, interpretando-se corretamente o fator de correção 0,64 da área desse retângulo, pode-se concluir que houve uma redução de 36% no valor dessa grandeza.

Resposta: alternativa C.

Propriedades dos fatores de correção

Sendo F o fator de correção da alteração no valor de uma grandeza:

- **F > 1** indica que ocorreu um aumento no valor da grandeza;
- **F < 1** indica que ocorreu uma redução no valor da grandeza;
- **F = 1** indica que a grandeza continua com seu valor inicial;
- Não existe fator de correção negativo.

Sendo F_A e F_R os respectivos fatores de correção de um aumento e de um desconto de mesma taxa percentual p%, temos que $F_A + F_R = 2$.

Demonstração:

$$F_A + F_R = 1 + \frac{p}{100} + 1 - \frac{p}{100} = 2$$

Um aumento e um desconto sucessivos de mesma taxa percentual p% não se anulam, gerando sempre uma redução de $\left(\frac{p^2}{100}\right)\%$.

$$F_A \cdot F_R = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1 - \frac{p^2}{10000} = 1 - \frac{p^2}{100}\%$$

Para que um aumento percentual anule uma redução percentual, os fatores de correção associados devem ser recíprocos (inversos multiplicativos) um do outro, ou seja, $F_R = \frac{1}{F_A}$. Nesse caso:

$$F_A \cdot F_R = 1$$

Então, sendo que p_A e p_R são as respectivas taxas de aumento e redução percentual capazes de se anular quando aplicadas sucessivamente:

$$F_A \cdot F_R = 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{p_A}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p_R}{100}\right) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{100 + p_A}{100}\right) \cdot \left(\frac{100 - p_R}{100}\right) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (100 + p_A) \cdot (100 - p_R) = 10000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100 + p_A = \frac{10000}{100 - p_R} \Rightarrow p_A = \frac{10000}{100 - p_R} - 100$$

Exercícios resolvidos

36. **Fuvest-SP** Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20% respectivamente, a área do retângulo é aumentada de

a) 35%
b) 30%
c) 3,5%
d) 3,8%
e) 38%

Resolução:

$$\begin{cases} F_1 = 1 + 15\% = 1{,}15 \\ F_2 = 1 + 20\% = 1{,}20 \end{cases} \Rightarrow F_1 \cdot F_2 = 1{,}15 \cdot 1{,}20 = 1{,}38$$

Portanto, a área sofreu um aumento de 38%.

Resposta: alternativa E.

37. Uma montadora recebeu um enorme pedido de veículos das concessionárias de automóveis. Para suprir a demanda, teve de aumentar em 20% o seu quadro de funcionários. Nos meses seguintes à entrega do pedido, a montadora não recebeu nenhum outro pedido de tal porte e a direção da empresa decidiu por demitir certa porcentagem de seus empregados à época, ficando com a mesma quantidade de funcionários anterior ao grande pedido. A porcentagem de empregados demitidos é de, aproximadamente,

a) 20
b) 18,5
c) 16,7
d) 15
e) 14,3

Resolução:

O fator de correção do aumento é $F_A = 1 + 20\% = 1{,}2$.

Sendo p a taxa percentual de redução, tem-se: $F_R = 1 - p\%$.

Como as alterações se anulam, temos que $F_A \cdot F_R = 1$, logo:

$$1{,}2 \cdot (1 - p\%) = 1 \Rightarrow 1 - p\% = \frac{1}{1{,}2} \Rightarrow 1 - p\% \cong 0{,}833 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p\% \cong 1 - 0{,}833 \Rightarrow p\% \cong 0{,}167 \cong 16{,}7\%$$

Resposta: alternativa C.

Revisando

1. **Uema 2020** O uso da notação científica e de prefixo é muito comum para facilitar a leitura dos números muito grandes ou muito pequenos. A seguir temos duas instituições que simplificaram o seu número de seguidores na rede social, utilizando o prefixo k (quilo).

Figura 1

Revista Galileu

@revistagalileu

A ciência ajuda você a mudar o mundo. Nos acompanhe nas redes sociais: Facebook: facebook.com/revistagalileu/ Instagram: @revistagalileu

revistagalileu.globo.com

320 Seguindo 705K Seguidores

Figura 2

Banco do Brasil

@BancodoBrasil

Interagir é uma das minhas paixões. Por aqui, vamos conversar, tirar dúvidas e falar sobre esportes também. Vem comigo!

Brasília (DF), Brasil bb.com.br

14,4K Seguindo 200K Seguidores

De acordo com as figuras A e B, é correto afirmar que

a) o número de seguidores do Banco do Brasil representa $\frac{1}{2}$ dos seguidores da Revista Galileu.

b) o número de seguidores da Revista Galileu não supera em 3 mil os seguidores do Banco do Brasil.

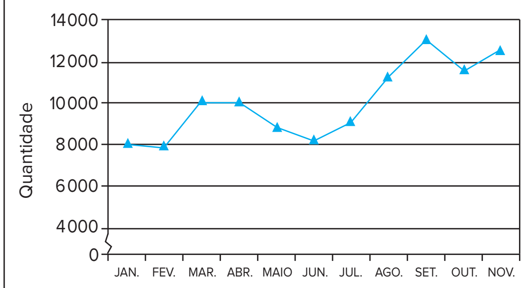
c) a soma do número de seguidores do Banco do Brasil e da Revista Galileu é menor que 800 mil.

d) o número de seguidores da Revista Galileu representa duas vezes os seguidores do Banco do Brasil.

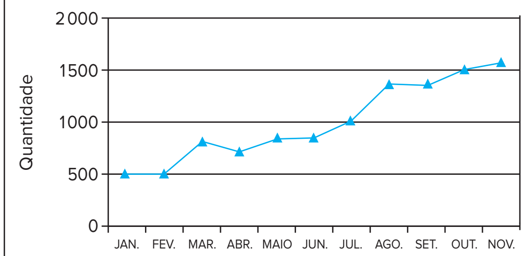
e) a diferença entre o número de seguidores da Revista Galileu e do Banco do Brasil é de 505 mil.

2. Uma pesquisa mostra que as vendas de importados da Ásia, em especial da China e da Coreia do Sul, cresceram bem mais que o mercado como um todo, de janeiro a novembro de 2010. Os chineses, apesar de volumes relativamente baixos, cresceram 220% este ano e os coreanos 56%. Os gráficos mostram a evolução das vendas dos dois países aqui:

Valores mensais de veículos coreanos no Brasil em 2010



Vendas mensais de veículos chineses no Brasil em 2010



Fonte: http://www.contagiros.com.br/vendas_de_carros_chineses_aumentaram_220_e_coreanos_56_somente_em_2010/ . Acesso em: 16 jul. 2021.

De acordo com os gráficos é correto afirmar que no Brasil o número de carros chineses vendidos em outubro de 2010 ficou próximo

a) do triplo do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.

b) do quíntuplo do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.

c) da metade do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.

d) de um quarto do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.

e) de um oitavo do número de carros coreanos vendidos no mesmo mês.

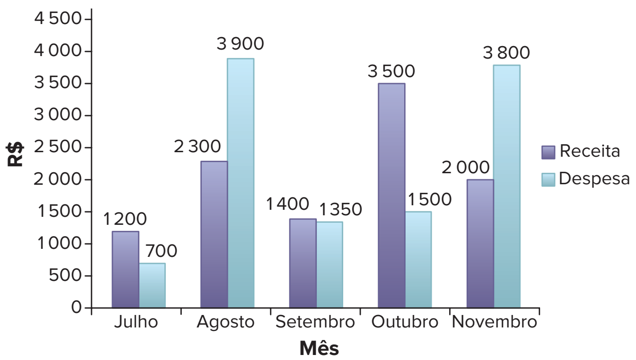
3. Os refrescos da marca Bolha-Bola são vendidos em latas de três tipos diferentes. O quadro a seguir mostra o preço e a capacidade de cada tipo de lata de Bolha-Bola em um mesmo supermercado.

Tipo	Capacidade (em mL)	Preço (em R$)
Pequena	350	3,00
Média	473	4,00
Grande	550	5,00

Uma pessoa vai ao supermercado comprar refrescos da marca Bolha-Bola pretendendo gastar exatos R$ 60,00. A melhor opção de compra para que essa pessoa leve para casa a maior quantidade de refresco é composta:

a) apenas de latas pequenas.
b) apenas de latas médias.
c) apenas de latas grandes.
d) de algumas latas pequenas e algumas médias.
e) de algumas latas médias e algumas grandes.

4. **Enem Digital 2020** O gráfico mostra as receitas e as despesas de uma empresa nos meses de julho a novembro de um ano. O resultado financeiro, obtido pela diferença entre receita e despesa, pode ser positivo (lucro) ou negativo (prejuízo).



Sabendo que o mês de dezembro é, em geral, de melhores vendas, o dono da empresa faz uma previsão de que a receita naquele mês terá um aumento, em relação ao mês anterior, com a mesma taxa de crescimento ocorrida de setembro para outubro, e que a despesa irá se manter a mesma de novembro. Se confirmadas as previsões do dono da empresa, o resultado financeiro a ser obtido no semestre de julho a dezembro será um:

a) prejuízo de R$ 2 650,00.
b) prejuízo de R$ 850,00.
c) lucro de R$ 7 150,00.
d) lucro de R$ 5 950,00.
e) lucro de R$ 350,00.

5. Um comerciante adquire uma mercadoria pela quantia de R$ 9 000,00 e a vende por R$ 10 500,00. Calcule, no caderno:

a) O lucro nominal do comerciante.
b) A taxa de lucro sobre o preço de compra.
c) A taxa de lucro sobre o preço de venda.

6. Em uma fundição há uma peça de 500 g que é feita de uma liga metálica que contém principalmente cobre e estanho, mas também contém materiais como zinco, chumbo e alumínio, embora em menor quantidade.
Se essa liga é composta de 70% de cobre e 20% de estanho, então:

a) Qual é a massa de cobre na liga?
b) Qual é a massa de estanho na liga?
c) Qual é a taxa percentual de participação dos outros metais na liga?

Se essa peça fosse derretida e fundida com mais 300 g de cobre e 200 g de estanho, quais seriam as novas taxas percentuais de participação:

d) do cobre na nova liga?
e) do estanho na nova liga?
f) dos outros metais na nova liga?

7. Em um barril havia uma mistura de água e vinho com 20% de água, quando alguém acrescentou 20 litros de água para que o barril ficasse completamente cheio. Se depois disso a mistura ficou com 25% de água, responda no caderno:

a) Quais são as taxas percentuais de vinho na mistura antes e depois de o barril ficar cheio?
b) Quantos litros da mistura havia inicialmente no barril e qual é a capacidade total do barril?
c) Qual é a quantidade de vinho presente nessa mistura?

8. O Sr. João quer instalar uma fonte de água no centro do canteiro retangular de flores que há em seu jardim. Como a fonte irá ocupar uma área atualmente florida, o Sr. João resolveu aumentar o comprimento do canteiro em 20% e a largura em 30% para compensar a área do canteiro que será subtraída após a instalação da fonte.

a) Qual é o aumento percentual na área do retângulo que delimita o canteiro do Sr. João?
b) Qual é a taxa percentual da área do novo retângulo que será ocupada pela fonte?

9. Estimativas nacionais da porcentagem de população que vive abaixo do nível de pobreza são baseadas em pesquisas de subgrupos, com os resultados ponderados pelo número de pessoas em cada grupo. Definições de pobreza variam consideravelmente entre as nações. Por exemplo, os países ricos geralmente empregam padrões mais generosos de pobreza do que as nações pobres. A tabela a seguir apresenta as populações de cinco diferentes países e a respectiva porcentagem de indivíduos abaixo do nível de pobreza.

Total da população e porcentagem da população abaixo do nível da pobreza, por país

País	População (milhões de habitantes)	População abaixo do nível de pobreza (%)
África do Sul	52,98	50
Brasil	200,4	21
Estados Unidos	313,9	15
Japão	127,3	16
Peru	30,38	31

Fonte de referência: http://www.indexmundi.com. Acesso em: 16 jul. 2021.

Responda às perguntas a seguir, no caderno, de acordo com os dados da tabela:

a) Qual dos países tem o maior número de habitantes vivendo abaixo do nível de pobreza?
b) Qual dos países tem o menor número de habitantes vivendo abaixo do nível de pobreza?
c) Qual é o número aproximado de pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza nos países sul-americanos da tabela?
d) Qual dos países tem a maior porcentagem da população fora do grupo de pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza?
e) Qual dos países tem o maior número de habitantes fora do grupo das pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza?
f) Qual é a diferença entre o número aproximado de sul-africanos e peruanos que estão fora do grupo das pessoas que vivem abaixo do nível de pobreza?

10. O quadro a seguir apresenta a distribuição dos alunos de uma sala de aula do curso Pré-Vestibular do Sistema de Ensino Poliedro. Essa distribuição leva em consideração o sexo e a maioridade dos alunos.

	Homens	**Mulheres**
Menores de idade	12	18
Maiores de idade	36	14

Determine as taxas percentuais de:
a) homens entre os alunos da sala.
b) maiores de idade entre os alunos da sala.
c) maiores de idade entre os homens da sala.
d) homens entre os alunos maiores de idade.
e) homens maiores de idade entre os alunos da sala.

Exercícios propostos

1. De acordo com o relatório do Cenipa (Centro de Investigação e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos), em 2012 houve 168 acidentes aéreos no Brasil, sem nenhum registro grave.

Fonte: Cenipa.

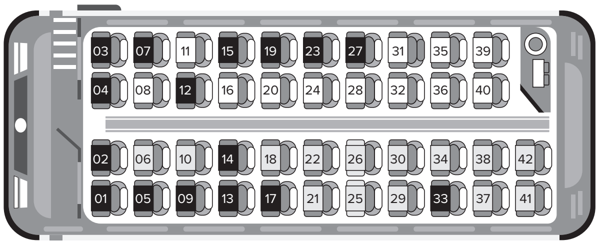
De acordo com os dados do Cenipa, o ano que registrou a maior diferença no número de acidentes aéreos em relação ao ano anterior foi:
a) 2012
b) 2011
c) 2007
d) 2006
e) 2010

2. O quadro a seguir apresenta os anos de nascimento e morte de alguns dos mais importantes matemáticos da história.

René Descartes	1596-1650
Isaac Newton	1643-1727
Leonhard Euler	1707-1783
Carl Friedrich Gauss	1777-1856
Jules Poincaré	1854-1912

Qual desses matemáticos morreu mais jovem?
a) René Descartes
b) Isaac Newton
c) Leonhard Euler
d) Carl Friedrich Gauss
e) Jules Poincaré

3. **Enem 2020** Uma empresa de ônibus utiliza um sistema de vendas de passagens que fornece a imagem de todos os assentos do ônibus, diferenciando os assentos já vendidos, por uma cor mais escura, dos assentos ainda disponíveis. A empresa monitora, permanentemente, o número de assentos já vendidos e compara-o com o número total de assentos do ônibus para avaliar a necessidade de alocação de veículos extras.
Na imagem tem-se a informação dos assentos já vendidos e dos ainda disponíveis em um determinado instante.



A razão entre o número de assentos já vendidos e o total de assentos desse ônibus, no instante considerado na imagem, é

a) $\frac{16}{42}$ b) $\frac{16}{26}$ c) $\frac{26}{42}$ d) $\frac{42}{26}$ e) $\frac{42}{16}$

4. Enem Digital 2020 Na última eleição para a presidência de um clube, duas chapas se inscreveram (I e II). Há dois tipos de sócio: patrimoniais e contribuintes. Votos de sócios patrimoniais têm peso 0,6 e de sócios contribuintes têm peso 0,4. A chapa I recebeu 850 votos de sócios patrimoniais e 4 300 de sócios contribuintes; a chapa II recebeu 1300 votos de sócios patrimoniais e 2 120 de sócios contribuintes. Não houve abstenções, votos em branco ou nulos, e a chapa I foi vencedora. Haverá uma nova eleição para a presidência do clube, com o mesmo número e tipos de sócios, e as mesmas chapas da eleição anterior. Uma consulta feita pela chapa II mostrou que os sócios patrimoniais não mudarão seus votos, e que pode contar com os votos dos sócios contribuintes da última eleição. Assim, para que vença, será necessária uma campanha junto aos sócios contribuintes com o objetivo de que mudem seus votos a para chapa II.
A menor quantidade de sócios contribuintes que precisam trocar seu voto da chapa I para a chapa II para que esta seja vencedora é:

a) 449
b) 753
c) 866
d) 941
e) 1 091

5. USCS-SP 2022 Em um mapa com escala 1 : 8 000 000, o trajeto entre duas cidades é de 6 cm. Sabendo que o preço da gasolina era R$ 5,10 por litro, o custo desta viagem com um carro que faz 12 km/L será em torno de

a) R$ 204,00.
b) R$ 320,00.
c) R$ 480,00.
d) R$ 576,00.
e) R$ 800,00.

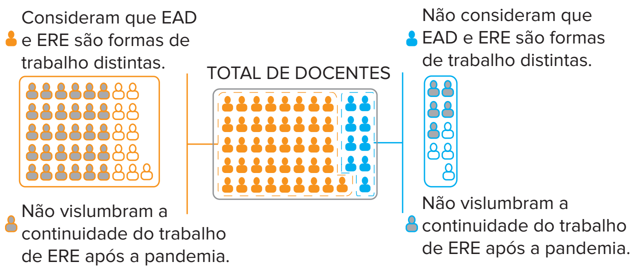
6. Enem Digital 2020 Três pessoas, X, Y e Z, compraram plantas ornamentais de uma mesma espécie que serão cultivadas em vasos de diferentes tamanhos.
O vaso escolhido pela pessoa X tem capacidade de 4 dm^3.O vaso da pessoa Y tem capacidade de 7 000 cm^3 e o de Z tem capacidade igual a 20 L.
Após um tempo do plantio das mudas, um botânico que acompanha o desenvolvimento delas realizou algumas medições e registrou que a planta que está no vaso da pessoa X tem 0,6 m de altura. Já as plantas que estão nos vasos de Y e Z têm, respectivamente, alturas medindo 120 cm e 900 mm.
O vaso de maior capacidade e a planta de maior altura são, respectivamente, os de

a) Y e X.
b) Y e Z.
c) Z e X.
d) Z e Y.
e) Z e Z.

7. Enem 2021 Para realizar um voo entre duas cidades que distam 2 000 km uma da outra, uma companhia aérea utilizava um modelo de aeronave A, capaz de transportar até 200 passageiros. Quando uma dessas aeronaves está lotada de passageiros, o consumo de combustível é de 0,02 litro por quilômetro e por passageiro. Essa companhia resolveu trocar o modelo de aeronave A pelo modelo de aeronave B, que é capaz de transportar 10% de passageiros a mais do que o modelo A, mas consumindo 10% menos combustível por quilômetro e por passageiro.
A quantidade de combustível consumida pelo modelo de aeronave B, em relação à do modelo de aeronave A, em um voo lotado entre as duas cidades, é

a) 10% menor.
b) 1% menor.
c) igual.
d) 1% maior.
e) 11% maior.

8. Uerj 2022 Durante a atual pandemia da covid-19, uma universidade realizou um estudo com 400 docentes sobre o Ensino a Distância (EAD) e o Ensino Remoto Emergencial (ERE). Parte dos resultados desse estudo está representada a seguir:



Adaptado de adunicamp.org.br

Entre os docentes que consideram que o EAD e o ERE são formas de trabalho distintas, a quantidade daqueles que não vislumbram a continuidade do trabalho de ERE após a pandemia é igual a:

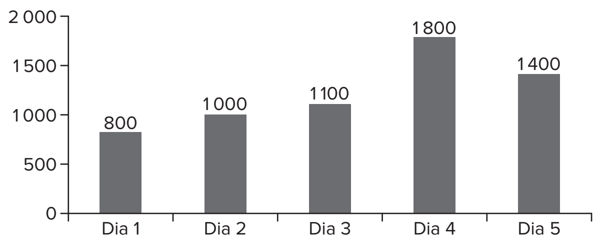
a) 200
b) 220
c) 240
d) 260

9. Unesp 2022 O preço da passagem de ônibus convencional de uma cidade do interior de São Paulo para a capital é de R$ 108,00. Adriana vai estudar nessa cidade e deseja visitar seus pais em São Paulo durante alguns finais de semana. Além da opção de fazer a viagem de ônibus convencional, ela também cogita a possibilidade de fazer a viagem com seu carro, cujo consumo de combustível na estrada é de 14 km por litro de gasolina. Considerando R$ 5,60 o preço do litro de gasolina e 20 centavos por quilômetro rodado o custo geral de manutenção do carro, os custos da viagem de ônibus e da viagem de carro são equivalentes. De acordo com esses dados, a distância considerada entre a cidade em que ela vai estudar e a capital é igual a

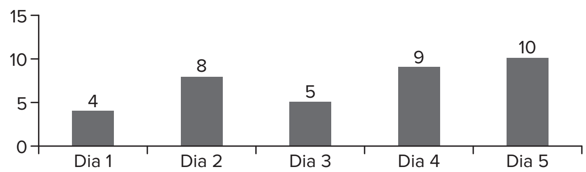
a) 182 km.
b) 180 km.
c) 185 km.
d) 178 km.
e) 176 km.

10. Enem 2020 Os gráficos representam a produção de peças em uma indústria e as horas trabalhadas dos funcionários no período de cinco dias. Em cada dia, o gerente de produção aplica uma metodologia diferente de trabalho. Seu objetivo é avaliar a metodologia mais eficiente para utilizá-la como modelo nos próximos períodos. Sabe-se que, neste caso, quanto maior for a razão entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas, maior será a eficiência da metodologia.

Peças produzidas



Horas trabalhadas



Em qual dia foi aplicada a metodologia mais eficiente?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

11. Uerj 2020 Admita que, em dezembro de 2014, uma filha tinha 20 anos e seu pai, 50. Em dezembro de 2024, a razão entre as idades da filha e do pai será de:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

12. EPCar-MG 2022 Uma obra será realizada nas imediações da cidade de Barbacena, MG. Inicialmente, a empresa contratada fez uma planilha com a previsão de todos os gastos com a execução dessa obra. Assim, a empresa planejou executar o previsto em 16 dias com 25 operários trabalhando 6 horas por dia. Contudo, o engenheiro verificou que o terreno apresentava o triplo da dificuldade prevista para a obra. A empresa, então, replanejou a execução e dobrou o número de operários para que trabalhassem 8 horas por dia. Se for cumprido esse novo planejamento, então o prazo em que essa obra ficará pronta, em dias, será igual a:

a) 15
b) 16
c) 18
d) 20

13. Enem 2020 Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios. A fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir é

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{3}$

14. UPF-RS 2021 O peso aproximado de um objeto em Marte é $\frac{4}{10}$ do seu peso na Terra. Já o peso de um objeto em Júpiter é, aproximadamente, $\frac{26}{10}$ do seu peso na Terra. Se um objeto pesa 100 kg na Terra, a quantidade de quilos que ele pesa a mais em Júpiter do que pesa em Marte é:

a) 80
b) 90
c) 130
d) 220
e) 300

15. Enem PPL 2020 Querendo reduzir custos na limpeza da área de estacionamento de um prédio, o síndico resolveu comprar uma lavadora de alta pressão. Sabe-se que, na utilização desse equipamento, o consumo de água é menor, entretanto, existe o gasto com energia elétrica. O síndico coletou os dados de cinco modelos de lavadora com mesmo preço, e cujos consumos de água e de energia são os fornecidos no quadro.

Modelo de lavadora	Gasto médio de água (litro/hora)	Consumo de energia em uma hora (kWh)
I	350	1,3
II	264	2,0
III	320	1,5
IV	300	1,7
V	276	1,8

As tarifas de água e de energia elétrica são, respectivamente, R$ 0,0025 por litro de água e R$ 0,30 por quilowatt-hora. O modelo de lavadora que o síndico deve adquirir é

a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

16. Enem 2020 O quadro representa os gastos mensais, em real, de uma família com internet, mensalidade escolar e mesada do filho.

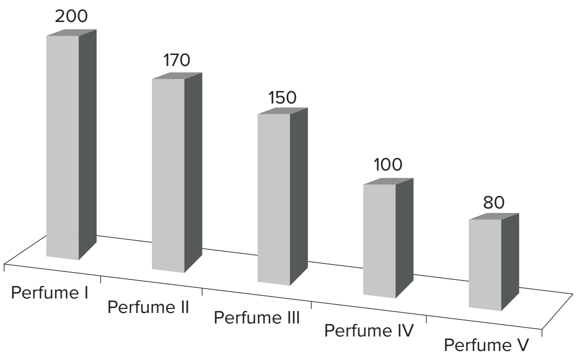
Internet	Mensalidade escolar	Mesada do filho
120	700	400

No início do ano, a internet e a mensalidade escolar tiveram acréscimos, respectivamente, de 20% e 10%. Necessitando manter o valor da despesa mensal total com os itens citados, a família reduzirá a mesada do filho. Qual será a porcentagem da redução da mesada?

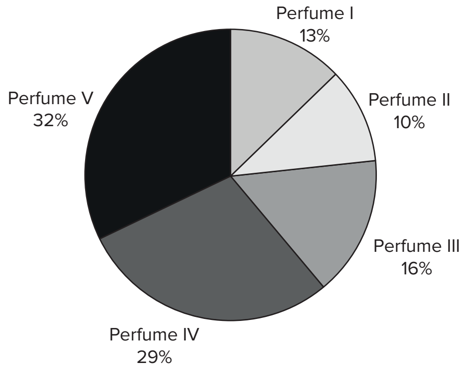
a) 15,0
b) 23,5
c) 30,0
d) 70,0
e) 76,5

17. **Enem 2020** O gerente de uma loja de cosméticos colocou à venda cinco diferentes tipos de perfume, tendo em estoque na loja as mesmas quantidades de cada um deles. O setor de controle de estoque encaminhou ao gerente registros gráficos descrevendo os preços unitários de cada perfume, em real, e a quantidade vendida de cada um deles, em percentual, ocorrida no mês de novembro.

Preço do perfume por unidade (R$)



Porcentagem da quantidade vendida de cada perfume



Dados a chegada do final de ano e o aumento das vendas, a gerência pretende aumentar a quantidade estocada do perfume do tipo que gerou a maior arrecadação em espécie, em real, no mês de novembro. Nessas condições, qual o tipo de perfume que deverá ter maior reposição no estoque?

a) I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

18. **UEG-GO 2021** Pedro comprou três calças pelo preço unitário de R$ 82,00 e cinco camisas pelo preço unitário de R$ 110,50. Como pagou a vista, ele teve desconto de 15% no preço das calças e 18% no preço das camisas. Nessas condições, o valor total de descontos nas compras foi

a) R$ 119,77
b) R$ 122,57
c) R$ 128,77
d) R$ 136,35
e) R$ 138,55

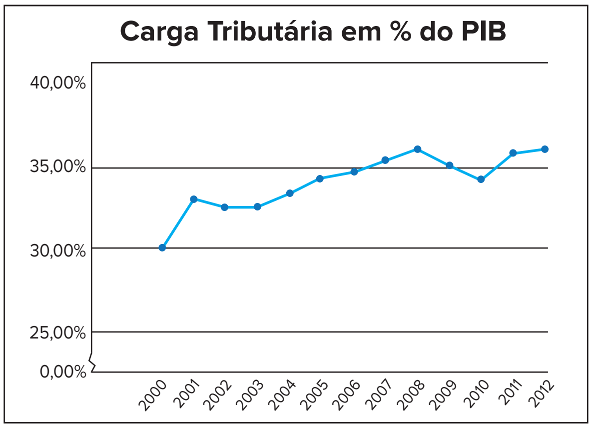
19. **Enem Digital 2020** Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 0,42 e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por R$ 280,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12 800,00 que não depende do número de chaveiros produzidos.
Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

a) 26
b) 46
c) 109
d) 114
e) 115

20. **Enem Digital 2020** Os tempos gastos por três alunos para resolver um mesmo exercício de matemática foram: 3,25 minutos; 3,4 minutos e 191 segundos. O tempo gasto a mais, em segundo, pelo aluno que concluiu por último a resolução do exercício, em relação ao primeiro que o finalizou, foi igual a

a) 13.
b) 14.
c) 15.
d) 21.
e) 29.

21. A carga tributária brasileira vem crescendo continuamente. Em 1986 ela era de 22,39% do PIB, passando para 29,91% em 1990, 30,03% em 2000, 34,22% em 2010, 36,02% em 2011 e 36,27% do PIB em 2012, diz o estudo.
O gráfico a seguir apresenta a evolução da carga tributária neste século:

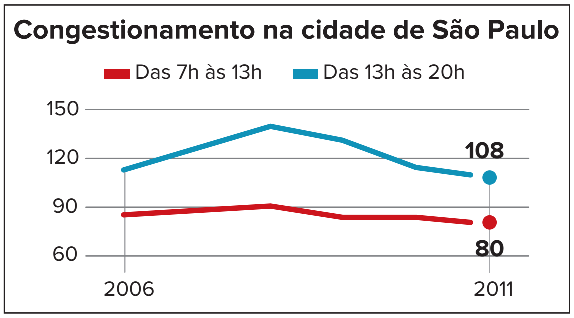


Fonte: IBGE

Sabendo que, em 2009, o PIB nacional atingiu a marca de 3,24 trilhões de reais, então, de acordo com os dados contidos nesse gráfico, pode-se concluir que a carga tributária em 2009 foi de:

a) R$ 1 134 000 000 000,00
b) R$ 134 000 000 000,00
c) R$ 113 400 000 000,00
d) R$ 1 134 000 000,00
e) R$ 134 000 000,00

22. Atualmente, nas grandes cidades brasileiras, os imensos congestionamentos provocam prejuízos cada vez maiores aos proprietários de veículos.
O gráfico a seguir apresenta a evolução do número médio de quilômetros de congestionamento da cidade de São Paulo nos horários de pico, desde 2006 até 2011.



Fonte: CET-SP

De acordo com as informações do gráfico, em 2011, o número médio de quilômetros de congestionamento do período entre 13 e 20 horas foi:

a) 20% superior ao do período entre 7h e 13h.
b) 25% superior ao do período entre 7h e 13h.
c) 30% superior ao do período entre 7h e 13h.
d) 35% superior ao do período entre 7h e 13h.
e) 40% superior ao do período entre 7h e 13h.

23. UFGD-MS 2022 Como em outras atividades de criação de animais, a piscicultura objetiva a manutenção de certa população (ou quantidade) de organismos, no caso, peixes, em uma determinada área por um período de tempo também determinado.

ITUASSU, Daniel Rabello. Cálculo de povoamento de viveiros e tanques-rede. Embrapa Agrossilvipastoril-Circular Técnica (INFOTECA-E), 2015.

Reprodução

Disponível em: https://www.agrofy.com.br/tanque-rede-para-piscicultura-vinitanq-sansuy.html. Acesso em: 25 jan. 2022.

Considerando que certo piscicultor deseja produzir, no mínimo, 1 tonelada por ciclo de produção do peixe tilápia em tanques-rede de 6 m^3 com capacidade de estocar 50 peixes/m^3 de peso médio de 750 g, desprezando-se a taxa de mortalidade dos peixes, e tendo como referência o ciclo de produção diretamente relacionado à quantidade de peixes colocados no tanque, qual a quantidade mínima de tanques-rede para a produção almejada?

a) 4 tanques-rede.
b) 5 tanques-rede.
c) 8 tanques-rede.
d) 12 tanques-rede.
e) 25 tanques-rede.

24. No final do ano de 2013, a Secretaria Estadual da Fazenda do Rio de Janeiro divulgou uma lista com os valores venais dos veículos registrados no estado que teriam de pagar o IPVA em 2014. No entanto, o governo não divulgou a tabela com os valores do tributo a pagar, obrigando o contribuinte a fazer o cálculo de acordo com o tipo de combustível de seu veículo.

Os veículos movidos à gasolina pagam de imposto o equivalente a 4% de seus valores venais, os veículos com motor *flex* pagam 3%, os veículos movidos a etanol pagam 2% e os movidos a gás natural, apenas 1%.

Marcos teve de pagar o IPVA de seus dois veículos em janeiro deste ano. Um dos automóveis, movido a etanol, tinha um valor venal de R$ 8 200,00 e o outro, modelo *flex*, tinha um valor venal de R$ 23 500,00.

O valor pago por Marcos foi de:

a) R$ 1 089,00
b) R$ 986,00
c) R$ 869,00
d) R$ 705,00
e) R$ 649,00

25. Em uma cidade há apenas as academias A e B, de modo que, entre os frequentadores, 55% são associados da academia A e 45% da academia B, não havendo ninguém que seja associado das duas academias.

Uma campanha de *marketing* promovida pela academia B pretende conquistar 20% dos associados da academia A, fazendo-os mudar de academia.

Então, se a campanha for bem-sucedida e, de fato, conquistar os associados pretendidos, e também não houver nenhuma mudança no número de frequentadores das academias da cidade, a nova porcentagem de associados da academia B será de:

a) 51%
b) 56%
c) 59%
d) 62%
e) 65%

26. FMP-RJ 2022 Sabe-se que 21 mL de um medicamento devem ser administrados a um paciente, ao longo de três dias, de tal forma que as dosagens diárias a serem administradas sejam diretamente proporcionais a 2, 5 e 7, nessa ordem.

Assim, as dosagens diárias, em mL, a serem administradas são:

a) 2; 5; 7
b) 2; 8; 11
c) 3; 7; 11
d) 3; 7,5; 10,5
e) 3,5; 7,5; 10

27. Unesp 2022 Um químico precisa misturar três partes de hidróxido de sódio (NaOH) com duas partes de água. Para essa tarefa, ele tem 5 000 μL de NaOH e 1600 μL de água. Sabe-se que o volume da mistura deve ser de, pelo menos, 3 mL e de, no máximo, 5 mL. Seja x a quantidade total de NaOH, em mL, que deve ser usada na mistura correta. Dado que 1 μL corresponde à 10^{-6} L, a quantidade total de água, em mL, e o intervalo contendo apenas todos os valores possíveis de x que podem ser usados na mistura são, respectivamente:

a) $\frac{2x}{3}$ e $2{,}4 \leq x \leq 3$
b) $\frac{2x}{3}$ e $1{,}6 \leq x \leq 2{,}4$
c) $\frac{2x}{3}$ e $1{,}2 \leq x \leq 1{,}8$
d) $\frac{2x}{5}$ e $1{,}6 \leq x \leq 2{,}4$
e) $\frac{2x}{3}$ e $1{,}8 \leq x \leq 2{,}4$

28. Fuvest-SP 2022 Um vídeo tem três minutos de duração. Se o vídeo for reproduzido, desde o seu início, com velocidade de 1,5 vezes a velocidade original, o tempo de reprodução do vídeo inteiro será de

a) 1min30s.
b) 1min50s.
c) 2min00s.
d) 2min30s.
e) 2min50s.

29. O preço dinâmico cobrado pelos aplicativos de transporte urbano funciona de modo que um aumento na demanda por viagens faça o preço subir, para atrair mais motoristas ao local, garantindo que haja transporte para todos os clientes. Consequentemente, quando a oferta de motoristas sobe e o número de chamadas diminui por causa do alto custo da viagem, o preço cai até voltar ao normal.
Assim, o preço de uma corrida em um desses aplicativos é uma grandeza diretamente proporcional ao fator que aparece na tela quando o aplicativo é ligado. Se, por exemplo, a tela indicar 1,8×, as viagens naquela região e naquele momento terão seu preço normal multiplicado por um fator igual a 1,8.
Além disso, as empresas oferecem diversas promoções, como um desconto de 5% na próxima viagem, quando o cliente indica o serviço para um amigo que baixa o aplicativo.
Certo dia, uma pessoa que tinha direito a um desconto de 5% chamou um motorista por esse aplicativo em um momento em que a tela indicava o fator dinâmico 1,8×. Nesse dia, a pessoa teve de pagar pela sua viagem um percentual a mais sobre o preço normal, sem desconto nem fator dinâmico. Esse percentual foi de:

a) 71%
b) 75%
c) 80%
d) 7,6%
e) 3%

30. Leia a notícia a seguir.

> RIO e BRASÍLIA – Citada nos grampos de uma operação realizada pela Polícia Federal, uma empreiteira recebeu, em 2020, a quantia de 884,4 milhões de reais da União. O volume de recursos do Governo Federal para a Construtora Discriminante cresceu 1 417%, de 2003 até 2020 em valores corrigidos pelo IPCA.
>
> Fonte fictícia.

Para determinar, em milhões de reais, o valor que essa construtora recebeu da União em 2003, basta tomar o número 884,4 e dividi-lo por:

a) 241,7
b) 1,527
c) 142,7
d) 14,17
e) 15,17

31. Uece 2021 José possui um automóvel que, em uma rodovia, percorre exatamente 12 km com um litro de gasolina. Certo dia, depois de percorrer 252 km na mesma rodovia, José observou que o ponteiro indicador de combustível que antes marcava $\frac{5}{6}$ da capacidade do tanque de combustível estava indicando $\frac{7}{30}$ da capacidade do tanque. Assim, é correto concluir que a capacidade do tanque, em litros, é

a) 40.
b) 35.
c) 45.
d) 30.

32. Um comerciante compra uma mercadoria por determinado valor e pretende vendê-la para obter um lucro de 40% sobre o preço de compra. Como seus clientes estão acostumados a obter descontos, o comerciante anuncia a mercadoria em sua vitrine por um preço 30% superior ao que gostaria de vender.
Passados alguns meses, a mercadoria ainda está na vitrine e o comerciante, chateado com o objeto encalhado, ficará satisfeito se conseguir vendê-la pelo mesmo preço que pagou por ela. Dessa forma, o maior desconto sobre o preço oferecido que o vendedor poderá conceder a um cliente e ainda assim não perder dinheiro na transação está mais próximo de:

a) 45%
b) 50%
c) 65%
d) 70%
e) 80%

33. A notícia a seguir foi publicada pelo jornal *O Estado de S. Paulo* em 4 de março de 2013:

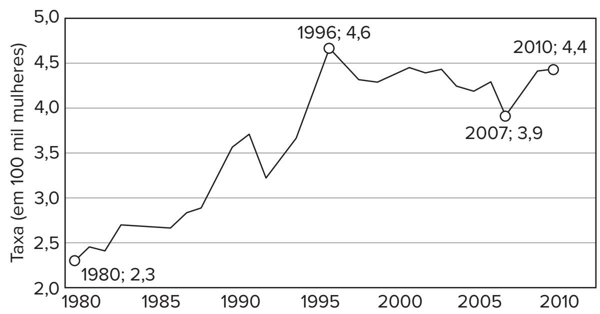
> **Preço da terra agrícola subiu 227% em dez anos, quase o dobro da inflação**
>
> Puxado pelo aumento das cotações da dobradinha soja/milho no mercado internacional, o preço médio de um hectare de terra destinado ao agronegócio mais que triplicou em dez anos no Brasil, superando de longe a inflação. Além disso, em cinco anos, entre 2008 e 2012, a terra se valorizou num ritmo mais acelerado que o dólar, aplicações de renda fixa, ações e até mesmo o ouro, o "queridinho" dos investidores em períodos de crise.

Fonte: DE CHIARA, Márcia. Preço da terra agrícola subiu 227% em dez anos, quase o dobro da inflação no período. *Estado de S. Paulo*, São Paulo, 4 mar. 2013. Economia. Disponível em: https://economia.estadao.com.br/noticias/geral,preco-da-terra-agricola-subiu-227-em-dez-anos-quase-o-dobro-da-inflacao-imp-,1003989. Acesso em: 15 jul. 2021.

De acordo com essa notícia, sabendo-se qual era o preço médio X do km^2 de terra agricola há dez anos, para estimar o preço atual do km^2, basta multiplicar X por:

a) 1,227
b) 1,327
c) 2,27
d) 3,27
e) 227

34. Enem 2020 Realizou-se um estudo sobre a violência no Brasil. As taxas obtidas para os homicídios de mulheres de 1980 a 2010 estão registradas no gráfico.



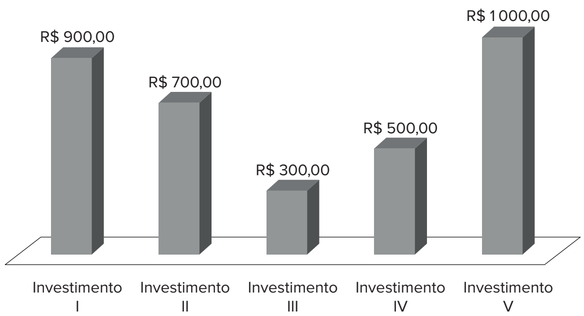
Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

De acordo com os dados apresentados, o aumento percentual relativo da taxa de 2007 para 2010 foi mais próximo de

a) 11%.
b) 13%.
c) 17%.
d) 50%.
e) 89%.

35. **Enem 2020** Um investidor pretende aplicar R$ 100 000,00 no mercado financeiro. Para isso pesquisou cinco investimentos distintos, aferindo os rendimentos mensais, em real, de cada um deles. Para decidir em qual aplicar seu dinheiro, considerou também a incidência mensal de Imposto de Renda (IR) sobre o respectivo rendimento. Avaliou que o maior retorno financeiro virá da aplicação em um único investimento: aquele em que a diferença entre o rendimento mensal e o imposto que incidir sobre ele seja a maior possível. Os dados levantados pelo investidor sobre rendimento e imposto referentes à aplicação encontram-se a seguir.

Rendimento de cada investimento por mês



Investimento	Incidência de IR sobre o rendimento (por mês)
I	12%
II	9%
III	20%
IV	10%
V	22%

O investidor decidiu fazer a aplicação no investimento

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

36. **Enem 2020** Uma pessoa possuía um lote com área de 300 m^2. Nele construiu sua casa, utilizando 70% do lote para construção da residência e o restante para área de lazer. Posteriormente, adquiriu um novo lote ao lado do de sua casa e, com isso, passou a dispor de um terreno formado pelos dois lotes, cuja área mede 420 m^2. Decidiu então ampliar a casa, de tal forma que ela ocupasse no mínimo 60% da área do terreno, sendo o restante destinado à área de lazer. O acréscimo máximo que a região a ser destinada à área de lazer no terreno poderá ter, em relação à área que fora utilizada para lazer no lote original, em metro quadrado, é

a) 12 b) 48 c) 78 d) 138 e) 168

37. Um bloco metálico de 0,8 kg é de uma liga composta de 69% de cobre, 28% de estanho e 3% de outros metais. Esse bloco será derretido em uma fundição, quando receberá o acréscimo de massas iguais de cobre e de estanho apenas. Qual massa de estanho deverá ser acrescentada nessa liga para que a porcentagem de estanho fique em 30%?

a) 8 g b) 16 g c) 20 g d) 40 g e) 80 g

38. Aumentando a base de um retângulo em 20% e diminuindo sua altura também em 20% obtém-se um quadrado com uma área 4% menor que a área do retângulo original. Assim, a razão entre a base e a altura do retângulo original era de:

a) 1 para 2.
b) 1 para 3.
c) 1 para 4.
d) 2 para 3.
e) 3 para 4.

39. Se 35% de uma quantia A equivalem a 42% de outra quantia B, então qual aumento percentual deve ser dado ao valor de B para que ele alcance o valor de A?

a) 10%
b) 14%
c) 20%
d) 25%
e) 33%

40. **Enem 2021** Um parque temático brasileiro construiu uma réplica em miniatura do castelo de Liechtenstein. O castelo original, representado na imagem, está situado na Alemanha e foi reconstruído entre os anos de 1840 e 1842, após duas destruições causadas por guerras.

Reprodução

O castelo possui uma ponte de 38,4 m de comprimento e 1,68 m de largura. O artesão que trabalhou para o parque produziu a réplica do castelo, em escala. Nessa obra, as medidas do comprimento e da largura da ponte eram, respectivamente, 160 cm e 7 cm.

A escala utilizada para fazer a réplica é:

a) 1 : 576
b) 1: 240
c) 1: 24
d) 1 : 4,2
e) 1 : 2,4

Texto complementar

Taxas demográficas

Nos estudos de Geografia, as principais taxas demográficas são expressas em porcentagens (%) ou permilagens (‰).

As taxas de natalidade e de mortalidade informam as razões entre o número de nascimentos ou de óbitos a cada mil habitantes de determinada região (cidade, país ou continente) no período de um ano. Portanto, são ambas expressas em permilagens.

Outra grandeza demográfica muito importante é o **crescimento vegetativo**, que resulta da comparação entre as taxas de natalidade e de mortalidade por meio da subtração, ou seja, é o excedente da taxa de natalidade para a de mortalidade. O crescimento vegetativo é uma grandeza que costuma ser representada na forma de porcentagem, e não de permilagem, como as taxas subtraídas.

Considere o estudo demográfico de determinada região no período de um ano. Sendo P a população inicial, N o número de nascimentos e M o número de óbitos registrados no período considerado, temos que:

- a taxa de natalidade é obtida da razão $\frac{N}{P}$;
- a taxa de mortalidade é obtida da razão $\frac{M}{P}$.

Assim, efetuando essas divisões encontramos números decimais que representam as taxas unitárias de natalidade e de mortalidade; contudo como esses índices demográficos devem ser expressos como permilagens, devemos deslocar a vírgula das taxas unitárias exatamente **três casas para a direita**.

Por exemplo, se determinado município tinha uma população de 31 500 habitantes há exatamente um ano e, durante esse ano, foram registrados 2 646 nascimentos, além de 1 890 mortes, podemos concluir que:

- a taxa de natalidade do município durante esse ano foi de $\frac{2\,646}{31\,500} = 0{,}084 = 84‰$.
- a taxa de mortalidade do município durante esse ano foi de $\frac{1\,890}{31\,500} = 0{,}06 = 60‰$.

Por fim, o crescimento vegetativo do município nesse ano pode ser encontrado subtraindo-se a taxa de mortalidade da taxa de natalidade e deslocando-se a vírgula exatamente **uma casa para a direita**, a fim de expressar essa grandeza em sua forma percentual:

$$CV = 84‰ - 60‰ = 24‰ = 2{,}4\%$$

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Variação de uma grandeza é a diferença entre os valores final e inicial em algum período:

$$\Delta V = V_F - V_I$$

Razões simples são valores adimensionais obtidos por quocientes entre grandezas com as mesmas unidades de medida.

Razões compostas são obtidas pelo quociente entre grandezas de unidades de medidas diferentes.

Proporção é a igualdade de duas razões obtidas por quociente:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Propriedades

- O produto dos termos médios equivale ao produto dos termos extremos:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$$

- Simplifica-se uma proporção dividindo-se ambos os termos antecedentes ou ambos os termos consequentes por um mesmo número real não nulo.
- A razão entre as somas dos antecedentes e a soma dos consequentes de uma proporção é equivalente às razões que compõem a proporção:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

- Novas proporções podem ser obtidas de uma proporção original substituindo-se ambos os antecedentes ou ambos os consequentes de uma proporção pela soma dos termos de suas respectivas razões:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + y_1}{y_1} = \frac{x_2 + y_2}{y_2}$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1 + x_1} = \frac{x_2}{y_2 + x_2}$$

Porcentagens e taxas

- **Taxa unitária** é o quociente da parte sobre o todo.
- **Taxa percentual** é 100 vezes a taxa unitária.

O símbolo **%** indica a fração $\frac{1}{100}$.

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Todo número real pode ser expresso na forma percentual, bastando multiplicá-lo por 100:

$$N = (100 \cdot N)\%$$

Fator de correção

$$\begin{cases} \text{Para aumentos de } p\%\text{: } F = 1 + \dfrac{p}{100}. \\ \text{Para descontos de } p\%\text{: } F = 1 - \dfrac{p}{100}. \end{cases}$$

O valor final de uma grandeza, após uma série de aumentos e/ou reduções percentuais, pode ser obtido multiplicando-se o valor inicial dessa grandeza pelo produto de todos os fatores de correção correspondentes a esses aumentos e/ou reduções, ou seja:

$$V_F = V_I \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \ldots$$

Se um aumento percentual anula uma redução percentual, ou vice-versa, o valor final da grandeza que sofre o aumento e a redução coincide com o valor inicial e os fatores de correção, correspondentes ao aumento e à redução, são tais que:

$$F_A \cdot F_R = 1$$

Quer saber mais?

Sites

MATEMÁTICA Multimídia. A história de Mussaraf. *Unicamp*. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1115.
Nesse vídeo, produzido pela equipe de M3 – Matemática Multimídia da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), dois problemas que envolvem razão e proporção são apresentados por meio de uma divertida história com o personagem Mussaraf.
Acesso em: 24 jun. 2022.

MATEMÁTICA Multimídia. Luthier de Proporções. *Unicamp*. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1129.
Esse vídeo, também produzido pela equipe M3, conta um pouco sobre a aplicação dos conceitos de razão, proporção e frequência na Música, em especial na explicação referente às das notas musicais.
Acesso em: 24 jun. 2022.

Exercícios complementares

1. O taxímetro é um aparelho eletrônico utilizado em táxis para registrar o valor que deverá ser cobrado pelo serviço com base na distância percorrida e no tempo gasto no percurso.
No instante em que o passageiro entra no carro, o taxímetro é acionado e exibe, no visor, um valor inicial conhecido como bandeirada. Depois, com o carro em movimento, o taxímetro acrescenta uma parcela para cada quilômetro percorrido, que pode assumir dois valores diferentes, dependendo do dia e do horário. Esses valores são chamados de bandeira 1, aplicado de segunda a sábado durante o dia, e de bandeira 2, um pouco mais caro, aplicado apenas aos domingos e feriados, ou durante a noite e a madrugada dos demais dias da semana. Além disso, enquanto o carro fica parado, o taxímetro acrescenta ao valor da corrida uma fração de outra tarifa conhecida como hora parada.
O quadro a seguir apresenta as tarifas cobradas nos táxis de quatro municípios da região do Vale do Paraíba, no interior do estado de São Paulo:

	São José dos Campos (R$)	Jacareí (R$)	Taubaté (R$)	Caraguatatuba (R$)
Bandeirada	4,50	4,00	3,40	3,70
Bandeira 1	2,25	1,90	3,10	2,90
Bandeira 2	2,90	2,50	3,60	3,70
Hora parada	18,50	15,00	21,60	25,00

a) De segunda a sexta, o Sr. Antônio, que mora em São José dos Campos, vai de táxi ao trabalho, percorrendo uma distância de 6 km. Contudo, o Sr. Antônio conseguiu um emprego novo em Caraguatatuba e está procurando uma casa para alugar nesse município. Desconsiderando-se os gastos com as horas paradas nas corridas de táxi, qual deve ser a distância percorrida de táxi entre a casa nova e o emprego novo do Sr. Antônio, aproximadamente, para que seus gastos diários com essas corridas não se alterem?

b) No domingo, D. Beatriz, que também mora em São José dos Campos, foi visitar a irmã, residente em Jacareí, e tomou um táxi que percorreu uma distância de 20 km sem ficar parado tempo suficiente para que a tarifa da hora parada fosse acionada. No entanto, por tratar-se de uma viagem intermunicipal, o taxista cobrou uma taxa extra de 20% sobre o valor indicado no visor do taxímetro.
Na volta, D. Beatriz tomou um táxi de Jacareí até sua casa, o qual percorreu novamente a distância de 20 km sem ficar parado. Dessa vez, porém, a taxa extra cobrada pelo taxista foi de 40% sobre o valor indicado no visor do taxímetro. Assim, quanto D. Beatriz gastou a menos na viagem de ida?

2. No ano de 2010, a Líbia exportou 1,5 milhão de barris de petróleo por dia. O quadro a seguir mostra a distribuição percentual da exportação do petróleo líbio em relação aos seus principais compradores, em 2010:

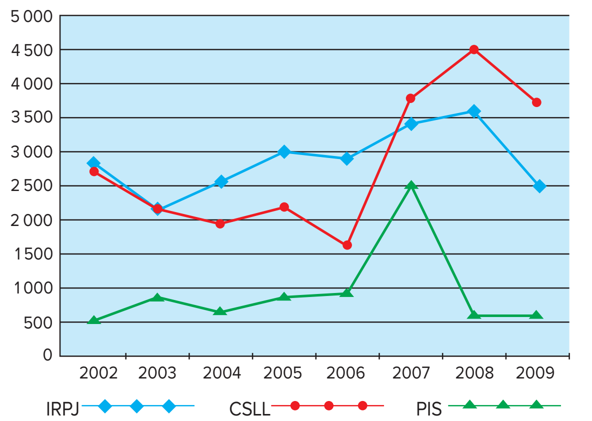
Itália	28%	Espanha	10%
França	15%	Grécia	5%
China	11%	Grã-Bretanha	4%
Alemanha	10%	Estados Unidos	3%

Os 14% restantes do petróleo exportado pela Líbia, em 2010, tiveram como destino outros países europeus.
Sabendo que um barril de petróleo tem capacidade de aproximadamente 160 litros, podemos concluir que o volume diário de petróleo que a Líbia exportou para fora da Europa, no ano de 2010, foi de aproximadamente:

a) 3 milhões e 360 mil litros.
b) 7 milhões e 200 mil litros.
c) 26 milhões e 400 mil litros.
d) 33 milhões e 600 mil litros.
e) 40 milhões e 800 mil litros.

3. O gráfico a seguir apresenta, em milhões de reais, os valores totais arrecadados pela União, no período de 2002 a 2009, em consequência da cobrança de três impostos distintos: o IRPJ (Imposto de Renda sobre Pessoa Jurídica), a CSLL (Contribuição Social sobre o Lucro Líquido), que também é cobrada das pessoas jurídicas, e o PIS (Programa de Integração Social), que incide sobre o faturamento bruto das empresas.

Faturamento da União



Fonte: Dados fictícios.

De acordo com as informações desse gráfico, é correto afirmar que o período de 2006 a 2007:

a) foi o único que registrou aumento na arrecadação dos três impostos.
b) foi o único em que a arrecadação do IRPJ ultrapassou a arrecadação da CSLL.
c) foi quando a arrecadação do PIS ultrapassou a arrecadação da CSLL.
d) registrou um aumento na arrecadação total dos três impostos inferior a 5 milhões de reais.
e) registrou um aumento na arrecadação total dos três impostos superior a 4 bilhões de reais.

Texto para as questões **4** e **5**.

Na farmácia de uma vizinhança, pode-se encontrar cloreto de sódio diluído em frascos de soro fisiológico ou ampolas injetáveis. As opções oferecidas pela farmácia são:

Soro fisiológico Frasco de 100 mL a 0,9% por R$ 1,15. Frasco de 250 mL a 0,9% por R$ 2,20. Frasco de 500 mL a 0,9% por R$ 4,00.
Cloreto de sódio injetável Caixa com cinco ampolas de 10 mL a 10% por R$ 0,61. Caixa com cinco ampolas de 10 mL a 20% por R$ 1,61. Ampola de 20 mL a 20% por R$ 0,65.

4. Tomás precisa de 400 mL de soro fisiológico de cloreto de sódio. A opção mais econômica para a necessidade de Tomás, nessa farmácia, é:

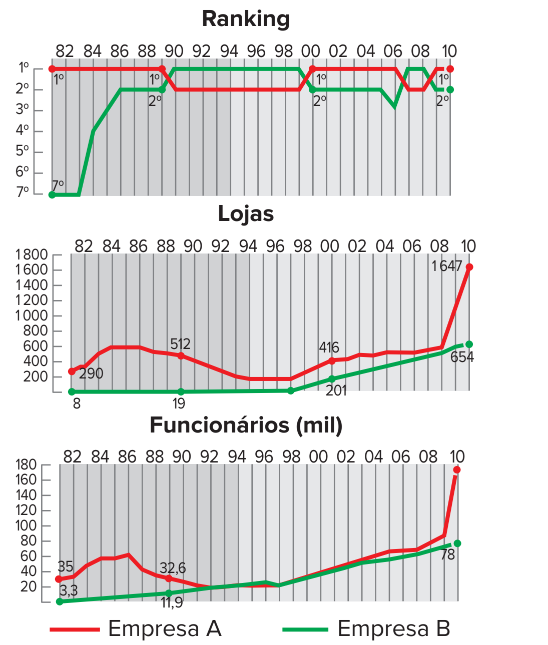
a) comprar 4 frascos de 100 mL.
b) comprar 2 frascos de 250 mL.
c) comprar 1 frasco de 250 mL e 2 frascos de 100 mL.
d) comprar 1 frasco de 500 mL.
e) comprar 3 frascos de 100 mL.

5. Marilena precisa de 80 mL de uma solução de cloreto de sódio diluído a 12,5% e, para isso, foi a essa farmácia comprar ampolas diluídas a 10% e a 20%. Depois, quando chegasse a sua casa, faria a mistura necessária.
Qual é a quantia mínima que Marilena pode gastar nessa farmácia na compra do suficiente para fazer a mistura?

a) R$ 2,52 **c)** R$ 2,21 **e)** R$ 2,26
b) R$ 1,87 **d)** R$ 1,26

Texto para as questões **6**, **7** e **8**.

Depois de se revezarem no *ranking* de maiores varejistas por mais de duas décadas, as empresas A e B negociaram uma fusão durante o primeiro semestre deste ano. Os gráficos a seguir apresentam a colocação no *ranking*, o número de lojas e o número de funcionários dessas empresas desde 1981 até o final de 2010:



Fonte: Dados fictícios.

6. Observando-se o gráfico do número de funcionários dessas empresas, pode-se concluir que:
   a) a diferença entre o número das empresas A e B é crescente desde 1997.
   b) de 2004 a 2008 a empresa A não contratou nem demitiu funcionários.
   c) durante todo o período considerado, a empresa B contratou anualmente mais funcionários do que demitiu.
   d) em 1986, o número de funcionários da empresa A atingiu um pico que só foi recuperado 20 anos depois.
   e) o número de funcionários da empresa B praticamente duplicou desde o início do século XXI.

7. De acordo com os dados registrados nos três gráficos, durante o mais longo período que a empresa A esteve na segunda colocação,
   a) a razão funcionários/loja da empresa A foi inferior à da empresa B.
   b) a razão funcionários/loja da empresa A foi superior à da empresa B.
   c) a razão funcionários/loja de ambas as empresas permaneceu constante.
   d) a razão funcionários/loja da empresa A permaneceu constante.
   e) a razão funcionários/loja da empresa B permaneceu crescente.

8. Em cada gráfico, a região com o fundo escurecido indica o período de hiperinflação que o Brasil atravessou até a instauração do Plano Real em 1994. Note que as quedas no número de lojas e funcionários da empresa A cessaram nesse mesmo ano.
   Observando os gráficos, pode-se concluir que, a partir de 1986 e durante o período de hiperinflação, a empresa A registrou uma diminuição média de aproximadamente:
   a) 1000 funcionários por loja fechada.
   b) 400 funcionários por loja fechada.
   c) 100 funcionários por loja fechada.
   d) 40 funcionários por loja fechada.
   e) 10 funcionários por loja fechada.

9. **Unicamp-SP 2022** Certo modelo de carro é vendido em duas versões: uma a gasolina e outra híbrida. Essa última versão conta com um motor elétrico para funcionar em baixas velocidades, reduzindo, assim, o consumo de combustível e também os índices de poluição.
   A versão a gasolina custa R$ 150 000,00 e a versão híbrida custa R$ 180 000,00. A tabela a seguir indica o consumo de combustível de cada uma das versões:

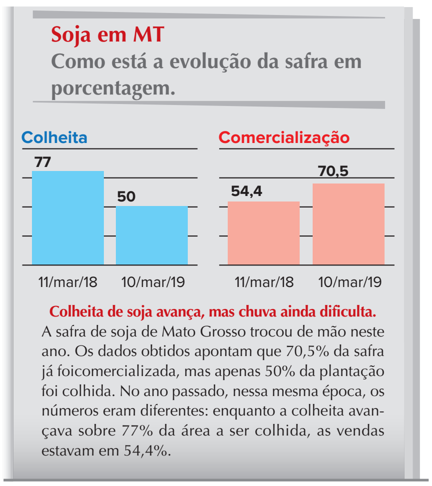
	Uso na cidade	Uso na estrada
Versão a gasolina	12 km/L	14 km/L
Versão híbrida	18 km/L	16 km/L

   Note que a versão híbrida é mais econômica, porém custa mais caro.
   Um motorista faz diariamente um percurso de 36 km na cidade e de 56 km na estrada. Considerando que cada litro de gasolina custa R$ 5,00 e que, ao longo do tempo, esse preço será constante e o percurso não se alterará, quantos anos de uso serão necessários para que a economia no abastecimento compense o preço mais alto pago inicialmente pelo carro híbrido?
   a) Mais que 8 e menos que 10 anos.
   b) Mais que 10 e menos que 12 anos.
   c) Mais que 12 e menos que 14 anos.
   d) Mais que 14 e menos que 16 anos.

10. **Unesp 2021** Segundo dados da Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel), até o final de 2019 havia no Brasil um total aproximado de 171 mil sistemas de energia solar instalados, o que corresponde a apenas 0,2% das unidades consumidoras do país. Desse total, 5/9 correspondem aos sistemas instalados apenas no ano de 2019. Sabendo que o número de novas instalações de sistemas de energia solar triplicou no Brasil em 2019, quando comparado a 2018, e considerando que o número de novas instalações triplique ano a ano, o número de novas instalações previstas para o ano de 2022 será quantas vezes o número total aproximado de sistemas instalados até o final de 2019?
   a) 9 b) 27 c) 12 d) 3 e) 15

11. O **alqueire** é uma medida agrária, não decimal, ainda usada no Brasil para designar áreas de grandes propriedades rurais. A porção de terra contida em um único alqueire varia de acordo com a legislação de cada estado. No estado de São Paulo, por exemplo, 1 alqueire equivale, em área, a um terreno quadrado com 110 metros de lado. Já no estado de Minas Gerais, 1 alqueire equivale a uma área de 18 mil metros quadrados.
    De acordo com as informações fornecidas, pode-se estimar que em São Paulo a medida de 1 alqueire designa uma área aproximadamente:
    a) 67% menor que no estado de Minas Gerais.
    b) 33% menor que no estado de Minas Gerais.
    c) 16% menor que no estado de Minas Gerais.
    d) 32% maior que no estado de Minas Gerais.
    e) 49% maior que no estado de Minas Gerais.

12. Leia a notícia a seguir:



Fonte fictícia.

Se, no estado de Mato Grosso, a distribuição da quantidade de soja por hectare plantado é homogênea; então, de acordo com as informações apresentadas na notícia, pode-se concluir que, em 10 de março de 2019, para atingir a quantidade de soja já comercializada, ainda era necessário colher ______ da área que ainda não havia sido colhida.

a) 50%
b) 41%
c) 36,3%
d) 20,5%
e) 16,1%

13. A porcentagem de gordura corporal (BF ou Body Fat) é a razão entre a quantidade de gordura e a massa total do corpo. Contudo, como é muito difícil determinar a quantidade exata de gordura em um corpo ainda vivo, há uma fórmula matemática capaz de estimar essa porcentagem a partir do IMC (Índice de Massa Corporal), da idade e do sexo da pessoa.

$$BF = [(1{,}2 \cdot IMC) + (0{,}23 \cdot I) - (10{,}8 \cdot S) - 54]\%$$

Nesta fórmula, I indica a idade da pessoa em anos e S é um valor que depende do sexo da pessoa, de modo que S = 1 para homens e S = 0 para mulheres.
Qual é a quantidade aproximada de gordura no corpo de uma mulher com 30 anos de idade sabendo que ela pesa 65 kg e possui 22 de IMC?

a) 12 kg
b) 15 kg
c) 18 kg
d) 21 kg
e) 25 kg

14. Fuvest-SP 2016 O Sistema Cantareira é constituído por represas que fornecem água para a Região Metropolitana de São Paulo. Chama-se de "volume útil" do Sistema os 982 bilhões de litros que ficam acima do nível a partir do qual a água pode ser retirada sem bombeamento. Com o uso de técnicas mais elaboradas, é possível retirar e tratar parte da água armazenada abaixo desse nível. A partir de outubro de 2014, a Sabesp passou a contabilizar uma parcela de 287 bilhões de litros desse volume adicional, denominada "reserva técnica" ou "volume morto", e chamou de "volume total" a soma do volume útil com a reserva técnica. A parte do volume total ainda disponível para consumo foi chamada de "volume armazenado".
O primeiro índice usado pela Sabesp para divulgar o nível do Sistema, após o início do uso da reserva técnica, foi o percentual do volume armazenado em relação ao volume útil (e não ao volume total). Chama-se este percentual de Índice 1.

a) Calcule o valor que terá o Índice 1 quando as represas estiverem completamente cheias, supondo que a definição de "volume armazenado" não tenha mudado.
A partir de abril de 2015, a Sabesp passou a divulgar outros dois índices, além do Índice 1 (veja o Quadro). Note que o Índice 3 pode assumir valores negativos e valerá 100% quando as represas do Sistema estiverem completamente cheias.

b) No momento em que o Índice 1 for 50%, que valores terão os Índices 2 e 3?

c) Qual é o valor do Índice 2 no momento em que o Índice 3 é negativo e vale −10%?

QUADRO

$$\text{Índice 1} = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume útil}} \times 100\%$$

$$\text{Índice 2} = \frac{\text{volume armazenado}}{\text{volume total}} \times 100\%$$

$$\text{Índice 3} = \frac{(\text{volume armazenado}) - (\text{volume da reserva técnica})}{\text{volume útil}} \times 100\%$$

15. Enem 2021 Um automóvel apresenta um desempenho médio de 16 km/L. Um engenheiro desenvolveu um novo motor a combustão que economiza, em relação ao consumo do motor anterior, 0,1 L de combustível a cada 20 km percorridos.
O valor do desempenho médio do automóvel com o novo motor, em quilômetro por litro, expresso com uma casa decimal, é

a) 15,9.
b) 16,1.
c) 16,4.
d) 17,4.
e) 18,0.

16. O sangue humano é produzido na medula óssea de alguns ossos como vértebras, costelas, quadril, crânio e externo. Nas crianças, o fêmur e outros ossos longos também o produzem.
O sangue é formado por uma parte líquida (plasma), constituída por água, sais, vitaminas e fatores de coagulação, e uma parte sólida, composta de hemácias, leucócitos e plaquetas. O plasma representa 55% do volume total do sangue, sendo que 90% dessa quantidade é composta de água.
As plaquetas são fragmentos de células que participam do processo de coagulação. Elas têm vida curta e circulam em uma quantidade que varia de 150 mil a 400 mil por milímetro cúbico de sangue.
Os leucócitos são os glóbulos brancos. Em nosso sangue, há de 5 mil a 10 mil deles por milímetro cúbico de sangue e sua vida é curta. Suas funções visam sempre à defesa do organismo.
As hemácias são os glóbulos vermelhos e estão em maior número: em torno de 4 500 000 delas por milímetro cúbico de sangue. Sua função está relacionada à respiração, sendo responsável pelo transporte de oxigênio e gás carbonico.

Fonte de pesquisa: http://www.hemominas.mg.gov.br/doacao-e-atendimento-ambulatorial/hemoterapia/o-sangue. Acesso em: 10 ago. 2021.

De acordo com o texto:

a) Considerando-se a média aritmética das quantidades mínimas e máximas de plaquetas e leucócitos por milímetro cúbico de sangue humano, qual deve ser a razão entre o número de plaquetas e o de leucócitos no sangue humano?

b) Qual deve ser o número aproximado de hemácias presentes em um litro de sangue humano?

c) Qual é a porcentagem, no sangue humano, de substâncias dissolvidas na água do plasma sanguíneo, como proteínas, açúcares, gorduras e sais minerais?

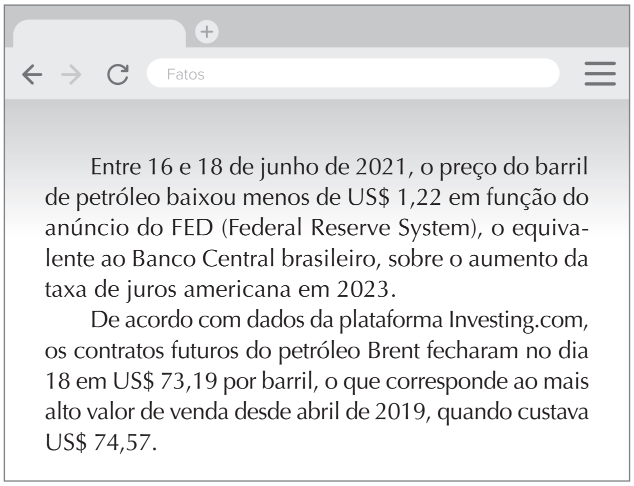
17. **Unifesp 2016** A heparina é um medicamento de ação anticoagulante prescrito em diversas patologias. De acordo com indicação médica, um paciente de 72 kg deverá receber 100 unidades de heparina por quilograma por hora (via intravenosa).

No rótulo da solução de heparina a ser ministrada consta a informação 10 000 unidades/50 mL.

a) Calcule a quantidade de heparina, em mL, que esse paciente deverá receber por hora.

b) Sabendo que 20 gotas equivalem a 1 mL, esse paciente deverá receber 1 gota a cada *x* segundos. Calcule *x*.

18. Leia a nota a seguir:



Entre 16 e 18 de junho de 2021, o preço do barril de petróleo baixou menos de US$ 1,22 em função do anúncio do FED (Federal Reserve System), o equivalente ao Banco Central brasileiro, sobre o aumento da taxa de juros americana em 2023.

De acordo com dados da plataforma Investing.com, os contratos futuros do petróleo Brent fecharam no dia 18 em US$ 73,19 por barril, o que corresponde ao mais alto valor de venda desde abril de 2019, quando custava US$ 74,57.

De acordo com as informações apresentadas pelo texto, pode-se concluir que:

a) de abril de 2019 até a data citada de 2021 a queda no preço do barril de petróleo foi maior que 2%.

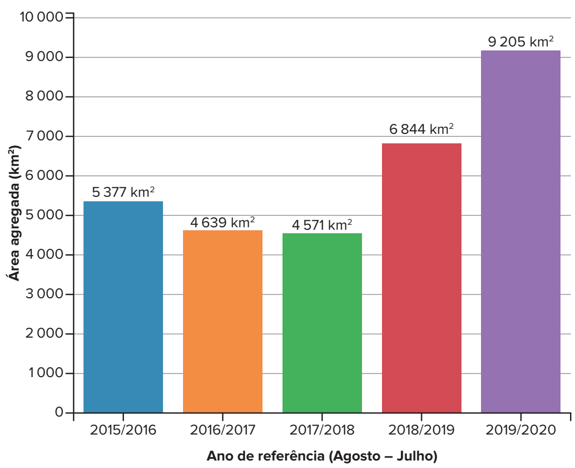
b) o preço do barril de petróleo do tipo Brent custava exatamente U$ 74,41 antes da queda.

c) o preço do barril de petróleo do tipo Brent sofreu um aumento de 1,64%.

d) o preço do barril de petróleo do tipo Brent sofreu uma queda inferior a 1,64%.

19. **UEG-GO 2021** O desmatamento na Amazônia tem chamado a atenção de ambientalistas em todo o mundo. O gráfico a seguir mostra a evolução desse desmatamento de 2015/2016 até a projeção em 2019/2020.

Áreas por anos



Disponível em: https://jornal.usp.br/ciencias/desmatamento-da-amazonia-dispara-de-novo-em-2020/. Acesso em: 5 nov. 2020.

Observando o gráfico, nota-se que

a) o crescimento de 2018/2019 para 2019/2020 foi igual a duas vezes o decrescimento de 2015/2016 para 2016/2017.

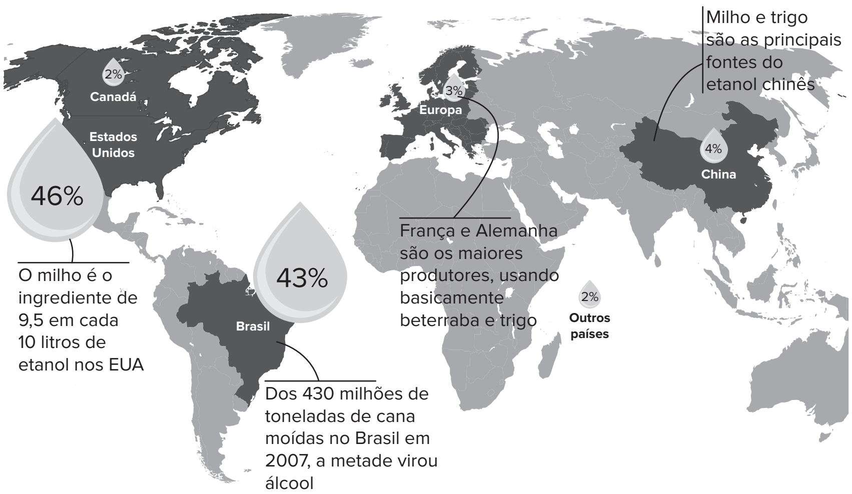
b) o crescimento de 2017/2018 para 2018/2019 foi igual a quatro vezes o decrescimento de 2015/2016 para 2016/2017.

c) o decrescimento de 2016/2017 para 2017/2018 foi igual a duas vezes o decrescimento de 2015/2016 para 2016/2017.

d) o decrescimento de 2016/2017 para 2017/2018 foi de 1 003 km^2.

e) o crescimento de 2019/2020 em relação ao ano de 2015/2016 foi igual a 3 828 km^2.

20. **Enem 2020** Com a crise dos alimentos em 2008, governantes e empresários de várias partes do mundo relacionaram a expansão dos biocombustíveis com a alta do preço da comida. Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Os EUA defendem seu etanol de milho ao afirmar que só 3% da inflação dos cereais é causada pelos biocombustíveis. Para a Organização das Nações Unidas (ONU), os biocombustíveis respondem por 10% da alta do preço da comida e, para o Banco Mundial, por 75%. Ao lado dessa polêmica, cresce o consenso de que biocombustível não é sempre igual. O impacto sobre o preço dos alimentos é bem diferente quando se considera o álcool combustível brasileiro, feito da cana; o etanol norte-americano, fabricado com milho; e o biodiesel europeu, feito de grãos como o trigo, por exemplo. Nessa disputa, o Brasil está bem posicionado. O mapa seguinte mostra a distribuição percentual de etanol fabricado no mundo, em 2007.



Disponível em: planetasustentavel.abril.com.br. Acesso em: 29 mar. 2009.

De acordo com o texto e o mapa de percentuais de fabricação de etanol fabricado no mundo, podemos concluir que a quantidade de etanol feito de milho, nos Estados Unidos, representa

a) 16,25% da produção mundial.
b) 43,70% da produção mundial.
c) 46,00% da produção mundial.
d) 75,00% da produção mundial.
e) 95,00% da produção mundial.

21. Às vésperas do *show* mais esperado do ano, os ingressos estavam sendo vendidos na internet por até 100 vezes o seu valor no início das vendas. Qual é a porcentagem de aumento sobre o preço inicial ocorrida no período?

a) 100%
b) 900%
c) 9 000%
d) 9 900%
e) 10 000%

22. **UPE/SSA 2022** Leia o seguinte trecho retirado de Viagem ao centro da terra, do francês Júlio Verne:

> Nosso anfitrião proporcionou um grande prazer ao professor ao lhe dar um mapa da Islândia incomparavelmente mais perfeito que aquele de Henderson. Era o mapa do Sr. Olaf Nikolas Olsen, de escala 1 180 000, publicado pela Sociedade Literária Islandesa, segundo os trabalhos geodésicos do Sr. Scheel Frisac e o levantamento topográfico do Sr. Bjorn Gunolaugson. Era um documento precioso para um minerologista.

Júlio Verne, Viagem ao centro da terra, SP: Principis, 2019.

O professor calculou a distância entre duas cidades A e B no mapa em questão, obtendo como resultado 3,5 cm. Qual a distância real, em quilômetros, entre as cidades A e B?

a) 6 300
b) 630
c) 63
d) 6,3
e) 0,63

23. Para ocupar as vagas remanescentes de determinado curso em que os alunos aprovados na primeira chamada do vestibular fizeram a matrícula em janeiro, uma universidade particular divulgou a lista da segunda chamada no mês de fevereiro.
Cada semestre desse curso tem, para o aluno, um custo fixo que é dividido em 6 parcelas mensais de mesmo valor, sendo a primeira paga no ato da matrícula. Contudo, no caso dos alunos aprovados na segunda chamada, o valor semestral desse curso foi dividido em 5 parcelas mensais de mesmo valor, pois eles só foram matriculados em fevereiro. Desse modo, cada parcela paga por um aluno matriculado em fevereiro, em relação ao aluno matriculado em janeiro, é:

a) 25% maior.
b) 20% maior.
c) 15% maior.
d) 10% maior.
e) 5% maior.

24. Um alerta direcionado aos participantes do Fórum Econômico Mundial de Davos, realizado na Suíça, apontou que, em 2016, a parcela da população mundial composta do 1% mais rico acumulará mais da metade da riqueza mundial.

A escala da desigualdade global está simplesmente excessiva. A diferença entre os ricos e os demais está aumentando em velocidade muito rápida, afirmou, em comunicado, a diretora-executiva da Oxfam, Winnie Byanyima.

Fonte: PARCELA do 1% mais rico terá mais da metade da riqueza mundial em 2016. *O Globo*, Rio de Janeiro, 19 jan. 2015. Economia. Disponível em: http://oglobo.globo.com/economia/parcela-do-1-mais-rico-tera-mais-da-metade-da-riqueza-mundial-em-2016-15091872#ixzz3eMz3JCcj. Acesso em: 15 jul. 2021.

Seja x o valor médio do capital por habitante entre o 1% mais rico, quando essa parcela da população chegar ao controle de 51% de todo o capital mundial. Então, sendo y o valor médio do capital por habitante entre os 99% dos demais habitantes do planeta, quando isso acontecer, a razão $\frac{x}{y}$ será, aproximadamente, igual a:

a) 103,04
b) 99,02
c) 87,12
d) 53,04
e) 13,40

25. A população de peixes em um viveiro é composta de 60% de machos e de 40% de fêmeas. Se houvesse uma redução de 20% no número de machos e um aumento de 20% no número de fêmeas, então a nova população do viveiro ficaria:

a) menor que a população inicial, mas composta de 45% de machos e de 55% de fêmeas.
b) menor que a população inicial, mas composta de 50% de machos e de 50% de fêmeas.
c) igual à população inicial, mas composta de 40% de machos e de 60% de fêmeas.
d) igual à população inicial, mas composta de 50% de machos e de 50% de fêmeas.
e) maior que a população inicial, mas composta de 40% de machos e de 60% de fêmeas.

26. O tanque de combustível de um automóvel bicombustível tem capacidade de 80 litros e contém uma mistura de álcool e gasolina, com 20% de álcool. Quando o seu proprietário para em um posto e coloca mais 10 litros de álcool e 20 litros de gasolina a participação do álcool na mistura passa a ser de 28%. Determine quantos litros de combustível faltam para encher totalmente o tanque desse automóvel.

a) 15 litros
b) 20 litros
c) 25 litros
d) 30 litros
e) 40 litros

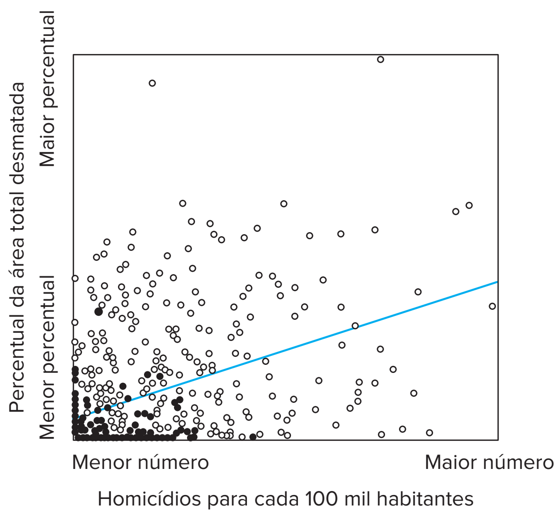
27. **Enem 2020** Uma associação desportiva contratou uma empresa especializada para construir um campo de futebol, em formato retangular, com 250 metros de perímetro. Foi elaborada uma planta para esse campo na escala 1 : 2 000. Na planta, a medida do perímetro do campo de futebol, em metro, é

a) 0,0005.
b) 0,125.
c) 8.
d) 250.
e) 500 000.

28. No mês de fevereiro do ano passado, um comerciante percebeu um aumento significativo na procura por determinado produto. Por isso, resolveu aproveitar a demanda e encomendou, para o mês de dezembro, uma remessa bem maior que a de costume e aumentou o preço desse produto em 30%.
O produto vendeu muito bem no mês de dezembro, mas, passado o período de festas do final do ano, as unidades restantes do produto encalharam em seu estoque e, em janeiro desse ano, o comerciante fez uma promoção, dando, na compra de cada unidade, um desconto de 30% sobre o preço cobrado em dezembro, passando a vendê-lo por um preço:

a) igual ao praticado em novembro do ano anterior.
b) 9% superior ao praticado em novembro do ano anterior.
c) 9% inferior ao praticado em novembro do ano anterior.
d) 19% superior ao praticado em novembro do ano anterior.
e) 19% inferior ao praticado em novembro do ano anterior.

29. **Unesp 2021** Segundo estudos, há uma grande coincidência geográfica entre municípios da Amazônia ao analisarmos os municípios mais afetados pelos processos de desmatamento e pelos conflitos rurais. O gráfico mostra a correlação entre o percentual da área total desmatada de cada município e a taxa de homicídio para cada 100 mil habitantes do município. Cada município é representado por um ponto.



(André A. Sant'Anna e Carlos Eduardo F. Young. "Direitos de propriedade, desmatamento e conflitos rurais na Amazônia". *Economia Aplicada*, vol. 14, n. 3, 2010. Adaptado.)

Nesse gráfico, o traço azul representa a linha de tendência que relaciona o percentual (P) da área total desmatada e a taxa de homicídio (h) do município, o que pode ser descrito pela expressão:

$$P = 1 + \frac{9h}{400}$$

De acordo com essa linha de tendência, o aumento de 1 ponto percentual na área desmatada do município está associado a um aumento aproximado na taxa de homicídio de

a) 22 mortes para cada 100 mil habitantes.
b) 180 mortes para cada 100 mil habitantes.
c) 89 mortes para cada 100 mil habitantes.
d) 225 mortes para cada 100 mil habitantes.
e) 44 mortes para cada 100 mil habitantes.

30. Um medicamento, que costumava ter preço tabelado, teve seu preço liberado pelo governo para o mercado farmacêutico em janeiro deste ano. A partir dessa liberação, cada farmácia poderia aumentar ou diminuir o preço do medicamento a cada trimestre, de acordo com a demanda de seus clientes.
A demanda por um medicamento no mercado farmacêutico pode variar por muitos motivos, como a época do ano, o bairro onde a farmácia está situada e a oferta de medicamentos de marcas concorrentes.
O quadro a seguir apresenta a variação percentual do preço desse medicamento em três farmácias que efetuaram alterações nos três primeiros trimestres a partir da liberação:

Farmácia	Janeiro	Abril	Julho
X	+10%	−30%	+20%
Y	−20%	−10%	+30%
Z	+20%	+10%	−30%

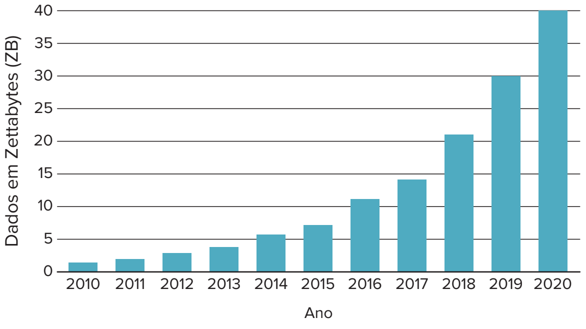
Sabendo que todas as variações percentuais do quadro têm como referência o preço praticado pela farmácia no trimestre anterior, assinale a alternativa correta:

a) Em março, o medicamento estava mais caro na farmácia X do que nas farmácias X e Z.
b) Em maio, o medicamento estava mais barato na farmácia X do que nas farmácias Y e Z.
c) Em julho, o medicamento voltou a custar o mesmo nas farmácias X, Y e Z.
d) Em agosto, o medicamento estava mais barato na farmácia X do que nas farmácias Y e Z.
e) Em setembro, o medicamento estava mais caro na farmácia Y do que nas farmácias X e Z.

31. Aumentando-se *x*% no preço de um produto obtemos um valor dez vezes maior do que seria obtido efetuando-se um desconto de *x*% no preço desse mesmo produto. Assinale a alternativa que apresenta a melhor aproximação para o número *x*.

a) 82
b) 75
c) 50
d) 33
e) 25

32. **UFRGS 2020** O gráfico abaixo representa a quantidade de dados armazenados no mundo inteiro, em zettabytes.



Fonte: Gráfico adaptado de UNECE Statistics Wikis (United Nations Economic Commission for Europe).

Com base nos dados do gráfico, considere as afirmações abaixo.

I. Em relação a 2019, a expectativa é que a quantidade de dados armazenados cresça mais de 20% em 2020.
II. De 2017 a 2019, em termos percentuais, a quantidade de dados armazenados cresceu mais de 100%.
III. Em termos percentuais, pode-se afirmar que a quantidade de dados armazenados cresceu mais no período de 2012 a 2016 do que no período de 2016 a 2019.

Quais estão corretas?

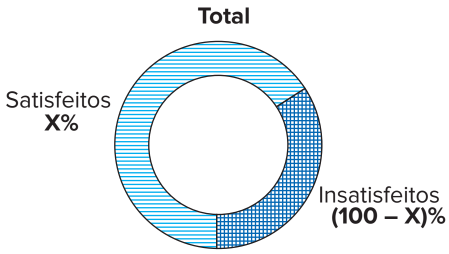
a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) I, II, III.

33. Uma pesquisa de opinião pública sobre o nível de satisfação com o lazer disponível em três capitais de estados brasileiros apresentou os seguintes resultados:

Por região	São Paulo	Porto Alegre	Salvador
Satisfeitos	49%	68%	73%
Insatisfeitos	51%	32%	27%

Por classe	A e B	C e D
Satisfeitos	66%	54%
Insatisfeitos	34%	46%

a) Considerando valores aproximados das populações de São Paulo (12 milhões), Porto Alegre (1,5 milhão) e Salvador (3 milhões), encontre o número inteiro mais próximo do valor de X que torna correto o gráfico de setores a seguir para o quadro "Por região".



b) Considerando que a totalidade dos habitantes das cidades de São Paulo, Porto Alegre e Salvador faça parte da população economicamente ativa dessas capitais e que essa população seja formada apenas por indivíduos das classes A, B, C e D, faça uma estimativa da porcentagem de participação das classes C e D na população das três capitais juntas.

34. Se o número *x* é igual a $\left(\sqrt{25\%}\right)\%$ do número *y*, podemos afirmar que o número *y* é igual:

a) à metade do número *x*.
b) ao dobro do número *x*.
c) a vinte vezes o número *x*.
d) a duzentas vezes o número *x*.
e) a duas mil vezes o número *x*.

35. Uma jarra contém 1 litro de uma mistura de água com suco de laranja, e os volumes desses líquidos estão na razão de 3 para 4. Outra jarra contém 2 litros de outra mistura desses mesmos líquidos, mas na razão de 3 para 5. Se em um balde forem despejadas as misturas das duas jarras, então a proporção de água para o total da mistura no balde será de:

a) $\frac{5}{14}$ b) $\frac{11}{14}$ c) $\frac{11}{28}$ d) $\frac{15}{28}$ e) $\frac{5}{8}$

36. **Unicamp-SP 2018** A tabela abaixo exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018.

ANO	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R$ 1000,00	R$ 1200,00	R$ 1500,00
2018	R$ 1150,00	R$ 1320,00	R$ 1680,00

a) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.
b) Uma família tem três filhos matriculados na **Escola B**. Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

37. Dois tipos de exames para a detecção de certo vírus foram aplicados em um grupo de 80 pacientes, dos quais, com certeza, 60 são portadores desse vírus e 20 não são. Os resultados dos exames estão organizados nos quadros a seguir.

Exame 1	Portador	Não portador	Total
Resultado positivo	42	06	48
Resultado negativo	18	14	32

Exame 2	Portador	Não portador	Total
Resultado positivo	56	07	63
Resultado negativo	04	13	17

Note que em cada exame ocorrem tanto **falsos positivos** (pacientes não portadores do vírus com resultado positivo no exame) quanto **falsos negativos** (pacientes portadores do vírus com resultado negativo no exame).

a) Calcule a porcentagem de pacientes portadores do vírus no grupo em estudo.
b) Considerando os resultados positivos em cada exame, qual dos dois exames tem a menor porcentagem de **falsos positivos**? Justifique sua resposta.

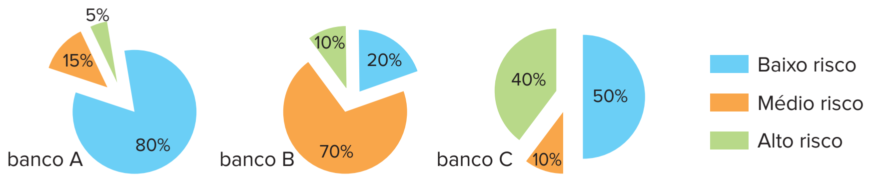
38. **Enem Digital 2020** Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos leves e médias acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação. Qual é a razão entre o número de infrações do tipo leve e o número de infrações do tipo média cometidas por esse motorista?

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{5}{17}$
e) $\frac{7}{17}$

39. Além do símbolo de porcentagem (%), que indica partes por centena, existe o símbolo da permilagem (‰), que indica partes por mil.
Então, observando que 100% = 1000‰, determine a forma percentual de $\left(\frac{1}{10\%}\right)‰ - \left(\frac{1}{10‰}\right)\%$.

a) −9%
b) 0%
c) 9%
d) 99%
e) −99%

40. Unesp 2016 Os gráficos indicam a diversificação de aplicações para um investimento, por grau de risco, sugeridas por cada um dos bancos A, B e C.

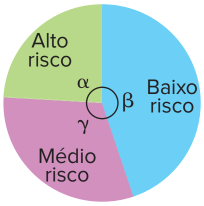


Um investidor decidiu aplicar um capital de R$ 6 000,00, em partes que foram distribuídas pelos três bancos, seguindo a diversificação do grau de risco sugerida por cada banco. O capital aplicado foi distribuído da seguinte forma:

- total de R$ 1 000,00 no banco A (considerando os três graus de risco juntos);
- R$ 2 700,00 em investimentos de baixo risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1 850,00 em investimentos de médio risco (nos três bancos juntos);
- R$ 1 450,00 em investimentos de alto risco (nos três bancos juntos).

O gráfico a seguir representa a diversificação da aplicação, por grau de risco, juntando os três bancos.

Investimento total de R$ 6 000,00
(bancos A, B e C)



Calcule os montantes de capital que foram investidos nos bancos B e C, e as medidas dos ângulos α, β e γ, indicados no gráfico.

BNCC em foco

EM13MAT101

1. Um comerciante comprou um lote de 127 brincos pelo valor de R$ 635,00. Para que ele possa ter um lucro de 18% sobre o custo de compra, o preço de venda de cada brinco será:

a) R$ 5,00
b) R$ 5,14
c) R$ 5,18
d) R$ 5,90
e) R$ 5,99

EM13MAT101

2. Um trabalhador, após receber um aumento de 5,3%, passou a receber um salário de R$ 3125,66. Antes do aumento, o salário desse trabalhador era:

a) R$ 2 968,34
b) R$ 2 828,66
c) R$ 2 960,00
d) R$ 2 715,28
e) R$ 3 005,32

EM13MAT101

3. Patrícia diagramou o capítulo de um livro. A diagramação ficou com 18 páginas de 20 linhas cada uma. Como o capítulo deve ficar com, no máximo, 15 páginas, ela reorganizou a diagramação do capítulo, para chegar a esse total. Após esse ajuste, cada página ficou com:

a) 17 linhas.
b) 14 linhas.
c) 24 linhas.
d) 26 linhas.
e) 32 linhas.

Campeonato de ciclismo em pista em Moscou, Rússia. Foto de 2019.

Elena Popova Reportpics/Shutterstock.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

1

Ferramentas básicas da Geometria

O quadro é o principal componente de uma bicicleta. Ele precisa ser forte, rígido e leve, e isso se consegue com a combinação de diferentes formas e materiais. Os modelos mais comuns são baseados geometricamente na forma de triângulos.

O triângulo é a forma mais estável entre os polígonos. Uma de suas principais características é apresentar maior rigidez. As propriedades métricas e trigonométricas dos triângulos têm sua base no triângulo retângulo, que será o principal objeto de estudo deste capítulo. Assim, partiremos desse tipo de triângulo para abordar o teorema de Pitágoras e suas aplicações, bem como as razões trigonométricas.

O triângulo retângulo

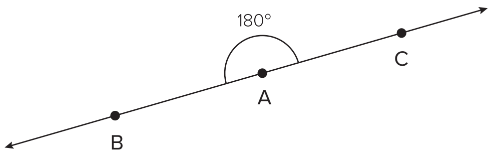
Noções iniciais

Observando duas retas ou dois segmentos de reta, ao percebermos que não há paralelismo entre elas, surge de imediato a noção de inclinação relativa entre essas figuras. A grandeza dessa inclinação relativa pode ser mensurada com base no conceito de ângulo.

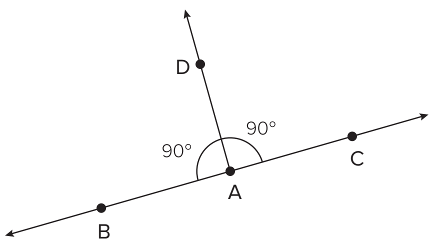
Ângulos e o ângulo reto

As figuras geométricas formadas pela reunião dos pontos de duas semirretas de mesma origem são denominadas ângulos retilíneos. Esses ângulos costumam ser medidos em graus ou radianos.

Quando três pontos estão sobre uma mesma reta, eles determinam um **ângulo raso**, cuja medida é 180°.

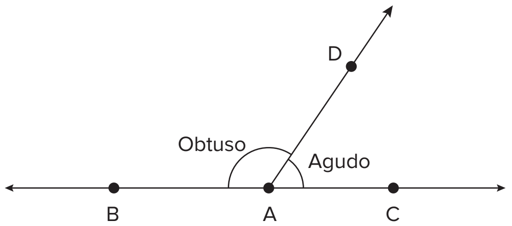


Repare que o ângulo raso equivale a dois ângulos de medida 90° e cada um desses ângulos é chamado de **ângulo reto**.

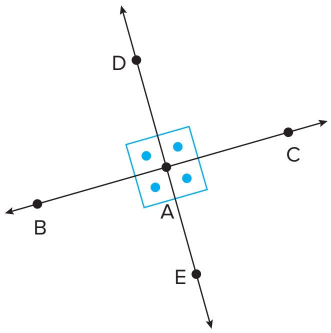


Para indicar o ângulo reto, utilizamos o símbolo ∟.

Os ângulos de medida entre 0° e 90° são denominados **agudos**, e aqueles cujas medidas estão entre 90° e 180° recebem o nome de ângulos **obtusos**.

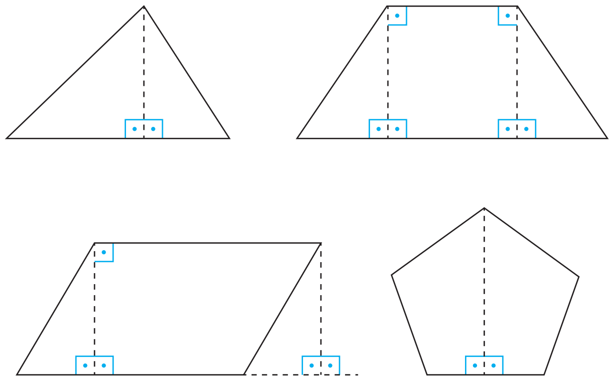


Os ângulos **retos** são aqueles determinados por duas retas concorrentes quando os quatro ângulos formados tiverem a mesma medida (forem congruentes). Nesse caso, as retas serão perpendiculares.

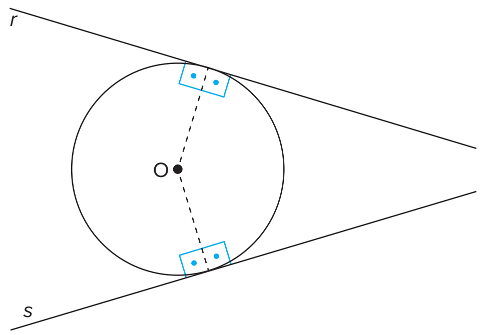


Essa situação pode ser observada em diversas figuras geométricas. Vejamos alguns exemplos:

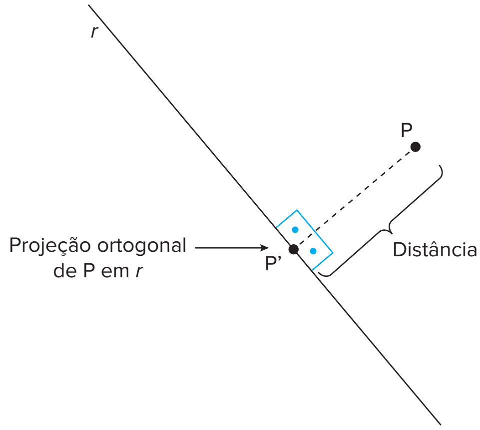
- Alturas de polígonos como triângulos, trapézios, paralelogramos ou pentágonos estão contidas em retas que são perpendiculares às bases desses polígonos.



- Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que une o centro da circunferência ao ponto onde ocorre a tangência.



- A distância de um ponto P até uma reta *r* é representada por um segmento perpendicular à reta com uma extremidade em P e outra em *r*. Nesse caso, a extremidade da distância que está contida na reta *r* é denominada **projeção ortogonal** do ponto P sobre essa reta.

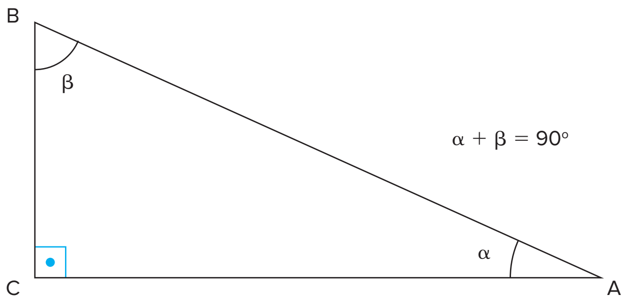


Definição de triângulo retângulo

Triângulos são formas geométricas que possuem três lados e três ângulos. Um importante teorema, conhecido como teorema angular de Tales, diz que as medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo somam sempre o mesmo que um ângulo raso (180°). Assim, supondo que α, β e γ são as medidas dos três ângulos internos de um triângulo, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Dizemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos é reto (de medida 90°). Assim, os outros dois ângulos são agudos e suas medidas somam 90°.



Os lados de um triângulo retângulo são chamados de **hipotenusa** e **catetos**. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo retângulo. Desse modo, na figura:

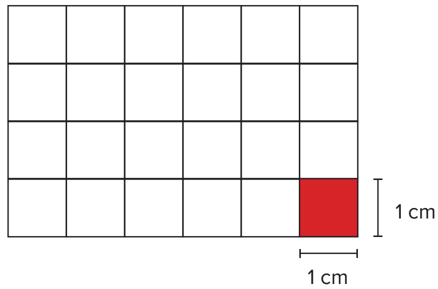
- $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo, logo $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os catetos;
- $\overline{AC}$ é o cateto **oposto** ao ângulo de medida β ou o cateto **adjacente** ao ângulo de medida α;
- $\overline{BC}$ é o cateto **adjacente** ao ângulo de medida β ou o cateto **oposto** ao ângulo de medida α.

Áreas

Outro conceito que precisaremos recordar é o cálculo de áreas simples, como retângulos, quadrados e triângulos retângulos.

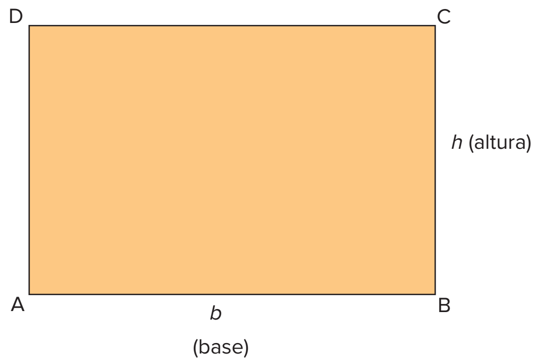
A área pode ser entendida como uma medida de superfície. E, para medir a extensão de uma superfície, criamos uma superfície padrão (unidade de área) e a comparamos com outras superfícies. A superfície padrão mais comum é um quadrado de lado unitário, que passará a ser nossa superfície de área unitária. Cobrimos, assim, a superfície com esse padrão, de maneira que não haja sobreposição, e contamos o número de quadrados unitários. Esse número é a área da superfície. Caso não consigamos cobri-la inteiramente, recorremos a quadrados cada vez menores, que cabem um número inteiro de vezes em nosso quadrado unitário, em um processo de aproximações sucessivas.

O quadrilátero mais simples para medirmos a área é o **retângulo**. Por ter quatro ângulos retos, nós o utilizaremos como referência para o cálculo de área dos outros quadriláteros. Veja a figura:

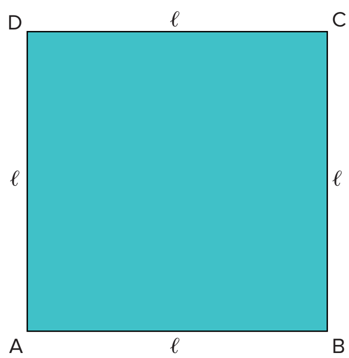


O retângulo da figura tem lados de 4 cm e 6 cm. É fácil ver que cabem $4 \cdot 6 = 24$ quadrados de 1 cm^2 em sua superfície. Por isso, sua área é igual a 24 cm^2.

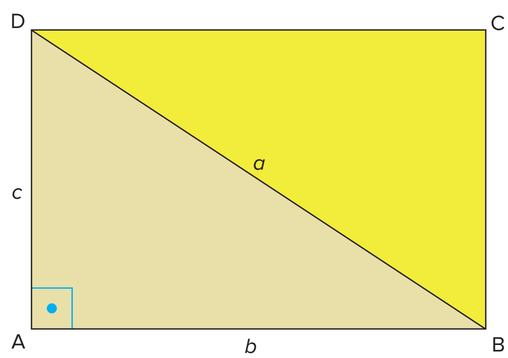
De acordo com exemplos como esse, vamos definir a área do retângulo de base b e altura h como o produto $b \cdot h$.



O quadrado é um retângulo de lados congruentes. Assim, a área de um quadrado de lado ℓ é igual a $\ell \cdot \ell = \ell^2$.



Um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a pode ser entendido como metade de um retângulo de lados b e c. Logo, a área do triângulo retângulo de catetos b e c pode ser dada por $\dfrac{b \cdot c}{2}$.



O teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras diz respeito aos triângulos retângulos, ou seja, aos triângulos que possuem um ângulo reto (90°). Os lados que formam esse ângulo reto são os catetos desse triângulo, e o lado oposto a esse ângulo é a hipotenusa do triângulo. O teorema diz:

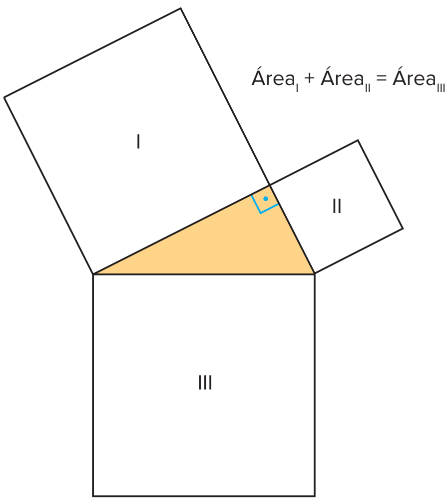
> “O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.”

! Atenção

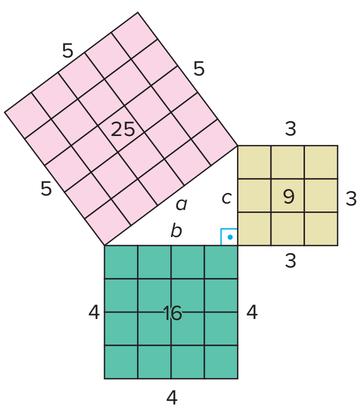
Se a hipotenusa tem medida a e os catetos têm medidas b e c, tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

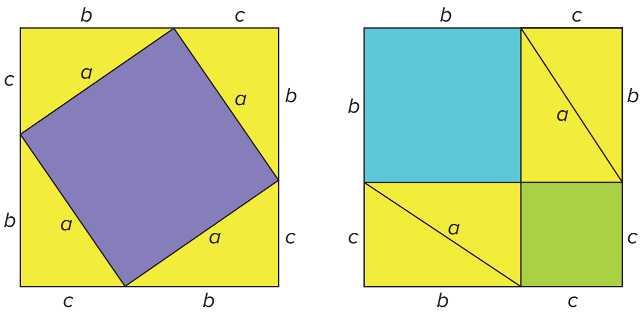
Para entender o teorema de Pitágoras, podemos interpretar esse enunciado da seguinte forma: a área do quadrado cujos lados têm a mesma medida que a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem o mesmo que os catetos do triângulo.



A figura a seguir, por exemplo, permite uma verificação do teorema para o caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5. Veja que a área do quadrado de lado $a = 5$ (medida da hipotenusa) é 25, enquanto as áreas dos quadrados com lados $b = 4$ e $c = 3$ (catetos) são, respectivamente, iguais a 16 e 9. Temos que $16 + 9 = 25$, ou seja, $b^2 + c^2 = a^2$.



Exemplos como esse podem tornar o resultado crível, mas não são uma justificativa geral ou uma demonstração. Há um grande número de demonstrações desse teorema. Vejamos uma delas, atribuída ao próprio Pitágoras.



Os dois quadrados da figura acima têm lados de medida $b + c$. Ao remover os triângulos retângulos de catetos b e c dos dois quadrados (os triângulos em amarelo), as áreas remanescentes devem ser iguais. Do lado esquerdo, sobrou um quadrado de lado a (em roxo) e, do lado direito, um quadrado de lado b (em azul) e um de lado c (em verde). Assim, a área da superfície roxa (a^2) é igual à soma das áreas das superfícies azul (b^2) e verde (c^2).

O primeiro aspecto prático do teorema de Pitágoras é a facilidade com que se pode encontrar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo conhecendo as medidas dos outros dois.

Para encontrar o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, basta somarmos os quadrados das medidas dos catetos e extrair a raiz quadrada dessa soma. Assim, se os catetos medem 3 cm e 5 cm, por exemplo, a soma dos quadrados de suas medidas é $9\ \text{cm}^2 + 25\ \text{cm}^2 = 34\ \text{cm}^2$ e, portanto, a hipotenusa desse triângulo tem $\sqrt{34}$ cm de comprimento.

Para achar o comprimento de um cateto, basta subtrairmos do quadrado da medida da hipotenusa o quadrado da medida do outro cateto, extraindo, em seguida, a raiz quadrada dessa diferença. Assim, se o cateto de um triângulo mede 3 cm e a hipotenusa mede 7 cm, por exemplo, a diferença dos quadrados das medidas desses valores é $49\ \text{cm}^2 - 9\ \text{cm}^2 = 40\ \text{cm}^2$ e, por conseguinte, o outro cateto desse triângulo tem $\sqrt{40}$ cm de comprimento, ou seja, $2\sqrt{10}$ cm.

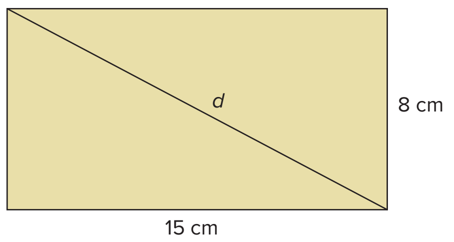
! Atenção

Reciprocamente, o teorema de Pitágoras diz que: “Se, em um triângulo, o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, então o ângulo oposto ao maior lado é reto”.
Assim, podemos concluir que os triângulos cujos lados medem 5 cm, 12 cm e 13 cm ou 1 cm, $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{3}$ cm são triângulos retângulos, pois $13^2 = 12^2 + 5^2$ e $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$, por exemplo.

Vejamos alguns exemplos clássicos de aplicações do teorema de Pitágoras.

Exercícios resolvidos

1. Calcule a diagonal de um retângulo de lados 8 cm e 15 cm.



Resolução:

Sendo $d > 0$, a medida da diagonal desse retângulo é dada por:

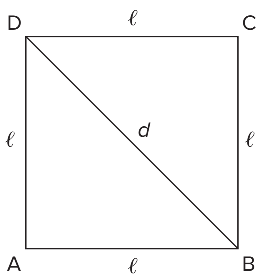
$$d^2 = 8^2 + 15^2$$
$$d^2 = 64 + 225$$
$$d^2 = 289$$
$$d = +\sqrt{289} \Rightarrow d = 17$$

A diagonal do retângulo mede 17 cm.

2. Quanto mede a diagonal de um quadrado de lado ℓ?

Resolução:

A diagonal do quadrado o divide em dois triângulos retângulos e isósceles, conforme mostra a figura a seguir.



Sendo $d > 0$ a medida da diagonal do quadrado, aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos, temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = +\sqrt{2\ell^2} \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$$

A diagonal de um quadrado de lado ℓ mede $\ell\sqrt{2}$.

3. Quanto mede a altura de um triângulo isósceles de lados 4 cm, 6 cm e 6 cm?

Resolução:

A altura (h) de um triângulo isósceles divide sua base ao meio. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

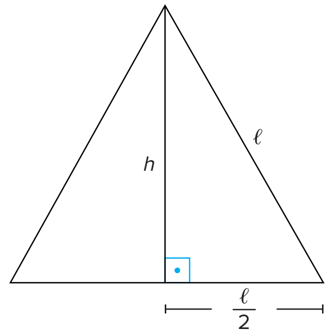
$$h^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 36 - 4 \Rightarrow h^2 = 32 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = +\sqrt{32} \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$$

A altura de um triângulo isósceles de base 4 cm e lados 6 cm mede $4\sqrt{2}$ cm.

4. Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ.

Resolução:

A altura do triângulo equilátero de lado ℓ divide sua base ao meio. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

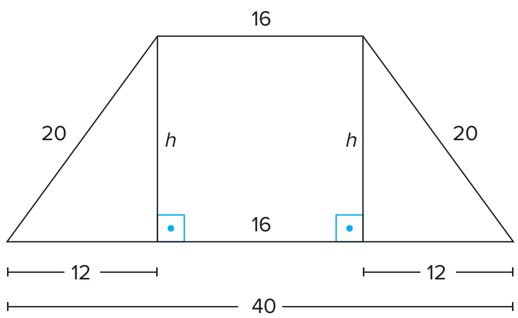


$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = +\sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Um triângulo equilátero de lado ℓ tem altura igual a $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

5. Um trapézio isósceles tem bases que medem 16 cm e 40 cm e lados que medem 20 cm. Quanto mede a altura desse trapézio?

Resolução:



Traçando as duas alturas, com $h > 0$ conforme a figura, os dois triângulos retângulos nas laterais do trapézio são congruentes, ambos com hipotenusa de 20 cm e um dos catetos de 12 cm.

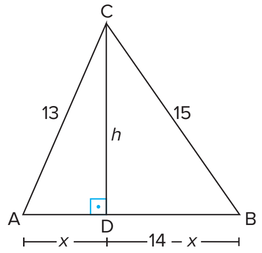
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + 12^2 = 20^2$$
$$h^2 = 400 - 144$$
$$h^2 = 256$$
$$h = +\sqrt{256} \Rightarrow h = 16$$

O trapézio tem 16 cm de altura.

6. Um triângulo escaleno ABC tem lados com as seguintes medidas: AB = 14 cm, AC = 13 cm e BC = 15 cm. Calcule a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Resolução:



Ao traçarmos a altura $\overline{CD}$, de medida h, ela não divide a base $\overline{AB}$ ao meio, pois o triângulo ABC é escaleno. Fazendo AD = x e DB = 14 – x, temos:

- no triângulo ADC: $x^2 + h^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 + h^2 = 169$ (I)
- no triângulo BDC: $(14 - x)^2 + h^2 = 15^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (14 - x)^2 + h^2 = 225 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 196 - 28x + x^2 + h^2 = 225$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$196 - 28x + \underbrace{x^2 + h^2}_{169} = 225 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 196 - 28x + 169 = 225 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 28x = 196 + 169 - 225 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 28x = 140 \Rightarrow x = \frac{140}{28} \Rightarrow x = 5$$

Substituindo o valor encontrado em (I), temos:

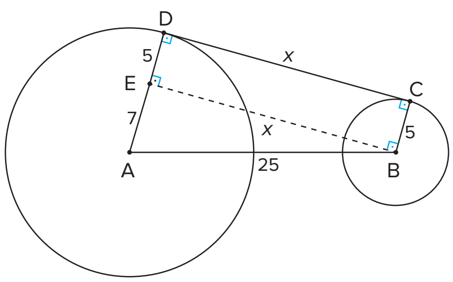
$5^2 + h^2 = 169 \Rightarrow h^2 = 169 - 25 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

Portanto, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 12 cm.

7. Sejam duas circunferências: a primeira de centro A e raio 12 cm e a segunda de centro B e raio 5 cm. Sabendo que a distância entre os dois centros é AB = = 25 cm, calcule o comprimento do segmento tangente **externo** comum às duas circunferências.

Resolução:

Sejam C e D os pontos de tangência, conforme a figura. Queremos calcular CD.



Sabemos que, ao ligar o centro ao ponto de tangência, o raio e a reta tangente formam 90° (essa ideia é fundamental na solução dos problemas de tangência). Assim, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ e $\overline{BC} \perp \overline{CD}$. Tracemos $\overline{BE} \perp \overline{AD}$. No retângulo BCDE, temos: BE = CD = x e ED = BC = 5 cm. Assim, AE = AD – ED = 12 – 5 = 7 cm.
Sendo x a medida de $\overline{CD}$, em centímetros, no triângulo AEB, encontramos:

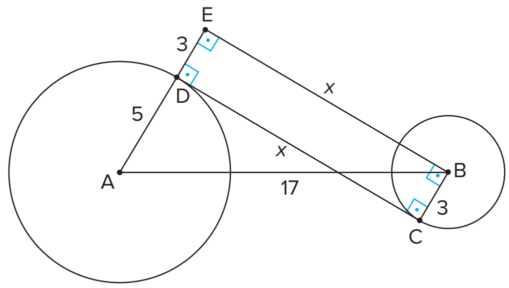
$x^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 625 - 49 \Rightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24$

Logo, o comprimento do segmento tangente é 24 cm.

8. Sejam duas circunferências: a primeira de centro A e raio 5 cm e a segunda de centro B e raio 3 cm. Sabendo que a distância entre os dois centros é AB = 17 cm, calcule o comprimento do segmento tangente **interno** comum às duas circunferências.

Resolução:

Sejam C e D os pontos de tangência, como mostra a figura. Queremos calcular CD.



Sabemos que, ao ligar o centro ao ponto de tangência, o raio e a reta tangente formam 90°. Assim, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ e $\overline{BC} \perp \overline{CD}$. Prolonguemos $\overline{AD}$ até E de modo que $\overline{BE} \perp \overline{AD}$. No retângulo BCDE, temos: BE = CD = x e ED = BC = = 3 cm. Logo, AE = AD + ED = 5 + 3 = 8 cm. No triângulo AEB, obtemos:

$x^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow x^2 = 289 - 64 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$

Logo, o comprimento do segmento tangente interno é de 15 cm.

Observação: Nas condições dos exercícios resolvidos 7 e 8, há dois segmentos tangentes externos congruentes e dois segmentos tangentes internos congruentes.

Triângulos pitagóricos

Vimos, nos exemplos anteriores, que alguns triângulos retângulos têm lados com medidas representadas por números inteiros e outros não. Aqueles triângulos retângulos cujos lados são representados por inteiros são chamados de pitagóricos. Quando os lados são números primos entre si, recebem o nome de pitagóricos primitivos, que são:

- o triângulo de lados 3, 4 e 5, pois $5^2 = 3^2 + 4^2$ e mdc(3, 4, 5) = 1;
- o triângulo de lados 5, 12 e 13, pois $13^2 = 5^2 + 12^2$ e mdc(5, 12, 13) = 1.

São pitagóricos não primitivos 6, 8 e 10 e 10, 24 e 26 porque, apesar de satisfazerem o teorema de Pitágoras (verifique!), temos mdc(6, 8, 10) = 2 ≠ 1 e mdc(10, 24, 26) = = 2 ≠ 1. Observe que (6, 8, 10) são números proporcionais a (3, 4, 5), o que faz com que os triângulos sejam semelhantes. Dizemos que esses dois triângulos são da família (3, 4, 5), da qual (3, 4, 5) é o primitivo. A mesma observação se aplica a (5, 12, 13) e (10, 24, 26).

Podemos demonstrar que todo triângulo pitagórico primitivo (a, b, c) pode ser obtido pelo procedimento a seguir:

1. Escolhemos dois números inteiros positivos m e n, $m > n$, m e n primos entre si e de paridades diferentes.

2. Determinamos as medidas dos lados desta forma:

$a = m^2 + n^2$ $b = 2mn$ $c = m^2 - n^2$

O quadro a seguir indica alguns pitagóricos obtidos pelo método dado.

m	*n*		*a*	*b*	*c*
2	1		5	4	3
3	2		13	12	5
4	1		17	8	15
4	3	⇒	25	24	7
5	2		29	20	21
5	4		41	40	9

O mais famoso dos pitagóricos é o triângulo de medidas 3, 4 e 5.

Exercícios resolvidos

9. Mostre que o único triângulo pitagórico primitivo que tem lados em progressão aritmética é o triângulo 3, 4, 5.

Resolução:

Como os lados do triângulo estão em progressão aritmética, sejam $(\ell - r, \ell, \ell + r)$ suas medidas, em que ℓ e r são inteiros positivos. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(\ell + r)^2 = \ell^2 + (\ell - r)^2$$
$$\ell^2 + 2\ell r + r^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell r + r^2$$
$$2\ell r + 2\ell r = \ell^2$$
$$4\ell r = \ell^2$$

Como $\ell > 0$, simplificando a equação, encontramos: $\ell = 4r$.

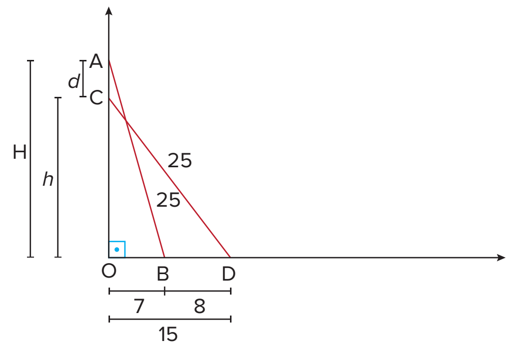
Assim, os lados do triângulo são $4r - r = 3r$, $4r$ e $4r + r = 5r$. Para que $\text{mdc}(3r, 4r, 5r) = 1$, devemos ter $r = 1$, e o triângulo de lados $(3r, 4r, 5r)$ é o triângulo (3, 4, 5).

Observação: Todos os triângulos semelhantes ao (3, 4, 5), ou seja, com lados $(3r, 4r, 5r)$, com r real e positivo, terão os lados em progressão aritmética.

10. **Fuvest-SP** Uma escada de 25 dm de comprimento se apoia num muro do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada?

a) 4 dm.
b) 5 dm.
c) 6 dm.
d) 7 dm.
e) 8 dm.

Resolução:



Os triângulos AOB e COD representam as duas posições da escada, e d é o desnível que queremos calcular.

No triângulo AOB, temos:

$H^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow H^2 = 625 - 49 \Rightarrow H^2 = 576 \Rightarrow$
$\Rightarrow H = 24$ dm

No triângulo COD, encontramos:

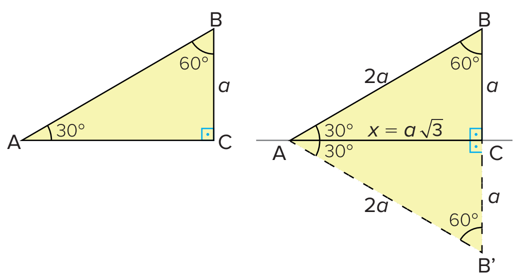
$h^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 625 - 225 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 20$ dm

Assim, o desnível d será: $d = 24 - 20 = 4$ dm.
Resposta: alternativa A.

Triângulos notáveis

Alguns triângulos retângulos, por serem tão comuns em problemas, acabaram ganhando o apelido de triângulos notáveis. Aqui, destacaremos dois: o triângulo de ângulos 30°, 60° e 90°; e o triângulo retângulo e isósceles.

Observe na figura a seguir o triângulo ABC de ângulos 30°, 60° e 90°, o qual chamaremos, daqui em diante, (30°, 60°, 90°). Em torno do lado $\overline{AC}$, vamos fazer uma rotação de 180° (reflexão), colocando o ponto B na posição B'.



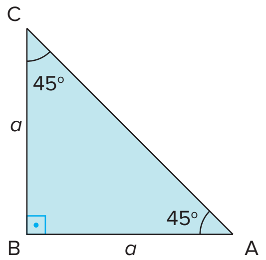
O triângulo ABB' é equilátero, pois, se BC = a, teremos AB' = AB = $2a$ e BB' = 2BC = $2a$.

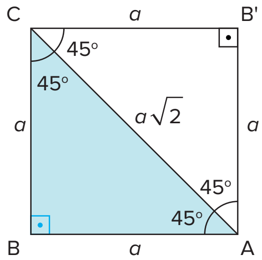
Sendo AC = x e aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, teremos:

$$x^2 + a^2 = (2a)^2 \Rightarrow x^2 = 4a^2 - a^2 \Rightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = +\sqrt{3a^2} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$$

A conclusão a que chegamos é que o triângulo (30°, 60°, 90°) sempre terá os lados proporcionais aos números $(1, \sqrt{3}, 2)$, ou seja, lados de medidas $(a, a\sqrt{3}, 2a)$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, com a oposto ao ângulo de 30°, $\sqrt{3}a$ oposto ao ângulo de 60° e $2a$ oposto ao ângulo de 90°.

Outro triângulo notável é o triângulo retângulo e isósceles. Veja as figuras seguintes:





O triângulo ABC, retângulo em B, tem os catetos com a mesma medida, digamos a, ou seja, AB = BC = a. Assim, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ possuem, ambos, medida 45°. Como podemos ver na figura, o triângulo ABC é metade de um quadrado de lado a, e sua hipotenusa AC é a diagonal desse quadrado, com medida AC = $a\sqrt{2}$.

Logo, os lados do triângulo retângulo e isósceles têm medidas proporcionais a $(1, 1, \sqrt{2})$, ou seja, são da forma $(a, a, a\sqrt{2})$.

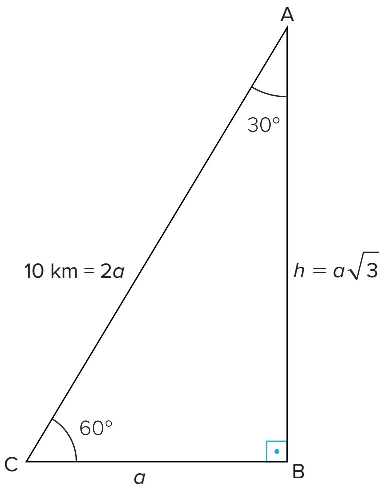
Vejamos alguns exemplos de aplicação dessas ideias.

Exercícios resolvidos

11. Um avião decola de maneira que a trajetória forme um ângulo de 60° com o solo, supostamente plano e retilíneo. Após o deslocamento de 10 km em linha reta, determine a que altura o avião se encontra em relação ao solo.

Resolução:

O triângulo ABC da figura a seguir é um triângulo (30°, 60°, 90°), tendo, portanto, BC = a, AB = $h = a\sqrt{3}$ e AC = $2a$.



A medida AC = $2a$ da hipotenusa corresponde à distância percorrida pelo avião, enquanto AB corresponde à altura em relação ao solo, ou seja, AB = $h = a\sqrt{3}$.

Assim: $\begin{cases} 2a = 10 \text{ km} \Rightarrow a = 5 \text{ km} \\ h = a\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ km} \end{cases}$

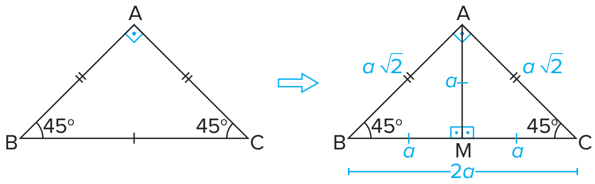
Portanto, a altura do avião em relação ao solo após percorrer 10 km é igual a $5\sqrt{3}$ km $\cong$ 8,66 km.

12. Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo e isósceles de perímetro igual a 2 cm.

Resolução:

O triângulo ABC da figura a seguir é retângulo e isósceles com hipotenusa $\overline{BC}$.

Ao traçarmos a altura $\overline{AM}$ do triângulo, a hipotenusa $\overline{BC}$ fica dividida ao meio. Os triângulos ABM e ACM também são retângulos e isósceles.



Sendo AM = a, temos: $\begin{cases} BM = AM = a \text{ e } AB = a\sqrt{2} \\ CM = AM = a \text{ e } AC = a\sqrt{2} \\ BC = BM + MC = 2a \end{cases}$

Como o perímetro do triângulo ABC é 2 cm, vem que:

$$AC + AB + BC = 2 \Rightarrow a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + 2a = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a + 2a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a + a\sqrt{2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\left(1+\sqrt{2}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Racionalizando, obtemos:

$$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$

Assim, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo e isósceles de perímetro igual a 2 cm mede $\sqrt{2} - 1$ cm.

13. Tião está fazendo sua tradicional caminhada matutina em uma praia ideal, supostamente retilínea. A trajetória de Tião se dá em linha reta, com velocidade constante, e paralela ao mar. Ao chegar ao ponto A, encontra seu camarada João e ambos avistam um barco firmemente ancorado no ponto N, formando 30° com o prolongamento da trajetória de Tião, que segue então sua trajetória e caminha mais $4(\sqrt{3} + 1)$ km, quando encontra seu camarada Marcão no ponto B. Olhando para o navio que ficou parado, Tião conclui que a linha que o liga ao navio ($\overline{NB}$) e o segmento de reta que acaba de percorrer ($\overline{AB}$) formam um ângulo de 45°. Após fornecer todas essas informações ao camarada Marcão, ele pergunta:

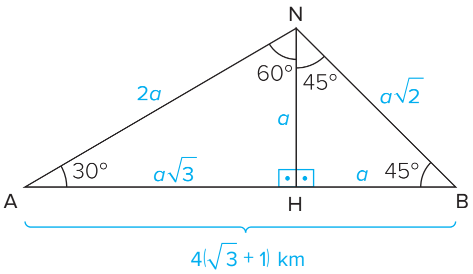
a) Qual a distância do navio à praia? (trajetória de Tião)

b) Quanto mede $\overline{AN}$?

c) Quanto mede $\overline{NB}$?

Sabendo que Marcão acertou as respostas, determine o que ele respondeu.

Resolução:



No triângulo ANB, a distância percorrida por Tião é $\overline{AB}$, enquanto a distância do navio até a praia é igual à medida NH = a, da altura relativa a $\overline{AB}$. Observe que os triângulos ANH e BNH são do tipo (30°, 60°, 90°) e (45°, 45°, 90°), respectivamente. Dessa maneira, considerando NH = a, temos:

- no triângulo ANH: NH = a, AH = $a\sqrt{3}$ e NA = $2a$;
- no triângulo BNH: NH = a, BH = a e BN = $a\sqrt{2}$.

Assim:

$$AB = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$AH + HB = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$a\sqrt{3} + a = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$a\cancel{\left(\sqrt{3}+1\right)} = 4\cancel{\left(\sqrt{3}+1\right)}$$
$$a = 4$$

Respondendo às perguntas:

a) A distância do navio à praia é igual a 4 km.

b) AN = $2a$ = 8 km

c) NB = $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ km ≅ 5,66 km

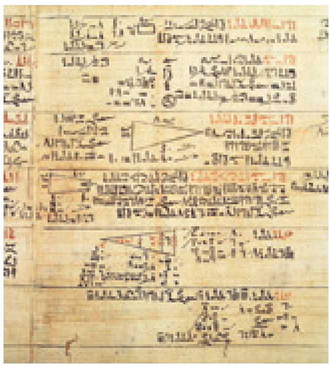
Observação: O método utilizado na resolução do exercício resolvido 13 é recomendável também em triângulos de ângulos (30°, 45°, 105°) ou (45°, 60°, 75°).

Saiba mais

As civilizações egípcia, suméria e chinesa já sabiam da existência do resultado conhecido como teorema de Pitágoras pelo menos 12 séculos antes do nascimento do matemático.

No papiro de Moscou (que, apesar do nome dado, por estar no Museu de Moscou, é da civilização egípcia e data de 1890 a.C. aproximadamente), há o cálculo de alturas de trapézio. No papiro de Rhind (ou de Ahmes), datado de 1650 a.C., que é cópia de um trabalho anterior, há 74 problemas, dos quais 20 são de Geometria e Trigonometria.

Na obra chinesa K'iu-chang Suan Shu (Aritmética em nove seções), que data entre os séculos III e II a.C., já há referências ao resultado. Nessa obra, foram reunidos resultados e práticas considerados ancestrais pelos chineses da época. Também há cálculos de comprimento e trigonométricos em tábuas de argila (Coleção Plimpton) da civilização suméria de pelo menos 1600 a.C.



Album/Fotoarena

Trecho do papiro de Rhind.

No entanto, foi a escola pitagórica que apresentou a primeira justificativa para o teorema. Pitágoras, se existiu, foi um filósofo e matemático grego natural da Ilha de Samos, onde nasceu por volta do ano 580 a.C. Sua vida é envolta em lendas, até porque toda a documentação sobre sua existência foi destruída. Haveria, inclusive, uma biografia dele escrita por Aristóteles. Sabe-se, porém, que a escola pitagórica realmente existiu. Nela se ensinavam quatro ramos do conhecimento: Aritmética, Música, Geometria e Esférica (Trigonometria). Segundo algumas lendas, Pitágoras era um jovem de extraordinária beleza e inteligência, além de grande força e habilidades atléticas. Foi enviado a Mileto para estudar com Tales, o qual rapidamente percebera que não tinha mais nada a ensinar a Pitágoras. Este saiu, então, em viagem pelo mundo, tendo provavelmente conhecido o Egito, a Índia e a China. Foi contemporâneo de Buda e Confúcio; muitos dos seus ensinamentos filosóficos lembram bastante as religiões orientais.

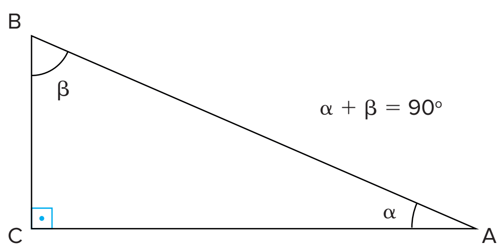
Ele voltou para o Ocidente, tendo se estabelecido em Crotona (sudoeste da Itália), onde fundou a escola pitagórica. Os pitagóricos fizeram muitas contribuições à Filosofia e à Matemática, entre elas a demonstração do teorema de Pitágoras e a descoberta dos números irracionais.

Devido ao charme e à popularidade desse teorema, muitos matemáticos se preocuparam com sua demonstração. O professor de Matemática Elisha Scott Loomis, da cidade de Cleveland, Ohio, já falecido, reuniu, na segunda edição de seu livro, em 1940, 370 demonstrações do teorema!

O triângulo retângulo e as razões trigonométricas

Como vimos, um dos ângulos de um triângulo retângulo mede 90° e os outros dois são agudos e complementares. Na figura do triângulo ABC a seguir, temos que:

- a hipotenusa do triângulo é $\overline{AB}$;
- o cateto oposto ao ângulo de medida α é $\overline{BC}$;
- o cateto adjacente ao ângulo de medida β também é $\overline{BC}$;
- o cateto adjacente ao ângulo de medida α é $\overline{AC}$;
- o cateto oposto ao ângulo de medida β também é $\overline{AC}$.



As razões trigonométricas **seno**, **cosseno** e **tangente** de ângulos agudos são definidas como quocientes entre os comprimentos de determinados lados de um triângulo retângulo. Em relação aos ângulos de medidas α e β no triângulo ABC da figura anterior, encontramos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{tg}(\beta) = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta} = \frac{AC}{BC}$$

De acordo com essas razões trigonométricas, obtemos:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \\ \text{sen}(\beta) = \cos(\alpha) \\ \text{tg}(\alpha) \cdot \text{tg}(\beta) = 1 \end{cases}$$

Como a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo, os valores de seno e cosseno de ângulos agudos sempre serão positivos e menores que 1. Já a tangente pode assumir qualquer valor real positivo.

! Atenção

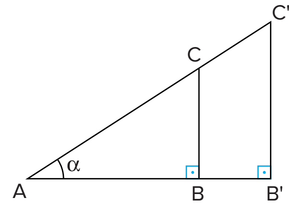
A tangente de um ângulo agudo também é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo:

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\dfrac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}}{\dfrac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}} =$$

$$= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} \cdot \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \theta} =$$

$$= \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta} \Rightarrow \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \text{tg}(\theta)$$

Se dois triângulos retângulos têm os mesmos ângulos, eles são semelhantes e, portanto, apresentam os lados proporcionais. Observe a figura a seguir:



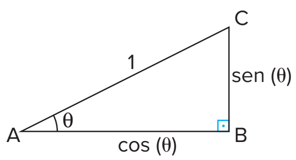
Os triângulos ABC e AB'C' são semelhantes. Portanto:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \text{sen}(\alpha) \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \cos(\alpha)$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \text{tg}(\alpha)$$

O que percebemos aqui é que, para qualquer par de triângulos semelhantes, os valores das funções trigonométricas de um de seus ângulos agudos são os mesmos para os dois triângulos, pois os lados aumentam proporcionalmente. Isso significa que o valor do seno, do cosseno ou da tangente de um ângulo agudo é uma característica do ângulo, e não do triângulo particular do qual ele faz parte.

Se a hipotenusa de um triângulo retângulo tem medida unitária, então as medidas dos seus catetos coincidirão com o seno e o cosseno de um mesmo ângulo agudo desse triângulo.



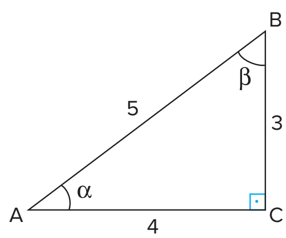
$$\text{hipotenusa} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{cateto oposto} = \text{seno} \\ \text{cateto adjacente} = \text{cosseno} \end{cases}$$

A sentença algébrica que expressa o teorema de Pitágoras, nesse triângulo retângulo de hipotenusa unitária, é conhecida como a relação fundamental da Trigonometria.

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Essa relação é válida para qualquer ângulo agudo θ (no seu curso de Trigonometria, você verá que essa relação também é válida para todos os ângulos, agudos ou não).

Vejamos o exemplo: no triângulo ABC, de medidas AB = 5 cm, BC = 3 cm e AC = 4 cm, determine as funções trigonométricas dos ângulos agudos.



Já vimos que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo. Assim, temos:

$$\text{sen}\,(\alpha) = \cos\,(\beta) = \frac{BC}{AB} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos\,(\alpha) = \text{sen}\,(\beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\text{tg}\,(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\text{tg}\,(\beta) = \frac{AC}{BC} = \frac{4\text{ cm}}{3\text{ cm}} = \frac{4}{3} \cong 1{,}\overline{3}$$

Observe que:

$\text{sen}^2\,(\alpha) + \cos^2\,(\alpha) = (0{,}6)^2 + (0{,}8)^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$ e

$\text{tg}\,(\alpha) \cdot \text{tg}\,(\beta) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$

Exercício resolvido

14. Determinado ângulo agudo α tem $\text{sen}\,(\alpha) = \frac{2}{3}$. Calcule o valor de tg α.

Resolução:

Sabemos que $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ e que $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, assim como $\cos(\alpha) > 0$, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} \Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{5}{9}$$

$$\cos\,(\alpha) = +\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \cos\,(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Logo: $\text{tg}\,(\alpha) = \dfrac{\text{sen}\,(\alpha)}{\cos\,(\alpha)} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Além das três razões trigonométricas que acabamos de estudar, existem três outras razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, que são: a secante (**sec**), a cossecante (**cossec**) e a cotangente (**cotg**).

Embora se acredite que as primeiras razões trigonométricas, usadas na Antiguidade pelos babilônios e egípcios, tenham sido a secante e a cotangente, elas são, atualmente, chamadas de auxiliares e costumam ser definidas com base no seno, no cosseno ou na tangente.

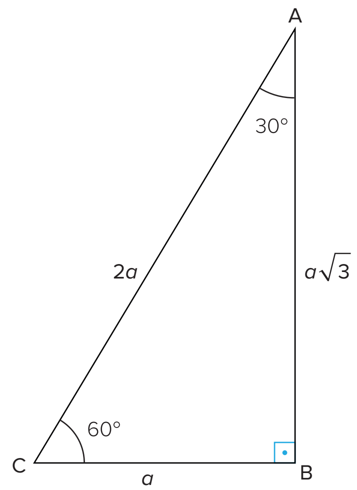
$$\sec\,(\alpha) = \frac{1}{\cos\,(\alpha)} \qquad \text{cossec}\,(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}\,(\alpha)}$$

$$\text{cotg}\,(\alpha) = \frac{\cos\,(\alpha)}{\text{sen}\,(\alpha)} \quad \text{e} \quad \text{cotg}\,(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,(\alpha)}$$

Ângulos notáveis

Para alguns (poucos) ângulos, podemos calcular as razões trigonométricas com base em construções geométricas simples. São bastante conhecidas as construções para os ângulos de 30°, 45° e 60°, conhecidos como ângulos notáveis. Existem outras construções para ângulos de 36°, 18°, 72°, 15°, 75°, ..., entre outros. Aqui nos ateremos aos notáveis: 30°, 45° e 60°.

Vamos usar novamente o triângulo notável (30°, 60°, 90°).



No triângulo ABC da figura com med $(\hat{A}) = 30°$, med $(\hat{B}) = 90°$, med $(\hat{C}) = 60°$, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$ e $AC = 2a$, temos:

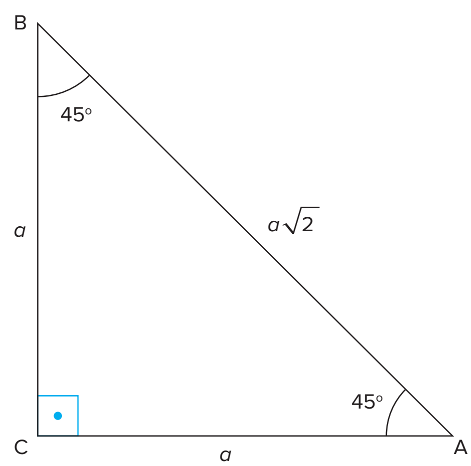
$$\text{sen}\,(60°) = \cos\,(30°) = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\,(60°) = \text{sen}\,(30°) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,(30°) = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,(60°) = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Agora, vamos utilizar o triângulo retângulo e isósceles, de ângulos (45°, 45°, 90°) e lados $(a, a, a\sqrt{2})$. Veja a figura:



FRENTE 3

Da figura, obtemos:

$$\text{sen}\,(45^\circ) = \cos\,(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,(45^\circ) = \frac{a}{a} = 1$$

Podemos resumir esses resultados no quadro a seguir:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Os valores dessa tabela são amplamente utilizados nos exames vestibulares no Brasil e, muitas vezes, não são fornecidos. Por isso, é recomendável que sejam memorizados.

Às vezes, temos dúvidas do tipo: “ao dobrarmos o ângulo, dobramos também o seno ou a tangente?”. Infelizmente, ângulos e suas respectivas razões trigonométricas não são proporcionais. Se fossem, teríamos absurdos como $\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\,(60^\circ) = \text{sen}\,(2 \cdot 30^\circ) = 2 \cdot \text{sen}\,(30^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. A passagem errada nesse caso é que o seno de 60° **não** é o dobro do seno de 30°. Para calcular as razões trigonométricas, existem algumas construções elementares para **poucos** ângulos (15°, 18°, 30°, 36°, 45°, 60°, 75°, ...), mas não para todos eles. Aliás, calcular uma razão trigonométrica de um ângulo agudo envolve várias técnicas matemáticas e experimentais diferentes, a maioria fora do escopo do Ensino Médio. Em geral, os resultados dessas razões são apresentados em tabelas trigonométricas. Veja um exemplo:

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

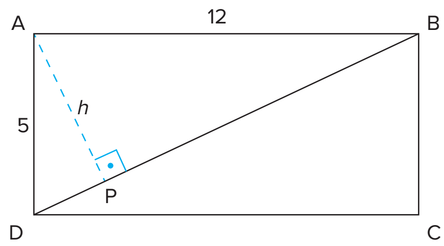
ângulo	sen	cos	tg	ângulo	sen	cos	tg	ângulo	sen	cos	tg	ângulo	sen	cos	tg
0	0,000	1,000	0,000	23	0,391	0,921	0,424	46	0,719	0,695	1,036	69	0,934	0,358	2,605
1	0,017	1,000	0,017	24	0,407	0,914	0,445	47	0,731	0,682	1,072	70	0,940	0,342	2,747
2	0,035	0,999	0,035	25	0,423	0,906	0,466	48	0,743	0,669	1,111	71	0,946	0,326	2,904
3	0,052	0,999	0,052	26	0,438	0,899	0,488	49	0,755	0,656	1,150	72	0,951	0,309	3,078
4	0,070	0,998	0,070	27	0,454	0,891	0,510	50	0,766	0,643	1,192	73	0,956	0,292	3,271
5	0,087	0,996	0,087	28	0,469	0,883	0,532	51	0,777	0,629	1,235	74	0,961	0,276	3,487
6	0,105	0,995	0,105	29	0,485	0,875	0,554	52	0,788	0,616	1,280	75	0,966	0,259	3,732
7	0,122	0,993	0,123	30	0,500	0,866	0,577	53	0,799	0,602	1,327	76	0,970	0,242	4,011
8	0,139	0,990	0,141	31	0,515	0,857	0,601	54	0,809	0,588	1,376	77	0,974	0,225	4,331
9	0,156	0,988	0,158	32	0,530	0,848	0,625	55	0,819	0,574	1,428	78	0,978	0,208	4,705
10	0,174	0,985	0,176	33	0,545	0,839	0,649	56	0,829	0,559	1,483	79	0,982	0,191	5,145
11	0,191	0,982	0,194	34	0,559	0,829	0,675	57	0,839	0,545	1,540	80	0,985	0,174	5,671
12	0,208	0,978	0,213	35	0,574	0,819	0,700	58	0,848	0,530	1,600	81	0,988	0,156	6,314
13	0,225	0,974	0,231	36	0,588	0,809	0,727	59	0,857	0,515	1,664	82	0,990	0,139	7,115
14	0,242	0,970	0,249	37	0,602	0,799	0,754	60	0,866	0,500	1,732	83	0,993	0,122	8,144
15	0,259	0,966	0,268	38	0,616	0,788	0,781	61	0,875	0,485	1,804	84	0,995	0,105	9,514
16	0,276	0,961	0,287	39	0,629	0,777	0,810	62	0,883	0,469	1,881	85	0,996	0,087	11,430
17	0,292	0,956	0,306	40	0,643	0,766	0,839	63	0,891	0,454	1,963	86	0,998	0,076	14,301
18	0,309	0,951	0,325	41	0,656	0,755	0,869	64	0,899	0,438	2,050	87	0,998	0,052	19,081
19	0,326	0,946	0,344	42	0,669	0,743	0,900	65	0,906	0,423	2,145	88	0,999	0,035	28,636
20	0,342	0,940	0,364	43	0,682	0,731	0,933	66	0,914	0,407	2,246	89	0,999	0,017	57,290
21	0,358	0,934	0,384	44	0,695	0,719	0,966	67	0,921	0,391	2,356	90	1,000	0,000	-
22	0,375	0,927	0,404	45	0,707	0,707	1,000	68	0,927	0,375	2,475				

Vejamos alguns exercícios de problemas que envolvem razões trigonométricas.

Exercícios resolvidos

15. Considere o retângulo ABCD a seguir, em que a base mede 12 e a altura 5. Determine a distância do vértice A à diagonal $\overline{BD}$.

Resolução:



Traçando $\overline{AP}$, perpendicular a $\overline{BD}$ e passando por A, a distância pedida é AP = h.

No triângulo ABD, retângulo em A, calculamos BD:

$$BD^2 = 5^2 + 12^2$$
$$BD^2 = 25 + 144 = 169$$
$$BD = 13$$

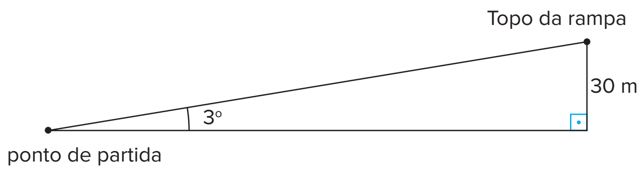
No triângulo ABD, seja med$(A\hat{B}D) = \alpha$:

$$\text{sen}\,(\alpha) = \frac{AD}{BD} = \frac{5}{13}$$

No triângulo APB, retângulo em P:

$$\frac{AP}{AB} = \text{sen}\,(\alpha) \Rightarrow \frac{h}{12} = \frac{5}{13} \Rightarrow h = \frac{60}{13}$$

16. Unesp Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é:

a) 2,5
b) 7,5
c) 10
d) 15
e) 30

Resolução:

No triângulo retângulo da figura, sendo o comprimento da rampa em metros igual a x, temos:

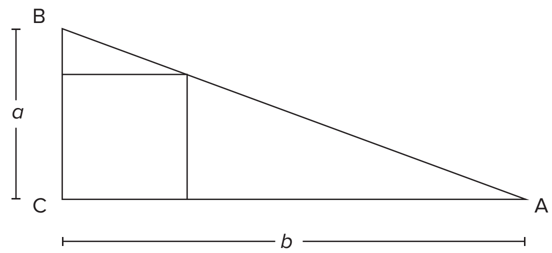
$$\text{sen}\,3° = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{\text{sen}\,3°} \Rightarrow x = \frac{30}{0{,}05} \Rightarrow x = 600\text{ m}$$

Como a velocidade do ciclista é de 4 m/s, o tempo que ele leva para subir a rampa é igual a:

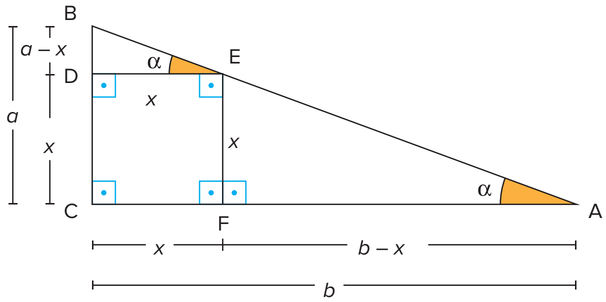
$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{x} \Rightarrow \Delta t = \frac{600\text{ m}}{4\text{ m/s}} = 150\text{ s} =$$
$$= 2\text{min}\,30\text{s} = 2{,}5\text{ min}$$

Resposta: alternativa A.

17. Determine, em função das medidas a e b dos catetos do triângulo ABC, o lado do quadrado nele inscrito, como mostra a figura.



Resolução:



Sendo x o lado do quadrado DEFC, então:

$$BD = a - x \text{ e } AF = b - x$$

Como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AF}$, podemos afirmar que:

$$\text{med}\,(B\hat{E}D) = \text{med}\,(E\hat{A}F) = \alpha$$

Dos triângulos BDE e EFA, temos que $\text{tg}(\alpha) = \frac{BD}{DE} = \frac{EF}{AF}$.

Assim:

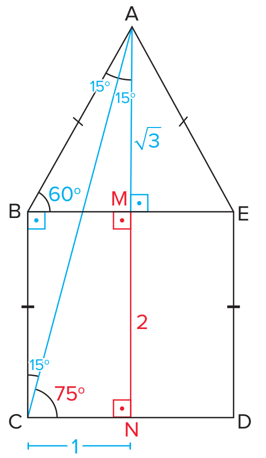
$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x}$$
$$x \cdot x = (a-x)(b-x)$$
$$x^2 = ab - ax - bx + x^2$$
$$0 = ab - (a+b)x$$
$$(a+b)x = ab$$
$$x = \frac{ab}{a+b}$$

18. Faça uma tabela com os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 15° e 75°.

Resolução:

Na figura, ABE é um triângulo equilátero e BCDE um quadrado, ambos de lados 2, enquanto M e N são os pontos médios de $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$.

FRENTE 3



No triângulo ABE, encontramos: AB = BE = AE = 2 e med$(A\hat{B}E)$ = 60°.

No quadrado BCDE, temos: BC = CD = DE = BE = 2 e med$(C\hat{B}E)$ = 90°.

Como AB = BC = 2 e med$(A\hat{B}C)$ = med$(A\hat{B}E)$ + + med$(E\hat{B}C)$ = 60° + 90° = 150°, o triângulo ABC é isósceles com ângulos (150°, 15°, 15°). Por esse motivo, med$(A\hat{C}D)$ = med$(B\hat{C}D)$ – med$(B\hat{C}A)$ = 90° – 15° = 75° e med$(C\hat{A}N)$ = 90° – med$(A\hat{C}N)$ = 90° – 75° = 15°.

Temos que $\overline{AM}$ é altura do triângulo equilátero ABE, de lado 2, logo, $AM = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Além disso, MN = 2 e AN = MN + AM = 2 + $\sqrt{3}$.

No triângulo ANC, retângulo em N, temos que $CN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ e $AC^2 = CN^2 + AN^2$. Logo:

$$AC^2 = 1^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$AC^2 = 1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3$$

$$AC^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

Agora observe esta interessante identidade:

$$8+4\sqrt{3}=6+2\sqrt{12}+2=6+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$$

Dessa maneira, obtemos $AC=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Ainda no triângulo ACN, encontramos:

$$\text{sen}\,75° = \cos 15° = \frac{AN}{AC} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \text{sen}\,15° = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}\,75° = \frac{AN}{CN} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{tg}\,15° = \frac{CN}{AN} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2-\sqrt{3}$$

Portanto:

	15°	75°
sen	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
tg	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$

Revisando

1. Calcule a altura relativa à base de um triângulo isósceles de lados 10 cm, 15 cm e 15 cm.

2. A altura de um triângulo equilátero mede $4\sqrt{3}$ cm. Determine o perímetro desse triângulo.

3. Determine a função que expressa o comprimento *d* da diagonal de um quadrado de lado ℓ a partir do perímetro *p* desse mesmo quadrado.

a) $d(p) = \dfrac{\sqrt{2p}}{4}$

b) $d(p) = \dfrac{p}{2}$

c) $d(p) = \dfrac{p\sqrt{2}}{4}$

d) $d(p) = \dfrac{p\sqrt{2}}{2}$

e) $d(p) = \dfrac{p^2\sqrt{2}}{4}$

4. Calcule a altura de um trapézio que tem base maior de 20 cm, base menor de 6 cm e lados oblíquos de 25 cm.

5. **Uece 2022** Uma folha de papel plana e retangular é dividida em três partes retangulares e congruentes de duas maneiras distintas, referenciadas à largura e ao comprimento da folha de papel. Na primeira, a medida do menor lado de cada parte é igual a 4 cm e, analogamente, na segunda, a medida do menor lado de cada parte é igual a 5 cm. Nessas condições, a medida, em cm, da diagonal da folha de papel é igual a:

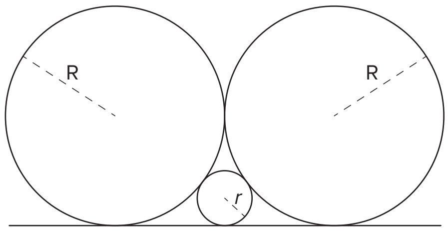
a) $4\sqrt{41}$.

b) $3\sqrt{41}$.

c) $5\sqrt{39}$.

d) $6\sqrt{39}$.

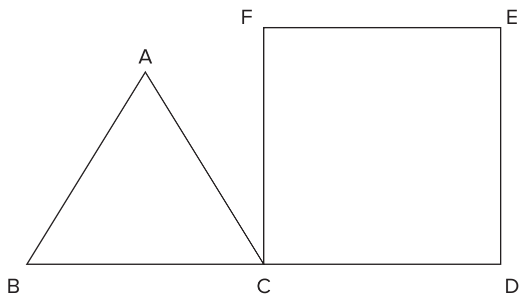
6. Unicamp-SP 2021 A figura abaixo exibe três círculos tangentes dois a dois e os três tangentes a uma mesma reta. Os raios dos círculos maiores têm comprimento R e o círculo menor tem raio de comprimento *r*.



A razão $\frac{R}{r}$ é igual a

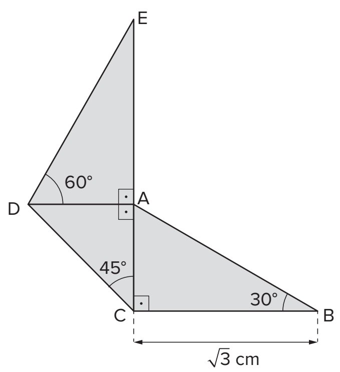
a) 3. b) $\sqrt{10}$. c) 4. d) $2\sqrt{5}$.

7. A figura mostra um triângulo equilátero ABC de lado 2 cm e um quadrado CDEF. Sendo C o ponto médio de $\overline{BD}$, a distância entre os pontos A e D, em cm, é:



a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{6}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{2}$

8. UFJF-MG 2020 Na figura abaixo, o ponto A é vértice comum dos triângulos retângulos ABC, ACD e ADE.



O comprimento do segmento $\overline{EC}$, em centímetros, é

a) $3+\sqrt{3}$

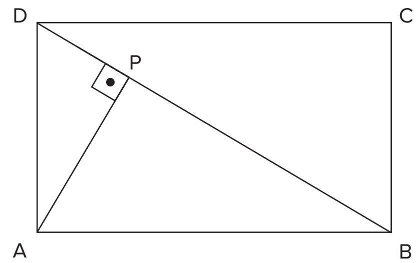
b) $\frac{9}{4}$

c) $1+\sqrt{3}$

d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

9. UEPB No retângulo ABCD de lado AB = 3 cm, BC = $\sqrt{7}$ cm, o segmento $\overline{AP}$ é perpendicular à diagonal $\overline{BD}$.

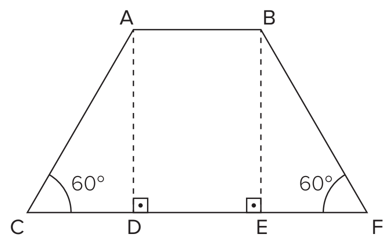


O segmento $\overline{BP}$ mede, em cm:

a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{4}$

10. Um ângulo agudo α tem $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{10}$. Calcule $\operatorname{tg}\alpha$.

11. Mackenzie-SP

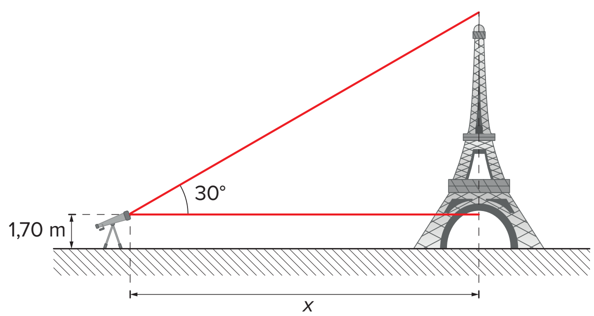


Se, na figura, $AD = 3\sqrt{2}$ e $CF = 14\sqrt{6}$, então a medida de AB é:

a) $8\sqrt{6}$
b) $10\sqrt{6}$
c) $12\sqrt{6}$
d) 28
e) $14\sqrt{5}$

12. UFT-TO 2020 A Torre Eiffel é uma torre treliça de ferro do século XIX localizada no Champ de Mars, em Paris e que se tornou um ícone mundial da França. A torre, que é o edifício mais alto da cidade, tem 324 metros de altura e é o monumento pago mais visitado do mundo, com milhões de pessoas frequentando-o anualmente. Uma visitante observa o topo da Torre Eiffel sob um ângulo de 30° com a horizontal, utilizando uma luneta com tripé. Sabe-se que a altura do equipamento, no momento da visualização, conforme a figura a seguir, é de 1,70 m. Assinale a alternativa CORRETA que indica a distância *x*, em metros, que a luneta está do centro da base da Torre Eiffel:

$\left(\text{Obs.: } \operatorname{sen}30° = \frac{1}{2} \text{ e } \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



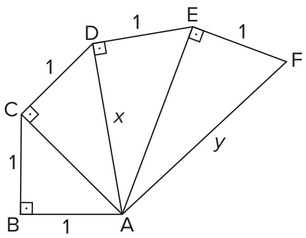
a) 325,7 b) 324 c) $322{,}3\sqrt{3}$ d) $324\sqrt{3}$

Exercícios propostos

1. Mackenzie-SP 2016 A soma entre as medidas da altura e da base de um retângulo é de 14 cm. Se a diagonal mede 10 cm, então as medidas da altura e da base do retângulo são, respectivamente:

a) 2 cm e 12 cm.
b) 9 cm e 5 cm.
c) 10 cm e 4 cm.
d) 8 cm e 6 cm.
e) 11 cm e 3 cm.

2. Na figura, os ângulos em B, C, D e E são retos.



Então, $(x + y)$ é:

a) $2 + \sqrt{6}$
b) $2 + \sqrt{5}$
c) $2 + \sqrt{3}$
d) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$
e) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

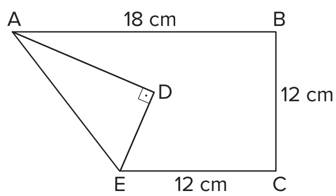
3. Fuvest-SP/FGV Queremos desenhar, no interior de um retângulo ABCD, um losango AICJ com vértice I sobre o lado $\overline{AB}$ do retângulo e vértice J sobre o lado $\overline{CD}$. Se as dimensões dos lados do retângulo são AB = 25 cm e BC = 15 cm, então a medida do lado do losango, em cm, é:

a) 13
b) 15
c) 17
d) 18
e) 19

Observação: Um losango é um quadrilátero com os quatro lados iguais.

4. Enem 2019 Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato.

Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

a) $2\sqrt{22}$ cm
b) $6\sqrt{3}$ cm
c) 12 cm
d) $6\sqrt{5}$ cm
e) $12\sqrt{2}$ cm

5. PUC-SP A soma dos quadrados dos três lados de um triângulo retângulo é igual a 32. Quanto mede a hipotenusa do triângulo?

a) 8
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

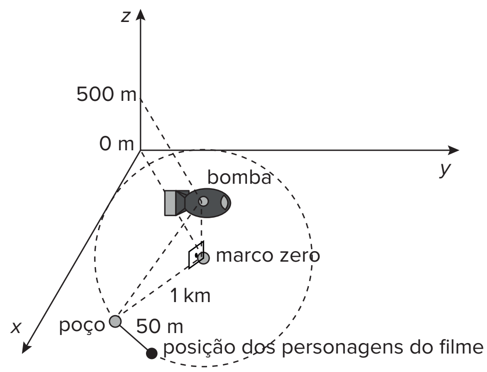
6. IFCE 2016 Um triângulo retângulo tem catetos medindo 1 e 2. Se um quadrado for construído tendo como lado a hipotenusa desse triângulo, a diagonal do quadrado medirá:

a) $\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{5}$
c) $5\sqrt{2}$
d) $\sqrt{10}$
e) $\sqrt{2}$

7. Unesp Em 09 de agosto de 1945, uma bomba atômica foi detonada sobre a cidade japonesa de Nagasaki. A bomba explodiu a 500 m de altura acima do ponto que ficaria conhecido como "marco zero".

No filme Wolverine imortal, há uma sequência de imagens na qual o herói, acompanhado do militar japonês Yashida, se encontrava a 1 km do marco zero e a 50 m de um poço. No momento da explosão, os dois correm e se refugiam no poço, chegando a esse local no momento exato em que uma nuvem de poeira e material radioativo, provocada pela explosão, passa por eles.

A figura a seguir mostra as posições do "marco zero", da explosão da bomba, do poço e dos personagens do filme no momento da explosão da bomba.



Se os ventos provocados pela explosão foram de 800 km/h e adotando a aproximação $\sqrt{5} \cong 2{,}24$, os personagens correram até o poço, em linha reta, com uma velocidade média, em km/h, de aproximadamente:

a) 28
b) 24
c) 40
d) 36
e) 32

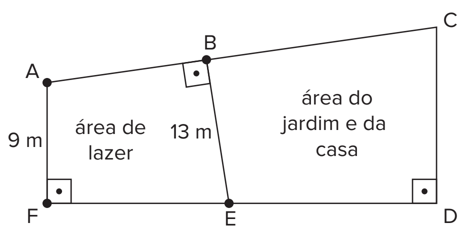
8. **Unicamp-SP 2014** O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m, e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a:

a) 3,0 m^2.
b) 2,0 m^2.
c) 1,5 m^2.
d) 3,5 m^2.

9. **Fuvest-SP 2021** Suponha, para simplificar, que a Terra é perfeitamente esférica e que a linha do Equador mede 40 000 km. O trajeto que sai do Polo Norte, segue até a linha do Equador pelo meridiano de Greenwich, depois se desloca ao longo da linha do Equador até o meridiano 45°L e então retorna ao Polo Norte por esse meridiano tem comprimento total de

a) 15 000 km.
b) 20 000 km.
c) 25 000 km.
d) 30 000 km.
e) 35 000 km.

10. **Unesp** A figura, fora de escala, representa o terreno plano onde foi construída uma casa.



Sabe-se do quadrilátero ABEF que:

- seus ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{F}E$ são retos;
- $\overline{AF}$ mede 9 m e $\overline{BE}$ mede 13 m;
- o lado $\overline{EF}$ é 2 m maior que o lado $\overline{AB}$.

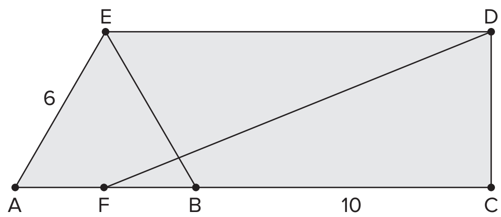
Nessas condições, quais são as medidas, em metros, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$?

11. Os catetos de um triângulo retângulo medem b e c. Calcule o comprimento da bissetriz do ângulo reto.

12. **Unig-RJ 2020** Um poste de alta-tensão é erguido verticalmente em um terreno horizontal. Um raio o atinge, quebrando-o em um ponto a 10 u.c. do topo, permanecendo essa parte presa à estrutura nesse ponto.
Sabendo-se que o seu topo foi projetado ao solo a uma distância de 6 u.c. de sua base, pode-se afirmar que a altura do poste, em u.c., é igual a

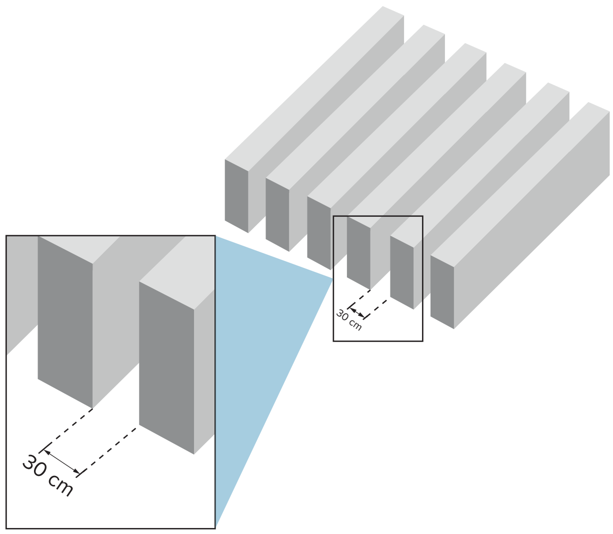
a) 12
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

13. **Fuvest-SP 2021** Na figura, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos entre si e perpendiculares ao segmento $\overline{CD}$; o ponto B pertence ao segmento $\overline{AC}$; F é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$; e ABE é um triângulo equilátero. Além disso, o segmento $\overline{BC}$ mede 10 unidades de comprimento e o segmento $\overline{AE}$ mede 6 unidades de comprimento. A medida do segmento $\overline{DF}$, em unidades de comprimento é igual a



a) 14.
b) 15.
c) 16.
d) 17.
e) 18.

14. **Enem 2020** Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



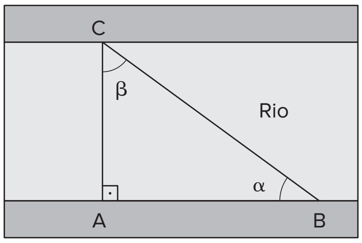
Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia. Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de

a) 9.
b) 15.
c) 26.
d) 52.
e) 60.

15. Calcule o valor da expressão a seguir:

$$\text{sen}\,50° - \cos 40° + \text{tg}\,10° \cdot \text{tg}\,80°$$

16. **AFA-SP 2021** Em uma aula de topografia, o professor queria medir a largura de um rio. Para tal, ele tomou dois pontos A e B em uma margem do rio e outro ponto C na margem oposta, de modo que o segmento $\overline{CA}$ ficasse perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, como indicado na figura a seguir



(Desenho fora de escala)

Considere que:

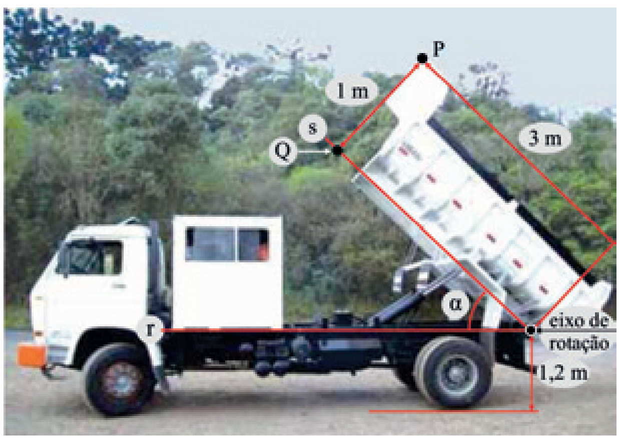
- a distância entre os pontos A e B é de 30 m;
- os ângulos agudos α e β podem ser obtidos através da equação $(\text{sen}^2\alpha)x^2 - 9(\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta) + \frac{5}{2}\cos\beta = 0$, na qual $x = 2$ é uma de suas raízes;

Dados: $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

A largura aproximada do rio, em m, é igual a

a) 15 b) 21 c) 17 d) 51

17. **Unesp** A caçamba de um caminhão basculante tem 3 m de comprimento das direções de seu ponto mais frontal P até a de seu eixo de rotação e 1 m de altura entre os pontos P e Q. Quando na posição horizontal, isto é, quando os segmentos de retas *r* e *s* coincidirem, a base do fundo da caçamba distará 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de seu eixo de rotação, localizado em sua parte traseira inferior, conforme indicado na figura.

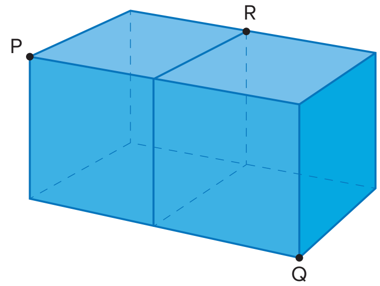


www.autobrutus.com. Adaptado.

Dado $\cos\alpha = 0{,}8$, a altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro α for máximo, é:

a) 4,8 c) 3,8 e) 4,0
b) 5,0 d) 4,4

18. **Famerp-SP 2020** Dois cubos idênticos, de aresta igual a 1 dm, foram unidos com sobreposição perfeita de duas das suas faces. P é vértice de um dos cubos, Q é vértice do outro cubo e R é vértice compartilhado por ambos os cubos, conforme indica a figura.



A área do triângulo de vértices P, Q e R é igual a:

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}\,\text{dm}^2$

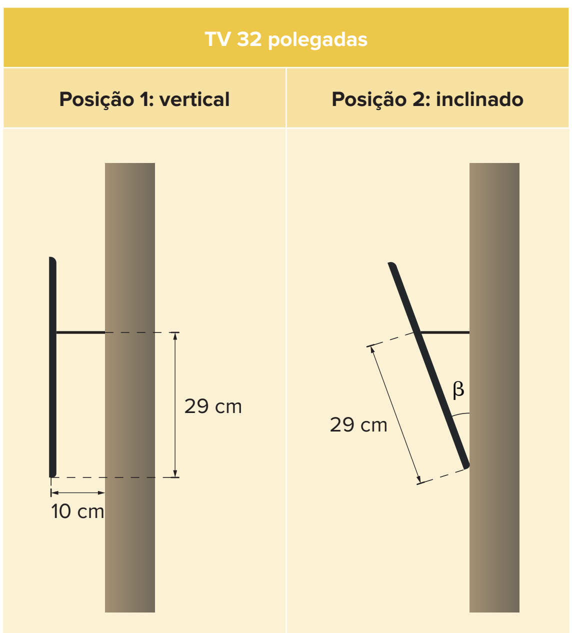
b) $\frac{\sqrt{6}}{3}\,\text{dm}^2$

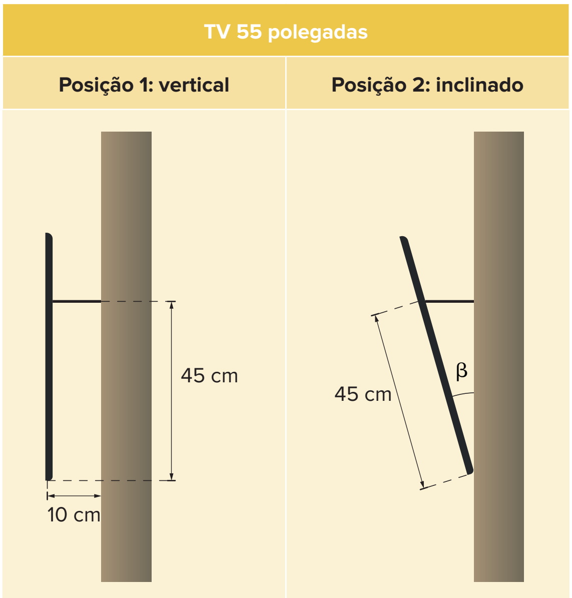
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{dm}^2$

d) $\frac{\sqrt{6}}{6}\,\text{dm}^2$

e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{dm}^2$

19. **FICSAE-SP 2019** Uma empresa desenvolveu um suporte para fixação de televisores (TVs) em paredes. O suporte pode ser utilizado em TVs de 32 até 55 polegadas e permite que o aparelho fique na vertical ou inclinado, conforme a ilustração, em que β refere-se ao ângulo máximo de inclinação.





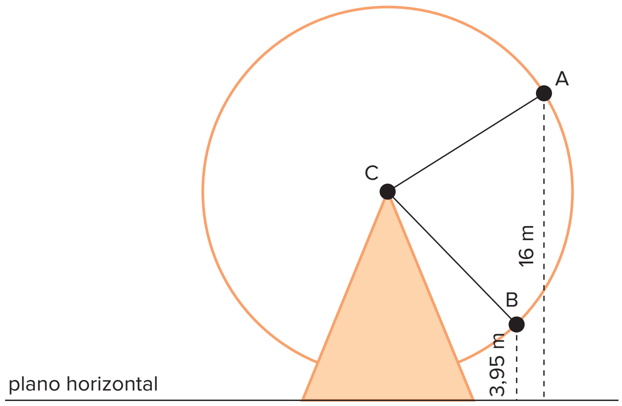
Considere os seguintes valores aproximados para seno, cosseno e tangente:

β	sen β	cos β	tg β	β	sen β	cos β	tg β
10°	0,174	0,985	0,176	16°	0,276	0,961	0,287
11°	0,191	0,982	0,194	17°	0,292	0,956	0,306
12°	0,208	0,978	0,213	18°	0,309	0,951	0,325
13°	0,225	0,970	0,250	19°	0,326	0,946	0,344
14°	0,242	0,970	0,250	20°	0,342	0,940	0,364
15°	0,259	0,966	0,268	21°	0,358	0,934	0,384

A diferença entre o ângulo máximo de inclinação da TV de 32 polegadas e da TV de 55 polegadas é um valor entre

a) 1º e 3º.
b) 9º e 11º.
c) 7º e 9º.
d) 3º e 5º.
e) 5º e 7º.

20. Uerj 2016 O raio de uma roda-gigante de centro C mede CA = CB = 10 m. Do centro C ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11 m. Os pontos A e B situados no mesmo plano vertical, ACB, pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16 m e 3,95 m do plano do chão. Observe o esquema e a tabela.



θ (graus)	sen θ
15°	0,259
30°	0,500
45°	0,707
60°	0,866

A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo AĈB corresponde a:

a) 45
b) 60
c) 75
d) 105

Texto complementar

Os princípios de geometria, matemática, astronomia, entre outras disciplinas, partiram da observação do Universo, da natureza, dos astros e suas trajetórias. Assim, os estudiosos na história da humanidade deixaram um legado que nos dias atuais são a base da tecnologia moderna.

Medindo o raio da Terra (Geometria plana: semelhança e congruência)

[...]

Para desenvolver o raciocínio geométrico, vamos contemplar nesse momento o estudo de propriedades de congruência e semelhança de figuras planas. Há uma aplicação muito antiga na busca de solução para problemas, que é a medida do raio da Terra. Com a nossa tecnologia atual, é muito fácil determinar esse comprimento, mas imaginemos o problema para fazer essa medida sem instrumento algum. E foi isso que Eratóstenes de Alexandria fez.

[...]

Eratóstenes, que era ao mesmo tempo poeta, gramático, filósofo, geômetra, geógrafo, bibliotecário e astrônomo, deu, provavelmente, a menor parte de seu tempo às observações astronômicas. Porém, é graças à sua medida do raio da Terra, que diz respeito tanto à geografia quanto à matemática e à astronomia, que ele tornou-se conhecido. No livro *De motu circulari corporum caelestium*, de Cleômedes, encontramos a descrição do método de Eratóstenes para determinar o raio da Terra.

No entanto, os autores matemáticos quando escrevem sobre Eratóstenes é para relatar o Crivo (ou peneira) que leva o próprio nome dele, o qual é um método para separar sistematicamente os números primos.

Segundo Verdet (1991, p. 205), “era um fenômeno conhecido desde a Antiguidade que em Siene, atual Assuã, no Egito, no dia do solstício de verão (21 de junho), ao meio-dia, um poço era iluminado até o fundo” (alguns autores escreveram que Eratóstenes encontrou o relato desse fenômeno em um dos papiros da Biblioteca de Alexandria). Logo, Siene se localizava no trópico de Câncer: a altura do polo acima do horizonte era igual ali à obliquidade da eclíptica. Em compensação, em Alexandria, Eratóstenes observou que nesse mesmo dia e no mesmo horário, no ano seguinte, ao se colocar uma vara vertical (denominada gnômon) fincada no solo ela produzia sombra. Isso intrigou Eratóstenes, pois em Siene não existia nenhuma sombra ao meio-dia, ou seja, o Sol incidia na vertical, porém, em Alexandria, ele conferiu que havia sombra, ao qual ele julgou impossível numa Terra plana.

Eratóstenes encomendou a contagem da distância D entre as duas cidades às caravanas de camelos e depois utilizou a semelhança de triângulos para determinar o raio terrestre (Figura abaixo), resultado que obteve com um erro mínimo levando em conta todas as incertezas envolvidas.

Google Earth, 2022; D_A_S_H_U/iStockphoto.com

Fonte: HORVATH, J.E. O ABCD da Astronomia e Astrofísica. p.23.

[...]

MAGALHAES, Thiago Alberto Correia. *Explorando a astronomia como contexto para o ensino de matemática no ensino médio*. 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/dissertacao-thiago.pdf. Acesso em: 7 jul. 2022.

Resumindo

Áreas

Retângulo

$A_{\text{retângulo}} = (\text{base}) \cdot (\text{altura})$

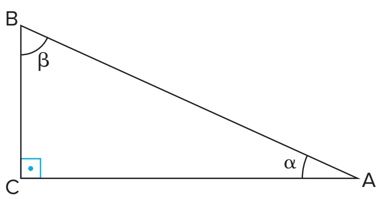
Quadrado

$A_{\text{quadrado}} = \ell \cdot \ell = \ell^2$

Triângulo retângulo

$$A_{\text{triângulo retângulo}} = \frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2}$$

Triângulo retângulo



Teorema de Pitágoras: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Triângulos pitagóricos: um triângulo pitagórico primitivo (a, b, c) pode ser obtido do seguinte modo:

1. Escolhem-se dois números inteiros positivos m e n, $m > n$, m e n primos entre si e de paridades diferentes.
2. Determinam-se as medidas dos lados da seguinte maneira:

$a = m^2 + n^2$ $\quad b = 2mn$ $\quad c = m^2 - n^2$

Razões trigonométricas relativas ao ângulo a

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{BC}{AB} \qquad \cos(\alpha) = \frac{AC}{AB} \qquad \text{tg}(\alpha) = \frac{BC}{AC}$$

Razões trigonométricas relativas ao ângulo b

$$\text{sen}(\beta) = \frac{AC}{AB} \qquad \cos(\beta) = \frac{BC}{AB} \qquad \text{tg}(\beta) = \frac{AC}{BC}$$

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \\ \text{sen}(\beta) = \cos(\alpha) \\ \text{tg}(\alpha) \cdot \text{tg}(\beta) = 1 \end{cases}$$

Relação fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

Outras razões trigonométricas

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \qquad \text{cossec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$$

$$\text{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \text{ ou } \text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$

Quer saber mais?

Sites

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. Teorema de Pitágoras. *Imática*, 26 set. 2000. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/teopitagoras.html.

Confira neste *site* o possível método utilizado por Pitágoras para demonstrar o enunciado: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Acesso em: 18 jun. 2022.

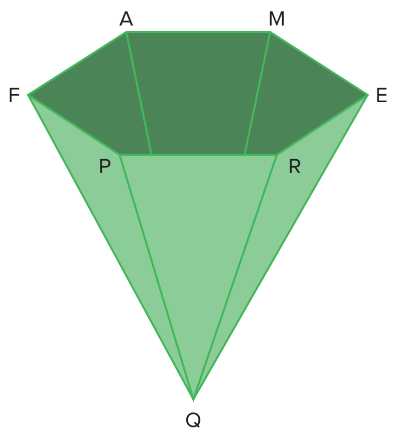
Vídeo

DOCUMENTÁRIOS Revolução Científica. *O legado de Pitágoras.* YouTube, 7 dez. 2012. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=dsjiWChrjE4; http://www.youtube.com/watch?v=aeiJtsCh_QU e http://www.youtube.com/watch?v=tn0ULb0y-c4.

Neste vídeo, é possível conhecer um pouco da história de Pitágoras e verificar como o teorema formalmente demonstrado por ele auxiliou civilizações antigas em construções arquitetônicas.
Acesso em: 18 jun. 2022.

Exercícios complementares

1. Famerp-SP 2021 Um recipiente tem a forma de pirâmide regular de base hexagonal, como mostra a figura. Sabe-se que FE = 80 cm e que a distância do vértice Q ao plano que contém a base hexagonal FAMERP é igual a 30 cm.



A área de cada face externa lateral desse recipiente, em cm^2, é igual a

a) $150\sqrt{21}$

b) $200\sqrt{21}$

c) $120\sqrt{21}$

d) $180\sqrt{21}$

e) $100\sqrt{21}$

2. UFU-MG 2019 Uma academia de ginástica disponibiliza a seus usuários um banco para que possam desenvolver suas atividades físicas com o auxílio de um instrutor habilitado. Esse banco pode ser utilizado para diversas atividades e por pessoas com diferentes biotipos, uma vez que possui uma parte prolongável e uma parte inclinável.

Na Figura 1, a seguir, o banco foi inclinado em 30° em relação à posição horizontal, mas a parte prolongável não foi utilizada, mantendo sua extensão igual a *d* cm. Na Figura 2, o banco foi inclinado um pouco mais até formar um ângulo de 45° em relação à posição horizontal e, além disso, a parte prolongável foi utilizada para ampliar a extensão do banco em *x* cm em relação à sua extensão inicial de *d* cm. Na posição da Figura 1, o encosto desse banco atinge a altura de *h* cm em relação à base horizontal do banco; na posição da Figura 2, o encosto desse banco atinge a altura de H cm em relação a essa mesma base horizontal, que é o dobro da altura *h*.

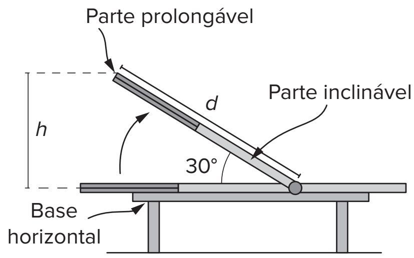


Figura 1

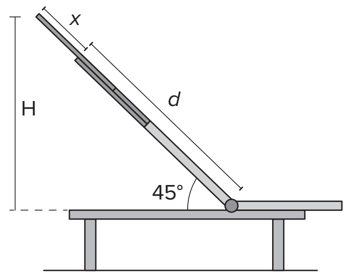


Figura 2

Considere $\sqrt{2} \cong 1{,}4$.

Segundo as informações apresentadas, a razão entre o prolongamento *x* e a extensão inicial *d* do banco é um número que pertence ao intervalo

a) $\left[0, \frac{1}{5}\right)$

b) $\left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

c) $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

d) $\left[\frac{5}{5}, \frac{6}{5}\right)$

FRENTE 3

3. Uma folha de papel de 8 por 12 polegadas é dobrada de maneira que um vértice toque o ponto médio do lado não adjacente maior. Ache o comprimento da dobra.

4. EBMSP-BA 2018

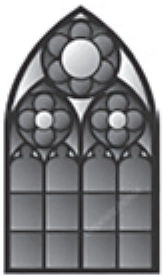


figura 1

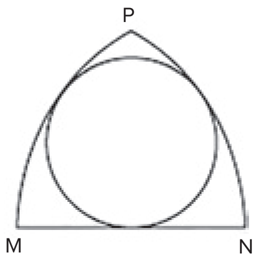
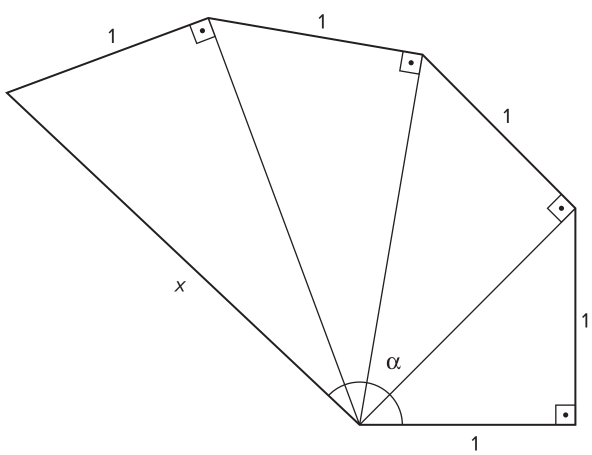


figura 2

A capela de um hospital é decorada com vitrais semelhantes ao representado na figura 1.
Para reproduzi-lo, uma pessoa decidiu fazer os cálculos relativos às dimensões de alguns detalhes, iniciando com a parte superior, representada na figura 2. Sabe-se que $\overset{\frown}{MP}$ e $\overset{\frown}{NP}$ são arcos de circunferências com centros em N e M, respectivamente, e que o círculo tangente aos arcos $\overset{\frown}{MP}$ e $\overset{\frown}{NP}$ e ao segmento $\overline{MN}$ tem raio $r = 15$ u.c.
Com base nesses dados, pode-se afirmar que a medida do segmento $\overline{MN}$ é igual a:

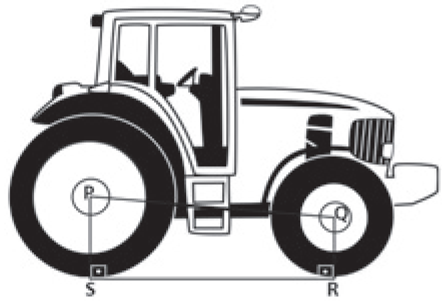
a) 45
b) 40
c) 30
d) 25
e) 15

5. Unicamp-SP Considere um hexágono, como o exibido na figura a seguir, com cinco lados com comprimento de 1 cm e um lado com comprimento de *x* cm.



a) Encontre o valor de *x*.
b) Mostre que a medida do ângulo α é inferior a 150°.

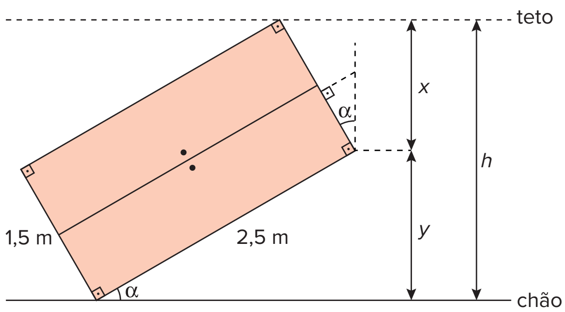
6. IFMG 2018 No trator da figura, o raio $\overline{PS}$ da maior circunferência determinada pelo pneu traseiro é 80 cm, o raio $\overline{QR}$ da maior circunferência determinada pelo pneu dianteiro é 56 cm e as distâncias entre os centros P e Q dessas circunferências é de 240 cm.



Considerando $\pi = 3$, a distância entre os pontos S e R, em que os pneus tocam o solo plano é:

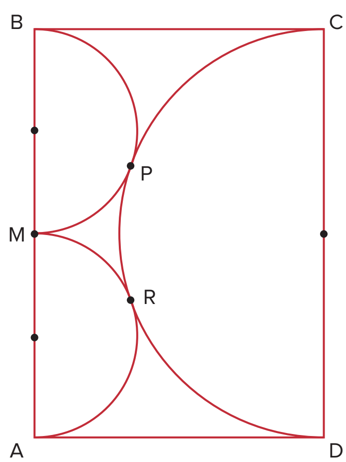
a) igual ao comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.
b) maior que o comprimento da circunferência de raio $\overline{PS}$.
c) um valor entre as medidas dos comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$.
d) maior que o módulo da diferença entre os comprimentos das circunferências de raios $\overline{PS}$ e $\overline{QR}$.

7. Unifesp 2016 Por razões técnicas, um armário de altura 2,5 m e largura 1,5 m está sendo deslocado por um corredor, de altura *h* metros, na posição mostrada pela figura.



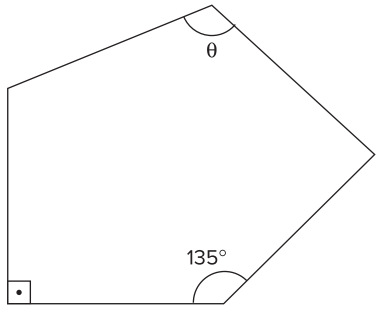
a) Calcule *h* para o caso em que $\alpha = 30°$.
b) Calcule *h* para o caso em que $x = 1{,}2$ m.

8. FICSAE-SP 2016 Na figura abaixo, ABCD é um retângulo tal que BC = 6 cm e M é ponto médio do lado $\overline{AB}$. Se os semicírculos no interior do retângulo são dois a dois tangentes entre si, nos pontos M, P e R, então a área de ABCD, em centímetros quadrados, é



a) $36\sqrt{3}$
b) $36\sqrt{2}$
c) $18\sqrt{3}$
d) $18\sqrt{2}$

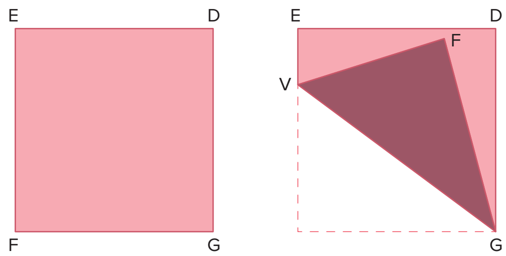
9. Unicamp-SP A figura a seguir exibe um pentágono com todos os lados de mesmo comprimento.



A medida do ângulo θ é igual a:

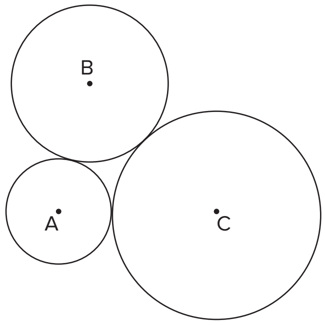
a) 105°
b) 120°
c) 135°
d) 150°

10. FGV-SP 2020 DEFG representa uma folha de papel quadrada, de área igual a 25 cm^2. Essa folha foi dobrada, como mostra a figura, formando o triângulo FGV. Depois de feita a dobra, a distância entre F e $\overline{GV}$ é igual a 3 cm.



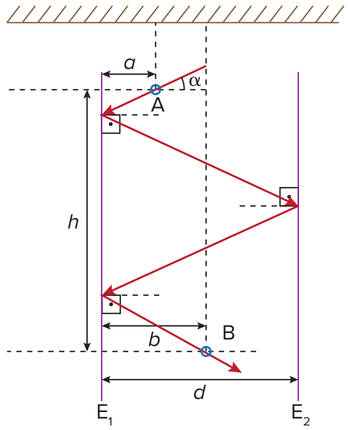
a) Calcule a medida de $\overline{FV}$.
b) Depois de feita a dobra no papel, admita que θ seja a medida do ângulo agudo $F\hat{G}D$. Calcule cos θ.

11. Unicamp-SP 2017 A figura a seguir exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos *a*, *b* e *c*, respectivamente.



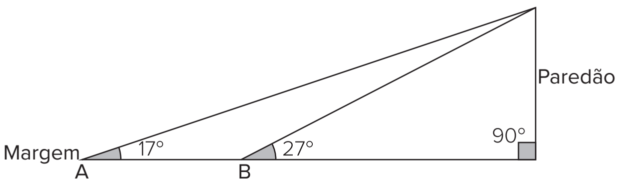
a) Determine os valores de *a*, *b* e *c*, sabendo que a distância entre A e B é de 5 cm, a distância entre A e C é de 6 cm e a distância entre B e C é de 9 cm.
b) Para $a = 2$ cm e $b = 3$ cm, determine o valor de $c > b$ de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

12. Unesp Sejam dois espelhos planos (E_1 e E_2), posicionados verticalmente, com suas faces espelhadas voltadas uma para outra, e separados por uma distância *d*, em centímetros. Suspensos por finas linhas, dois pequenos anéis (A e B) são posicionados entre esses espelhos, de modo que as distâncias de A e B ao espelho E_1 sejam, respectivamente, *a* e *b*, em centímetros, e a distância vertical entre os centros dos anéis seja *h*, em centímetros, conforme mostra a figura.



Determine o ângulo de incidência α, em relação à horizontal, em função de *a*, *b*, *d* e *h*, para que um feixe de luz atravesse o anel A, reflita-se nos espelhos E_1, E_2 e E_1 e atravesse o anel B, como indica o percurso na figura. Admita que os ângulos de incidência e de reflexão do feixe de luz sobre um espelho sejam iguais.

13. IFPE 2018 Os alunos pré-egressos do *campus* Jaboatão dos Guararapes resolveram ir até a Lagoa Azul para celebrar a conclusão dos cursos. Raissa, uma das participantes do evento, ficou curiosa para descobrir a altura do paredão rochoso que envolve a lagoa. Então pegou em sua mochila um transferidor e estimou o ângulo no ponto A, na margem onde estava, e, após nadar, aproximadamente, 70 metros em linha reta em direção ao paredão, estimou o ângulo no ponto B, conforme mostra a figura a seguir.



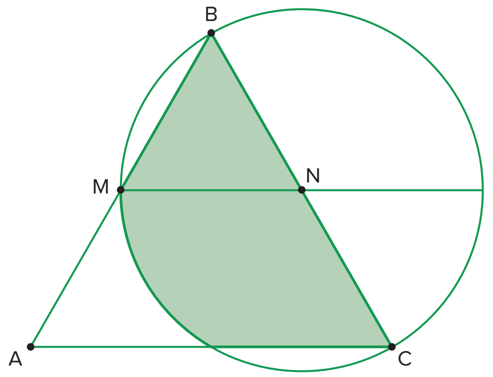
De acordo com os dados coletados por Raissa, qual a altura do paredão rochoso da Lagoa Azul?

Dados: sen(17°) = 0,29; tg(17°) = 0,30; cos(27°) = 0,89; e tg(27°) = 0,51.

a) 50 metros.
b) 51 metros.
c) 89 metros.
d) 70 metros.
e) 29 metros.

FRENTE 3

14. Famerp-SP 2018 As tomografias computadorizadas envolvem sobreposição de imagens e, em algumas situações, é necessário conhecer a área da região de interseção das imagens sobrepostas. Na figura, um triângulo equilátero ABC se sobrepõe a um círculo de centro N e raio NB = NC = NM, com M e N sendo pontos médios, respectivamente, de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.



Sendo a área de triângulo equilátero de lado ℓ igual a $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ e a área de círculo de raio r igual a πr^2, se o lado do triângulo ABC medir 4 cm, então, a área de interseção entre o triângulo e o círculo, em cm^2, será igual a

a) $\pi + 3\sqrt{3}$

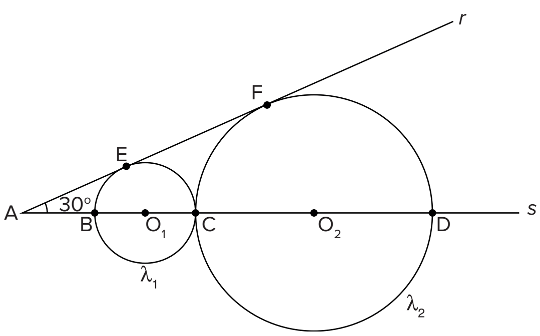
b) $\frac{\pi + 3\sqrt{3}}{2}$

c) $\pi + \sqrt{3}$

d) $\frac{2\pi + 6\sqrt{3}}{3}$

e) $\pi + 2\sqrt{3}$

15. Mackenzie-SP



Na figura anterior, as circunferências λ_1 e λ_2 são tangentes no ponto C e tangentes à reta r nos pontos E e F, respectivamente. Os centros, O_1 e O_2, das circunferências pertencem à reta s. Sabe-se que r e s se interceptam no ponto A, formando um ângulo de 30°. Se $\overline{AE}$ mede $2\sqrt{3}$ cm, então os raios das circunferências λ_1 e λ_2 medem, respectivamente:

a) $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{15}$ cm.

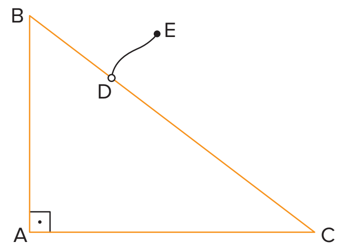
b) $\sqrt{3}$ cm e 2 cm.

c) 2 cm e 6 cm.

d) 2 cm e 4 cm.

e) $2\sqrt{3}$ cm e 4 cm.

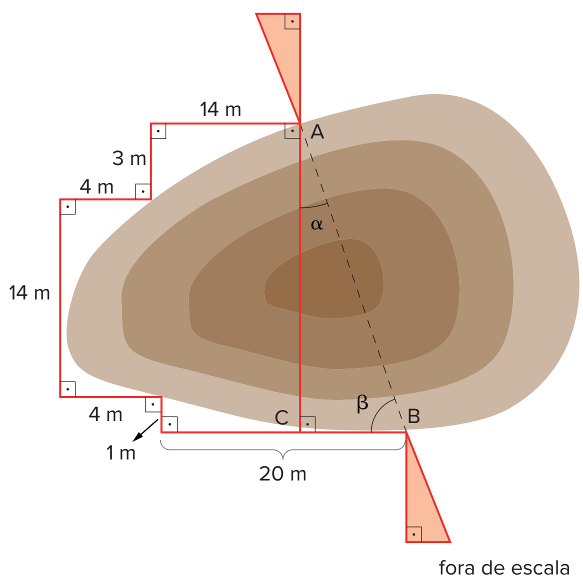
16. Unifesp 2020 Uma corda de 1 m de comprimento está conectada no ponto D de um triângulo retângulo ABC de ângulo reto no vértice A e medidas AB = 3 m e AC = 4 m. O ponto de conexão entre a corda e o triângulo pode deslizar livremente por todos os lados do triângulo. Durante o deslocamento do ponto D por todos os lados do triângulo, com o ponto E distando sempre 1 m do triângulo, E descreverá uma curva fechada, contida no plano do triângulo ABC, chamada de λ.



a) Faça um esboço do desenho de λ e calcule o comprimento dessa curva.

b) Seja M o ponto mais distante do vértice B atingido pelo ponto E durante seu deslocamento e A' a projeção ortogonal do ponto A sobre a hipotenusa do triângulo ABC. Calcule a distância entre os pontos M e A'.

17. Famerp-SP 2019 Duas equipes de escavação vão perfurar um túnel $\overline{AB}$ em uma montanha, sendo que uma delas partirá de A e a outra de B, a fim de se encontrarem. Para cavar nas direções corretas os engenheiros precisam determinar as medidas dos ângulos α e β, indicados na figura, que essa direção forma com as retas perpendiculares $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ respectivamente.



Dados:

x	63,4°	68,2°	71,6°	74°	76°
tg x	2	2,5	3	3,5	4

De acordo com o projeto e com os dados fornecidos, α e β são, respectivamente, iguais a

a) 18,4° e 71,6°.
b) 21,8° e 68,2°.
c) 14° e 76°.
d) 26,6° e 63,4°.
e) 16° e 74°.

18. Fuvest-SP A corda comum de dois círculos que se interceptam é vista de seus centros sob ângulos de 90° e 60°, respectivamente. Sabendo-se que a distância entre seus centros é igual a $\sqrt{3} + 1$, determine os raios dos círculos.

19. ITA-SP Num triângulo ABC, retângulo em Â, temos B = 60°. As bissetrizes desses ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta $\overline{BD}$ mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

a) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm.

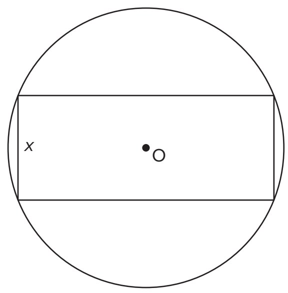
b) $1+\sqrt{3}$ cm.

c) $2+\sqrt{3}$ cm.

d) $1+\sqrt{2}$ cm.

e) n.d.a.

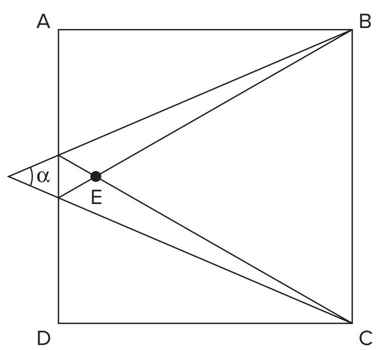
20. FGV-SP 2020 (Adapt.) Em uma circunferência de diâmetro 20 cm se inscreve um retângulo de lado *x*. Expresse a área do retângulo em função de *x* e determine o domínio dessa função.



21. ITA-SP Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em A. Seja D a interseção da bissetriz do ângulo Â com o lado $\overline{BC}$ e E um ponto da reta suporte do cateto $\overline{AC}$ de tal modo que os segmentos de reta $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ sejam paralelos. Sabendo que $\overline{AD}$ mede $\sqrt{2}$ cm, então a área do círculo inscrito no triângulo EBC é:

a) $\pi(4 - 2\sqrt{3})$ cm².
b) $2\pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm².
c) $3\pi(4 - 2\sqrt{3})$ cm².
d) $4\pi(3 - 2\sqrt{2})$ cm².
e) $\pi(4 - 2\sqrt{2})$ cm².

22. IME-RJ Na figura seguinte, ABCD é um quadrado de lado 1 e BCE é um triângulo equilátero.



O valor de $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ é:

a) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

c) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

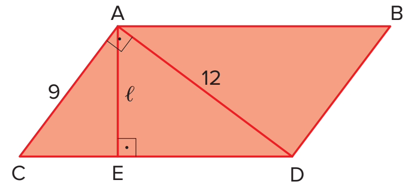
d) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

e) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

BNCC em foco

EM13MAT308

1. O prefeito deseja reformar uma grande praça localizada na região central da cidade. No projeto encomendado, além de uma calçada que atravessa a diagonal da praça, cuja forma lembra um paralelogramo, foi proposto um caminho que liga o ponto A ao ponto E, para facilitar o acesso dos pedestres à passagem de pedestres. Na figura a seguir estão indicadas as medidas, em metros do projeto.

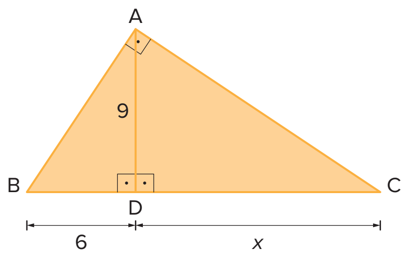


A medida ℓ, em metros, indicada na figura é igual a:

a) 8,9 **b)** 9,7 **c)** 6,5 **d)** 8,4 **e)** 7,2

EM13MAT308

2. Um parque ecológico solicitou a um engenheiro um projeto para a construção de uma teleférico para levar os visitantes do ponto C ao alto de um morro, no ponto A, e de uma tirolesa para levar os visitantes do alto do morro A até um rio, no ponto B. O rascunho do projeto está representado na imagem a seguir.

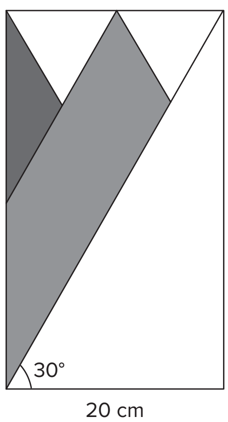


A medida x, em metros, da distância entre a base do teleférico e a projeção ortogonal do ponto mais alto do morro é

a) 9,7 **b)** 10,5 **c)** 13,5 **d)** 17,2 **e)** 19,6

EM13MAT308

3. Um quadro retangular decorativo foi composto por formas geométricas e colorido com tons de cinza e branco, conforme o modelo a seguir, no qual estão indicadas algumas medidas.



As medidas dos lados do maior triângulo que aparece no quadro, em centímetros, são, aproximadamente:

a) 13,3 cm, 17,3 cm e 20 cm.
b) 11,5 cm, 13,3 cm e 20 cm.
c) 17,3 cm, 20 cm e 23 cm.
d) 11,5 cm, 20 cm e 23 cm.
e) 20 cm, 23 cm e 27,5 cm.

A.RICARDO/Shutterstock.com

Esqueitista brasileira Rayssa Leal nos Jogos Olímpicos de Tokyo 2020. Foto de 2021.

FRENTE 3

CAPÍTULO

2

Princípios de Geometria Plana

Entre diversão e esporte, andar de *skate* é uma atividade democrática. Crianças, jovens e adultos se arriscam em manobras que envolvem giros de 180° ou mais no próprio eixo do *skate* ou com o esqueitista junto. Através de seus movimentos, podemos explorar várias possibilidades na Geometria.

O conjunto de fatos tomados como verdadeiros sobre as formas geométricas, amplamente utilizadas no nosso dia a dia, é uma das grandes conquistas do pensamento geométrico clássico.

Neste capítulo, vamos explorar a estrutura lógica da Geometria e a atribuição das medidas angulares. Devemos adquirir a capacidade de avaliar medidas de ângulos, comprimentos, áreas e volumes de formas geométricas mais complexas que a do triângulo retângulo.

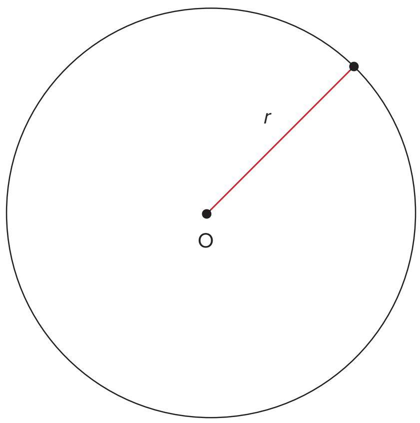
A Geometria de Euclides

Embora existam diversas formas modernas do pensamento geométrico, as avaliações pré-vestibulares cobram apenas as ideias propostas por Euclides e Descartes.

Discípulo de Platão, Euclides via lógica no pensamento geométrico e propôs uma linha de raciocínio ao estudo da Geometria que podia incorporar as descobertas de seus predecessores, como Tales e Pitágoras.

Assim, o estudo da Geometria Euclidiana parte de três conceitos primitivos que admitimos existir em um único espaço geométrico: os pontos, as retas e os planos. As demais figuras geométricas podem ser definidas por afirmações referentes aos pontos, às retas ou aos planos.

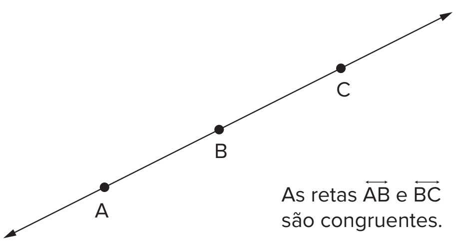
Por exemplo, o conjunto de todos os pontos de um plano que estão situados a uma distância dada (*r*) de um mesmo ponto (O) desse plano define a figura de uma circunferência de centro O e raio *r*.



Em todo o estudo da Geometria, estão presentes esses três aspectos: a forma, o tamanho e a posição. Por isso, ela admite diferentes níveis de comparação entre as figuras geométricas. A nomenclatura usada para essa comparação é:

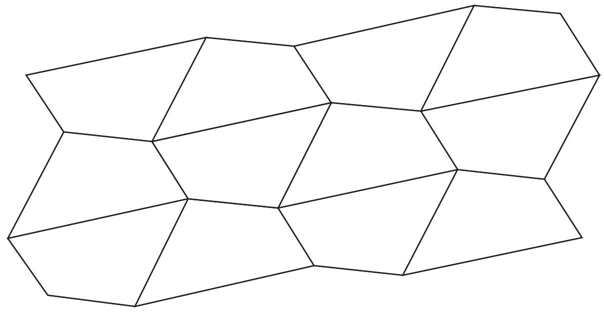
- **Igualdade:** significa mesma forma, mesmo tamanho e mesma posição.
- **Congruência:** significa mesma forma e mesmo tamanho.
- **Semelhança:** significa mesma forma.
- **Equivalência:** significa mesmo tamanho.

De acordo com essa nomenclatura, uma figura geométrica só pode ser igual a ela mesma. A reta que passa pelos pontos A e B, por exemplo, é igual àquela que passa pelos pontos B e C quando os três pontos são colineares.

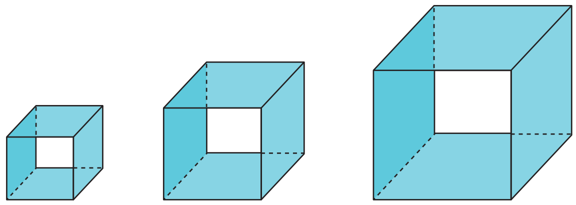


As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são congruentes.

Duas figuras **congruentes** são idênticas em tudo o que se refere às suas medidas e podem ocupar posições diferentes formando padrões de repetição em alguns casos. Veja o exemplo:



Figuras **semelhantes** têm o mesmo formato, mas podem assumir diversos tamanhos. Os termos usados para designar formatos geométricos podem defini-los de modo mais ou menos preciso, dependendo do caso.



Quanto ao tamanho das figuras, os termos grande, médio e pequeno não são suficientes para a comparação que o estudo da Geometria propõe, sendo avaliado em diferentes níveis:

- **Espacial:** é o que possui as três dimensões métricas.
- **Superficial:** é o que tem apenas duas dimensões métricas.
- **Linear:** é o que apresenta apenas uma dimensão métrica.
- **Angular:** é o que não possui dimensão métrica, mas que pode, mesmo assim, ser medido.

Assim, duas figuras são denominadas **equivalentes** no espaço quando têm o mesmo volume e, no plano, quando possuem a mesma área.

As dimensões métricas de um objeto sólido são designadas pelos termos "altura", "largura" e "profundidade". Além disso, "comprimento" e "espessura" são usados para denominar, respectivamente, a maior e a menor das dimensões de um objeto.

Veja também o que se pode afirmar sobre os tamanhos dos entes primitivos da Geometria e o espaço geométrico euclidiano.

		Tamanho		
	Dimensões	**Altura**	**Largura**	**Profundidade**
Um ponto	Zero	Zero	Zero	Zero
Uma reta vertical	Uma	Infinita	Zero	Zero
Um plano horizontal	Duas	Zero	Infinita	Infinita
O espaço geométrico	Três	Infinita	Infinita	Infinita

Já o estudo das **posições** das figuras geométricas, principal contribuição do pensamento cartesiano para a Geometria, na época de Euclides, pode ser resumido por relações entre as localizações de duas ou mais figuras. Assim, um ponto pode pertencer ou não a uma reta, duas retas de um mesmo plano podem ser paralelas ou concorrentes, uma reta pode ser tangente ou secante a uma circunferência etc.

Postulados e teoremas

Os postulados da Geometria são regras que enunciam tanto possibilidades de construção geométrica quanto propriedades de seus entes primitivos ou definidos. Euclides pretendia partir de um número reduzido de regras e definições para deduzir e justificar, de maneira lógica, outras leis e propriedades a respeito das características das figuras geométricas. As leis e propriedades geométricas assim deduzidas são os teoremas.

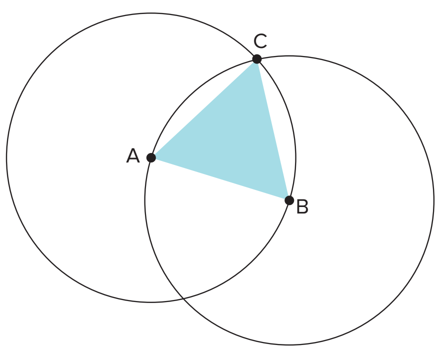
Alguns dos postulados da Geometria Euclidiana dizem respeito às possibilidades de construção geométrica, por isso permitem que linhas auxiliares sejam traçadas para facilitar a resolução de algum problema. Dessa forma, se for útil, podemos, por exemplo:

1. Traçar um segmento de reta partindo de qualquer ponto até outro ponto qualquer.
2. Prolongar um segmento de reta indefinidamente em uma mesma direção para obter uma reta.
3. Descrever uma circunferência com centro em qualquer ponto e passando por qualquer outro ponto.

Do primeiro postulado, podemos depreender que é permitido ligar, por uma linha reta, dois pontos quaisquer de uma figura geométrica se isso for ajudar na resolução de um problema. E, ao fazê-lo, devemos saber que, do ponto de vista euclidiano, aquela linha representa o caminho mais curto entre os pontos ligados.

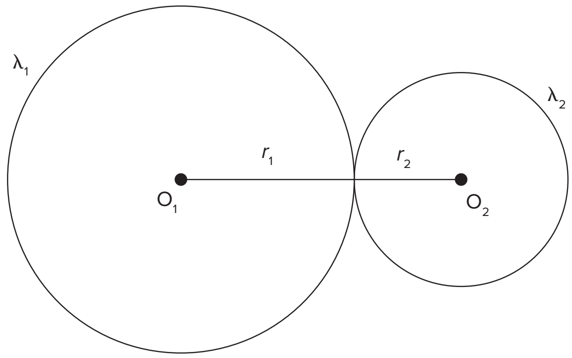
O segundo postulado permite prolongarmos os segmentos presentes em uma figura, mas somente criando um ângulo raso (180°) na extremidade do segmento prolongado.

O terceiro postulado possibilita que circunferências sejam traçadas efetuando a rotação de um ponto em torno de outro. Aplicando apenas este último postulado, um desenhista já pode resolver o problema de encontrar vértices de muitas figuras, como os triângulos equiláteros.

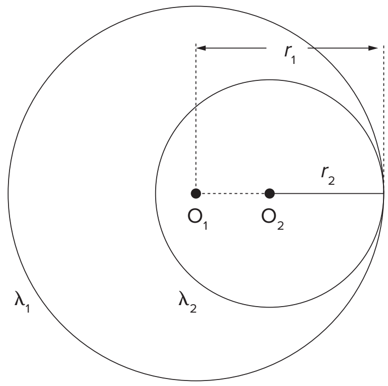


Além disso, permite efetuarmos adições e subtrações de comprimentos geometricamente, com o auxílio do compasso. Basta que sejam desenhadas circunferências tangentes entre si, o que pode acontecer de duas formas:

1. Se a circunferência λ_1 é **tangente exteriormente** à circunferência λ_2, então a distância entre seus centros é igual à soma das medidas de seus raios.



2. Se a circunferência λ_2 é **tangente interiormente** à circunferência λ_1, então a distância entre seus centros é igual à diferença absoluta das medidas de seus raios.



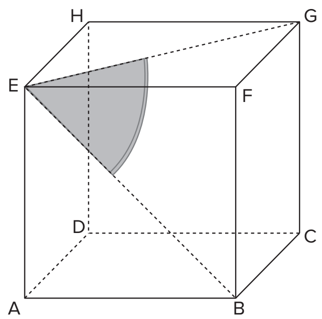
As premissas da Geometria são os seus postulados, seus entes primitivos e definidos. As deduções lógicas extraídas dessas premissas são os teoremas da Geometria, que não apenas enunciam propriedades a respeito de figuras geométricas como também descrevem, por meio de fórmulas matemáticas, as maneiras corretas de serem calculadas as muitas medidas presentes em cada figura geométrica.

Alguns teoremas são conhecidos pelo nome de algum geômetra, como Pitágoras e Tales, e outros pelo nome de algum ente definido, por exemplo: teorema da bissetriz ou teorema do ângulo externo do triângulo.

Os exemplos a seguir apresentam problemas que podem ser resolvidos com o auxílio de alguma construção permitida pelos postulados e pela aplicação de alguns importantes teoremas da Geometria Euclidiana. Neste momento, não precisamos nos preocupar com o desconhecimento dos teoremas ou com a ausência das demonstrações, pois serão estudados particularmente no decorrer do curso.

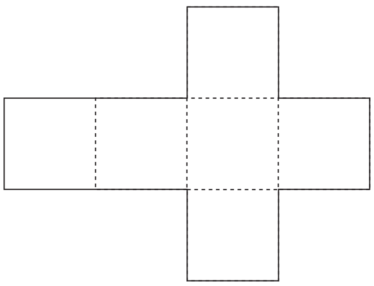
Exemplo 1:

Qual é a medida em graus do ângulo $B\hat{E}G$ determinado pelos vértices do cubo a seguir?

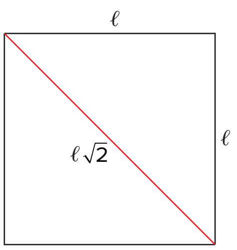


Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

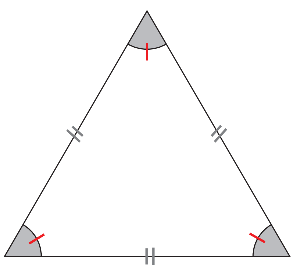
I. Cubo é um sólido cercado por seis quadrados de mesmo tamanho.



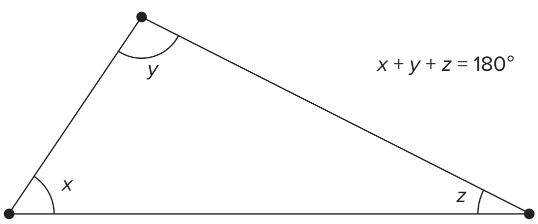
II. A diagonal de um quadrado de lado ℓ mede $\ell\sqrt{2}$.



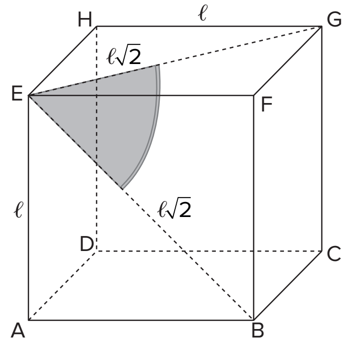
III. Os ângulos de um triângulo equilátero têm todos a mesma medida.



IV. A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.

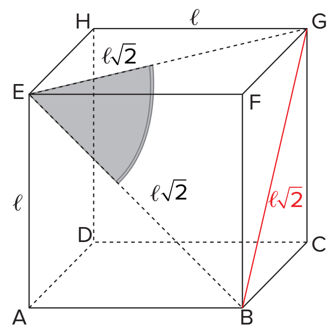


Os conhecimentos (I) e (II) já podem ser aplicados à figura, pois ela apresenta explicitamente um cubo, seus seis quadrados em perspectiva e duas diagonais desses quadrados.

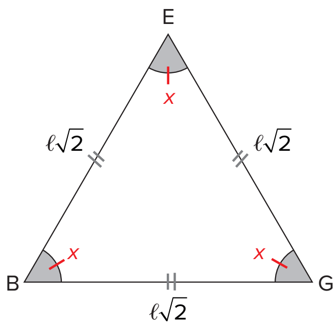


Mas os conhecimentos (III) e (IV) só podem ser aplicados à figura depois de uma pequena interferência em seu desenho. No estudo da Geometria, essa e outras interferências são denominadas construções geométricas. As únicas construções geométricas permitidas são as enunciadas pelos três primeiros postulados de Euclides.

Por isso, vamos fazer uso da permissão concedida pelo **primeiro postulado** e traçar o segmento de reta que une os pontos B e G da figura.



Agora, observando que $EG = \ell\sqrt{2}$, pois também é diagonal de um dos quadrados que cercam esse cubo, pelos argumentos (I) e (II) concluímos que o triângulo BEG é equilátero.

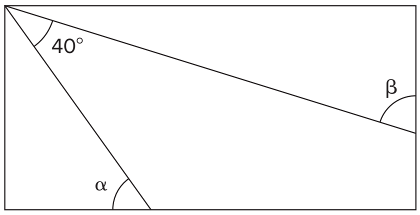


Dos argumentos (III) e (IV), sendo x a medida do ângulo $B\hat{E}G$, temos que:

$$x + x + x = 180° \Rightarrow x = 60°$$

Exemplo 2:

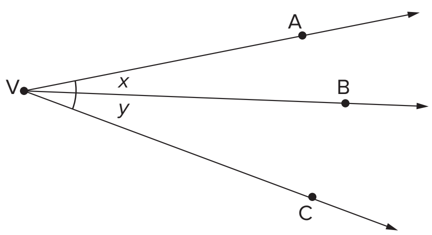
Fuvest-SP No retângulo a seguir, o valor, em graus, de $\alpha + \beta$ é:



a) 50 b) 90 c) 120 d) 130 e) 220

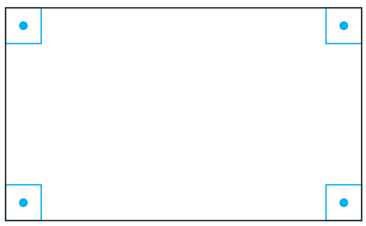
Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

I. Dois ângulos adjacentes determinam um terceiro ângulo cuja medida é a soma deles dois.

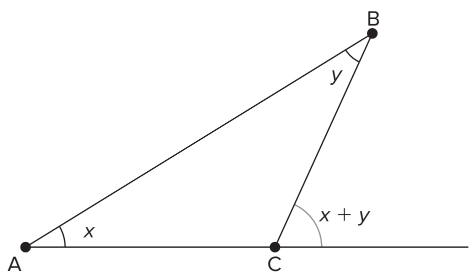


$med(A\hat{V}B) = x$
$med(B\hat{V}C) = y$
$med(A\hat{V}C) = x + y$

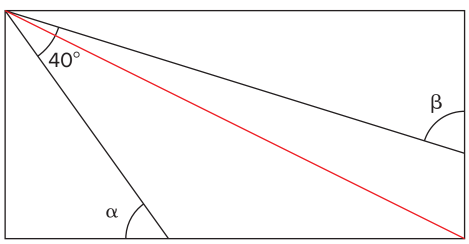
II. Os ângulos de um retângulo medem 90°.



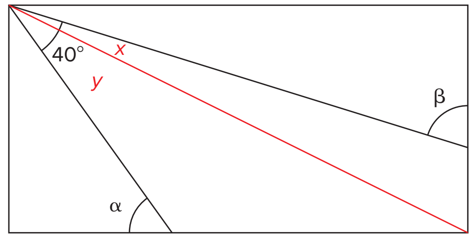
III. Um ângulo externo de um triângulo mede a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.



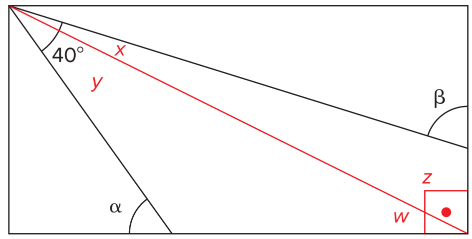
Além disso, vamos fazer novamente o uso do **primeiro postulado** de Euclides e traçar o segmento de reta determinado por dois vértices opostos do retângulo.



Com essa construção, podemos aplicar o conhecimento (I) e observar que foram determinados ângulos de medidas x e y tais que $x + y = 40°$.



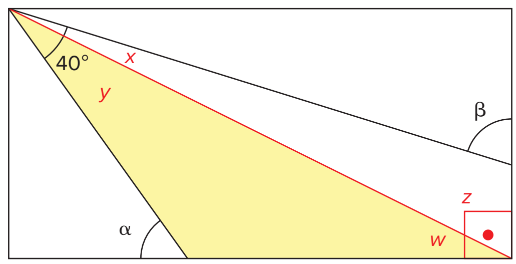
Aplicando o conhecimento (II), também podemos observar que foram determinados ângulos de medidas z e w tais que $z + w = 90°$.



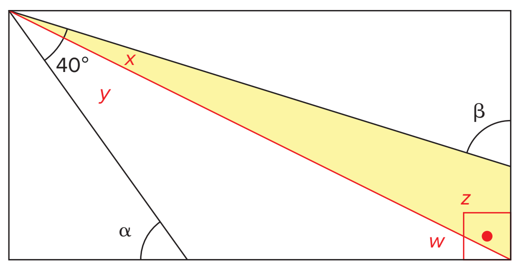
$$\begin{cases} x + y = 40° \\ z + w = 90° \end{cases}$$

Agora, o conhecimento (III) pode ser observado nos dois triângulos determinados pela construção da diagonal do retângulo, pois:

- o ângulo α é externo do triângulo de ângulos internos não adjacentes y e w.



- o ângulo β é externo do triângulo de ângulos internos não adjacentes x e z.

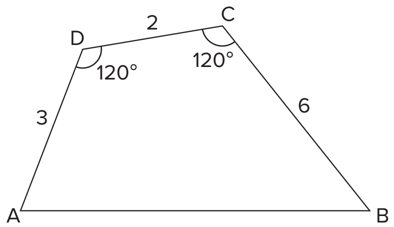


Assim, somando as duas últimas equações e substituindo os valores anotados no sistema formado pelas duas primeiras, temos:

$$\alpha + \beta = y + w + x + z = (x + y) + (z + w)$$
$$\alpha + \beta = 40° + 90°$$
$$\alpha + \beta = 130°$$

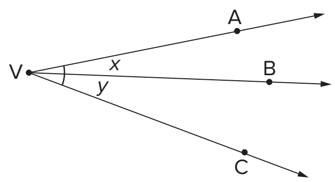
Exemplo 3:

Qual é o comprimento da base $\overline{AB}$ do quadrilátero ABCD a seguir?



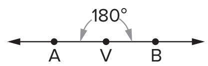
Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

I. Dois ângulos adjacentes determinam um terceiro ângulo cuja medida é a soma deles dois.

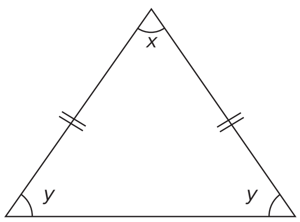


med $(A\hat{V}B) = x$
med $(B\hat{V}C) = y$
med $(A\hat{V}C) = x + y$

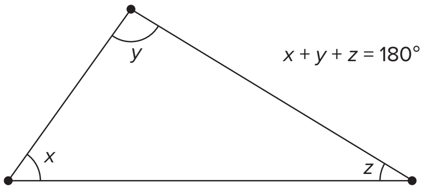
II. O ângulo raso mede 180°.



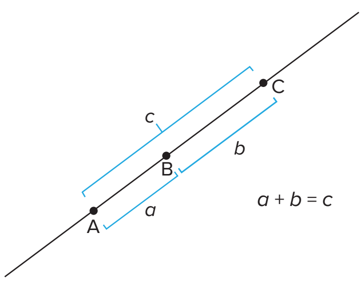
III. Se há ângulos internos de mesma medida em um triângulo, então esses ângulos são opostos a lados de mesmo comprimento.



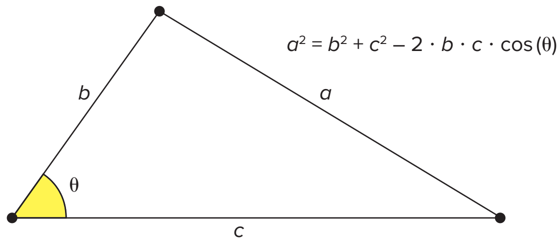
IV. As medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo somam 180°.



V. Dois segmentos colineares e consecutivos determinam um terceiro segmento cujo comprimento é igual à soma deles dois.



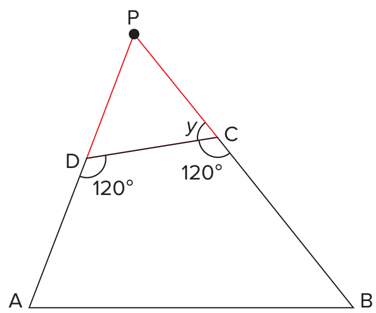
VI. Teorema dos cossenos.



VII. $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

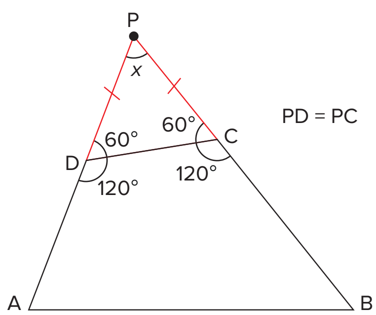
Como a figura não apresenta explicitamente as formas necessárias para a aplicação desses conhecimentos, vamos fazer uso da construção estipulada pelo **segundo postulado** de Euclides e prolongar os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ da figura dada, obtendo o ponto P.



Agora, sendo y a medida do ângulo obtido no prolongamento de $\overline{BC}$, dos conhecimentos (I) e (II), temos que:

$$120° + y = 180° \Rightarrow y = 60°$$

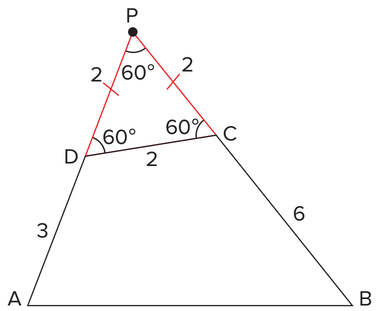
Com o mesmo raciocínio, podemos concluir que o ângulo determinado no prolongamento do lado $\overline{AD}$ também mede 60°. Assim, aplicando o conhecimento (III), concluímos que $\overline{PD}$ e $\overline{PC}$ têm o mesmo comprimento.



Do conhecimento (IV), sendo x a medida do ângulo no vértice P, obtemos:

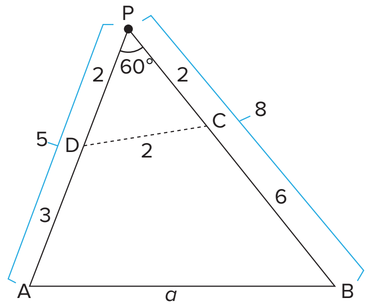
$$60° + 60° + x = 180° \quad \Rightarrow \quad x = 60°$$

Novamente, pelo conhecimento (III), podemos concluir que todos os lados do triângulo PDC apresentam o mesmo comprimento.



Agora, aplicando o conhecimento (V), encontramos:

- AP = AD + PD = 3 + 2 = 5
- BP = BC + PC = 6 + 2 = 8



Assim, do conhecimento (VI), obtemos:

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(60°)$$

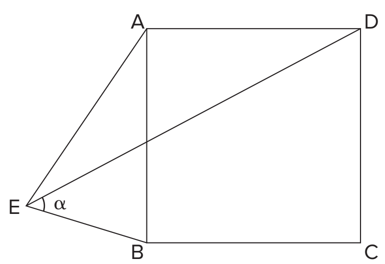
E, finalmente, substituindo o valor apresentado no conhecimento (VII), ficamos com a seguinte equação, em que a representa um número positivo:

$$a^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2}$$
$$a^2 = 89 - 40$$
$$a^2 = 49$$
$$a = 7$$

Portanto, o segmento $\overline{AB}$ tem comprimento 7.

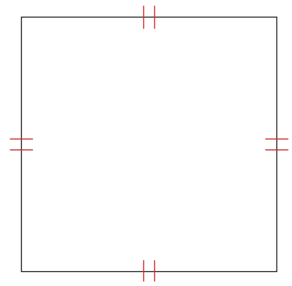
Exemplo 4

Na figura, o segmento $\overline{AE}$ tem a mesma medida do lado do quadrado ABCD. Qual é a medida α do ângulo $B\hat{E}D$?

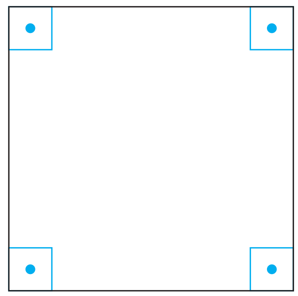


Podemos responder a essa pergunta considerando os seguintes conhecimentos geométricos:

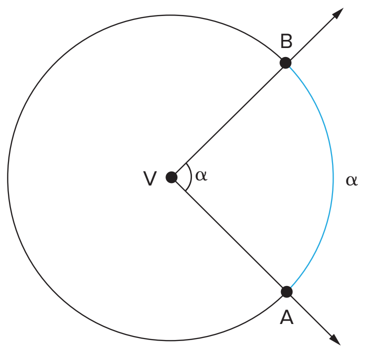
I. Todos os lados de um quadrado têm o mesmo comprimento.



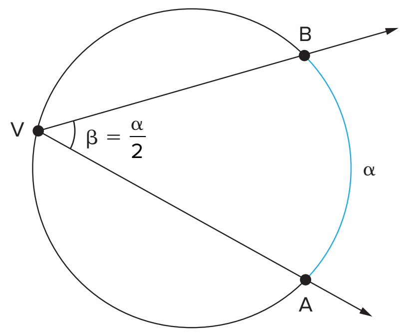
II. Os ângulos internos de um quadrado são todos retos.



III. Se o vértice de um ângulo coincide com o centro de uma circunferência, então esse ângulo possui a mesma medida do arco que ele determina na circunferência.



IV. Se um ângulo está inscrito em uma circunferência, então esse ângulo tem a metade da medida do arco que ele determina na circunferência.

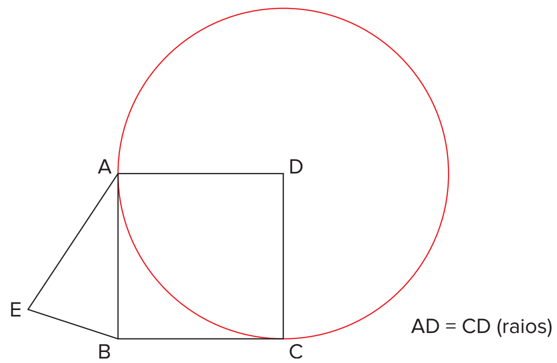


Particularmente, a aplicação do **terceiro postulado** de Euclides é uma das mais difíceis de serem feitas, pois não é sempre que dispomos de um compasso ou que podemos confiar na escala/proporção da figura apresentada por uma questão.

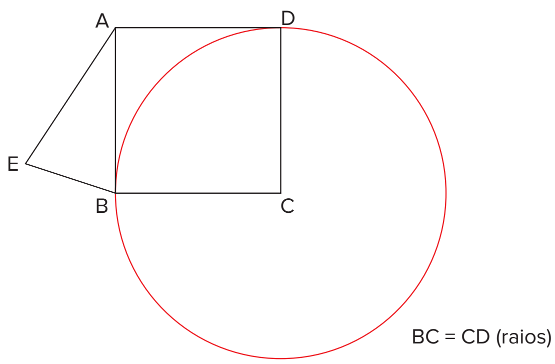
Por isso, é recomendável que se encontrem segmentos de mesmo comprimento com uma extremidade comum na figura apresentada antes de fazer uso desse postulado, os quais garantem que uma circunferência com centro na extremidade comum e raio igual ao comprimento dos segmentos necessariamente deve passar pelas demais extremidades dos segmentos.

Na figura apresentada pelo problema, o conhecimento (I) permite observarmos quatro opções diferentes para a aplicação do terceiro postulado:

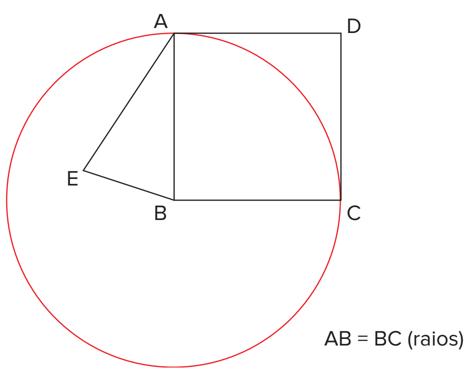
- O fato de $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro D e que passe pelos pontos A e C.



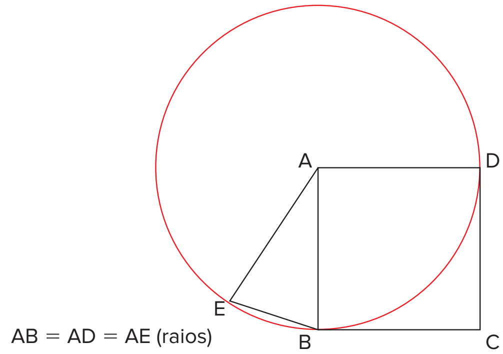
- O fato de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro C e que passe pelos pontos B e D.



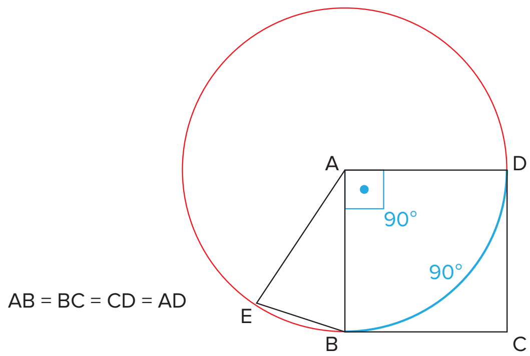
- O fato de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro no ponto B e que passe pelos pontos A e C.



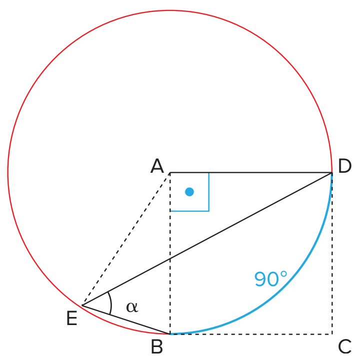
- O fato de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ terem o mesmo comprimento sugere a possibilidade do traçado de uma circunferência com centro A e que passe pelos pontos B, D e E.



Como a circunferência de centro A passa pelo vértice E do ângulo procurado, vamos optar por essa última aplicação do postulado da circunferência. Assim, os conhecimentos (II) e (III) permitem concluir que o menor arco $\overset{\frown}{BD}$ dessa circunferência mede 90°.



Agora, basta fazer uso do primeiro postulado e traçar o segmento de reta que une os pontos D e E para poder observar, de acordo com o conhecimento (IV), que a medida α do ângulo $B\hat{E}D$ é igual à metade da medida do menor arco $\overset{\frown}{BD}$ da circunferência.

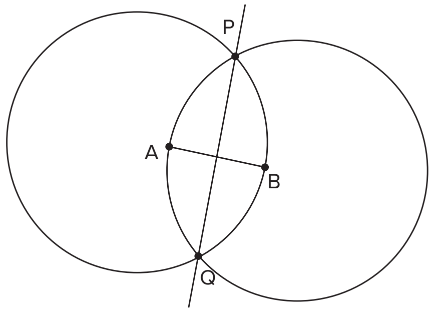


$D\hat{E}B$ é ângulo inscrito.

$$\alpha = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

De acordo com os postulados de Euclides, nenhuma reta ou circunferência aleatória pode ser traçada a não ser que alguma propriedade invariante da geometria justifique essa construção.

Assim, dados os pontos A e B, obedecendo ao terceiro postulado de Euclides, podemos traçar a circunferência de centro em A que passa por B e a circunferência de centro em B que passa por A. Uma vez construídas essas circunferências, observamos que elas se intersectam em dois pontos (P e Q), situados em lados opostos do segmento $\overline{AB}$. Então, os dois primeiros postulados permitem que P e Q sejam ligados por um segmento de reta e que este seja prolongado indefinidamente, determinando uma única reta, denominada mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



Discutindo as propriedades dessa construção, Euclides postulou que os quatro ângulos determinados pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ têm a mesma medida, que adotou como unidade para as medidas angulares: o ângulo reto. Assim, para ele, um ângulo raso mede 2 ângulos retos, e a circunferência toda mede 4, por exemplo.

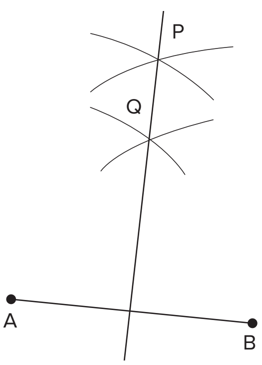
Assim, embora o **quarto postulado** de Euclides enuncie literalmente que “todos os ângulos retos são congruentes”, podemos interpretá-lo como uma garantia de que, dados um ponto P e uma reta *r*, podemos traçar, pelo ponto P, uma única reta perpendicular a *r*; e, fazendo isso, obtemos quatro ângulos retos.

! Atenção

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ possui uma série de propriedades importantes para a Geometria:

- é perpendicular ao segmento;
- divide o segmento ao meio;
- é o eixo da simetria de reflexão existente entre as extremidades A e B do segmento;
- cada um de seus pontos está igualmente afastado das extremidades A e B do segmento;
- contém os vértices de todos os triângulos isósceles de base AB;
- contém os centros de todas as circunferências que passam por A e B.

Essas são as propriedades invariantes que justificam outras possíveis construções para a mediatriz de um segmento.



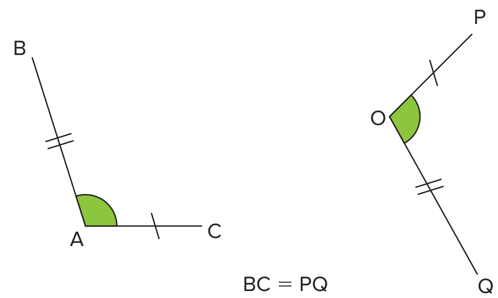
Há também o **quinto postulado** da Geometria Euclidiana, o qual garante que, por um ponto fora de uma reta dada, passe uma única reta paralela a ela. As construções de retas paralelas e perpendiculares em demonstrações de teoremas e resolução de exercícios são provavelmente as mais usadas, como veremos no decorrer do nosso estudo da Geometria.

Congruência de triângulos

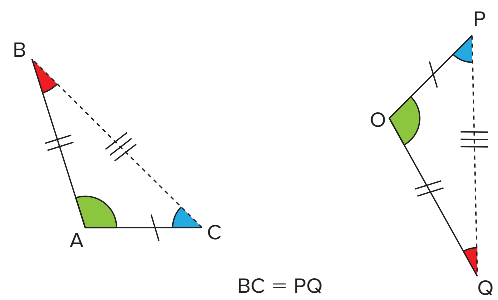
Muitas outras formas modernas do pensamento geométrico não euclidiano foram criadas com base na discussão do quinto postulado (o das paralelas). As geometrias modernas conhecidas como Geometria Elíptica e Geometria Hiperbólica contestam esse postulado afirmando, a primeira, que não existem retas paralelas e, a segunda, que, por um ponto fora de uma reta dada, passam infinitas retas diferentes que são paralelas à reta dada. Os postulados válidos em todas as formas do pensamento geométrico clássico e moderno são chamados de postulados da Geometria neutra.

O principal postulado da Geometria neutra trata da congruência de triângulos, enunciando que, se dois pares de segmentos com mesmos comprimentos têm uma extremidade em comum e formam ângulos de mesma medida, então os triângulos determinados pelas extremidades desses segmentos são congruentes entre si. A relação de congruência é representada pelo símbolo (≅) e significa que os demais lados e ângulos desses triângulos também terão as mesmas medidas. Assim:

- Se AB = OQ, AC = OP e $\hat{A} = \hat{O}$...



... então $\triangle ABC \cong \triangle OQP$ e, portanto, $\hat{B} = \hat{Q}$, $\hat{C} = \hat{P}$ e BC = PQ.



Esse postulado descreve apenas um dos muitos casos em que se pode concluir a congruência de dois triângulos. Trata-se do caso **LAL** da congruência de triângulos, pois parte da congruência de dois dos **L**ados e do **Â**ngulo que eles formam. Desse postulado, podem ser deduzidos outros casos de congruência.

O caso **LLL** se baseia na congruência entre os três lados de dois triângulos para concluir a congruência de seus três ângulos. Assim, se os três lados de um triângulo têm os mesmos comprimentos dos três lados de outro triângulo, então os três ângulos de um dos triângulos também devem ter as mesmas medidas dos três ângulos do outro triângulo.

O caso **ALA** parte da congruência entre um lado de cada triângulo e dos ângulos cujos vértices são as extremidades desses lados para concluir a congruência dos outros dois lados e do terceiro ângulo desses triângulos. Esse é o caso recíproco do postulado **LAL**.

O caso **LAA$_o$** também se baseia na congruência entre um lado de cada triângulo e entre dois ângulos de cada, mas sendo um desses ângulos oposto ao lado considerado em cada triângulo para concluir a congruência dos outros dois lados e do terceiro ângulo desses triângulos.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é constante e igual a 180°, verificando que dois ângulos de um triângulo têm as mesmas medidas de dois ângulos de outro triângulo, podemos concluir que isso acontece também com o terceiro ângulo de cada triângulo. Essa observação faz com que os casos ALA e LAA$_o$ possam ser observados simultaneamente na verificação da congruência entre dois triângulos.

Exercício resolvido

1. Observando o painel composto de 16 pequenos triângulos equiláteros de lados unitários ilustrado na Figura 1, uma pessoa percebeu a existência de triângulos equiláteros de diversos tamanhos, como mostra o triângulo ABC de lado 2 em destaque na Figura 2.

Figura 1

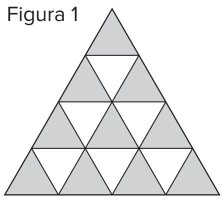
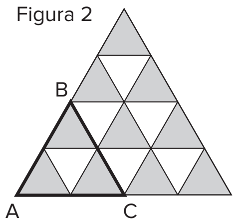


Figura 2

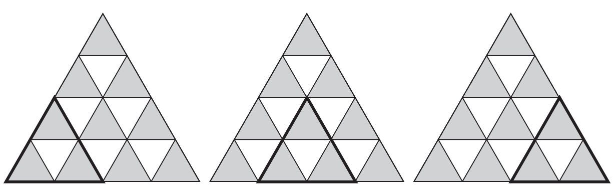


O número de triângulos congruentes ao triângulo em destaque na Figura 2, presentes no painel, incluindo o próprio triângulo ABC, é:

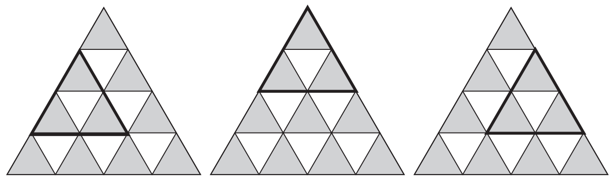
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Resolução:

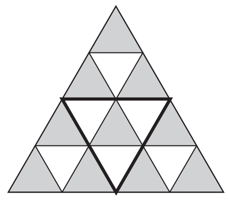
Como os triângulos congruentes ao triângulo ABC devem possuir lado 2, temos que, com um vértice acima do lado horizontal, há, incluindo o próprio triângulo ABC, 3 triângulos com a base colinear ao segmento $\overline{AB}$.



Ainda com o vértice do lado horizontal, há mais 3 triângulos com a base situada em alguma reta paralela acima do segmento $\overline{AB}$ no painel.



Com um vértice abaixo do lado horizontal, há mais 1 triângulo congruente ao triângulo ABC no painel.



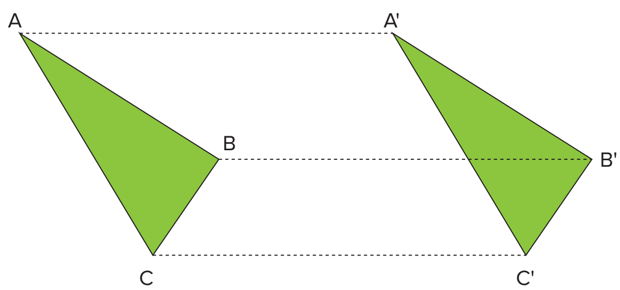
Portanto, há 3 + 3 + 1 = 7 triângulos congruentes, incluindo o próprio triângulo ABC.
Resposta: alternativa B.

Também é importante observarmos que, se os três ângulos de um triângulo têm as mesmas medidas dos três ângulos de outro triângulo, isso não é suficiente para garantir a congruência dos triângulos, pois há alguns com os mesmos ângulos internos cujos lados não têm comprimentos iguais. Essa situação caracteriza, na verdade, um caso de semelhança entre os triângulos, assunto que será estudado no próximo capítulo.

A congruência entre dois triângulos também pode ser verificada a partir de transformações geométricas denominadas isométricas. As transformações isométricas da Geometria são demonstradas a seguir.

Translação

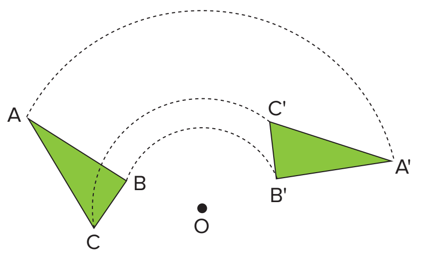
A translação é a transformação geométrica capaz de levar todos os pontos de uma figura a coincidirem com os pontos de outra segundo o deslocamento representado por um único vetor.



Na figura, se os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são paralelos e têm o mesmo comprimento, então os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Rotação

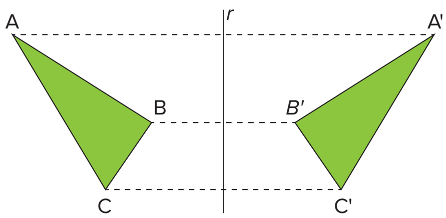
A rotação é a transformação geométrica capaz de levar todos os pontos de uma figura a coincidirem com os pontos de outra segundo deslocamentos representados por arcos de circunferências de mesmos centro e medida angular.



Na figura, se os arcos $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{BB'}$ e $\overset{\frown}{CC'}$ têm o mesmo centro O e a mesma medida angular, então os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Reflexão

A reflexão é a transformação geométrica capaz de levar todos os pontos de uma figura a coincidirem com os pontos de outra como se esta fosse sua imagem em relação a um espelho representado por uma reta, que é denominada eixo de simetria.

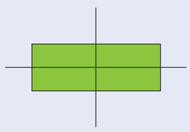
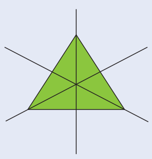
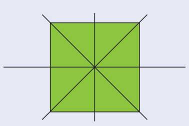


Na figura, se os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são perpendiculares à reta *r* e estão todos divididos ao meio pela mesma reta *r*, os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

Quando uma figura plana possui mais do que um eixo de simetria, então esses eixos se intersectam em um mesmo ponto que caracteriza o centro de simetria radial da figura ou centro da simetria de rotação.

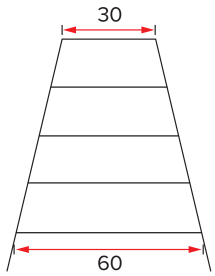
Assim, se uma figura possui *n* eixos de simetria, podemos dizer que ela é invariante por rotações de um ângulo de medida θ em torno de seu centro, tal que $\theta = \frac{360°}{n}$.

Veja alguns exemplos.

Retângulo	Triângulo equilátero	Quadrado
		
$n = 2$ eixos $\theta = \frac{360°}{2} = 180°$	$n = 3$ eixos $\theta = \frac{360°}{3} = 120°$	$n = 4$ eixos $\theta = \frac{360°}{4} = 90°$

Exercício resolvido

2. Enem Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.

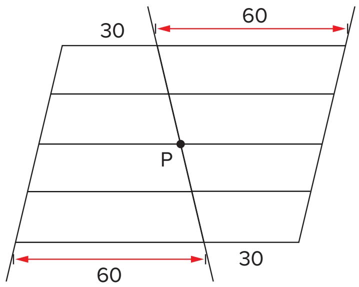


Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

a) 144 **b)** 180 **c)** 210 **d)** 225 **e)** 240

Resolução:

Uma possível solução para essa questão é prolongarmos os segmentos que representam os degraus da escada e traçarmos uma reta que seja paralela a um dos lados da escada de modo a obtermos uma figura **congruente** à figura apresentada:



A congruência entre as figuras que representam as escadas está garantida pelo fato de que a figura formada pela reunião das "escadas" é invariante por uma rotação de 180° em torno do ponto P.

Observando também que essa composição de figuras congruentes apresenta uma série de paralelogramos, os quais, por sua vez, são quadriláteros com lados opostos de mesmo comprimento, podemos concluir que, para construir os degraus de duas escadas a partir de uma única peça linear de madeira, essa peça teria que possuir um comprimento mínimo de:

$$5 \cdot (30 + 60) = 5 \cdot 90 = 450 \text{ cm}$$

Mas, como o marceneiro deseja construir apenas uma dessas escadas, o comprimento da peça pode ser de apenas:

$$\frac{450}{2} \text{ cm} = 225 \text{ cm}$$

Resposta: alternativa D.

Note que, além da aplicação dos postulados, essa resolução faz uso de alguns critérios geométricos de **congruência** e **isometria**.

Ângulos e medidas angulares

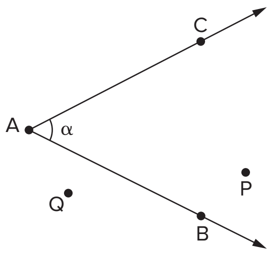
Sempre que observamos duas linhas retas, ou dois segmentos de reta, e percebemos não haver paralelismo, surge a noção de inclinação relativa, cuja grandeza pode ser mensurada de acordo com o conceito de ângulo.

Ângulo é a figura geométrica formada pela reunião dos pontos de duas semirretas com mesma origem, mas os ângulos que podemos observar são aqueles que dividem o plano em duas regiões não congruentes, uma delas côncava e a outra, convexa.

A ilustração a seguir apresenta a figura de um ângulo que pode ser indicado por $\angle A$ ou por $\angle BAC$ que é a notação recomendada quando há mais de um ângulo com vértice em um mesmo ponto. Além disso, podemos indicar um ângulo usando um acento circunflexo sobre a letra que representa o seu vértice ($B\hat{A}C$).

Na figura:

$\angle A$ ou $\angle BAC$ ou $B\hat{A}C$



- o ponto A é o vértice do ângulo;
- as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são os lados do ângulo;
- o valor que α indica é a medida do ângulo:
  $\alpha = \text{med}\ (B\hat{A}C)$;
- o ponto P está situado na região angular convexa;
- o ponto Q está situado na região angular côncava.

A medida de um ângulo pode ser feita com a divisão da circunferência em 360 partes, denominadas graus (°). Essa divisão tem origem na Babilônia, onde o sistema numérico era sexagesimal. Nesse sistema, as unidades eram subdivididas em 60 partes. Como no sistema horário, 1 grau possui 60 minutos (') e 1 minuto possui 60 segundos (").

- $1° = 60'$
- $1' = 60''$

Para atribuir uma medida a esse ângulo, consideramos o número de graus, minutos e segundos de circunferência centrada em seu vértice que estão compreendidos em alguma de suas regiões angulares. Devemos optar, sempre que possível, pela região angular convexa, pois fica geralmente associada ao menor número de graus, minutos e segundos.

Assim, todo ângulo pode ser medido por dois valores distintos cuja soma equivale a 360°; e, se α indicar um desses valores, então a expressão $(360° - \alpha)$ trará o outro valor. As duas medidas observadas nas diferentes regiões do plano determinadas por um mesmo ângulo são denominadas medidas “replementares”.

Os ângulos podem ser classificados em relação às suas medidas. Assim, considerando as medidas angulares em graus, temos:

- Ângulos nulos são aqueles formados por duas semirretas iguais. Os ângulos nulos medem 0°.
- Ângulos agudos são aqueles que têm medidas entre 0° e 90°.
- Ângulos retos são aqueles que medem exatamente 90°.
- Ângulos obtusos são aqueles que têm medidas entre 90° e 180°.
- Ângulos rasos são aqueles formados por duas semirretas opostas e de mesma origem. Os ângulos rasos medem 180°.

Também classificamos os pares de ângulos no que se refere às suas medidas e às posições que ocupam:

- Ângulos complementares são aqueles cujas medidas somam a de um ângulo reto.

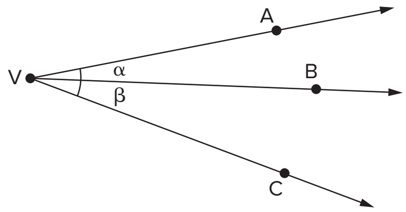
$$\alpha + \beta = 90°$$

- Ângulos suplementares são aqueles cujas medidas somam a de um ângulo raso.

$$\alpha + \beta = 180°$$

- Ângulos adjacentes são aqueles que possuem um lado comum.

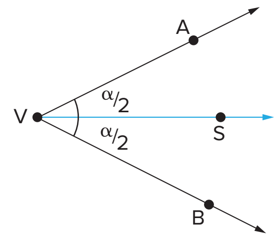
$$\begin{cases} \text{med}(A\hat{V}B) = \alpha \\ \text{med}(B\hat{V}C) = \beta \\ \text{med}(A\hat{V}C) = \alpha + \beta \end{cases}$$



Bissetriz

A bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice do ângulo e que o divide em duas regiões congruentes. Na figura, a semirreta $\overrightarrow{VS}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{V}B$:

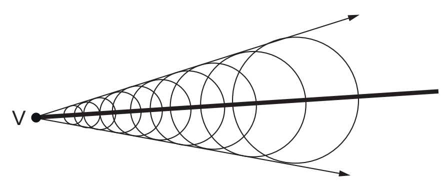
$$\begin{cases} \text{med}(A\hat{V}B) = \alpha \\ \text{med}(A\hat{V}S) = \text{med}(S\hat{V}B) = \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$



Saiba mais

Assim como a reta mediatriz de um segmento, a semirreta bissetriz de um ângulo também possui uma série de propriedades importantes para o estudo da Geometria:

1. Ela divide o ângulo ao meio.
2. Ela é o eixo da simetria de reflexão existente entre as semirretas que formam o ângulo.
3. Cada um de seus pontos está igualmente afastado dos lados do ângulo.
4. Nela estão os centros de todas as circunferências que tangenciam ambos os lados do ângulo.



Exercício resolvido

3. Sabendo que ângulos adjacentes têm um lado em comum, ângulos complementares têm a soma de suas medidas igual a 90° e que a bissetriz de um ângulo o divide ao meio, determine a medida dos ângulos formados pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes de medidas diferentes α e β complementares, efetuando os procedimentos indicados nos itens a seguir.

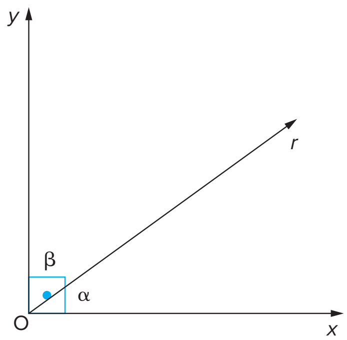
a) Faça uma figura que represente corretamente essa situação.

b) Identifique quantos são os ângulos apresentados pela figura desenhada.

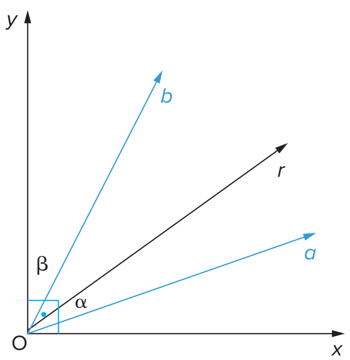
c) Indique as medidas de todos esses ângulos em função de α e β.

Resolução:

a) A figura que representa corretamente dois ângulos adjacentes de medidas complementares é:



Sendo *x*, *r* e *y* as semirretas que determinam ângulos adjacentes de medidas α e β, traçando suas bissetrizes *a* e *b* obtemos a seguinte figura:



b) A figura formada pelas cinco semirretas apresenta um total de dez ângulos.

c) As medidas desses ângulos podem ser representadas por:

$\text{med}(x\hat{O}a) = \text{med}(a\hat{O}r) = \dfrac{\alpha}{2}$ $\qquad$ $\text{med}(a\hat{O}b) = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$

$\text{med}(r\hat{O}b) = \text{med}(b\hat{O}y) = \dfrac{\beta}{2}$ $\qquad$ $\text{med}(x\hat{O}b) = \alpha + \dfrac{\beta}{2}$

$\text{med}(x\hat{O}r) = \alpha$ $\qquad$ $\text{med}(a\hat{O}y) = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$

$\text{med}(r\hat{O}y) = \beta$ $\qquad$ $\text{med}(x\hat{O}y) = \alpha + \beta = 90°$

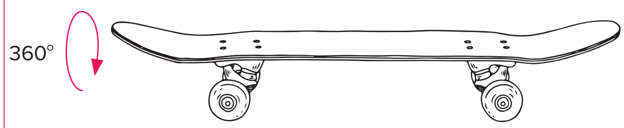
Assim, a medida do ângulo formado pelas bissetrizes *a* e *b* é:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

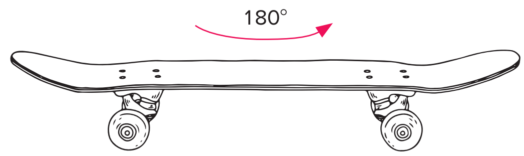
Estabelecendo relações

Nos Jogos Olímpicos de verão de 2020, em Tóquio, Japão, o *skate* foi introduzido como esporte olímpico em duas modalidades: *street* e *park*. A presença desse esporte nas Olimpíadas foi um grande sucesso e rendeu três medalhas de prata para o Brasil, com Rayssa Leal e Kelvin Hoefler, na modalidade *street*, e Pedro Barros, na modalidade *park*. Em ambas as modalidades, as manobras realizadas pelos atletas com o *skate* chamam a atenção. Algumas delas envolvem giros, como:

- ***Flip*:** o *skate* gira 360° em torno do seu próprio eixo. Há algumas variações desse movimento relacionadas com o sentido que o *skate* gira.

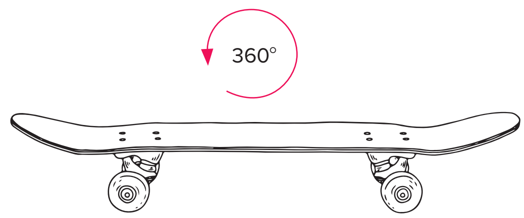


- ***Pop shove-it*:** o *skate* gira 180° na horizontal. Porém, em algumas manobras esse giro pode ser estendido para 360° ou até 720°.



Uniyok/Shutterstock.com

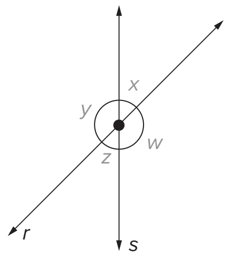
- ***Backside 180*:** o esqueitista gira junto com o *skate* um ângulo de 180° para dentro (trazendo a parte traseira do *skate* para a frente).
- ***Frontside 180*:** o esqueitista gira junto com o *skate* um ângulo de 180° para fora (levando a parte dianteira do *skate* para trás).
- ***Impossible*:** o *skate* gira 360° na vertical. Essa é uma das manobras mais difíceis do *skate*.



Além dessas, existem outras manobras e variações que podem ser obtidas aumentando o número de giros e combinando com outros movimentos do *skate*.

Ângulos determinados por retas concorrentes

Duas retas que se intersectam em um ponto são denominadas retas concorrentes. O cruzamento dessas retas determina quatro ângulos, que podem ser todos **retos**, se essas retas forem **perpendiculares**, ou dois ângulos **agudos** e dois **obtusos**, se forem **oblíquas**.



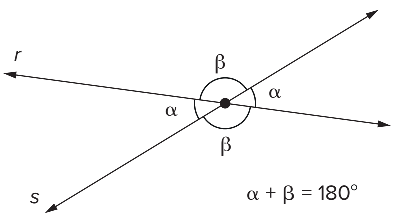
A classificação dos pares de ângulos do cruzamento dessas retas é tal que:

- os pares de ângulos $\begin{cases} x \text{ e } y \\ y \text{ e } z \\ z \text{ e } w \\ w \text{ e } x \end{cases}$ recebem o nome de **adjacentes**.
- os pares de ângulos $\begin{cases} x \text{ e } z \\ y \text{ e } w \end{cases}$ são denominados **opostos pelo vértice** (o.p.v.).

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

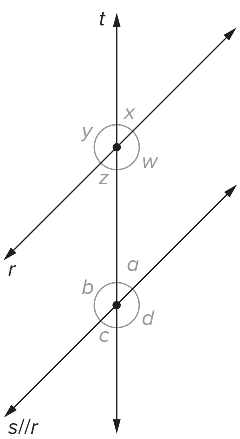
1. Dois ângulos adjacentes no cruzamento de duas retas são suplementares.
2. Dois ângulos opostos pelo vértice no cruzamento de duas retas têm a mesma medida.

De modo mais prático, é correto afirmar que, entre os quatro ângulos determinados pelo cruzamento de duas retas oblíquas, há apenas duas medidas suplementares.



Se duas retas são paralelas entre si, então elas não têm nenhum ponto de interseção. Mas, se uma terceira reta for transversal às duas primeiras, esta intersecta cada paralela em um ponto diferente.

Nessa situação, são determinados dois cruzamentos distintos em que podem ser observados oito ângulos, os quais serão todos retos se a reta transversal for perpendicular às paralelas; mas, se a reta transversal for oblíqua às paralelas, então quatro desses ângulos serão agudos e os outros quatro serão obtusos.



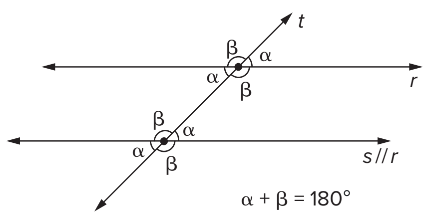
A classificação dos pares de ângulos dos cruzamentos dessas retas é tal que:

- os pares de ângulos $\begin{cases} x \text{ e } a \\ y \text{ e } b \\ z \text{ e } c \\ w \text{ e } d \end{cases}$ são denominados **correspondentes**.
- os pares de ângulos $\begin{cases} a \text{ e } z \\ b \text{ e } w \end{cases}$ recebem o nome de **alternos internos**.
- os pares de ângulos $\begin{cases} c \text{ e } x \\ d \text{ e } y \end{cases}$ são chamados **alternos externos**.
- os pares de ângulos $\begin{cases} a \text{ e } w \\ b \text{ e } z \end{cases}$ são denominados **colaterais internos**.
- os pares de ângulos $\begin{cases} c \text{ e } y \\ d \text{ e } x \end{cases}$ recebem o nome de **colaterais externos**.

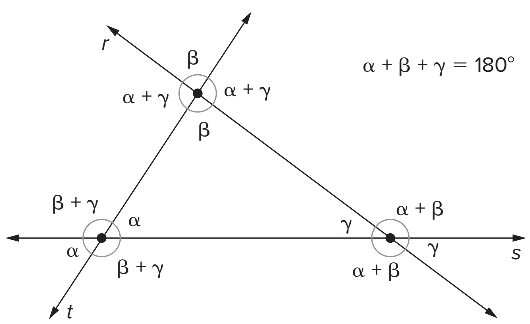
Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1. Ângulos correspondentes terão a mesma medida. Exemplo: $x = a$.
2. Ângulos alternos internos possuirão a mesma medida. Exemplo: $z = a$.
3. Ângulos alternos externos também apresentarão a mesma medida. Exemplo: $y = d$.
4. Ângulos colaterais internos terão medidas suplementares. Exemplo: $a + w = 180°$.
5. Ângulos colaterais externos também possuirão medidas suplementares. Exemplo: $x + d = 180°$.

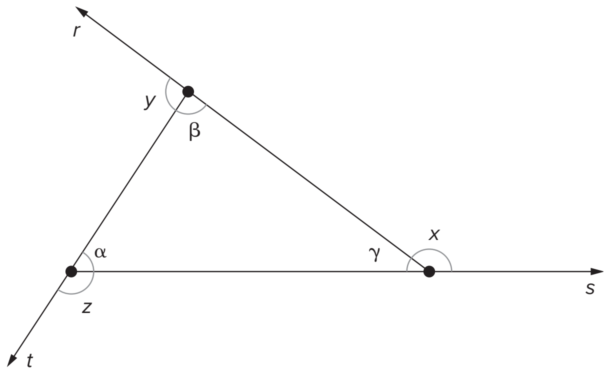
De modo mais prático, é correto afirmar que, se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal oblíqua, então, entre os oito ângulos determinados, há apenas duas medidas suplementares.



Três retas concorrentes duas a duas em pontos distintos determinam doze ângulos que dividem o plano em sete regiões distintas, das quais seis são abertas e uma é fechada. A figura determinada pela região fechada é chamada de triângulo por conter exatamente três ângulos. Todos os demais ângulos visíveis nesta figura estão situados em alguma região exterior ao triângulo. Algumas dessas regiões convexas têm medidas iguais às dos ângulos do triângulo, outras têm medidas iguais à soma das medidas de dois ângulos do triângulo.



Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, então, prolongando qualquer lado de um triângulo, obtemos um ângulo externo cuja medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes no triângulo.



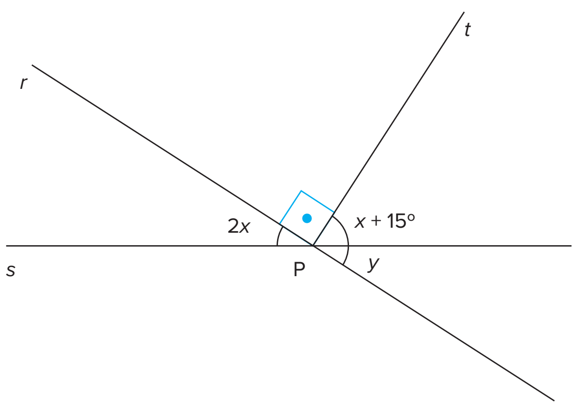
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha + \gamma \\ z = \beta + \gamma \end{cases}$$

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1. A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.
2. Cada ângulo externo de um triângulo mede a soma dos ângulos internos não adjacentes.

Exercícios resolvidos

4. Na figura, as retas r e s intersectam-se no ponto P, origem da semirreta t. Sabendo que t é perpendicular a r, determine x e y.



Resolução:

Os ângulos de medidas y e $(x + 15°)$ são complementares. Portanto: $y + x + 15° = 90°$.

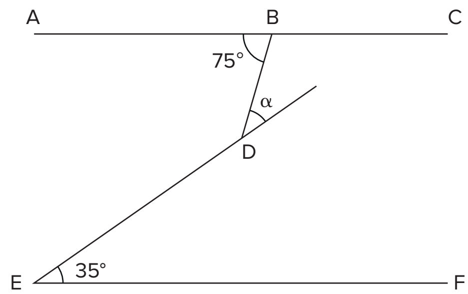
Os ângulos de medidas $2x$ e y são opostos pelo vértice, logo: $2x = y$.

Assim, substituindo y na primeira equação, temos:

$$2x + x + 15° = 90°$$
$$3x = 75°$$
$$x = 25°$$

Então, $y = 2 \cdot 25° = 50°$.

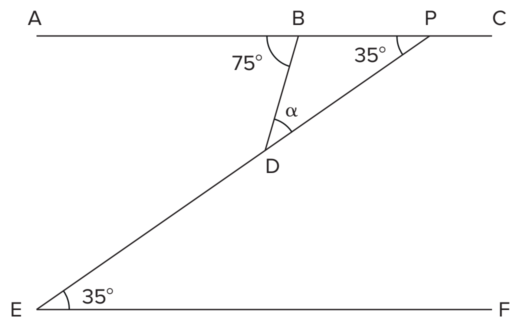
5. Na figura, se as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas, qual deve ser o valor do ângulo α formado pelo segmento $\overline{BD}$ e pela semirreta $\overrightarrow{ED}$?



a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°

Resolução:

De acordo com o segundo postulado da Geometria Euclidiana, podemos prolongar a reta $\overleftrightarrow{ED}$ até que ela intercepte a reta $\overleftrightarrow{AC}$ em um ponto P.

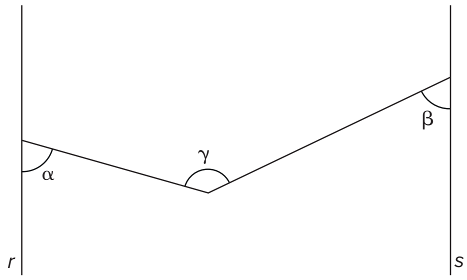


Como as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas, os ângulos alternos internos de vértices E e P têm mesma medida, que é de 35°. Como o ângulo com 75° no vértice B é um ângulo externo do triângulo PBD, temos:

$$\alpha + 35° = 75° \Rightarrow \alpha = 40°$$

Resposta: alternativa D.

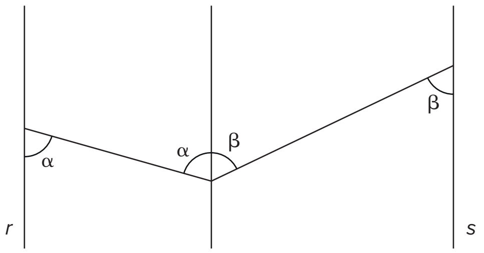
6. Se as retas r e s são paralelas e os ângulos α e β medem, respectivamente, 75° e 65°, quanto mede o ângulo γ?



a) 140°
b) 135°
c) 125°
d) 120°
e) 90°

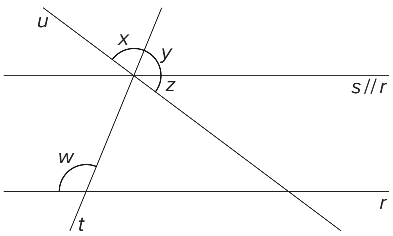
Resolução:

De acordo com o quinto postulado da Geometria Euclidiana, por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela à reta dada. Assim, pelo vértice do ângulo γ, podemos traçar uma reta que seja paralela às retas *r* e *s*.



Depois de traçada essa paralela, o ângulo γ fica dividido em dois outros ângulos que são alternos internos dos ângulos α e β.
Portanto, $\gamma = \alpha + \beta = 75° + 65° = 140°$.
Resposta: alternativa A.

7. A figura a seguir ilustra a posição relativa de quatro ruas de um bairro da capital de São Paulo. Neste esquema, vemos que as ruas representadas pelas retas *r* e *s* são paralelas e que *s*, *t* e *u* se cruzam em um mesmo local de modo que as seis esquinas desse cruzamento tenham a forma de ângulos agudos, cujas medidas são expressas por *x*, *y* e *z*, como mostra a figura.

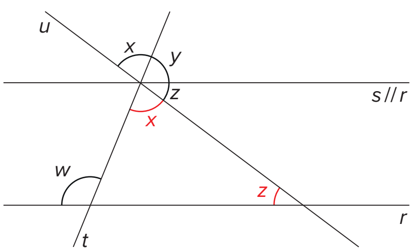


Assim, sendo *w* a medida do ângulo obtuso de uma das esquinas do cruzamento entre as ruas representadas pelas retas *t* e *r*, pode-se afirmar que:

a) $w = x + y + z$
b) $w = x + y$
c) $w = x + z$
d) $w = y + z$
e) $w = x + y - z$

Resolução:

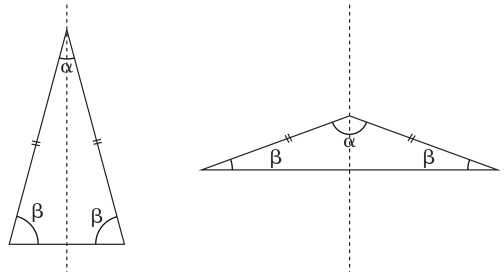
Entre os ângulos internos do triângulo determinado pelas retas que representam as ruas *r*, *t* e *u*, temos um que é oposto pelo vértice ao de medida *x* e outro que é alterno interno ao de medida *z*, como mostra a figura.



Portanto, do teorema do ângulo externo de um triângulo, obtemos $w = x + z$.
Resposta: alternativa C.

Sobre os ângulos internos de um triângulo, também é interessante observar que o ângulo de maior medida sempre fica oposto ao lado de maior comprimento e que o ângulo de menor medida sempre fica oposto ao lado de menor comprimento.

Assim, se não houver o maior ângulo, então não existirá maior lado e, se não houver o menor ângulo, também não existirá o menor lado.



Os triângulos com essas características possuem, além de dois ângulos de mesma medida que ficam opostos aos dois lados de mesmo comprimento, um eixo de simetria de reflexão e recebem o nome de isósceles.

Em geral, o lado de um triângulo isósceles que possui comprimento diferente dos demais é denominado **base** do triângulo. Assim, podemos afirmar que o eixo de simetria desse tipo de triângulo é a reta mediatriz de sua base.

Alguns triângulos podem até ter os três ângulos de mesma medida. Nesse caso, a medida desses ângulos será de 60° e todos os lados do triângulo terão o mesmo comprimento. Esses triângulos possuem três eixos de simetria e são denominados equiláteros.

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1. Os ângulos da base de um triângulo isósceles têm a mesma medida.
2. Os três ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°.

A classificação dos triângulos pode ser feita de duas maneiras distintas. Quanto às medidas dos ângulos, um triângulo pode ser:

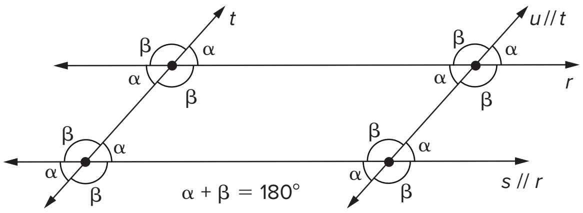
- **Acutângulo:** quando todos os seus ângulos forem agudos.
- **Retângulo:** quando um de seus ângulos for reto.
- **Obtusângulo:** quando um de seus ângulos for obtuso.

E, quanto às medidas dos lados, um triângulo pode ser:

- **Escaleno:** quando as medidas dos três lados forem diferentes.
- **Isósceles:** quando pelo menos duas das medidas coincidirem.
- **Equilátero:** quando todos os lados tiverem a mesma medida.

Agora, quando um par de retas paralelas intersecta outro par de retas paralelas, ocorrem quatro pontos de cruzamento, que são vértices de um total de 16 ângulos. Nessa situação, ficam determinadas nove regiões no plano: oito abertas e apenas uma fechada, a qual tem a forma de um paralelogramo.

Os 16 ângulos poderão ser todos retos, no caso de o paralelogramo também ser um retângulo, ou poderão ser oito agudos e oito obtusos, como mostra a figura.



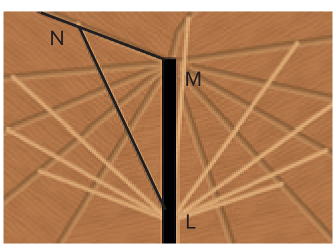
Como os lados opostos de um paralelogramo apresentam simetria de translação, além de serem paralelos, eles têm o mesmo comprimento.

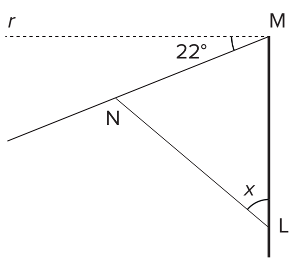
Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

1. Os lados opostos de um paralelogramo apresentam o mesmo comprimento.
2. Os ângulos internos opostos de um paralelogramo têm a mesma medida.

Exercícios resolvidos

8. As figuras a seguir mostram o sistema de sustentação do teto de um quiosque circular, em que se pode observar a composição de diversas estruturas triangulares, como o triângulo LMN, cujo lado $\overline{ML}$ é vertical.





Assim, de acordo com a figura e sabendo que a inclinação relativa entre as ripas de sustentação do teto e a linha horizontal r é de 22°, calcule a medida x do ângulo interno de vértice L do triângulo LMN se:

a) for isósceles, com LM = LN.
b) for isósceles, mas com LM = MN.

Resolução:

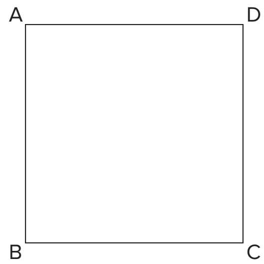
a) Como r é perpendicular a $\overline{ML}$, o ângulo interno de vértice M do triângulo mede: 90° – 22° = 68°.
Como o triângulo MLN é isósceles com LM = LN, os ângulos internos de vértices M e N têm a mesma medida de 68°. Portanto, no triângulo LMN:

$$x + 68° + 68° = 180°$$
$$x = 44°$$

b) Assim como no item anterior, o ângulo interno de vértice M do triângulo deve medir 68°.
Como o triângulo MLN é isósceles com LM = MN, os ângulos internos de vértices L e N têm a mesma medida indicada por x na figura. Logo, nesse caso, no triângulo LMN:

$$x + x + 68° = 180°$$
$$x = 56°$$

9. A figura a seguir representa um quadrado ABCD de lado 1.

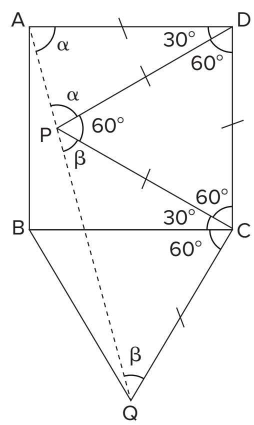


Considere um ponto P na região interior desse quadrado tal que PC = PD = 1 e um ponto Q na região exterior desse quadrado tal que QC = QB = 1.

a) Calcule as medidas dos ângulos $A\hat{D}P$ e $C\hat{Q}P$.
b) Prove que os pontos A, P e Q pertencem a uma mesma reta.

Resolução:

a) Do enunciado, obtemos a seguinte figura, em que os triângulos CDP e BCQ são equiláteros e, portanto, têm todos os seus ângulos internos medindo 60°.



Como os ângulos do quadrado são todos retos, os ângulos $A\hat{D}P$ e $B\hat{C}P$ medem 90° – 60° = 30° cada um.
Como os lados do quadrado e dos triângulos equiláteros são todos unitários, os triângulos APD e PCQ são ambos isósceles, com AD = PD e PC = CQ.
Sendo α a medida dos ângulos congruentes do triângulo isósceles APD, temos:

$$\alpha + \alpha + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 75°$$

Sendo β a medida dos ângulos congruentes do triângulo isósceles PCQ, encontramos:

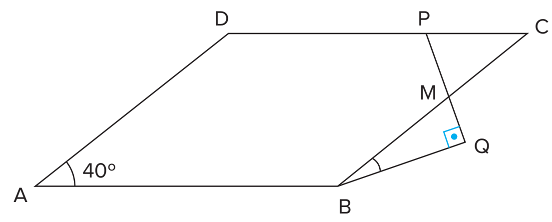
$$\beta + \beta + (30° + 60°) = 180° \Rightarrow \beta = 45°$$

b) Como o ângulo $C\hat{P}D$ mede 60°, pois também é ângulo interno de um triângulo equilátero, temos que a medida do ângulo $A\hat{P}Q$ é igual a:

$$\alpha + 60° + \beta = 75° + 60° + 45° = 180°$$

Por se tratar de um ângulo raso, podemos concluir que os pontos A, P e Q são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

10. Na figura a seguir, ABCD é um paralelogramo de ângulo agudo $\hat{A} = 40°$, em que M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e P é um ponto do lado $\overline{CD}$ tal que CP = CM.



Se $\overline{BQ}$ é perpendicular a $\overrightarrow{PM}$, então o ângulo $M\hat{B}Q$ mede:

a) 10°
b) 12°
c) 15°
d) 18°
e) 20°

Resolução:

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, portanto $\hat{C} = 40°$.
Como o triângulo CMP é isósceles com CP = CM, os demais ângulos internos do triângulo medem:

$$(180° - 40°) : 2 = 70°$$

Então, o ângulo interno de vértice M do triângulo BMQ também mede 70° (são opostos pelo vértice). Assim, como Q é vértice de um ângulo reto, sendo x a medida do ângulo $M\hat{B}Q$, temos:

$$x + 90° + 70° = 180°$$
$$x = 20°$$

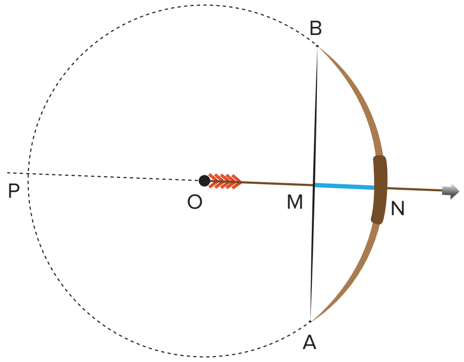
Resposta: alternativa E.

Círculos e circunferências

No estudo da Geometria Euclidiana, os termos “círculo” e “circunferência” não são nomes da mesma figura. As **circunferências** são figuras formadas pelos pontos de um plano que apresentam uma mesma distância ***r* (raio)** de um ponto fixo **O** desse plano. Esse ponto fixo é denominado **centro** da circunferência.

Já os **círculos** são as figuras formadas pela reunião dos pontos de uma circunferência com os pontos de seu interior. Assim, é correto afirmar que circunferência é o nome dado ao contorno do círculo. Dessa forma, podemos dizer que as circunferências possuem comprimento e que os círculos têm área.

A nomenclatura de alguns elementos da circunferência remete a um dos mais antigos instrumentos de caça: o arco que atira flechas. Acompanhe.



Todos os trechos de circunferência limitados por dois de seus pontos são denominados **arcos**. Os segmentos de reta que unem as extremidades desses arcos são chamados de **cordas**; já os que unem os pontos médios de um arco e uma corda de mesmas extremidades recebem o nome de **flechas**. Quando as cordas passam pelo centro da circunferência, elas são denominadas **diâmetros**. Assim, na figura:

- M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$.
- N é o ponto médio do menor arco $\overset{\frown}{AB}$.
- P é o ponto médio do maior arco $\overset{\frown}{AB}$.
- $\overline{PN}$ é um diâmetro da circunferência.
- $\overline{MN}$ é uma flecha.

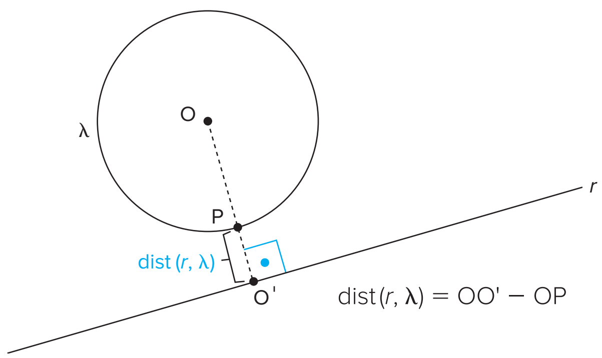
Uma das mais importantes relações que podem ser observadas em uma circunferência é que o quociente entre o seu comprimento e o seu diâmetro é constante. O resultado dessa divisão é o número irracional que indicamos pela letra π (pi). Seu valor é bem próximo de 3,14, ou $\frac{22}{7}$.

Os teoremas que podem ser enunciados aqui são:

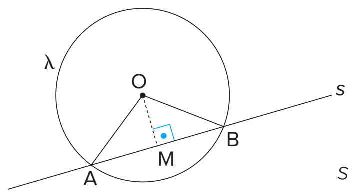
1. O comprimento de uma circunferência de raio r é dado pela expressão $C = 2\pi r$.
2. A área de um círculo de raio r é dada pela expressão $A = \pi r^2$.

A identificação correta de um ângulo reto permite a aplicação do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas na resolução de um problema. Existem três possíveis posições relativas entre retas e circunferências. Observe que há importantes ângulos retos nesses casos:

- Uma reta ***r*** é exterior a uma circunferência λ quando não houver ponto que seja comum a essas figuras.

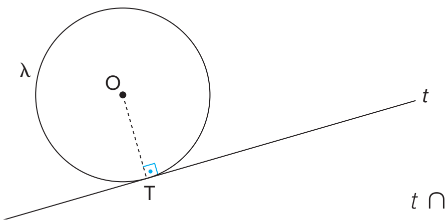


- Uma reta ***s*** é secante a uma circunferência λ quando houver dois pontos que sejam comuns a essas figuras.



$s \cap \lambda = \{A, B\}$

- Uma reta ***t*** é tangente a uma circunferência λ quando houver um único ponto que seja comum a essas figuras.

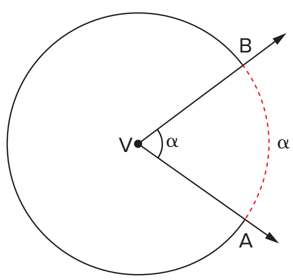


$t \cap \lambda = \{T\}$

São muitas as posições relativas entre ângulos e circunferências. Nessas situações, é importante conhecermos determinadas relações entre as medidas dos arcos e os ângulos envolvidos. Acompanhe a seguir.

Ângulo central

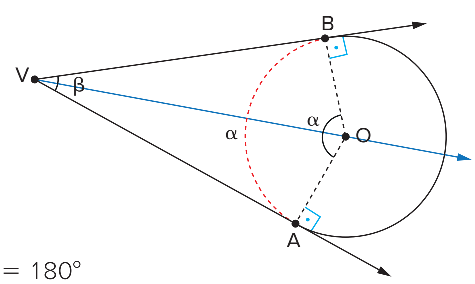
Os ângulos cujos vértices coincidem com o centro de uma circunferência são denominados centrais.



As medidas desses ângulos são, por definição, as mesmas que as dos arcos determinados na circunferência. Essa relação não depende do comprimento do raio da circunferência. Assim, na figura, α representa tanto a medida do ângulo $A\hat{V}B$, tomada em sua região convexa, quanto a do menor arco $\overset{\frown}{AB}$.

Ângulo circunscrito

Ângulos cujos lados tangenciam uma mesma circunferência recebem o nome de circunscritos.



$\alpha + \beta = 180°$

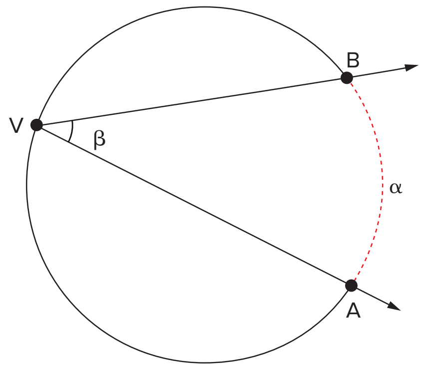
É importante observar que a reta determinada pelos pontos V e O é eixo de simetria dessa figura. Assim, podemos concluir que $\overrightarrow{VO}$ é bissetriz dos ângulos α e β, que os triângulos AOV e BOV são congruentes e, portanto, que VA = VB.

Teoremas:

1. As medidas de um ângulo circunscrito e do menor arco que ele determina na circunferência somam 180°.
2. O vértice de um ângulo circunscrito equidista dos pontos de tangência de seus lados com a circunferência.

Ângulo inscrito

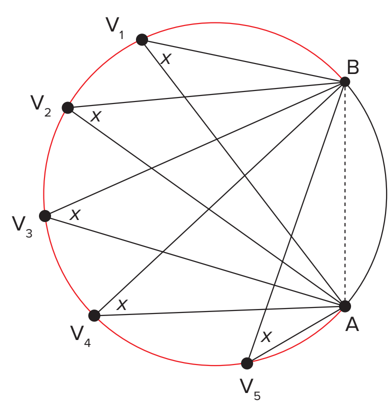
Os ângulos cujos vértices são pontos de uma circunferência e cujos lados são secantes à mesma circunferência são chamados de inscritos.



$\beta = \dfrac{\alpha}{2}$

Teorema: A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo.

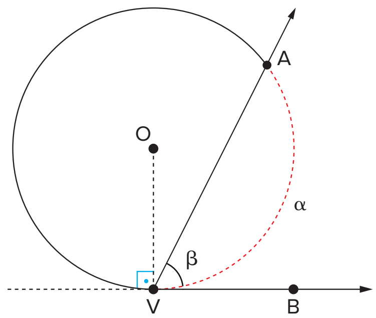
É importante observarmos que esse teorema garante a igualdade das medidas de todos os ângulos inscritos que determinam um mesmo arco em suas regiões convexas. Essa particularidade define um lugar geométrico denominado arco capaz, que é formado pelo restante dos pontos da circunferência, ou seja, por todos aqueles situados nas regiões côncavas dos ângulos.



Ângulo semi-inscrito

Ângulos de segmentos circulares, ou semi-inscritos, são aqueles cujos vértices são pontos da circunferência e cujos lados são: um tangente e o outro secante à mesma circunferência.

$\beta = \dfrac{\alpha}{2}$

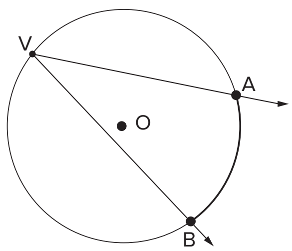


Teorema: A medida de um ângulo semi-inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo.

Exercício resolvido

11. Qual alternativa apresenta o valor mais próximo do comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ determinado pelo ângulo $A\hat{V}B$, de 35°, inscrito na circunferência de centro O e raio 9 cm?

Utilize a aproximação: $\pi \cong \dfrac{22}{7}$.



a) 7 cm.
b) 8 cm.
c) 9 cm.
d) 10 cm.
e) 11 cm.

Resolução:

Como V é ângulo inscrito na circunferência, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $2 \cdot 35° = 70°$.

Como o comprimento total dessa circunferência é de $2 \cdot \pi \cdot 9$ cm $= 18\pi$ cm, sendo x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ dessa circunferência, aplicando a regra de três, temos:

$18\,\pi$ cm ———— 360°

x cm ———— 70°

Portanto:

$$360° \cdot x = 70° \cdot 18\pi \Rightarrow 360° \cdot x = 70° \cdot 18 \cdot \frac{22}{7} \Rightarrow$$

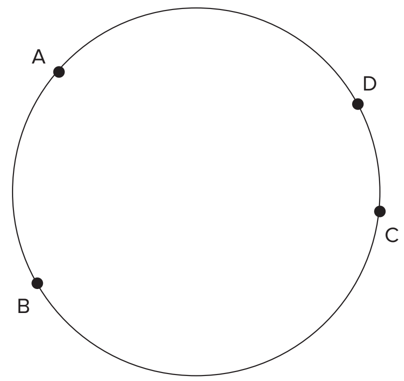
$$\Rightarrow 360° \cdot x = 10° \cdot 18 \cdot 22 \Rightarrow x \cong \frac{10° \cdot 18 \cdot 22}{360°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cong 11 \text{ cm}$$

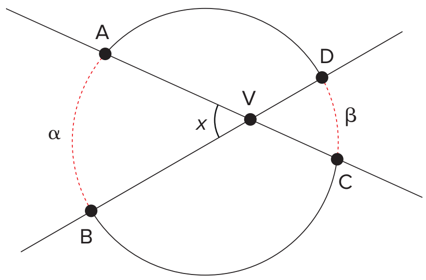
Resposta: alternativa E.

Há mais duas posições relativas entre ângulos e circunferências nas quais é possível relacionar as medidas dos ângulos e as dos arcos determinados na circunferência.

Para observá-las, considere os pontos A, B, C e D de uma circunferência, tomados no sentido anti-horário.

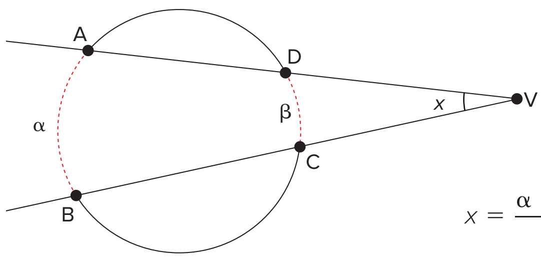


Assim, ou as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ se intersectam em um ponto da região interior da circunferência...



$x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

... ou as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ se intersectam em um ponto da região exterior à circunferência:



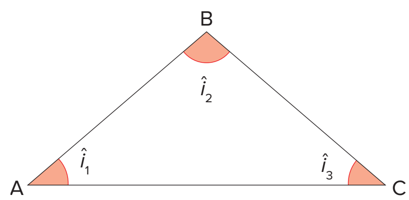
$x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

Polígonos

Polígono é o nome dado à figura geométrica fechada cercada apenas por segmentos de reta. Todo polígono possui o mesmo número de lados, de vértices e de ângulos internos.

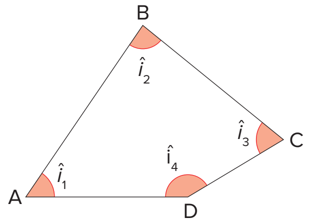
Exemplo 5:

Um triângulo ABC possui:



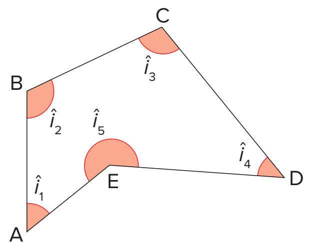
- 3 vértices: A, B e C.
- 3 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
- 3 ângulos internos: $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$ e $\hat{i}_3$.

Exemplo 6:
Um quadrilátero ABCD apresenta:



- 4 vértices: A, B, C e D.
- 4 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.
- 4 ângulos internos: $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$ e $\hat{i}_4$.

Exemplo 7:
Um pentágono ABCDE tem:



- 5 vértices: A, B, C, D e E.
- 5 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$.
- 5 ângulos internos: $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$, $\hat{i}_4$ e $\hat{i}_5$.

Esses números estabelecem a principal nomenclatura dos polígonos.

Número de vértices	Nome do polígono
$n = 3$	Triângulo
$n = 4$	Quadrilátero
$n = 5$	Pentágono
$n = 6$	Hexágono
$n = 7$	Heptágono
$n = 8$	Octógono
$n = 9$	Eneágono
$n = 10$	Decágono
$n = 11$	Undecágono
$n = 12$	Dodecágono
$n = 13$	Tridecágono
$n = 14$	Tetradecágono
$n = 15$	Pentadecágono
⋮	⋮
$n = 20$	Icoságono

Qualquer segmento de reta que une dois vértices de um polígono e que não é um de seus lados é uma **diagonal** do polígono. Observe, nas figuras anteriores, que o triângulo ABC não possui diagonal, que o quadrilátero ABCD tem duas diagonais ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$) e que o pentágono ABCDE apresenta cinco diagonais ($\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$). De maneira geral, cada um dos n vértices de um polígono é extremidade de exatamente $\boldsymbol{n-3}$ diagonais.

Então, como cada diagonal possui duas extremidades em vértices distintos do polígono, o princípio multiplicativo da contagem permite afirmarmos que o produto $n \cdot (n-3)$ equivale ao dobro do número de diagonais de um polígono com n vértices.

Assim, sendo $\boldsymbol{d}$ o número de diagonais de um polígono de n vértices, temos:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Exercício resolvido

12. Quantos são os lados de um polígono que possui exatamente 35 diagonais?

a) 7 **c)** 12 **e)** 17
b) 10 **d)** 14

Resolução:

Como $d = 35$, sendo n o número de lados desse polígono, temos:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 35$$

$$n \cdot (n-3) = 70$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70) = 9 + 280 = 289$$

$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 17}{2} = \begin{cases} \nearrow n_1 = \dfrac{20}{2} = 10 \\ \searrow n_2 = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{cases}$$

Como n é positivo, concluímos que o polígono tem 10 lados.
Resposta: alternativa B.

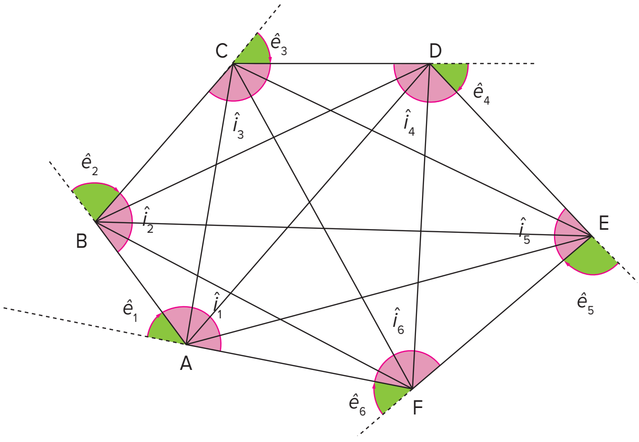
Se um polígono tiver pelo menos uma diagonal situada em sua região exterior, será denominado côncavo, e as regiões onde as diagonais exteriores ficam situadas são chamadas de concavidades do polígono. O pentágono ABCDE apresentado nos exemplos é côncavo, pois sua diagonal $\overline{AD}$ passa pela região exterior a ele.

Se um polígono não possuir concavidade, receberá o nome de convexo. Assim, todos os triângulos são convexos, pois não têm diagonais, e o quadrilátero ABCD apresentado nos exemplos anteriores é convexo, pois suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ estão contidas na região interior desse polígono.

De modo geral, se um polígono é convexo, então:

- todas as diagonais estão situadas em sua região interior;
- todos os ângulos internos têm medida inferior a 180° (0° < i < 180°);
- os ângulos internos e externos com o mesmo vértice têm medidas suplementares, ou seja, $i + e = 180°$.

Observe essas particularidades na figura do hexágono convexo a seguir:



Indicamos com $\mathbf{S}_i$ a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono e com $\mathbf{S}_e$ a soma das medidas de seus ângulos externos. Assim:

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_n$$
$$S_e = e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n$$

Como cada ângulo externo de um polígono convexo representa um desvio angular positivo na linha que contorna o polígono, temos que $\mathbf{S}_e$ é constante e vale 360°.

$$\mathbf{S}_e = 360°$$

Então, observando que $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{e} = \mathbf{180}°$ em cada vértice de um polígono convexo, obtemos:

$$\begin{array}{ccccc|c} i_1 & + & e_1 & = & 180° & + \\ i_2 & + & e_2 & = & 180° & + \\ i_3 & + & e_3 & = & 180° & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & + \\ i_n & + & e_n & = & 180° & \\ \hline S_i & + & S_e & = & 180° \cdot n & \end{array}$$

Substituindo $\mathbf{S}_e$ por 360°, encontramos uma expressão para a soma $\mathbf{S}_i$ de acordo com o número de vértices do polígono.

$$S_i + 360° = n \cdot 180° \Rightarrow S_i = n \cdot 180° - 360°$$

Fatorando essa função, chegamos à fórmula mais conhecida para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

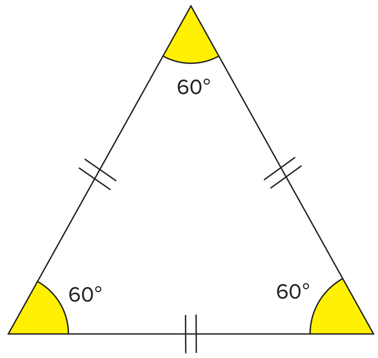
$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Também podemos classificar os polígonos em relação aos seus lados e ângulos da seguinte maneira:

- **Equiláteros:** os lados apresentam o mesmo comprimento.
- **Equiângulos:** os ângulos internos têm a mesma medida.
- **Regulares:** se, e somente se, forem polígonos **equiláteros** e **equiângulos**.

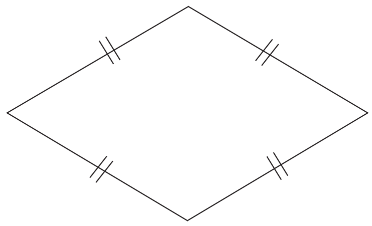
Uma particularidade dos triângulos é que, se eles forem equiláteros, também serão equiângulos e, portanto, regulares. Isso não acontece com os polígonos com mais de três vértices, como os quadriláteros e os pentágonos.

Assim, podemos afirmar que todos os triângulos equiláteros são regulares.

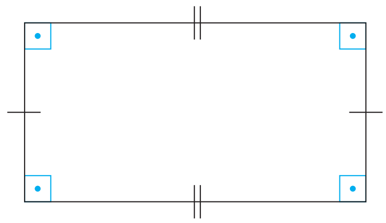


Quanto aos polígonos quadriláteros, a nomenclatura específica é:

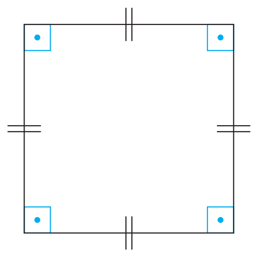
- **Losangos:** são os equiláteros.



- **Retângulos:** são os equiângulos.



- **Quadrados:** são os regulares.

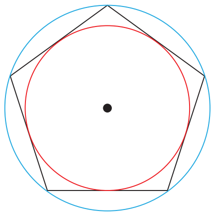


Os polígonos com mais do que quatro vértices, como os pentágonos e os hexágonos, também podem ser equiláteros, equiângulos e regulares, mas, para eles, não há uma nomenclatura específica.

Se um polígono é equiângulo ou regular, então as medidas de seus ângulos internos e externos podem ser expressas em função do número n de vértices do polígono da seguinte maneira:

- Medida de cada ângulo interno: $i = \dfrac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$.
- Medida de cada ângulo externo: $e = \dfrac{360°}{n}$.

Além do fato de os polígonos regulares serem tanto equiláteros quanto equiângulos, é importante observarmos que todo polígono regular é inscritível e circunscritível em relação a circunferências de mesmo centro.



Exercícios resolvidos

13. Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130°, e os demais ângulos internos medem 128°. O número de lados do polígono é:

a) 6 **b)** 7 **c)** 13 **d)** 16 **e)** 17

Resolução:

Sendo n o número de lados desse polígono, do enunciado temos que:

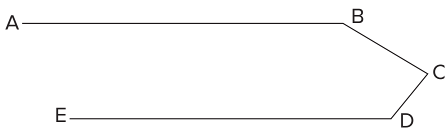
$$S_i = 2 \cdot 130° + (n - 2) \cdot 128°$$

Então, como $S_i = (n - 2) \cdot 180°$ em todo polígono convexo, encontramos a equação:

$$(n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 130° + (n - 2) \cdot 128°$$
$$180°n - 360° = 260° + 128°n - 256°$$
$$180°n - 128°n = 260° - 256° + 360°$$
$$52°n = 364°$$
$$n = 7$$

Resposta: alternativa B.

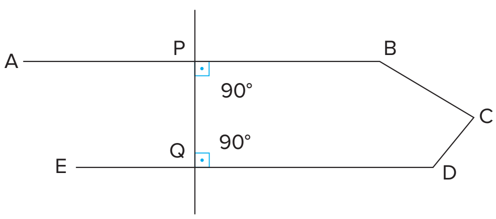
14. Na figura a seguir, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Determine o valor de x sabendo que as medidas dos ângulos de vértices B, C e D são, respectivamente, expressas por: $2x + 10°$, $x + 10°$ e $2x - 10°$.



a) 30° **c)** 50° **e)** 70°
b) 40° **d)** 60°

Resolução:

De acordo com o quarto postulado da Geometria Euclidiana, traçando uma reta perpendicular a uma reta dada, determinamos quatro ângulos congruentes, todos medindo 90°. Portanto, traçando uma perpendicular às retas paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, obtemos os pontos P e Q, que são vértices de oito ângulos retos.



Então, como os pontos P e Q determinam o pentágono convexo PBCDQ, temos que a soma dos ângulos internos desse pentágono é: $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = (n - 2) \cdot 180°$, com $n = 5$.

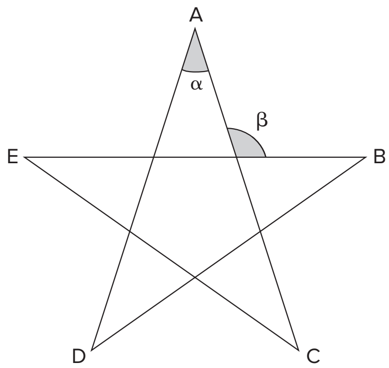
Portanto:

$$90° + 90° + (2x + 10°) + (x + 10°) + (2x - 10°) = (5 - 2) \cdot 180°$$

$$190° + 5x = 540°$$
$$5x = 350°$$
$$x = 70°$$

Resposta: alternativa E.

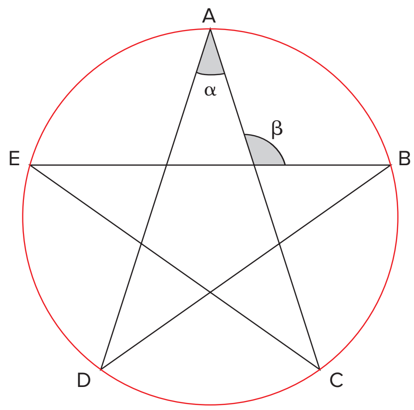
15. A figura apresenta um pentágono regular cujos lados foram prolongados para formar o polígono estrelado de ABCDE, que também é regular.



Determine as medidas α e β dos ângulos indicados na figura.

Resolução:

Como ABCDE é regular, há uma circunferência que passa por todos esses pontos.



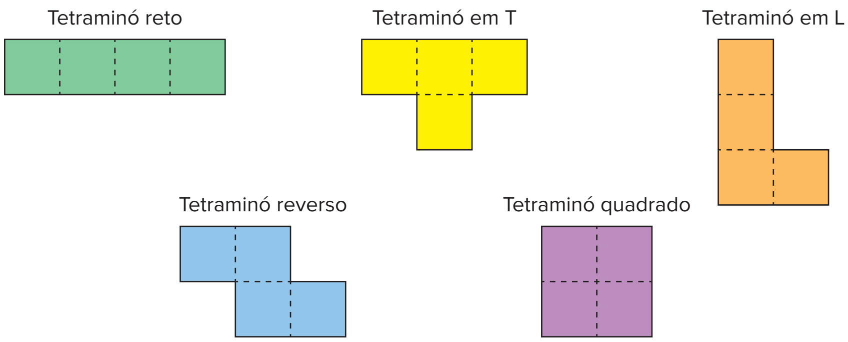
Traçando essa circunferência, observamos que α é a medida de um ângulo nela inscrito. Portanto, como o menor arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 360° : 5 = 72°, temos que α = 72° : 2 = 36°.

Como o ângulo de medida β é oposto pelo vértice de um ângulo interno do pentágono regular, obtemos:

$$\beta = \frac{(5 - 2) \cdot 180°}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$$

Revisando

1. Conhecidas como tetraminós, as formas geométricas a seguir são obtidas pela justaposição de quadrados congruentes. Os tetraminós contagiaram o mundo nas décadas de 1980 e 1990, quando incorporaram um jogo eletrônico chamado Tetris. Esse jogo foi inventado por dois professores e um aluno da Academia Russa de Ciências e ainda hoje é muito popular em todo o mundo.
Só há cinco tipos diferentes de tetraminós, e cada um deles é composto de exatamente quatro quadrados:



Identifique se há algum tipo de simetria de rotação (radial) e/ou reflexão (bilateral) em cada tetraminó. No caso de a figura apresentar simetria de reflexão, determine o número de eixos e, se a figura for invariante por rotações de menos do que 360° em torno de seu centro, identifique o menor ângulo possível para essas rotações.

2. Considerando as definições dos quadriláteros a seguir, faça uma figura para representar cada um deles e indique as características relevantes de seus ângulos internos e suas diagonais.

I. Trapézio isósceles: quadrilátero que possui duas bases paralelas e cujos lados não paralelos têm a mesma medida.
II. Paralelogramo: quadrilátero que apresenta dois pares de lados paralelos.
III. Retângulo: quadrilátero em que dois lados adjacentes são sempre perpendiculares um ao outro.
IV. Losango: quadrilátero cujos lados têm a mesma medida.
V. Quadrado: quadrilátero em que dois lados adjacentes são sempre perpendiculares um ao outro e que possui todos os lados com a mesma medida.

3. Encontre os complementos e os suplementos das seguintes medidas angulares:

a) 60° **b)** 38° **c)** 22°30' **d)** 8°45'12"

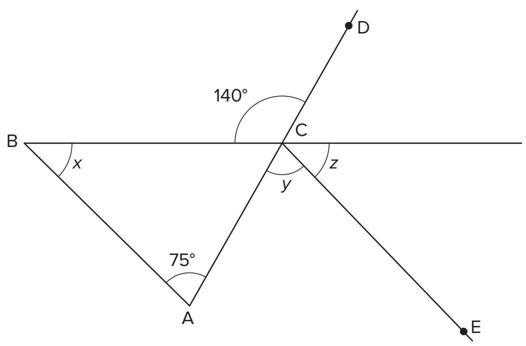
4. Um quadrilátero ABCD é tal que $AB = AD$, $AB < BC$ e $BC = DC$.

a) Esboce esse quadrilátero e prove que os ângulos internos de vértices B e D têm a mesma medida.
b) Trace as diagonais desse quadrilátero e indique as características relevantes que possuem.
c) Sendo E o ponto de interseção das diagonais desse quadrilátero, identifique todos os pares de triângulos congruentes apresentados pelo quadrilátero ABCD e suas diagonais.

5. Sabendo que as mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 20°, determine:

a) as medidas dos seus ângulos internos.
b) o número de lados do polígono.
c) o número de diagonais do polígono.
d) o número de diagonais que não passam pelo centro do polígono.

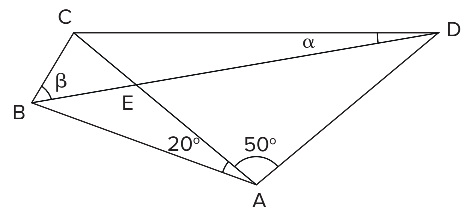
6. **Mackenzie-SP 2020**



Na figura apresentada, $\overline{CE}$ é paralelo a $\overline{BA}$, a medida do ângulo $B\hat{C}D$ é igual a 140° e a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 75°. Então, os ângulos *x*, *y* e *z* medem, respectivamente,

a) 75°, 75° e 65°
b) 65°, 75° e 65°
c) 75°, 65° e 65°
d) 65°, 65° e 75°
e) 65°, 75° e 75°

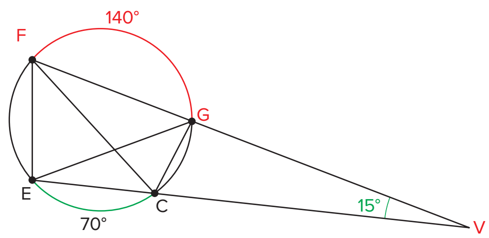
7. Na figura a seguir, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se intersectam no ponto E.



Sabendo que AB = AC = AD, med($B\hat{A}C$) = 20° e med($C\hat{A}D$) = 50°, determine:

a) Há quantos triângulos na figura?
b) Quais desses triângulos são isósceles? (Indique quais são as bases de cada um.)
c) Quanto vale, em graus, a soma das medidas α e β dos ângulos indicados na figura?

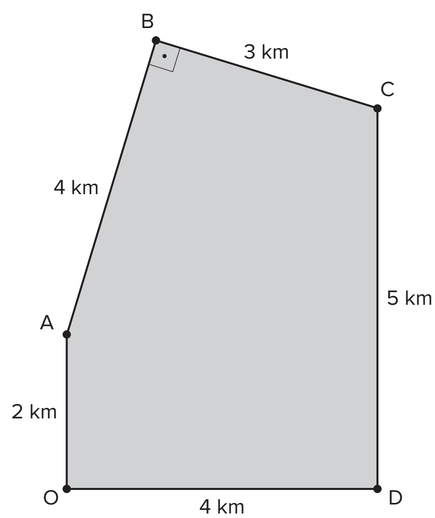
8. FGV-SP 2021 Os pontos F, G, C e E pertencem à circunferência indicada na figura. A medida do ângulo $F\hat{V}E$ é 15°, a medida do arco $\overset{\frown}{FG}$ é 140° e a medida do arco $\overset{\frown}{EC}$ é 70°.



A medida do ângulo $C\hat{F}G$ é:

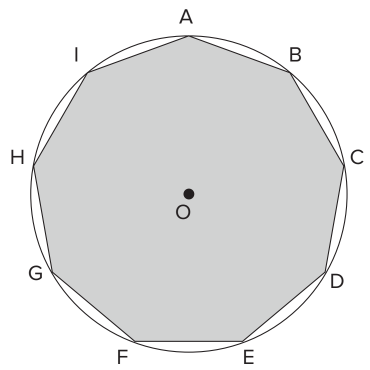
a) 20°
b) 25°
c) 30°
d) 40°
e) 45°

9. UnB-DF 2022 (Adapt.) Considerando a figura abaixo, que representa uma região de 20 km^2 destinada a uma reserva ambiental, julgue os itens abaixo como certo ou errado.



a) Se α é o ângulo no vértice A do triângulo ABC e se β é o ângulo no vértice D do triângulo OAD, então cos(α) < cos(β).
b) A distância entre os pontos A e C é igual a 5 km.
c) Os triângulos OAD e ABC são congruentes.

10. A figura a seguir apresenta um eneágono regular inscrito em uma circunferência de centro O.



Responda às seguintes perguntas:

a) Qual é o valor da soma dos ângulos externos?
b) Quanto mede cada ângulo externo?
c) Qual é o valor da soma dos ângulos internos?
d) Quanto mede cada ângulo interno?
e) Quanto mede o ângulo $A\hat{O}D$?
f) Quanto mede o ângulo $C\hat{A}D$?
g) Quanto mede o ângulo formado pelo prolongamento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do polígono?
h) Quantas diagonais esse polígono possui?
i) Qual é a medida dos ângulos agudos formados pelas diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BG}$?
j) Qual é a medida dos ângulos agudos formados pelos prolongamentos do lado $\overline{BC}$ e da diagonal $\overline{GD}$ do polígono?

Exercícios propostos

1. Fuvest-SP 2016 Os pontos A, B e C são colineares, AB = 5, BC = 2 e B está entre A e C. Os pontos C e D pertencem a uma circunferência com centro em A. Traça-se uma reta *r* perpendicular ao segmento $\overline{BD}$ passando pelo seu ponto médio. Chama-se de P a interseção de *r* com $\overline{AD}$. Então, AP + BP vale:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

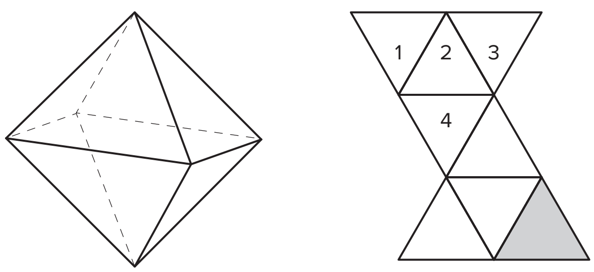
2. Um topógrafo precisa saber as medidas dos três lados e dos três ângulos internos de um terreno triangular extremamente acidentado. Em razão disso, não conseguirá, em um único dia, precisar mais do que três dessas medidas. Entretanto, o topógrafo sabe que, em alguns casos, com apenas três dessas medidas, ele pode determinar as outras três usando seus conhecimentos de Geometria e, assim, concluir o serviço mais tarde em sua casa. Considere que ele tenha as seguintes opções:

I. Medir todos os ângulos.
II. Medir todos os lados.
III. Medir dois lados e um ângulo.
IV. Medir dois ângulos e um lado.

Assinale a alternativa correta.

a) A opção I é suficiente para concluir o serviço.
b) A opção II é a única suficiente para concluir o serviço.
c) Quaisquer que sejam os lados e os ângulos medidos na opção III, será possível concluir o serviço.
d) Quaisquer que sejam os lados e os ângulos medidos na opção IV, será possível concluir o serviço.
e) As opções II e III são suficientes para concluir o serviço.

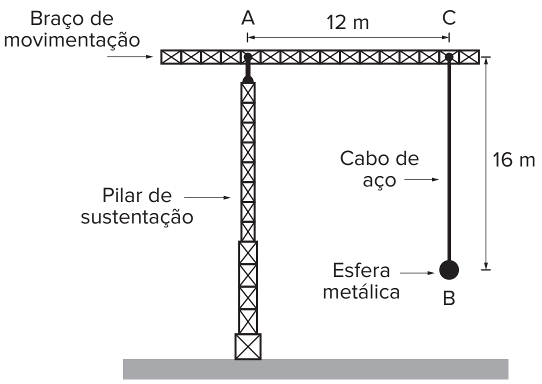
3. Enem 2021 Num octaedro regular, duas faces são consideradas opostas quando não têm nem arestas, nem vértices em comum. Na figura, observa-se um octaedro regular e uma de suas planificações, na qual há uma face colorida na cor cinza escuro e outras quatro faces numeradas.



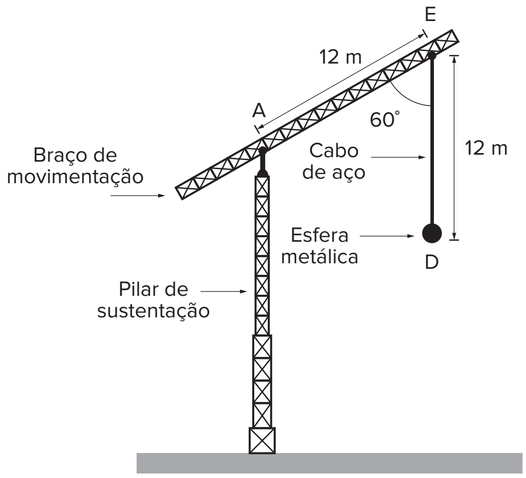
Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro for reconstruído a partir da planificação dada?

a) 1, 2, 3 e 4.
b) 1 e 3.
c) 1.
d) 2.
e) 4.

4. **Enem Digital 2020** Considere o guindaste mostrado nas figuras, em duas posições (1 e 2). Na posição 1, o braço de movimentação forma um ângulo reto com o cabo de aço CB que sustenta uma esfera metálica na sua extremidade inferior.
Na posição 2, o guindaste elevou seu braço de movimentação e o novo ângulo formado entre o braço e o cabo de aço ED, que sustenta a bola metálica, é agora igual a 60°.



Posição 1



Posição 2

Assuma que os pontos A, B e C, na posição 1, formam o triângulo T_1 e que os pontos A, D e E, na posição 2, formam o triângulo T_2, os quais podem ser classificados em obtusângulo, retângulo ou acutângulo, e também em equilátero, isósceles ou escaleno.
Segundo as classificações citadas, os triângulos T_1 e T_2 são identificados, respectivamente, como

a) retângulo escaleno e retângulo isósceles.
b) acutângulo escaleno e retângulo isósceles.
c) retângulo escaleno e acutângulo escaleno.
d) acutângulo escaleno e acutângulo equilátero.
e) retângulo escaleno e acutângulo equilátero.

5. **Fatec-SP 2017** Em um círculo recortado em papel-cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a Figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

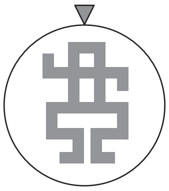
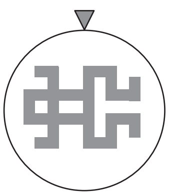
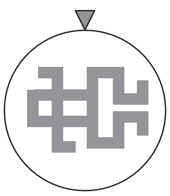
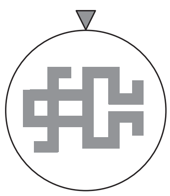


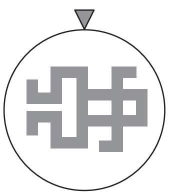
Figura 1

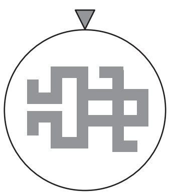
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da Figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em:

a) 

c) 

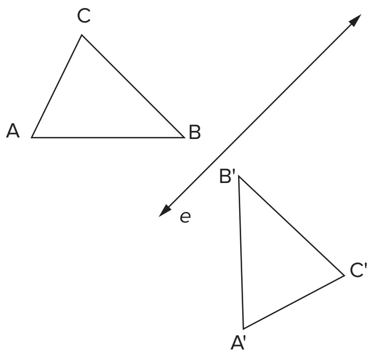
e) 

b) 

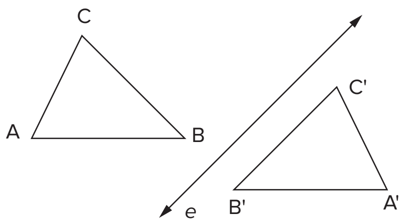
d) 

6. **UPE 2016** Dentre as alternativas a seguir, qual figura representa melhor o triângulo A'B'C', obtido por uma reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo *e* seguida de uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do ponto B'?

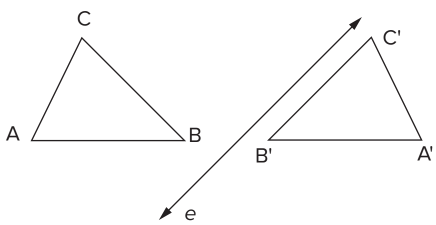
a)



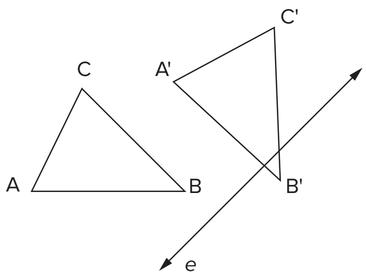
b)



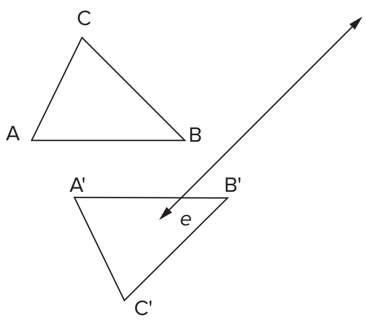
c)



d)



e)



7. **Uesb-BA 2020** Considere um ângulo *x* cujo dobro do complemento do dobro da sua medida é igual ao triplo do suplemento do triplo da sua medida. O complemento do ângulo *x* é

a) 15°

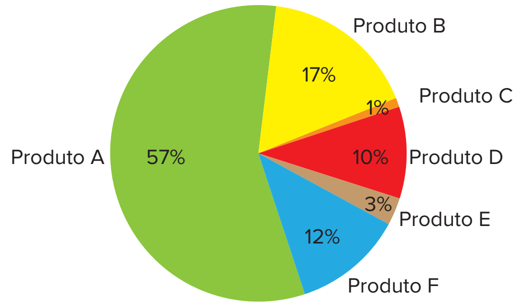
b) 18°

c) 21°

d) 24°

e) 27°

8. O gráfico de setores a seguir mostra como está dividido o faturamento atual de uma empresa de tecnologia pelos produtos oferecidos no mercado.



Qual a medida, em graus, da região angular associada ao produto A?

a) 205°12'

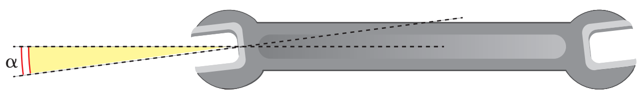
b) 205°2'

c) 185°20'

d) 185°2'

e) 25°12'

9. A chave fixa, também conhecida como chave de boca, é uma ferramenta bastante usada para apertar e desapertar porcas e parafusos. Para facilitar seu manuseio, o eixo de simetria da boca tem uma inclinação α em relação ao eixo de simetria de seu corpo, como mostra a figura a seguir.



Um fabricante de chaves fixas sabe que essa ferramenta atinge sua eficiência máxima quando a medida do ângulo α é tal que, subtraída de seu complemento, resulta na medida do ângulo interno de um triângulo equilátero. Então, para fabricar chaves fixas de eficiência máxima, esse fabricante deve fazer com que α tenha:

a) 10°

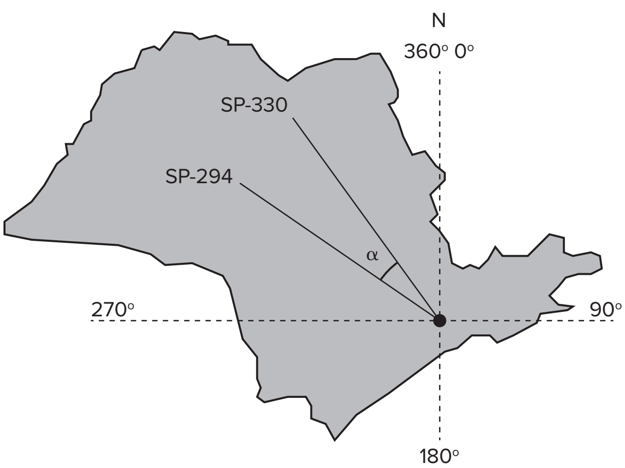
b) 15°

c) 20°

d) 25°

e) 30°

10. As rodovias brasileiras têm denominações diferentes umas das outras, principalmente as que são identificadas como federais, estaduais ou municipais. As rodovias estaduais radiais, por exemplo, são denominadas assim por partirem da capital do estado e seguirem para qualquer direção, conectando pontos importantes dentro do território. A nomenclatura das rodovias estaduais radiais no estado de São Paulo, por exemplo, é determinada pelo azimute aproximado de seu rumo a partir da capital do estado. O azimute é a inclinação relativa ao norte geográfico, dada em graus e no sentido horário.
As rodovias SP-294 e SP-330 têm inclinações aproximadas de 294° e 330° em relação ao norte geográfico, como indica a figura a seguir.



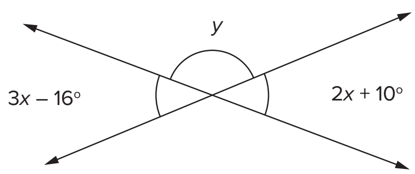
Considerando o exposto acerca dessas rodovias, infere-se que o ângulo α determinado pelos seus rumos mede:

a) 24°
b) 26°
c) 36°
d) 44°
e) 46°

11. Considere um ângulo obtuso de medida γ e dois ângulos agudos de medidas α e β. Se as medidas α e β são complementares e as medidas α e γ são suplementares, então é correto afirmar que:

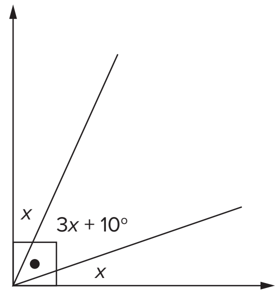
a) $\gamma = \alpha - \beta$
b) $\gamma = \alpha + 2\beta$
c) $\beta = \alpha - \gamma$
d) $\beta = \alpha + 2\gamma$
e) $\alpha = \beta - 2\gamma$

12. **UTFPR 2016** A medida do ângulo *y* na figura é:



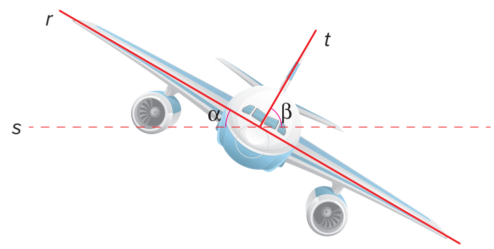
a) 62°
b) 72°
c) 108°
d) 118°
e) 154°

13. **UTFPR 2015** Calcule o valor de *x*, em graus, na figura:



a) 16
b) 10
c) 20
d) 58
e) 32

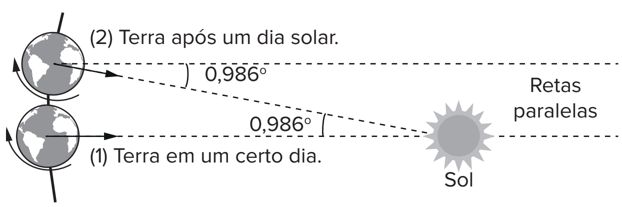
14. Observando o voo de um avião, pode-se perceber que seu leme fica em uma direção perpendicular às suas asas, mesmo quando estas não estão na horizontal, como mostra a figura a seguir.



Considere que a reta *r*, determinada pelas asas do avião, tenha uma inclinação de medida α em relação à linha *s*; e a semirreta *t*, determinada pelo leme do avião, tenha inclinação de medida β em relação à reta *s*, como mostra a figura anterior. Assim, se a inclinação β é 10° superior à inclinação α, pode-se concluir que:

a) $\alpha = 20°$
b) $\alpha = 30°$
c) $\alpha = 40°$
d) $\alpha = 50°$
e) $\alpha = 60°$

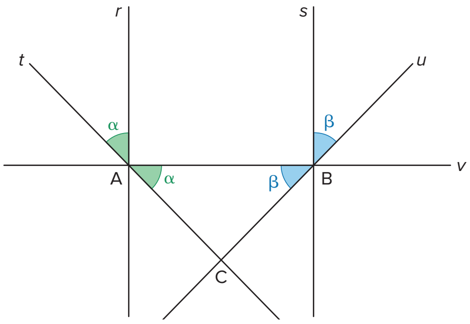
15. Dia solar é o nome dado ao intervalo de tempo decorrido entre duas passagens sucessivas do Sol por um meridiano local qualquer. Considerando a órbita da Terra como circular, pode-se estimar que ela percorre, em sua órbita, um arco de 0,986° por dia. Observe a situação ilustrada na figura a seguir.



A respeito da posição relativa, os dois ângulos de 0,986° indicados na figura são:

a) alternos externos.
b) alternos internos.
c) correspondentes.
d) colaterais internos.
e) colaterais externos.

16. **Famerp-SP 2021** A figura indica cinco retas, dois pares de ângulos congruentes, dois pontos nas interseções de três retas e um ponto na interseção de duas retas.



Nas condições da figura, as retas *r* e *s* serão paralelas se, e somente se,

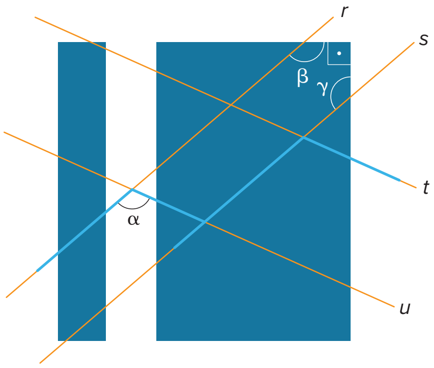
a) α for igual a β.
b) *t* e *u* forem perpendiculares em C.
c) a medida de $\overline{AC}$ for igual à de $\overline{BC}$.
d) α ou β for igual a 45°.
e) o triângulo ABC for equilátero.

17. **UTFPR 2013** Um triângulo isósceles tem dois lados congruentes (de medidas iguais) e o outro lado é chamado de base. Se, em um triângulo isósceles, o ângulo externo relativo ao vértice oposto da base mede 130°, então os ângulos internos desse triângulo medem:

a) 10°, 40° e 130°.
b) 25°, 25° e 130°.
c) 50°, 60° e 70°.
d) 60°, 60° e 60°.
e) 50°, 65° e 65°.

18. **Famema-SP 2021** Considere o logotipo da Famema.

Admita que esse logotipo seja feito a partir da figura a seguir, sendo *r* e *s* retas paralelas, assim como as retas *t* e *u*.



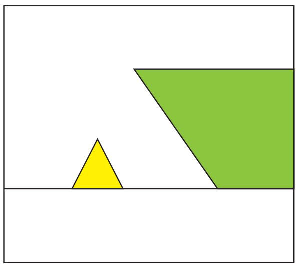
Se $\alpha + \beta + \gamma = 380°$, então α é igual a:

a) 140°
b) 110°
c) 130°
d) 120°
e) 100°

19. **FGV-SP 2021** Considere um triângulo ABC e o ponto D, médio do lado $\overline{AC}$. Sabendo que os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ têm comprimentos iguais e que o ângulo $B\hat{C}D$ mede 65°, a diferença entre as medidas dos ângulos $C\hat{B}D$ e $D\hat{A}B$, em graus, é

a) 20
b) 25
c) 30
d) 35
e) 40

20. Na figura a seguir, considere um trapézio retângulo e um triângulo isósceles.



Se a base menor desse trapézio e a base desse triângulo são colineares, então, sabendo que o ângulo agudo do trapézio mede 72° e o ângulo oposto à base do triângulo mede 30°, podemos concluir que as retas que contêm o lado oblíquo do trapézio e o lado do triângulo mais próximo ao trapézio, sem ser a base, formam um ângulo agudo de:

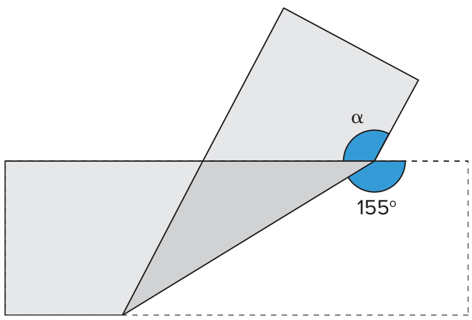
a) 1°
b) 2°
c) 3°
d) 4°
e) 5°

21. Um garoto descuidado fechou seu caderno deixando que uma de suas folhas retangulares ficasse dobrada, formando um ângulo de 40° em sua base, como mostra a figura a seguir:

Assinale a alternativa que apresenta a medida, em graus, do menor ângulo agudo do triângulo determinado pela dobradura.

a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°
e) 30°

22. IFRJ 2017 Uma fita de papel retangular é dobrada conforme a figura a seguir.



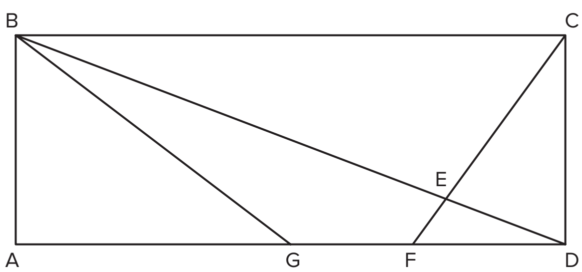
O valor do ângulo α marcado na figura é

a) 155°
b) 150°
c) 140°
d) 130°

23. Uece 2016 No retângulo PQRS a medida dos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são respectivamente 3 m e 2 m. Se V é um ponto do lado $\overline{PQ}$ tal que a medida do segmento $\overline{VQ}$ é igual a 1 m e U é o ponto médio do lado $\overline{PS}$, então, a medida, em graus, do ângulo $V\hat{U}R$ é:

a) 40
b) 35
c) 50
d) 45

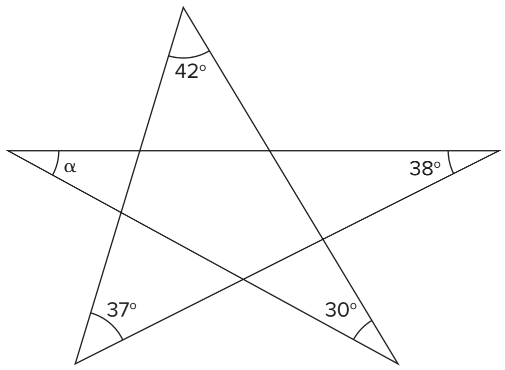
24. UFMS 2021 Na figura a seguir, há um retângulo ABCD, e os triângulos △ABG e △DFC são semelhantes. O ângulo $C\hat{B}G = 37°$.



Ao prolongar os segmentos de reta $\overline{BG}$ e $\overline{CF}$, o ângulo formado pelo cruzamento dos segmentos é:

a) 37°.
b) 53°.
c) 90°.
d) 127°.
e) 143°.

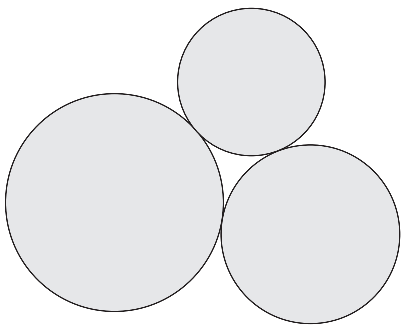
25. Ifal 2016 Na figura a seguir, calcule o ângulo α.



Dica: Use o resultado do ângulo externo de um triângulo.

a) 30°
b) 33°
c) 37°
d) 38°
e) 42°

26. A figura a seguir apresenta três círculos de raios diferentes, limitados por circunferências tangentes duas a duas.



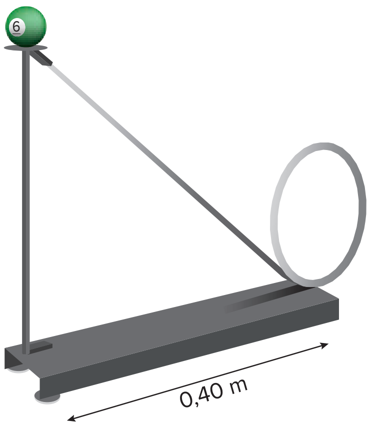
Sabendo que os lados do triângulo, cujos vértices são os centros desses círculos, medem 9 cm, 10 cm e 11 cm, pode-se concluir que o comprimento da maior circunferência e a área do menor círculo valem, respectivamente:

a) 6π cm e 16π cm^2.
b) 6π cm e 8π cm^2.
c) 10π cm e 8π cm^2.
d) 12π cm e 16π cm^2.
e) 12π cm e 8π cm^2.

27. UENP-PR 2021 Os ângulos Ω, Ψ e β de um triângulo qualquer possuem a razão de 4 : 5 : 6. Sabendo disso, é correto afirmar que os ângulos do triângulo são, respectivamente:

a) $\Omega = 60°$, $\Psi = 60°$ e $\beta = 60°$.
b) $\Omega = 72°$, $\Psi = 80°$ e $\beta = 28°$.
c) $\Omega = 72°$, $\Psi = 68°$ e $\beta = 40°$.
d) $\Omega = 48°$, $\Psi = 60°$ e $\beta = 72°$.
e) $\Omega = 15°$, $\Psi = 85°$ e $\beta = 80°$.

28. UPE 2016 Num experimento de física realizado em sala, foi solta do topo de uma rampa de 0,30 m de altura uma esfera que percorreu certa distância, fazendo um *looping* no final. Partindo do princípio de que o triângulo representado é retângulo, qual a distância total aproximada que essa bola irá percorrer do topo da rampa até dar uma volta completa no aro da circunferência cujo raio é de 0,10 m?
Adote $\pi = 3{,}14$.



a) 1,13 m.
b) 1,28 m.
c) 1,57 m.
d) 2,00 m.
e) 2,07 m.

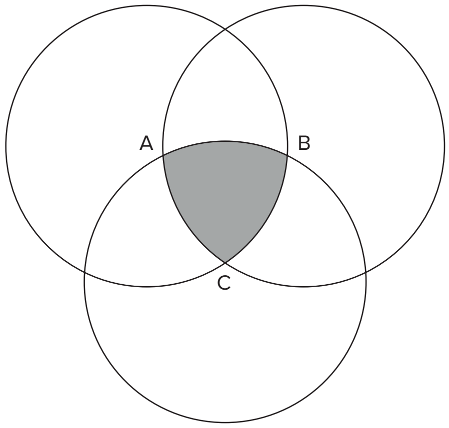
29. UEG-GO 2021 O aro do pneu de um carro consiste na medida do diâmetro interno do pneu, em polegadas. Sabendo-se que 1 polegada equivale a 2,54 centímetros, o comprimento da circunferência interna de um pneu de aro 14, em centímetros, é igual a

a) $31{,}76\pi$ cm
b) $32{,}46\pi$ cm
c) $33{,}62\pi$ cm
d) $34{,}47\pi$ cm
e) $35{,}56\pi$ cm

30. FGV-SP 2017 Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da Linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela Linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente:

a) 63 cm.
b) 12,6 m.
c) 6,3 km.
d) 12,6 km.
e) 63 km.

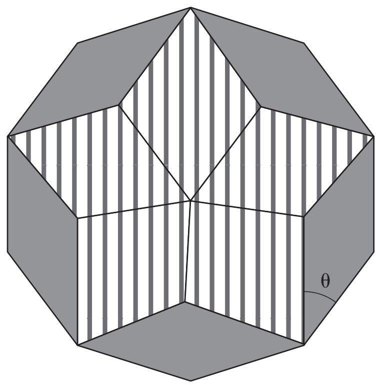
31. IFMG 2013 Considere três circunferências de raio unitário e de centros A, B e C, conforme a figura.



Dessa forma, o perímetro da região sombreada, em unidades de comprimento, é

a) $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{\pi}{2}$
c) π
d) 2π

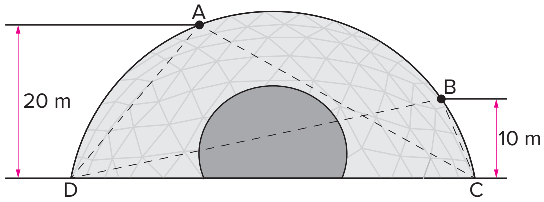
32. Unig-RJ 2021



No esboço do logotipo de uma empresa foi desenhada uma estrela, formada por losangos, inscrita em um polígono regular de acordo com a figura. Sendo a região exterior à estrela também formada por losangos, pode-se afirmar que a medida do ângulo θ é, em radianos, igual a

a) $\frac{\pi}{9}$
b) $\frac{\pi}{5}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{3\pi}{8}$
e) $\frac{5\pi}{12}$

33. Nos ajustes finais da construção de um domo geodésico, dois operários fechavam pequenos orifícios localizados em pontos distintos desse domo. Um deles estava a 20 metros do piso (ponto A) e outro a apenas 10 metros (ponto B), como mostra a figura a seguir.



Enquanto trabalhavam, os dois operários podiam contemplar a vista do piso daquelas alturas, sob os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}D$. Sendo x e y as respectivas medidas, em graus, desses ângulos e considerando o arco $\overset{\frown}{CD}$, que passa pelos pontos A e B da superfície do domo geodésico, uma semicircunferência, então:

a) $x + y \geqslant 180°$

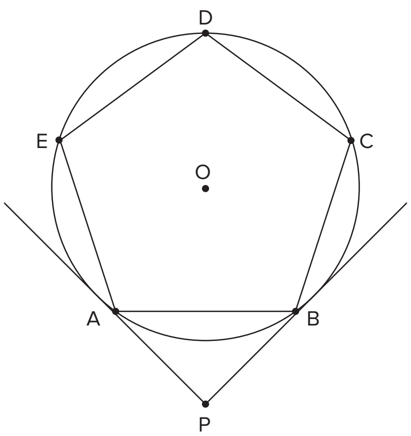
b) $x + y > 180°$

c) $x < y$

d) $x > y$

e) $x = y$

34. IFMG 2016 Na figura a seguir, o pentágono regular está inscrito numa circunferência de centro O, e as semirretas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos A e B, respectivamente.



A medida do ângulo $A\hat{P}B$, em graus, é igual a:

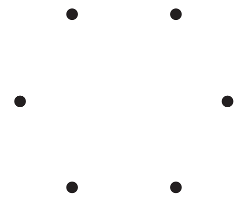
a) 36

b) 72

c) 108

d) 154

35. IFRJ 2013 Manuela desenha os seis vértices de um hexágono regular (figura a seguir) e une alguns dos seis pontos com segmentos de reta para obter uma figura geométrica. Essa figura não é seguramente um:



a) retângulo.

b) trapézio.

c) quadrado.

d) triângulo equilátero.

36. Uece 2016 Se a partir de cada um dos vértices de um polígono convexo com n lados podemos traçar tantas diagonais quanto o total das diagonais de um hexágono convexo, então, o valor de n é:

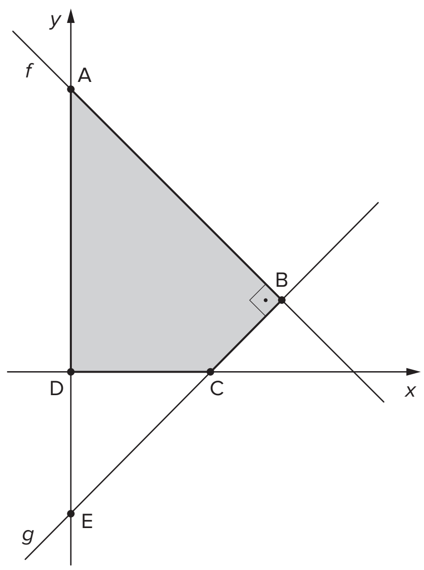
a) 9

b) 10

c) 11

d) 12

37. FICSAE-SP 2017 A reta f que passa pelo ponto A(0, 8) e a reta g que passa pelos pontos E(0, –4) e C(4, 0) são perpendiculares e interceptam-se no ponto B, conforme mostra a figura.



Sendo D(0, 0) a origem do sistema de coordenadas cartesianas, a área do polígono ABCD é

a) 16.

b) 24.

c) 28.

d) 32.

38. IFCE 2016 Um hexágono convexo possui três ângulos internos retos e outros três que medem y graus cada. O valor de y é:

a) 135

b) 150

c) 120

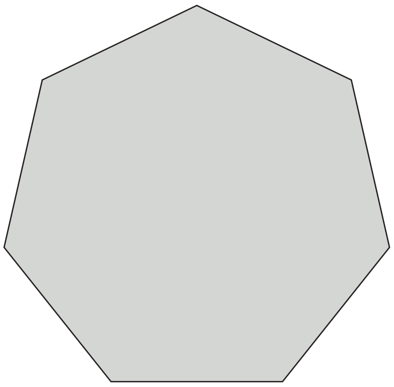
d) 60

e) 30

39. IFSul-RS 2016 A palavra polígono tem origem no grego e significa ter muitos lados ou ângulos. Eles foram estudados pelo grande geômetra Euclides de Alexandria em sua obra *Os elementos*.
Quantos lados tem um polígono cuja soma dos ângulos internos e externos é 1980°?

a) 8
b) 11
c) 13
d) 17

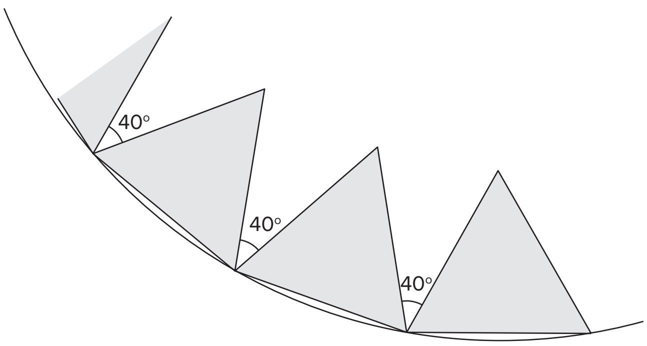
40. IFSP 2016 Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era "quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?".



Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

a) 720°
b) 900°
c) 540°
d) 1 080°
e) 630°

41. UFRGS 2016 Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura a seguir.



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de 40°, como indicado na figura.
Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

Texto complementar

Geometrias não euclidianas

As geometrias não euclidianas se baseiam na negação do quinto postulado de Euclides que questiona o conceito de paralelas. Entenderemos que o quinto postulado pode ser aceito como verdadeiro se considerarmos o nível plano, porém, se ele estiver em uma superfície não plana, pode perder validade. Afinal, o meio onde estamos tem suas porções planas e outras não planas e, para estas últimas, torna-se necessário explorar os conceitos matemáticos delas oriundas. [...]

Nikolai Lobachevsky (1792-1856) foi um matemático russo com uma ampla visão sobre o conhecimento matemático. Realizou estudos em vários campos da Matemática. A Geometria é um dos campos que foram seu objeto de estudo. [...] suas pesquisas alcançaram grandes destaques. Realizou investigações sobre o postulado das paralelas pelas quais assumiu a contradição em relação ao quinto postulado de Euclides e, com os conceitos elaborados, ampliou significativamente o campo da geometria.

[...] a geometria de Lobachevsky apresenta teoremas que introduzem conceitos na Matemática diferentes dos sistematizados na geometria euclidiana, nos conteúdos matemáticos que tratam sobre:

a) a disposição das retas paralelas;

b) a soma dos ângulos em triângulos e polígonos;

c) as áreas;

d) os polígonos inscritos e circunscritos na circunferência;

e) a semelhança e congruência de figuras;

f) a trigonometria;

g) o teorema de Pitágoras;

h) as medições do círculo e suas partes.

[...]

Pouco tempo antes, porém sem publicar o resultado dos estudos, o matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) chegara aos mesmos resultados a que Lobachevsky chegaria em um futuro próximo. Dessa forma, a Geometria Hiperbólica pode ser considerada criação de Lobachevsky e Bolyai.

Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão que também contribuiu de maneira significativa para a ampliação do conhecimento geométrico ao reunir em um corpo de doutrina outra Geometria não euclidiana oriunda dos estudos na superfície esférica, também denominada de elíptica. Suas investigações foram diferentes das de Bolyai e Lobachevsky. Enquanto estes dois últimos criaram uma nova geometria com um postulado sobre paralelas diferente do postulado das paralelas de Euclides, segundo Gilberto Geraldo Garbi, no livro *A Rainha das Ciências*, Riemann caracterizou as geometrias por sua métrica, ou seja, a maneira como a distância entre dois pontos infinitamente próximos é expressa em função das diferenças de coordenadas daqueles pontos. Com seus estudos, Riemann concluiu ser possível criar quantas geometrias quisermos. [...]

Riemann introduziu o conceito de espaços com mais do que três dimensões, definindo espaços curvos e relacionando sua curvatura com o cálculo de distâncias. Para Riemann, as superfícies podem ser formadas por curvas. [...]

Na Geometria de Riemann, é possível construir geometrias:

- em que uma reta seja limitada;
- em que as perpendiculares a uma reta passam por um só ponto;
- sobre uma esfera em que as perpendiculares passam por dois pontos diametralmente opostos;
- em que duas perpendiculares a uma mesma reta sempre se cruzam.

Investigou e propôs que, por um ponto do plano, não se pode traçar nenhuma reta paralela a uma reta dada. Essa hipótese tem sua validade na superfície esférica, e o enunciado do axioma que contraria o quinto postulado de Euclides, conforme Lázaro Coutinho, no livro *Convite às Geometrias Não Euclidianas*, é: “Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro”.

O postulado da Geometria Hiperbólica e o da Geometria Elíptica que contrariam o quinto postulado de Euclides representam o fundamento que provocou mudanças em conceitos geométricos. Embora esses postulados difiram apenas do postulado das paralelas da Geometria Euclidiana, é a partir deles que outros tantos teoremas surgem. [...]

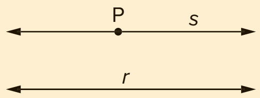
CRUZ, Donizete Gonçalves da; SANTOS, Carlos Henrique dos. Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas – Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio. *Portal Educacional do Estado do Paraná*, [s.d.]. Disponível em: www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-8.pdf. Acesso em: 1º ago. 2022 (Adapt.).

Principais diferenças entre as geometrias

Em relação ao postulado das paralelas:

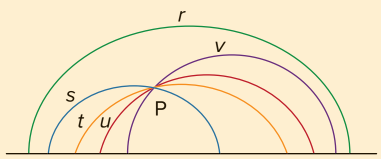
Geometria Euclidiana

“Por um ponto P fora de uma reta *r*, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a *r*.”



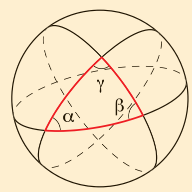
Geometria Hiperbólica

“Por um ponto P fora de uma reta *r*, existem infinitas retas que passam pelo ponto P e são paralelas a *r*.”

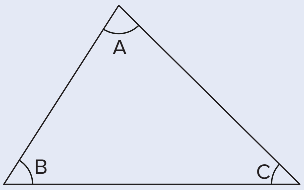
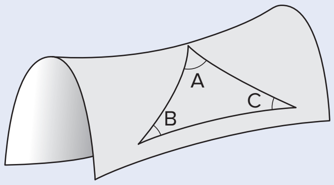
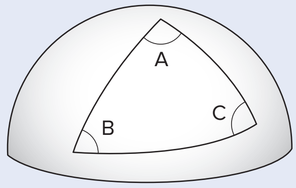


Geometria Elíptica

“Por um ponto P fora de uma reta *r*, não existe reta que passe pelo ponto P e seja paralela a *r*.”



Em relação à curvatura e à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo:

Geometria Euclidiana (curvatura nula)	Geometria Hiperbólica (curvatura negativa)	Geometria Elíptica (curvatura positiva)
		
$A + B + C = 180°$	$A + B + C < 180°$	$A + B + C > 180°$

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Os entes primitivos da Geometria são o ponto, a reta e o plano. Todas as demais figuras geométricas podem ser definidas a partir deles.

- **Figuras congruentes** possuem mesma forma e mesmo tamanho.
- **Figuras semelhantes** têm mesma forma, mas tamanhos diferentes.
- **Figuras equivalentes** podem apresentar formas diferentes, mas, necessariamente, têm mesmo tamanho.

De acordo com os **postulados de Euclides** para a Geometria Plana, é permitido:

1. traçar um segmento de reta unindo dois pontos.
2. prolongar um segmento de reta na direção em que ele se encontra.
3. traçar uma circunferência conhecendo-se o seu centro e a medida de seu raio.
4. traçar uma reta que seja perpendicular a uma reta dada.
5. traçar uma reta que seja paralela a uma reta dada.

Os casos de **congruência de triângulos** são: LAL, LLL, ALA e LAA_o.

As transformações geométricas que conservam a congruência das figuras transformadas são denominadas **transformações isométricas**. São elas: a translação, a rotação e a reflexão.

- As translações conservam também o paralelismo entre os lados correspondentes das figuras transformadas.
- Se uma figura geométrica apresenta mais do que um eixo de simetria de reflexão (bilateral), então essa figura é, necessariamente, invariante por rotações com menos do que 360° em torno de seu centro, e o menor ângulo para essas rotações é dado por $\theta = \frac{360}{n}$, sendo *n* o número de eixos de simetria da figura.
- O eixo de simetria de um segmento de reta é chamado de mediatriz do segmento.
- O eixo de simetria de um ângulo recebe o nome de bissetriz do ângulo.

Quadriláteros:

- Os paralelogramos são quadriláteros que possuem os lados opostos congruentes e paralelos entre si.
- Os losangos são os paralelogramos que apresentam todos os lados congruentes.
- Os retângulos são os paralelogramos que têm todos os ângulos congruentes.
- Os quadrados são os paralelogramos que possuem tanto as propriedades dos losangos quanto as dos retângulos.

Ângulos:

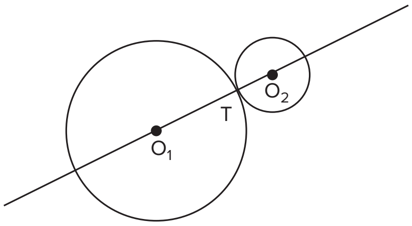
- Os **ângulos retos** medem 90°, os **agudos** têm medidas entre 0° e 90°, e os **obtusos** medem entre 90° e 180°.
- Dois **ângulos adjacentes** apresentam um lado em comum.
- As medidas de dois **ângulos complementares** somam 90°.
- As medidas de dois **ângulos suplementares** somam 180°.
- No cruzamento de duas retas, os ângulos **opostos pelo vértice** (o.p.v.) são congruentes, e os ângulos adjacentes são suplementares.
- Nos cruzamentos de duas retas paralelas com uma transversal, os pares de ângulos **correspondentes, alternos internos** e **alternos externos** são congruentes, e os pares de ângulos **colaterais internos** e **colaterais externos** são suplementares.

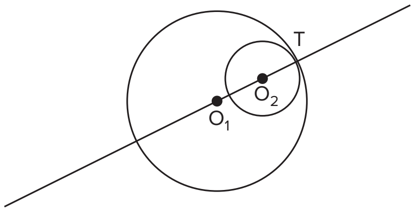
Triângulos:

- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer equivale a 180°.
- A medida de cada ângulo externo de um triângulo equivale à soma das medidas dos dois ângulos internos do triângulo que não lhe são adjacentes.
- Os ângulos da base de um triângulo, ou de um trapézio isósceles, são congruentes.

Circunferências e círculos:

- O comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi \cdot r$.
- A área de um círculo de raio r é dada por $A = \pi \cdot r^2$.
- Se duas circunferências são tangentes, então a distância entre seus centros é igual à soma ou à diferença das medidas de seus raios.





- A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo.
- A medida de um ângulo circunscrito a uma circunferência é igual ao suplemento da medida do arco da circunferência contido na região convexa do ângulo.

Polígonos:

Um polígono convexo com n lados também possui:

- n vértices;
- $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonais;
- n ângulos internos cuja soma das medidas é $(n-2) \cdot 180°$;
- n ângulos externos cuja soma das medidas é $360°$.

Os polígonos cujos lados têm o mesmo comprimento são chamados de **equiláteros**.
Os polígonos cujos ângulos internos têm a mesma medida são denominados **equiângulos**, e essas medidas são expressas por:

- Medida de cada ângulo externo: $e = \dfrac{360°}{n}$.
- Medida de cada ângulo interno: $i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.

Um polígono é **regular** se, e somente se, for um polígono **equilátero** e **equiângulo**.
Todo polígono **regular** é inscritível em uma circunferência.

Quer saber mais?

Livro

BICUDO, Irineu. *Os elementos*. São Paulo: Unesp, 2009.

Publicada pela Editora Unesp, é a primeira tradução completa para o português, feita pelo professor Irineu Bicudo, da obra de Euclides, originalmente escrita em grego. É composta de 13 livros que trazem, além de definições, postulados e axiomas, demonstrações de proposições referentes à Geometria Euclidiana. Os seis primeiros livros tratam da Geometria Plana; os três seguintes, da teoria dos números; o décimo, e mais complexo, estuda os números irracionais; e os três últimos abordam a Geometria Espacial.

Sites

KILHIAN, Kleber. Arcos de Circunferência. *O baricentro da mente*, 27 set. 2014. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2014/09/arcos-de-circunferencia.html.

Registros sobre arcos, cordas e ângulos na circunferência aparecem ao longo da história, desde a Grécia antiga, ressaltando a importância de suas aplicações, inicialmente nos estudos da Astronomia e, depois, em inúmeras outras aplicações, como a Trigonometria. No texto, conheça um pouco mais sobre os conceitos, notação e unidades envolvidas. Acesso em: 1 ago. 2022.

SANTOMAURO, Beatriz. Geometria das transformações. *Nova escola*, 1º mar. 2011. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/2711/geometria-das-transformacoes.

O texto visa a colaborar no desenvolvimento da percepção espacial e na utilização de uma linguagem própria da área na representação de imagens. Busca também reforçar conceitos já vistos e ajudar na assimilação de outros que serão estudados ao longo de seu curso. Acesso: 1 ago. 2022.

EQUIPE COM – OBMEP. Um pouco sobre polígonos. *Clubes de Matemática da OBMEP*. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/um-pouco-sobre-poligonos-poligonos-uma-primeira-definicao-2/.

O texto reforça de maneira lúdica e simples os conceitos sobre polígonos, seus elementos, notação e classificação. Acesso em: 1 ago. 2022.

Exercícios complementares

1. O radiano (rad) é uma unidade de medida angular tal que 1 rad equivale a, aproximadamente, 57°17'45". Qual é a medida aproximada, em graus, minutos e segundos, de um ângulo de 3,14 rad?

2. Calcule, em graus e minutos, a medida do ângulo descrito pelo ponteiro das horas de um relógio durante o tempo de 135 minutos.

3. João adquiriu um *software* capaz de calcular a área de um terreno poligonal a partir dos comprimentos de seus lados e das inclinações desses lados em relação a determinado referencial. Denominadas azimutes, essas inclinações costumam ser expressas nas plantas e escrituras dos terrenos em graus, minutos e segundos, mas deveriam ser digitadas apenas em graus no *software*. Assim, um azimute igual a 124°30', por exemplo, deveria ser digitado como 124,5°.
João consultou os valores indicados na planta de seu terreno poligonal, digitou-os no *software* e percebeu um erro considerável no valor da área obtido.
O erro aconteceu porque João tomou os algarismos que indicavam os minutos e os segundos dos azimutes indicados na planta como os algarismos das quatro primeiras casas decimais desses valores em graus. Assim, o azimute 216°21'45" acabou sendo digitado como 216,3245°.
Se esse azimute tivesse sido digitado corretamente, qual seria a soma dos quatro algarismos digitados?

4. Sobre a superfície de uma parede plana, foram pintadas duas linhas retas, *r* e *s*, uma no alto da parede e outra mais baixa. As linhas pintadas deveriam ter ficado paralelas, mas o pintor desconfiou de que elas não ficaram. Para ter certeza disso, ele traçou uma reta vertical intersectando as duas linhas já pintadas e mediu os ângulos colaterais internos formados à direita da reta vertical. Então, confiando nos resultados das medições, ele concluiu corretamente que os prolongamentos das linhas *r* e *s* deverão se intersectar em um ponto situado à esquerda da reta vertical.
Sendo *x* e *y* as medidas angulares encontradas pelo pintor, pode-se concluir que:

a) $x + y = 180°$
b) $x + y < 180°$
c) $x + y > 180°$
d) $x > 90°$ e $y > 90°$
e) $x < 90°$ e $y < 90°$

5. Um quadrilátero ABCD de diagonal $\overline{AC}$ é tal que os triângulos ABC e ACD são escalenos. Além disso, sabe-se que quadrilátero não possui lados paralelos, de modo que os prolongamentos dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se intersectam em um ponto P. Se as medidas *x* e *y* dos ângulos internos de vértices A e B desse quadrilátero forem tais que $x + y < 180°$, então a área do triângulo PAC será, necessariamente, menor do que a área do triângulo:

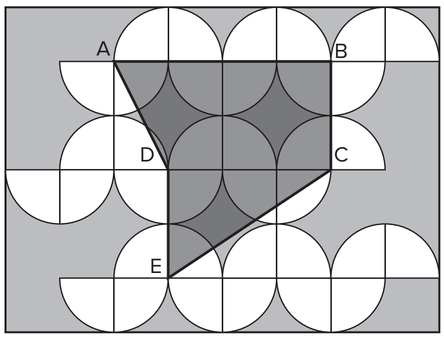
a) PCD
b) BCD
c) ACD
d) ABC
e) PBA

6. Os irmãos Ana, Beto, Carlos e Diana dividiram uma *pizza* retangular em quatro pedaços desiguais:

- Ana ganhou um pedaço equivalente ao dobro do pedaço de Beto.
- Beto ganhou um pedaço equivalente ao dobro do pedaço de Carlos.
- Carlos ganhou um pedaço equivalente ao dobro do pedaço de Diana.

Se todos os cortes foram feitos na direção do centro da *pizza* e não sobrou nenhum pedaço, então qual a medida do ângulo correspondente ao pedaço de Ana?

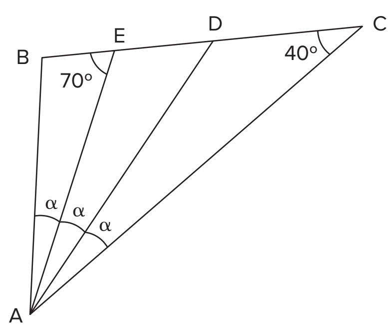
7. UnB-DF 2019 (Adapt.) A figura a seguir mostra um quadro em estilo geométrico-abstrato composto por vários semicírculos congruentes, de 5 cm de raio.



Desconsiderando as dimensões das linhas na figura, julgue os itens a seguir como certo ou errado.

a) A área do quadro é inferior a 1 100 cm^2.
b) O perímetro do polígono ABCEDA, destacado na figura, é superior a 68 cm.
c) A área do polígono ABCEDA, destacado na figura, é inferior a 245 cm^2.
d) No triângulo CDE, a medida do ângulo $D\hat{E}C$ é maior que a medida do ângulo $D\hat{C}E$.
e) O segmento de reta $\overline{AE}$ mede menos que 21 cm.

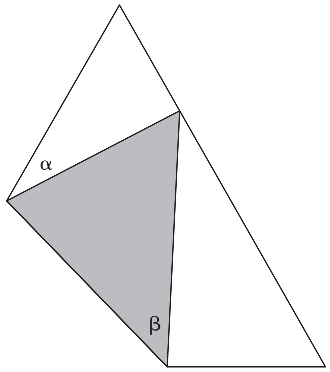
8. EEAR-SP 2017



Se ABC é um triângulo, o valor de α é

a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°

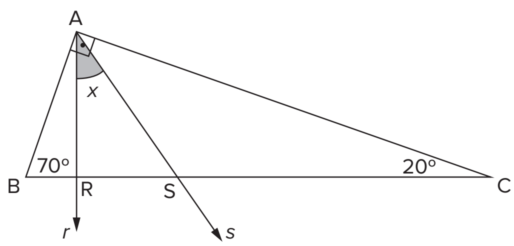
9. Um pedaço de cartolina, branco de um lado e cinza do outro, tem a forma de triângulo equilátero e foi dobrado de modo que um de seus vértices encontre o lado oposto, como mostra a figura.



Sendo α e β as medidas em radianos dos ângulos indicados na figura, calcule o valor de $6\beta - 3\alpha$.

10. Em um trapézio isósceles ABCD, a base menor $\overline{BC}$ tem a mesma medida que os lados não paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; e a base maior $\overline{AD}$ tem a mesma medida que a diagonal $\overline{AC}$. Encontre as medidas dos ângulos internos desse trapézio.

11. Seja x a medida, em graus, do ângulo formado pelas semirretas r e s de origem no vértice A do triângulo retângulo ABC, como mostra a figura.



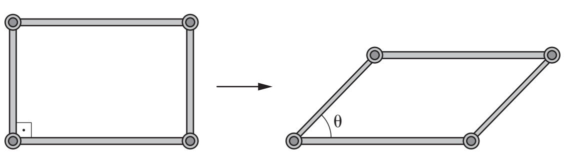
Sendo R e S os pontos em que as semirretas r e s intersectam a hipotenusa $\overline{BC}$ e sabendo que o menor ângulo agudo do triângulo mede 20°, calcule x nos seguintes casos:

a) $\overline{AR}$ é altura, e $\overline{AS}$ é bissetriz interna do $\triangle ABC$.

b) $\overline{AR}$ é altura, e $\overline{AS}$ é mediana do $\triangle ABC$.

c) $\overline{AR}$ é bissetriz interna, e $\overline{AS}$ é mediana do $\triangle ABC$.

12. Fuvest-SP 2020 Um objeto é formado por 4 hastes rígidas conectadas em seus extremos por articulações, cujos centros são os vértices de um paralelogramo. As hastes movimentam-se de tal forma que o paralelogramo permanece sempre no mesmo plano. A cada configuração desse objeto, associa-se θ, a medida do menor ângulo interno do paralelogramo. A área da região delimitada pelo paralelogramo quando $\theta = 90°$ é A.



Para que a área da região delimitada pelo paralelogramo seja $\frac{A}{2}$, o valor de θ é, necessariamente, igual a

a) 15°

b) 22,5°

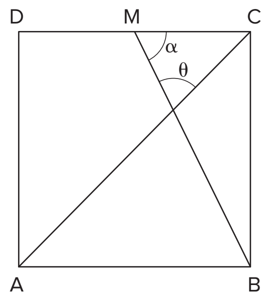
c) 30°

d) 45°

e) 60°

13. Sendo P um ponto do interior do triângulo ABC tal que os ângulos $P\hat{B}A$ e $P\hat{C}A$ medem 30° e 50° respectivamente, determine a diferença entre as medidas dos ângulos $B\hat{P}C$ e $B\hat{A}C$.

14. Unicamp-SP 2021 A figura abaixo exibe um quadrado ABCD em que M é o ponto médio do lado $\overline{CD}$.



Com base na figura, $\text{tg}(\theta) + \text{tg}(\alpha)$ é igual a

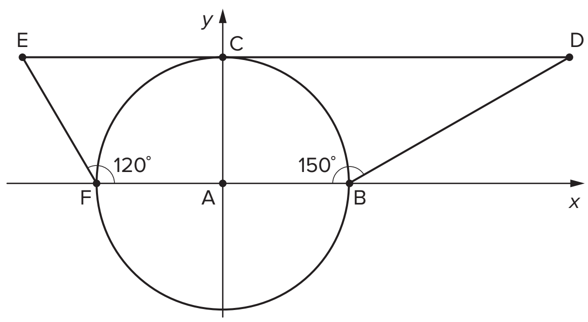
a) 7.

b) 6.

c) 5.

d) 4.

15. FICSAE-SP 2017 Os pontos B e F são extremidades da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 81$ e o segmento $\overline{DE}$ é tangente à circunferência dada no ponto C(0, 9).



No trapézio BDEF o ângulo F mede 120° e o ângulo B mede 150°, conforme mostra a figura. A área do trapézio BDEF vale:

a) $27(3\sqrt{3} - 1)$.

b) $54(2\sqrt{3} - 1)$.

c) $27(2\sqrt{3} + 3)$.

d) $54(\sqrt{3} + 3)$.

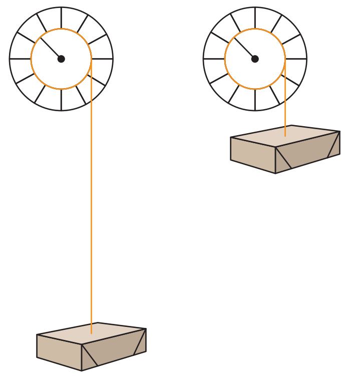
16. Qual o número inteiro que mais se aproxima da medida em metros:

a) do raio de uma circunferência cujo comprimento total é de 62,8 m?

b) de um arco com 90° de uma circunferência cujo raio é 7 m?

c) do raio de uma circunferência na qual um arco de 300° tem 2 km de comprimento?

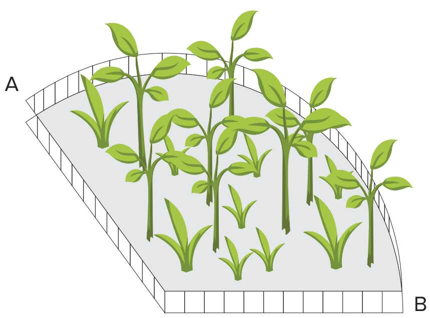
17. **FICSAE-SP 2021** A imagem descreve o içamento de uma caixa por meio de uma corda fixada a ela e a uma roda circular de raio $r = 30$ cm.



Considerando desprezível a espessura da corda durante todo o içamento, que foi concluído após um giro $\frac{12\pi}{5}$ de radianos da roda, o deslocamento vertical da caixa foi de, aproximadamente,

a) 7,85 m.
b) 7,54 m.
c) 2,26 m.
d) 3,77 m.
e) 2,51 m.

18. A figura a seguir representa um canteiro de plantas que foi cercado colocando-se uma estaca por metro ao longo de todo o seu contorno.



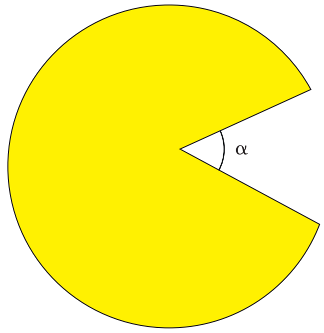
Sabendo que o canteiro tem a forma de um setor circular de raio 14 m e ângulo central de 135°, determine:

a) o comprimento aproximado do arco $\overset{\frown}{AB}$.
b) quantas estacas foram usadas.

19. **IME-RJ 2019** Em um setor circular de 45°, limitado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ iguais a R, inscreve-se um quadrado MNPQ, onde $\overline{MN}$ está apoiado em $\overline{OA}$ e o ponto Q sobre o raio $\overline{OB}$. Então, o perímetro do quadrado é:

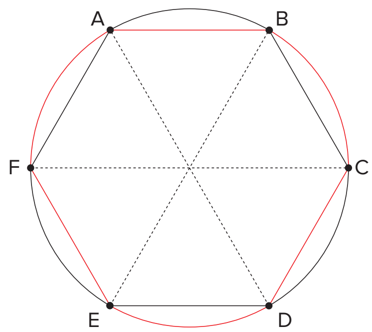
a) 4R.
b) 2R.
c) $2R\sqrt{2}$.
d) $4R\sqrt{5}$.
e) $4R\frac{\sqrt{5}}{5}$.

20. Um famoso personagem dos jogos eletrônicos da década de 1970 tinha o formato de um setor circular com apenas 0,5 cm de raio e 3,5 cm de perímetro.



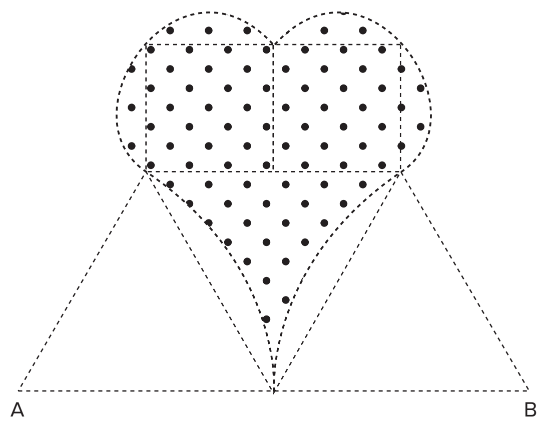
Determine a medida aproximada do ângulo α.

21. Um circuito de corridas ABCDEF é formado por três arcos e três cordas de uma mesma circunferência que circunscreve um hexágono regular, como mostra a figura a seguir.



Se o raio dessa circunferência mede 100 m, determine o comprimento aproximado do circuito.

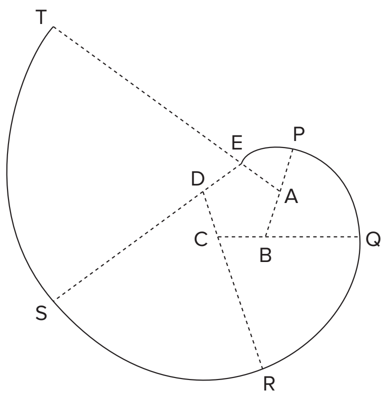
22. No dia do seu aniversário de casamento, João resolveu fazer uma surpresa para sua esposa cobrindo o jardim de sua casa com flores cercadas por um enfeite constituído de uma série de pequenas lâmpadas ligadas por um fio. João fez com que esse fio formasse o contorno de um coração, de acordo com a figura a seguir, que apresenta dois quadrados com 1,5 m de lado e três triângulos equiláteros congruentes entre si.



Sabendo que o fio dá apenas uma volta no coração, que é formado por quatro arcos de circunferência, tais que duas delas têm seus centros nos centros de cada um dos quadrados e as outras duas têm centros nos pontos A e B, o número inteiro mais próximo do comprimento, em metros, da parte do fio que contorna todo o coração é:

a) 7
b) 10
c) 13
d) 26
e) 29

23. A espiral regular de cinco centros é construída, com régua e compasso, a partir dos vértices de um pentágono regular, ABCDE, como mostra a figura a seguir.



Primeiro, usamos a régua para prolongar os lados do pentágono. Depois, usamos o compasso para traçar os seguintes arcos:

- $\overset{\frown}{EP}$ de centro no ponto A.
- $\overset{\frown}{PQ}$ de centro no ponto B.
- $\overset{\frown}{QR}$ de centro no ponto C.
- $\overset{\frown}{RS}$ de centro no ponto D.
- $\overset{\frown}{ST}$ de centro no ponto E.

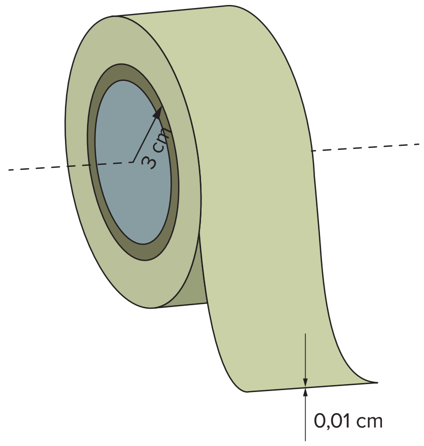
Se o lado do pentágono regular ABCDE mede 1 cm, o comprimento total da espiral desenhada é de:

a) 2π cm.
b) 3π cm.
c) 4π cm.
d) 5π cm.
e) 6π cm.

24. **Unig-RJ 2020** Um carrinho de controle remoto dá, numa pista circular de 60 cm de diâmetro, 4 voltas em 12 segundos, e um outro, numa pista circular de 70 cm de raio, 5 voltas em 10 segundos, mantendo ambos suas velocidades constantes. Nessas condições, pode-se concluir que, enquanto o carrinho mais lento dá 20 voltas, a distância percorrida pelo outro carrinho é igual, em cm, a

a) $4\,200\pi$
b) $2\,800\pi$
c) $2\,100\pi$
d) $1\,200\pi$
e) 600π

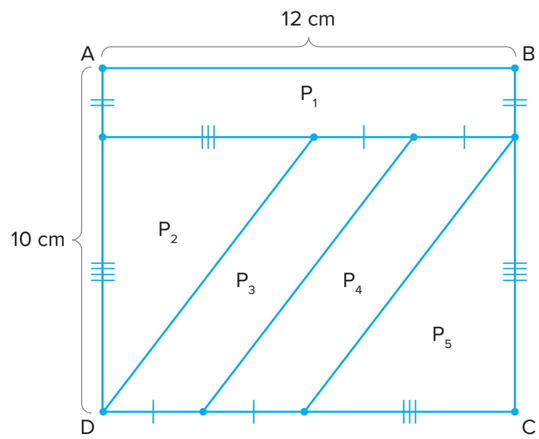
25. **Fuvest-SP 2020** O cilindro de papelão central de uma fita crepe tem raio externo de 3 cm. A fita tem espessura de 0,01 cm e dá 100 voltas completas. Considerando que, a cada volta, o raio externo do rolo é aumentado no valor da espessura da fita, o comprimento total da fita é de, aproximadamente,



Note e adote: $\pi = 3{,}14$.

a) 9,4 m.
b) 11,0 m.
c) 18,8 m.
d) 22,0 m.
e) 25,1 m.

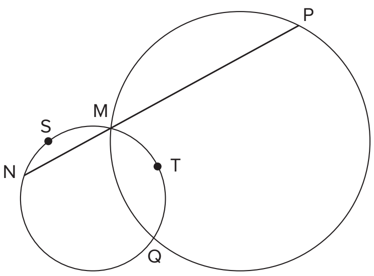
26. **FICSAE-SP 2020** Uma peça retangular ABCD, de 10 cm por 12 cm, será dividida em cinco peças, como indica a figura, em que segmentos com as mesmas marcações têm comprimentos iguais. P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 indicam os perímetros das cinco peças, em centímetros.



Sabendo-se que as cinco peças têm áreas iguais, a soma dos seus perímetros é igual a

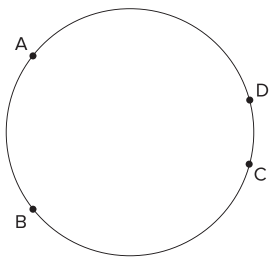
a) 140 cm.
b) 132 cm.
c) 124 cm.
d) 142 cm.
e) 128 cm.

27. Na figura a seguir, os arcos $\overset{\frown}{QMP}$ e $\overset{\frown}{MTQ}$ medem, respectivamente, 170° e 130°.



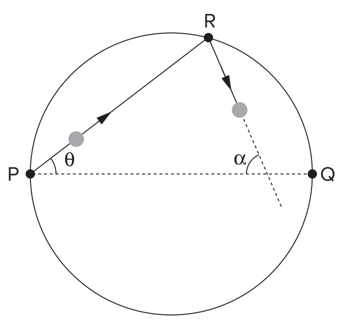
Determine a medida do arco $\overset{\frown}{MSN}$.

28. A figura a seguir apresenta uma circunferência e quatro de seus pontos: A, B, C e D. Nessa circunferência, o menor arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 80°, e o menor arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 10°.



Sabendo que as retas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se intersectam no ponto P, e as retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se intersectam no ponto Q, calcule as medidas, em graus, dos ângulos agudos de vértices P e Q, determinados pelas retas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

29. Fuvest-SP 2016 Uma bola de bilhar, inicialmente em repouso em um ponto P, situado na borda de uma mesa de bilhar com formato circular, recebe uma tacada e se desloca em um movimento retilíneo. A bola atinge a borda no ponto R e é refletida elasticamente, sem deslizar. Chame de Q o ponto da borda diametralmente oposto a P e de θ a medida do ângulo $Q\hat{P}R$.



a) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será paralela ao diâmetro $\overline{PQ}$?

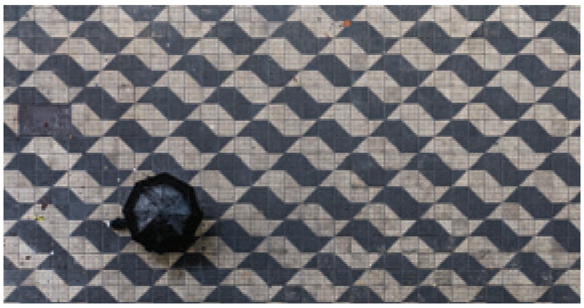
b) Para qual valor de θ, após a primeira reflexão, a trajetória da bola será perpendicular a $\overline{PQ}$?

c) Supondo agora que $30° < \theta < 60°$, encontre uma expressão, em função de θ, para a medida α do ângulo agudo formado pela reta que contém P e Q e pela reta que contém a trajetória da bola após a primeira reflexão na borda.

30. ITA-SP 2021 Seja A um ponto externo a uma circunferência λ de centro O e raio r. Considere uma reta passando por A e secante a λ nos pontos C e D tal que o segmento $\overline{AC}$ é externo a λ e tem comprimento igual a r. Seja B o ponto de λ tal que O pertence ao segmento $\overline{AB}$. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 10°, então a medida do ângulo $B\hat{O}D$ é igual a

a) 25° **b)** 30° **c)** 35° **d)** 40° **e)** 45°

31. A imagem a seguir é de uma calçada da Avenida Paulista, na cidade de São Paulo. O mosaico presente nessa calçada, que imita o formato do estado de São Paulo, pode ser obtido usando-se peças de cerâmica quadradas que são completamente brancas ou completamente pretas ou, ainda, metade brancas e metade pretas.



Antonio Salaverry/Shutterstock.com

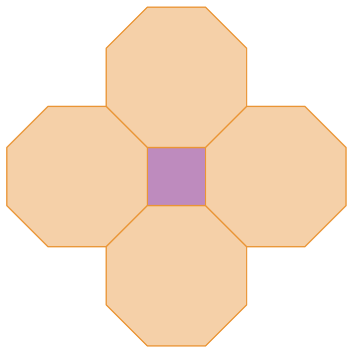
a) Como pode ser classificado o polígono que representa o formato do estado de São Paulo na calçada?

b) Qual é o valor do maior ângulo interno desse polígono?

c) Quanto vale a soma das medidas de todos os ângulos internos desse polígono?

d) Sabendo que os lados das peças quadradas de cerâmica que compõem esse mosaico medem 20 cm cada, determine o perímetro aproximado desse polígono que representa o formato do estado de São Paulo.

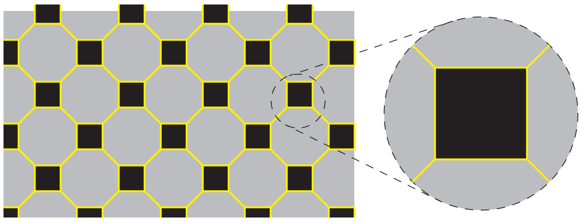
32. FGV-SP 2020 Um polígono regular de x lados está perfeitamente cercado por polígonos regulares idênticos de y lados, sem sobreposições ou espaços livres. Por exemplo, a figura mostra a situação descrita para o caso em que $x = 4$ e $y = 8$.



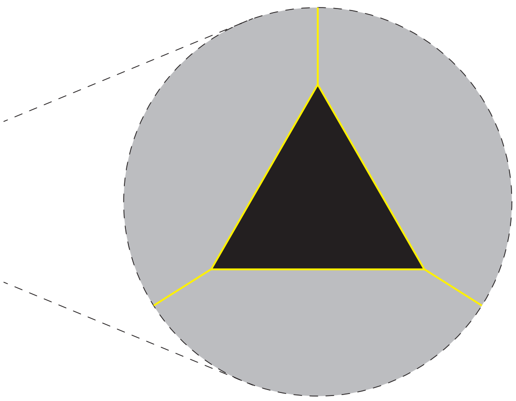
A soma dos valores de y para os casos em que $x = 3$ e $x = 10$ é

a) 11. **b)** 15. **c)** 17. **d)** 18. **e)** 19.

33. A figura a seguir mostra um piso de cerâmica composto de peças em forma de polígonos regulares de dois tipos diferentes, em que as peças menores são quadradas e as maiores são octogonais.



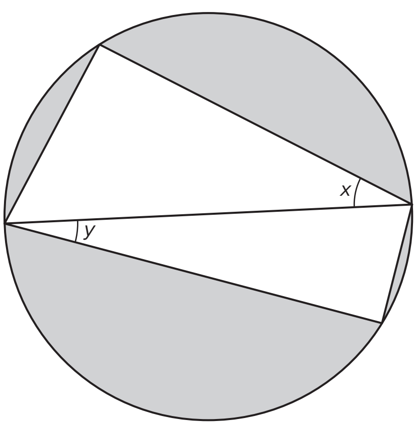
Um segundo piso também é composto de peças de dois tipos diferentes de polígonos regulares e segue o mesmo princípio de distribuição, porém as peças menores desse segundo piso têm a forma de triângulos equiláteros, como mostra o detalhe a seguir.



De acordo com os princípios geométricos formadores desses pisos, as peças maiores do segundo piso têm a forma de:

a) hexágonos regulares.
b) heptágonos regulares.
c) eneágonos regulares.
d) decágonos regulares.
e) dodecágonos regulares.

34. Fuvest-SP 2018 O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio 1. A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.

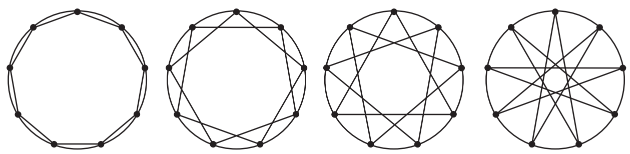


Sendo x e y as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de x e y, é:

a) $\pi + \text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)$.
b) $\pi - \text{sen}(2x) - \text{sen}(2y)$.
c) $\pi - \cos(2x) - \cos(2y)$.
d) $\pi - \dfrac{\cos(2x) + \cos(2y)}{2}$.
e) $\pi - \dfrac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)}{2}$.

35. Considere a figura de um pentágono regular ABCDE e um ponto P em seu interior, de modo que $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tenham o mesmo comprimento e o ângulo $A\hat{P}B$ tenha 40°. Considere também que, pelo ponto P, passa uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ desse pentágono, intersectando os lados $\overline{DE}$ e $\overline{CD}$ nos pontos Q e R, respectivamente.
Nessas condições, encontre as medidas de todos os ângulos internos do quadrilátero EAPQ determinado por essa figura.

36. Dados n pontos que dividem uma circunferência em partes iguais, podemos obter formas geométricas poligonais e regulares ligando esses pontos por meio de segmentos de diversas maneiras. Cada uma dessas maneiras é designada por um número p, chamado de passo de ligação. As figuras a seguir apresentam circunferências divididas em partes iguais por 9 pontos ligados com passos 1, 2, 3 e 4.



$p = 1$ $\quad$ $p = 2$ $\quad$ $p = 3$ $\quad$ $p = 4$

Calcule as medidas dos ângulos determinados nos vértices de cada uma dessas figuras.

37. ITA-SP 2021 Seja ABCD um quadrilátero convexo com diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Considere as afirmações:

I. Se as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ têm mesmo comprimento e se intersectam ortogonalmente, então ABCD é um losango.

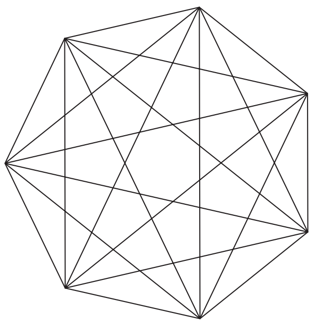
II. Se as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ dividem o quadrilátero ABCD em quatro triângulos de mesma área, então ABCD é um paralelogramo.

III. Se o ponto de interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é o centro do círculo que circunscreve o quadrilátero ABCD, então ABCD é um retângulo.

É(são) verdadeira(s):

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) apenas II e III.

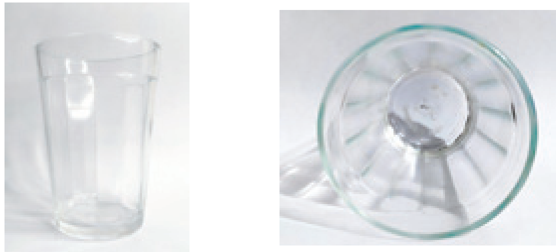
38. A teoria dos grafos é uma estrutura matemática usada para representar mapas rodoviários, sistemas de distribuição de água, hierarquia de cargos em uma empresa ou mesmo para estudar o relacionamento social entre pessoas etc. Ela tem muita relação com a Geometria. Por exemplo, o número máximo de ligações que podem existir entre dois dos n elementos de determinado conjunto G pode ser observado geometricamente, de modo que cada ligação entre os elementos de G seja representada por um lado ou por uma diagonal de um polígono convexo P com n lados.



Sendo $y = f(n)$ a função que expressa esse número máximo de ligações entre os n vértices de um polígono regular e sabendo que existem coeficientes reais a, b e c tais que $f(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$, determine:

a) os valores dos coeficientes a, b e c.
b) o conjunto domínio da função f.
c) os valores de n para $y = 28$ e para $y = 32$.

39. Uma das etapas da produção do copo americano tradicional consiste na determinação de um tetradecágono regular (14 lados).



Fernanda Bitencourt

a) Quantas diagonais de um tetradecágono regular não passam pelo centro do polígono?
b) Nomeando, em ordem alfabética, os vértices consecutivos de um tetradecágono regular de centro O com as letras A, B, C, ..., qual será a medida aproximada, em graus, dos ângulos $A\hat{O}F$ e $F\hat{A}C$?

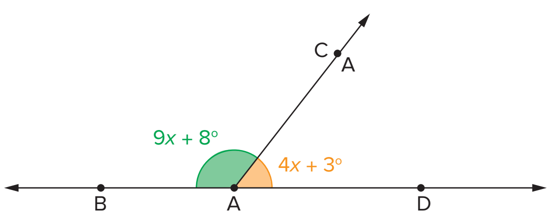
40. Assinale V (verdadeira) ou F (falsa) para cada uma das seguintes afirmações:

- ☐ A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a 360°.
- ☐ A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.
- ☐ A soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é 720°.
- ☐ O hexágono regular tem exatamente 9 diagonais.
- ☐ O pentadecágono regular tem 50 lados.
- ☐ Todo hexágono convexo que pode ser inscrito em uma circunferência é regular.
- ☐ O ângulo externo do octógono regular mede 45°.
- ☐ Todo quadrilátero equilátero é quadrado.
- ☐ A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular pode ser igual a 14π radianos.
- ☐ Existe polígono convexo com exatamente 40 diagonais.

BNCC em foco

EM13MAT301

1. Observando a imagem abaixo e sabendo que os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ são suplementares, as medidas desses ângulos são, respectivamente, iguais a:



a) 95° e 85°.
b) 105° e 75°.
c) 115° e 65°.
d) 125° e 55°.
e) 13° e 13°.

EM13MAT201

2. Uma praça com formato circular será cercada para a realização de reformas. Para tanto, serão gastos R$ 12,40 por metro de cerca. Sabendo que o diâmetro dessa praça é de 36 metros, qual será o valor gasto com a cerca nessa reforma?

a) R$ 983,30
b) R$ 1401,70
c) R$ 1461,85
d) R$ 2803,40
e) R$ 852,30

EM13MAT302

3. Qualquer segmento de reta com extremidades em dois vértices de um polígono, que não seja um de seus lados, é chamado de diagonal do polígono.
Como é conhecido o polígono que possui 54 diagonais?

a) octógono
b) eneágono
c) decágono
d) undecágono
e) dodecágono

Teto com vitrais em espiral da Capela de Ação de Graças em Dallas, Texas. Foto de 2019.

FRENTE 3

CAPÍTULO

3

Teoria das proporções geométricas

As relações de proporcionalidade existentes entre as medidas das figuras geométricas sempre despertaram interesse nos estudiosos da Geometria. Essas relações nos permitem, por exemplo, deduzir grandezas em escalas inalcançáveis para a medição humana, como calcular o raio da Terra e a distância entre a Terra e a Lua.

Uma relação de proporcionalidade muito conhecida é a razão áurea, que, além de ser um conceito matemático, é considerada uma expressão de harmonia e beleza. As figuras cujas medidas se aproximam dessa relação de proporção eram consideradas formas perfeitas. A razão áurea está presente tanto na natureza como na arquitetura, em *design* e em obras de arte.

Razão de divisão de segmento

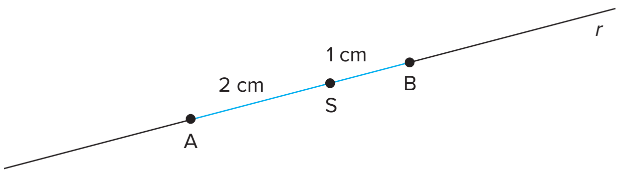
Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, dizemos que qualquer ponto S de $\overline{AB}$ divide o segmento na razão de AS para SB. Assim, se o ponto S não coincide com o ponto B, existe k real e positivo tal que $k = \frac{AS}{SB}$. Da mesma forma, se S não coincide com A, também existe k' real e positivo tal que $k' = \frac{BS}{SA}$.

De modo geral, podemos escolher qualquer extremidade de um segmento como referência para o denominador da razão de divisão. As razões k e k' são tais que $k \cdot k' = 1$.

Nos exemplos a seguir, a extremidade B foi escolhida como referência para o denominador da razão k de divisão do segmento $\overline{AB}$.

Exemplo 1:

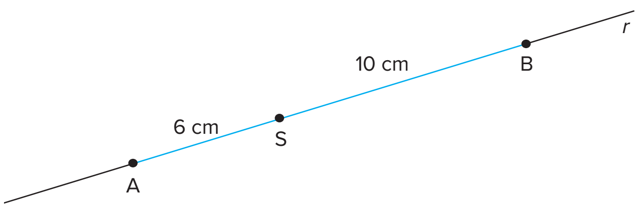
Se S está mais próximo de B, então $k > 1$.



$$k = \frac{AS}{SB} = \frac{2\text{ cm}}{1\text{ cm}} \Rightarrow k = 2$$

Exemplo 2:

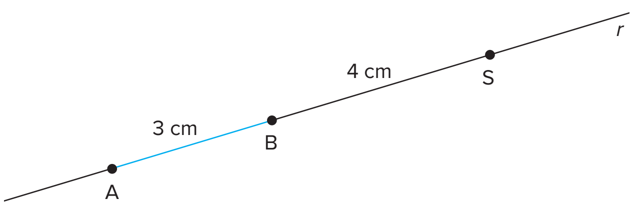
Se S está mais próximo de A, então $k < 1$.



$$k = \frac{AS}{SB} = \frac{6\text{ cm}}{10\text{ cm}} \Rightarrow k = \frac{3}{5}$$

Exemplo 3:

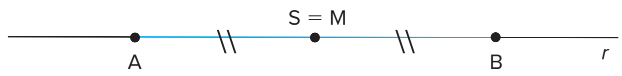
Também é possível que o ponto S esteja no prolongamento do segmento $\overline{AB}$.



$$k = \frac{AS}{SB} = \frac{7\text{ cm}}{4\text{ cm}} \Rightarrow k = \frac{7}{4}$$

Divisão média

Quando $k = 1$, dizemos que S é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$; por isso é comum usar a letra M para representar essa posição particular do ponto S.

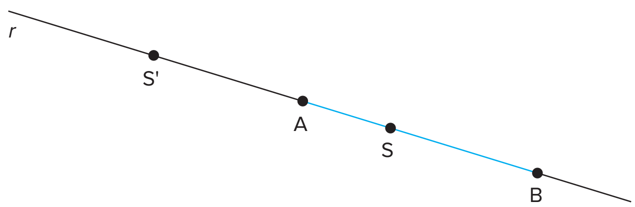


Assim, se M é o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, então: $MA = MB$.

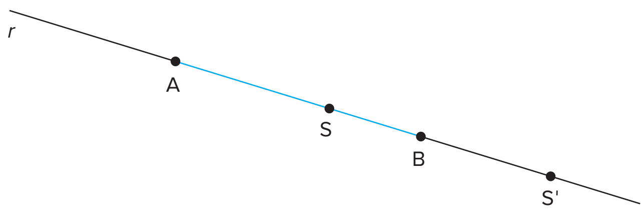
Divisão harmônica

Sempre que $k \neq 1$, a relação $k = \frac{AS}{SB}$ admite duas possibilidades para a posição do ponto S sobre a reta r: uma interior e outra exterior ao segmento $\overline{AB}$. Indicando essas posições por S e S', tem-se que $k = \frac{AS}{SB} = \frac{AS'}{S'B}$.

- $k < 1$:



- $k > 1$



Os pontos S e S' são chamados de conjugados harmônicos.

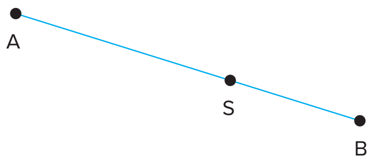
Divisão áurea

Particularmente, as divisões harmônicas internas e externas em que $k = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$ são chamadas de seções áureas, ou divisões de extrema razão. Já as constantes irracionais $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ e $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ são conhecidas como números áureos ou números de ouro. Seus valores (aproximadamente 0,618 e 1,618, respectivamente) costumam ser indicados pela letra grega ϕ (*phi*) e pela expressão $\frac{1}{\phi}$, não necessariamente nessa ordem. Assim, ao atribuir qualquer um desses valores à ϕ, o outro deverá ser $\frac{1}{\phi}$. Isto é:

- se $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0{,}618$, então $\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1{,}618$; e
- se $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1{,}618$, então $\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0{,}618$.

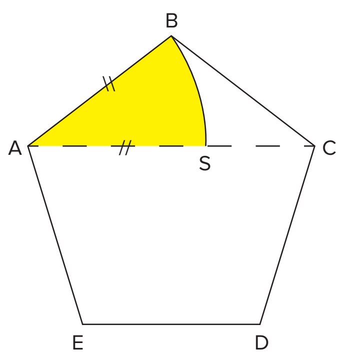
Assim, podem ser trocadas as atribuições dos valores ϕ e $\frac{1}{\phi}$ de acordo com a conveniência, a qual depende da intenção de se considerar a razão do menor para o maior segmento ou a razão do maior para o menor.

Então, considerando que um ponto S divide internamente um segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ de A para B, tem-se que o segmento $\overline{AS}$ deve ser maior que o segmento $\overline{SB}$, como mostra a figura a seguir:



Nesse caso, os comprimentos dos segmentos envolvidos seguem-se em ordem decrescente (AB > AS > SB) e a proporção existente entre esses comprimentos para que a divisão seja áurea é $\frac{AB}{AS} = \frac{AS}{SB}$. Desse modo, dizemos que $\overline{AS}$ é segmento áureo de $\overline{AB}$.

A razão áurea tem muitas aplicações no estudo da Geometria. Pode-se observar, por exemplo, que os comprimentos dos lados de um pentágono regular coincidem com o comprimento dos segmentos áureos de suas diagonais.

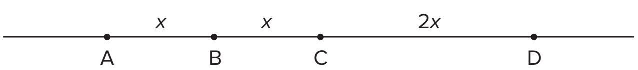


Exercícios resolvidos

1. Em uma reta *r* com os pontos A, B, C e D, nessa ordem, B é ponto médio de $\overline{AC}$, e C é ponto médio de $\overline{AD}$. Se BD = 30 cm, quais são as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$?

Resolução:

Como B é ponto médio de $\overline{AC}$, então AB = BC.
Como C é ponto médio de $\overline{AD}$, então AC = CD.
Assim, sendo x a medida do segmento $\overline{AB}$:



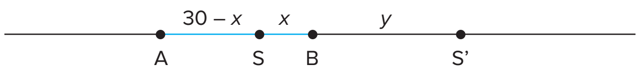
Como BD = 30 cm, então $x + 2x = 30$ cm $\Rightarrow x = 10$ cm.
Portanto, AB = 10 cm, AC = 20 cm e AD = 40 cm.

2. Dado um segmento $\overline{AB}$ com 30 cm de comprimento, qual é a distância entre os conjugados harmônicos desse segmento para $k = 3$?

a) 7,5 cm.
b) 15 cm.
c) 22,5 cm.
d) 37,5 cm.
e) 40 cm.

Resolução:

Sejam S e S' os conjugados harmônicos interior e exterior.



Se x é a medida em centímetros do segmento $\overline{BS}$, então:

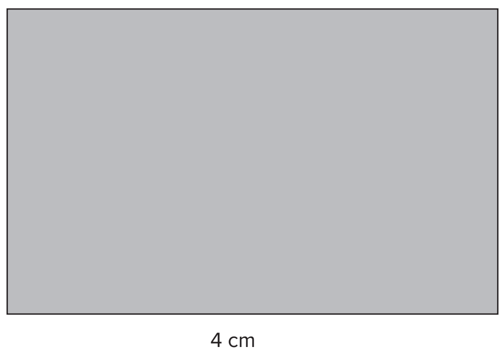
$$\frac{AS}{BS} = 3 \Rightarrow \frac{30 - x}{x} = 3 \Rightarrow x = 7{,}5$$

Se y é a medida em centímetros do segmento $\overline{BS'}$, então:

$$\frac{AS'}{BS'} = 3 \Rightarrow \frac{30 + y}{y} = 3 \Rightarrow y = 15$$

Logo, SS' = BS + BS' = 7,5 + 15 = 22,5.
Ou seja, SS' mede 22,5 cm.
Resposta: alternativa C.

3. Sabendo que os lados do retângulo a seguir, cuja base mede 4 cm, estão em proporção áurea, determine o comprimento da altura dessa figura.



Resolução:

Sendo x o comprimento, em centímetros, da altura do retângulo e considerando que a altura dele é menor do que a base, temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x\left(\sqrt{5}+1\right) = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{5}+1}$$

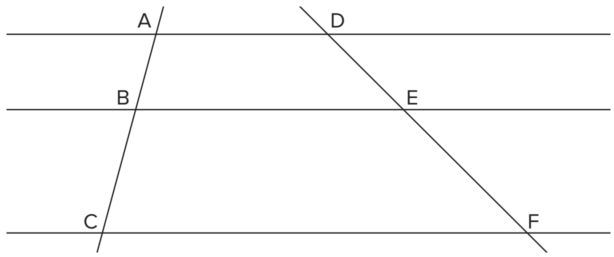
Racionalizando o denominador dessa fração, obtemos:

$$x = \frac{8}{\left(\sqrt{5}+1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{8\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1} = \frac{8\left(\sqrt{5}-1\right)}{4} =$$
$$= 2\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Teorema de Tales

Entre os teoremas mais importantes que tratam de segmentos proporcionais, o mais conhecido é, certamente, o teorema de Tales. Seu enunciado clássico é:

> Se um feixe de retas paralelas é intersectado por duas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.



$$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Em outros termos, esse teorema garante que o ponto B divide o segmento $\overline{AC}$ na mesma razão que o ponto E divide o segmento $\overline{DF}$.

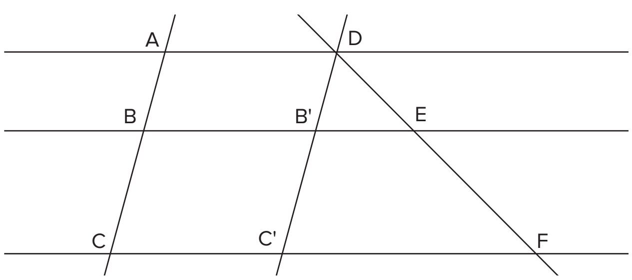
Existem muitas demonstrações desse teorema, mas é comum seguirmos a ideia da demonstração de Euclides. No entanto, essa prova é incompleta, pois admite que todos os segmentos sejam comensuráveis, como se acreditava na Grécia Antiga. Outra demonstração desse teorema encontra-se no livro *Geometria Moderna*, de Moise Downs, e utiliza a noção postulada da área do retângulo como sendo o produto da medida da base pela medida da altura do retângulo.

A partir dessa noção, podemos concluir que:

- A área de um paralelogramo também resulta do produto entre os comprimentos da base e da altura.
- A área de um triângulo é igual à metade do produto entre os comprimentos da base e da altura.
- Se dois triângulos têm bases de mesmo comprimento e alturas de mesmo comprimento, então esses triângulos também têm a mesma área.

Veja a demonstração:

Traçando uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, passando pelo ponto D da figura anterior, obtemos dois pontos sobre as retas $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{CF}$.

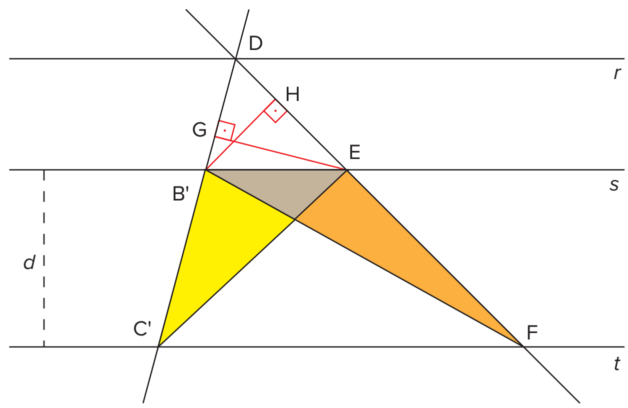


Sendo esses pontos B' e C', a nova figura apresenta os paralelogramos ABB'D e BCC'B', bem como o triângulo DB'E e o trapézio B'C'FE.

Como os lados opostos de um paralelogramo têm o mesmo comprimento, temos que AB = DB' e BC = B'C'.

Assim, provando que $\frac{B'D}{DE} = \frac{B'C'}{EF}$, também ficará provado que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

Agora vamos considerar as alturas $\overline{EG}$ e $\overline{B'H}$ do mesmo triângulo DB'E, as diagonais $\overline{B'F}$ e $\overline{C'E}$ do trapézio e a distância *d* entre as retas paralelas *s* e *t*.



Adotando o lado $\overline{DB'}$ como base, a área do triângulo DB'E será expressa por $S_1 = \frac{1}{2} \cdot B'D \cdot GE$.

Adotando o lado $\overline{DE}$ como base, a área do triângulo DB'E será expressa por $S_2 = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot B'H$.

Como se trata do mesmo triângulo:

$$S_1 = S_2 \Rightarrow B'D \cdot GE = DE \cdot B'H$$

Como nenhum desses segmentos é nulo, temos:

$$\frac{B'D}{DE} = \frac{B'H}{GE} \quad \text{(I)}$$

Adotando o lado $\overline{B'C'}$ como base, a área do triângulo B'C'E será expressa por $S_3 = \frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot GE$.

Adotando o lado $\overline{EF}$ como base, a área do triângulo B'EF será expressa por $S_4 = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot B'H$.

Observe que as áreas dos triângulos B'C'E e B'EF são iguais, pois têm a mesma base $\overline{B'E}$ e alturas de mesmo comprimento, igual à distância *d* entre as paralelas *s* e *t*. Assim, $S_3 = S_4 \Rightarrow B'C' \cdot GE = EF \cdot B'H$.

Novamente, como nenhum desses segmentos é nulo:

$$\frac{B'C'}{EF} = \frac{B'H}{GE} \quad \text{(II)}$$

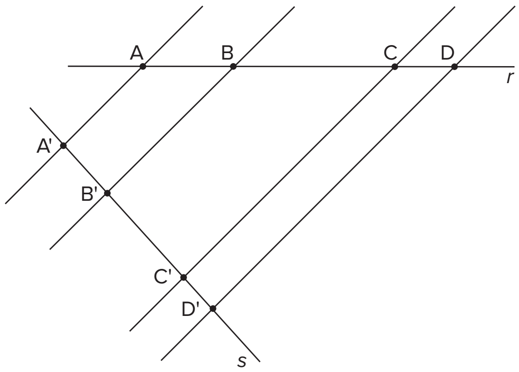
Como a fração $\frac{B'H}{GE}$ está presente nas proporções (I) e (II), temos que $\frac{B'D}{DE} = \frac{B'C'}{EF}$, como queríamos demonstrar.

Também é válida a recíproca do teorema de Tales: se um feixe de retas determina sobre retas transversais segmentos proporcionais, então as retas desse feixe são paralelas.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$$

Saiba mais

Há duas maneiras de obtermos equações que expressem as proporções garantidas pelo teorema de Tales.
Considere que um feixe de quatro retas paralelas intersecte duas transversais *r* e *s* nos pontos A, B, C, D, A', B', C' e D', como mostra a figura a seguir:



Uma das maneiras consiste em usar as medidas de dois segmentos de uma mesma transversal como numerador e denominador de uma mesma fração da equação, desde que as medidas dos segmentos correspondentes na outra transversal sejam respectivamente usadas como numerador e denominador da outra fração da equação. Essa técnica permite expressar 15 diferentes proporções entre as medidas dos segmentos da figura. Veja algumas:

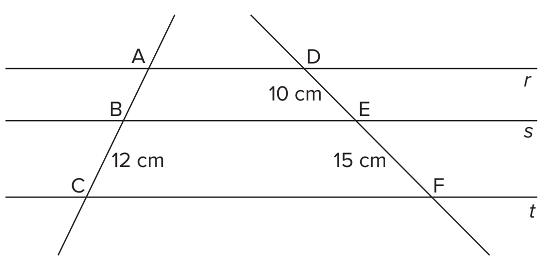
$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$ $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{A'C'}{A'D'}$ $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{A'C'}{B'D'}$ $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{B'C'}{A'D'}$

A outra maneira de se obter equações que expressem as proporções entre os segmentos da figura consiste em encontrar uma constante de proporcionalidade *k* entre os segmentos de uma transversal e seus correspondentes na outra. Para isso, basta usar as medidas dos segmentos de uma mesma transversal sempre como numeradores das frações da proporção, e as medidas dos segmentos correspondentes na outra transversal como denominadores das mesmas frações. Essa técnica permite expressar a constante *k* por meio de seis frações equivalentes:

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

Exercícios resolvidos

4. Sabendo que as retas *r*, *s* e *t* são paralelas, determine o valor da medida do segmento $\overline{AB}$ na figura a seguir.

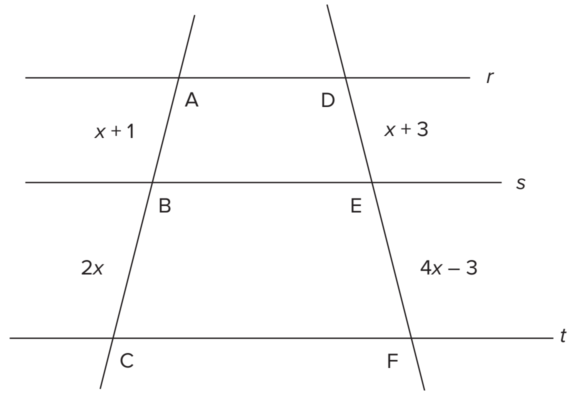


Resolução:

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AB}{10\text{ cm}} = \frac{12\text{ cm}}{15\text{ cm}} \Rightarrow AB = 8\text{ cm}$$

5. Na figura a seguir, as retas *r*, *s* e *t* são paralelas. Sabendo disso, calcule os possíveis valores dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$.



Resolução:

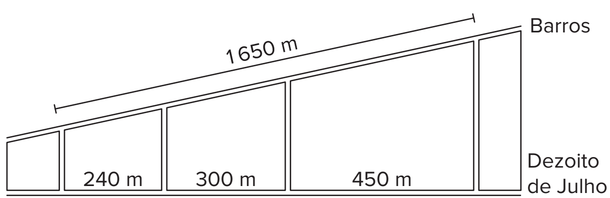
Pelo teorema de Tales: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$. Assim:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{2x}{4x-3} \Rightarrow (x+1)(4x-3) = 2x(x+3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2 + 1x - 3 = 2x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Como EF > 0, x_2 deve ser desconsiderado, pois neste caso teríamos $\overline{EF}$ com comprimento igual a $4x - 3 =$ $= 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 3 = -2 - 3 = -5$. Portanto, para $x_1 = 3$, temos: $AC = 3x + 1 = 10$ e $DF = 5x = 15$.

6. Quatro alamedas paralelas ligam a Avenida Dezoito de Julho à Avenida Barros, como mostra a figura. Uma pessoa que anda pela Avenida Barros percorre 1650 m entre as esquinas da primeira e da última alameda.



Determine os comprimentos, em metros, de cada quadra da Avenida Barros, sabendo que, na Avenida Dezoito de Julho, elas têm, respectivamente, 240 m, 300 m e 450 m de comprimento.

Resolução:

Sendo x, y e z as medidas das quadras da Avenida Barros e, como as alamedas são paralelas, pelo teorema de Tales, temos que:

$$\frac{x}{1650} = \frac{240}{240 + 300 + 450} \Rightarrow$$

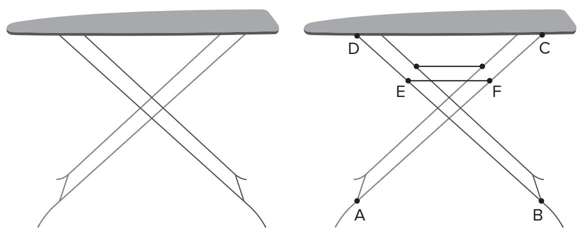
$$\Rightarrow \frac{x}{1650} = \frac{240}{990} \Rightarrow x = 400$$

Ou seja, x mede 400 metros.
Ainda de acordo com o teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{240}{300} \Rightarrow \frac{400}{y} = \frac{240}{300} \Rightarrow y = 500$$

Ou seja, y mede 500 metros.
Então, como $x + y + z = 1650$, temos que $z = 750$.

7. Um fabricante de tábuas de passar roupas precisa instalar nos seus produtos uma haste de segurança, que deve ser encaixada em orifícios feitos nos pontos E e F das pernas da tábua, como mostra a ilustração.



Sabendo que os comprimentos AC e BD das pernas da tábua são, respectivamente, 114 cm e 96 cm, e que o orifício E foi feito a 20 cm de distância do ponto D, a que distância do ponto C deve ser feito o orifício F para que a haste $\overline{EF}$ fique paralela aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?

a) 15,02 cm.
b) 16,84 cm.
c) 20,45 cm.
d) 23,75 cm.
e) 25,50 cm.

Resolução:

O enunciado apresenta as seguintes medidas em centímetros: AC = 114 cm, BD = 96 cm, DE = 20 cm. Assim, sendo x a medida em centímetros do segmento $\overline{CF}$, pela recíproca do teorema de Tales, temos:

$$\frac{CF}{AC} = \frac{DE}{BD} \Rightarrow \frac{x}{114} = \frac{20}{96} \Rightarrow x = 23{,}75 \text{ cm}$$

Resposta: alternativa D.

! Atenção

O teorema de Tales não diz nada a respeito das medidas dos segmentos que são determinados no feixe de retas paralelas. Portanto, as relações entre as medidas dos segmentos paralelos só podem ser expressas por outros modelos da Geometria Euclidiana, como o da semelhança de triângulos. Mas, antes de estudarmos esse modelo, vamos explorar a ideia de figuras semelhantes.

Saiba mais

Um estudo mais aprofundado das propriedades algébricas das proporções pode facilitar os processos para a resolução de questões geométricas que envolvem o assunto abordado neste capítulo. Conheça algumas dessas propriedades:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Semelhança

Quando dizemos que duas figuras são semelhantes, queremos dizer que elas têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Vejamos alguns casos.

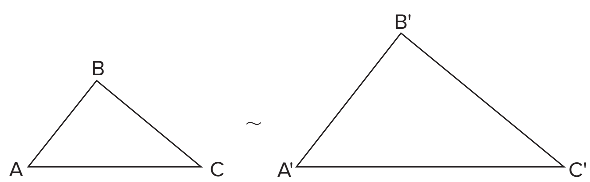
- Todos os quadrados são semelhantes, pois têm a mesma forma.
- Todos os círculos são semelhantes, pois têm a mesma forma.
- Os retângulos não são todos semelhantes, pois suas formas diferem muito.
- Os triângulos também não são todos semelhantes, pois podem ser equiláteros, escalenos ou isósceles.
- Todos os triângulos equiláteros serão considerados semelhantes, pois têm a mesma forma.

Rigorosamente, duas figuras serão consideradas semelhantes quando todos os comprimentos correspondentes forem proporcionais e todos os ângulos correspondentes forem congruentes.

A seguir, vamos explorar o caso da semelhança de triângulos.

Semelhança de triângulos

Como vimos, dois triângulos serão considerados semelhantes se as medidas dos lados correspondentes forem proporcionais e os ângulos correspondentes forem congruentes.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k \\ \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

Indicamos por ~ a semelhança entre figuras geométricas e usamos a variável k para indicar a razão de semelhança.

De acordo com essa definição de semelhança e usando propriedades simples de proporções, podemos provar que todas as medidas e comprimentos correspondentes são proporcionais, ou seja, não são apenas os lados que estão na mesma razão; as alturas, as medianas e os perímetros também estão na razão k.

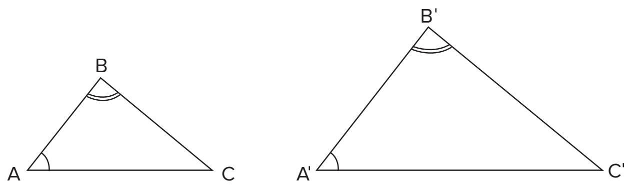
Critérios de semelhança de triângulos

Para afirmar que dois triângulos são semelhantes, não é necessário conhecer todas as medidas dos ângulos e dos lados. Em alguns casos, sabendo algumas medidas, já é possível afirmar se os triângulos são ou não semelhantes.

É correto afirmar que dois triângulos são semelhantes nos casos indicados a seguir.

Caso AA

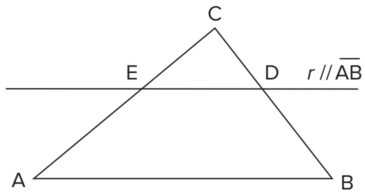
Se dois triângulos têm dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.



$$\hat{A} = \hat{A'} \text{ e } \hat{B} = \hat{B'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Reta paralela a um lado do triângulo

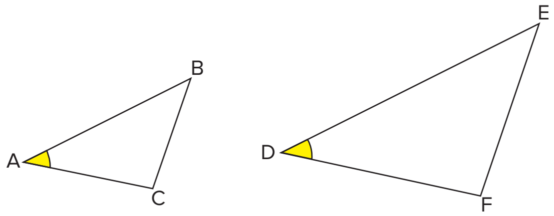
Se uma reta paralela a um lado de um triângulo corta os outros dois lados, ela forma um novo triângulo semelhante ao original.



$$r \parallel \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC$$

Caso LAL

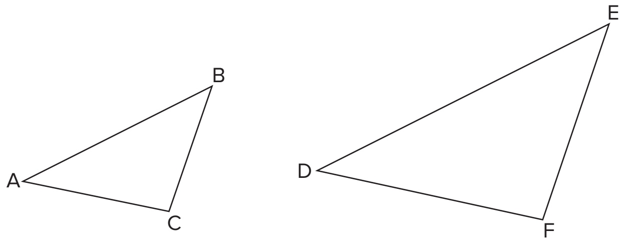
Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos (correspondentes) de outro triângulo, e se o ângulo determinado por esses lados for congruente ao ângulo correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ e } \hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Caso LLL

Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.



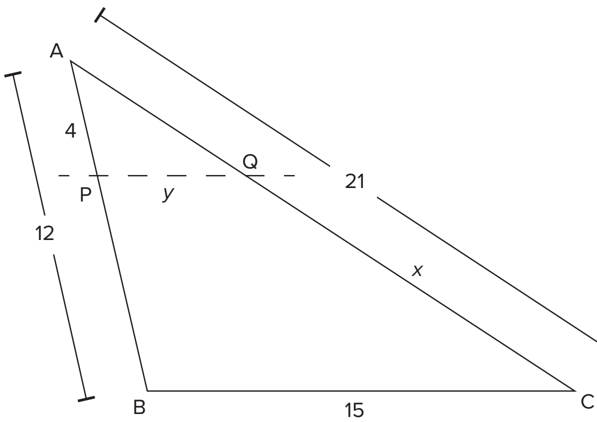
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Exercícios resolvidos

8. Um ponto P situado no menor lado do triângulo ABC de lados AB = 12, BC = 15 e AC = 21 é tal que AP = 4. Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ desse triângulo passa pelo ponto P e determina um ponto Q sobre o lado $\overline{AC}$. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{CQ}$ e $\overline{PQ}$.

Resolução:

O enunciado pode ser representado pela seguinte figura:



A medida x de $\overline{CQ}$ pode ser obtida a partir do teorema de Tales, pois PQ // BC, logo: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.

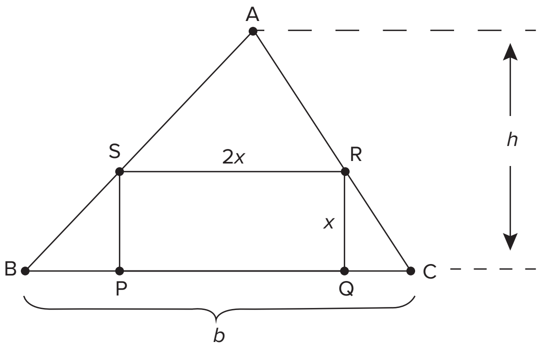
Observando que PB = 12 – 4 = 8 e AQ = 21 – x, temos $\frac{4}{8} = \frac{21 - x}{x}$. Resolvendo a equação, temos $x = 14$.

Já a medida y do segmento $\overline{PQ}$ pode ser obtida a partir da semelhança entre os triângulos APQ e ABC, apresentados na figura, pois, como PQ // BC, então $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

Dessa semelhança, temos $\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}$. Assim, resolvendo a equação $\frac{4}{12} = \frac{y}{15}$, temos $y = 5$.

Portanto, CQ = 14 e PQ = 5.

9. **Fuvest-SP** O retângulo PQRS está inscrito no triângulo ABC e tem sua base $\overline{PQ}$ com medida igual ao dobro de sua altura.



Sendo b e h os valores da base e da altura do triângulo ABC, podemos afirmar que x vale:

a) $\dfrac{hb}{h + b}$

b) $\dfrac{hb}{2h + b}$

c) $\dfrac{hb}{2(h + b)}$

d) $\dfrac{hb}{h + 2b}$

e) $\dfrac{2hb}{h + b}$

Resolução:

Como os lados opostos de um retângulo são paralelos, $\overline{SR} \,//\, \overline{BC} \Rightarrow \triangle ASR \sim \triangle ABC$.

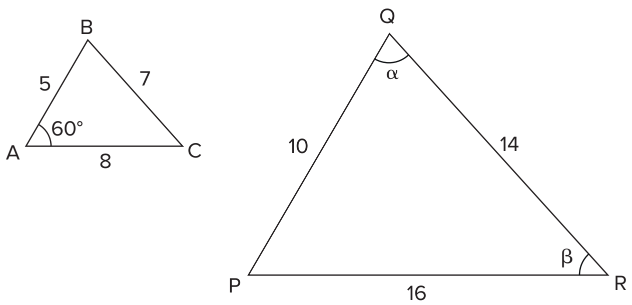
Dessa semelhança, temos que a razão entre as alturas desses triângulos é igual à razão entre suas bases. Assim:

$$\frac{h - x}{h} = \frac{2x}{b} \Rightarrow 2xh = b(h - x) \Rightarrow 2hx = bh - bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2hx + bx = bh \Rightarrow x(2h + b) = bh \Rightarrow x = \frac{hb}{2h + b}$$

Resposta: alternativa B.

10. As medidas dos lados do triângulo ABC são AB = 5, AC = 8 e BC = 7. As medidas dos lados do triângulo PQR são PQ = 10, PR = 16 e QR = 14.



Sabendo que o ângulo interno de vértice A do triângulo menor mede 60°, determine a soma das medidas dos ângulos internos de vértices Q e R do triângulo maior.

Resolução:

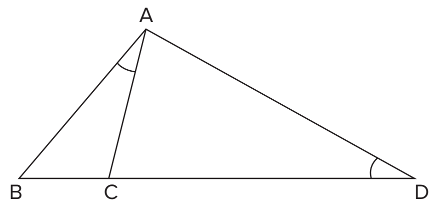
Observando que as medidas dos lados do triângulo menor correspondem à metade das medidas dos lados do triângulo maior, concluímos que $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{BC}{QR}$.

Assim, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ pelo caso LLL.

Como o vértice A do triângulo menor corresponde ao vértice P do triângulo maior, o ângulo interno do vértice P do triângulo maior também mede 60°. Assim, sendo α e β as medidas dos outros dois ângulos do triângulo maior, temos que $\alpha + \beta + 60° = 180°$. Logo, $\alpha + \beta = 120°$.

11. Na figura a seguir, os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{D}C$ têm a mesma medida.

Sabendo que AB = 12, AC = 7 e CD = 18, determine a medida do segmento $\overline{BC}$.



Resolução:

Nos triângulos ABC e DBA, o ângulo de vértice B é comum aos dois, e os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{D}C$ têm a mesma medida. Logo, podemos concluir que esses triângulos são semelhantes pelo caso AA. Assim:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA}$$

Então, sendo x a medida do segmento $\overline{BC}$, temos que:

$$\frac{12}{x + 18} = \frac{x}{12} = \frac{7}{DA}$$

Do produto cruzado entre as primeiras razões da proporção, temos a equação:

$$x(x + 18) = 12 \cdot 12 \Rightarrow x^2 + 18x - 144 = 0$$

$$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-144) = 324 + 576 = 900$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-18 \pm 30}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 6 \\ \searrow x_2 = -24 \end{array}$$

Como $x > 0$, podemos concluir que BC = 6.

Duas figuras, mais complexas que os triângulos, também podem ser semelhantes uma a outra. Para isso, é necessário que todos os triângulos determinados pelos pontos de uma figura sejam semelhantes aos triângulos formados pelos pontos correspondentes na outra figura.

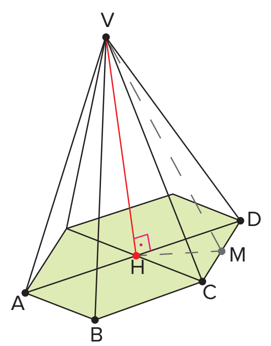


Figura 1

~

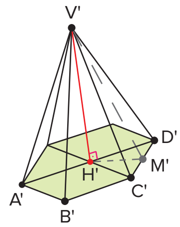


Figura 2

Propriedades da razão de semelhança

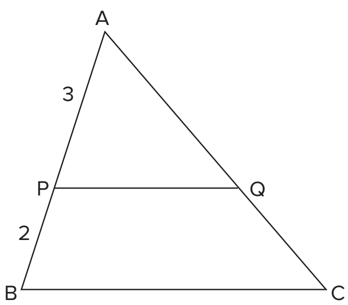
Uma vez garantida a semelhança de duas figuras, basta tomarmos os comprimentos de dois segmentos correspondentes e dividir o valor de um pelo valor do outro para obtermos a **razão de semelhança** entre as duas figuras.

O quociente entre quaisquer medidas de elementos que são correspondentes em figuras semelhantes resulta na potência k^n, sendo k a razão de semelhança e n o número de dimensões dos elementos medidos. Assim, se duas figuras geométricas são semelhantes, então:

- Os ângulos correspondentes em cada figura têm a mesma medida.
- A razão entre quaisquer comprimentos correspondentes é igual a k.
- A razão entre as áreas de regiões correspondentes é igual a k^2.
- A razão entre os volumes, no caso de serem figuras espaciais, é igual a k^3.

Exercícios resolvidos

12. Na figura a seguir, o segmento $\overline{PQ}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC e divide os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ na razão de 3 para 2.



Se o triângulo APQ tem 18 cm² de área, qual é a área do triângulo ABC?

a) 8 cm².
b) 12 cm².
c) 27 cm².
d) 30 cm².
e) 50 cm².

Resolução:

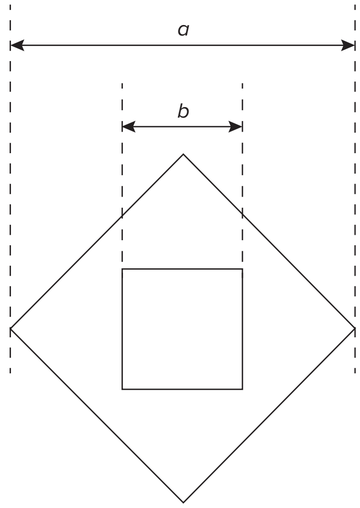
Os triângulos APQ e ABC são semelhantes, e a razão dessa semelhança é $k = \dfrac{3}{3+2} = \dfrac{3}{5}$.

Sendo x a área do triângulo ABC em centímetros quadrados, temos que $k^2 = \dfrac{18}{x}$. Assim:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{18}{x} \Rightarrow \frac{9}{25} = \frac{18}{x} \Rightarrow 9x = 25 \cdot 18 \Rightarrow x = 50$$

Resposta: alternativa E.

13. Na figura a seguir, o quadrado maior tem o triplo da área do quadrado menor.



Determine a razão $\dfrac{a}{b}$.

Resolução:

Todos os quadrados são semelhantes. Sendo $k > 0$ a razão de semelhança entre os quadrados da figura, a razão entre suas áreas é $k^2 = 3$; logo, $k = \sqrt{3}$. Como a diagonal do quadrado menor mede $b\sqrt{2}$, a razão entre as diagonais desses quadrados é $k = \dfrac{a}{b\sqrt{2}}$.

Portanto: $\dfrac{a}{b\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \sqrt{6}$

14. Na década de 1970, era difícil encontrar uma pista de dança sem um globo espelhado, que, na verdade, é uma esfera plástica (ou de isopor) revestida de pequenos pedaços quadrados de espelho. Considere dois desses globos: um completamente cercado por 500 pedaços de espelho, e outro menor com apenas 320. Se os pedaços usados em ambos são do mesmo tamanho, qual é o número inteiro mais próximo da razão entre seus volumes?

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Resolução:

Como todas as esferas são figuras semelhantes, temos que k é a razão de semelhança entre a maior e a menor das esferas que dão formato aos globos espelhados.

A quantidade de pedaços de espelhos que cerca cada globo deve ser diretamente proporcional à área da superfície de cada esfera. Portanto, $k^2 = \dfrac{500}{320} = \dfrac{25}{16}$ e, como $k > 0$, temos que $k = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$.

Assim, a razão entre os volumes dos globos é $k^3 = \left(\dfrac{5}{4}\right)^3 = \dfrac{125}{64} = 1{,}953125 \cong 2$.

Resposta: alternativa B.

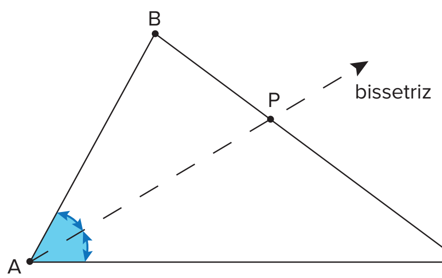
Teoremas decorrentes da semelhança e de Tales

Muitos são os teoremas da Geometria Euclidiana que podem ser deduzidos a partir do teorema de Tales e do conceito de semelhança de triângulos. Esses teoremas também dependem de algumas definições geométricas que veremos a seguir.

Bissetriz interna

Chamamos de bissetriz interna a semirreta cuja extremidade é um vértice de um triângulo e que passa por um ponto do lado oposto a esse vértice, de modo que o ângulo interno do vértice fique dividido ao meio.

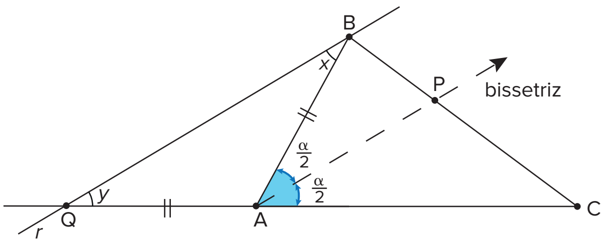
Teorema: as bissetrizes internas de um triângulo dividem os lados opostos aos ângulos de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.



Na figura, se $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz interna do triângulo EBC, então $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$.

Demonstração:

Considere a reta *r* que passa pelo ponto B e é paralela à bissetriz $\overrightarrow{AP}$. Considere também o ponto Q de interseção da reta *r* com o prolongamento do lado $\overline{AC}$ do triângulo.



Sejam $\alpha = med(B\hat{A}C)$, $x = med(A\hat{B}Q)$ e $y = med(B\hat{Q}C)$. Como $\overline{BQ} // \overline{AP}$, os ângulos alternos internos $A\hat{B}Q$ e $B\hat{A}P$, determinados pelo lado $\overline{AB}$ do triângulo, têm a mesma medida. Assim, $x = \frac{\alpha}{2}$.

Pelo mesmo motivo, os ângulos correspondentes $B\hat{Q}C$ e $P\hat{A}C$, determinados pelo lado $\overline{AC}$ e seu prolongamento $\overline{AQ}$, têm a mesma medida, ou seja, $y = \frac{\alpha}{2}$.

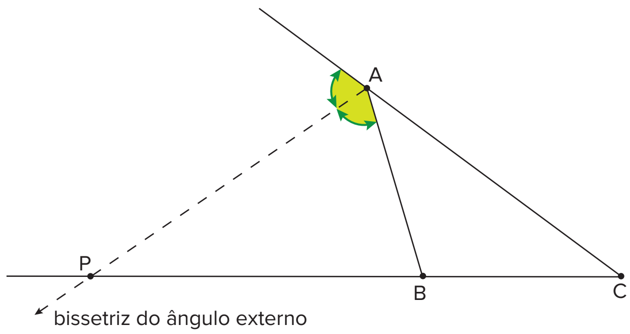
Como $x = y$, o triângulo ABQ é isósceles de base $\overline{BQ}$; logo, QA = AB.

Pelo teorema de Tales, temos que $\frac{PB}{QA} = \frac{PC}{AC}$. Assim, substituindo QA por AB, temos $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$.

Bissetriz externa

Chamamos de bissetriz externa a semirreta cuja extremidade é um vértice de um triângulo e que passa por um ponto do prolongamento do lado oposto a esse vértice, de modo que o ângulo externo do vértice fique dividido ao meio.

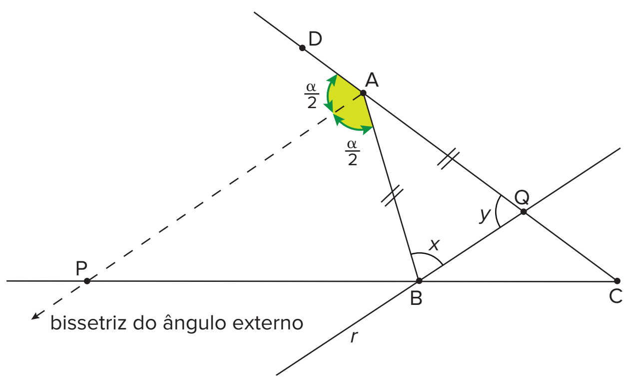
Teorema: as bissetrizes externas de um triângulo determinam, no prolongamento do lado oposto, dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.



Na figura, se $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz externa do triângulo ABC, então $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$.

Demonstração:

Considere a reta *r* que passa pelo ponto B e é paralela à bissetriz $\overrightarrow{AP}$. Considere também o ponto Q de interseção da reta *r* com o lado $\overline{AC}$ do triângulo, e um ponto D do prolongamento do lado $\overline{AC}$ no sentido de C para A.



Sejam $\alpha = med(B\hat{A}D)$, $x = med(A\hat{B}Q)$ e $y = med(B\hat{Q}A)$. Como $\overline{BQ} // \overline{AP}$, os ângulos alternos internos $A\hat{B}Q$ e $B\hat{A}P$, determinados pelo lado $\overline{AB}$ do triângulo, têm a mesma medida. Assim, $x = \frac{\alpha}{2}$.

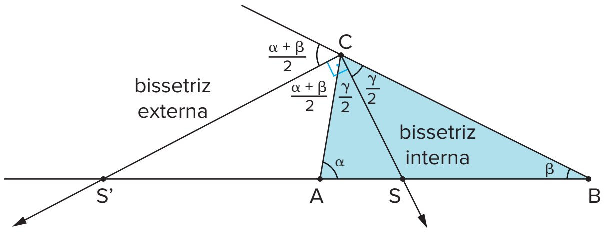
Pelo mesmo motivo, os ângulos correspondentes $B\hat{Q}A$ e $P\hat{A}D$, determinados pelo lado $\overline{AC}$ e seu prolongamento $\overline{AD}$, têm a mesma medida, ou seja: $y = \frac{\alpha}{2}$.

Como $x = y$, o triângulo ABQ é isósceles de base $\overline{BQ}$; logo, QA = AB.

Pelo teorema de Tales, temos que $\frac{PB}{QA} = \frac{PC}{AC}$. Assim, substituindo QA por AB, temos $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$.

Saiba mais

Os pontos onde as bissetrizes interna e externa que partem do mesmo vértice C de um triângulo ABC intersectam a reta $\overleftrightarrow{AB}$ são os conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$ para uma mesma razão $k \neq 1$.



$$\frac{AS}{BS} = \frac{AS'}{BS'} = k \neq 1$$

Também é importante observar que essas bissetrizes são perpendiculares entre si.

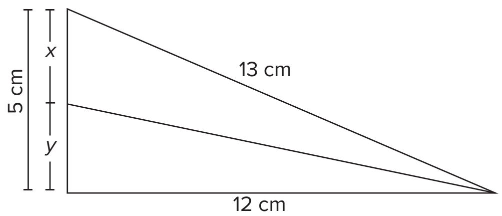
Exercícios resolvidos

15. A bissetriz do menor ângulo interno de um triângulo, cujos lados medem 5 cm, 12 cm e 13 cm, divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos de reta que diferem um do outro em:

a) 0,0 mm.
b) 0,2 mm.
c) 1,2 mm.
d) 2,0 mm.
e) 2,2 mm.

Resolução:

Sendo x e y as medidas, em centímetros, dos segmentos mencionados, o enunciado pode ser representado pela seguinte figura:



Pelo teorema da bissetriz interna do triângulo:

$$\frac{x}{y} = \frac{13}{12}$$

Então, como $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$, temos:

$$\frac{x}{5-x} = \frac{13}{12} \Rightarrow 12x = 13 \cdot (5 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x = 65 - 13x \Rightarrow 25x = 65 \Rightarrow x = 2{,}6$$

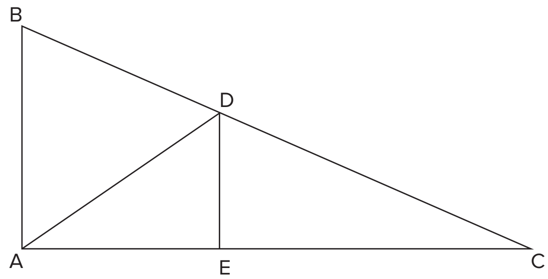
Portanto, $y = 5 - 2{,}6 = 2{,}4$.

Logo, a diferença será $x - y = 2{,}6 - 2{,}4 = 0{,}2$ cm $= 2$ mm.

Resposta: alternativa D.

16. Na figura a seguir, ABC é um triângulo retângulo em A. O ponto D da hipotenusa $\overline{BC}$ e o ponto E do cateto $\overline{AC}$ determinam um segmento paralelo ao lado $\overline{AB}$.

Determine a medida AE sabendo que DE = 9, CD = 15 e os ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{D}E$ são congruentes.



Resolução:

Como $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$, o triângulo CDE também é retângulo. Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$CD^2 = EC^2 + DE^2 \Rightarrow 15^2 = EC^2 + 9^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EC^2 = 225 - 81 = 144$$

Portanto, EC = 12.

Como $\overrightarrow{DA}$ é bissetriz do ângulo externo de vértice D do triângulo DEC, pelo teorema da bissetriz externa, temos que $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DC}$.

Então, sendo x = AE:

$$\frac{x}{x+12} = \frac{9}{15} \Rightarrow \frac{x}{x+12} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

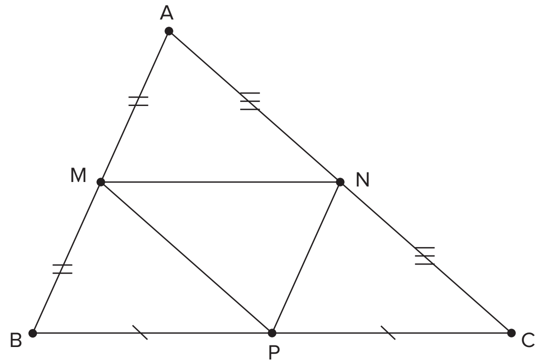
$$\Rightarrow 5x = 3(x + 12) \Rightarrow 5x = 3x + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$$

Portanto, AE = 18.

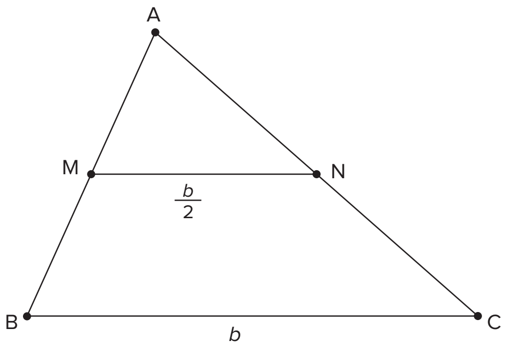
Base média do triângulo

Qualquer segmento de reta com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é uma base média do triângulo. Desse modo, como qualquer lado de um triângulo pode ser considerado sua base, todo triângulo tem três bases médias.



Na figura, como M é ponto médio de $\overline{AB}$ e N é ponto médio de $\overline{AC}$, então $\overline{MN}$ é a base média relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo. Porém, como P também é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$ também são bases médias relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo, respectivamente.

Teorema: cada base média de um triângulo é paralela e tem a metade do comprimento da base correspondente no triângulo.



$$AM = MB \text{ e } AN = NC \Rightarrow \overline{MN} \,//\, \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2}$$

Demonstração:

Como $AM = MB$ e $AN = NC$, então $AB = 2 \cdot AM$ e $AC = 2 \cdot AN$, ou seja: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = 2$.

Assim, pela recíproca do teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} \Rightarrow \overline{MN} \,//\, \overline{BC}$$

Então, como esse paralelismo garante a semelhança dos triângulos AMN e ABC:

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = 2 \Rightarrow BC = 2 \cdot MN \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$$

Também vale a recíproca desse teorema:

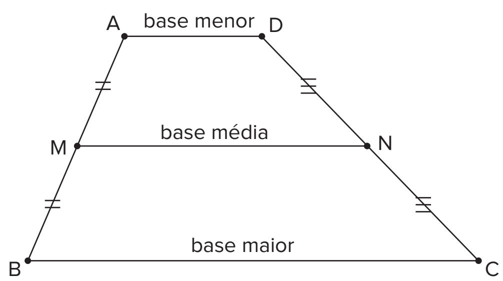
$$\overline{MN} \,//\, \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM = MB \text{ e } AN = NC$$

Base média do trapézio

O segmento que une os pontos médios dos lados oblíquos de um trapézio é chamado de base média do trapézio.

Teorema: a base média de um trapézio é paralela às bases dele e mede a média aritmética dos comprimentos dessas bases.

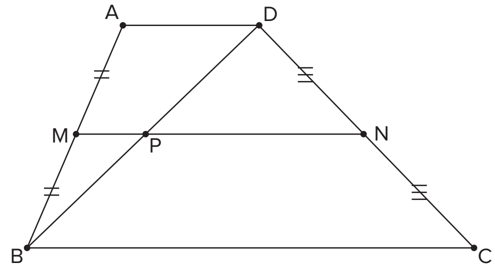
$$\text{Base média} = \frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2}$$



$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$, $AM = MB$ e $DN = NC$ $\Rightarrow$ $\overline{MN} \,//\, \overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ e $MN = \frac{AD + BC}{2}$

Demonstração:

Considere que a diagonal $\overline{BD}$ do trapézio ABCD intersecte sua base média no ponto P.



Como as igualdades $AM = MB$ e $DN = NC$ implicam $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC}$, pela recíproca do teorema de Tales, $\overline{MN} \,//\, \overline{AD} \,//\, \overline{BC}$.

Como $AM = MB$ e $\overline{MP} \,//\, \overline{AD}$, de acordo com o mesmo teorema, concluímos que $BP = PD$.

Portanto, $\overline{MP}$ é base média do triângulo ABD; logo, $MP = \frac{AD}{2}$.

Analogamente, $\overline{PN}$ é base média do triângulo BCD; logo, $PN = \frac{BC}{2}$.

Então, como $MN = MP + PN$:

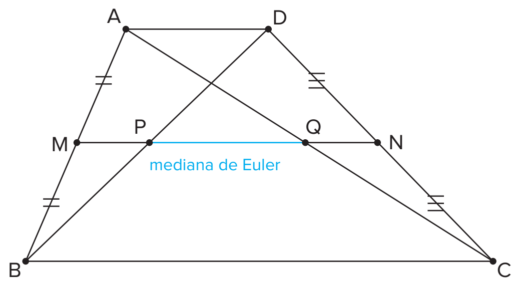
$$MN = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} \Rightarrow MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Também é válida a recíproca desse teorema:

$$\overline{MN} \,//\, \overline{AD} \,//\, \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{AD + BC}{2} \Rightarrow AM = MB \text{ e } DN = NC$$

Mediana de Euler

O segmento com extremidades nos pontos determinados pela base média de um trapézio em suas duas diagonais é chamado de mediana de Euler.



Teorema: a mediana de Euler equivale à metade da diferença absoluta entre as bases de um trapézio.

$$\text{Mediana de Euler} = \frac{\text{base maior} - \text{base menor}}{2}$$

Demonstração:

Pelo teorema da base média do trapézio, temos que $\overline{AD} \,//\, \overline{MN} \,//\, \overline{BC}$. Assim, pelo teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{DP}{PB} = \frac{DN}{NC}$$

Portanto, P e Q são os respectivos pontos médios das diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$. Então:

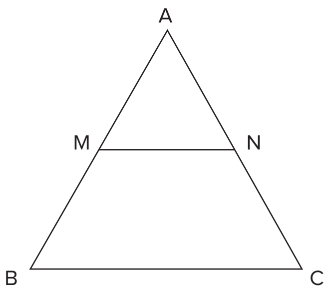
- como $\overline{MP}$ é base média relativa ao lado $\overline{AD}$ do $\triangle ABD$, temos: $MP = \dfrac{AD}{2}$.
- como $\overline{MQ}$ é base média relativa ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$, temos: $MQ = \dfrac{BC}{2}$.

Assim, como PQ = MQ – MP:

$$PQ = \frac{BC}{2} - \frac{AD}{2} \Rightarrow PQ = \frac{BC - AD}{2}$$

Exercícios resolvidos

17. Na figura a seguir, M e N são os pontos médios dos lados do triângulo equilátero ABC de lado 6 cm.



O perímetro do trapézio MNCB é de:

a) 15 cm.
b) 18 cm.
c) 21 cm.
d) 12 cm.
e) 9 cm.

Resolução:

Como M e N são pontos médios dos lados do triângulo ABC, temos: $MB = NC = \dfrac{6\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}$.

Como $\overline{MN}$ é base média do triângulo ABC: $MN = \dfrac{6\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}$.

Portanto, o perímetro do trapézio MNCB mede:

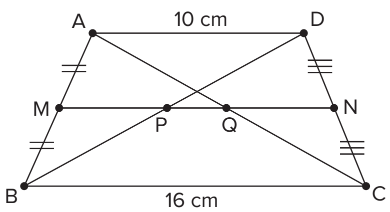
MN + NC + BC + MB = (3 + 3 + 6 + 3) cm = 15 cm

Resposta: alternativa A.

18. Determine a medida da base média e da mediana de Euler de um trapézio ABCD cujas bases medem 10 cm e 16 cm.

Resolução:

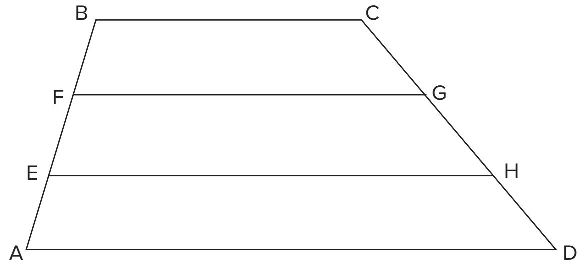
O enunciado pode ser representado pela seguinte figura:



A base média desse trapézio é o segmento $\overline{MN}$, que mede $\dfrac{16\text{ cm} + 10\text{ cm}}{2} = 13\text{ cm}$.

A mediana de Euler desse trapézio é o segmento $\overline{PQ}$, que mede $\dfrac{16\text{ cm} - 10\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}$.

19. No trapézio ABCD a seguir, os pontos E e F dividem o lado $\overline{AB}$ em três partes iguais, e os pontos G e H dividem o lado $\overline{CD}$ em três partes também iguais.



Se BC = 10 e AD = 20, determine as medidas dos segmentos $\overline{FG}$ e $\overline{EH}$.

Resolução:

A figura apresenta um total de 6 trapézios distintos. Considerando x = FG e y = EH, concluímos:

- Como FG é base média do trapézio BCHE, então $x = \dfrac{y + 10}{2}$.
- Como EH é base média do trapézio FGDA, então $y = \dfrac{x + 20}{2}$.

Da primeira equação, temos $2x = y + 10 \Rightarrow y = 2x - 10$.

Da segunda equação: $2y = x + 20$.

Substituindo a expressão de y na segunda equação:

$$2 \cdot (2x - 10) = x + 20$$
$$4x - 20 = x + 20$$
$$3x = 40$$
$$x = \frac{40}{3}$$

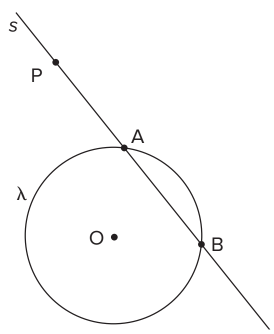
Assim:

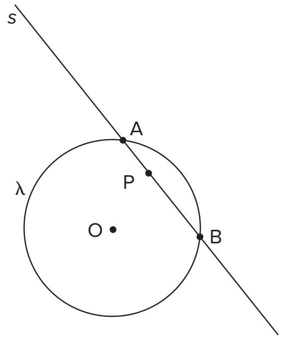
$$y = 2 \cdot \frac{40}{3} - 10 \Rightarrow y = \frac{80 - 30}{3} \Rightarrow y = \frac{50}{3}$$

Potência de um ponto em relação a uma circunferência

Considere, em um mesmo plano, um ponto P e uma circunferência λ de centro O e raio r. Para toda reta s que passe por P e intersecte λ em dois pontos A e B, podemos definir a potência de P em relação a λ como o produto PA · PB.

Inicialmente, há apenas dois casos a serem considerados: quando P está situado na região exterior da circunferência e quando P está situado em seu interior.





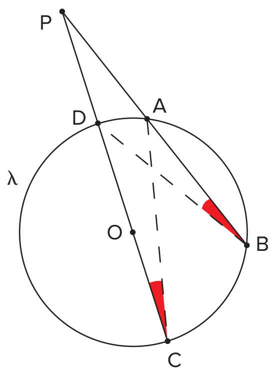
$$\text{Pot}(P) = PA \cdot PB$$

Teorema: a potência de um ponto P em relação a uma circunferência λ de centro O e raio r equivale à diferença absoluta entre os quadrados de PO e r.

$$\text{Pot}(P) = |PO^2 - r^2|$$

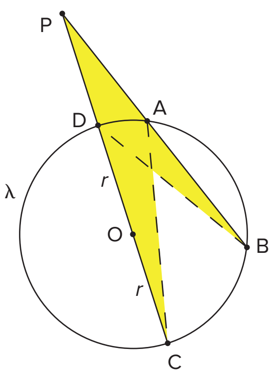
Demonstração (primeiro caso):

Considere o diâmetro $\overline{CD}$ contido na reta que passa pelo ponto P e pelo centro O da circunferência. Considere também as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ da circunferência.



Pelo teorema do ângulo inscrito na circunferência, os ângulos $D\hat{C}A$ e $A\hat{B}D$ têm a mesma medida, pois ambos têm a metade da medida do menor arco $\overset{\frown}{AD}$ da circunferência.

Então, como $\text{med}(D\hat{C}A) = \text{med}(A\hat{B}D)$ e o ângulo de vértice P é comum aos triângulos PCA e PBD, a semelhança entre esses triângulos fica garantida pelo caso AA.



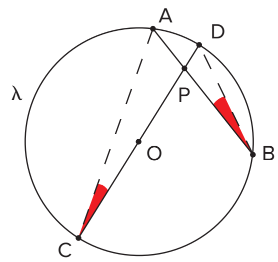
$$\triangle PCA \sim \triangle PBD \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD} = \frac{AC}{DB}$$

Assim, pelo produto cruzado da primeira proporção entre os lados, indicada na sentença apresentada anteriormente:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
$$PA \cdot PB = (PO + OC) \cdot (PO - OD)$$
$$PA \cdot PB = (PO + r) \cdot (PO - r)$$
$$PA \cdot PB = PO^2 - r^2$$
$$PA \cdot PB = |PO^2 - r^2|$$

Demonstração (segundo caso):

Considere novamente o diâmetro $\overline{CD}$ contido na reta que passa pelo ponto P e pelo centro O da circunferência. Considere também as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ da circunferência.



Pelo teorema do ângulo inscrito na circunferência, os ângulos $A\hat{C}D$ e $D\hat{B}A$ têm a mesma medida, pois ambos têm a metade da medida do menor arco $\overset{\frown}{AD}$ da circunferência.

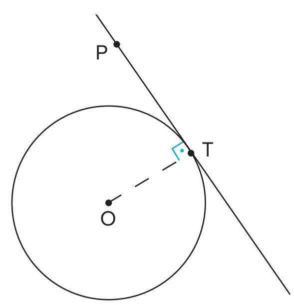
Então, como $\text{med}(A\hat{C}D) = \text{med}(D\hat{B}A)$ e $\text{med}(A\hat{P}C) =$
$= \text{med}(D\hat{P}B)$, pois esses ângulos são opostos pelo vértice, os triângulos PCA e PBD são semelhantes pelo caso AA.

$$\triangle PCA \sim \triangle PBD \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD}$$

Assim, pelo produto cruzado da proporção:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
$$PA \cdot PB = (PO + OC) \cdot (OD - PO)$$
$$PA \cdot PB = (PO + r) \cdot (r - PO)$$
$$PA \cdot PB = r^2 - PO^2$$
$$PA \cdot PB = |PO^2 - r^2|$$

Há ainda um terceiro caso a ser considerado: quando, por um ponto P, situado na região exterior de uma circunferência, passa uma reta tangente a ela.

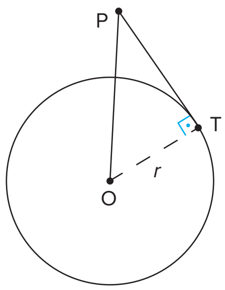


$$\text{Pot}(P) = PT^2$$

Nesse caso, sendo T o ponto onde ocorre a tangência, a potência do ponto P em relação a essa circunferência pode ser expressa pelo quadrado da medida do segmento $\overline{PT}$.

Demonstração (terceiro caso):

Considerando que o segmento $\overline{PO}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo OPT, pelo teorema de Pitágoras, temos $PO^2 = PT^2 + OT^2$.

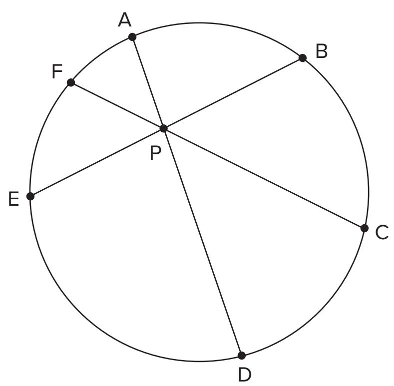


Como $\overline{OT}$ é um raio da circunferência:

$$PT^2 = PO^2 - r^2 \Rightarrow PT = |PO^2 - r^2| = Pot(P)$$

Saiba mais

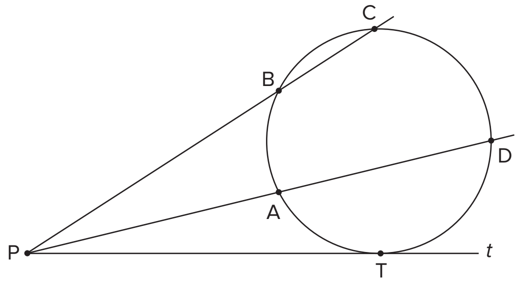
É importante observar que o teorema da potência de um ponto em relação a uma circunferência não depende da posição das retas secantes que não passam pelo centro da circunferência.



Desse modo, como o teorema diz que Pot(P) é constante em relação aos segmentos contidos nas cordas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{FC}$ dessa circunferência, então:

$$PA \cdot PD = PB \cdot PE = PC \cdot PF$$

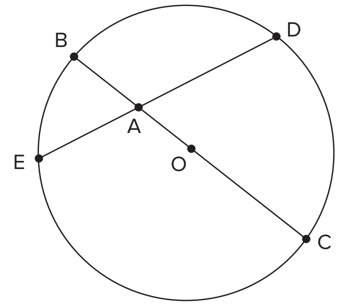
Caso o ponto P seja exterior à circunferência, temos:



$$PT^2 = PA \cdot PD = PB \cdot PC$$

Exercícios resolvidos

20. Na figura a seguir, o ponto A é a interseção do diâmetro $\overline{BC}$ com uma corda $\overline{ED}$ da circunferência de centro O.



Determine o comprimento do raio dessa circunferência sabendo que:

- AE = 6 cm
- AD = 10 cm
- AO = 2 cm

Resolução:

Sendo r a medida do raio da circunferência, a potência do ponto A em relação a essa circunferência é, pela definição, $Pot(A) = AE \cdot AD$, mas também é, pelo teorema da potência de ponto, $Pot(A) = |AO^2 - r^2|$. Assim: $|AO^2 - r^2| = AE \cdot AD$.

Como $r > AO$, pois o ponto A está situado no interior da circunferência, então:

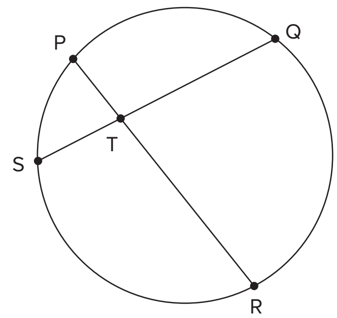
$$r^2 - 2^2 = 6 \cdot 10$$
$$r^2 = 60 + 4$$
$$r^2 = 64$$

Portanto, $r = 8$ cm.

21. Os pontos P, Q, R e S pertencem a uma mesma circunferência e estão posicionados nessa ordem, no sentido horário. As cordas $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$ intersectam-se no ponto T de tal modo que TP = 2, TS = 4 e TR = 6. Calcule a medida do segmento $\overline{TQ}$.

Resolução:

De acordo com o enunciado, podemos representar a seguinte figura:



Na corda $\overline{PR}$: $Pot(T) = TP \cdot TR$.

Na corda $\overline{QS}$: $Pot(T) = TS \cdot TQ$.

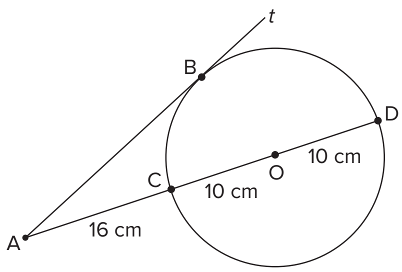
Então, como a potência de um ponto em relação a uma circunferência é constante:

$$TP \cdot TR = TS \cdot TQ$$
$$2 \cdot 6 = 4 \cdot TQ$$
$$12 = 4 \cdot TQ$$
$$TQ = \frac{12}{4} = 3$$

22. Por um ponto A, situado a 16 cm de distância de uma circunferência, passa uma reta que tangencia essa circunferência em um ponto B. Se o raio da circunferência mede 10 cm, qual é o comprimento do segmento $\overline{AB}$?

Resolução:

Sendo $\overline{CD}$ o diâmetro da circunferência determinado pela reta $\overleftrightarrow{AO}$, de acordo com o enunciado, podemos representar a seguinte figura:



Na reta secante $\overleftrightarrow{AO}$: Pot(A) = AC · AD.

Na reta tangente $\overleftrightarrow{AB}$: Pot(A) = AB^2.

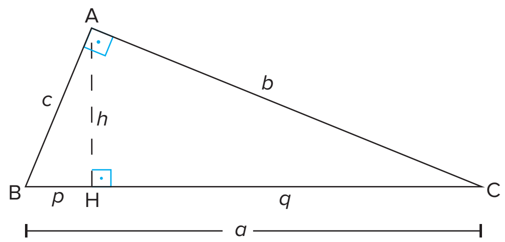
Então, como a potência de um ponto em relação a uma circunferência é constante:

$$AB^2 = AC \cdot AD$$
$$AB^2 = 16 \cdot (16 + 10 + 10)$$
$$AB^2 = 16 \cdot 36$$
$$AB = \sqrt{16 \cdot 36}$$
$$AB = 4 \cdot 6$$
$$AB = 24$$

Portanto, $\overline{AB}$ mede 24 cm.

Relações métricas no triângulo retângulo

Traçando a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, obtemos dois segmentos denominados projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.



No triângulo ABC da figura:

- A medida da hipotenusa é BC = a.
- As medidas dos catetos são AB = c e AC = b.
- A altura relativa à hipotenusa desse triângulo é AH = h.
- As medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são BH = p e CH = q.
- $\overline{BH}$ é a projeção do cateto $\overline{AB}$.
- $\overline{CH}$ é a projeção do cateto $\overline{AC}$.

Observe, ainda, que a medida da hipotenusa é a soma das medidas das projeções, ou seja, $a = p + q$.

Teoremas:

1. O produto da medida da altura pela medida da hipotenusa equivale ao produto das medidas dos catetos.

$$a \cdot h = b \cdot c$$

2. O quadrado da medida de um cateto equivale ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$b^2 = a \cdot q \qquad c^2 = a \cdot p$$

3. O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa equivale ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

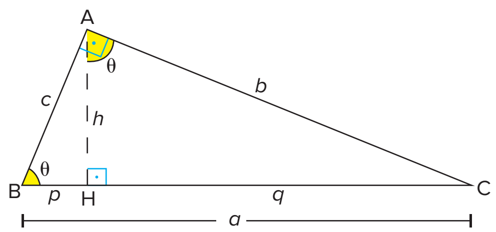
$$h^2 = p \cdot q$$

Demonstração:

Se $\theta = \text{med}(\hat{B})$, pela soma dos ângulos internos do triângulo ABH, temos que med($B\hat{A}H$) = 90° − q.

Então, como $B\hat{A}C$ é um ângulo reto:

$$\text{med}(H\hat{A}C) = 90° - \text{med}(B\hat{A}H)$$
$$\text{med}(H\hat{A}C) = 90° - (90° - \theta)$$
$$\text{med}(H\hat{A}C) = 90° - 90° + \theta$$
$$\text{med}(H\hat{A}C) = \theta$$



Como os triângulos ABC, HBA e HAC são todos retângulos e possuem um ângulo interno de medida θ, concluímos que os três triângulos são semelhantes pelo caso AA.

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{q} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot q$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{p} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot p$$

$$\triangle HAC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{p} = \frac{q}{h} \Rightarrow h^2 = p \cdot q$$

Observe que a soma das relações $b^2 = a \cdot q$ e $c^2 = a \cdot p$ produz outra possível demonstração para o teorema de Pitágoras:

$$a \cdot q + a \cdot p = b^2 + c^2$$
$$a \cdot (q + p) = b^2 + c^2$$
$$a \cdot a = b^2 + c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Exercícios resolvidos

23. Encontre a medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 dm e 4 dm.

a) 2,4 cm.
b) 6,2 cm.
c) 10 cm.
d) 20 cm.
e) 24 cm.

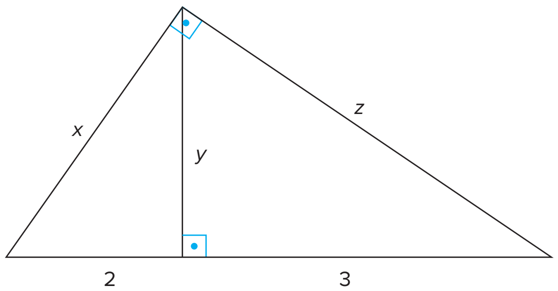
Resolução:

A partir do teorema de Pitágoras, verificamos que a hipotenusa do triângulo mede 5 dm = 50 cm.
Assim, como o produto da altura pela hipotenusa equivale ao produto dos catetos, sendo h a medida dessa altura em centímetros, temos:

$$h \cdot 50 = 30 \cdot 40$$
$$h = \frac{1200}{50}$$
$$h = 24$$

Portanto, a altura relativa à hipotenusa mede 24 cm.
Resposta: alternativa E.

24. Determine as medidas x, y e z na figura a seguir:

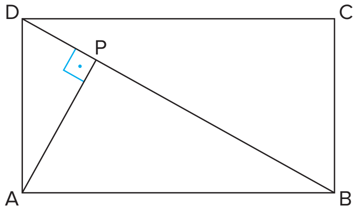


Resolução:

Como o quadrado da altura relativa à hipotenusa equivale ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, temos que $y^2 = 2 \cdot 3$; portanto, $y = \sqrt{6}$.

Como o quadrado de cada cateto equivale ao produto de sua projeção na hipotenusa pela própria hipotenusa, temos $x^2 = 2 \cdot (2 + 3)$ e $z^2 = 3 \cdot (2 + 3)$. Assim, $x = \sqrt{10}$ e $z = \sqrt{15}$.

25. No retângulo ABCD de lados AB = 3 cm e BC = $\sqrt{7}$ cm, o segmento $\overline{AP}$ é perpendicular à diagonal $\overline{BD}$.



O segmento $\overline{BP}$ mede, em centímetros:

a) $\frac{9}{2}$ **b)** $\frac{7}{4}$ **c)** $\frac{9}{4}$ **d)** $\frac{3}{4}$ **e)** $\frac{5}{4}$

Resolução:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCD, temos $BD^2 = CD^2 + BC^2$. Então, como CD = AB:

$$BD^2 = 3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$BD^2 = 9 + 7$$
$$BD^2 = 16$$
$$BD = 4$$

Assim, $\overline{BD}$ mede 4 cm.
No triângulo retângulo ABD, o segmento $\overline{BP}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BD}$. Assim, como o quadrado de um cateto equivale ao produto de sua projeção pela hipotenusa:

$$AB^2 = BP \cdot BD$$
$$3^2 = BP \cdot 4$$
$$BP = \frac{9}{4}$$

Portanto, $\overline{BP}$ mede $\frac{9}{4}$ cm.
Resposta: alternativa C.

Revisando

1. Considere cinco pontos colineares P, Q, R, S e T posicionados nessa ordem sobre uma reta r tais que:

- Q seja ponto médio do segmento $\overline{PR}$;
- R seja ponto médio do segmento $\overline{PS}$;
- S seja ponto médio do segmento $\overline{QT}$;
- RS = 10 cm.

Faça uma figura que represente corretamente a situação apresentada e determine o comprimento de $\overline{PT}$.

2. Considere todos os pontos da reta que contém o segmento $\overline{AB}$ tais que a distância de cada um deles até uma das extremidades do segmento $\overline{AB}$ seja $\frac{2}{5}$ da distância do mesmo ponto até a outra extremidade. Agora, responda às seguintes perguntas:

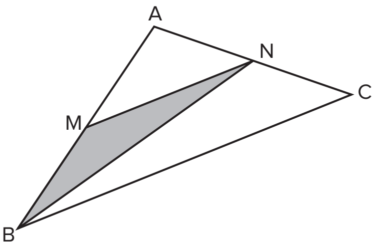
a) Quantos pontos há nessas condições?
b) Quantos segmentos de reta esses pontos podem determinar?

Considerando AB = 42, determine:

c) Qual é o comprimento do menor segmento de reta que os pontos encontrados determinam?
d) Qual é o comprimento do maior segmento de reta que os pontos encontrados determinam?

FRENTE 3

3. **Unicamp-SP 2019** No triângulo ABC exibido na figura a seguir, M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$, e N é o ponto médio do lado $\overline{AC}$. Se a área do triângulo MBN é igual a *t*, então a área do triângulo ABC é igual a

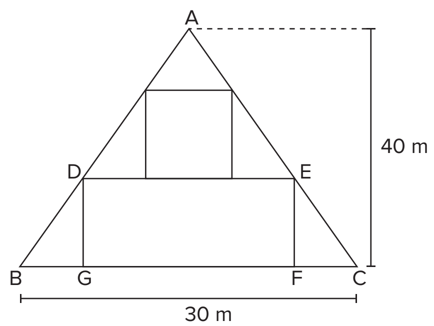


a) $3t$. **b)** $2\sqrt{3}t$. **c)** $4t$. **d)** $3\sqrt{2}t$.

4. **IFMG 2014** Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1 m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do pau de sebo, em metros, é

a) 5,0 **b)** 5,5 **c)** 6,0 **d)** 6,5

5. Na figura abaixo, o retângulo DEFG está inscrito no triângulo ABC, e o quadrado está inscrito no triângulo ADE.



Sabendo que os lados $\overline{DG}$ e $\overline{EF}$ do retângulo e os lados do quadrado têm a mesma medida, determine:

a) a medida do lado do quadrado.

b) a medida da base $\overline{FG}$ do retângulo.

c) a porcentagem da área do triângulo ABC ocupada pelo triângulo ADE.

6. Indique a alternativa que apresenta o valor mais próximo da distância entre os pontos de interseção das bissetrizes interna e externa, relativas ao vértice B do triângulo ABC, com a reta $\overleftrightarrow{AC}$, sabendo que AB = AC = = 20 cm e BC = 5 cm.

a) 10 cm. **c)** 12 cm. **e)** 14 cm.

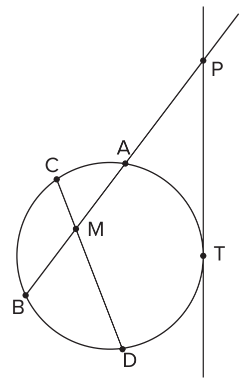
b) 11 cm. **d)** 13 cm.

7. Os pontos P e Q pertencem aos lados oblíquos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ de um trapézio ABCD cujas bases medem AB = 1,8 m e CD = 80 cm. Se o segmento $\overline{PQ}$ é paralelo às bases do trapézio ABCD, qual deve ser a medida PQ para que os trapézios ABQP e PQCD:

a) tenham a mesma altura?

b) sejam semelhantes entre si?

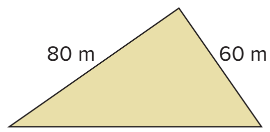
8. Na figura a seguir, os pontos A, B, C, D e T indicam onde serão fixadas as colunas de uma construção com cobertura circular.



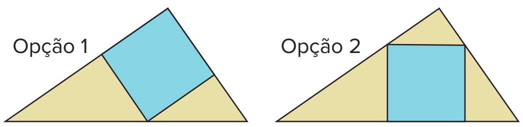
Nesse esquema, vemos dois segmentos de reta secantes e uma reta tangente à circunferência no ponto T. Sabendo que M é o ponto médio de $\overline{AB}$, MC = $\sqrt{5}$ m, MD = $5\sqrt{5}$ m e PT = 12 m, determine:

a) o comprimento de $\overline{AB}$. **b)** o comprimento de $\overline{AP}$.

9. Um terreno em formato de triângulo retângulo tem catetos que medem 60 m e 80 m, como mostra a figura a seguir.



Nele, será construído um casarão cuja base quadrada deve ficar inscrita de modo a ocupar a maior área possível do terreno. Para isso, o arquiteto considerou as seguintes opções:



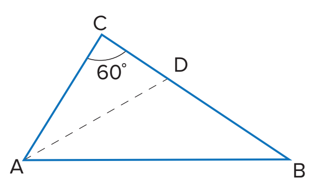
Determine os comprimentos aproximados dos lados dos quadrados nas duas opções.

10. Um triângulo ABC tem lados AB = 26 m, BC = 24 m e AC = 10 m. No maior lado, toma-se um ponto P. Determine o valor da razão $\frac{AP}{BP}$ nos seguintes casos:

a) $\overrightarrow{CP}$ é bissetriz interna do triângulo ABC.

b) $\overline{CP}$ é altura do triângulo ABC.

11. **Unicamp-SP 2019** No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A, e AD = DB. O ângulo interno em A é igual a:

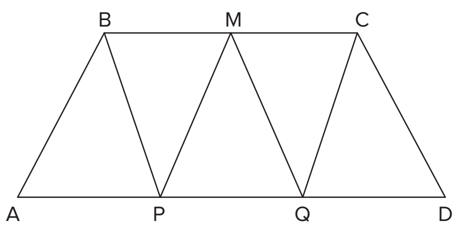


a) 60°. **b)** 70°. **c)** 80°. **d)** 90°.

Exercícios propostos

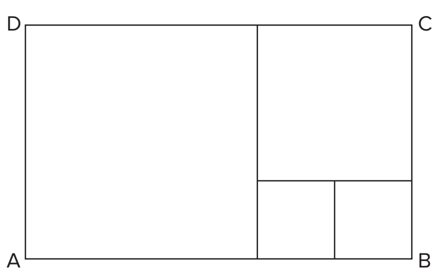
1. Uma rodovia retilínea de extremidades A e B liga as cidades de Arlândia e Berlândia. Nessa rodovia, há apenas dois postos para abastecimento, localizados nos pontos X e Y, de modo que X fica no ponto médio do segmento de extremos A e B, e Y no ponto médio do segmento de extremos X e B. Benedito, que mora em Arlândia e precisava viajar a negócios para a cidade de Berlândia, pegou essa rodovia a partir do ponto A, mas, antes de chegar a seu destino, parou no posto Y para abastecer. Enquanto abastecia, Benedito verificou que tinha percorrido 51 km desde o momento em que entrou na rodovia e perguntou ao frentista quantos quilômetros ainda faltavam até a cidade de Berlândia.
Se as informações dadas no texto e a verificação feita por Benedito estão corretas, qual deve ser a resposta do frentista?
a) 17 km. **c)** 51 km. **e)** 71 km.
b) 34 km. **d)** 68 km.

2. **Enem PPL 2019** No trapézio isósceles mostrado na figura a seguir, M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, e os pontos P e Q são obtidos dividindo o segmento $\overline{AD}$ em três partes iguais.



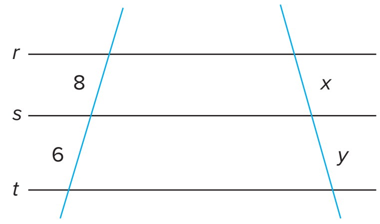
Pelos pontos B, M, C, P e Q são traçados segmentos de reta, determinando cinco triângulos internos ao trapézio, conforme a figura.
A razão entre $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ que determina áreas iguais para os cinco triângulos mostrados na figura é
a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{3}{5}$ **e)** $\frac{5}{6}$

3. **Unicamp-SP 2015** A figura a seguir exibe um retângulo ABCD decomposto em quatro quadrados.



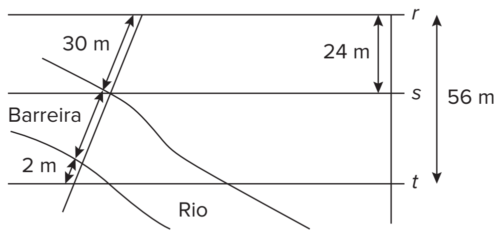
O valor da razão $\frac{AB}{BC}$ é igual a:
a) $\frac{5}{3}$ **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{3}{2}$

4. **UFRRJ** Pedro está construindo uma fogueira, representada pela figura a seguir. Ele sabe que a soma de x com y é 42 e que as retas r, s e t são paralelas.



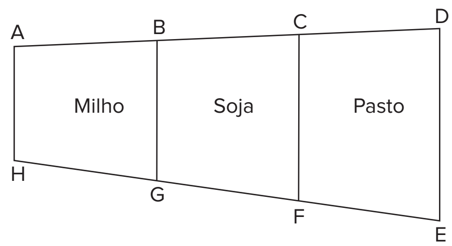
A diferença $x - y$ é:
a) 2 **d)** 10
b) 4 **e)** 12
c) 6

5. A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscar alternativas para a geração de energia elétrica necessária para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo de suas instalações.



Observando a figura e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, é correto afirmar que a barreira mede:
a) 33 m.
b) 38 m.
c) 43 m.
d) 48 m.
e) 53 m.

6. **CPS-SP 2012** Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda, é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme a figura.



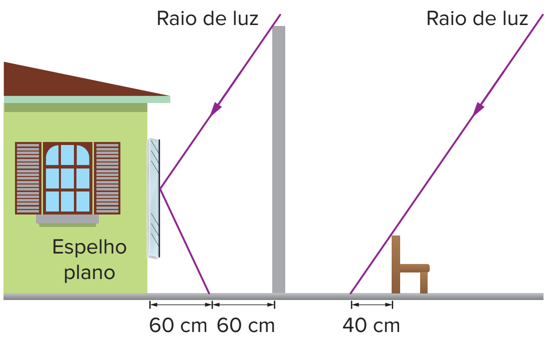
Considere que:

- os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- os pontos H, G, F e E estão alinhados;
- os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500 m, BC = 600 m, CD = 700 m e HE = 1 980 m.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros:

a) 665 **c)** 655 **e)** 645
b) 660 **d)** 650

7. Famema-SP 2019 Tomando como referência a sombra gerada por uma cadeira de 60 cm de altura, uma pessoa decidiu determinar a altura de um muro construído próximo à lateral de sua casa por meio de métodos geométricos. A casa, o muro e a cadeira estavam sobre o mesmo chão horizontal e, como não era possível obter uma sombra completa do muro, a pessoa providenciou um espelho plano que prendeu paralelamente à lateral da casa, como mostra a figura, que representa os resultados obtidos em um mesmo instante.



A pessoa concluiu que o muro tinha uma altura de:

a) 3,2 m. **c)** 2,4 m. **e)** 2,1 m.
b) 3,0 m. **d)** 2,7 m.

8. Uncisal 2020 O Monumento ao Empresário, ilustrado na figura I a seguir, localiza-se na cidade do Porto, em Portugal, e possui características geométricas marcantes. Suponha que, inspirado nesse monumento, um projetista tenha idealizado uma pequena escultura decorativa nas dimensões apresentadas na figura II a seguir para o triângulo retângulo ABC e para o retângulo sombreado. A escultura não vai reproduzir integralmente as cerâmicas do monumento, mas terá uma placa retangular colada no local sombreado.

Figura I

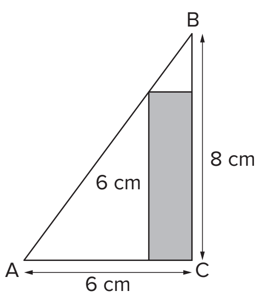


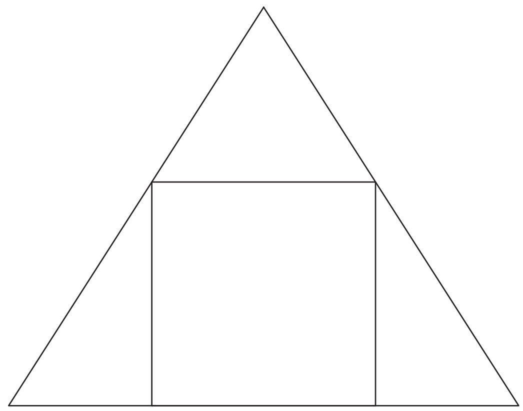
Figura II

Disponível em: https://pt.wikipedia.org. Acesso em: dez. 2016 (adaptado).

Considerando-se as dimensões informadas, o lado menor da placa retangular da escultura decorativa medirá

a) 1 cm. **c)** 1,5 cm. **e)** 3 cm.
b) 1,2 cm. **d)** 2 cm.

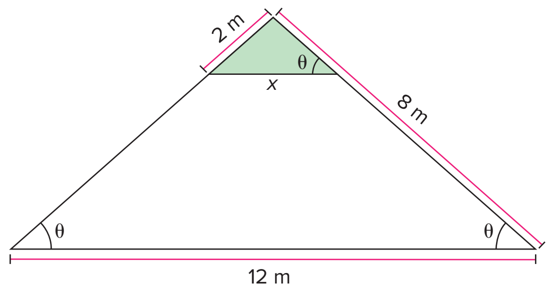
9. Enem 2020 Os alunos do curso de matemática de uma universidade desejam fazer uma placa de formatura, no formato de um triângulo equilátero, em que os seus nomes aparecerão dentro de uma região quadrada, inscrita na placa, conforme a figura.



Considerando que a área do quadrado, em que aparecerão os nomes dos formandos, mede 1 m^2, qual é aproximadamente a medida, em metro, de cada lado do triângulo que representa a placa? (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$.)

a) 1,6 **c)** 2,4 **e)** 6,4
b) 2,1 **d)** 3,7

10. PUC-RS 2014 Considere a imagem a seguir, que representa o fundo de uma piscina em forma de triângulo com a parte mais profunda destacada.



O valor em metros da medida "x" é:

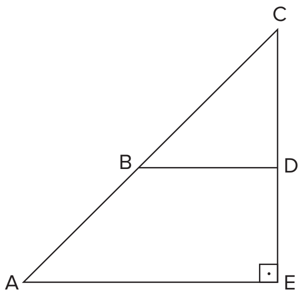
a) 2 **c)** 3 **e)** 6
b) 2,5 **d)** 4

11. Enem A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 m. **d)** 5,6 m.
b) 3,0 m. **e)** 7,04 m.
c) 5,4 m.

12. IFMG 2014 A figura a seguir tem as seguintes características:

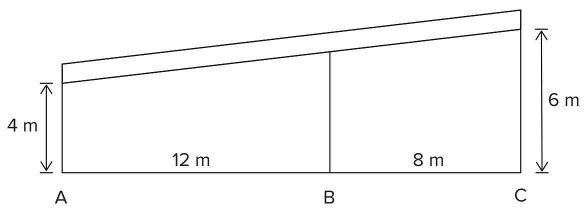
- o ângulo $\hat{E}$ é reto;
- o segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;
- os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$ medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede:

a) 8
b) 12
c) 13
d) $\sqrt{61}$
e) $5\sqrt{10}$

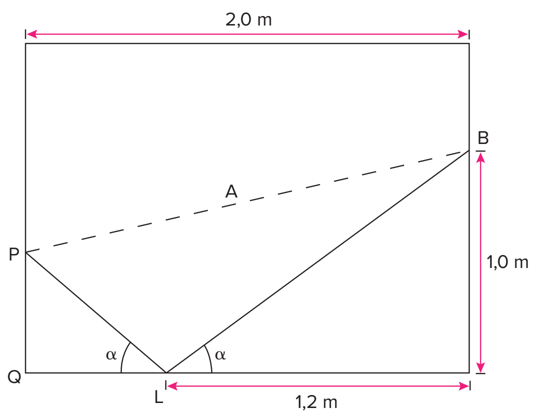
13. UFPR Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos A, B e C, como mostra a figura a seguir. Os suportes nas extremidades A e C medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.



A altura do suporte em B é, então, de:

a) 4,2 m.
b) 4,5 m.
c) 5 m.
d) 5,2 m.
e) 5,5 m.

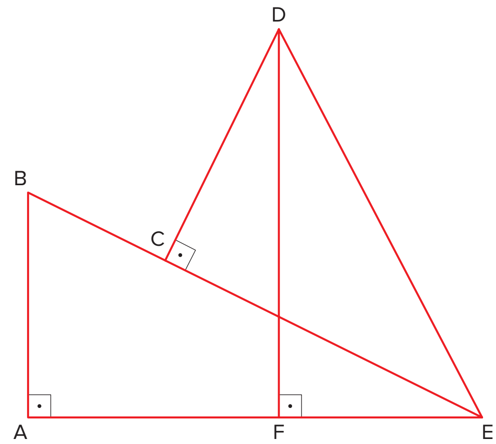
14. IFMG 2015 A ilustração a seguir representa uma mesa de sinuca retangular, de largura e comprimento iguais a 1,5 m e 2,0 m, respectivamente. Um jogador deve lançar a bola branca do ponto B e acertar a preta no ponto P, sem acertar em nenhuma outra antes. Como a amarela está no ponto A, esse jogador lançará a bola branca até o ponto L, de modo que a mesma possa rebater e colidir com a preta.



Se o ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e o ângulo de rebatimento são iguais, como mostra a figura, então a distância de P a Q, em cm, é, aproximadamente:

a) 67
b) 70
c) 74
d) 81

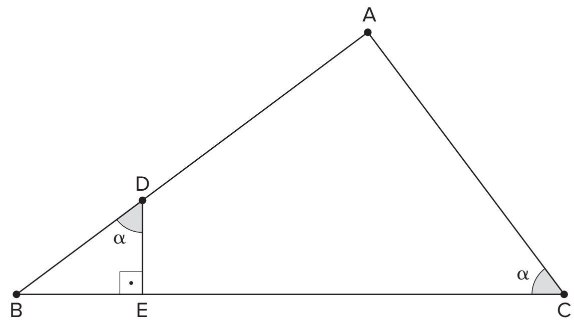
15. UFMS 2021 Uma estudante de Arquitetura colocou dois esquadros (ABE e CDE), conforme a figura a seguir:



Com um barbante, traçou o segmento de reta DF e, utilizando um escalímetro, encontrou as seguintes medidas: $DE = EB = 50$ cm, $CD = 30$ cm e $AB = 14$ cm. Após essas medidas e utilizando as relações métricas dos triângulos retângulos, ela calculou o valor do segmento $\overline{EF}$, encontrando:

a) 12 cm.
b) 18 cm.
c) 24 cm.
d) 30 cm.
e) 36 cm.

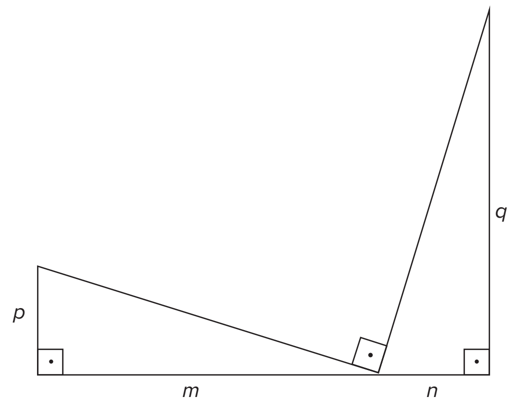
16. Udesc 2020 Na figura, o triângulo BDE é retângulo em E, a medida da hipotenusa é igual a $\frac{12}{5}$ cm e a do cateto $BE = 2$ cm.



Considerando $\hat{C} = B\hat{D}E$ e $BC = 12$ cm, a área do triângulo ABC é igual a:

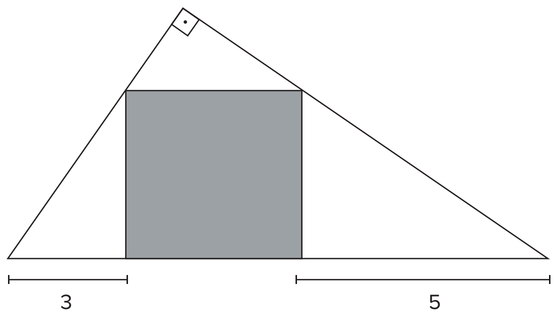
a) $10\sqrt{11}\ cm^2$
b) $2\sqrt{11}\ cm^2$
c) $20\sqrt{11}\ cm^2$
d) $4\sqrt{11}\ cm^2$
e) $5\sqrt{11}\ cm^2$

17. Indique a alternativa que apresenta uma relação correta entre as medidas m, n, p e q dos catetos dos dois triângulos retângulos da figura a seguir, em que os segmentos de medidas m e n são colineares.



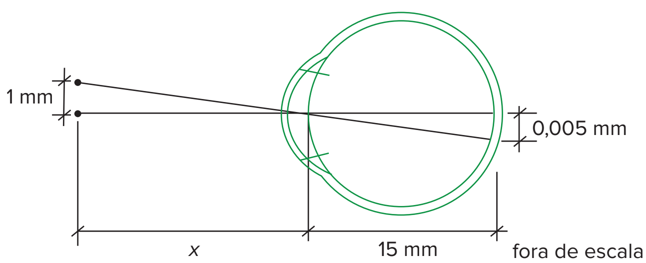
a) $p \cdot m = n \cdot q$
b) $p \cdot n = m \cdot q$
c) $p \cdot q = m \cdot n$
d) $p + m = n + q$
e) $p + q = m + n$

18. **Mackenzie-SP** A área do quadrado assinalado na figura é igual a:



a) 15
b) 20
c) 12
d) 18
e) 16

19. **Unesp** Para que alguém, com o olho normal, possa distinguir um ponto separado de outro, é necessário que as imagens desses pontos, que são projetadas em sua retina, estejam separadas uma da outra a uma distância de 0,005 mm.



Adotando-se um modelo muito simplificado do olho humano no qual ele possa ser considerado uma esfera, cujo diâmetro médio é igual a 15 mm, a maior distância x, em metros, que dois pontos luminosos, distantes 1 mm um do outro, podem estar do observador, para que este os perceba separados, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

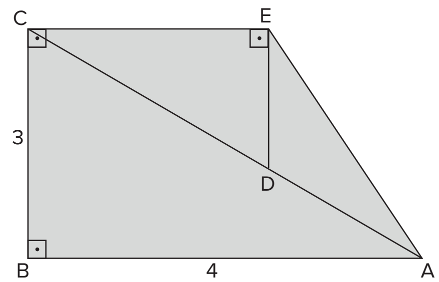
20. **EsSA-MG 2021** Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa e sabendo que AH = 6 cm e BH = 2 cm, o produto dos comprimentos dos catetos é igual a:

a) 150 cm^2
b) 144 cm^2
c) 120 cm^2
d) 180 cm^2
e) 108 cm^2

21. **Fuvest-SP 2021** Um marceneiro possui um pedaço de madeira no formato de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 12 cm e 35 cm. A partir desta peça, ele precisa extrair o maior quadrado possível, de tal forma que um dos ângulos retos do quadrado coincida com o ângulo reto do triângulo. A medida do lado do quadrado desejado pelo marceneiro está mais próxima de

a) 8,0 cm.
b) 8,5 cm.
c) 9,0 cm.
d) 9,5 cm.
e) 10,0 cm.

22. **ESPM-SP** Na figura a seguir, sabe-se que os ângulos $E\hat{A}D$ e $D\hat{E}A$ são congruentes.



A medida do segmento $\overline{CE}$ é igual a:

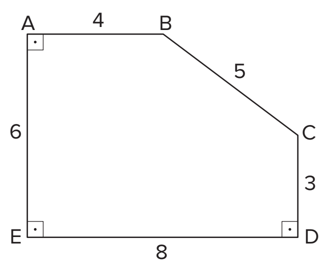
a) 2,8
b) 2,4
c) 2,0
d) 2,5
e) 2,3

23. O futebol de mesa, também conhecido como "jogo de botão", é praticado sobre uma mesa de madeira que representa um campo de futebol em uma escala menor.

Se as dimensões das traves de um campo oficial de futebol são de 7,32 m : 2,44 m e as dimensões da trave de um "campo" de futebol de mesa são de 13,6 cm : 4,5 cm, então podemos concluir que essa escala de representação é de, aproximadamente:

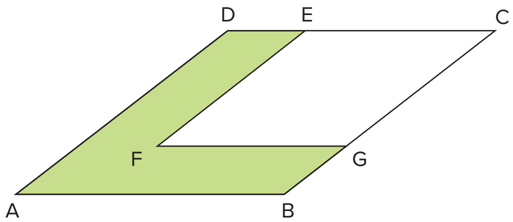
a) 1 : 54 000
b) 1 : 5 400
c) 1 : 540
d) 1 : 54
e) 1 : 5,4

24. **PUC-Rio 2020** No pentágono abaixo, os ângulos $E\hat{A}B$, $C\hat{D}E$ e $D\hat{E}A$ são retos. Quanto vale a área do pentágono?



a) 30
b) 36
c) 42
d) 48
e) 64

25. **Unesp 2017** Na figura, o losango FGCE possui dois lados sobrepostos aos do losango ABCD e sua área é igual à área indicada em verde.



Se o lado do losango ABCD mede 6 cm, o lado do losango FGCE mede:

a) $2\sqrt{5}$ cm.
b) $2\sqrt{6}$ cm.
c) $4\sqrt{2}$ cm.
d) $3\sqrt{3}$ cm.
e) $3\sqrt{2}$ cm.

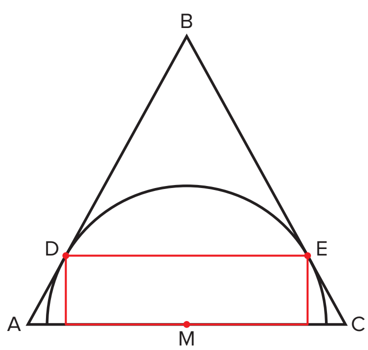
26. Uma distribuidora de alimentos oferece refeições para viagem em embalagens cúbicas de três tamanhos. A aresta da maior delas, chamada de "tamanho família", mede o dobro da aresta da menor delas, que é chamada de "porção individual".
Supondo que a "porção individual" seja honesta, ou seja, que alimente satisfatoriamente uma única pessoa, determine quantas pessoas a refeição "tamanho família" deve alimentar.

a) 4 pessoas.
b) 6 pessoas.
c) 8 pessoas.
d) 10 pessoas.
e) 12 pessoas.

27. Se $\overrightarrow{BP}$ é uma bissetriz interna do triângulo ABC de lados AB = 12 cm, BC = 15 cm e AC = 9 cm, então as medidas dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$ são, respectivamente:

a) 1 cm e 8 cm.
b) 2 cm e 7 cm.
c) 3 cm e 6 cm.
d) 4 cm e 5 cm.
e) 4,5 cm e 4,5 cm.

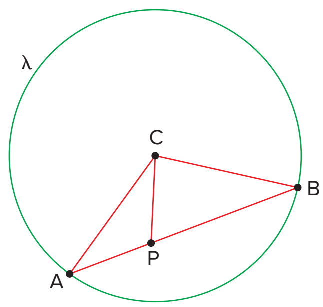
28. **FMABC-SP 2022** A figura mostra o triângulo equilátero ABC, de lado igual a 8 cm, e uma semicircunferência de centro M que tangencia os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo nos pontos D e E.



Se M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$, então a razão entre a medida da base e a medida da largura do retângulo indicado na figura, nesta ordem, é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

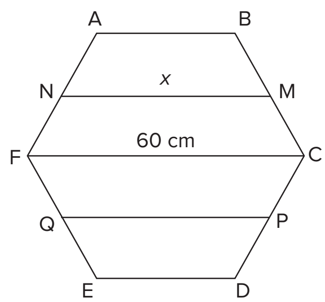
29. **FGV-SP 2021** A figura representa um círculo λ de centro C. Os pontos A e B pertencem à circunferência λ e o ponto P pertence a $\overline{AB}$. Sabe-se que PC = PA = k e que PB = 5, em unidades de comprimento.



A área de λ, em unidades de área, é igual a:

a) $\pi(25 - k^2)$
b) $\pi(k^2 + 5k)$
c) $\pi(k^2 + 5)$
d) $\pi(5k^2 + k)$
e) $\pi(5k^2 + 5)$

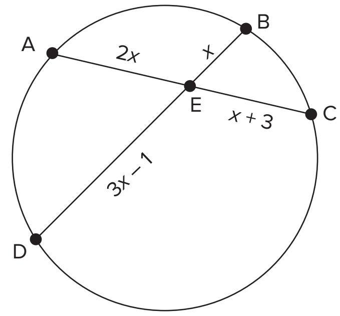
30. Uma loja de móveis vende estantes no formato de hexágonos regulares com cinco prateleiras paralelas, como mostra a ilustração a seguir.



As prateleiras menores da estante são os próprios lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ do hexágono ABCDEF. A prateleira maior, que mede 60 cm, ocupa a posição da diagonal $\overline{CF}$ do hexágono. As demais prateleiras se apoiam sobre os pontos médios M, N, P e Q dos lados do hexágono.
Assim, o comprimento x da prateleira $\overline{MN}$, em centímetros, é:

a) 40 cm.
b) 42 cm.
c) 43 cm.
d) 45 cm.
e) 48 cm.

31. **Unesp 2014** Em um plano horizontal, encontram-se representadas uma circunferência e as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Nas condições apresentadas na figura, determine o valor de x.



32. Para determinar as dimensões x_n e y_n dos retângulos que serão usados na composição de um mosaico, um artista plástico tomou um ponto P diferente do centro de uma circunferência e traçou três cordas passando por esse ponto, determinando três pares de segmentos colineares, como mostra a Figura 1.

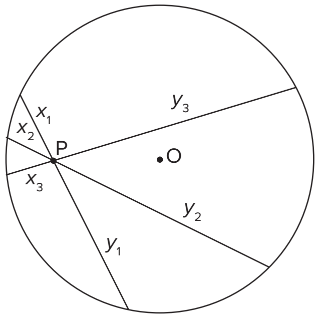


Figura 1

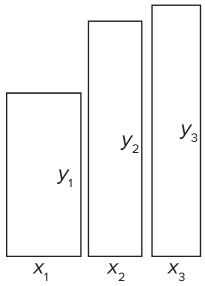


Figura 2

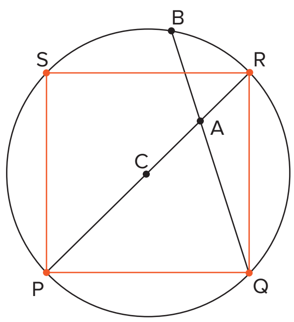
Depois, as medidas desses segmentos foram usadas para construir os retângulos da Figura 2. Sobre esses retângulos, é correto afirmar que todos:

a) têm o mesmo perímetro.
b) têm a mesma área.
c) têm a mesma medida de diagonal.
d) são semelhantes.
e) são inscritíveis em uma mesma circunferência.

33. FGV-SP 2018 Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede $\sqrt{52}$ e a medida de um cateto é 50% superior à medida do outro. A medida da altura relativa à hipotenusa é:

a) $\frac{4\sqrt{13}}{5}$ **c)** $\frac{12\sqrt{13}}{13}$ **e)** $\frac{6\sqrt{13}}{5}$
b) $\frac{16\sqrt{13}}{13}$ **d)** $\frac{16\sqrt{13}}{15}$

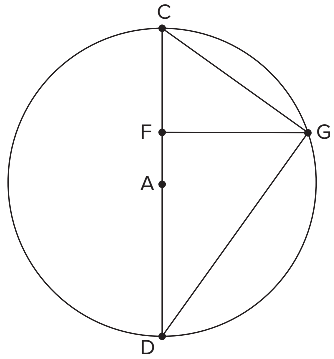
34. FGV-SP 2017 O quadrado PQRS está inscrito em um círculo de centro C. A corda $\overline{BQ}$ intersecta a diagonal $\overline{PR}$ do quadrado em A, sendo que QA = 6 cm e AB = 4 cm.



Nas condições descritas, a medida do lado do quadrado PQRS, em cm, é igual a

a) $2\sqrt{10}$
b) $5\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{15}$
d) $6\sqrt{2}$
e) $7\sqrt{2}$

35. IFMG 2017 Na figura, A é o centro da circunferência, $\overline{CD}$ é o diâmetro e $\overline{GF}$ é a altura do triângulo CDG.



Sendo CG = 3 cm e DG = 4 cm, o segmento $\overline{AF}$ mede, em centímetros,

a) 0,3 **b)** 0,5 **c)** 0,7 **d)** 0,9

36. Ufam 2020 Sabendo que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo medem, respectivamente, 3 cm e 5 cm, a área do triângulo, em cm^2, é de:

a) 6 **b)** 9 **c)** $4\sqrt{15}$ **d)** $5\sqrt{8}$ **e)** $7\sqrt{12}$

37. Ifal Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4 m e 1 m, respectivamente. Calcule a área desse triângulo.

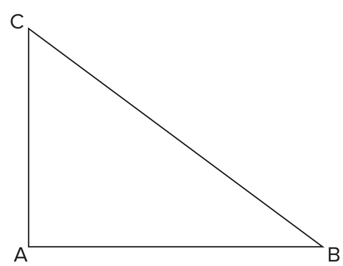
a) 5 cm^2. **d)** 50 dm^2.
b) 50 cm^2. **e)** 5 dm^2.
c) 50 000 cm^2.

38. IFCE A altura, baixada sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, mede 12 cm, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa diferem de 7 cm. Os lados do triângulo são, em centímetros, iguais a

a) 10, 15 e 20. **d)** 16, 21 e 26.
b) 12, 17 e 22. **e)** 18, 23 e 28.
c) 15, 20 e 25.

39. CPII-RJ 2017 Observe o esquema a seguir, que representa certo trecho do Oceano Atlântico na costa brasileira. Um navio de pesquisas, situado inicialmente no ponto B, deve seguir rumo ao ponto C em linha reta. Sabe-se que a distância BC é igual a 10 km. No ponto A, encontra-se uma ilha e o navio deve parar, na sua trajetória, em um ponto o mais próximo possível dessa ilha para que uma equipe de biólogos siga em um barco auxiliar a fim de coletar algumas espécies de plantas nativas para análise.

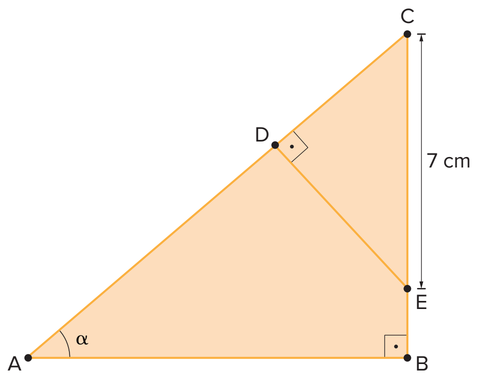
Considere que a região limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ seja plana e que o ângulo $B\hat{A}C$ meça 90°.



Se a distância do navio à ilha, ao iniciar sua trajetória em B, era de 8 km, podemos afirmar que, nesse percurso, a menor distância do navio à ilha será igual a

a) 5,2 km.
b) 5,0 km.
c) 4,8 km.
d) 3,6 km.

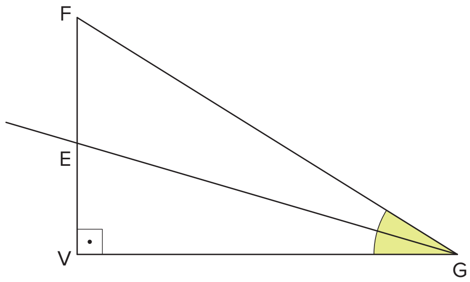
40. FMABC-SP 2021 Os pontos D e E estão sobre os lados de um triângulo retângulo ABC, de maneira que CE = 7 cm e tg α = 0,75, conforme mostra a figura.



Se o perímetro do quadrilátero ABED é 30,4 cm, a medida do segmento AD é

a) 12,8 cm. **b)** 10,8 cm. **c)** 17,8 cm. **d)** 15,8 cm. **e)** 8,8 cm.

41. FGV-SP 2021 A figura indica o triângulo FGV, com ângulo reto em V e medida do ângulo $F\hat{G}V$, em graus, igual a 2α. A bissetriz do ângulo $F\hat{G}V$ intersecta $\overline{FV}$ em E.



Sabendo-se que GE = 6 cm e FE = 3 cm, a medida de $\overline{FG}$, em cm, é igual a

a) $3\sqrt{5 - 4\cos\alpha}$
b) $\sqrt{9 - 6\cos\alpha}$
c) $\sqrt{9 - 6\cos(90° + \alpha)}$
d) $3\sqrt{5 + 4\cos(90° + \alpha)}$
e) $3\sqrt{5 - 4\cos(90° + \alpha)}$

Texto complementar

A razão áurea

Também denominada média e extrema razão, a razão áurea é um número irracional indicado pela letra grega φ que depende da raiz quadrada de cinco. Esse número pode ser obtido por meio das medidas de um pentagrama regular de diversas formas diferentes.

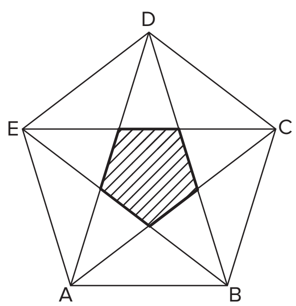
[...]

Dizem que Platão estudou matemática com o pitagórico Teodoro de Cirene, que foi o primeiro a provar que, além da raiz quadrada de dois, números como raiz quadrada de três, raiz quadrada de cinco, até a raiz quadrada de dezessete também eram irracionais. Considerando o papel de Platão na matemática em geral, e em relação à razão áurea, em particular, temos que analisar não só suas contribuições puramente matemáticas, mas o efeito de sua influência e de seu estímulo para a matemática de outras pessoas da sua e das gerações seguintes. Até certo ponto Platão pode ser considerado um dos primeiros teóricos autênticos. Platão tinha um grande interesse pelas propriedades dos números e das figuras geométricas. [...]

Um pentagrama regular é obtido traçando-se as diagonais do pentágono regular ABCDE, como na figura a seguir. O pentágono menor (hachurado), formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com ABCDE. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado do número de ouro. A razão entre a área do pentágono maior e a do pentágono menor é igual à quarta potência do número de ouro. No triângulo isósceles ABD, seus lados maiores $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ estão em média e extrema razão com sua base.

Isto é:

$$\frac{AD}{AB} = \varphi$$



No pentagrama, as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono. Pode-se observar na figura anterior que a razão entre a medida da diagonal $\overline{DA}$ e a medida do lado $\overline{AB}$ do pentágono é φ, a razão entre a medida da diagonal $\overline{DB}$ e a medida do lado $\overline{BC}$ também é φ, e a razão entre a medida da diagonal $\overline{CA}$ e a medida do lado $\overline{AE}$ também é φ.

Ou seja:

$$\frac{DA}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{AC}{AE} = \varphi$$

Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica. Esse era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que tudo é número, ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos. [...]

Por mais de 500 anos antes de Cristo, os gregos (pitagóricos) estudaram as relações entre os segmentos de um pentagrama. Determinaram um número que desempenha um importante papel na geometria, na estética, nas artes, na arquitetura e na biologia. [...]

A razão áurea, além de um conceito matemático, é uma expressão de harmonia e beleza. Os antigos gregos avaliavam essa harmonia nos seres vivos e não vivos, buscando em suas dimensões uma proporção que se aproximasse da razão áurea.

Um segmento de reta ou linha dividida na razão áurea é uma das primeiras situações que aparece quando se pesquisa sobre a razão áurea.

O estudo da razão áurea pode se começar por um segmento de reta qualquer, que podemos imaginar que esteja dividido de tal forma que resulte em um segmento maior e outro segmento menor. A razão áurea ocorre quando o segmento menor dividido pelo maior é igual ao maior dividido pelo segmento todo.

Na figura a seguir, podemos mostrar como isso ocorre.

Segmento em média e extrema razão

O segmento maior da figura anterior, $\overline{AD}$, possui o valor 1 e o menor, $\overline{DB}$, o valor X.

Temos que:

$$\frac{X}{1} = \frac{1}{1 + X}$$

Ou, então,

$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{AB}$$

Para esclarecermos como o segmento da figura está dividido em uma razão áurea, pode-se resolver a equação:

$$\frac{X}{1} = \frac{1}{1 + X} \Rightarrow X^2 + X = 1 \Rightarrow X^2 + X - 1 = 0$$

Utilizando a fórmula quadrática temos:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

Ou seja,

$$X' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow X' = 0{,}6180339...$$

e o

$$X'' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow X'' = -1{,}6180339...$$

Portanto, o valor encontrado para X' é conhecido como o valor da razão áurea, que é representada pela letra grega fi minúscula ($\varphi = 0{,}6180339...$), resultado da razão do menor pelo maior. Como $X > 0$ e trata-se de um segmento, podemos desconsiderar o resultado encontrado do $X'' = -1{,}6180339...$ por ser negativo.

Fonte: OLIVEIRA, Cristiano Barreto de. *Razão áurea*: suas aplicações e importância no ensino de matemática. (Monografia) – Faculdade Alfredo Nasser. Aparecida de Goiânia, 2010. p. 17-20. (Adapt.). Disponível em: https://docplayer.com.br/23047162-Razao-aurea-suas-aplicacoes-e-importancia-no--ensino-de-matematica.html. Acesso em: 12 ago. 2022.

Resumindo

Razão de divisão de segmento

- Se um ponto S pertence à reta determinada pelos pontos A e B, e não coincide com B, então S divide o segmento $\overline{AB}$ na razão $k = \frac{SA}{SB}$.

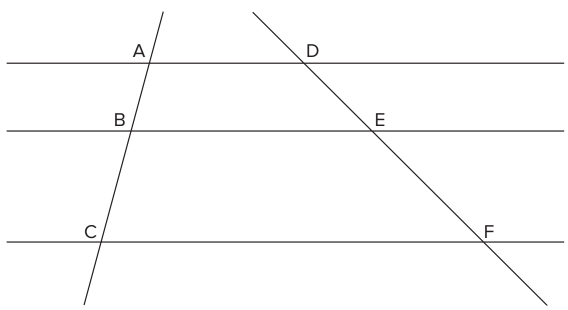
Divisão média
$k = 1$

Divisão harmônica
$k \neq 1$

Divisão áurea
$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Teorema de Tales

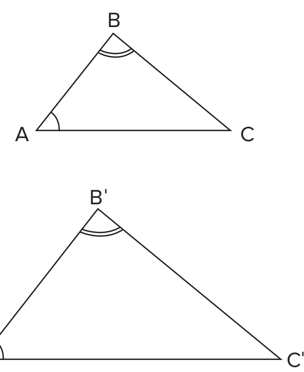
Se um feixe de retas paralelas é intersectado por duas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas são proporcionais.



$$\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BE} \,//\, \overleftrightarrow{CF} \Leftrightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se as medidas dos lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \\ \hat{A} = \hat{A'} \text{ e } \hat{B} = \hat{B'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C'} \end{cases}$$

k é a razão de semelhança entre os triângulos.

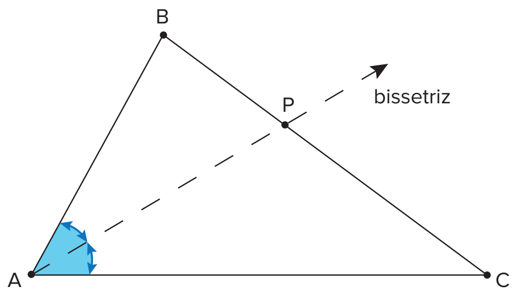
Razão de semelhança

Se *k* é a razão de semelhança entre duas figuras geométricas, então:

- a razão entre quaisquer comprimentos correspondentes é igual a *k*;
- a razão entre as áreas de regiões correspondentes é igual a k^2;
- a razão entre os volumes, no caso de serem figuras espaciais, é igual a k^3.

Teorema da bissetriz interna de um triângulo

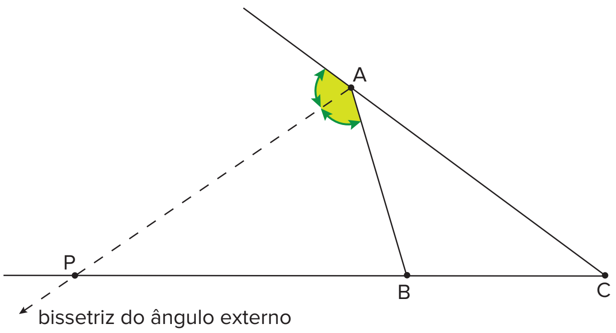
As bissetrizes internas de um triângulo dividem os lados opostos aos ângulos de origem em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.



$$\overrightarrow{AP} \text{ é bissetriz interna} \Rightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$$

Teorema da bissetriz externa de um triângulo

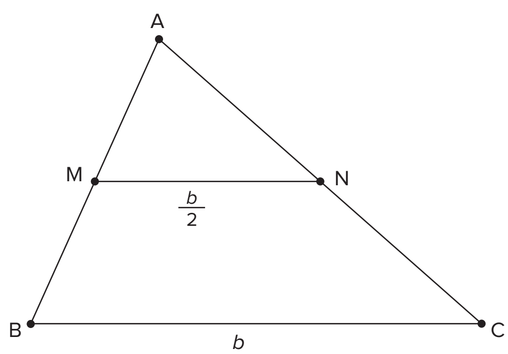
As bissetrizes externas de um triângulo determinam, no prolongamento do lado oposto, dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.



$$\overrightarrow{AP} \text{ é bissetriz externa} \Rightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$$

Teorema da base média do triângulo

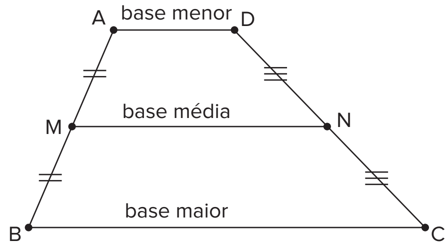
Cada base média de um triângulo é paralela e tem a metade do comprimento da base correspondente no triângulo.



$$\left.\begin{array}{c} AM = MB \\ \text{e} \\ AN = NC \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overline{MN} \mathbin{//} \overline{BC} \text{ e } MN = \frac{BC}{2}$$

Teorema da base média do trapézio

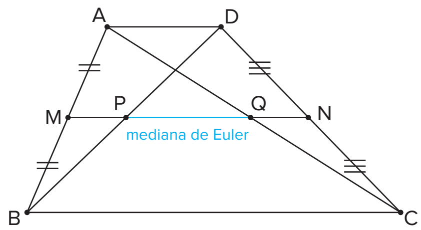
A base média é paralela às bases do trapézio e mede a média aritmética dos comprimentos dessas bases.



$$\left.\begin{array}{c} AM = MB \\ \text{e} \\ DN = NC \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \overline{MN} \mathbin{//} \overline{AD} \mathbin{//} \overline{BC} \\ \text{e} \\ MN = \dfrac{AD + BC}{2} \end{array}\right.$$

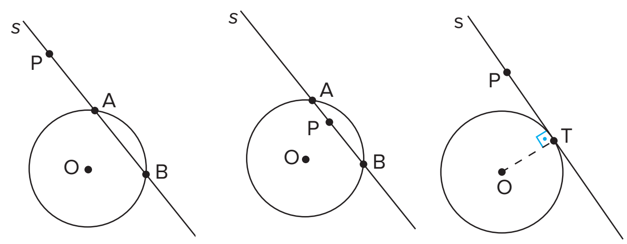
Mediana de Euler

A mediana de Euler em um trapézio equivale à metade da diferença absoluta entre as bases desse trapézio.



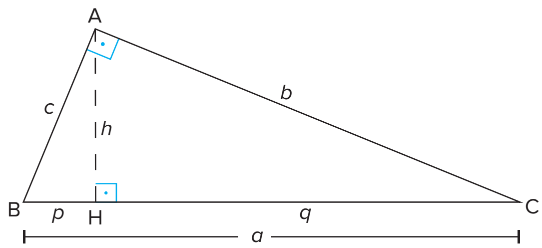
$$\text{Mediana de Euler} = \frac{\text{base maior} - \text{base menor}}{2}$$

Teorema da potência de um ponto em relação a uma circunferência



$PA \cdot PB = r^2 - PO^2$ $\quad PA \cdot PB = PO^2 - r^2$ $\quad PT = PO^2 - r^2$

Relações métricas nos triângulos retângulos



$a = p + q$ $\qquad c^2 = a \cdot p$

$a \cdot h = b \cdot c$ $\qquad h^2 = p \cdot q$

$b^2 = a \cdot q$ $\qquad a^2 = b^2 + c^2$ (Pitágoras)

Quer saber mais?

Sites

POTÊNCIA de ponto. *Olimpédia*, 7 ago. 2021. Disponível em: https://olimpedia.fandom.com/pt-br/wiki/Pot%C3%AAncia_de_Ponto.
Nessa página da Olimpédia, *wiki* dedicada a olimpíadas científicas, são apresentados enunciados e as respectivas resoluções de alguns exercícios de olímpiadas de Matemática, como a OBM. Acesso em: 29 jul. 2022.

A ALTURA da pirâmide de Quéops e o teorema de Tales. *Derivando a Matemática*. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-altura-da-piramide-de-queops-e-o-teorema-de-tales/.
Esse artigo, do grupo Derivando a Matemática, da Unicamp, aborda a história do filósofo e matemático Tales de Mileto e o método utilizado por ele para medir a altura da pirâmide de Quéops. Além disso, apresenta duas demonstrações para o teorema que leva seu nome. Acesso em: 29 jul. 2022.

Vídeo

POLIEDRO Educação. *Tales de Mileto: por que ele é o pai da nossa tradição filosófica?* YouTube, 10 set. 2018. Disponível em: https://youtu.be/MmIr8SMOxGA.
Nesse curto vídeo, o professor Daniel Gomes explica a importância do pensamento de Tales de Mileto para a Filosofia ocidental. Acesso em: 29 jul. 2022.

Exercícios complementares

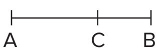
1. **IME-RJ 2022** Considere os triângulos ABC em que BC = 32 e $\frac{AB}{AC} = 3$. O maior valor possível para a altura relativa ao lado BC é:

a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 11.
e) 12.

2. Uma determinada rodovia federal passa pelas proximidades das cidades A e B. A entrada para a cidade A fica no quilômetro 255, e a entrada principal para a cidade B fica no quilômetro 198. Um empresário deseja construir um posto de gasolina nessa rodovia de tal modo que a distância do posto à entrada principal de uma dessas cidades seja o dobro da distância do posto à entrada principal da outra cidade.
Diante disso, as opções para a localização do posto de gasolina desse empresário em relação ao sistema de quilometragem dessa rodovia são:

a) apenas duas, nos quilômetros 217 e 236.
b) apenas duas, nos quilômetros 141 e 236.
c) apenas três, nos quilômetros 141, 217 e 236.
d) apenas três, nos quilômetros 141, 236 e 312.
e) apenas quatro, nos quilômetros 141, 217, 236 e 312.

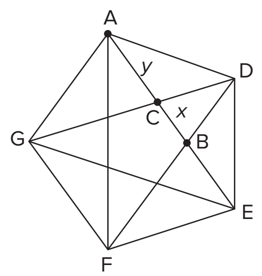
3. **Fuvest-SP (Adapt.)** Define-se geometricamente a razão áurea do seguinte modo: o ponto C da figura a seguir divide o segmento $\overline{AB}$ na razão áurea quando os valores $\frac{AC}{AB}$ e $\frac{CB}{AC}$ são iguais. Esse valor comum é chamado razão áurea.



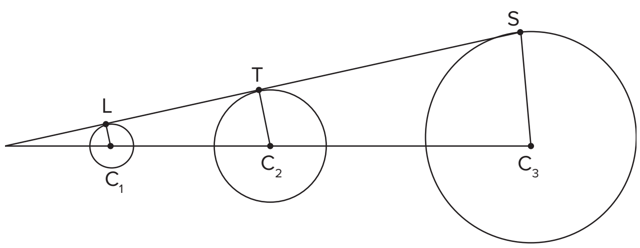
A razão áurea, também denominada proporção áurea, número de ouro ou divina proporção, conquistou a imaginação popular e é tema de vários livros e artigos. Em geral, suas propriedades matemáticas estão corretamente enunciadas, mas muitas afirmações feitas sobre ela na arte, na arquitetura, na literatura e na estética são falsas ou equivocadas. Infelizmente, essas afirmações sobre a razão áurea foram amplamente divulgadas e adquiriram *status* de senso comum. Mesmo livros de geometria utilizados no Ensino Médio trazem conceitos incorretos sobre ela.

Trecho traduzido e adaptado do artigo de G. Markowsky, "Misconceptions about the golden ratio", The College Mathematics Journal, 23, 1, january, 1992, p. 2-19.

Na figura a seguir, o polígono ADEFG é um pentágono regular. Utilize a semelhança de triângulos para demonstrar que o ponto C da figura divide o segmento $\overline{AB}$ na razão áurea.



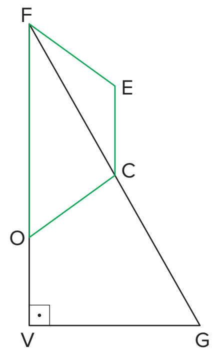
4. **IFMG 2017** A figura a seguir é um esquema representativo de um eclipse lunar em que a Lua, a Terra e o Sol estão representados pelas circunferências de centros C_1, C_2 e C_3, respectivamente, que se encontram alinhados. Considera-se que a distância entre os centros da Terra e do Sol é 400 vezes maior que a distância entre os centros da Terra e da Lua e que a distância do ponto T na superfície da Terra ao ponto S na superfície do Sol, como representados na figura, é de 150 milhões de quilômetros.



Sabendo-se que os segmentos de reta $\overline{C_1L}$, $\overline{C_2T}$ e $\overline{C_3S}$ são paralelos, a distância do ponto L, representado na superfície da Lua, ao ponto T, na superfície da Terra, é igual a

a) 375 000 km.
b) 400 000 km.
c) 37 500 000 km.
d) 40 000 000 km.

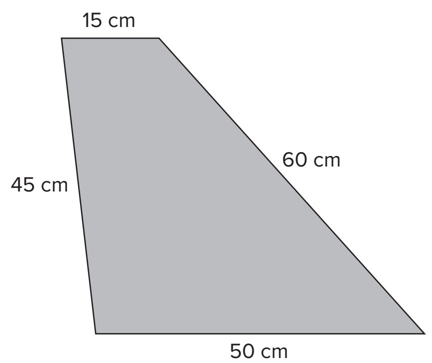
5. **FGV-SP 2020** Na figura, FECO é um trapézio isósceles, com FE = OC = 5 cm, EC = 4 cm e FO = 10 cm, e FGV é um triângulo retângulo com ângulo reto em V, com C em $\overline{FG}$ e O em $\overline{FV}$.



Sabendo-se que C é ponto médio de $\overline{FG}$, a medida de $\overline{OV}$, em centímetros, é

a) 3 **b)** $\frac{13}{4}$ **c)** $\frac{7}{2}$ **d)** $\frac{15}{4}$ **e)** 4

6. Uma chapa metálica no formato de um trapézio com bases de 15 cm e 50 cm, cujos lados não paralelos medem 45 cm e 60 cm, como mostra a figura, deverá ser cortada em duas peças com o mesmo perímetro.



Se o corte for feito sobre uma linha paralela às bases do trapézio, a razão entre as alturas dos trapézios obtidos será:

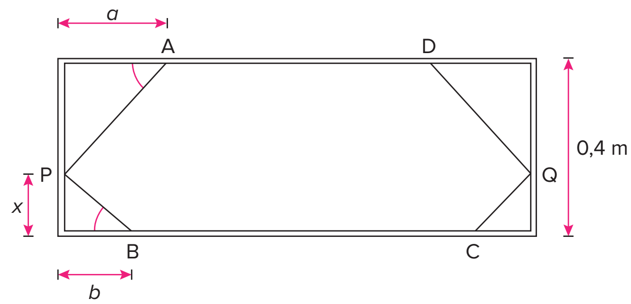
a) de 2 para 1.
b) de 3 para 1.
c) de 4 para 1.
d) de 3 para 2.
e) de 4 para 3.

7. **Unesp** Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial, e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm. Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância da rede, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

8. **IME-RJ 2021** Considere um trapézio de bases AB e CD, com o ponto I sendo a intersecção de suas diagonais. Se as áreas dos triângulos AIB e CID formados pelas diagonais são 9 cm^2 e 16 cm^2, respectivamente, a área do trapézio, em cm^2, é:

a) Não é possível determinar por terem sido fornecidos dados insuficientes.
b) 63.
c) 50.
d) 49.
e) 45.

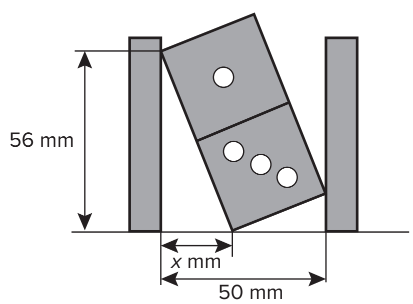
9. Uma estrutura metálica retangular, com dimensões de 1,5 m por 0,4 m, será reforçada por barras de aço presas nos pontos A, P, B, C, Q e D, como ilustra a figura a seguir.



Nessa situação, para usar a menor quantidade de aço possível, os ângulos de vértices A e B, mostrados na figura, devem ter a mesma medida. Dessa forma, se $a = 20$ cm e $b = 5$ cm, a medida x deverá ser igual a:

a) 4 cm.
b) 8 cm.
c) 10 cm.
d) 12 cm.
e) 20 cm.

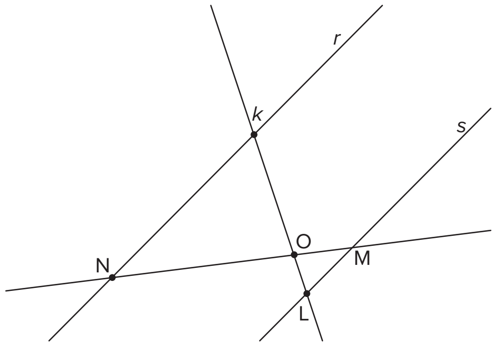
10. Uma brincadeira muito popular que pode ser feita com as pedras do dominó consiste em enfileirar as pedras do jogo para depois derrubá-las todas, como uma reação em cadeia. A internet está repleta de vídeos com as mais criativas cascatas de dominós dispostos em diversas posições diferentes, de modo a gerar padrões esteticamente estimulantes para quem observa o evento da sucessiva queda das pedras. Em uma dessas cascatas de dominós, algumas pedras ficavam em posições oblíquas equilibradas entre duas outras pedras em posição vertical, como mostra a ilustração:



Observando que cada pedra do dominó tem a forma de um retângulo formado por dois quadrados idênticos, determine a medida x, em milímetros, de acordo com as demais medidas indicadas na ilustração.

11. UFSC 2020

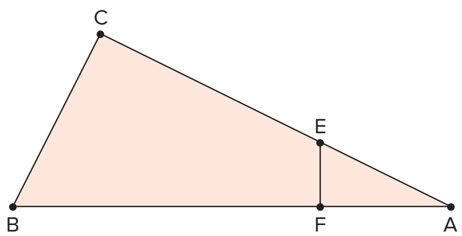
01 Na figura a seguir, *r* e *s* são retas paralelas.



Se os segmentos $\overline{LO}$, $\overline{KO}$, $\overline{NO}$ e $\overline{MO}$ medem, respectivamente, $x - 2$; $5x - 14$; $5x + 1$ e $x + 3$, então a medida do segmento $\overline{MN}$ é 28 unidades de comprimento.

02 Se em um pentágono convexo as medidas dos ângulos internos são indicadas por $2x$, $3x$, 150º, 120º e 135º, então a diferença entre as medidas do maior e do menor ângulo é 130º.

04 O triângulo ABC da figura a seguir é retângulo em C; por outro lado, o triângulo AFE é retângulo em F.



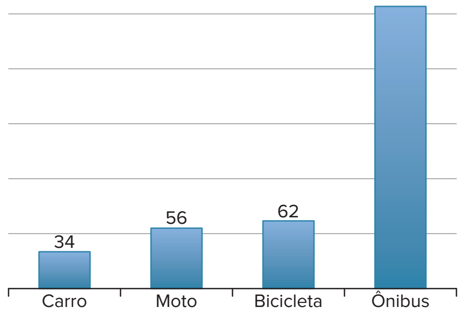
Se os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 12 cm, $\frac{35}{4}$ cm, x cm e 5 cm, então a medida x é um número racional.

08 Um hexágono cujo lado mede 4 cm está inscrito numa circunferência. Se existe um quadrado circunscrito a essa circunferência, então seu perímetro mede 32 cm.

16 Todo losango é um paralelogramo.

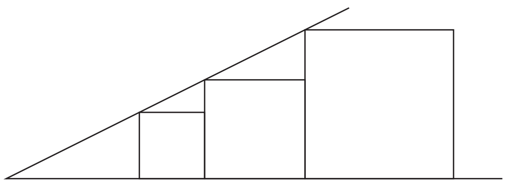
32 Se os lados de um triângulo medem 8 cm, 10 cm e 16 cm, então esse triângulo é acutângulo e escaleno.

64 Numa pesquisa, foi feito um levantamento entre os estudantes que usam apenas um tipo de transporte para ir à universidade. O gráfico a seguir indica a frequência obtida em cada tipo de transporte. Ocorre que, por algum problema técnico, a quantidade de respondentes que se locomovem de ônibus não apareceu na impressão do gráfico. Se a média aritmética obtida, considerando os quatro tipos de transporte, foi de 102, então a quantidade de alunos que se locomovem de ônibus é um número múltiplo de 3.



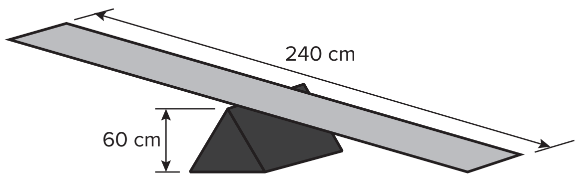
Soma:

12. A figura a seguir apresenta três quadrados de bases consecutivas inscritos em um mesmo ângulo.



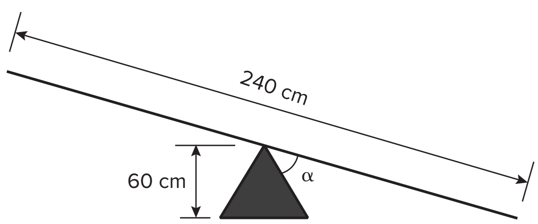
Se os lados dos quadrados menores medem 24 cm e 36 cm, determine o lado do quadrado maior.

13. Unicamp-SP Considere uma gangorra composta por uma tábua de 240 cm de comprimento, equilibrada, em seu ponto central, sobre uma estrutura na forma de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de altura igual a 60 cm, como mostra a figura. Suponha que a gangorra esteja instalada sobre um piso perfeitamente horizontal.

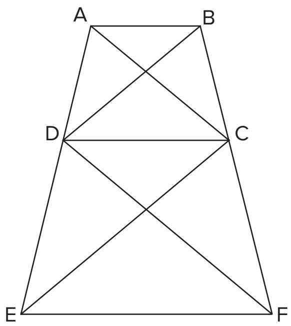


a) Desprezando a espessura da tábua e supondo que a extremidade direita da gangorra está a 20 cm do chão, determine a altura da extremidade esquerda.

b) Supondo, agora, que a extremidade direita da tábua toca o chão, determine o ângulo α formado entre a tábua e a lateral mais próxima do prisma, como mostra a vista lateral da gangorra, exibida a seguir.



14. A estrutura de sustentação de um palco praticável distribui o peso recebido no topo $\overline{AB}$ pelas vigas metálicas soldadas sobre as diagonais dos trapézios ABCD e CDEF, como mostra a figura.

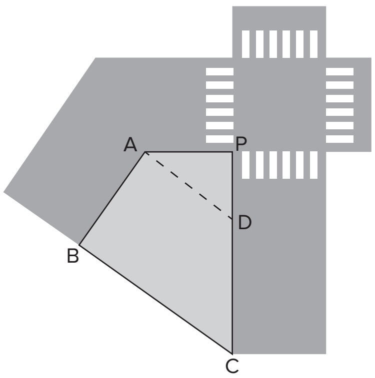


Na figura, as formas geométricas trapezoidais que compõem a estrutura são semelhantes, e as bases do trapézio maior medem 90 cm e 60 cm. Então, se as diagonais do trapézio maior medem exatamente 1 metro, determine:

a) o comprimento do topo $\overline{AB}$ da estrutura.
b) o comprimento aproximado da diagonal $\overline{AC}$ do trapézio.

15. A figura a seguir mostra um terreno na forma de um quadrilátero ABCP, situado na esquina de duas ruas de um condomínio fechado.

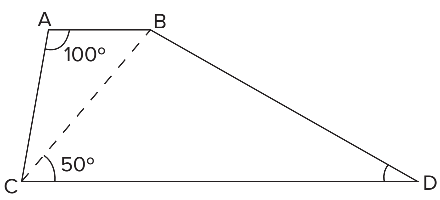
O proprietário deseja construir sua casa sobre a região do terreno representada pelo trapézio retângulo ABCD, cuja base menor $\overline{AD}$ tem a mesma medida do lado $\overline{AB}$, reservando a região representada pelo triângulo retângulo APD para fazer um jardim de entrada.



Se $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ medem, respectivamente, 4 m e 3 m, então o perímetro do terreno representado pelo quadrilátero ABCP mede:

a) 25 m. **b)** 27 m. **c)** 29 m. **d)** 31 m. **e)** 33 m.

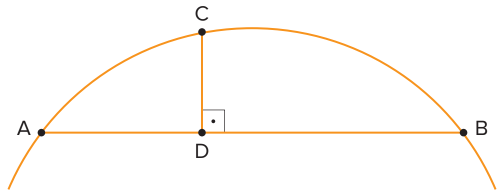
16. O vidro da janela lateral de um novo modelo de veículo tem forma muito semelhante à do trapézio ABCD ilustrado a seguir:



Se os lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ desse trapézio medem 20 cm e 80 cm, a diagonal $\overline{BC}$ mede 40 cm e as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ medem, aproximadamente, 100° e 50°, a melhor estimativa da medida do ângulo $B\hat{D}C$ é:

a) 30° **b)** 35° **c)** 40° **d)** 45° **e)** 50°

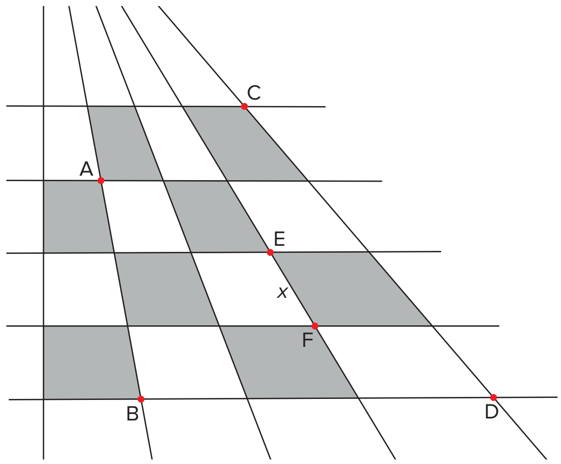
17. **Famema-SP 2022** A figura a seguir mostra uma parte de uma circunferência, uma corda AB e um segmento CD perpendicular a AB.



Sabe-se que AD = 4, DB = 6 e CD = 2. O raio dessa circunferência mede:

a) $\sqrt{42}$. **b)** $\sqrt{46}$. **c)** $\sqrt{50}$. **d)** $\sqrt{54}$. **e)** $\sqrt{58}$.

18. A parede da sala de brinquedos de uma escola infantil foi pintada de modo a tentar representar, em perspectiva, um tabuleiro como o do xadrez, mas com apenas 16 casas. Embora os prolongamentos das linhas não horizontais intersectam-se corretamente em um mesmo ponto, conhecido na teoria da perspectiva como ponto de fuga, o fato de as linhas paralelas horizontais terem sido desenhadas igualmente afastadas umas das outras não está de acordo com a perspectiva correta, que transmite a ideia de que as casas do tabuleiro são equivalentes entre si.



Sabendo que, entre as linhas não horizontais, apenas a primeira da esquerda para a direita é vertical, de acordo com as características dessa pintura, se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem 1 m e 2 m, respectivamente, então a medida x, em centímetros, do segmento $\overline{EF}$ é tal que:

a) $20 < x < 33$
b) $33 < x < 50$
c) $50 < x < 62$
d) $62 < x < 75$
e) $75 < x < 100$

19. **UEG-GO** O formato dos papéis que utilizamos, tais como A0, A1, A2, A3, A4, ..., A10, tem uma relação muito interessante, conforme descreveremos a seguir. Partindo do papel A0, obtém-se o papel A1 do seguinte modo: o menor lado do papel A1 é a metade do maior lado do papel A0, e o maior lado do papel A1 é igual ao menor lado do A0. Do mesmo modo, a folha do papel A2 é obtida da folha A1, a folha do papel A3 é obtida da folha de papel A2 e assim sucessivamente. Considerando que as folhas de papel descritas acima são retangulares e que os papéis como A0, A1, A2, A3, A4, ..., A10 são semelhantes, então a razão entre o maior e o menor lado do papel A4 é igual a:

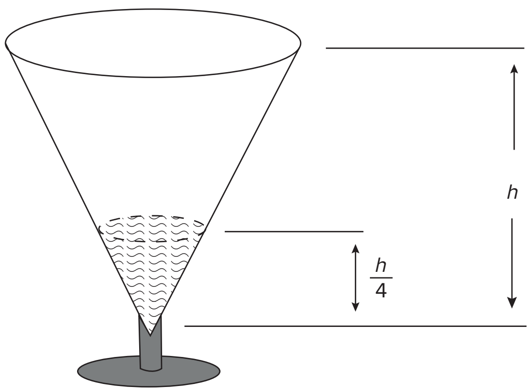
a) $\sqrt{2}$

b) 2

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

20. Um cálice de cristal com a forma de um cone contém exatamente 5 mL de água.



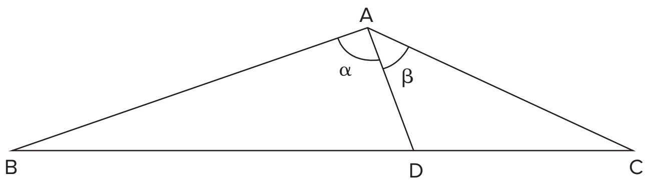
Sabendo que a água no interior do cálice atinge apenas um quarto de sua altura, determine:

a) a razão de semelhança entre os cones de água e de cristal;

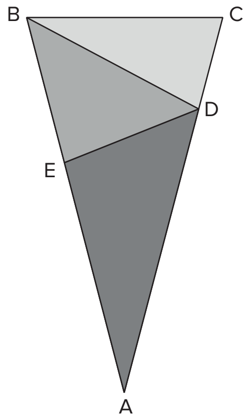
b) a razão entre os volumes do cone de água e de cristal;

c) o volume de água necessário para se completar a capacidade total do cálice.

21. No triângulo ABC, o segmento $\overline{AD}$ divide o ângulo interno de vértice A em dois outros ângulos de medidas $\alpha = 130°$ e $\beta = 25°$. Sabendo que $\overline{BD}$ mede 10 cm e que $\overline{AB}$ mede o triplo de $\overline{AD}$, determine a medida do segmento $\overline{CD}$.



22. A flâmula de um clube tem a forma de um triângulo isósceles ABC, com AB = AC = 40 cm e BC = 20 cm. As três cores do clube ocupam regiões triangulares no interior da flâmula, como mostra a figura.



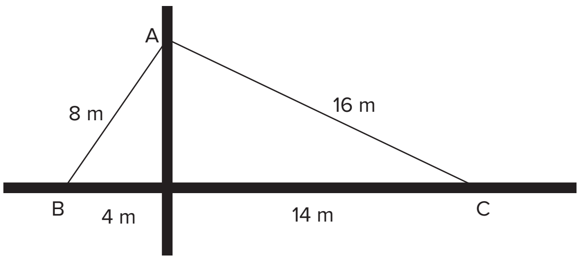
Em relação às medidas angulares, sabemos que:

- med($A\hat{D}E$) = med($B\hat{D}E$).
- med($B\hat{A}C$) = med($C\hat{B}D$).
- med($B\hat{C}D$) = med($B\hat{D}C$).

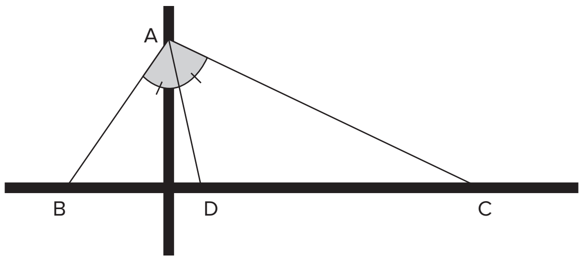
Assim, determine os comprimentos dos segmentos:

a) $\overline{CD}$. **b)** $\overline{BE}$.

23. Um engenheiro percebeu que os dois cabos, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, usados para sustentar o trecho $\overline{BC}$ de uma ponte estaiada não eram suficientes e resolveu instalar mais um cabo $\overline{AD}$ para reforçar a sustentação. A figura a seguir mostra os comprimentos dos cabos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e as distâncias dos pontos B e C até a coluna vertical onde eles estão presos.



A figura seguinte mostra que o cabo $\overline{AD}$ será instalado de modo que os ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{A}C$ tenham a mesma medida.

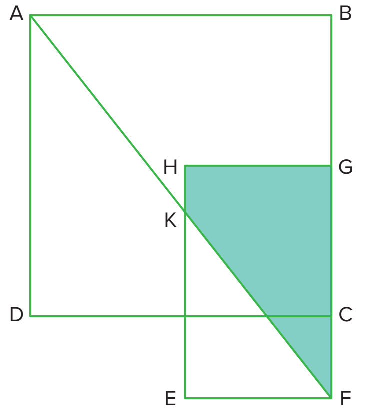


Nessas condições, a distância do ponto D até a coluna vertical onde os cabos estão presos deverá ser de:

a) 1 m. **c)** 2 m. **e)** 3 m.

b) 1,5 m. **d)** 2,5 m.

24. Famema-SP 2018 Considere o quadrado ABCD, de lado 4 cm, e o retângulo EFGH, com EF = 2 cm, CF = 1 cm e os pontos B, G, C e F alinhados, conforme mostra a figura.



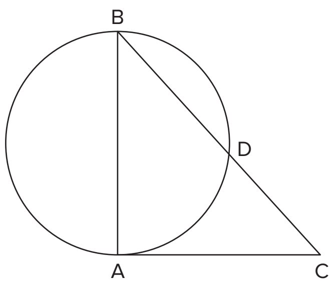
Sabendo que G é ponto médio do lado BC, que o ponto K pertence ao lado HE e que os pontos A, K e F estão alinhados, a área do quadrilátero FGHK é:

a) 3,5 cm^2.
b) 4,0 cm^2.
c) 4,5 cm^2.
d) 3,0 cm^2.
e) 2,5 cm^2.

25. UENP-PR 2021 Dada uma circunferência inscrita num triângulo retângulo. O ponto de tangência divide a hipotenusa em dois segmentos de comprimento 8 cm e 9 cm. Diante dessas informações, é correto afirmar que a área do triângulo retângulo é:

a) 289 cm^2.
b) 172 cm^2.
c) 72 cm^2.
d) 170 cm^2.
e) 145 cm^2.

26. FGV-SP 2021 Na figura, $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência, a reta suporte de $\overline{AC}$ tangencia a circunferência em A, e D é ponto de interseção entre $\overline{BC}$ e a circunferência.

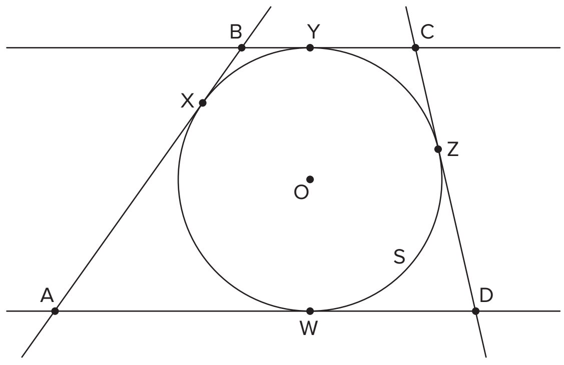


Se BD = 5 cm e DC = 4 cm, então a área do triângulo ABC é igual a

a) $9\sqrt{5}$ cm^2
b) $8\sqrt{6}$ cm^2
c) $8\sqrt{5}$ cm^2
d) $7\sqrt{6}$ cm^2
e) $6\sqrt{6}$ cm^2

27. Fuvest-SP 2020 São dados:

- uma circunferência S de centro O e raio 5;
- quatro pontos X, Y, Z e W em S de tal forma que as retas tangentes a S nesses pontos formam um trapézio ABCD, como na figura;
- $\text{sen}(B\hat{A}W) = \dfrac{3}{5}$ e CD = 15.



Determine:

a) a medida de $\overline{AB}$;
b) a medida de $\overline{AW}$ e $\overline{AX}$;
c) a área da região delimitada pelo trapézio ABCD.

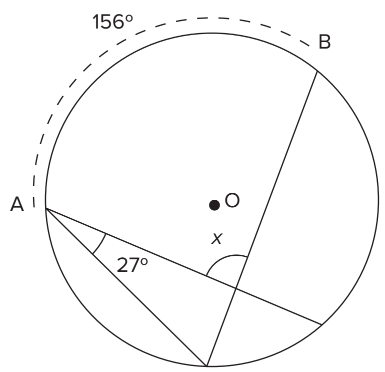
28. Uece 2021 Seja XYZ um triângulo retângulo em Y cuja medida do cateto $\overline{XY}$ é igual a 6 cm. Se a perpendicular a $\overline{XZ}$ que contém o ponto médio M do cateto $\overline{XY}$ intercepta $\overline{XZ}$ no ponto P, e se a medida do segmento $\overline{PM}$ é igual a 1,5 cm, então, a medida, em cm, do segmento $\overline{MZ}$ é igual a

a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$.
b) $2\sqrt{21}$.
c) $\sqrt{21}$.
d) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

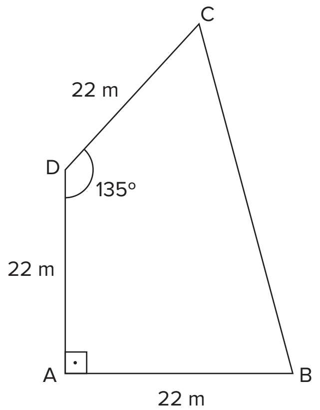
29. UFSC 2016 Em relação às proposições a seguir, é correto afirmar que:

01 Se duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, formando ângulos alternos externos cujas medidas, em graus, são representadas por ($3x + 4°$) e ($4x - 37°$), então a soma desses ângulos é 254°.

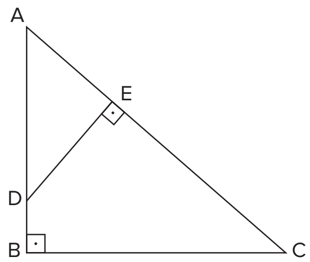
02 Na figura da circunferência de centro O, se o ângulo agudo Â mede 27° e o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 156°, então a medida do ângulo indicado por x é igual a 105°.



04 Se o quadrilátero a seguir representa a planta de um terreno plano, então sua área é igual a $242(1+\sqrt{2})\ m^2$.



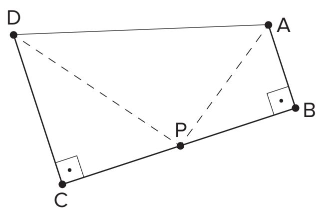
08 No triângulo ABC, retângulo em B, $\overline{DE}$ é perpendicular à $\overline{AC}$. Se $\overline{AC}$ mede 6 cm e $\overline{CE}$ tem a mesma medida do cateto $\overline{AB}$, 4 cm, então $\overline{AD}$ mede 2 cm.



16 Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 9 cm e o menor cateto mede 6 cm. Então, a altura relativa à hipotenusa mede $2\sqrt{5}$ cm.

Soma:

30. Col. Naval-RJ 2020 Observe a figura a seguir:



Ela representa um trapézio retângulo com bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sabe-se também que as bissetrizes internas com vértices em A e em D e o lado $\overline{BC}$, se intersectam em P. Sendo assim, analise as afirmações a seguir.

I. $A\hat{P}D = 90°$

II. BP = CP

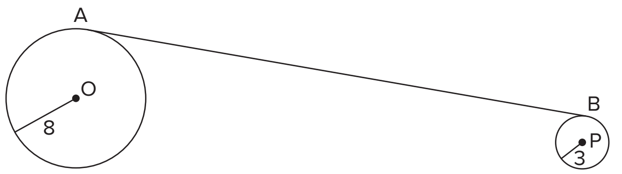
III. $AD^2 = BP^2 + CP^2$

IV. AD = AB + CD

São verdadeiras:

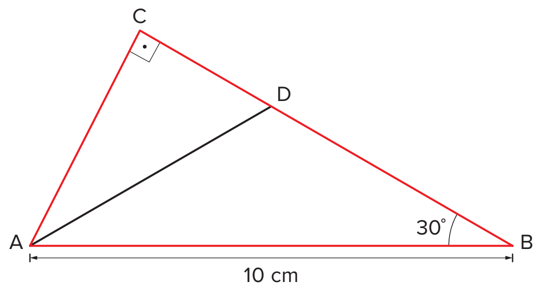
a) I, II, e III apenas
b) I, II e IV apenas
c) I, III e IV apenas
d) II, III e IV apenas
e) I, II, III e IV.

31. EEAR-SP 2021 Os pontos O e P são os centros de duas circunferências que possuem raios medindo, respectivamente, 8 cm e 3 cm, conforme a figura. Se $OP = 5\sqrt{37}$ cm e se $\overline{AB}$ é tangente a essas circunferências, em A e B, então AB = ________ cm.



a) 28 **b)** 29 **c)** 30 **d)** 31

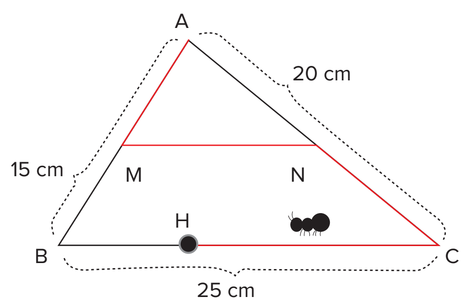
32. Famema-SP 2019 A figura mostra o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa AB = 10 cm, com o ângulo ABC = 30° e o ponto D sobre o lado BC.



Sabendo que AD é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, o valor da razão $\frac{BD}{DC}$ é:

a) 2. **b)** 1. **c)** $\frac{1}{2}$. **d)** 3. **e)** $\frac{1}{3}$.

33. No muro do quintal de uma casa foi desenhado um triângulo de lados 15 cm, 20 cm e 25 cm, como mostra a figura.



Uma formiga parte do vértice A do triângulo e segue pelo lado $\overline{AB}$ até seu ponto médio M. Depois disso, ela atravessa a base média $\overline{MN}$ do triângulo ABC e, ao chegar ao ponto N, segue sobre o lado $\overline{AC}$ até chegar ao vértice C. Então, finalmente, ela percorre parte do lado horizontal $\overline{BC}$ do triângulo até chegar a um pequeno orifício situado no ponto H, bem abaixo do vértice A do triângulo.

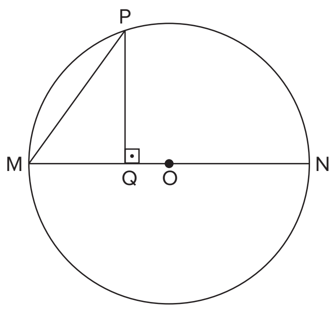
Se os pontos A e H determinam uma reta vertical, então o comprimento total da trajetória percorrida por essa formiga é de:

a) 30 cm.
b) 36 cm.
c) 40 cm.
d) 46 cm.
e) 56 cm.

34. Um tapete retangular comemorativo da Copa do Mundo de 2014 contém um desenho que imita a bandeira brasileira. Nesse desenho, há um losango com os vértices sobre os pontos médios dos lados do tapete e um círculo que é tangente aos quatro lados desse losango.

Se as dimensões do tapete retangular são de 3 m por 4 m, determine a medida do raio do círculo inscrito no losango.

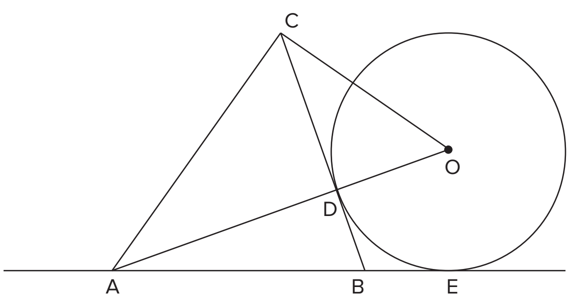
35. EsPCEx-SP 2017 Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda $\overline{MP}$ mede 10 cm.



A medida, em centímetros, do segmento $\overline{PQ}$ é:

a) $\frac{25}{2}$
b) 10
c) $5\sqrt{21}$
d) $\sqrt{21}$
e) $2\sqrt{21}$

36. Fuvest-SP 2015 Na figura a seguir, a circunferência de centro em O e raio r tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta AB no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, AD = $2r$ e o ângulo $A\hat{C}O$ é reto. Determine, em função de r:



a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC.
b) a medida do segmento $\overline{CO}$.

37. ITA-SP 2015 Seja ABCD um trapézio isósceles com a base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é:

a) $\frac{21}{8}$

b) $\frac{27}{8}$

c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{37}{8}$

e) $\frac{45}{8}$

38. ITA-SP 2020 Os pontos $B = (1, 1 + 6\sqrt{2})$ e $C = (1 + 6\sqrt{2}, 1)$ são vértices do triângulo isósceles ABC de base BC, contido no primeiro quadrante. Se o raio da circunferência inscrita no triângulo mede 3, então as coordenadas do vértice A são:

a) $(7\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$

b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

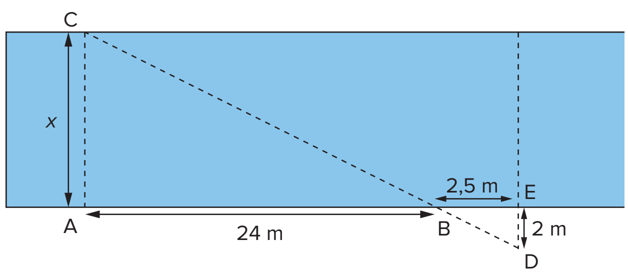
c) $(1 + 7\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2})$

d) $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$

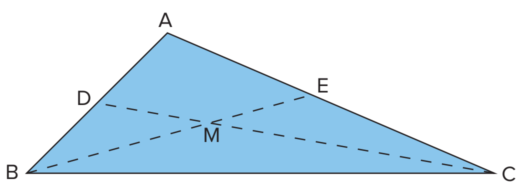
e) $(1 + 6\sqrt{2}, 1 + 6\sqrt{2})$

39. FGV-SP 2014

a) Para medir a largura x de um rio sem necessidade de cruzá-lo, foram feitas várias medições, como mostra a figura a seguir. Calcule a largura x do rio.



b) Demonstre que a distância do vértice B ao baricentro M de um triângulo é o dobro da distância do ponto E ao baricentro M.

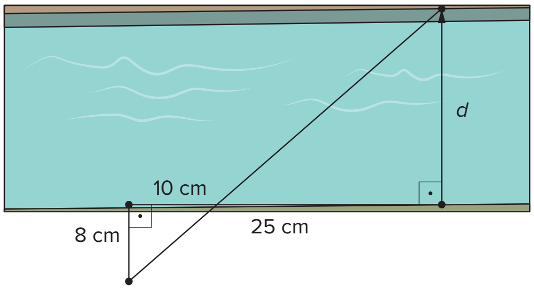


40. Determine o comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado ℓ cm.

BNCC em foco

EM13MAT308

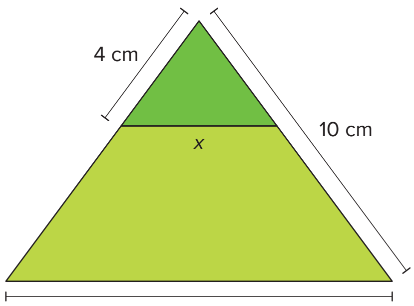
1. Para medir a largura *d* de um rio, sem a necessidade de atravessá-lo, um explorador fez várias medidas, como mostra o esboço a seguir. A largura *d*, obtida após alguns cálculos, foi de:



a) 35 m
b) 30 m
c) 15 m
d) 25 m
e) 20 m

EM13MAT308

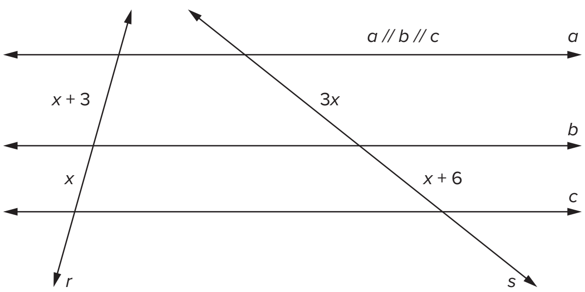
2. Considere os triângulos isósceles e de bases paralelas na figura a seguir. O valor, em centímetros, do perímetro do triângulo de base *x* é:



a) 5,6
b) 9,6
c) 12
d) 13,6
e) 15,2

EM13MAT308

3. O teorema de Tales afirma que: “se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra”.
A figura mostra as retas *a*, *b* e *c* paralelas. Aplicando seus conhecimentos em relação ao teorema de Tales, determine o valor de *x*.



a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

Arsgera/Shutterstock.com

O maior avião de carga do mundo: Antonov 225. Ucrânia. Foto de 2020.

FRENTE 3

CAPÍTULO

4

Teorema dos senos e teorema dos cossenos

Para uma aeronave levantar voo são necessários diversos cálculos, entre eles o seu posicionamento enquanto está em navegação. Essa localização é calculada com o uso da tecnologia do Sistema de Posicionamento Global, mais conhecido como GPS, utilizando satélites e trigonometria. Isso se dá por meio da triangulação formada pelos sinais do satélite e da posição do receptor GPS dentro do avião.

A trigonometria no triângulo retângulo corresponde ao estudo das relações entre seus lados e ângulos.

Depois de estabelecido o padrão de cálculo regido pelas tabelas de senos e cossenos, sua aplicação foi estendida a todos os triângulos, mesmo os não retângulos, estudo esse que veremos neste capítulo.

Classificação dos triângulos

É possível classificarmos os triângulos de duas formas diferentes.

1. Com relação aos lados:

- **escalenos:** quando cada lado tem comprimento diferente;
- **isósceles:** quando dois lados apresentam o mesmo comprimento;
- **equiláteros:** quando todos os lados possuem o mesmo comprimento.

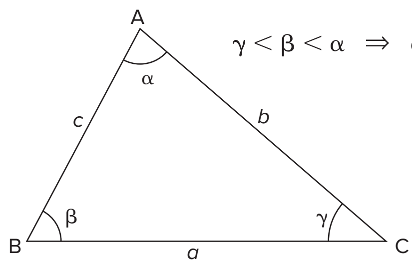
2. Com relação aos ângulos:

- **acutângulos:** quando todos os seus ângulos internos são agudos;
- **retângulos:** quando um de seus ângulos internos é reto;
- **obtusângulos:** quando um de seus ângulos é obtuso.

Uma importante relação entre os lados e os ângulos internos de um mesmo triângulo é que lados de comprimentos iguais sempre ficam opostos a ângulos de medidas iguais. Esse teorema da Geometria euclidiana garante, entre outras coisas, que os triângulos isósceles têm dois ângulos com a mesma medida e que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°.

Contudo, quando se trata de um triângulo escaleno, assim como acontece com a medida dos lados, a medida dos ângulos internos são todas diferentes. Nesse caso, é sempre possível considerar em ordem crescente tanto a medida dos ângulos internos quanto o comprimento dos lados.

Desse modo, podemos enunciar que, em todo triângulo escaleno, o maior lado fica oposto ao maior ângulo interno ou que o menor lado fica oposto ao menor ângulo interno.

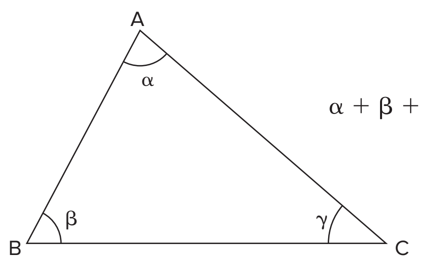


$$\gamma < \beta < \alpha \ \Rightarrow \ c < b < a$$

Neste capítulo, estudaremos como aplicar as razões trigonométricas nos triângulos escalenos.

Desigualdade triangular

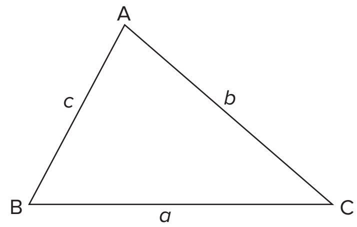
Com relação às medidas dos ângulos internos, a única condição para a existência de um triângulo é que, somadas, elas resultem na medida de um ângulo raso.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Mas há algumas condições para a existência de um triângulo que dizem respeito ao comprimento dos lados. A primeira condição é que nenhum deles seja maior ou igual à soma dos outros dois; e a segunda é que nenhum deles seja menor ou igual à diferença absoluta dos outros dois.

Assim, para que um triângulo exista, todos os seus lados devem ter comprimentos que ficam entre os valores da diferença e da soma dos outros dois. Então, sendo $c \leqslant b \leqslant a$ os comprimentos dos lados de um triângulo, temos:



$$\begin{cases} a - b < c < a + b \\ a - c < b < a + c \\ b - c < a < b + c \end{cases}$$

A demonstração dessas desigualdades pode ser obtida por contradição ou por absurdo, como é mais conhecido esse tipo de argumento. Essas desigualdades têm que ser verdadeiras, pois sua falsidade contraria o conceito euclidiano da distância mínima entre dois pontos sobre uma superfície plana. Essa distância é igual ao comprimento do segmento de reta que os une (primeiro postulado).

Afinal, se, em um triângulo ABC com AB $= c$, AC $= b$ e BC $= a$, fosse verdadeiro que $a + b = c$ ou $a + b < c$, então a menor distância entre os pontos B e C não seria mais o comprimento do segmento $\overline{BC}$, por exemplo.

Na prática, para garantir a existência de um triângulo com lados de comprimentos a, b e c, basta verificarmos as desigualdades de uma das linhas do sistema.

Mesmo que não saibamos a ordem crescente das medidas a, b e c dos lados de um triângulo, é possível expressarmos a desigualdade triangular usando a função modular, que, nesse caso, serve para representar a diferença absoluta entre dois comprimentos. Dessa forma, pode-se garantir a existência de um triângulo verificando apenas uma das desigualdades do sistema, por exemplo:

$$|a - b| < c < a + b$$

Exercícios resolvidos

1. Verifique se existe um triângulo ABC com lados medindo 9 cm, 11 cm e 6 cm.

Resolução:

Com $a = 9$, $b = 11$ e $c = 6$, obtemos a primeira desigualdade do sistema:

$$|a - b| < c < a + b$$
$$|9 - 11| < 6 < 9 + 11$$
$$2 < 6 < 20$$

Como as duas desigualdades $2 < 6$ e $6 < 20$ são verdadeiras, podemos concluir que um triângulo com lados que tenham essas medidas de fato existe.
Observe que, com esses valores, as demais desigualdades do sistema também ficam verdadeiras:

$$\begin{array}{cc} |a - c| < b < a + c & |b - c| < a < b + c \\ |9 - 6| < 11 < 9 + 6 & |11 - 6| < 9 < 11 + 6 \\ 3 < 11 < 15 & 5 < 9 < 17 \end{array}$$

2. Verifique se existe um triângulo ABC com lados que medem 5 cm, 3 cm e 9 cm.

Resolução:

Com $a = 5$, $b = 3$ e $c = 9$, a primeira desigualdade do sistema fica:

$$|a - b| < c < a + b$$
$$|5 - 3| < 9 < 5 + 3$$
$$2 < 9 < 8$$

Como $9 < 8$ é uma sentença falsa, podemos concluir que não existe triângulo cujos lados tenham esses comprimentos.
Observe que, com esses valores, as demais desigualdades do sistema também geram sentenças incorretas, pois o número 4 não é menor do que o número 3, bem como o número 6 não é menor do que o número 5:

$$\begin{array}{cc} |a - c| < b < a + c & |b - c| < a < b + c \\ |5 - 9| < 3 < 5 + 9 & |3 - 9| < 5 < 3 + 9 \\ 4 < 3 < 14 & 6 < 5 < 12 \end{array}$$

3. Em um triângulo ABC com $AC = 30$, $BC = 12$ e $AB = x$, determine:
a) o intervalo de variação da medida x do lado $\overline{AB}$;
b) o maior e o menor dos valores inteiros que x pode assumir.

Resolução:

a) Com $b = 30$, $a = 12$ e $c = x$, obtemos a primeira desigualdade do sistema:

$$|a - b| < c < a + b$$
$$|12 - 30| < x < 12 + 30$$
$$18 < x < 42$$

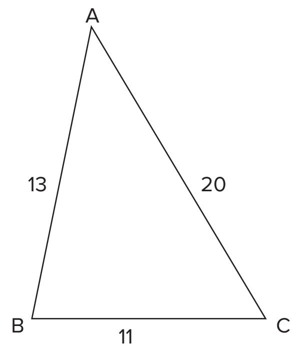
b) Se x é número inteiro, como $x < 42$, o maior valor inteiro possível é $x = 41$; e, como $18 < x$, o menor valor inteiro possível é $x = 19$.

Valores de senos e cossenos de ângulos obtusos

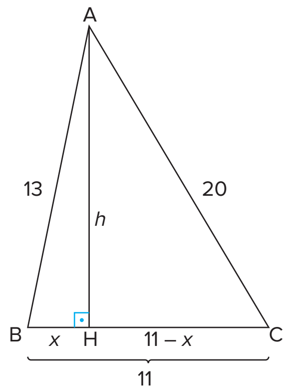
Como nenhum ângulo interno de um triângulo retângulo pode medir mais do que 90°, as razões trigonométricas seno e cosseno dos ângulos obtusos não podem ser compreendidas como quocientes entre os comprimentos de catetos e hipotenusas.

Para facilitar a compreensão dos conceitos de seno e cosseno de ângulos obtusos, vamos explorar o problema de encontrar a altura de um triângulo escaleno ABC.

Consideremos que os lados de um triângulo sejam $AB = 13$ e $AC = 20$ e sua base $BC = 11$ e que a figura a seguir o represente:



Agora, nossa estratégia será traçar, pelo ponto A, uma reta perpendicular à base $\overline{BC}$ para obter a altura $\overline{AH}$ do triângulo e os triângulos retângulos AHB e AHC. Também indicaremos com h o comprimento dessa altura e com x o comprimento do segmento $\overline{BH}$.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos da figura, obtemos:

- $\triangle AHB \Rightarrow x^2 + h^2 = 13^2$ (equação I)
- $\triangle AHC \Rightarrow (11 - x)^2 + h^2 = 20^2$ (equação II)

Desenvolvendo o produto notável na equação II, encontramos:

$$11^2 - 2 \cdot 11 \cdot x + x^2 + h^2 = 20^2$$

Observando que os últimos termos dessa equação formam o primeiro membro da equação I, temos:

$$11^2 - 22x + \underbrace{x^2 + h^2}_{13^2} = 20^2$$
$$11^2 - 22x + 13^2 = 20^2$$
$$121 - 22x + 169 = 400$$
$$-22x = 400 - 121 - 169$$
$$-22x = 110$$
$$x = -5$$

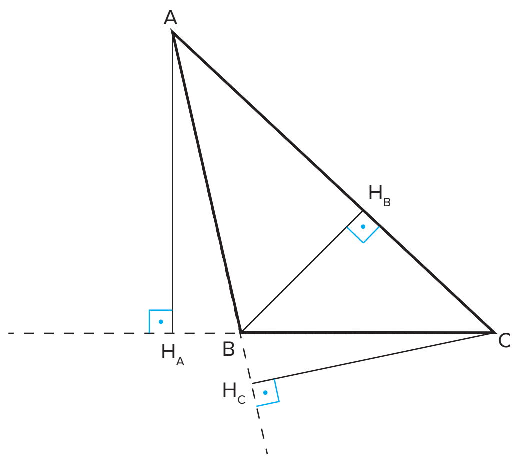
Assim, concluímos que $x = -5$, mas isso não pode estar correto, pois não existem comprimentos negativos na Geometria euclidiana.

Nesse ponto, podemos querer revisar cada linha da álgebra usada na resolução ou fazer a correção das aplicações do teorema de Pitágoras, mas o fato é que a figura utilizada para representar o triângulo ABC está incorreta. Note também que HC = 11 − *x*, com *x* = − 5, implica HC = 16, que é uma informação contraditória quando observamos a figura inicialmente desenhada.

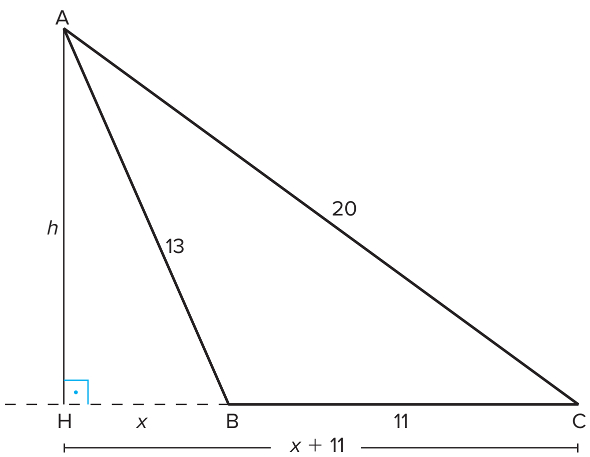
O erro foi presumir que ABC era um triângulo acutângulo e, assim, representar a altura $\overline{AH}$ na região interior do triângulo.

Saiba mais

Apenas a altura relativa ao maior lado de um triângulo obtusângulo pode ser representada em seu interior. As demais alturas se situam na região exterior do triângulo de modo que uma de suas extremidades seja ponto do prolongamento de algum lado do triângulo, como mostra a figura a seguir.



Uma figura adequada para a representação do triângulo de lados AB = 13, AC = 20 e BC = 11 seria:



Aplicando novamente o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos da figura, obtemos:

- $\Delta AHB \Rightarrow x^2 + h^2 = 13^2$ (equação I)
- $\Delta AHC \Rightarrow (11 + x)^2 + h^2 = 20^2$ (equação II)

Veja como a mudança no sinal da expressão entre parênteses na equação II altera o restante da resolução algébrica do sistema:

$$11^2 + 2 \cdot 11 \cdot x + \underbrace{x^2 + h^2}_{13^2} = 20^2$$
$$121 + 22x + 169 = 400$$
$$22x = 400 - 121 - 169$$
$$22x = 110$$
$$x = 5$$

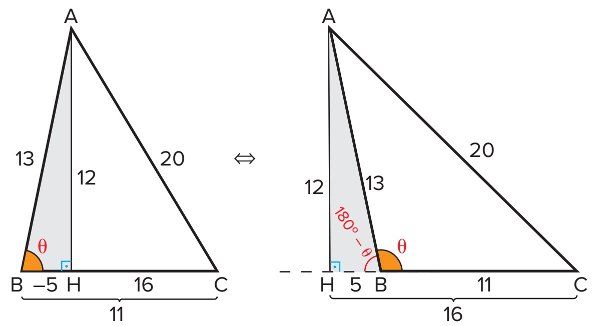
Então, depois de corrigida a incoerência inicial da figura, é seguro usar o valor de *x* = 5 na equação I para encontrar a altura do triângulo:

$$5^2 + h^2 = 13^2 \Rightarrow 25 + h^2 = 169 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$$

Não só o problema foi resolvido como uma nova porta se abriu na interpretação dos números que representam entes geométricos.

Na época de Euclides, os números negativos ainda não haviam sido devidamente incorporados à Matemática. Mas, quando isso aconteceu, muito tempo depois, a Geometria começou a se apropriar dos aspectos analíticos que eram oferecidos pelos números menores do que zero.

Um desses aspectos é o de se interpretar *x* = −5 como a indicação de que o segmento $\overline{BH}$ desenhado no interior de um triângulo esteja, na verdade, exterior ao triângulo.



Uma vez admitida a equivalência dessas figuras, do triângulo ABH na primeira figura podemos deduzir que:

$$\begin{cases} \text{sen}(\theta) = \dfrac{12}{13} \\ \cos(\theta) = \dfrac{-5}{13} \end{cases}$$

E, do triângulo ABH na segunda figura, que:

$$\begin{cases} \text{sen}(180° - \theta) = \dfrac{12}{13} \\ \cos(180° - \theta) = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Assim, conseguimos uma interpretação para os senos e os cossenos dos ângulos externos não retos de um triângulo retângulo.

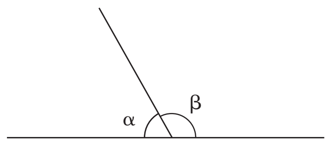
Relações entre senos e cossenos de ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares sempre que a soma de suas medidas resultar na medida do ângulo raso (180°). Quanto aos senos e cossenos desses ângulos, a interpretação analítica das medidas positivas e negativas dos segmentos de reta nos permite afirmar que:

1. Ângulos suplementares possuem o mesmo seno.
2. Ângulos suplementares têm cossenos opostos.

Assim, sendo α e β as medidas, em graus, de dois ângulos geométricos, então:

$$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta) \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0 \end{cases}$$



Em relação aos senos, a interpretação analítica nos permite concluir que:

- $\text{sen}(120°) = \text{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{sen}(135°) = \text{sen}(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{sen}(150°) = \text{sen}(30°) = \dfrac{1}{2}$

Como $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\beta) = -\cos(\alpha)$, essa interpretação, no que se refere aos cossenos, permite concluirmos que:

- $\cos(120°) = -\cos(60°) = -\dfrac{1}{2}$
- $\cos(135°) = -\cos(45°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(150°) = -\cos(30°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Particularmente no caso dos ângulos retos, essa relação implica:

$$\cos(90°) = -\cos(90°)$$
$$\cos(90°) + \cos(90°) = 0$$
$$2\cos(90°) = 0$$
$$\cos(90°) = 0$$

Então, considerando a relação fundamental da trigonometria $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, é possível deduzirmos que $\text{sen}^2(90°) = 1$, mas não podemos concluir, apenas com base nos argumentos expostos até aqui, que o seno do ângulo reto vale $+1$ ou -1.

Por outro lado, é fato que, nos triângulos retângulos, o seno de um ângulo de medida $\alpha < 90°$ depende do comprimento do seu cateto oposto no triângulo e do comprimento da hipotenusa, que é sempre o maior lado.

Além disso, quanto maior for o valor de α, maior também será o comprimento do seu cateto oposto e menor a diferença do comprimento do cateto e da hipotenusa do triângulo.

Em triângulos retângulos com ângulos agudos muito próximos de 90°, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa fica bem próxima de 1. Assim, não há motivo aparente para desconfiarmos de que o seno do ângulo reto possa ser negativo como os cossenos dos ângulos obtusos.

Dessa forma, a tabela com os senos e cossenos dos ângulos notáveis pode ser ampliada incorporando os valores para o ângulo reto e alguns obtusos:

	sen	**cos**
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

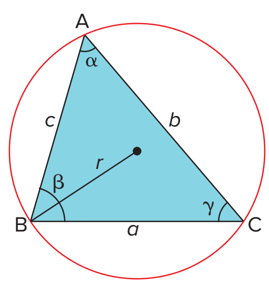
Relações trigonométricas em triângulos quaisquer

Estender os conceitos estabelecidos pelas razões trigonométricas para além dos triângulos retângulos de forma satisfatória não seria possível sem que fossem incorporadas as interpretações dos senos e cossenos dos ângulos obtusos. Caso contrário, os triângulos obtusângulos ficariam de fora da extensão.

Conhecidos como leis dos senos e dos cossenos, os teoremas, demonstrados a seguir, compõem as mais eficientes regras de aplicação das razões trigonométricas nos triângulos de qualquer tipo.

Teorema dos senos

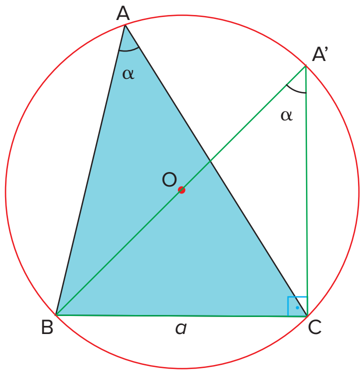
Os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos senos dos seus ângulos opostos, e a constante dessa proporcionalidade equivale ao dobro do raio da circunferência circunscrita do triângulo.



$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2r$$

Demonstração:

Os argumentos que se sucedem nesta demonstração são os mesmos qualquer que seja o lado do triângulo tomado para determinarmos a razão entre o comprimento de um lado e de seu ângulo oposto no triângulo. Assim, vamos considerar o lado $\overline{BC}$ de comprimento a e traçar, pela extremidade C, uma perpendicular ao lado, obtendo o ponto A' na circunferência circunscrita.



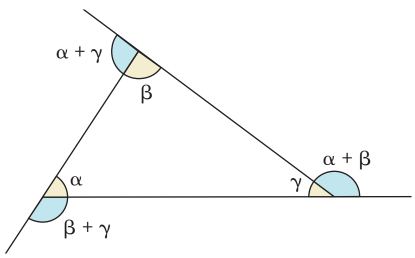
Então, do teorema do ângulo inscrito na circunferência, temos que o arco $\widehat{A'B}$ da circunferência oposto ao ângulo reto $B\hat{C}A'$ deve medir $2 \cdot 90° = 180°$. Assim, o segmento $\overline{A'B}$ deve passar pelo centro da circunferência, pois divide a circunferência em dois arcos de 180°.

Novamente, do teorema do ângulo inscrito, por pertencerem a um mesmo arco capaz, os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A'}C$ têm a mesma medida α. Desse modo, no triângulo A'BC, encontramos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2r} \Rightarrow 2r \cdot \text{sen}(\alpha) = a \Rightarrow 2r = \frac{a}{\text{sen}(\alpha)}$$

A aplicação do teorema dos senos pode se tornar mais eficiente observando a possibilidade do uso dos senos tanto dos ângulos internos quanto dos externos nas proporções enunciadas, pois, sendo α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo, então seus ângulos externos medem $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ e $\beta + \gamma$, com:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 180° - \gamma \\ \alpha + \gamma = 180° - \beta \\ \beta + \gamma = 180° - \alpha \end{cases}$$

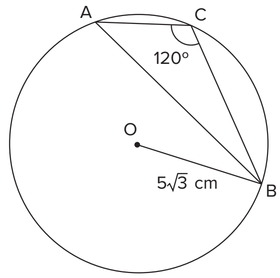


Portanto, como ângulos suplementares têm os mesmos senos, obtemos:

- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\gamma)$
- $\text{sen}(\alpha + \gamma) = \text{sen}(\beta)$
- $\text{sen}(\beta + \gamma) = \text{sen}(\alpha)$

Exercícios resolvidos

4. Determine a medida do lado oposto ao ângulo de 120° de um triângulo inscrito em uma circunferência com $5\sqrt{3}$ cm de raio, como mostra a figura a seguir.



Resolução:

Como, de acordo com o teorema dos senos, a razão entre cada lado de um triângulo e o seno do ângulo oposto a ele coincide com o dobro do raio do círculo circunscrito, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen}(120°)} = 2 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow AB = \text{sen}(120°) \cdot 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

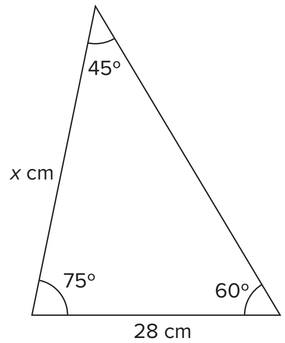
Então, como $\text{sen}(120°) = \text{sen}(60°)$, encontramos:

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

5. Os ângulos internos da base do triângulo ABC medem 75° e 60°. Determine o comprimento aproximado do lado oposto ao ângulo de 60° sabendo que a base desse triângulo mede 28 cm.
Use $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

Resolução:

Sendo α a medida do terceiro ângulo desse triângulo, temos: $\alpha + 60° + 75° = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$. Portanto, o triângulo é acutângulo, e uma figura de acordo com o enunciado é:



Como, de acordo com o teorema dos senos, os lados e senos de ângulos opostos são proporcionais, sendo x a medida, em centímetros, do lado oposto ao ângulo de 60°, obtemos:

$$\frac{28 \text{ cm}}{\text{sen}(45°)} = \frac{x \text{ cm}}{\text{sen}(60°)}$$

$$x \cdot \text{sen}(45°) = 28 \cdot \text{sen}(60°)$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

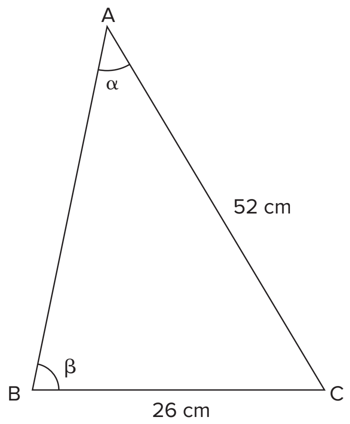
$$x = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Aproximando as raízes, temos $x = \frac{28 \cdot 1{,}7}{1{,}4} = 34$ cm.

6. Em um triângulo ABC, o seno do ângulo interno do vértice A é igual a $\frac{1}{4}$. Se os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 52 cm e 26 cm, determine a medida do ângulo interno do vértice B.

Resolução:

Sendo α e β as medidas dos ângulos internos de vértices A e B do triângulo ABC, uma figura de acordo com o enunciado é:



Pelo teorema dos senos, temos:

$$\frac{26\text{ cm}}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{52\text{ cm}}{\text{sen}(\beta)} \Rightarrow 26 \cdot \text{sen}(\beta) = 52 \cdot \text{sen}(\alpha)$$

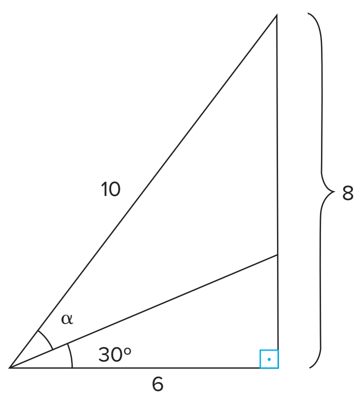
Então, como, de acordo com o enunciado, $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{4}$, temos:

$$26 \cdot \text{sen}(\beta) = 52 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 26 \cdot \text{sen}(\beta) = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\beta) = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

Como não há informações suficientes para saber se esse triângulo é acutângulo ou obtusângulo, devemos entender que o problema admite duas respostas possíveis: $\beta = 30°$ ou $\beta = 150°$.

7. **UFG-GO** Observe a figura a seguir, em que estão indicadas as medidas dos lados do triângulo maior e alguns dos ângulos.



O seno do ângulo indicado por α na figura vale:

a) $\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$

b) $\frac{4 - \sqrt{3}}{10}$

c) $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$

d) $\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$

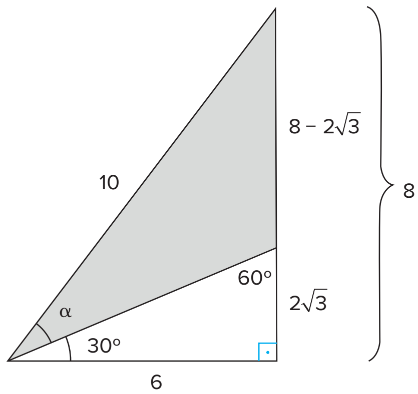
e) $\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$

Resolução:

A figura apresenta três triângulos. Dois deles são retângulos, e o outro é, provavelmente, escaleno.
Sendo x o cateto oposto ao ângulo de 30° do triângulo retângulo menor, temos:

$$\text{tg}(30°) = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow 3x = 6\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

Com base nesse resultado, concluímos que o lado vertical do triângulo escaleno mede $8 - 2\sqrt{3}$.



Então, considerando o ângulo externo de 60° do triângulo escaleno, obtemos, de acordo com o teorema dos senos:

$$\frac{8 - 2\sqrt{3}}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{10}{\text{sen}(120°)}$$

$$10 \cdot \text{sen}(\alpha) = \left(8 - 2\sqrt{3}\right) \cdot \text{sen}(60°)$$

$$10 \cdot \text{sen}(\alpha) = \left(8 - 2\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

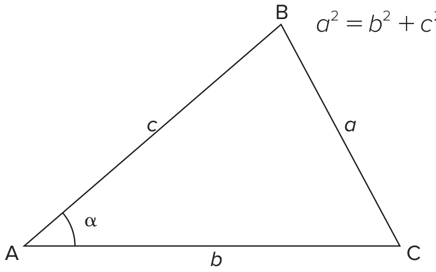
$$10 \cdot \text{sen}(\alpha) = 4\sqrt{3} - 3$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$$

Resposta: alternativa A.

Teorema dos cossenos

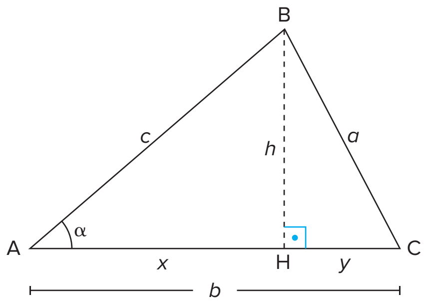
Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados equivale à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto entre esses dois lados e o cosseno do ângulo que eles formam.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

Demonstração:

Traçando pelo ponto B uma reta perpendicular ao lado $\overline{AC}$, obtemos a altura $\overline{BH}$ e os triângulos retângulos AHB e CHB.



Sendo h = BH, x = AH e y = CH, há quatro equações que relacionam as medidas indicadas na figura:

- na base $\overline{AC}$ do △ABC:

$$x + y = b \qquad \text{(equação I);}$$

- do teorema de Pitágoras no △CHB:

$$a^2 = y^2 + h^2 \qquad \text{(equação II);}$$

- do teorema de Pitágoras no △AHB:

$$c^2 = x^2 + h^2 \qquad \text{(equação III);}$$

- uma razão trigonométrica no △AHB:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{c} \qquad \text{(equação IV).}$$

Note que as relações expressas pelas quatro equações continuam verdadeiras quando $x \leqslant 0$, aceitando a possibilidade de o ângulo α ser reto ou obtuso.

Isolando y na equação I, temos:

$$y = b - x$$

Substituindo y na equação II, encontramos:

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2$$

Desenvolvendo o produto notável, obtemos:

$$a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2 + h^2$$

Reorganizando os termos do segundo membro, temos:

$$a^2 = b^2 + \underbrace{\left(x^2 + h^2\right)}_{c^2} - 2 \cdot b \cdot x$$

Substituindo a relação da equação III, encontramos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot x \qquad \text{(equação V)}$$

Isolando x na equação IV, obtemos:

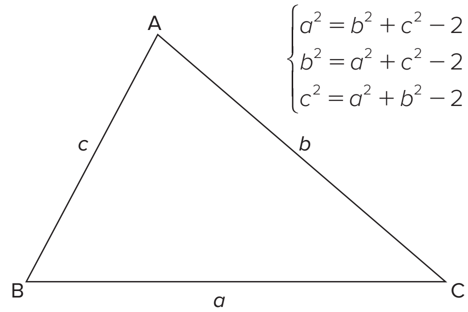
$$x = c \cdot \cos(\alpha)$$

Substituindo x na equação V, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

! Atenção

Como o teorema é válido para os três lados de um triângulo, qualquer que seja o triângulo ABC, com lados AB = c, AC = b e BC = a, chegamos às três equações:



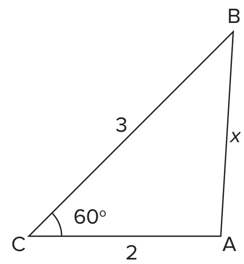
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

8. Determine o comprimento do lado $\overline{AB}$ oposto a um ângulo de 60° em um triângulo ABC, com AC = 2 cm e BC = 3 cm.

Resolução:

Sendo x a medida, em centímetros, do lado $\overline{AB}$, uma figura de acordo com o enunciado é:



Pelo teorema dos cossenos, obtemos:

$$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(60°)$$

$$x^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2}$$

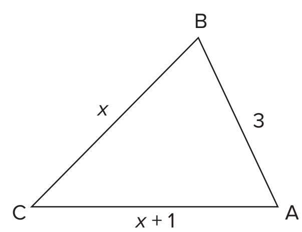
$$x^2 = 13 - 6$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \sqrt{7}$$

Portanto, AB = $\sqrt{7}$ cm.

9. Na figura, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ formam um ângulo de 60°.



Determine o valor de x.

Resolução:

Pelo teorema dos cossenos, encontramos:

$$x^2 = 3^2 + (x+1)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (x+1) \cdot \cos(60^\circ)$$

$$x^2 = 9 + x^2 + 2x + 1 - 6 \cdot (x+1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = x^2 + 2x + 10 - 3x - 3$$

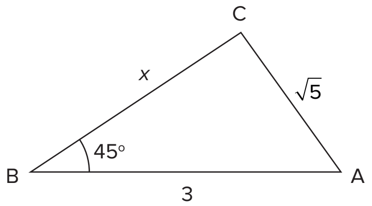
$$-2x + 3x = 10 - 3$$

$$x = 7$$

10. Em um triângulo ABC, AB = 3, AC = $\sqrt{5}$ e med($\hat{B}$) = 45°, determine a medida $\overline{BC}$.

Resolução:

Sendo x a medida do lado $\overline{BC}$, uma figura de acordo com o enunciado é:



Pelo teorema dos cossenos, temos:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos(45^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = 9 + x^2 - 6x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$$

$$\Delta = \left(-3\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 18 - 16 = 2$$

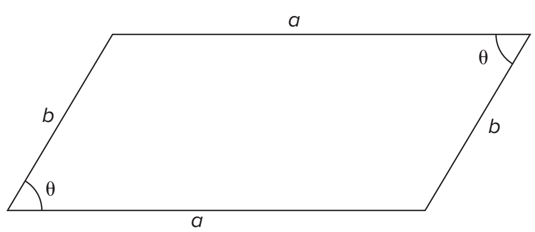
$$x = \frac{-\left(-\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 2\sqrt{2} \\ \searrow x_2 = \sqrt{2} \end{array}$$

Portanto, pela condição de existência de um triângulo, temos:

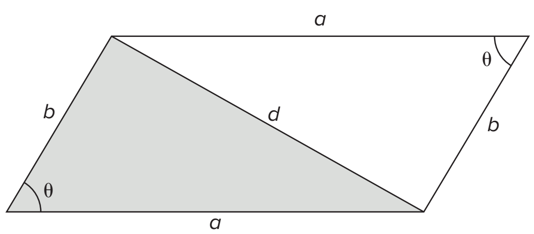
$$\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$

Diagonais do paralelogramo

Considere um paralelogramo de lados a e b e cujos ângulos agudos medem θ.



Observe que a diagonal menor do paralelogramo fica sempre oposta aos ângulos agudos.



Assim, sendo d a medida dessa diagonal menor, conforme o teorema dos cossenos no triângulo em destaque, temos:

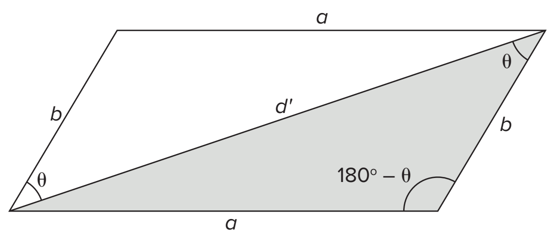
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)$$

Então, como $d > 0$, uma expressão para a medida da diagonal menor de um paralelogramo é:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)}$$

em que a e b são os lados do paralelogramo, e θ é a medida de seus ângulos agudos.

Note agora que a diagonal maior de um paralelogramo fica sempre oposta aos ângulos obtusos dele.



Assim, sendo d' a medida dessa diagonal maior, como a medida dos ângulos obtusos desse paralelogramo pode ser expressa por $(180^\circ - \theta)$, obtemos, de acordo com o teorema dos cossenos no triângulo em destaque:

$$(d')^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

Então, como $d' > 0$ e $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$, uma expressão para a medida da diagonal maior de um paralelogramo é:

$$d' = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)}$$

Exercício resolvido

11. Determine as medidas das diagonais de um paralelogramo cujos lados medem 2 e $\sqrt{3}$ e cujos ângulos agudos medem 30°.

Resolução:

A diagonal menor desse paralelogramo mede:

$$d = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ)}$$

$$d = \sqrt{4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$d = \sqrt{7 - 6}$$

$$d = 1$$

A diagonal maior desse paralelogramo mede:

$$d' = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(30^\circ)}$$

$$d' = \sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

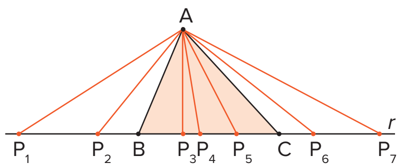
$$d' = \sqrt{7 + 6}$$

$$d' = \sqrt{13}$$

Cevianas de triângulos

Todo segmento de reta que une o vértice de um triângulo a um ponto da reta que contém o lado oposto a esse vértice é denominado ceviana do triângulo.

Em um triângulo ABC, as cevianas com uma extremidade no vértice A, por exemplo, têm a outra extremidade em algum ponto da reta suporte do lado $\overline{BC}$.



Na figura, todos os segmentos $\overline{AP_n}$ são cevianas relativas ao vértice A do triângulo.

Da mesma forma, existem as cevianas do vértice B, que têm uma extremidade em B e a outra na reta $\overleftrightarrow{AC}$, e também as cevianas do vértice C, que têm uma extremidade em C e a outra na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

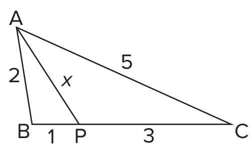
Entre as cevianas mais importantes de um triângulo estão os próprios lados do triângulo, suas alturas, suas bissetrizes internas e externas e suas medianas.

Cada ceviana dessas possui uma propriedade particular. Sem os lados, não há triângulo; as alturas são úteis no cálculo da área do triângulo; as bissetrizes internas e externas têm seus teoremas específicos; e as medianas apresentam a propriedade de dividir o triângulo em áreas iguais.

O teorema dos cossenos é uma ferramenta muito útil para encontrar o comprimento de uma ceviana. Acompanhe nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercício resolvido

12. Na figura, determine a medida x da ceviana $\overline{AP}$ do triângulo ABC.



Resolução:

Sendo θ a medida do ângulo interno de vértice B, como $BC = 1 + 3 = 4$, de acordo com o teorema dos cossenos, no $\triangle ABC$ temos:

$$5^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(\theta)$$

$$25 = 4 + 16 - 16 \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = -\frac{5}{16}$$

Com esse resultado, pelo teorema dos cossenos no $\triangle ABP$, encontramos:

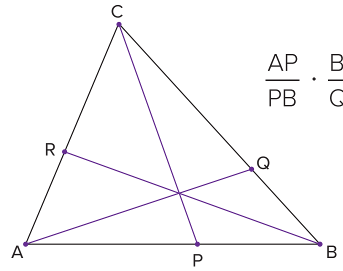
$$x^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos(\theta)$$

$$x^2 = 1 + 4 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right)$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Teorema das cevianas

Em um triângulo, quando três cevianas se intersectam no mesmo ponto, elas dividem os lados do triângulo em razões cujo produto é unitário.

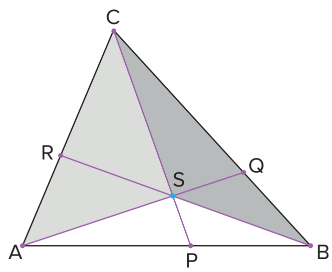


$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

Esse teorema foi provado, em 1678, pelo geômetra e engenheiro italiano Giovanni Ceva (1646-1734) — daí o termo "ceviana", criado em homenagem a ele. Por isso, o teorema também é conhecido como teorema de Ceva.

Demonstração:

Consideremos que, se dois triângulos têm a mesma altura, então suas áreas são diretamente proporcionais aos comprimentos de suas bases.



Sendo S o ponto de interseção das cevianas e indicando entre colchetes as áreas dos triângulos, da figura, podemos extrair as seguintes proporções:

- $\frac{AP}{PB} = \frac{[APC]}{[BPC]} = \frac{[APS]}{[BPS]} = \frac{[APC] - [APS]}{[BPC] - [BPS]} = \frac{[ASC]}{[BSC]}$
- $\frac{BQ}{QC} = \frac{[BQA]}{[CQA]} = \frac{[BQS]}{[CQS]} = \frac{[BQA] - [BQS]}{[CQA] - [CQS]} = \frac{[ASB]}{[ASC]}$
- $\frac{CR}{RA} = \frac{[CRB]}{[ARB]} = \frac{[CRS]}{[ARS]} = \frac{[CRB] - [CRS]}{[ARB] - [ARS]} = \frac{[BSC]}{[ASB]}$

Multiplicando essas razões, obtemos:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{[ASC]}{[BSC]} \cdot \frac{[ASB]}{[ASC]} \cdot \frac{[BSC]}{[ASB]}$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

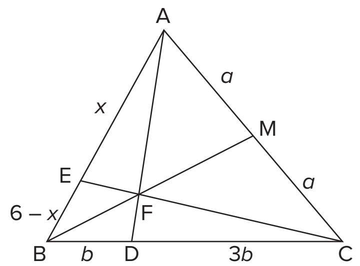
Exercício resolvido

13. Em um triângulo ABC, de base $AB = 6$, M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e o ponto D divide o lado $\overline{BC}$ de modo que $CD = 3 \cdot BD$. Além disso, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BM}$ se intersectam no ponto F, e a reta $\overleftrightarrow{CF}$ intersecta o lado $\overline{AB}$ no ponto E.

Determine o comprimento do segmento $\overline{AE}$.

Resolução:

Sendo AM $= a$, como M é ponto médio de AC, então CM $=$ AM $= a$. Se BD $= b$, logo CD $= 3 \cdot$ BD $= 3b$. E, sendo AE $= x$, temos EB $= 6 - x$. Uma figura de acordo com o enunciado pode ser:



Pelo teorema das cevianas, obtemos:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6-x} \cdot \frac{b}{3b} \cdot \frac{a}{a} = 1$$

Simplificando as frações expressas por a e b:

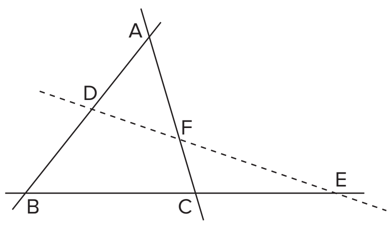
$$\frac{x}{6-x} \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3(6-x)} = 1 \Rightarrow x = 3(6-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 18 - 3x \Rightarrow 4x = 18 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

Portanto, $AE = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Teorema de Menelaus

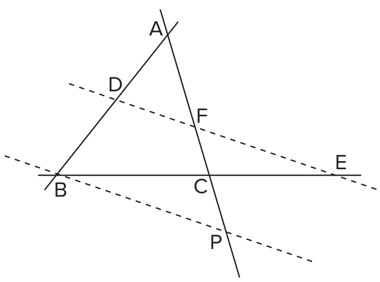
Se três retas determinam um triângulo ABC e uma quarta reta intersecta as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, nos pontos D, E e F, então $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$



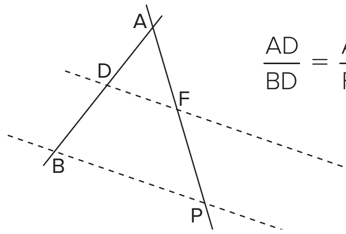
Esse teorema foi demonstrado pelo geômetra e astrônomo Menelaus de Alexandria por volta do século II d.C.

Demonstração:

Traçando pelo ponto B uma paralela à reta $\overleftrightarrow{DE}$, obtemos o ponto P no prolongamento do lado $\overline{AC}$ do triângulo:

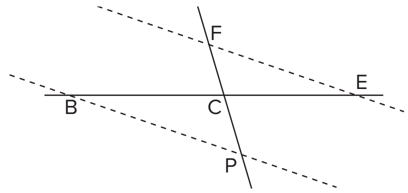


Aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AP}$, encontramos:



$$\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FP} \Rightarrow \frac{AD}{BD} \cdot \frac{FP}{AF} = 1$$

Aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overleftrightarrow{FP}$ e $\overleftrightarrow{BE}$, temos:



$$\frac{CF}{FP} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{CF}{FP} \cdot \frac{BE}{CE} = 1$$

Multiplicando as equações obtidas, encontramos:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{FP}{AF} \cdot \frac{CF}{FP} \cdot \frac{BE}{CE} = 1 \cdot 1$$

Cancelando FP e reordenando as frações, obtemos:

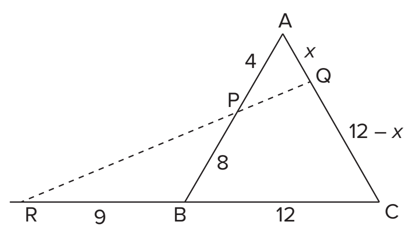
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

Exercício resolvido

14. Em um triângulo equilátero ABC de lados medindo 12 cm, P é um ponto do lado $\overline{AB}$ tal que AP $=$ 4 cm e Q é um ponto do lado $\overline{AC}$. Sabendo que o ponto R, de interseção das retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, é tal que BR $=$ 9 cm, determine o comprimento do segmento $\overline{AQ}$.

Resolução:

Sendo AQ $= x$, uma figura de acordo com o enunciado é:



Pelo teorema de Menelaus, temos:

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BR}{CR} \cdot \frac{CQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{4}{8} \cdot \frac{9}{(9+12)} \cdot \frac{(12-x)}{x} = 1$$

Fazendo as simplificações possíveis, encontramos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{(12-x)}{x} = 1$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{(12-x)}{x} = 1 \Rightarrow \frac{3(12-x)}{14x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x = 36 - 3x \Rightarrow 17x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{17}$$

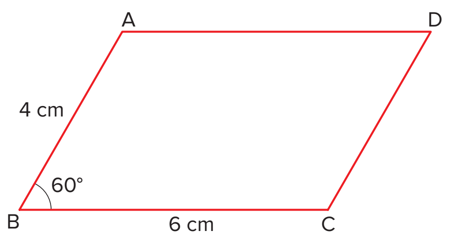
Revisando

1. O ponteiro das horas de um relógio de parede mede 21 cm, e o ponteiro dos minutos mede 32 cm. Em dado instante, após o meio-dia, esses ponteiros formam um ângulo obtuso, como mostra a figura a seguir:

Se, nesse momento, a distância entre as extremidades dos dois ponteiros for expressa, em centímetros, por um número múltiplo de 5, então o maior valor possível para essa distância é:

a) 35 cm.
b) 40 cm.
c) 45 cm.
d) 50 cm.
e) 55 cm.

2. **UPE 2022** No paralelogramo ABCD da figura, as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, 4 cm e 6 cm, e a medida do ângulo formado por esses segmentos é de 60°.

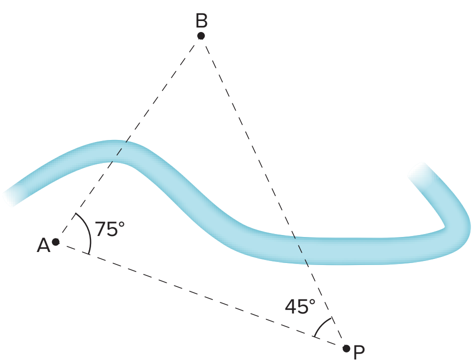


Qual a medida, em cm, da diagonal $\overline{AC}$? Use $\sqrt{7} = 2{,}65$.

a) 5,1.
b) 5,3.
c) 5,6.
d) 6,2.
e) 6,8.

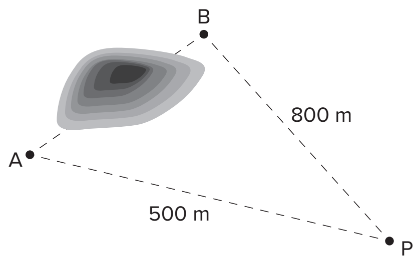
3. A Geometria Plana é, desde seu princípio, a ciência de se medir a Terra. Atualmente, o profissional que coleta essas medidas é chamado de topógrafo. Leia as duas situações a seguir e resolva-as.

Situação 1: Um topógrafo quer determinar a distância entre os pontos A e B situados em lados opostos de um rio, como ilustra a figura a seguir (fora de escala):



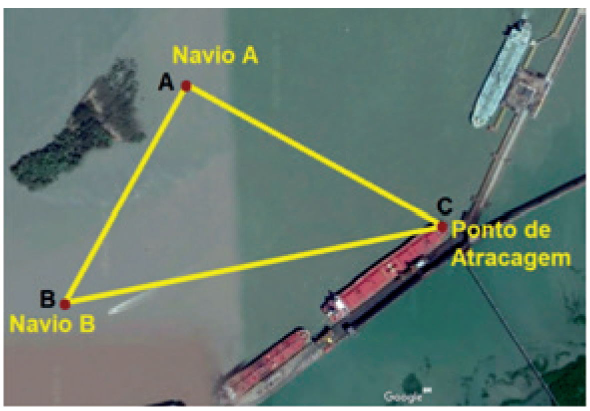
Para isso, ele verifica que o ângulo $A\hat{P}B$ mede 45°, que a distância entre A e P é de 24,5 m e que o ângulo $P\hat{A}B$ mede 75°. Sabendo que 24,5 é um valor próximo de $10\sqrt{6}$ e que os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos valores dos senos de seus ângulos opostos, ajude o topógrafo a calcular a distância de A até B.

Situação 2: Outro topógrafo quer determinar a distância entre os pontos A e B, mas não pode percorrê-la, pois entre esses pontos há um morro muito alto, como ilustra a figura seguinte (fora de escala):



Para isso, ele verifica que a distância entre os pontos P e A é de 500 m, que o ângulo $A\hat{P}B$ mede 60° e que a distância entre os pontos P e B é de 800 m. Usando o teorema dos cossenos, ajude o topógrafo a calcular a distância entre os pontos A e B.

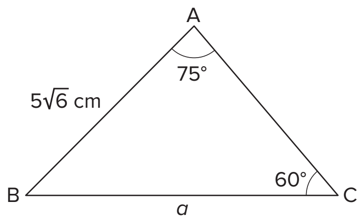
4. **Uema 2020** O Porto do Itaqui, porto brasileiro localizado na cidade de São Luís do estado do Maranhão, é nacionalmente conhecido por ter uma das maiores amplitudes de maré do Brasil, podendo ultrapassar 7 metros. O Itaqui é o 11º no *ranking* geral e o 6º entre os portos públicos em movimentação de cargas. A profundidade de seu canal de acesso é de 23 metros. Frequentemente, existem navios atracando, descarregando, desatracando e à espera na baía de São Marcos. Analise a imagem a seguir.



https://pt.wikipedia.org/wiki/Porto_do_Itaqui

Considere a medida do ângulo $A\hat{C}B = 60°$, a distância AC igual a 5 km e a distância CB igual a 8 km. Nessas condições: (Use $\cos 60° = 0{,}5$), calcule a distância do navio A até o navio B, em km.

5. **EEAR-SP 2021** Considerando a figura e que sen 75° é igual a $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, calcula-se que a = 5 (_____) cm.



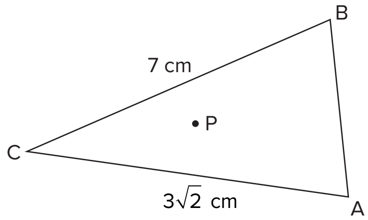
a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) $1+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

6. Os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo medem, respectivamente, $3\sqrt{2}$ cm e 7 cm, como mostra a figura:



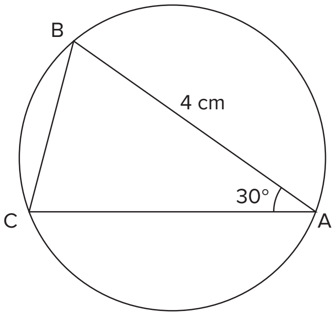
Sabendo que med($\hat{C}$) = 45° e que o ponto P dista igualmente de todos os vértices do triângulo, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é o comprimento do lado $\overline{AB}$ do triângulo?

b) Qual é o valor do seno do ângulo interno de vértice B desse triângulo?

c) Qual o valor da distância do ponto A ao ponto P?

7. Um triângulo ABC tem med($\hat{A}$) = 30°, AB = 4 cm e está inscrito em um círculo, como mostra a figura:



Sabendo que sen ($\hat{C}$) = $\frac{2}{3}$, determine:

a) o comprimento do lado $\overline{BC}$ do triângulo;

b) o comprimento do raio do círculo que circunscreve o triângulo.

8. Considere um triângulo com lados de 2 m, 3 m e $\sqrt{7}$ m.

a) Determine o valor do cosseno do ângulo formado pelos lados de 2 m e 3 m.

b) Determine a medida, em graus, desse ângulo.

c) Encontre os valores dos senos dos outros ângulos desse triângulo.

9. Um quadrilátero ABCD está inscrito em uma circunferência de centro O. Os lados desse quadrilátero medem AB = BC = 5, CD = 3 e AD = 8. Determine a medida da diagonal $\overline{BD}$.

10. **Uesb-BA 2020** Considere um paralelogramo de lados medindo $2\sqrt{6}$ cm e $3\sqrt{6}$ cm. Se o ângulo interno agudo desse paralelogramo mede 60°, o comprimento, em centímetros, da maior diagonal desse paralelogramo é

a) $\sqrt{19}$

b) $\sqrt{38}$

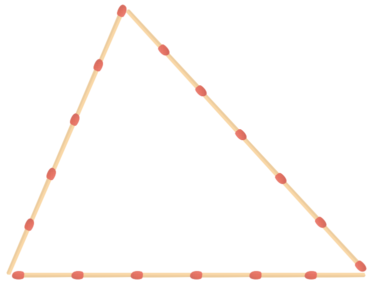
c) $\sqrt{57}$

d) $\sqrt{114}$

e) $2\sqrt{57}$

Exercícios propostos

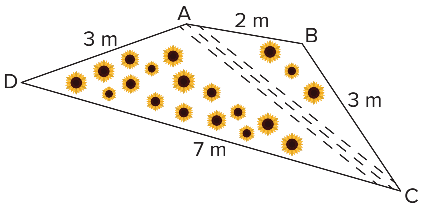
1. **Enem 2014** Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

a) 3 **c)** 6 **e)** 10
b) 5 **d)** 8

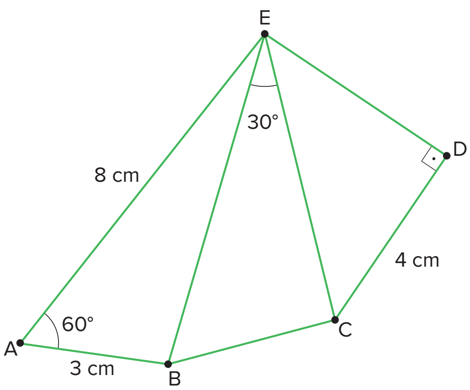
2. No quintal de sua casa, Dona Carla tem um jardim de girassóis no formato de um quadrilátero ABCD, cujos lados medem 2, 3, 7 e 3 metros, como ilustra a figura a seguir:



Ela deseja fazer um caminho de pedras, em linha reta, que atravesse todo o jardim sobre a diagonal $\overline{AC}$, indicada na figura; para isso, precisará comprar nove pedras por metro. O número total de pedras que Dona Carla precisará está entre:

a) 27 e 36. **c)** 45 e 54. **e)** 63 e 72.
b) 36 e 45. **d)** 54 e 63.

3. **FICSAE-SP 2017** No pentágono ABCDE da figura, o lado $\overline{AB}$ mede 3 cm; o lado $\overline{AE}$ mede 8 cm; o lado $\overline{CD}$ mede 4 cm e os ângulos $B\hat{E}C$, $\hat{A}$ e $\hat{D}$ medem 30°, 60° e 90°, respectivamente.



Sendo a área do triângulo BCE igual a 10,5 cm², a medida, em cm, do lado $\overline{DE}$ é:

a) $\sqrt{18}$ **c)** $\sqrt{22}$
b) $\sqrt{20}$ **d)** $\sqrt{24}$

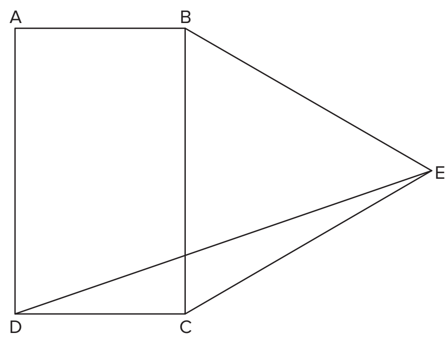
4. **EEAR-SP 2017** Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo 30°, seu lado oposto a esse ângulo mede:

a) $\frac{R}{2}$
b) R
c) 2R
d) $\frac{2R}{3}$

5. O lado $\overline{AB}$ de um triângulo mede $10\sqrt{6}$ m e os ângulos internos de vértices A e B medem 75° e 45°, respectivamente. Então, o lado $\overline{AC}$ desse triângulo mede:

a) 20 m.
b) 25 m.
c) 30 m.
d) 35 m.
e) 40 m.

6. **UFRGS 2020** Na figura a seguir, tem-se um retângulo ABCD, de lados $\overline{AB} = 3$ e $\overline{AD} = 5$, e um triângulo equilátero BEC, construído sobre o lado $\overline{BC}$.



A medida de $\overline{DE}$ é

a) $\sqrt{34 + 15\sqrt{2}}$.
b) $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$.
c) 7.
d) $\sqrt{19}$.
e) $\sqrt{34 + 15\sqrt{3}}$.

7. **FGV-SP 2020** Jorge e Miguel estão jogando tênis. Jorge rebate a bolinha e esta percorre 16 metros em linha reta. Miguel a devolve em linha reta com um ângulo de 30° com a linha reta descrita pela bolinha após a rebatida de Jorge. Desta vez, a bolinha percorre 10 metros. Que distância deverá percorrer Jorge para rebater a bolinha? Use a aproximação: $\sqrt{3} = 1{,}7$.

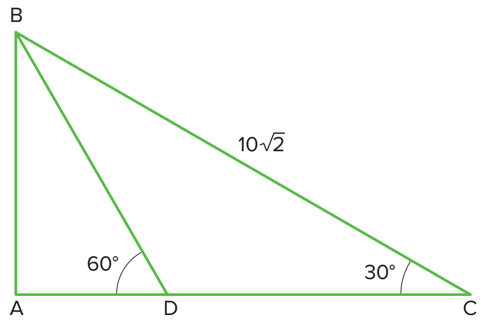
8. Unicamp-SP 2021 Considere que os ângulos internos de um triângulo formam uma progressão aritmética. Dado que a, b, c são as medidas dos lados do triângulo, sendo $a < b < c$, é correto afirmar que

a) $b^2 + ac = a^2 + c^2$.
b) $a^2 + bc = b^2 + c^2$.
c) $a^2 - bc = b^2 + c^2$.
d) $b^2 - ac = a^2 + c^2$.

9. Os ponteiros de um relógio analógico medem 5 cm e 8 cm. Qual é a distância, em centímetros, entre suas extremidades em um momento em que eles formam um ângulo de 60°?

a) $2\sqrt{13}$
b) $\sqrt{51}$
c) $5\sqrt{2}$
d) 7
e) $4\sqrt{3}$

10. EEAR-SP 2023 Seja ABC um triângulo retângulo em A, conforme a figura. Se D está em $\overline{AC}$ e se $BC = 10\sqrt{2}$ cm, então DC = _______ cm.



a) $3\sqrt{6}$
b) $5\sqrt{6}$
c) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$
d) $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$

11. PUC-Rio Seja um hexágono regular ABCDEF. A razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) $\dfrac{3}{2}$
c) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) 2

12. IFSP 2014 A base de um triângulo isósceles mede $3\sqrt{3}$ cm e o ângulo oposto à base mede 120°. A medida dos lados congruentes desse triângulo, em centímetros, é:

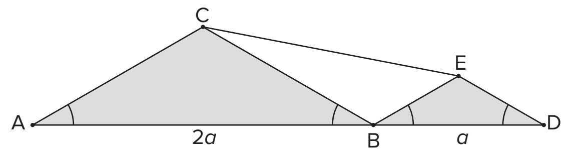
a) 3
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) $1 + \sqrt{3}$
e) $2 - \sqrt{3}$

13. UPE 2017 João está procurando cercar um terreno triangular que ele comprou no campo. Ele sabe que dois lados desse terreno medem, respectivamente, 10 m e 6 m e formam entre si um ângulo de 120°. O terreno será cercado com três voltas de arame farpado. Se o preço do metro do arame custa R$ 5,00, qual será o valor gasto por João com a compra do arame?

Dados: $\text{sen}(120°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(120°) = -\dfrac{1}{2}$.

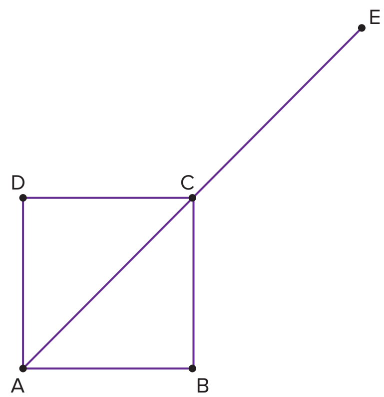
a) R$ 300,00
b) R$ 420,00
c) R$ 450,00
d) R$ 500,00
e) R$ 520,00

14. Unicamp-SP 2013 Na figura a seguir, ABC e BDE são triângulos isósceles semelhantes de bases $2a$ e a, respectivamente, e o ângulo $C\hat{A}B = 30°$. Portanto, o comprimento do segmento $\overline{CE}$ é:



a) $a\sqrt{\dfrac{5}{3}}$
b) $a\sqrt{\dfrac{8}{3}}$
c) $a\sqrt{\dfrac{7}{3}}$
d) $a\sqrt{2}$

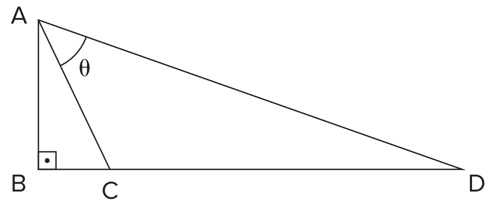
15. Unicamp-SP 2018 Considere que o quadrado ABCD, representado na figura abaixo, tem lados de comprimento de 1 cm, e que C é o ponto médio do segmento $\overline{AE}$. Consequentemente, a distância entre os pontos D e E será igual a



a) $\sqrt{3}$ cm.
b) 2 cm.
c) $\sqrt{5}$ cm.
d) $\sqrt{6}$ cm.

FRENTE 3

16. Unicamp-SP 2017 Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura a seguir, em que AB = 2 cm, BC = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a:



a) 15° b) 30° c) 45° d) 60°

17. UFPR 2014 Dois navios deixam um porto ao mesmo tempo. O primeiro viaja a uma velocidade de 16 km/h em um curso de 45° em relação ao norte, no sentido horário. O segundo viaja a uma velocidade de 6 km/h em um curso de 105° em relação ao norte, também no sentido horário. Após uma hora de viagem, a que distância se encontrarão separados os navios, supondo que eles tenham mantido o mesmo curso e velocidade desde que deixaram o porto?

a) 10 km.
b) 14 km.
c) 15 km.
d) 17 km.
e) 22 km.

18. ITA-SP 2022 Seja Q um quadrilátero de vértices A, B, C e D cujos lados satisfazem $m(\overline{AB}) = 5 = m(\overline{CD})$, $m(\overline{BC}) = 3$ e $m(\overline{DA}) = 8$. Sabendo que Q é inscrito em uma circunferência de raio r, determine r.

19. Em um paralelogramo, cada ângulo agudo mede 30° e os lados que formam cada um desses ângulos medem $3\sqrt{3}$ cm e 5 cm. Calcule a medida da menor das diagonais.

a) $\sqrt{6}$ cm.
b) $\sqrt{3}$ cm.
c) $3\sqrt{3}$ cm.
d) $\sqrt{7}$ cm.
e) $15\sqrt{3}$ cm.

20. Unig-RJ 2020 Considerem-se 2 avenidas retas e paralelas distantes 3 km uma da outra. Em uma delas, está localizada uma fábrica e, na outra, uma escola e um hospital. Sabe-se que o hospital está situado a 5 km da fábrica e que a escola está a mesma distância do hospital e da fábrica.

A partir dessas informações, pode-se afirmar que a distância da escola até a fábrica é aproximadamente igual, em km, a

a) 0,8
b) 1,9
c) 2,6
d) 3,1
e) 4,2

Texto complementar

Perspectivas

A palavra perspectiva vem do latim *perspicere* (ver através de). Se você se colocar atrás de uma janela envidraçada e, sem se mover do lugar, riscar no vidro o que está “vendo através da janela”, terá feito uma perspectiva; a perspectiva é a representação gráfica que mostra os objetos como eles aparecem a nossa vista, com três dimensões. [...]

Perspectiva axonométrica

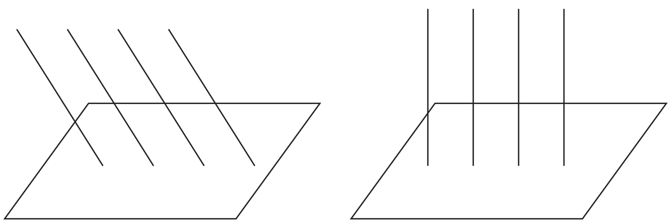
A perspectiva axonométrica, também chamada de perspectiva paralela e axonometria, é uma projeção cilíndrica ortogonal sobre um plano oblíquo em relação às três dimensões do corpo a representar.

A perspectiva axonométrica é amplamente usada no campo da engenharia devido à simplicidade de construção e ao fato de proporcionar imagens semelhantes às da perspectiva exata quando o ângulo visual desta é igual ou inferior a 30°.

A aplicação mais usual da axonometria é na perspectiva de instalações hidráulicas e na de peças, em que o problema de medidas é fundamental.

As perspectivas axonométricas são classificadas em dois tipos:

1. Axonometria oblíqua (perspectivas: militar e cavaleira)
2. Axonometria ortogonal (perspectivas: isométrica, dimétrica e anisométrica) [...]

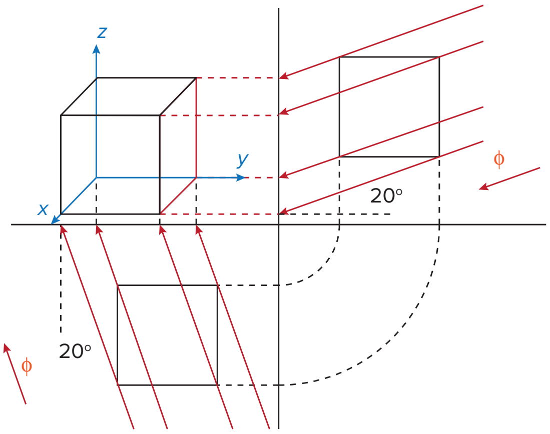


Oblíqua Ortogonal

Perspectiva axonométrica cavaleira

A perspectiva cavaleira é também chamada de perspectiva cavalheira, porque os desenhos das praças militares eram, geralmente, executados em projeção cilíndrica e o aspecto obtido dava a impressão de que o desenho havia sido colhido da cavaleira, obra alta de fortificação sobre a qual assentam baterias.

É também conhecida como axonometria oblíqua, pois é uma projeção que pressupõe o observador no infinito e, em consequência, utiliza os raios paralelos e oblíquos ao plano do quadro. Esta perspectiva torna uma das três faces do triedro como plano do quadro. Todos os segmentos ou figuras pertencentes ao plano *yz* se projetam em VG (verdadeira grandeza). Quando a inclinação dos raios projetantes é de 45° os coeficientes de redução são 1:1:1. [...]



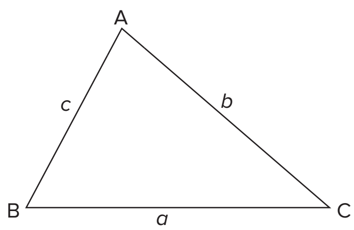
BARISON, Maria Bernadete. Perspectivas. *UEL*– CCE, [s.d.]. Disponível em: www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/gd_t/gd_2t.php. Acesso em: 2 ago. 2022.

Resumindo

Classificação dos triângulos

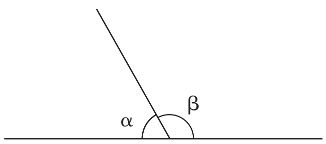
Com relação aos lados: escalenos, isósceles ou equiláteros.
Com relação aos ângulos internos: acutângulos, retângulos ou obtusângulos.

Desigualdade triangular



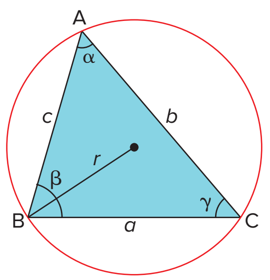
$$\begin{cases} |a-b| < c < a+b \\ |a-c| < b < a+c \\ |b-c| < a < b+c \end{cases}$$

Ângulos suplementares



$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta) \\ \cos(\beta) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$

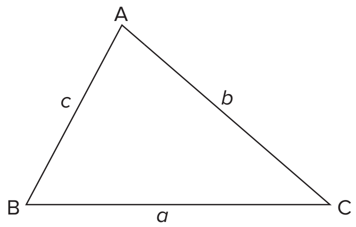
Teorema dos senos



$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2r$$

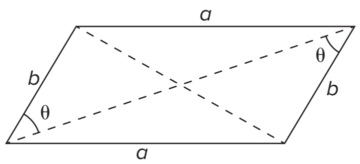
FRENTE 3

Teorema dos cossenos



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Diagonais do paralelogramo

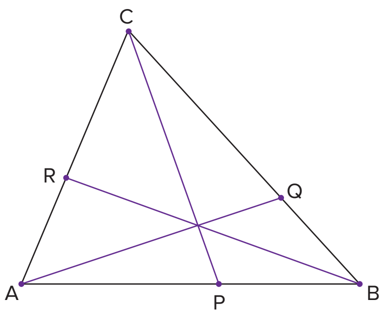


$$d = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)}$$

Cevianas de triângulos

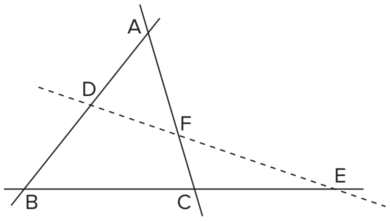
Todo segmento de reta que une o vértice de um triângulo a um ponto da reta que contém o lado oposto é denominado ceviana do triângulo.

Teorema das cevianas



$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

Teorema de Menelaus



$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

Quer saber mais?

Livro

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013.

Nas páginas 58 e 59 desse livro, você encontra o texto *Euclides e a geometria dedutiva*, que traz um breve relato sobre a história de Euclides e seu livro *Elementos*, no qual, a partir de cinco postulados específicos e algumas definições, foram deduzidos centenas de teoremas.

Sites

VETORES de força. *UFPR*. Disponível em: www.eletrica.ufpr.br/ufpr2/professor/49/TE224/Aula%202%20Vetores.pdf.

O texto serve para aprofundar os conhecimentos sobre a principal aplicação do teorema dos cossenos ao estudo da Física. Acesso em: 2 ago. 2022.

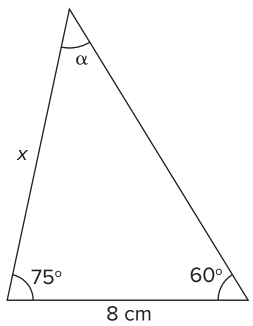
Vídeo

PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP. *Teorema de Menelaus*. YouTube, 10 nov. 2014. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ZBJ8ctbam_w.

No vídeo, o professor Marcos Paulo Ferreira de Araújo apresenta uma demonstração para o teorema de Menelaus. Acesso em: 4 jul. 2022.

Exercícios complementares

1. **UFPR 2017** Considere o triângulo a seguir.

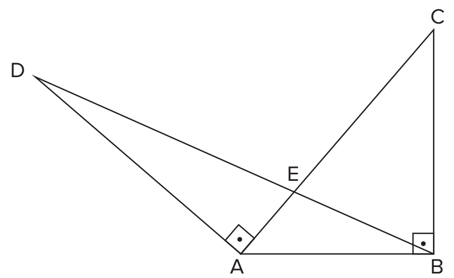


a) Quanto mede o ângulo α?
b) Quanto mede x?

2. **EsPCEx-SP 2020** Os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo ABC medem, respectivamente, 4 cm, 4 cm e 6 cm. Então a medida, em cm, da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ é igual a

a) $\sqrt{14}$
b) $\sqrt{17}$
c) $\sqrt{18}$
d) $\sqrt{21}$
e) $\sqrt{22}$

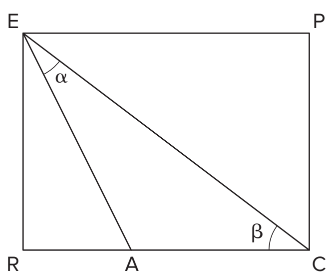
3. **Mackenzie-SP 2016**



Na figura anterior, ABC e AED são triângulos retângulos. Se $m(\overline{AC}) = \ell$, $m(B\hat{A}C) = \alpha$, $m(A\hat{D}E) = \beta$ e $m(A\hat{B}C) = m(D\hat{A}E) = 90°$, então $m(\overline{BD})$ é:

a) $\ell \cdot \cos\alpha$
b) $\ell \cdot \text{sen}^2\alpha$
c) $\ell \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$
d) $\ell \cdot \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\beta}$
e) $\ell \cdot \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\beta}$

4. **EPCar-MG 2021** No retângulo EPCR da figura a seguir, PC = 6 cm, RA = 3 cm e AC = 5 cm.

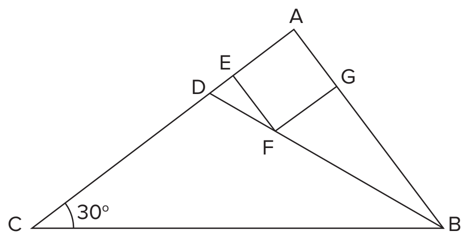


O valor de $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$ é

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$
b) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$
c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
d) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

5. **IME-RJ 2019** Uma corda $\overline{CD}$ corta o diâmetro $\overline{AB}$ de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

6. **UFTM-MG** Na figura, AEFG é um quadrado e $\overline{BD}$ divide o ângulo $A\hat{B}C$ ao meio.

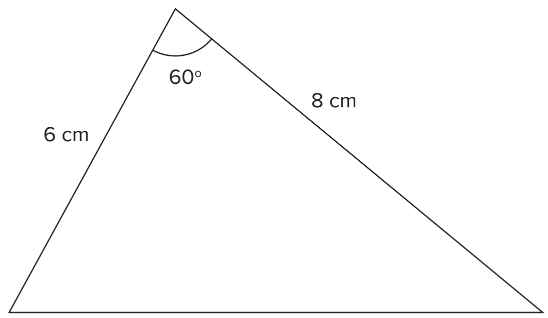


Sendo $CD = 2\sqrt{3}$ cm, o lado do quadrado AEFG, em centímetros, mede:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$
b) $\sqrt{3}-1$
c) $\dfrac{6(\sqrt{3}-1)}{5}$
d) $\dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{3}$
e) $\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$

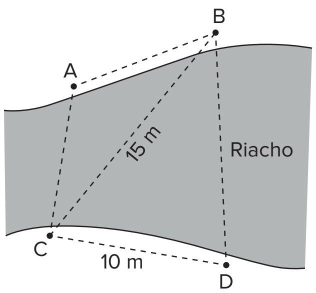
7. **FGV-SP**

a) Determine o perímetro do triângulo na forma decimal aproximada, até os décimos. Se quiser, use algum destes dados: $35^2 = 1\,225$; $36^2 = 1\,296$; $37^2 = 1\,369$.



b) Um aluno tinha de fazer um cartaz triangular, em cartolina. Decidiu construir o triângulo com as seguintes medidas dos lados: 6 cm, 8 cm e 16 cm. Ele conseguirá fazer o cartaz? Por quê?

8. **Unicamp-SP** Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela a seguir, obtidos com a ajuda de um teodolito.

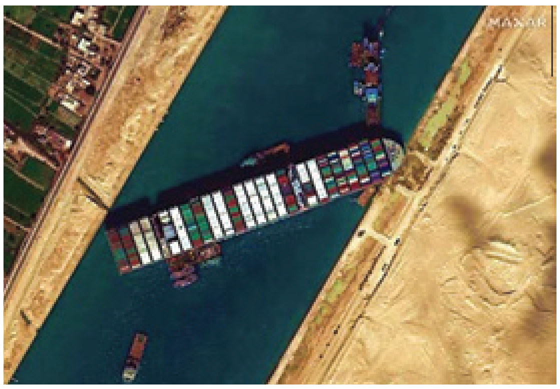


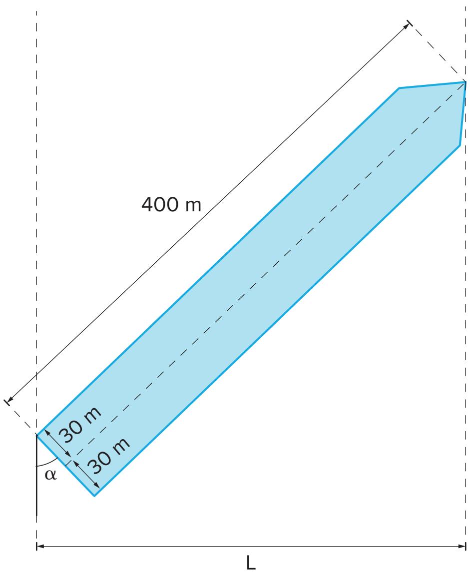
Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\frac{\pi}{6}$
$B\hat{C}D$	$\frac{\pi}{3}$
$A\hat{B}C$	$\frac{\pi}{6}$

a) Calcule a distância entre A e B.

b) Calcule a distância entre B e D.

9. **Unicamp-SP 2022** No dia 23 de março de 2021, um navio encalhou no canal de Suez, no Egito. A embarcação tinha 400 metros de comprimento e 60 metros de largura. No ponto onde aconteceu o acidente, o canal de Suez não tem mais do que 200 metros de largura. Abaixo apresentamos uma foto de satélite e uma figura representando a situação. O ângulo α indicado na figura abaixo mede 67,5°.





A largura do canal, medida em metros e indicada por L na figura anterior, é:

Dados: $\cos(2\theta) = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$
$\text{sen}(2\theta) = 2 \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta)$

a) $400\sqrt{2-\sqrt{2}} - 60\sqrt{2+\sqrt{2}} \cong 195{,}3$

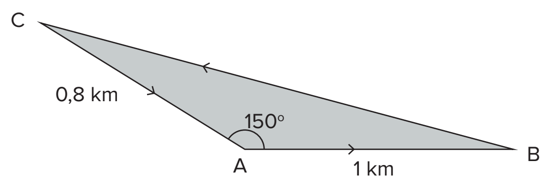
b) $200\sqrt{2-\sqrt{2}} - 15\sqrt{2+\sqrt{2}} \cong 125{,}4$

c) $200\sqrt{2-\sqrt{2}} + 15\sqrt{2+\sqrt{2}} \cong 180{,}8$

d) $200\sqrt{3-\sqrt{3}} - 15\sqrt{3+\sqrt{3}} \cong 192{,}6$

10. **UFSM-RS 2013** A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhora da qualidade de vida.
Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura.

Dado: $\sqrt{3} = 1{,}7$.



Quantos quilômetros ela terá caminhado se percorrer todo o trajeto?

a) 2,29
b) 2,33
c) 3,16
d) 3,50
e) 4,80

11. **PUC-Rio 2021** Os lados do triângulo ABC têm os seguintes comprimentos: AB tem comprimento 17, AC tem comprimento 34 e BC tem comprimento 38. Qual afirmação sobre o ângulo $\hat{A} = BAC$ é correta?

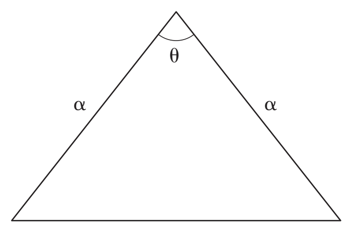
a) O ângulo $\hat{A}$ é reto.

b) O ângulo $\hat{A}$ é agudo e maior do que 60°.

c) O ângulo $\hat{A}$ é menor ou igual a 60°.

d) O ângulo $\hat{A}$ é obtuso.

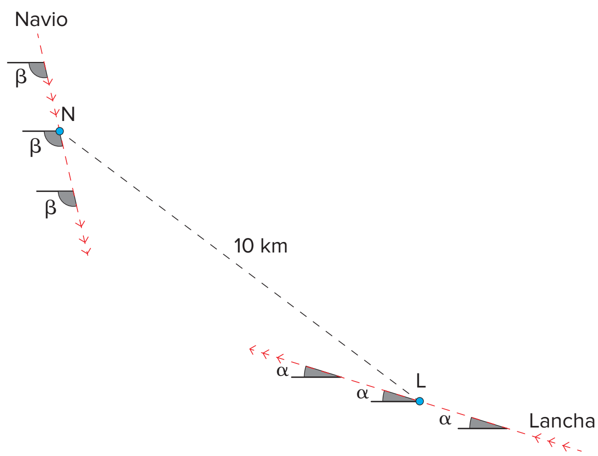
12. **Unicamp-SP 2020** A figura abaixo exibe um triângulo isósceles com dois lados de comprimento $a = 5$ cm e um dos ângulos internos igual a θ, em que $\cos\theta = \frac{3}{5}$.



a) Calcule a área desse triângulo.

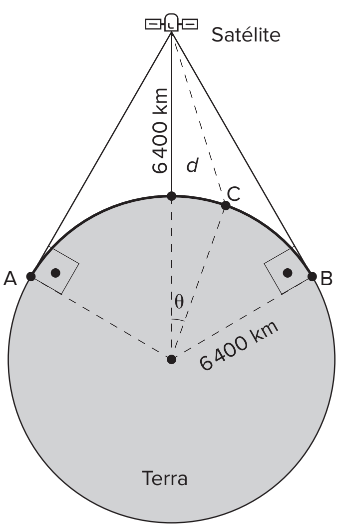
b) Determine o comprimento do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

13. **Unesp 2017** Uma lancha e um navio percorrem rotas lineares no mar plano com velocidades constantes de 80 e 30 km/h, respectivamente. Suas rotas, como mostra a figura, estão definidas por ângulos constantes de medidas iguais a α e β, respectivamente. Quando a lancha está no ponto L e o navio no ponto N, a distância entre eles é de 10 km.



Sendo P o ponto em que a lancha colidirá com o navio, demonstre que o ângulo obtuso $L\hat{P}N$ será igual a $\alpha + \beta$. Em seguida, calcule a distância entre N e P, considerando $\cos(a + b) = -\dfrac{9}{16}$.

14. **Unicamp-SP 2013** Um satélite orbita a 6 400 km da superfície da Terra. A figura a seguir representa uma seção plana que inclui o satélite, o centro da Terra e o arco de circunferência $\widehat{AB}$. Nos pontos desse arco, o sinal do satélite pode ser captado. Responda às questões seguintes, considerando que o raio da Terra também mede 6 400 km.



a) Qual o comprimento do arco $\widehat{AB}$ indicado na figura?

b) Suponha que o ponto C da figura seja tal que $\cos(\theta) = \dfrac{3}{4}$. Determine a distância d entre o ponto C e o satélite.

15. **ITA-SP 2022** Seja T um triângulo de vértices A, B e C com $m(\overline{AB}) = 2\sqrt{5}$ e $m(\overline{BC}) = 6$. Sabendo que $A\hat{B}C$ é agudo e T é inscritível em uma circunferência de raio R = 5, podemos afirmar que:

a) $m(\overline{AC}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

b) $m(\overline{AC}) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) $m(\overline{AC}) = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

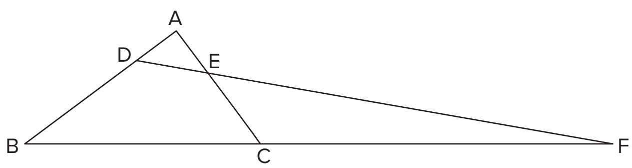
d) $m(\overline{AC}) = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

e) $m(\overline{AC}) = \dfrac{14\sqrt{5}}{5}$.

16. Os pontos P, Q e R pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC isósceles cuja base mede AB = 10 e altura 12. Se AP = CQ = 3 e os segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{CP}$ e $\overline{BR}$ concorrem todos em um mesmo ponto, então AR é igual a:

a) $\dfrac{100}{17}$ **b)** $\dfrac{110}{17}$ **c)** $\dfrac{120}{17}$ **d)** $\dfrac{130}{17}$ **e)** $\dfrac{140}{17}$

17. Na figura, o triângulo ADE é isósceles de base $\overline{DE}$ e lados AD = AE = 1, e o triângulo ABC é retângulo em A com catetos AC = 3 e AB = 4.



Determine CF.

18. **ITA-SP 2016** Em um triângulo equilátero ABC de lado 2, considere os pontos P, M e N pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que:

a. P é o ponto médio de $\overline{AB}$.
b. M é o ponto médio de $\overline{BC}$.
c. $\overline{PN}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}C$.

Então, o comprimento do segmento $\overline{MN}$ é igual a:

a) $\sqrt{10 - 4\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{10 - 5\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{5\sqrt{3} - 5}$

19. **ITA-SP 2016** Seja ABC um triângulo equilátero e suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado $\overline{BC}$ tais que BM = MN = NC. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de $\cos\alpha$ é:

a) $\dfrac{13}{14}$ **b)** $\dfrac{14}{15}$ **c)** $\dfrac{15}{16}$ **d)** $\dfrac{16}{17}$ **e)** $\dfrac{17}{18}$

20. **ITA-SP 2018** Os lados de um triângulo de vértices A, B e C medem AB = 3 cm, BC = 7 cm e CA = 8 cm. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em cm, é

a) 2.
b) $2\sqrt{2}$.
c) 3.
d) $2\sqrt{3}$.
e) $\dfrac{7}{2}$.

BNCC em foco

EM13MAT308

1. Um especialista em escaladas pretende subir a encosta de uma pedreira e gostaria de saber a altura desta.

Umomos/Shutterstock.com

Usando seus conhecimentos sobre triângulos, afasta-se 120 metros do “pé” da encosta, onde consegue visualizar o ponto mais alto da pedreira sob um ângulo de 60° com o plano horizontal. Desprezando a própria altura e com as informações que possuía, o especialista concluiu, corretamente, que a altura aproximada da encosta era de

Dados: $\text{sen}(60^\circ) \cong 0{,}8$; $\cos(60^\circ) = 0{,}5$; $\text{tg}(60^\circ) \cong 1{,}7$.

a) 60 metros.
b) 68 metros.
c) 96 metros.
d) 136 metros.
e) 204 metros.

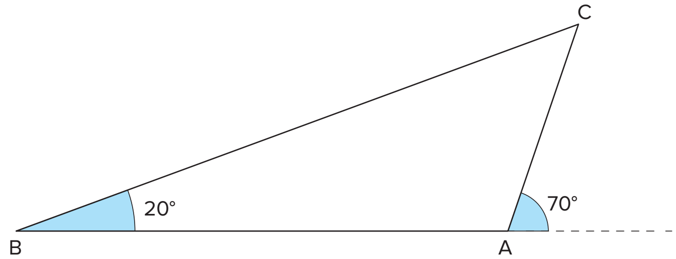
EM13MAT308

2. Dois lados consecutivos, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, de um paralelogramo ABCD formam um ângulo de 60° e medem 16 cm e 10 cm, respectivamente. Calcule a medida da diagonal $\overline{AC}$ desse quadrilátero.

a) 196 cm
b) 19,6 cm
c) 14,6 cm
d) 14,0 cm
e) 12,8 cm

EM13MAT308

3. Considere o triângulo ABC da figura, em que AB = 10 cm. Calcule o perímetro aproximado desse triângulo.



a) 12,50 cm
b) 18,00 cm
c) 26,00 cm
d) 26,70 cm
e) 28,00 cm

ivanvislov/Shutterstock.com

Montanha-russa no Parque Sochi, Rússia. Foto de 2019.

FRENTE 3

CAPÍTULO

5

Centros dos triângulos e polígonos

Os polígonos – termo que tem origem grega: *póly* (vários) + *gonia* (ângulos) – são figuras geométricas com vários ângulos.

Em placas de trânsito, estruturas de sustentação ou obras gigantescas de engenharia, por exemplo, uma montanha-russa ou uma torre de transmissão, vemos figuras que lembram polígonos. Eles estão presentes em quase tudo no dia a dia, e isso desde as civilizações mais antigas.

Neste capítulo, vamos estudar os pontos notáveis do triângulo e de alguns polígonos regulares, bem como sua importância. Vamos observar os centros, as propriedades e as simetrias dos polígonos.

Pontos notáveis do triângulo

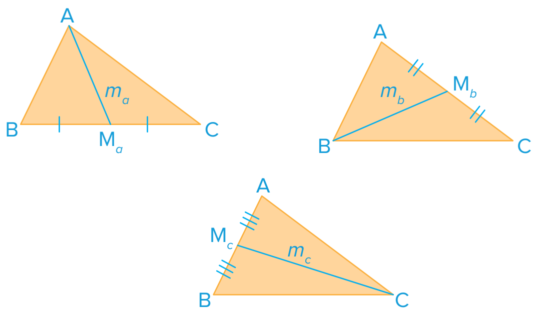
O triângulo tem vários pontos notáveis ou centros, cada um com suas características e propriedades, alguns dos quais relacionados diretamente às cevianas (definidas no capítulo anterior).

Estudaremos a seguir o baricentro (associado às medianas), o incentro (associado às bissetrizes), o circuncentro (associado às mediatrizes) e o ortocentro (associado às alturas).

O baricentro e as medianas

Mediana

Mediana é a ceviana com extremos em um vértice e no ponto médio do lado oposto a esse vértice. Observe na figura a seguir as três medianas de um triângulo.



Observe, por exemplo, como calcular a medida da mediana m_a no triângulo ABC, em que temos AB = 8 cm, BC = 10 cm e ângulo $\hat{B}$ de medida 60°.

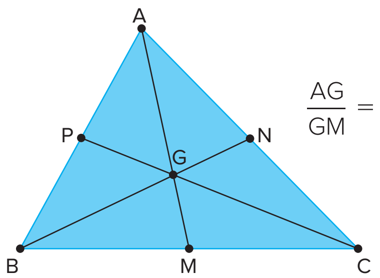
Como $BM_a = \dfrac{BC}{2} = 5$ cm, pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo ABM_a, temos, em cm:

$$(m_a)^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos(60^\circ)$$
$$(m_a)^2 = 64 + 25 - 80 \cdot \frac{1}{2}$$
$$(m_a)^2 = 89 - 40 = 49$$
$$m_a = 7$$

Baricentro

Vamos demonstrar o seguinte resultado: as três medianas de um triângulo se intersectam em um mesmo ponto, chamado de baricentro, que divide cada uma das medianas na proporção de 2 para 1; a parte que vai do vértice ao baricentro é o dobro da parte que vai do baricentro ao ponto médio.

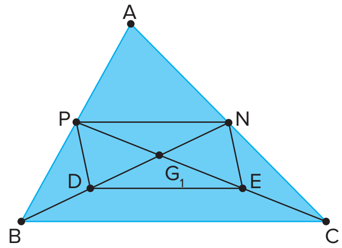
Na figura a seguir, M, N e P são pontos médios dos lados do triângulo, e G é o baricentro.



$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

Demonstração:

Na figura seguinte, G_1 é o ponto de cruzamento das medianas $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$; D e E são os pontos médios de $\overline{BG_1}$ e $\overline{CG_1}$, respectivamente.



Temos que:

- $\overline{PN}$ é base média de ABC; logo, $\overline{PN}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e $PN = \dfrac{BC}{2}$;
- o ângulo $P\hat{N}G_1$ é igual ao ângulo $G_1\hat{B}C$ (alternos internos);
- o ângulo $P\hat{G}_1N$ é igual ao ângulo $C\hat{G}_1B$ (opostos pelo vértice).

Assim, os triângulos PG_1N e CG_1B são semelhantes pelo caso AA. Logo:

$$\frac{BG_1}{G_1N} = \frac{CG_1}{G_1P} = \frac{BC}{PN} = 2$$

De maneira análoga, se G_2 é o ponto de encontro de $\overline{BN}$ e $\overline{AM}$, podemos provar que:

$$\frac{BG_2}{G_2N} = \frac{AG_2}{G_2M} = \frac{AB}{MN} = 2$$

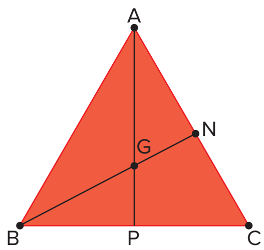
Como G_1 e G_2 dividem a mediana $\overline{BN}$ na mesma proporção, verificamos que correspondem ao mesmo ponto, que chamaremos apenas de G. Desse modo, fica provado que:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

Observação: Temos que PNED é um paralelogramo.

Exercício resolvido

1. Na figura, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Se G é o baricentro do triângulo ABC, AP = 6 cm e GN = 1,5 cm, obtenha, em centímetros:



a) AG.
b) GP.
c) BG.
d) BN.

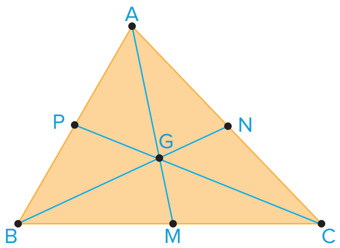
Resolução:

Como AG = 2GP, fazendo GP = x, temos que AG = $2x$ e AP = $3x$. Assim, $3x = 6 \Rightarrow x = 2$, ou seja, GP = 2 cm e AG = 4 cm. De maneira análoga, GN = y, BG = $2y$ e BN = $3y$. Logo, se y = 1,5 cm, temos que BG = $= 2 \cdot 1{,}5 = 3$ cm e BN = $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$, ou seja, 4,5 cm.

Saiba mais

A palavra "baricentro" (centro de massa de um corpo) tem origem no grego antigo: *báros* (pesado) + *kéntron* (centro). Se um triângulo for confeccionado com espessura constante, por um material ideal de densidade uniforme, seu centro de massa será o baricentro. A propriedade geométrica que justifica esse fato é a seguinte:
"As medianas dividem um triângulo em seis triângulos de mesma área."

Demonstração:



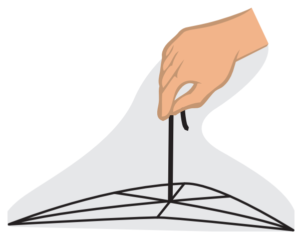
Os triângulos GMB e GMC têm bases de mesma medida (BM = MC) e altura relativa a essa base (a altura é a distância de G a BC); logo, possuem a mesma área, digamos, igual a A_1. Pelo mesmo motivo, as áreas dos triângulos AGN e CGN são iguais a A_2, e as áreas dos triângulos AGP e BGP são iguais a A_3.
Como os triângulos ABM e ACM têm mesma base e altura relativa a $\overline{BC}$, também apresentam mesma área. Então:

$$A_1 + 2A_3 = A_1 + 2A_2 \;\Rightarrow\; A_3 = A_2$$

Os triângulos BCN e BAN também possuem mesma base e altura; portanto, mesma área. Logo:

$$A_2 + 2A_1 = A_2 + 2A_3 \;\Rightarrow\; A_1 = A_3$$

Desse modo, $A_1 = A_2 = A_3$ e os triângulos GBM, GCM, GCN, GAN, GAP e GBP têm todos a mesma área.
Assim, verificamos que o baricentro G está "rodeado" por seis triângulos de mesma área.
Se o triângulo ABC é composto de um material de densidade uniforme, os seis triângulos que "rodeiam" o baricentro apresentam mesma massa, e o baricentro é o centro de massa do triângulo ABC.



Triângulo pendurado pelo baricentro, em equilíbrio.

Atenção

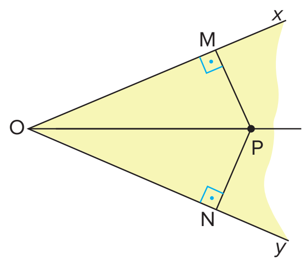
Sobre as medianas e o baricentro, podemos afirmar:

- As três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado de baricentro do triângulo.
- O baricentro divide as medianas na razão 2 : 1.
- As medianas dividem o triângulo em seis triângulos de mesma área.
- O baricentro é o centro de massa do triângulo de densidade uniforme.

O incentro e as bissetrizes

Bissetriz

Bissetriz é a semirreta que divide um ângulo em dois de mesma medida (ao meio).



$\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo MÔN.

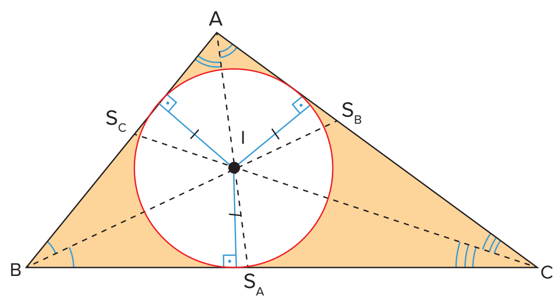
Na figura anterior, med (MÔP) = med (NÔP), med (OM̂P) = = med (ON̂P) = 90° e $\overline{OP}$ é comum aos triângulos OMP e ONP. Assim, esses dois triângulos são congruentes pelo caso LAA_o. Desse modo, PN = PM e P equidista dos lados do ângulo. O que acabamos de demonstrar é que qualquer ponto da bissetriz equidista dos lados do ângulo.

Incentro

Incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, ou seja, aquela que tangencia os três lados do triângulo.

Provaremos que as bissetrizes dos ângulos internos se intersectam no incentro.

Demonstração:

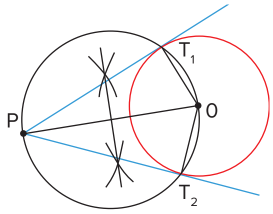


Sejam $\overline{AS_A}$, $\overline{BS_B}$ e $\overline{CS_C}$ as bissetrizes internas do triângulo e I o ponto de encontro de $\overline{AS_A}$, $\overline{BS_B}$ e $\overline{CS_C}$. Como o ponto I pertence a $\overline{AS_A}$, ele equidista de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; e, como também pertence a $\overline{BS_B}$, equidista de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Tendo em vista as duas condições, concluímos que I equidista de $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Logo, I também pertence a $\overline{CS_C}$. Portanto, I pertence às três bissetrizes e equidista dos três lados do triângulo, sendo o centro da circunferência inscrita.

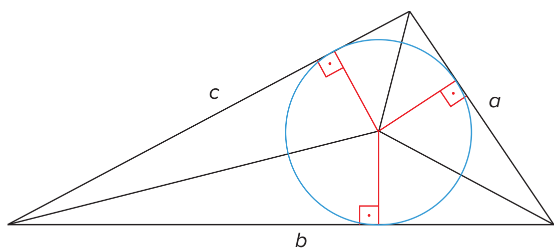
Tangência

Dados uma circunferência λ e um ponto P externo a ela, vamos provar que o par de segmentos tangentes a λ e que passam por P tem a mesma medida.

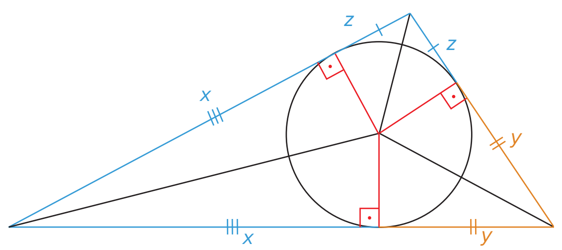
Na figura a seguir, os triângulos PT_1O e PT_2O são congruentes pelo caso especial HC, pois apresentam a mesma **hipotenusa** $\overline{OP}$; e as medidas dos **catetos** $\overline{OT_1}$ e $\overline{OT_2}$ são iguais ao raio da circunferência de centro O. Assim, o par de tangentes $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$ possui a mesma medida.



Vamos estudar uma aplicação dessa ideia simples de tangência. Na figura seguinte, temos um triângulo de lados a, b e c e perímetro $2p = a + b + c$ e também uma circunferência inscrita nesse triângulo.



Identificamos na figura a seguir os pares de segmentos de mesma medida tangentes à circunferência inscrita, com medidas x, y e z.



Comparando as duas figuras, concluímos que: $\begin{cases} y + z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases}$

Somando as equações, temos:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c$$
$$2x + 2y + 2z = 2p$$
$$x + y + z = p$$

Assim: $\begin{cases} x = (x + y + z) - (y + z) = p - a \\ y = (x + y + z) - (x + z) = p - c \\ z = (x + y + z) - (x + y) = p - b \end{cases}$

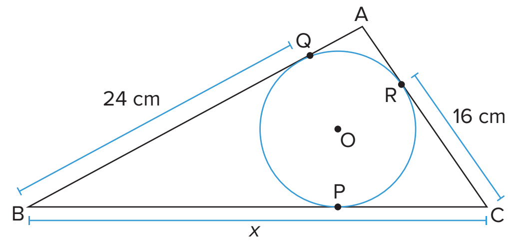
Concluímos, então, que o par de segmentos tangentes à circunferência inscrita que parte de um vértice é igual à diferença entre o semiperímetro do triângulo e o lado oposto a esse vértice.

Exercício resolvido

2. Observe a figura (sem escala) a seguir e determine:

a) o valor de x;

b) a medida do segmento $\overline{AR}$ sabendo que o perímetro do triângulo ABC é 92 cm.

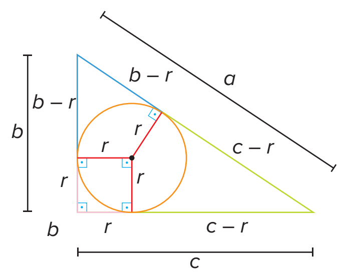


Resolução:

a) Temos BP = BQ = 24 cm e CP = CR = 16 cm. Logo, x = BC = BP + CP = 24 + 16 = 40 , ou seja, 40 cm.

b) Temos que AQ = AR = y. Como o perímetro do triângulo é igual a 92 cm, encontramos:
AQ + AR + BQ + BC + CR = $y + y + 24 + 40 + 16 =$
$= 2y + 80 = 92$, ou seja, 92 cm.
Logo, $y = 6$ cm.

Outra aplicação das ideias de tangência aparece no cálculo do raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo. Veja, na figura a seguir, esse cálculo aplicado ao triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c.



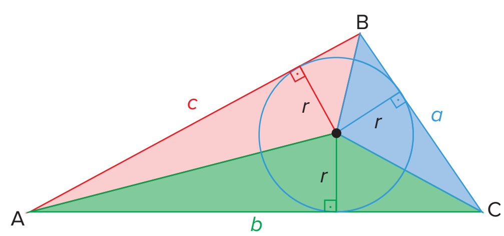
Com base na figura, temos:

$$a = (b - r) + (c - r)$$
$$a = b + c - 2r$$
$$2r = b + c - a$$

$$\boxed{r = \frac{b + c - a}{2}}$$

Raio da circunferência inscrita

É possível calcularmos o raio da circunferência inscrita para um triângulo qualquer da seguinte maneira:



A área do triângulo ABC é a soma das áreas dos três triângulos da figura (azul, rosa e verde).

Indicando a área do triângulo ABC por [ABC] e o semiperímetro por p, obtemos:

$$[ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$[ABC] = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2}$$

$$[ABC] = p \cdot r$$

$$r = \frac{[ABC]}{p}$$

Portanto, o raio da circunferência inscrita é a razão entre a área e o semiperímetro do triângulo.

Exercício resolvido

3. Determine o raio da circunferência inscrita no triângulo de lados 3, 4 e 5.

Resolução:

Como o triângulo é retângulo, sua área corresponde à metade do produto dos catetos, ou seja, é $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Seu semiperímetro é $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$. Logo, o raio da circunferência inscrita é igual a $\frac{6}{6} = 1$.

Também poderíamos calcular o raio da circunferência inscrita fazendo:

$$r = \frac{b+c-a}{2} \Rightarrow r = \frac{3+4-5}{2} \Rightarrow r = 1$$

! Atenção

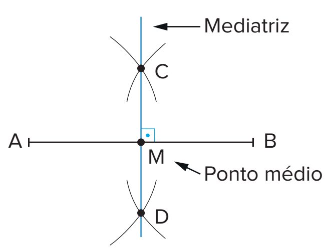
Sobre as bissetrizes e o incentro, podemos afirmar:

- As três bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado incentro.
- O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
- O incentro equidista dos lados do triângulo.
- O raio da circunferência inscrita é a razão entre a área e o semiperímetro do triângulo.

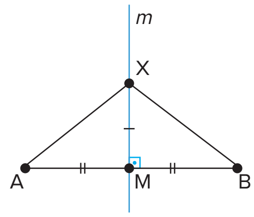
O circuncentro e as mediatrizes

Mediatriz

Mediatriz de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio desse segmento e é perpendicular a ele.



A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos extremos A e B.



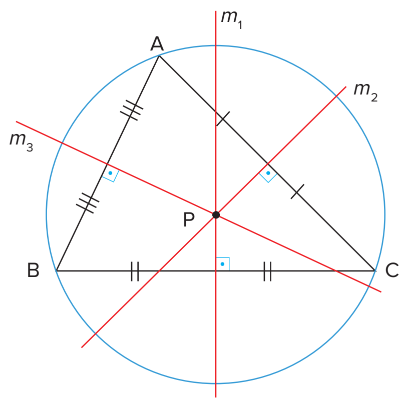
Para demonstrar essa afirmação, marque um ponto X qualquer sobre a mediatriz de $\overline{AB}$, o qual coincide ou não com o ponto médio M.

1. Se o ponto X coincide com M, então X = M. Logo, AM = MB.
2. Se o ponto X não coincide com M, trace $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$. Os triângulos AMX e BMX são congruentes pelo caso LAL.

Com base nessa congruência, podemos concluir que AX = BX, isto é, todo ponto da mediatriz de $\overline{AB}$ equidista dos extremos A e B.

Circuncentro

As três mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um ponto chamado circuncentro, que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



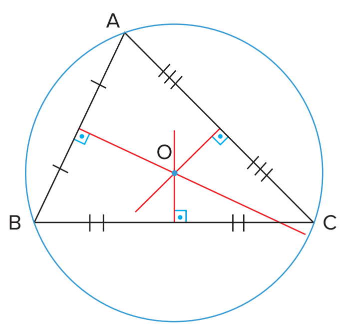
Demonstração:

Seja P o ponto de encontro das mediatrizes m_1 de $\overline{BC}$ e m_2 de $\overline{AC}$. Então, P equidista de B e C por pertencer a m_1 e também equidista de A e C por pertencer a m_2. Assim, equidista de A e B e pertence à mediatriz m_3 de $\overline{AB}$.

Como P equidista dos três vértices A, B e C, ele é o centro da circunferência que passa pelos vértices, chamada de circunferência circunscrita ao triângulo.

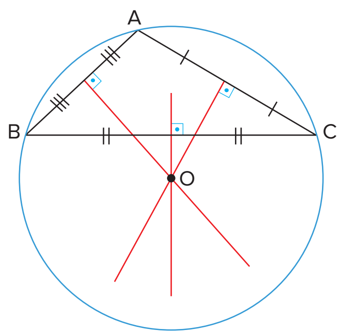
O circuncentro pode ser:

- interno, se o triângulo for acutângulo;

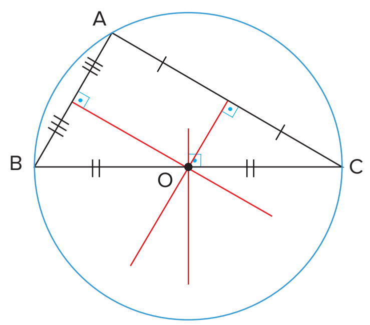


FRENTE 3

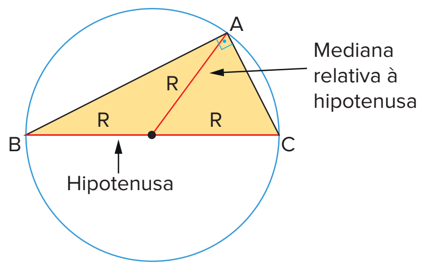
- externo, se o triângulo for obtusângulo;



- no ponto médio da hipotenusa, se o triângulo for retângulo.



O ponto médio da hipotenusa é, portanto, equidistante dos vértices e também o centro da circunferência circunscrita (circuncentro).



Atenção

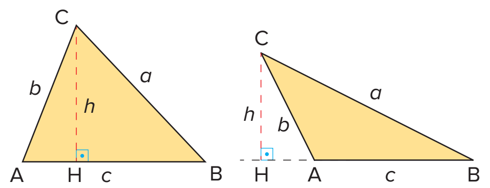
Sobre as mediatrizes e o circuncentro, podemos afirmar:

- As três mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado circuncentro.
- O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
- O circuncentro equidista dos vértices do triângulo.

O ortocentro e as alturas

Altura

Considerando um vértice do triângulo, o segmento que tem uma extremidade nesse vértice e a outra na reta suporte do lado oposto, de maneira a ser perpendicular a esse lado, é chamado de altura. Nas figuras a seguir, observamos que a altura pode ser interna ou externa ao triângulo, conforme este seja, respectivamente, acutângulo ou obtusângulo.

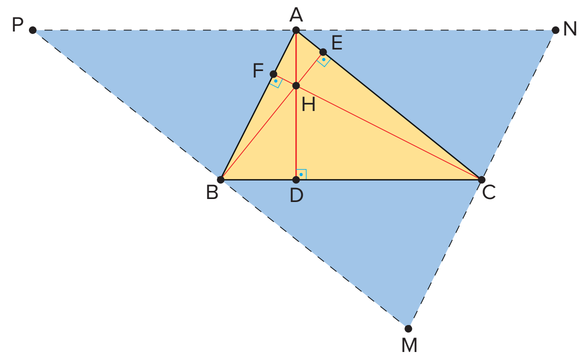


Ortocentro

As retas suporte das alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado ortocentro.

Demonstração:

Sejam $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ as alturas do triângulo ABC.

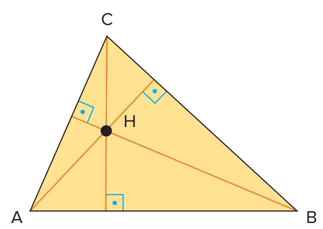


Tracemos $\overline{PN}$ // $\overline{BC}$, $\overline{PM}$ // $\overline{AC}$ e $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$, respectivamente passando por A, B e C, conforme a figura.

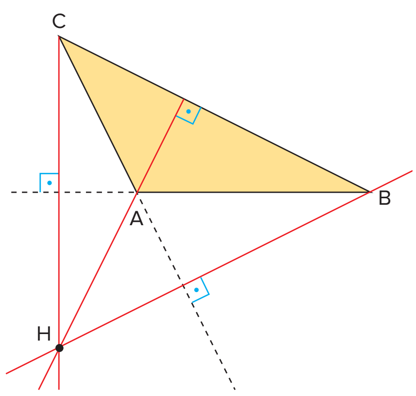
Notamos que ABMC e ABCN são paralelogramos. Logo, CM = AB = CN, o que faz com que C seja o ponto médio de $\overline{MN}$. Analogamente, A é ponto médio de $\overline{PN}$ e B é ponto médio de $\overline{PM}$. Assim, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ estão sobre as mediatrizes do triângulo MNP. Como provamos anteriormente, as mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto; logo, as retas suporte das alturas também.

Quanto à posição, o ortocentro pode ser:

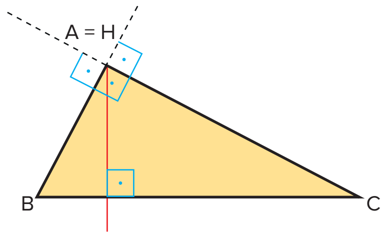
- interno, se o triângulo for acutângulo;



- externo, se o triângulo for obtusângulo;

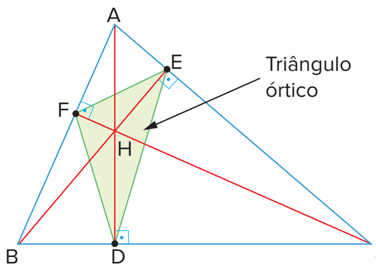


- coincidente com o vértice do ângulo reto, se o triângulo for retângulo.



Triângulo órtico

Considere um triângulo não retângulo ABC e sejam D, E e F os pés das alturas de ABC. O triângulo DEF é chamado triângulo órtico do triângulo ABC.



O ortocentro H do triângulo ABC é o incentro de seu triângulo órtico DEF.

Demonstração:

O quadrilátero BDHF é inscritível, pois tem dois ângulos opostos retos.

Assim, $\text{med}(A\hat{B}E) = \alpha = 90° - \text{med}(\hat{A}) = \text{med}(F\hat{D}H)$. Como $\text{med}(F\hat{C}A) = 90° - \text{med}(\hat{A}) = \alpha$ e o quadrilátero CDHE é inscritível, então $\text{med}(E\hat{D}H) = \text{med}(F\hat{C}A) = \alpha$. Assim, $\overline{AD}$ está sobre a bissetriz do ângulo $F\hat{D}E$. Analogamente, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ estão sobre as bissetrizes do triângulo DEF, e H é o incentro do triângulo DEF.

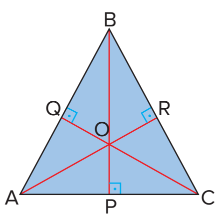
! Atenção

Sobre as alturas e o ortocentro, podemos afirmar:
- As três alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado ortocentro.
- O ortocentro de um triângulo acutângulo é interno ao triângulo, o do triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto, e o do triângulo obtusângulo é externo ao triângulo.

Casos particulares

O triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero ABC da figura a seguir.



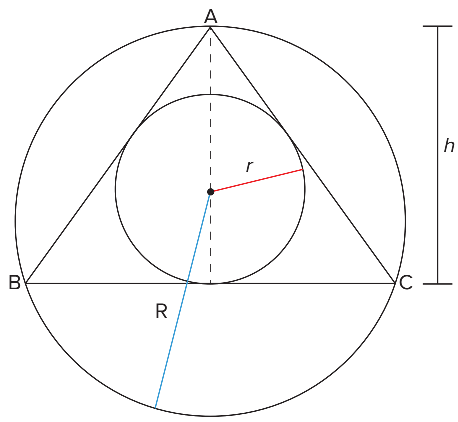
Seja P o ponto médio de $\overline{AC}$. Os triângulos APB e CPB são congruentes pelo caso LLL. Por isso, temos $\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(C\hat{P}B) = 90°$. Logo, $\overline{BP}$ é, ao mesmo tempo, mediana, altura, mediatriz e bissetriz interna. De maneira análoga, se Q e R são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, então $\overline{AR}$ e $\overline{CQ}$ também são, simultaneamente, alturas, medianas, mediatrizes e bissetrizes internas. Assim, o ponto O é, ao mesmo tempo, ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro do triângulo, sendo seu centro de simetria.

Lembrando que a altura h de um triângulo equilátero de lado L é $\frac{L\sqrt{3}}{2}$ e que o baricentro divide a mediana na proporção de 2 : 1, podemos calcular os raios das circunferências circunscrita e inscrita (respectivamente, R e r), aproveitando o fato de que os centros do triângulo equilátero coincidem. Assim:

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

e

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

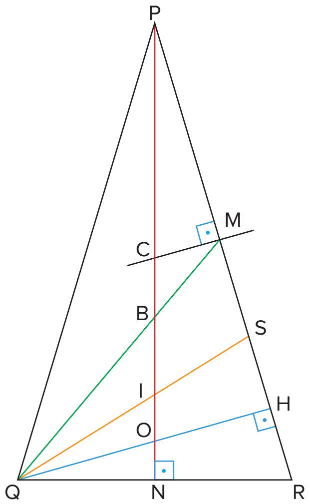


! Atenção

No triângulo equilátero, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro coincidem no mesmo ponto.
Sendo L a medida do lado do triângulo equilátero, r o raio da circunferência inscrita e R o raio da circunscrita, temos que $r = \frac{L\sqrt{3}}{6}$ e $R = 2r = \frac{L\sqrt{3}}{3}$.

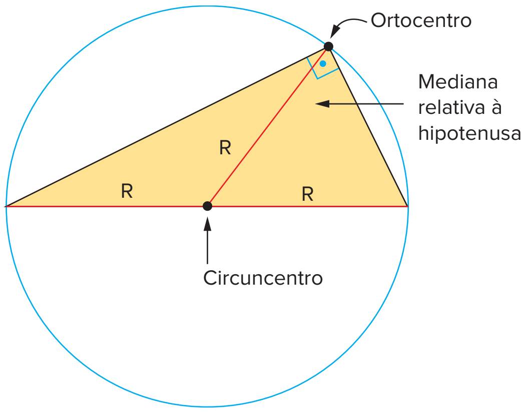
O triângulo isósceles

Na figura a seguir, o triângulo PQR é isósceles e PR = PQ. O segmento $\overline{PN}$ é mediana, altura, mediatriz e bissetriz relativas à base $\overline{QR}$. Em relação ao lado $\overline{PR}$, $\overline{QH}$ é altura, $\overline{QS}$ é bissetriz, $\overline{QM}$ é mediana e $\overline{MC}$ é mediatriz. Observamos que o ortocentro (O), o incentro (I), o baricentro (B) e o circuncentro (C) estão alinhados sobre a altura $\overline{PN}$.



O triângulo retângulo

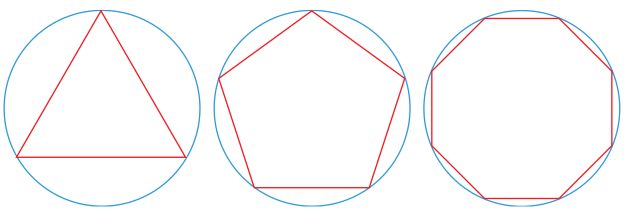
No triângulo retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa e o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.



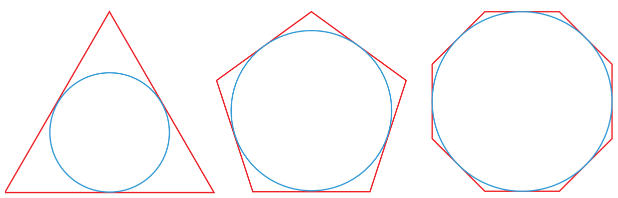
Pontos notáveis de polígonos regulares

Um polígono regular é equilátero e equiângulo.
Mostraremos que:

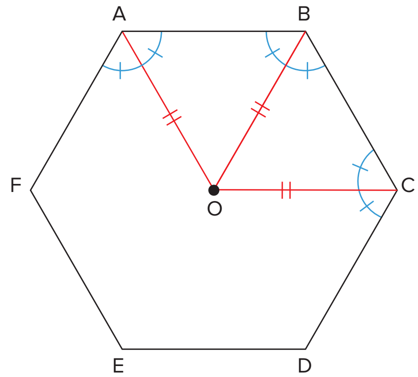
- todo polígono regular é inscritível (há uma circunferência que passa pelos seus vértices);



- todo polígono regular é circunscritível (há uma circunferência que tangencia seus lados).

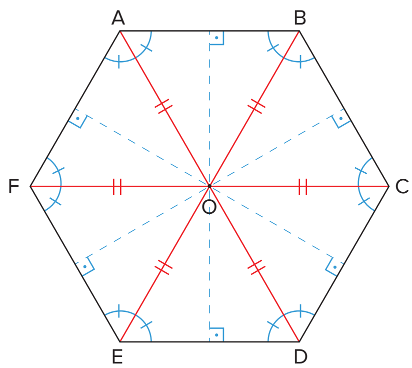


Na figura a seguir, desenhamos um hexágono regular. No entanto, o argumento que utilizaremos é válido para todo polígono regular.



Como $\overline{OB}$ é lado comum, AB = BC e med($O\hat{B}A$) = = med($O\hat{B}C$), os triângulos OAB e OBC são congruentes pelo caso LAL de congruência de triângulos. Como consequência, temos que OC = OA e med($O\hat{C}B$) = = med($O\hat{B}A$). Tendo em vista que os ângulos do polígono regular são congruentes, então med($O\hat{C}D$) = med($O\hat{C}B$).

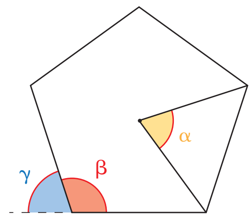
Pelo caso LAL de congruência de triângulos, decorre que os triângulos OBC e OCD são congruentes. Prosseguindo indutivamente com o mesmo argumento anterior, concluímos que os triângulos OAB, OBC, OCD, ODE, OEF e OFA são congruentes entre si e isósceles.



O ponto O equidista dos vértices do polígono. Portanto, é centro da circunferência **circunscrita** ao polígono. Como os triângulos isósceles da figura são todos congruentes, suas alturas têm mesma medida e O é equidistante dos lados do polígono, sendo, então, centro da circunferência inscrita no polígono.

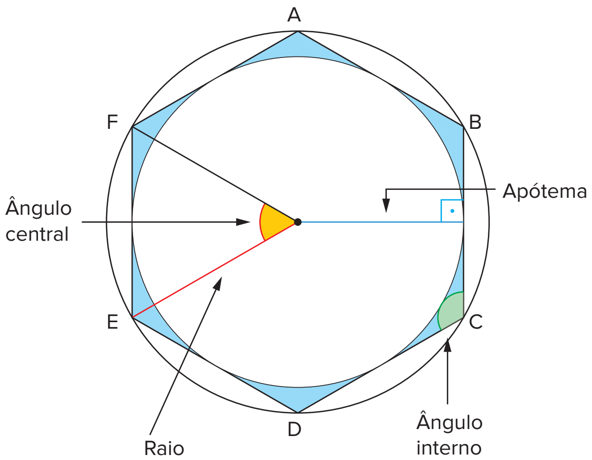
Elementos do polígono regular

Conforme a figura a seguir, os ângulos principais no polígono regular são o central (α), o interno (β) e o externo (γ).

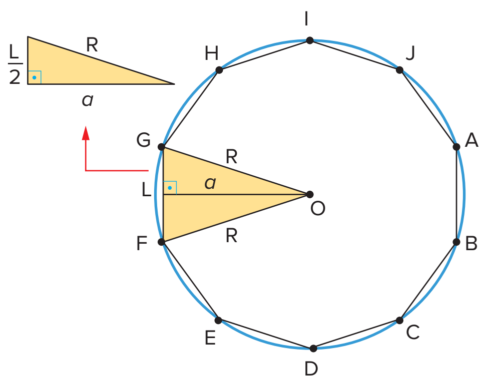


Vimos anteriormente que os ângulos central e externo de um polígono regular de n lados são dados por $\left(\dfrac{360°}{n}\right)$ e o ângulo interno por $\left(180° - \dfrac{360°}{n}\right)$.

Consideremos, ainda, como elementos do polígono regular o raio da circunferência circunscrita e o da circunferência inscrita, chamado de apótema do polígono regular.



O raio da circunferência circunscrita (R), o apótema (a) e a metade do lado de um polígono regular de lados L formam um triângulo retângulo, conforme a figura a seguir.

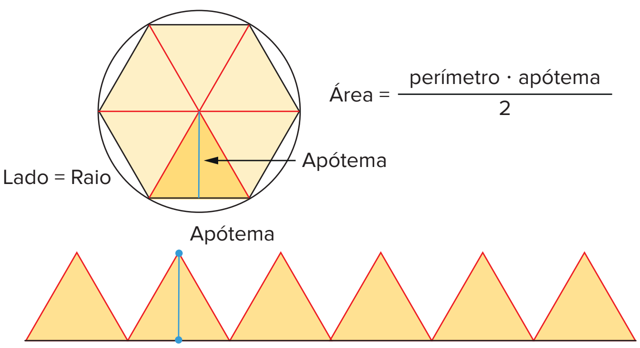


Assim, temos: $R^2 = a^2 + \left(\dfrac{L}{2}\right)^2$.

Área do polígono regular

Podemos calcular a área do polígono regular de duas maneiras principais:

1. Em função do perímetro e do apótema.



Conforme sugerido na figura, podemos determinar a área de um polígono regular de n lados L, perímetro $2p = n \cdot L$ e apótema a, calculando a área dos n triângulos que compõem o polígono. Assim:

$$\text{Área} = n \cdot A \quad = n \cdot \frac{L \cdot a}{2} = \frac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a$$

Ou seja, a área é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

2. Em função do raio (R) da circunferência circunscrita e do ângulo central (α).

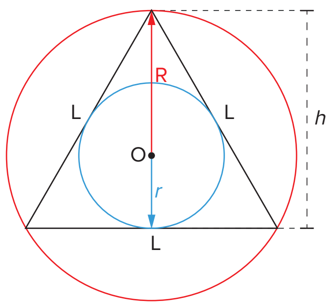
A área de cada um dos n triângulos congruentes em que fica subdividido o polígono a partir do centro é dada por:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{R^2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{2}$$

Logo, a área do polígono é igual a $n \cdot \dfrac{R^2 \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{2}$.

Estudo do triângulo equilátero

Seja um triângulo equilátero de lados L, inscrito em uma circunferência de raio R e circunscrito a outra circunferência de raio r (lembrando que esse raio corresponde ao apótema).



Altura: $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

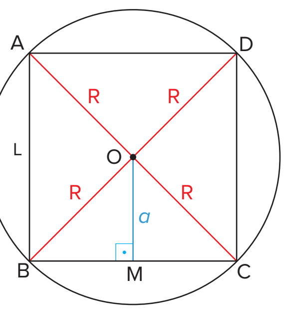
Apótema: $a = r = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{L\sqrt{3}}{2} = \dfrac{L\sqrt{3}}{6}$

Raio da circunferência circunscrita:

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

Estudo do quadrado

Seja um quadrado de lado L. Suas diagonais são perpendiculares entre si e os triângulos OBC e OBM da figura a seguir são retângulos e isósceles.



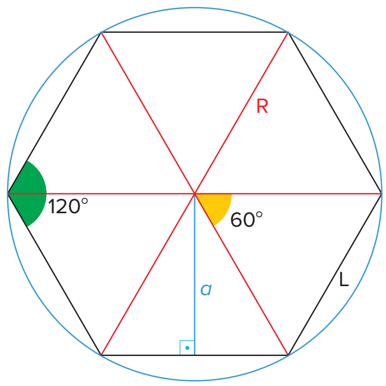
Apótema: $a = \dfrac{L}{2}$

Raio da circunferência circunscrita: $R = \dfrac{L\sqrt{2}}{2}$

FRENTE 3

Estudo do hexágono regular

Seja um hexágono regular de lado L, com apótema *a* inscrito em uma circunferência de raio R. Sabemos que os ângulos central e externo do hexágono regular são iguais a $\frac{360°}{6} = 60°$ e que o ângulo interno é dado por $180° - 60° = 120°$.



O hexágono regular fica subdividido em seis triângulos equiláteros, como mostra a figura. Seu apótema corresponde à altura de um triângulo equilátero de lado L. Assim:

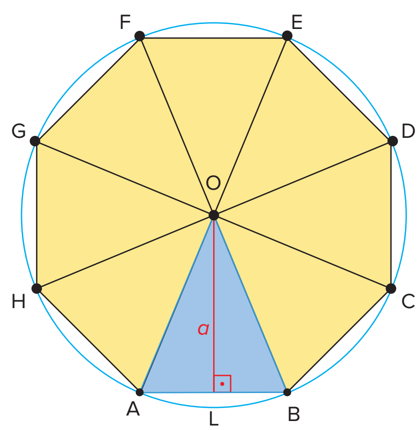
Apótema: $a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

Raio da circunferência circunscrita: R = L

A área do hexágono regular é igual à área de seis triângulos equiláteros de lado L, ou seja, $6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$. Como para o hexágono R = L, a área em função do raio da circunferência circunscrita é igual a $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Estudo do octógono

Os ângulos externo e central do octógono regular medem $\frac{360°}{8} = 45°$, e o ângulo interno mede $180° - 45° = 135°$.



Desse modo, temos:

$$\text{tg}(22{,}5°) = \frac{\frac{L}{2}}{a} \Rightarrow \frac{L}{2a} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{L}{a} = 2\left(\sqrt{2}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{L}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} \Rightarrow a = \frac{L\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$$

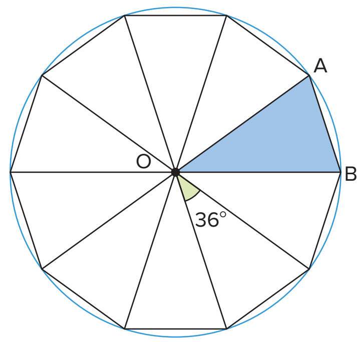
A área do octógono em função do lado é:

$$\text{Área}_{\text{octógono}} = p \cdot a = \frac{8L}{2} \cdot \frac{L\left(\sqrt{2}+1\right)}{2} = 2L^2\left(\sqrt{2}+1\right)$$

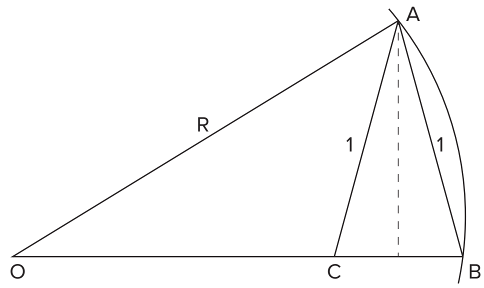
Então, a área do octógono em função do raio R da circunferência circunscrita será:

$$\text{Área}_{\text{octógono}} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(45°) = 2R^2\sqrt{2}$$

Estudo do decágono



Na figura a seguir, considere que AB = AC = 1 seja o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R e centro O.



O triângulo ABC é isósceles de ângulos 72°, 72° e 36°. O triângulo OAC tem ângulos 36°, 36° e 108° e também é isósceles. Assim, OC = AC = 1 e BC = R – 1. Como os triângulos OAB e ABC são semelhantes, temos:

$$\frac{R-1}{1} = \frac{1}{R} \Rightarrow R^2 - R = 1 \Rightarrow R^2 - R - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Assim, a razão entre o raio R e o lado de qualquer decágono regular é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é a razão áurea.

Se tomarmos o ponto médio M da base do triângulo isósceles OAC, $\overline{CM}$ será uma altura. No triângulo retângulo ACM, temos $\cos(36°) = \frac{AM}{AC} = \frac{\frac{R}{2}}{1} = \frac{R}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Como consequência desse resultado, encontramos:

- $\text{sen}(36°) = \sqrt{1-\cos^2 36°} = \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
- $\text{tg}(36°) = \frac{\text{sen}(36°)}{\cos(36°)} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

- $\text{sen}(72^\circ) = 2 \cdot \text{sen}(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ) =$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

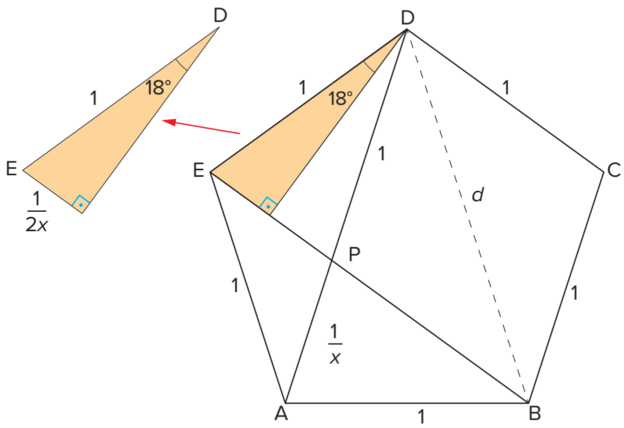
A área do decágono regular em função do raio R é:

$$\text{Área}_{\text{decágono}} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(36^\circ) = \frac{5R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Estudo do pentágono

Os ângulos externo e central de um pentágono regular medem $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, e o ângulo interno mede $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Na figura seguinte, o pentágono regular ABCDE tem lados 1 e diagonais *d*. O triângulo AED é isósceles de ângulos 108°, 36° e 36°. Seja P o ponto de encontro das diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$. O triângulo AEB é congruente ao triângulo AED e, portanto, $\text{med}(A\hat{E}P) = \text{med}(A\hat{E}B) = 36^\circ$.



No triângulo AEP, $\text{med}(A\hat{E}P) = \text{med}(E\hat{A}P) = 36^\circ$ e $\text{med}(A\hat{P}E) = 108^\circ$. Como $A\hat{P}E$ é ângulo externo do triângulo EPD, temos:

$$\text{med}(E\hat{D}P) + \text{med}(D\hat{E}P) = \text{med}(A\hat{P}E) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36^\circ + \text{med}(D\hat{E}P) = 108^\circ$$

Assim, $\text{med}(D\hat{E}P) = 72^\circ$.

Ainda:

$\text{med}(E\hat{P}D) = 180^\circ - \text{med}(A\hat{P}E) = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

Logo, o triângulo DEP é isósceles, com DP = DE = 1.

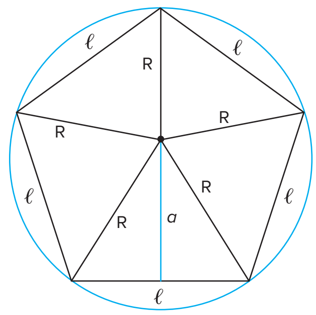
Então, AP = *d* – 1.

Os triângulos AED e AEP são semelhantes (ambos têm ângulos 108°, 36° e 36°). Logo:

$$\frac{AP}{DE} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{d-1}{1} = \frac{1}{d} \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Isso mostra que, para todo pentágono regular, a razão entre a diagonal e o lado é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, chamada de razão áurea.

Já na figura a seguir, temos:



$$\text{sen}(36^\circ) = \frac{\frac{\ell}{2}}{R} \Rightarrow \ell = 2 \cdot R \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$\text{tg}(36^\circ) = \frac{\frac{\ell}{2}}{a} \Rightarrow a = \frac{\ell}{2 \cdot \text{tg}(36^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\ell}{2 \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} = \frac{\ell\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10}$$

A área do pentágono em função do lado é dada por:

$$\text{Área}_{\text{pentágono}} = p \cdot a = \frac{5\ell}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10} = \frac{\ell^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}$$

Já a área do pentágono em função do raio R é dada por:

$$\text{Área}_{\text{pentágono}} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(72^\circ) =$$

$$= \frac{5R^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{5R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

Quadriláteros inscritíveis

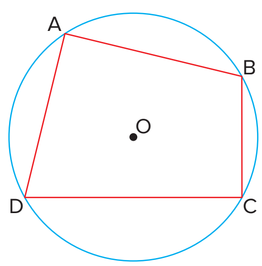
Um quadrilátero é chamado inscritível ou cíclico quando seus quatro vértices estão sobre uma mesma circunferência. Esse tipo de quadrilátero fornece ferramentas interessantes para a resolução de alguns problemas.

Discutiremos a seguir as condições para que um quadrilátero seja inscritível.

Teorema 1: Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, os ângulos internos opostos são suplementares.

Demonstração:

1. Provemos inicialmente que, se o quadrilátero é inscritível, a soma dos ângulos opostos é 180°.



Seja ABCD o quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro O. O ângulo interno de vértice A enxerga o arco $\overset{\frown}{BCD}$ e o ângulo interno de vértice C enxerga o arco $\overset{\frown}{BAD}$.

FRENTE 3

Pelo teorema do ângulo inscrito, temos:

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BCD}) + \text{med}(\overset{\frown}{BAC})}{2}$$

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = \frac{360°}{2} = 180°$$

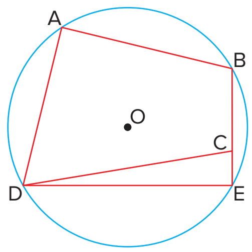
Assim:

$$\begin{cases} \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D}) = 360° \\ \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \\ \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° \end{cases}$$

O que mostra que os ângulos opostos são suplementares.

2. Agora, provemos que, se os ângulos opostos são suplementares, o quadrilátero é inscritível.



Sejam: $\begin{cases} \text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \\ \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{D}) = 180° \end{cases}$

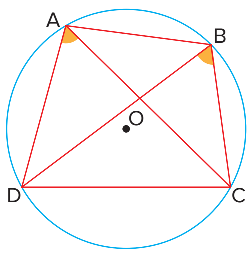
Suponha, por absurdo, que o quadrilátero ABCD não seja inscritível. Assim, a circunferência que passa por A, B e D não passa por C. Sendo o ponto E a interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a circunferência, como ABED é inscritível, temos que $\text{med}(\hat{E}) = 180° - \text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{C})$. Essa igualdade é absurda, pois, se C é interior ao segmento $\overline{BE}$, $B\hat{C}D$ é externo ao triângulo DCE e, portanto, $\text{med}(\hat{C}) > \text{med}(\hat{E})$. Todavia, se C é exterior ao segmento $\overline{BE}$, $B\hat{E}D$ é externo ao triângulo DCE. Logo, $\text{med}(\hat{C}) < \text{med}(\hat{E})$.

Concluímos, então, que, se ABCD tem ângulos opostos suplementares, ABCD é inscritível.

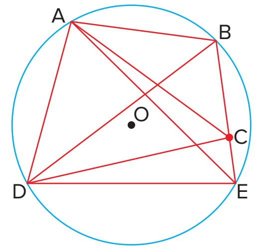
Teorema 2: Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, os ângulos formados entre lado e diagonal e o lado oposto e a outra diagonal têm mesma medida. (Ângulos que enxergam o mesmo lado apresentam mesma medida.)

Demonstração:

1. Se o quadrilátero ABCD é inscritível, então $\text{med}(D\hat{A}C) = \text{med}(D\hat{B}C)$, pois são ângulos inscritos que enxergam o mesmo arco.



2. Seja o quadrilátero ABCD tal que $\text{med}(D\hat{A}C) = \text{med}(D\hat{B}C)$. Suponha, por absurdo, que ele não seja inscritível.

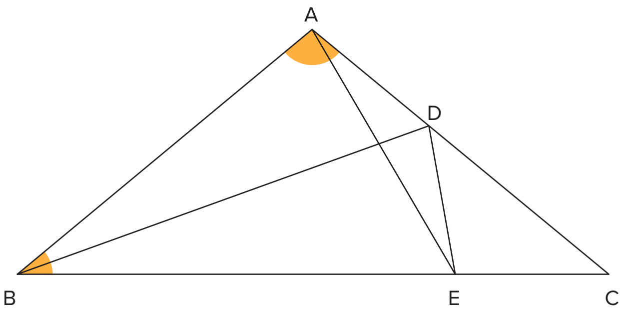


Nesse caso, a circunferência que passa por A, B e D não passa por C. Sendo E a interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a circunferência, como ABED é inscritível, $\text{med}(D\hat{A}E) = \text{med}(D\hat{B}E) = \text{med}(D\hat{A}C)$. Se C é interno a $\overline{BE}$, temos que $\text{med}(D\hat{A}C) > \text{med}(D\hat{A}E)$, o que é uma contradição. Se C é externo ao segmento $\overline{BE}$, então $\text{med}(D\hat{A}C) < \text{med}(D\hat{A}E)$, o que também é uma contradição.

Concluímos, então, que, se $\text{med}(D\hat{A}C) = \text{med}(D\hat{B}C)$, o quadrilátero convexo ABCD é inscritível.

Exercício resolvido

4. Em um triângulo ABC, $\text{med}(B\hat{A}C) = 100°$ e AB = AC. Seja $\overline{BD}$ a bissetriz de $A\hat{B}C$, com D sobre o lado $\overline{AC}$. Prove que AD + BD = BC.



Resolução:

O triângulo isósceles ABC tem ângulos tais que $\text{med}(\hat{A}) = 100°$ e $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 40°$. Como $\overline{BD}$ é bissetriz, temos $\text{med}(A\hat{B}D) = \text{med}(D\hat{B}C) = 20°$.

Seja $E \in \overline{BC}$ tal que BD = BE. O quadrilátero ABED é inscritível, pois $\text{med}(B\hat{A}D) + \text{med}(B\hat{E}D) = 100° + 80° = 180°$; logo, $\text{med}(D\hat{A}E) = \text{med}(D\hat{B}E) = 20°$ e $\text{med}(A\hat{E}D) = \text{med}(A\hat{B}D) = 20°$. Portanto, o triângulo ADE é isósceles com AD = ED. (I)

No triângulo isósceles BED, encontramos $\text{med}(B\hat{D}E) = \text{med}(B\hat{E}D) = 80°$.

O ângulo $B\hat{E}D$ é externo ao triângulo EDC e, pelo teorema do ângulo externo, temos que $\text{med}(E\hat{D}C) = \text{med}(B\hat{E}D) - \text{med}(E\hat{C}D) = 80° - 40° = 40°$. Como $\text{med}(E\hat{D}C) = \text{med}(E\hat{C}D) = 40°$, resulta que ED = EC. (II)

De (I) e (II), obtemos:

AD = EC e AD + BD = EC + BE = BC

Quadriláteros circunscritíveis

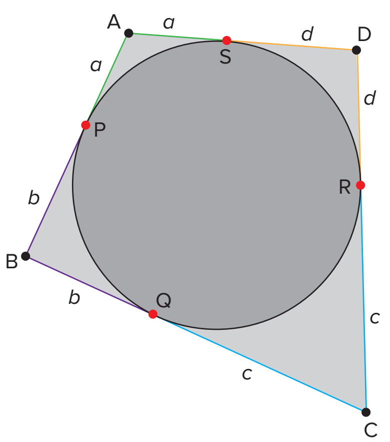
Um quadrilátero é denominado circunscritível quando existe uma circunferência que tangencia seus quatro lados. Veremos a seguir as condições para que ele ocorra.

Teorema do quadrilátero circunscritível, ou teorema de Pitot: Um quadrilátero ABCD é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos forem iguais, ou seja:

$$AB + CD = BC + AD$$

Demonstração:

1. Provemos que, se ABCD é circunscritível, vale $AB + CD = BC + AD$. Seja ABCD circunscrito a uma circunferência e P, Q, R e S os pontos de tangência.

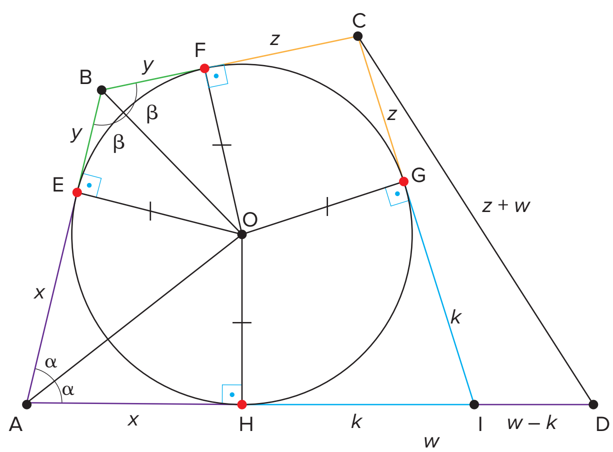


Temos:

$$\begin{cases} AP = AS = a \\ BP = BQ = b \\ CQ = CR = c \\ DS = DR = d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB + CD = (a + b) + (c + d) = (a + d) + (b + c) = AD + BC.$$

2. Provemos agora que, se ABCD é tal que $AB + CD = AD + BC$, ABCD é circunscritível.
Suponha, por absurdo, que ABCD não seja circunscritível. Existe, então, uma circunferência que tangencia $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, mas não tangencia $\overline{CD}$. Veja a figura a seguir.



Sejam E, F e H os pontos de tangência de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ respectivamente, e seja $\overline{CI}$ tangente à circunferência em G.

$$\text{Temos: } \begin{cases} AH = AE = x \\ BF = BE = y \\ CF = CG = z \\ IH = IG = k \end{cases}$$

Da hipótese, obtemos:

$$CD + AB = BC + AD \Rightarrow CD + (x + y) = (y + z) + (x + w) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CD = z + w$$

No triângulo CID, encontramos $ID = w - k$.
Pela desigualdade triangular em CID, temos:

$$CD < CI + ID \Rightarrow z + w < z + k + w - k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z + w < z + w,$$

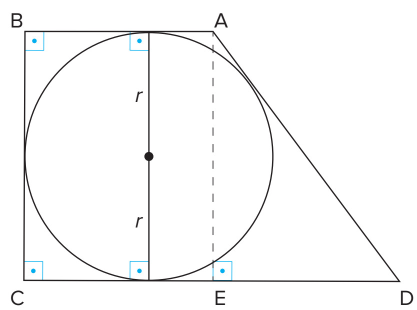
o que é um absurdo. Logo, ABCD é circunscritível.

Exercício resolvido

5. ITA-SP Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

Resolução:



Do enunciado, temos que $AB + CD = 18$ cm. Como o trapézio é circunscritível, encontramos:

$$AD + BC = AB + CD = 18$$

$$\text{Assim: } \begin{cases} AD + BC = 18 \\ AD - BC = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = 10 \text{ cm} \\ BC = 8 \text{ cm} \end{cases}.$$

Dessa maneira, $2r = BC = 8$ cm. Logo, $r = 4$ cm.
No triângulo retângulo AED, temos $AE = BC = 8$ cm e:
$AE^2 + ED^2 = AD^2 \Rightarrow 8^2 + ED^2 = 10^2 \Rightarrow ED = 6$
Ou seja, $\overline{ED}$ mede 6 cm.
Assim, $AB + CD = 18 \Rightarrow AB + CE + ED = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot AB + 6 = 18 \Rightarrow AB = 6$
Isto é, $\overline{AB}$ mede 6 cm.
Portanto, $a + r = 6 + 4 = 10$.
Ou seja, 10 cm.
Resposta: alternativa C.

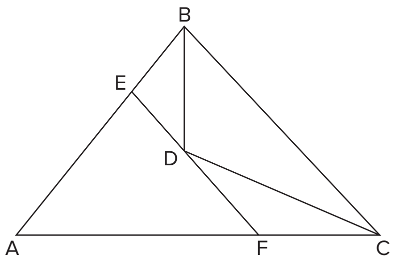
Revisando

1. Um triângulo isósceles ABC tem lados medindo AB = = AC = 13 cm e base medindo BC = 10 cm. Qual é o valor mais próximo da distância do circuncentro do triângulo até a base do triângulo?
   a) 5 cm.
   b) 6 cm.
   c) 7 cm.
   d) 8 cm.
   e) 9 cm.

2. O triângulo ABC tem área de 120 cm^2. Sendo $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ as medianas desse triângulo e G o baricentro de ABC, calcule a área do quadrilátero GMBP.

3. No triângulo de lados AB = 5 cm, AC = 8 cm e med$(B\hat{A}C)$ = 60°. Calcule:
   a) a medida da mediana $\overline{BM}$.
   b) a distância de B ao baricentro.

4. Na figura, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ são segmentos das bissetrizes dos ângulos de vértices B e C, $\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e os pontos E, D e F pertencem aos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ e $\overline{AC}$.



Se AB = 10 cm, BC = 12 cm e AC = 14 cm, então o perímetro do triângulo AEF, em centímetros, vale:
   a) 18
   b) 20
   c) 22
   d) 24
   e) 26

5. **PUC-Rio 2021** Qual é a razão entre a área de um hexágono regular de lado 1 e a área de um triângulo equilátero de lado 1?
   a) 2
   b) 3
   c) 6
   d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

6. Um ponto Q pertence à região interna de um triângulo DEF e equidista dos lados desse triângulo. O ponto Q é:
   a) o baricentro do triângulo DEF.
   b) o incentro do triângulo DEF.
   c) o circuncentro do triângulo DEF.
   d) o ortocentro do triângulo DEF.
   e) um exincentro do triângulo DEF.

7. Um ponto P equidista dos vértices de um triângulo ABC. O ponto P é:
   a) o baricentro do triângulo ABC.
   b) o incentro do triângulo ABC.
   c) o circuncentro do triângulo ABC.
   d) o ortocentro do triângulo ABC.
   e) um exincentro do triângulo ABC.

8. Qual dos pontos notáveis do triângulo pode ser um de seus vértices?
   a) Baricentro.
   b) Incentro.
   c) Circuncentro.
   d) Ortocentro.
   e) Exincentro.

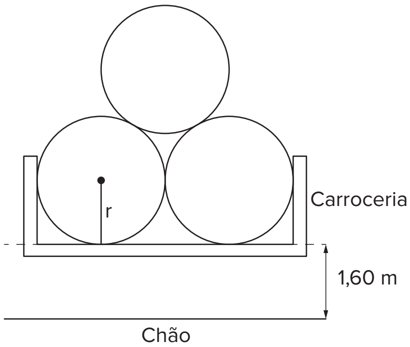
9. Quais pontos notáveis de um triângulo nunca se posicionam externamente a ele?
   a) Baricentro e ortocentro.
   b) Incentro e circuncentro.
   c) Baricentro e circuncentro.
   d) Incentro e ortocentro.
   e) Baricentro e incentro.

10. **Enem 2020** Um estudante, morador da cidade de Contagem, ouviu dizer que nessa cidade existem ruas que formam um hexágono regular. Ao pesquisar em um sítio de mapas, verificou que o fato é verídico, como mostra a figura.

Disponível em: www.google.com. Acesso em: 7 dez. 2017 (adaptado).

Ele observou que o mapa apresentado na tela do computador estava na escala 1 : 20 000. Nesse instante, mediu o comprimento de um dos segmentos que formam os lados desse hexágono, encontrando 5 cm. Se esse estudante resolver dar uma volta completa pelas ruas que formam esse hexágono, ele percorrerá, em quilômetro,
   a) 1.
   b) 4.
   c) 6.
   d) 20.
   e) 24.

11. Unifor-CE 2020 Uma empresa fabrica tubos de PVC, no formato de cilindros circulares retos, para redes coletoras de esgoto de grandes diâmetros. Um caminhão dessa empresa vai transportar três tubos para uma determinada obra de esgotamento sanitário.
Os três tubos possuem o mesmo diâmetro, e a espessura deles é pequena o suficiente para desprezá-la. Após terem sido colocados em cima do caminhão, verificou-se que a altura do piso da carroceria até o chão era de 1,60 m, conforme figura abaixo.



Levando-se em conta que no trajeto havia alguns viadutos, calculou-se a distância do chão até o topo da carga.

Se o raio desses tubos é r, a expressão que dá essa distância é

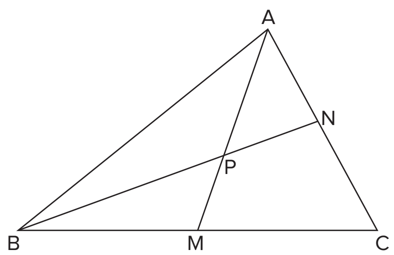
a) $1{,}6 + 2r$
b) $1{,}6 + 2r + \sqrt{3}$
c) $1{,}6 + 2(r + \sqrt{3})$
d) $1{,}6 + r(2 + \sqrt{3})$
e) $1{,}6 + 4r$

12. IME-RJ 2018 Seja um heptágono regular de lado ℓ cuja menor diagonal vale d. O valor da maior diagonal satisfaz a qual das expressões?

a) $\dfrac{\ell \cdot d}{d - \ell}$.
b) $\dfrac{d^2}{d - \ell}$.
c) $\dfrac{\ell \cdot d}{d + \ell}$.
d) $\dfrac{\ell^2}{d + \ell}$.
e) $\dfrac{3 \cdot d}{2}$.

Exercícios propostos

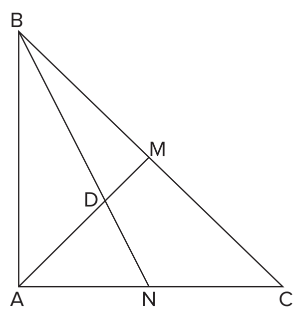
1. Na figura a seguir, M e N são pontos médios dos lados do triângulo ABC e P é o ponto de interseção dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$. Sabe-se também que AM = 21 cm, PB = 15 cm e AB = 24 cm.



Determine as medidas dos segmentos:

a) $\overline{AP}$.
b) $\overline{PM}$.
c) $\overline{BN}$.
d) $\overline{MN}$.

2. Na figura, o triângulo ABC é isósceles e retângulo em A. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ são medianas que se interceptam em D, e BC = 24 cm. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{DM}$ medem, respectivamente:



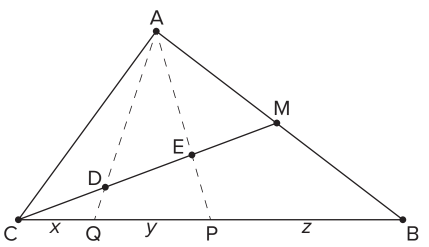
a) 10 cm e 5 cm.
b) 18 cm e 6 cm.
c) 3 cm e 9 cm.
d) 12 cm e 4 cm.
e) 11 cm e 8 cm.

FRENTE 3

3. **Efomm-RJ 2020** Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência de centro O. Sejam O' e E o incentro do triângulo ABC e o ponto médio do arco $\overset{\frown}{BC}$ que não contém o ponto A, respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos $\overline{EB}$, $\overline{EO'}$ e $\overline{EC}$.

a) EB = EO' = EC
b) EB < EO' = EC
c) EB > EO' > EC
d) EB = EO' > EC
e) EB < EO' < EC

4. A figura a seguir mostra a estrutura de sustentação de uma rampa. Atualmente, a estrutura é formada por duas hastes fixas no ponto C de um piso plano. Assim, uma das extremidades da rampa é fixada no ponto B desse mesmo piso, uma haste é presa à extremidade A da rampa e a outra ao ponto médio M, também da rampa.



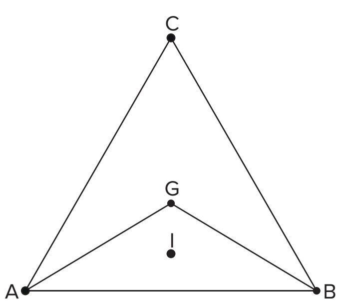
A estrutura será reforçada por duas novas hastes que sustentarão o ponto A. Elas deverão passar por perfurações feitas nos pontos D e E da haste $\overline{CM}$ e serão fixadas nos pontos P e Q do piso.
Para determinar as posições dos pontos P e Q, o engenheiro responsável pela rampa deve relacionar as distâncias x, y e z entre os pontos do piso, como mostra a figura.
Então, sabendo que CD = DE = EM, a conclusão correta a que o engenheiro chegará será:

a) $x + y = z$
b) $x + y < z$
c) $z = 2y = 4z$
d) $z > 2y > 4z$
e) $x \cdot z = y^2$

5. **EEAR-SP 2020** Seja um triângulo equilátero de apótema medindo $2\sqrt{3}$ cm. O lado desse triângulo mede ________ cm.

a) 6
b) 8
c) 9
d) 12

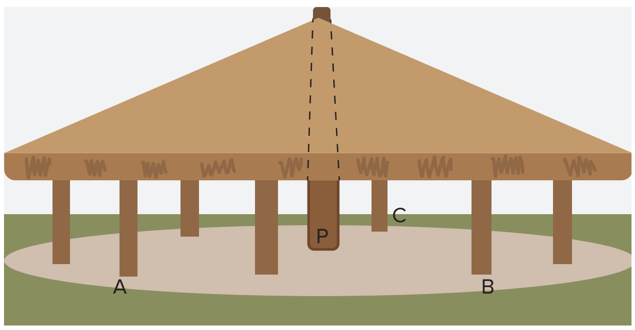
6. **Col. Naval-RJ 2020** Observe a figura a seguir.



Na figura temos um triângulo equilátero ABC de baricentro G e o triângulo ABG cujo incentro é I. É correto afirmar que o suplemento do ângulo G$\hat{A}$I em radianos é igual a:

a) $\frac{7\pi}{9}$
b) $\frac{5\pi}{6}$
c) $\frac{8\pi}{9}$
d) $\frac{9\pi}{10}$
e) $\frac{11\pi}{12}$

7. Um quiosque circular, como o da figura, costuma ser levantado fixando-se primeiro a coluna central, que sustenta o topo. Usando-a como referência, determinam-se as posições das colunas perimétricas que sustentam a base desse quiosque. Porém uma confusão nas instruções passadas para a construção de um quiosque desse tipo fez com que os operários fixassem três colunas perimétricas nos pontos A, B e C.



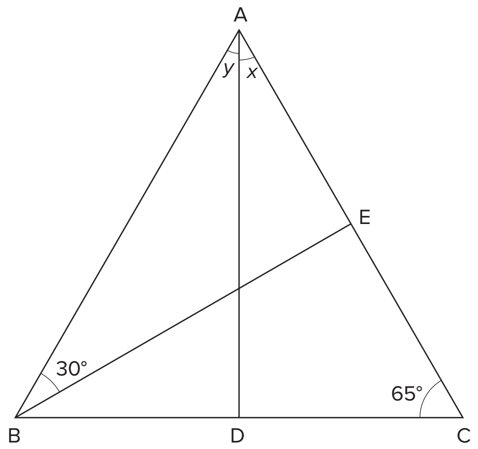
Feito isso, uma forma prática de se encontrar a posição correta do ponto P, para colocar a coluna central, pode ser feita ao traçar no piso:

a) as mediatrizes dos lados do triângulo ABC.
b) as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ABC.
c) as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo ABC.
d) as medianas do triângulo ABC.
e) as alturas do triângulo ABC.

8. Um parque com o formato de um triângulo retângulo, com hipotenusa de 336 m, terá uma fonte construída exatamente no seu baricentro. Sabe-se que a entrada principal se encontra no circuncentro. Assim, a distância, em metros, entre a fonte e a entrada principal será de:

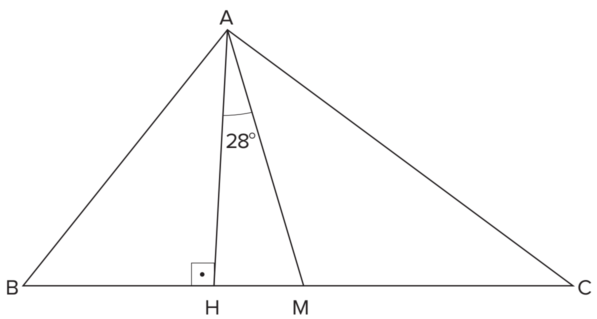
a) 42.
b) 56.
c) 84.
d) 112.
e) 168.

9. No triângulo ABC da figura, $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são alturas. Sendo med($A\hat{C}B$) = 65° e med($A\hat{B}E$) = 30°, *x* e *y* valem, respectivamente:



a) 15° e 25°.
b) 25° e 35°.
c) 35° e 15°.
d) 20° e 25°.
e) 35° e 20°.

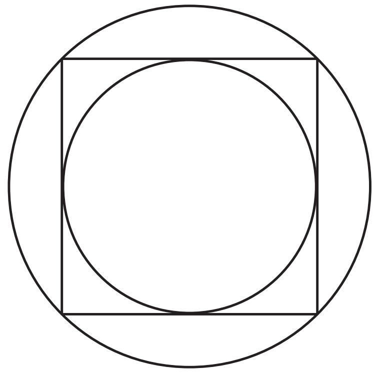
10. Um triângulo ABC é retângulo em A. A altura $\overline{AH}$ forma com a mediana $\overline{AM}$ um ângulo de 28°. Calcule as medidas dos ângulos agudos do triângulo ABC.



11. Julgue as afirmativas como verdadeiras (V) ou falsas (F).

- ☐ O baricentro é sempre um ponto interno ao triângulo.
- ☐ O incentro pode ser externo ao triângulo.
- ☐ O ortocentro de um triângulo obtusângulo é externo ao triângulo.
- ☐ As mediatrizes de um triângulo sempre passam pelos vértices.
- ☐ As bissetrizes internas dividem o lado oposto ao meio.
- ☐ As alturas sempre são internas aos triângulos.
- ☐ O circuncentro de um triângulo retângulo é o vértice do ângulo reto.
- ☐ O ortocentro de um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.

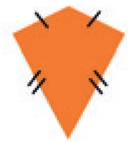
12. UFRR 2020 Um quadrado de lado 1 está inscrito em uma circunferência e circunscrito a outra, conforme a figura abaixo.



Se A_1 é a área da circunferência menor e A_2 é a área da circunferência maior, então podemos afirmar que

a) $A_2 = 1{,}5A_1$
b) $A_2 = 2A_1$
c) $A_2 = \pi A_1$
d) $A_2 = A_1$
e) $A_2 = 3A_1$

13. Insper-SP 2018 A figura indica um icosaedro (20 faces) feito com encaixes de dobraduras em papel. A aresta do icosaedro mede 8 cm e cada face é composta por três pipas idênticas, a não ser por suas cores (amarelo, verde, laranja). Cada pipa é feita por meio de dobras em uma folha de papel colorido em forma de quadrado de lado medindo 15 cm. Em cada face triangular do icosaedro, o ponto comum às três pipas que a compõe é o incentro da face.

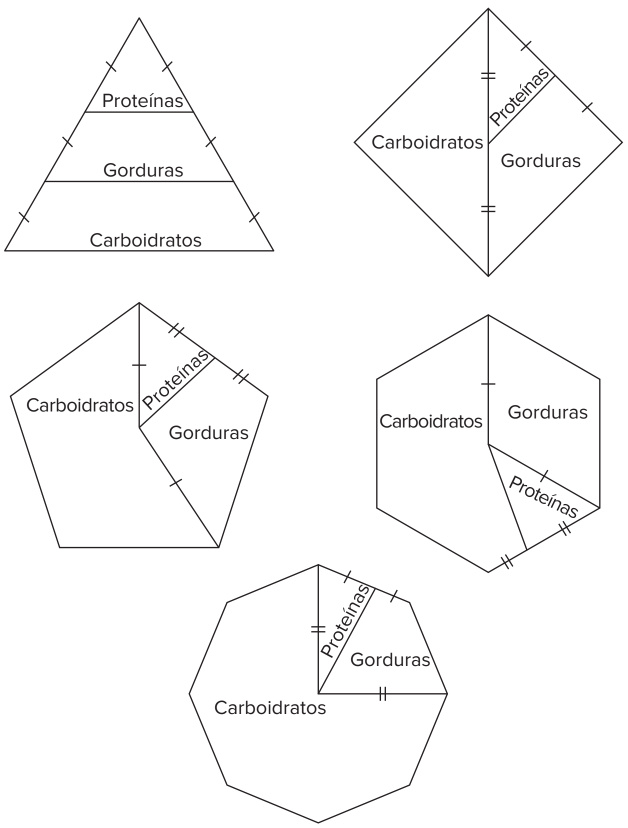


A medida da maior diagonal de cada pipa que compõe cada face do icosaedro, em centímetros, é igual a:

a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.
b) $2\sqrt{3}$.
c) 4.
d) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
e) $4\sqrt{3}$.

FRENTE 3

14. Enem 2015 Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



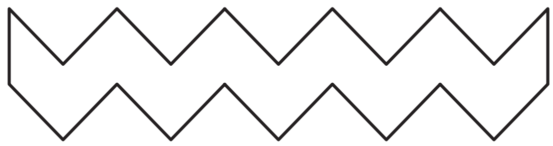
Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

a) triângulo.
b) losango.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

15. PUC-Rio 2015 A medida da área, em cm^2, de um quadrado que pode ser inscrito em um círculo de raio igual a 5 cm é?

a) 20
b) $25\sqrt{2}$
c) 25
d) $50\sqrt{2}$
e) 50

16. Insper-SP 2016 Cada lado do polígono indicado na figura mede 10 cm e seus ângulos internos têm medidas de 45°, 90°, 135° e 270°, como mostra a figura. A área desse polígono, em cm^2, é igual a



a) $500\sqrt{2}$.
b) $450\sqrt{2}$.
c) $400\sqrt{2}$.
d) $350\sqrt{2}$.
e) $300\sqrt{2}$.

17. UEL-PR 2017 Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a "Estrela de David" (figura 1).

Figura 1 Figura 2 Figura 3

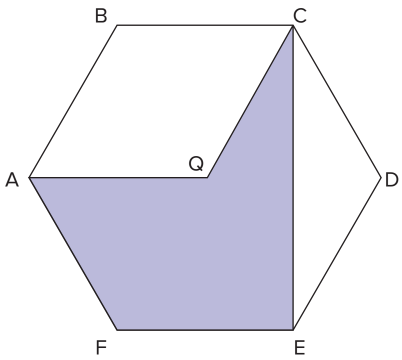
A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero ABC, inscrito nessa circunferência.
Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

a) Determine a medida do lado do triângulo ABC. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.
b) Determine a área representada pela cor cinza na Figura 3. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

18. Mackenzie-SP 2013 A área de um triângulo regular inscrito em uma circunferência de raio *r*, em função do apótema *a* de um hexágono regular inscrito na mesma circunferência é:

a) a^2
b) $\sqrt{2}a^2$
c) $2\sqrt{2}a^2$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$
e) $\sqrt{3}a^2$

19. **FGV-SP 2013** Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm e Q é o centro da circunferência inscrita nele.



O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a

a) $4 + \sqrt{2}$

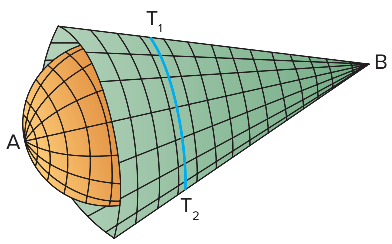
b) $4 + \sqrt{3}$

c) 6

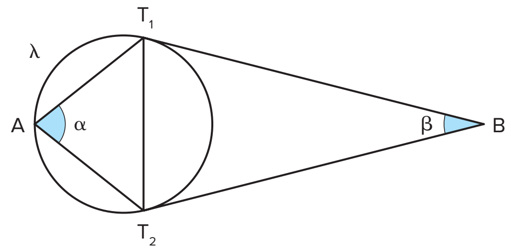
d) $4 + \sqrt{5}$

e) $2(2 + \sqrt{2})$

20. **Insper-SP 2018** A imagem indica o projeto de uma peça que será impressa em uma impressora 3D.



A figura a seguir indica um corte na peça por um plano transversal. A respeito desse corte, sabe-se que AT_1T_2 é um triângulo isósceles, com $AT_1 = AT_2$, inscrito em um círculo λ. Por T_1 e T_2 passam duas retas tangentes a λ que se intersectam no ponto B. As medidas dos ângulos $T_1\hat{A}T_2$ e $T_1\hat{B}T_2$, indicadas na figura por α e β, estão em radianos.



Sabendo-se que a soma dos ângulos da base $\overline{T_1T_2}$ triângulo AT_1T_2 é igual a 4β, então α é igual a:

a) $\frac{4\pi}{9}$.

b) $\frac{\pi}{3}$.

c) $\frac{6\pi}{13}$.

d) $\frac{3\pi}{7}$.

e) $\frac{7\pi}{15}$.

Texto complementar

A reta de Euler

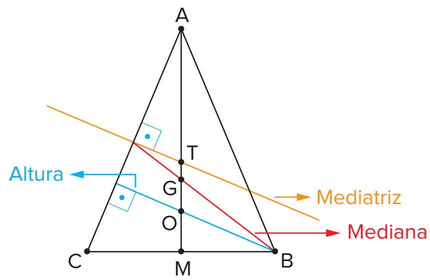
Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores em sua época. Muito estudioso desde a infância, aos 31 anos perdeu a visão de seu olho direito. Em 1766, ou seja, 28 anos depois, teve catarata e perdeu a visão do olho esquerdo, mas sua deficiência não o tornou improdutivo. Nos 17 anos que se sucederam, até falecer em 1783, escreveu quase metade das 866 obras suas que se tem registro.

A reta de Euler relaciona três dos pontos notáveis de um triângulo. Recebe esse nome a reta que passa pelo circuncentro, pelo baricentro e pelo ortocentro de um triângulo. A verificação disso pode ser comprovada pelo teorema a seguir:

Em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro são colineares. O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.

A prova desse teorema vale para um triângulo qualquer. Para o caso específico do triângulo equilátero, os três pontos notáveis coincidem e a reta de Euler não fica definida.

Considerando um triângulo isósceles ABC, sabemos que a mediana, a mediatriz e a altura relativas à base são coincidentes, assim, o baricentro (G), o circuncentro (T) e o ortocentro (O) pertencem a um mesmo segmento. A reta de Euler é a reta suporte desse segmento, como mostra a figura a seguir.

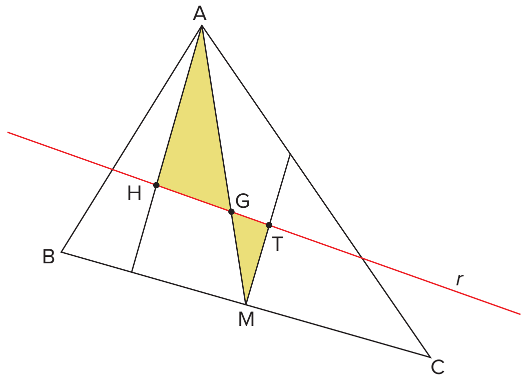


O desenvolvimento que veremos a seguir vale para triângulos acutângulos, retângulos ou obtusângulos (por analogia). Consideraremos um triângulo acutângulo apenas para garantir que os pontos notáveis sejam internos ao triângulo.

Seja um triângulo escaleno ABC. Nele, a mediana e a mediatriz do triângulo são distintas; logo, o baricentro G e o circuncentro T são pontos distintos. Assim, sejam:

- *r* a reta determinada por G e T;
- H um ponto pertencente a $\overrightarrow{TG}$, tal que $GH = 2 \cdot TG$;
- M o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

Considerando a mediana e a mediatriz relativas ao lado $\overline{BC}$, teremos:



Os triângulos GHA e GTM são semelhantes pelo caso LAL:

$$\begin{cases} GH = 2 \cdot GT & \text{(pela construção)} \\ med(A\hat{G}H) = med(M\hat{G}T) & \text{(opostos pelo vértice)} \\ AG = 2 \cdot GM & \text{(propriedade do baricentro)} \end{cases}$$

Assim:

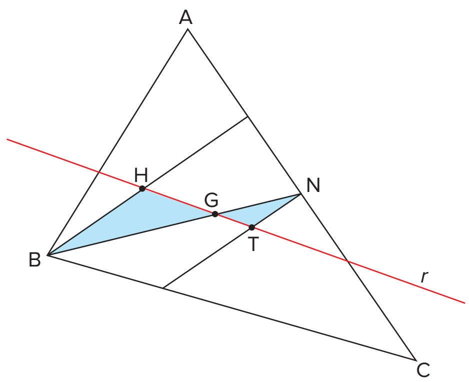
- os ângulos $A\hat{H}G$ e $M\hat{T}G$ são congruentes;
- a reta suporte do segmento $\overline{AH}$ é paralela à mediatriz $\overleftrightarrow{TM}$.

Com isso, H é um ponto que pertence à altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Raciocinando do mesmo modo, mas considerando, desta vez, a mediana e a mediatriz relativas ao lado $\overline{AC}$, sejam:

- r a reta determinada por G e T;
- H um ponto pertencente a $\overrightarrow{TG}$, tal que $GH = 2 \cdot TG$;
- N o ponto médio do lado $\overline{AC}$.

Temos:



Os triângulos GHB e GTN são semelhantes pelo caso LAL:

$$\begin{cases} GH = 2 \cdot GT & \text{(pela construção)} \\ med(B\hat{G}H) = med(N\hat{G}T) & \text{(opostos pelo vértice)} \\ BG = 2 \cdot GN & \text{(propriedade do baricentro)} \end{cases}$$

Assim:

- os ângulos $B\hat{H}G$ e $N\hat{T}G$ são congruentes;
- a reta suporte do segmento $\overline{BH}$ é paralela à mediatriz $\overleftrightarrow{TN}$.

Com isso, H é um ponto que pertence à altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

Portanto, como H é a interseção de duas alturas do triângulo ABC, H é, de fato, o ortocentro do triângulo.

Dessa forma, verificamos que o circuncentro, o baricentro e o ortocentro do triângulo são colineares e a reta a que pertencem é chamada de reta de Euler do triângulo ABC. Pelo fato de o ortocentro do triângulo ser único, verificamos também que o baricentro sempre estará entre o ortocentro e o circuncentro, com $GH = 2 \cdot GT$.

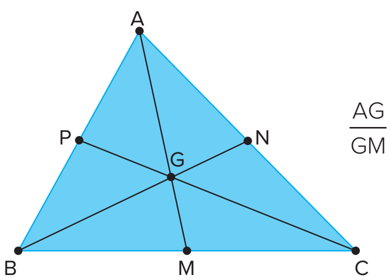
Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Pontos notáveis do triângulo

O baricentro e as medianas

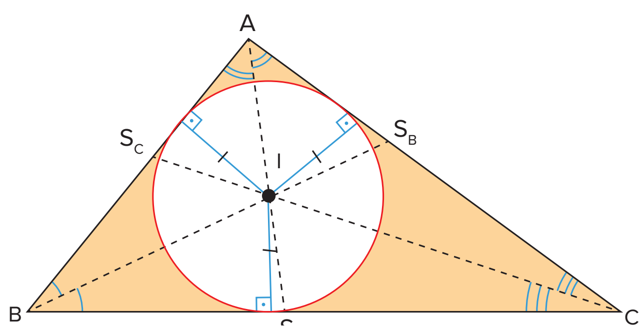
- As três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado de baricentro.
- O baricentro divide as medianas na razão 2 : 1.
- As medianas dividem o triângulo em seis triângulos de mesma área.
- O baricentro é o centro de massa do triângulo de densidade uniforme.



$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = 2$$

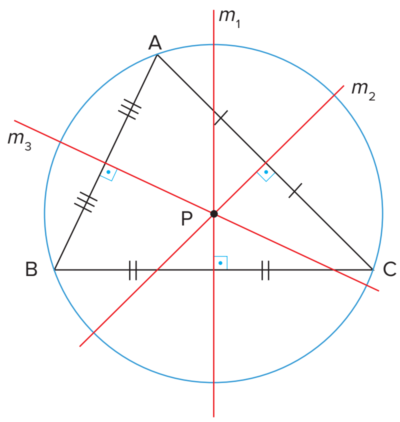
O incentro e as bissetrizes

- As três bissetrizes internas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado incentro.
- O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
- O incentro equidista dos lados do triângulo.
- O raio da circunferência inscrita é a razão entre a área e o semiperímetro do triângulo.



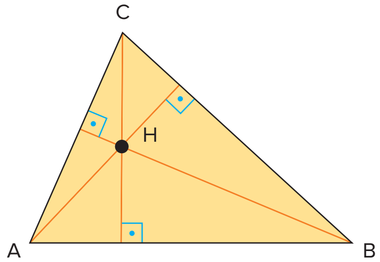
O circuncentro e as mediatrizes

- As três mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam em um único ponto, chamado de circuncentro.
- O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
- O circuncentro equidista dos vértices do triângulo.



O ortocentro e as alturas

- As três alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto, denominado ortocentro.
- O ortocentro de um triângulo acutângulo é interno ao triângulo, o do triângulo retângulo coincide com o vértice do ângulo reto e o do triângulo obtusângulo é externo ao triângulo.



Polígonos regulares

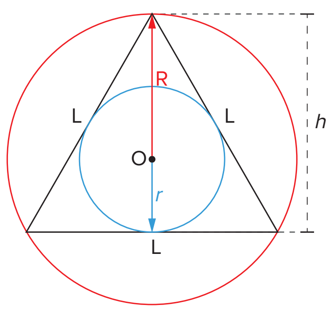
Área do polígono regular de *n* lados

Em função do perímetro (2*p*) e do apótema (*a*):

$$\text{Área} = n \cdot A_{\Delta} = n \cdot \frac{L \cdot a}{2} = \frac{2p \cdot a}{2} = p \cdot a$$

Em função do raio (R) da circunferência circunscrita e do ângulo central (α): $\text{Área} = n \cdot \dfrac{R^2 \cdot \text{sen}\,(\alpha)}{2}$.

Estudo do triângulo equilátero

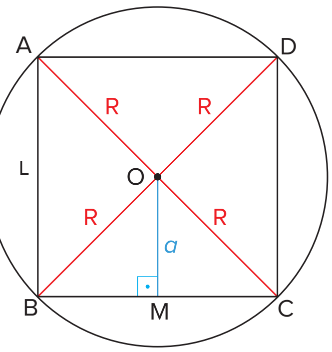


Altura $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

Apótema $a = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{L\sqrt{3}}{2} = \dfrac{L\sqrt{3}}{6}$

Raio da circunferência circunscrita $R = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{L\sqrt{3}}{2} = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$

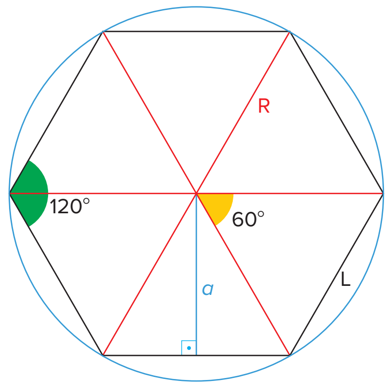
Estudo do quadrado



Apótema $a = \dfrac{L}{2}$

Raio da circunferência circunscrita $R = \dfrac{L\sqrt{2}}{2}$

Estudo do hexágono regular



Apótema $a = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$

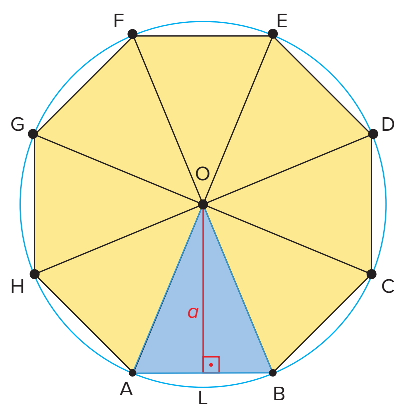
Raio da circunferência circunscrita $R = L$

$\text{Área} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Outras áreas

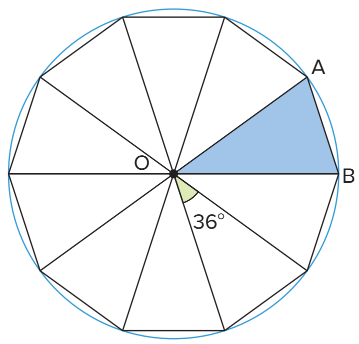
A área de um polígono regular em função do raio R da circunferência circunscrita será:

Octógono



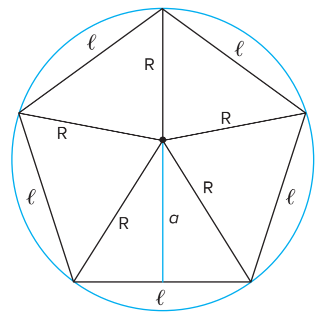
$\text{Área}_{\text{octógono}} = 2R^2\sqrt{2}$

Decágono



$$\text{Área}_{\text{decágono}} = \frac{5R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Pentágono



$$\text{Área}_{\text{pentágono}} = \frac{5R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$$

Quer saber mais?

Sites

SIMÕES, Marco Antonio. *Centro de massa e condição de equilíbrio*. 25 nov. 2020. Disponível em: masimoes.pro.br/fisica/centro-de-gravidade-e-condi.html.

Conheça o centro de massa e o centro de gravidade de um corpo e saiba como determinar o centro de massa de figuras regulares e não regulares com o GeoGebra. Acesso em: 3 ago. 2022.

RECURSOS educativos. *Casa das Ciências*. Disponível em: www.casadasciencias.org/recurso/online/8718.

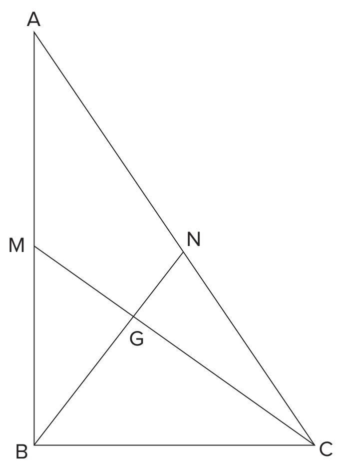
Visualize e verifique o comportamento das mediatrizes, bissetrizes, alturas e medianas de triângulos e seus pontos notáveis. Acesso em: 3 ago. 2022.

DEPARTAMENTO de Matemática e Física. *Animated Penrose Tiling*. Universidade Católica, Brescia (Itália). Disponível em: https://p.p4ed.com/QKPRX (Parte I) e https://p.p4ed.com/QJORP (Parte II).

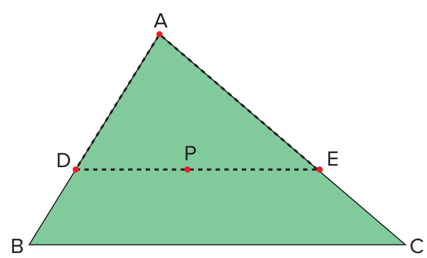
Na animação desenvolvida por Maurizio Paolini e Alessandro Musesti, você poderá observar a beleza nas simetrias proporcionadas pelas pavimentações do plano, com triângulos e quadriláteros, cujos lados estão na razão áurea. Acesso em: 3 ago. 2022.

Exercícios complementares

1. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB = 6 cm e AC = 4 cm de um triângulo ABC. Sabendo que as medianas $\overline{CM}$ e $\overline{BN}$ são perpendiculares, determine a medida da base $\overline{BC}$ desse triângulo.



2. Um terreno em forma de um triângulo ABC, cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 15 m, 18 m e 24 m, será parcialmente cercado. Para cercá-lo, o proprietário mandou que fosse colocada uma estaca de madeira em um ponto P do interior do terreno, outra no vértice A e mais duas outras estacas nos pontos D e E dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, de modo que os pontos P, D e E fiquem alinhados, determinando uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ do terreno, como mostra a figura.



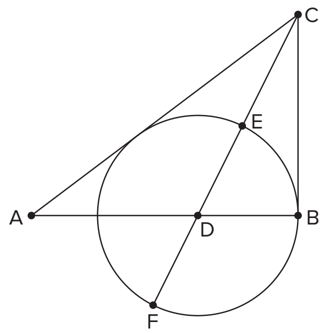
Determine quantos metros de cerca serão usados para cercar o triângulo ADE nos casos em que o ponto P é:

a) o incentro do triângulo ABC.

b) o baricentro do triângulo ABC.

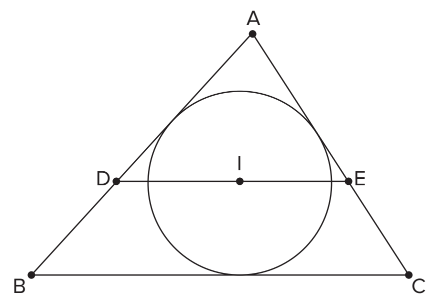
3. Um triângulo ABC de lados AB = 16 cm e AC = 10 cm tem o ângulo interno BÂC medindo 60°. Determine a distância do ponto P ao lado $\overline{BC}$ do triângulo PBC sabendo que P é o incentro do triângulo ABC.

4. **Esc. Naval-RJ 2021** Seja o triângulo ABC, retângulo em B, com AB $= 8\sqrt{2}$ e BC $= 6\sqrt{2}$. Sabendo que $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$, D é centro da circunferência de raio BD e x é a razão $\frac{EF}{CE}$, podemos afirmar que x é tal que

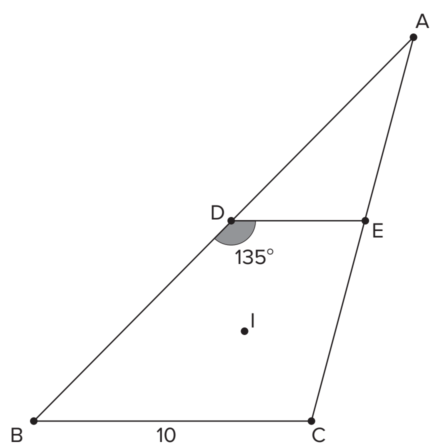


a) $0 < x \leqslant 0{,}5$
b) $0{,}5 < x \leqslant 1$
c) $1 < x \leqslant 1{,}5$
d) $1{,}5 < x \leqslant 2$
e) $2 < x \leqslant 2{,}5$

5. Na figura a seguir, I é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC. $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$ e os pontos D, I e E são colineares. Calcule o perímetro do triângulo ADE sabendo que AB = 14 cm, BC = 13 cm e AC = 12 cm.



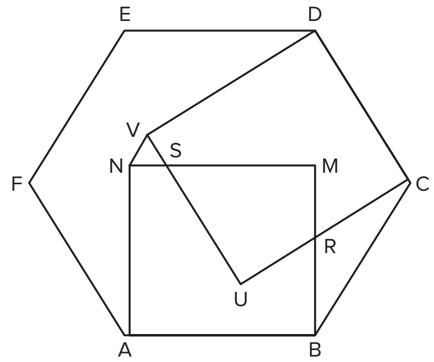
6. **Udesc** Observe a figura.



Sabendo que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos, que o ponto I é incentro do triângulo ABC e que o ângulo $B\hat{I}C$ é igual a 105°, então o segmento $\overline{AC}$ mede:

a) $5\sqrt{2}$
b) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$
c) $20\sqrt{2}$
d) $10\sqrt{2}$
e) $\frac{20\sqrt{2}}{3}$

7. **EsPCEx-SP 2019** Na figura abaixo ABCDEF é um hexágono regular de lado igual a 1, ABMN e CDVU são quadrados.

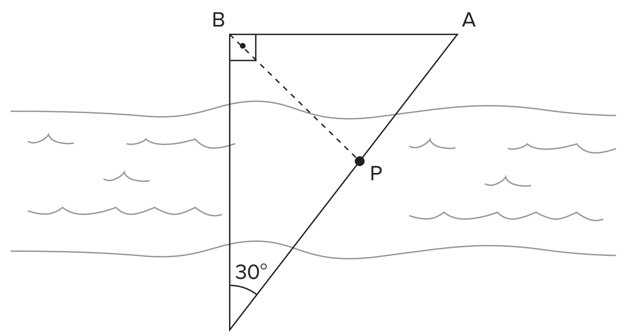


Desenho ilustrativo – fora de escala

Com base nessas informações, a medida do segmento $\overline{VN}$ é igual a

a) $2 - \sqrt{3}$.
b) $2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.
c) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.
d) $\sqrt{3} - 1$.
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. **EPCar-MG 2016** As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura a seguir.



Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta $\overline{AC}$ no ponto P. Se BC $= 6\sqrt{3}$ km, então $\overline{CP}$ é, em km, igual a:

a) $6 + \sqrt{3}$
b) $6(3 - \sqrt{3})$
c) $9\sqrt{3} - \sqrt{2}$
d) $9(\sqrt{2} - 1)$

9. **EsPCEx-SP 2018** Em um triângulo ABC, BC = 12 cm e a mediana relativa a esse lado mede 6 cm. Sabendo-se que a mediana relativa ao lado AB mede 9 cm, qual a área desse triângulo?

a) $\sqrt{35}$ cm².
b) $2\sqrt{35}$ cm².
c) $6\sqrt{35}$ cm².
d) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ cm².
e) $3\sqrt{35}$ cm².

10. Qual é a área máxima de um triângulo retângulo cujo baricentro dista 5 cm do ortocentro?

11. **UEG-GO 2020** Considerando-se um hexágono regular inscrito em uma circunferência C_1 de raio igual a 6 cm e uma circunferência C_2 inscrita nesse hexágono, verifica-se que o raio da circunferência C_2 é igual a

a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ cm

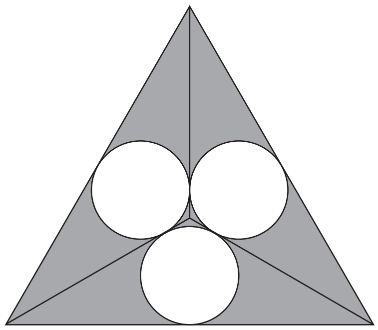
b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm

c) $\sqrt{3}$ cm

d) $3\sqrt{3}$ cm

e) $2\sqrt{3}$ cm

12. A figura a seguir apresenta o logotipo de um grupo empresarial, que consiste em um triângulo equilátero dividido em três triângulos congruentes, com uma circunferência inscrita em cada um.



Sendo A, B e C os centros das circunferências inscritas e P o vértice do triângulo equilátero mais distante do ponto B, podemos concluir que a medida do ângulo PÂB é igual a:

a) 165°
b) 150°
c) 135°
d) 120°
e) 105°

13. O bilhar americano é jogado com 16 bolas, sendo uma branca e 15 coloridas, que, inicialmente, são colocadas dentro de uma peça de madeira com a forma de um triângulo equilátero, como mostra a figura a seguir.

Sabendo que as bolas coloridas têm 8 cm de diâmetro e admitindo que todas elas estejam em contato umas com as outras ou com o triângulo de madeira, faça uma estimativa da medida do lado desse triângulo que cerca as 15 bolas coloridas usando, no final, o número 1,7 como aproximação da raiz quadrada de 3.

14. **Esc. Naval-RJ 2016** Um triângulo inscrito em um círculo possui um lado de medida $2\sqrt[4]{3}$ oposto ao ângulo de 15°. O produto do apótema do hexágono regular pelo apótema do triângulo equilátero inscritos nesse círculo é igual a:

a) $3\left(\sqrt{3}+2\right)$

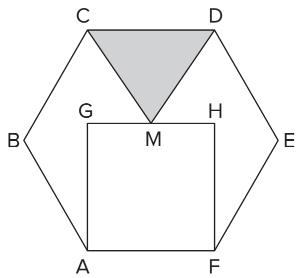
b) $4\left(2\sqrt{3}+3\right)$

c) $\sqrt{8\sqrt{3}+12}$

d) $\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)$

e) $6\left(\sqrt{2}+1\right)$

15. **UFRGS 2020** Considere o hexágono regular ABCDEF de lado 1. Sobre o lado $\overline{AF}$ do hexágono, constrói-se o quadrado AGHF, como mostra a figura abaixo. Sendo M o ponto médio de $\overline{GH}$, constrói-se o triângulo CDM.



A área do triângulo CDM é

a) $\sqrt{3}-1$.

b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. **Fuvest-SP 2018** Uma cerca tem formato de um polígono regular de *n* lados, cada lado com comprimento ℓ. A égua Estrela está amarrada à cerca por uma corda, também de comprimento ℓ, no exterior da região delimitada pelo polígono. Calcule a área disponível para pasto supondo que:

a) a extremidade da corda presa à cerca está fixada num dos vértices do polígono;

b) a extremidade da corda pudesse deslizar livremente ao longo de todo o perímetro da cerca.

17. Em uma mesma circunferência de raio 1 km, estão inscritos um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular, como mostra a Figura 1.

Figura 1

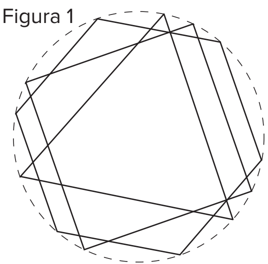
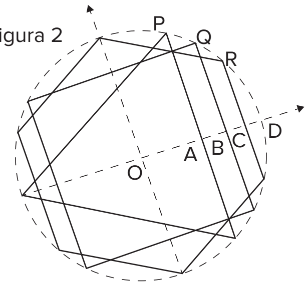


Figura 2



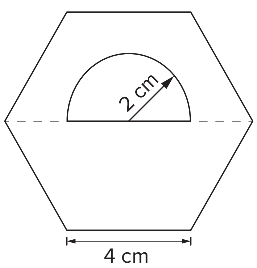
Aproveitando-se do fato de que há um feixe de paralelas determinado por certos lados desses polígonos, escolhe-se um sistema ortonormal de coordenadas cartesianas com origem no centro da circunferência (Figura 2), de tal forma que o semieixo positivo das abscissas desse sistema é perpendicular ao feixe de paralelas nos pontos A, B e C e intercepta a circunferência no ponto D.

Usando os números 1,414 e 1,732 como aproximações das raízes quadradas dos números 2 e 3, bem como 3,14 para aproximar o número π, considerando que a ilustração esteja representando uma pista de corrida, responda às seguintes perguntas:

a) Quais os valores aproximados para as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, em metros?

b) Quem, entre Alex, Beto e Caio, levaria vantagem em relação à distância se os três disputassem uma corrida em que Alex devesse partir do ponto A e chegar até o ponto R, Beto do ponto B até o ponto Q e Caio do ponto C até o ponto P, de modo que os três tivessem que correr em linha reta até o ponto D e seguir até seus destinos finais percorrendo a trajetória determinada pelo arco da circunferência?

18. Mackenzie-SP 2020



Na figura, tem-se um hexágono regular de lado 4 cm, a partir do qual foi retirado um semicírculo de raio 2 cm. Nessas condições, a área da parte restante, em cm^2, é igual a

a) $2(12\sqrt{3} - \pi)$

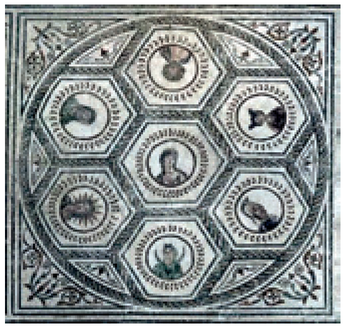
b) $2(12 - \pi)$

c) $4(6 - \pi)$

d) $4(6\sqrt{3} - 2\pi)$

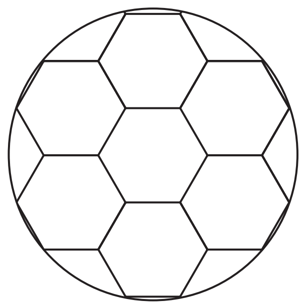
e) $4(6\sqrt{3} - \pi)$

19. UFMS 2021 (Adapt.) A figura a seguir é parte de um mosaico romano (século II d.C.) preservado em uma das mansões encontradas na cidade de Itálica, Espanha. Os bustos representados nos centros dos hexágonos regulares representam as divindades planetárias que dão nome aos dias da semana: no centro, Vênus (sexta-feira), rodeado pela Lua (segunda-feira), Marte (terça-feira), Mercúrio (quarta-feira), Júpiter (quinta-feira), Saturno (sábado) e o Sol (domingo).



Disponível em: https://i0.wp.com/www.hisour.com/wp - content/uploads/2019/11/Mosaic-of-the-planetarium360%C2%B0-Video-Italica.jpg?fit=960%2C640&ssl=1 &resize=1280%2C720. Acesso em: 24 nov. 2020.

A figura seguinte é uma representação simplificada do mosaico:



Considerando que R seja a medida do raio da circunferência que envolve os hexágonos regulares na figura anterior, é correto afirmar que cada um deles tem, respectivamente, perímetro e a área igual a:

a) $\dfrac{6R\sqrt{7}}{7}$ $\dfrac{54\sqrt{3}\ell^2}{7}$.

b) $\dfrac{6R\sqrt{5}}{5}$ e $\dfrac{2\sqrt{3}\ell^2}{2}$.

c) $\dfrac{6R\sqrt{7}}{7}$ e $\dfrac{3\sqrt{3}\ell^2}{14}$.

d) $\dfrac{4R}{3}$ e $\dfrac{3\sqrt{3}\ell^2}{14}$.

e) $\dfrac{6R\sqrt{7}}{7}$ e $\dfrac{21\sqrt{3}\ell^2}{2}$.

20. ITA-SP 2016 Seja P_n um polígono convexo regular de n lados, com $n \geqslant 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. P_n é inscritível numa circunferência.

II. P_n é circunscritível a uma circunferência.

III. Se ℓ_n é o comprimento de um lado de P_n e a_n é o comprimento de um apótema de P_n, então $\dfrac{a_n}{\ell_n} \leqslant 1$ para todo $n \geqslant 3$.

É(São) verdadeira(s):

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

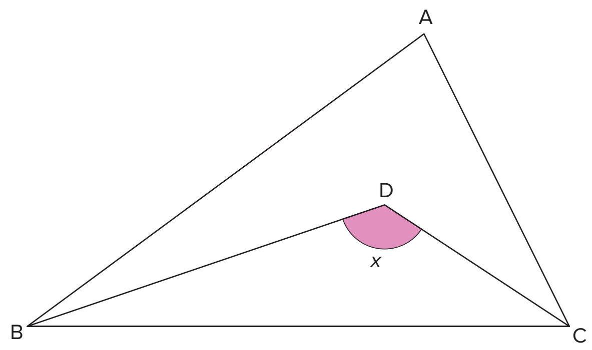
d) apenas I e II.

e) I, II e III.

BNCC em foco

EM13MAT308

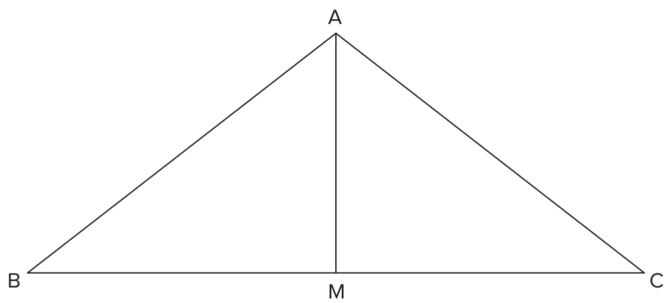
1. Na figura $med(\hat{B}) = 35°$ e $med(\hat{C}) = 65°$. Sabendo que D é o incentro do triângulo ABC, então x mede:



a) 40°
b) 120°
c) 130°
d) 150°
e) 100°

EM13MAT201

2. O triângulo ABC da figura é isósceles.



O segmento $\overline{AM}$ é sua mediana, BM = 8 cm e AM = 6 cm. O perímetro e a área do triângulo ABC são, respectivamente:

a) 40 cm, 30 cm²
b) 36 cm, 48 cm²
c) 48 cm, 48 cm²
d) 36 cm, 24 cm²
e) 28 cm, 24 cm²

EM13MAT201

3. Uma praça tem a forma de um octógono regular de lados medindo 7 metros. A praça tem área aproximada de:

Dados: sen 22,5° = 0,38; cos 22,5° = 0,92; tg 22,5° = 0,41.

a) 249 m².
b) 239 m².
c) 136 m².
d) 139 m².
e) 257 m².

Gabarito

Frente 1

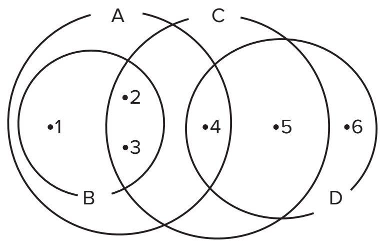
Capítulo 1 – Teoria elementar dos conjuntos

Revisando

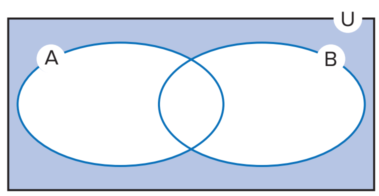
1. a) $2 \in A$
   b) $\{1\} \subset A$
   c) $\{5, 6\} \not\subset A$
   d) $6 \notin A$
   e) $A \supset \{3, 4\}$
   f) $\varnothing \subset A$
2. $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}.
3. $2^5 = 32$ subconjuntos.
4. a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$
   b) $A \cap B = \{4, 8\}$
   c) $B - C = \{3, 7, 8\}$
   d) $A \cap B \cap C = \{4\}$
   e) $C \cap (A \cup B) = \{1, 4\}$
   f) $C \cup (A \cap B) = \{1, 4, 5, 8\}$
5. a) $\overline{A} = \{3, 6, 7, 8, 9, 10\}$
   b) $\overline{B} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
   c) $C_A^B = A - B = \{2, 4\}$
6. a) 1, 2, 6, 7 e 8
   b) 3 e 4
   c) 1, 2, 3, 6, 7 e 8
   d) 4, 5 e 6
   e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8
   f) Nenhum elemento de A satisfaz a sentença.
7. C
8. a) $A \cap B \cap C$
   b) $(A \cup C) - B$
   c) $B - (A \cup C)$
9. a) 32 pacientes.
   b) 7 pacientes.
   c) 20 pacientes.
10. Demonstração.

Exercícios propostos

1. a) $1 \in A$
   b) $\{1\} \subset A$
   c) $4 \notin B$
   d) $\{4\} \not\subset B$
   e) $B \supset \{1, 2\}$
   f) $\varnothing \subset A$
   g) $\{1, 4\} \subset A$
   h) $\varnothing \subset B$
   i) $A \supset \{2, 3\}$
   j) $A \supset B$
2. a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   b) $Y \cup Z = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
   c) $X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   d) $X \cap Y = \{3, 4, 5\}$
   e) $X \cap Y \cap Z = \{5\}$
   f) $X \cap (Y \cup Z) = \{3, 4, 5\}$
   g) $(X \cap Y) \cup Z = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
   h) $(X \cup Z) \cap (Y \cup Z) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
3. a) $A - B = \{6, 10\}$
   b) $B - A = \{1, 7\}$
   c) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 6, 7, 10\}$
4. a) $\overline{M} = \{5, 6, 7\}$
   b) $\overline{N} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
   c) $C_M^N = M - N = \{3, 4\}$
5.



6.



7. E
8. A
9. A
10. $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4} e {1, 2, 3, 4}.
11. 64 subconjuntos.
12. V – V – F – V
13. C
14. E
15. C
16. 75%
17. A
18. A
19. B
20. D
21. E
22. Soma: 02 + 08 = 10
23. E
24. A
25. B
26. A
27. D
28. 56 funcionários.
29. E

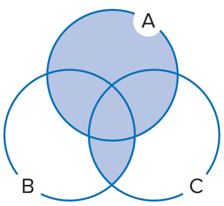
30. a) M ∪ N = [2, 8]
b) M ∩ N =]4, 7]
c) M − N = [2, 4]
d) N − M =]7, 8]

31. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 8\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 6\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$

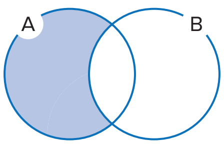
32. C
33. B
34. D
35. A
36. A = {1, 2, 3, 8, 9, 10}
B = {4, 5, 6, 7}
C = {6, 8}
D = {1, 2, 3, 7, 8, 9, 10}

Exercícios complementares

1. Soma: 01 + 02 = 03
2. E
3. E
4. E
5. C
6. A
7. D
8. A Δ B = {1, 2, 3, 6}
9.



10.



11. Demonstração.
12. B
13. C
14. A
15. P(X) = 2^{10} = 1 024
16. C
17. D
18. C
19. A
20. B
21. Soma: 04 + 08 = 12
22. B
23. D
24. D
25. A
26. C
27. A
28. E
29. C
30. A − B =]0, 2[∪]5, 7]
31. A − B = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.
32. Soma: 01 + 04 + 08 = 13
33. B
34. D
35. A
36. B

BNCC em foco

1. A
2. B
3. A

Capítulo 2 – Relações e funções

Revisando

1. a) A × B = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)}
b) B × A = {(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)}
c) A^2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}
d) A × B × C = {(1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (1, 4, 5), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 4, 5)}

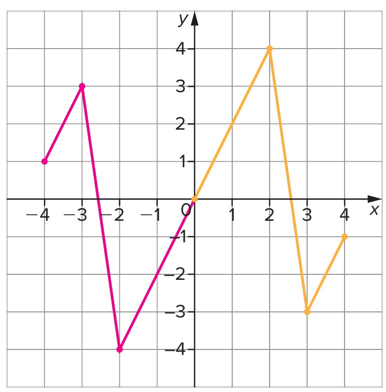
2. a) $f(2) = 10$
b) $f(f(1)) = 21$
c) $f(3x) = 18x^2 + 3x$
d) $f(-x) = 2x^2 - x$

3. a) $D = \mathbb{R} - \{6\}$
b) $D = [2, +\infty[$

4. Im =]−4, −2] ∪ [1, 4]
5. $B = \mathbb{R}_+$
6. Demonstração.
7. Tomando-se $x_1 = 3$ e $x_2 = -5$, temos $f(x_1) = 3^2 = 9$ e $f(x_2) = (-5)^2 = 25$. Assim, $x_1 > x_2$, mas $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, a função não é crescente em todo o domínio.

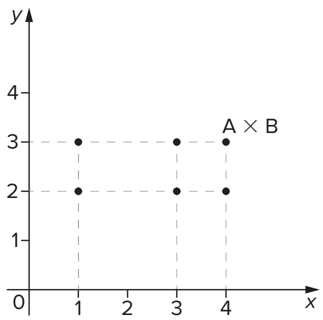
8. a) V
b) F
c) F
d) V

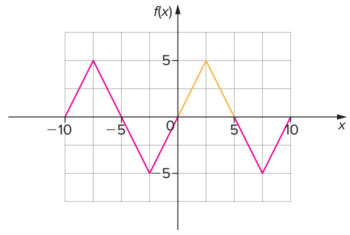
9.



10. a) $f(7) = 5$
b) $f(8) = 8$
c) $f(12) = 5$
d) $f(13) = 8$

Exercícios propostos

1. a) (3, 4)
   b) (2, 3)
2. a) $n(A \times B) = 12$
   b) $n(B^2) = 9$
   c) $n(A \times B \times C) = 24$
3. 

4. B
5. D
6. B
7. a) $f(3) = 18$
   b) $f(2x) = 4x^2 + 6x$
   c) $f(-x) = x^2 - 3x$
   d) $f(f(1)) = 28$
8. D
9. a) $f(x) = 3x + 11$
   b) $f(x) = 3x - 1$
10. D
11. B
12. C
13. a) $D =]-\infty, 3]$
    b) $D = \mathbb{R} - \{5\}$
    c) $D = [4, 11[$
14. C
15. D
16. A
17. a) $Im = [1, 3] \cup [6, 7[$
    b) $Im = [1, 7]$
    c) $Im = [1, 7]$
18. Crescente: $[-4, -2] \cup]3, 6]$.
    Decrescente: $[-6, -4] \cup [0, 3]$.
    Constante: $[-2, 0]$.
19. C
20. a) Sobrejetora.
    b) Injetora.
    c) Bijetora.
21. C
22. Ímpar.
23. Ímpar.
24. B
25. Na função par o gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (y) e na função ímpar o gráfico é simétrico em relação à origem (0, 0) do plano cartesiano.
26. a) Função par.
    b) Função ímpar.
    c) Não é par nem ímpar.
27. C
28. A
29. C
30. A
31. D
32. E
33. E
34. C
35. a) 300 fotos.
    b) $y = \frac{4}{3}(0{,}21x + 12)$, com $x, y \in \mathbb{N}^*$.
36. a) 

    b) $h(3) = 0$

Exercícios complementares

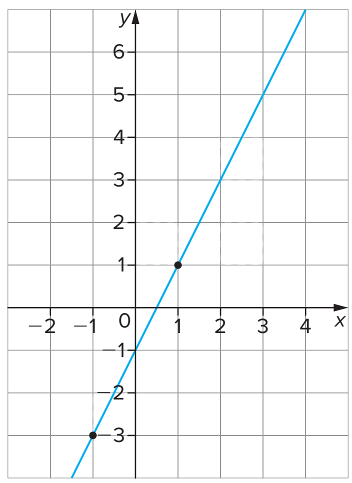
1. Demonstração.
2. C
3. A
4. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ou seja, é o próprio plano cartesiano, e $\forall (x, y)$, então temos $x, y \in \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ou seja, é o espaço tridimensional cartesiano, e $\forall (x, y, z)$, então temos $x, y, z \in \mathbb{R}$.
5. C
6. A
7. $f(x) = \dfrac{x + 4}{3 - 2x}$
8. D
9. C
10. D
11. Soma: 08 + 16 = 24
12. C
13. E
14. Demonstração.
15. A
16. Soma: 02 + 08 + 16 = 26
17. A
18. a) Ímpar.
    b) Par.
    c) Par.
19. a) Não é par nem ímpar.
    b) Par.
    c) Ímpar.
    d) Ímpar.
20. D
21. A
22. D
23. D
24. D
25. B
26. D
27. E
28. A
29. E
30. C
31. Soma: 02 + 08 + 16 = 26
32. B
33. E
34. A
35. B
36. C

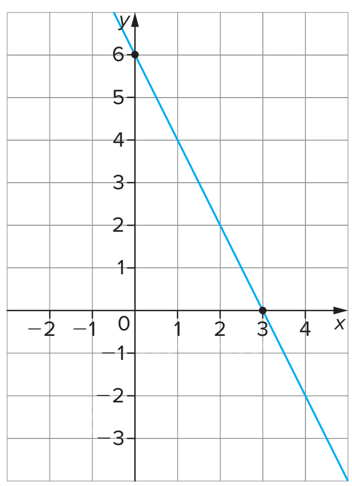
BNCC em foco

1. C
2. A
3. C

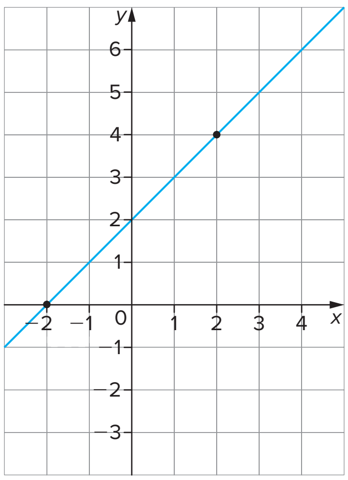
Capítulo 3 – Função do 1º grau

Revisando

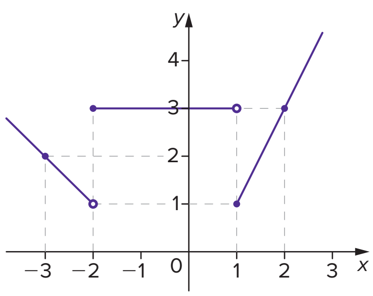
1. a) 

   b) 

c)



2. a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = 2x + 1$
   b) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = -2x + 5$
3. $(3, -2)$
4. 35
5. a) 23,5 litros.
   b) $V(t) = 2{,}5 \cdot t + 3{,}5$
   c) 17 minutos.
6. a) 36 pessoas/minuto.
   b) $N(t) = 36 \cdot t + 62$
   c) 152 pessoas
7. $a = 2$ e $b = 10$.
8.



9. a) São diretamente proporcionais.
   b) Não são proporcionais.
   c) São diretamente proporcionais.
10. a) $\begin{cases} \text{se } x > 5, \text{ então } A(x) > 0 \\ \text{se } x = 5, \text{ então } A(x) = 0 \\ \text{se } x < 5, \text{ então } A(x) < 0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} \text{se } x < 3, \text{ então } B(x) > 0 \\ \text{se } x = 3, \text{ então } B(x) = 0 \\ \text{se } x > 3, \text{ então } B(x) < 0 \end{cases}$

Exercícios propostos

1. E
2. B
3. C
4. B
5. C
6. B
7. D
8. B
9. B
10. C
11. C
12. C
13. D
14. C
15. D
16. C
17. E
18. D

Exercícios complementares

1. A
2. B
3. D
4. C
5. D
6. D
7. a) 160 pessoas.
   b) Salão A.
8. A
9. B
10. B
11. 125 peças.
12. B
13. C
14. D
15. A
16. E
17. D
18. a)]0, 2[e]5, 9[
   b) $f\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{9}{4}$; $f\left(\frac{7}{2}\right) = 4$; $f(8) = \frac{11}{2}$

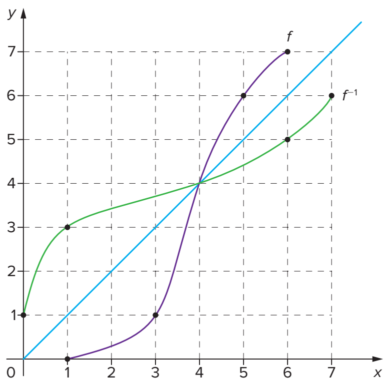
BNCC em foco

1. C
2. B
3. A

Capítulo 4 – Função inversa e função composta

Revisando

1. a) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}$
   b) $g^{-1}: [1, 5] \rightarrow [2, 4]$, $g^{-1}(x) = \frac{9 - x}{2}$
   c) $h^{-1}: [4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $h^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$
   d) $m^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow [6, +\infty[$, $m^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x + 9}$
2. Porque *f* não é bijetora.
3. $Im(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$
   $f^{-1}(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$
4.



Os gráficos se interceptam no ponto (4, 4).

5. a) $f^{-1}(2) = 1$
   b) $f^{-1}(1) = 3$
   c) $f(f^{-1}(3)) = 3$
   d) $f^{-1}(f(f(3))) = 1$
6. a) $h \circ g(x) = 10x - 13$
   b) $g \circ h(x) = 10x + 1$
   c) $g \circ f(x) = 2x^2 - 1$
   d) $g \circ g(x) = 4x - 9$
   e) $h \circ g \circ f(x) = 10x^2 - 3$
7. $f \circ g(x) = 2x$
8. a) $f \circ g(4) = 3$
   b) $h \circ f(2) = 1$
   c) $h \circ g \circ f(2) = 5$
   d) $(f \circ g)^{-1}(2) = 3$
9. B
10. $f(x) = 3x + 4$

Exercícios propostos

1. D
2. B
3. a) $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{4}\right\}$
   b) $g^{-1}(x) = \frac{x + 4}{3 + 4x}$
4. E
5. C
6. B
7. A
8. B
9. C
10. B
11. A
12. C
13. D
14. E
15. B
16. D
17. A
18. a) $k = 9$
   b) $f(x) = \frac{3(x - 15)}{8}$ e $g(x) = \frac{5x}{16} - \frac{9}{4}$

Exercícios complementares

1. D
2. D
3. B
4. C
5. Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15
6. $f \circ g(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x < 0 \\ 5x + 2, \text{ se } 0 \leqslant x < 2 \\ 15x, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$
7. a) $C(N(t)) = 50 + 600t - 30t^2$
   b) $t = 5$
8. C
9. D
10. D
11. A
12. C
13. C
14. A
15. B
16. A
17. a) Demonstração.
    b) Demonstração.
18. a) $f(2) = -3$
    b) Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x$.
    c) $x = 2011$

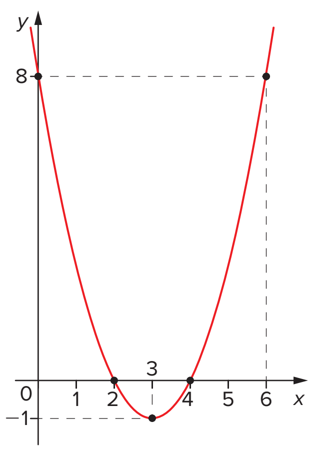
BNCC em foco

1. A
2. C
3. D

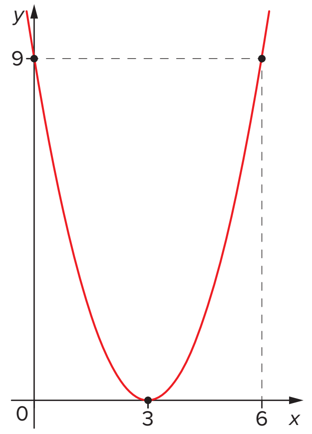
Capítulo 5 – Função do 2º grau

Revisando

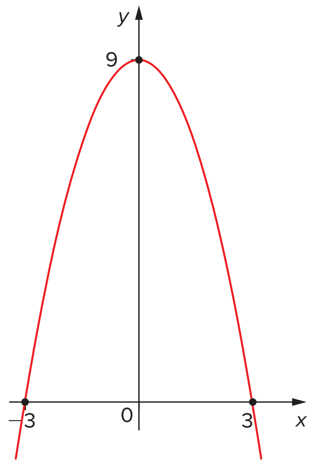
1. $m > -\frac{9}{16}$ e $m \neq 1$.
2. $k = 5$
3. a)



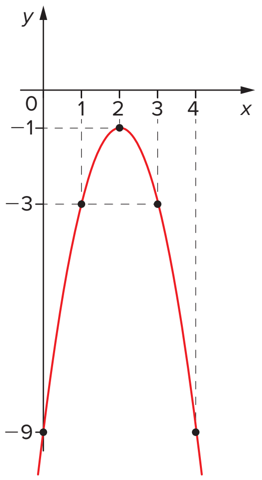
b)



c)



d)



4. a) $y = 2x^2 - 12x + 10$
   b) $y = 2x^2 - 8x + 8$
   c) $y = -x^2 + 7x - 5$
5. a) $Im = [-6, +\infty[$
   b) $Im = [4, +\infty[$
   c) $Im =]-\infty, 1]$
   d) $Im =]-\infty, -3]$
6. E
7. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 7\}$
8. $m > 4$
9. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } 4 \leqslant x \leqslant 5\}$
10. $S = \{2, 3\}$

Exercícios propostos

1. a) $S = \{4\}$
   b) $S = \{-7\}$
   c) $S = \left\{\frac{10}{7}\right\}$
   d) $S = \{0\}$
   e) $S = \varnothing$
   f) $S = \mathbb{R}$
   g) $S = \{7\}$
   h) $S = \{5\}$
   i) $S = \{4\}$
   j) $S = \{1\}$
2. a) $a \neq 2$
   b) $a = 2$ e $b = -3$
   c) $a = 2$ e $b \neq -3$
3. a) $S = \{-3, 2, 5\}$
   b) $S = \{2\}$
   c) $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$
   d) $S = \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$
4. a) $S = \{1, 3\}$
   b) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
   c) $S = \varnothing$
   d) $S = \{0, 5\}$
   e) $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$
   f) $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$
   g) $S = \left\{-\frac{7}{3}, 1\right\}$
   h) $S = \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$
5. $m < -\frac{1}{4}$
6. $m = 7$
7. E
8. B
9. a) 16 m
   b) $v = 76$ km/h
10. B
11. D
12. D
13. C
14. E
15. A
16. $d = 10$ m
17. B
18. D
19. C
20. C
21. a) 230%
    b) 20 hab/km²
22. A
23. A
24. C

25. a) S = {$x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4$}
b) S = $\varnothing$
c) S = $\mathbb{R}$
d) S = {$x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 7$}
e) S = {$x \in \mathbb{R} \mid x > 5$}
f) S = {$x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6$}
g) S = $\mathbb{R}$
h) S = {$x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$}
i) S = $\varnothing$
j) S = {$x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5$}

26. $k < -\frac{1}{4}$

27. a) S = {$x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 1$ ou $x > 3$}
b) S = $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$
c) S = {$x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5$ ou $x = 0$}
d) S = {$x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0$ ou $x > 1$}
e) S = {$x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 0$}
f) S = {$x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 7$}

Exercícios complementares

1. a) S = {−2, −1, 1, 2}
b) S = {−3, 3}
c) S = {−1, 2}
d) S = {1 , 2}

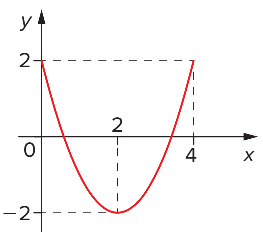
2. $m = -1$ ou $m = \frac{1}{3}$.

3. D
4. B
5. A
6. D
7. C
8. B
9. A

10. $h_1 = \frac{27}{8}$ m e $h_5 = \frac{3}{2}$ m.

11. Soma: 01 + 02 = 03

12. a)



b) $a = 1 - \sqrt{3}$ e $b = 1 + \sqrt{3}$.

13. D

14. a) $a = -0{,}1$, $b = 1$ e $c = 1{,}1$
b) 11 m

15. D
16. C
17. E
18. A
19. A

20. a) $a = \pm 2$ e $b = 1$
b) (1, 2)

21. a) A(−1, 0), B(3, 0) e V(1, 16)
b) C(2, 12)
c) 36

22. B

23. a) $y = 54 - \frac{x}{5}$
b) R$ 135,00

24. a) 1600 m²
b) 1800 m²

25. B
26. 13
27. B

BNCC em foco

1. A
2. B
3. A

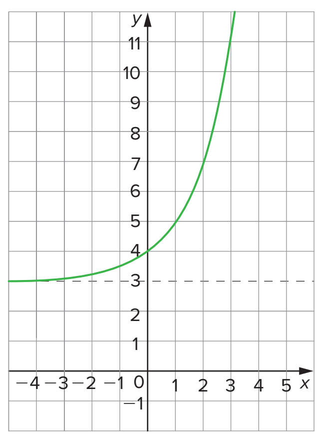
Capítulo 6 – Função exponencial

Revisando

1. a) S = $\left\{\frac{7}{2}\right\}$
b) S = {−1}
c) S = $\left\{\frac{3}{4}\right\}$

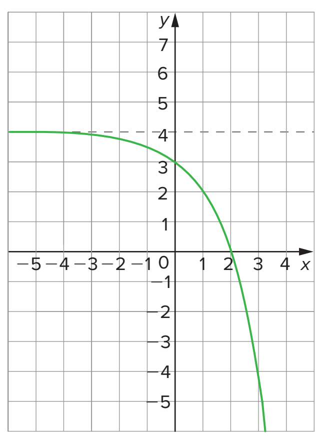
2. a) S = {2}
b) S = {0, 2}

3.



Assíntota: $y = 3$
Conjunto imagem: Im =]3, +∞[

4.



Raiz: $x = 2$
Função decrescente.

5. $y = 2 \cdot 2^x - 3$

6. B

7. a) 9,6 mg
b) 5 horas

8. S = [5, +∞[

9. S =]−∞, −1]

10. S = {1, 2, 3, 4}

Exercícios propostos

1. a) S = {4}
b) S = $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$
c) S = {1}
d) S = {−1}
e) S = $\left\{\frac{2}{3}\right\}$
f) S = $\left\{\frac{3}{5}\right\}$

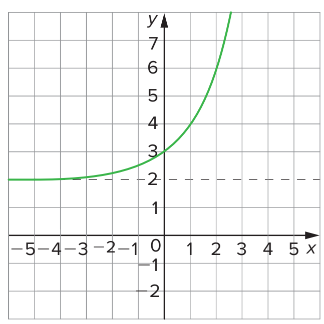
2. a) S = {0, 2}
b) S = {0}
c) S = {1}
d) S = {−1}
e) S = {3}
f) S = {1}

3. B
4. C
5. C
6. D

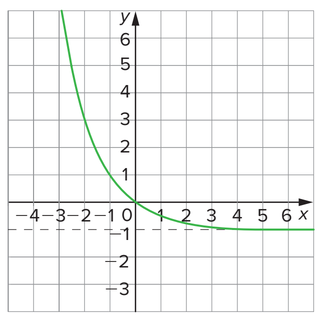
7. Soma: 02 + 08 + 16 = 26

8. D
9. C

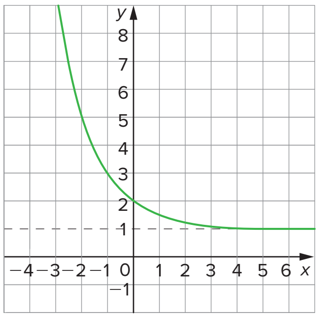
10. a)



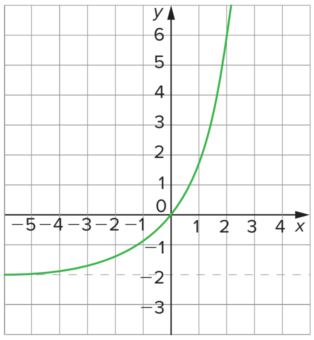
b)



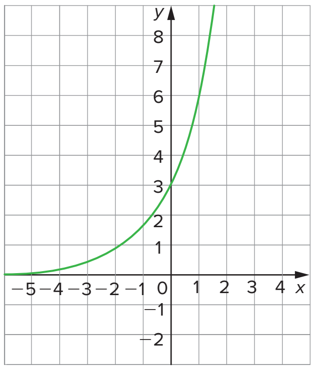
c)



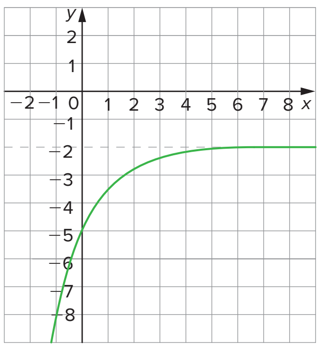
d)



e)



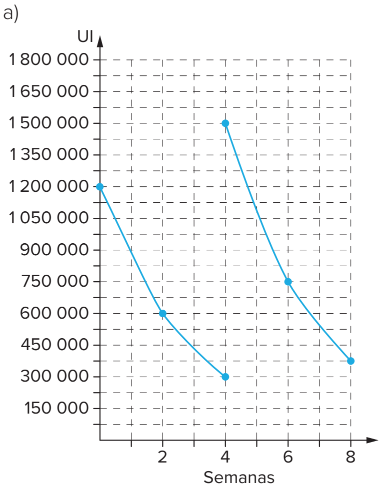
f)



11. a) $y = 2$, $\text{Im} =]2, +\infty[$.
    b) $y = -1$, $\text{Im} =]-1, +\infty[$.
    c) $y = 1$, $\text{Im} =]1, +\infty[$.
    d) $y = -2$, $\text{Im} =]-2, +\infty[$.
    e) $y = 0$, $\text{Im} =]0, +\infty[$.
    f) $y = -2$, $\text{Im} =]-\infty, -2[$.
12. E
13. B
14. B
15. E
16. D
17. B
18. C
19. A
20. A
21. D
22. B
23. C
24. A
25. E
26. D
27. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
    b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$
    c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
    d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$
    e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
    f) $S = \{1\}$

Exercícios complementares

1. C
2. C
3. D
4. D
5. B
6. A
7. C
8. D
9. C
10. a) 96 000
    b) 45 anos
11. C
12. Área: 12
13. A
14. C
15. C
16. D
17. B
18. C
19. C
20. C
21. A
22. a)



    b) 50 dias
23. E
24. a) $f^{-1}: (0, L) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x_0 + \left(\log_2 \dfrac{y}{L - y}\right)^{\frac{1}{k}}$
    b) $k = 1$ e $x_0 = 2$
25. D
26. B
27. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$
    b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$
    c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
    d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{3}{2}\right\}$
    e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \dfrac{5}{2}\right\}$
    f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

BNCC em foco

1. A
2. D
3. D

Frente 2

Capítulo 1 – Conjuntos numéricos

Revisando

1. a) $\dfrac{17}{10}$
   b) $\dfrac{8}{25}$
   c) $\dfrac{3}{4}$
   d) $\dfrac{26}{3}$
   e) $\dfrac{6}{11}$
   f) $\dfrac{13}{2}$
   g) $\dfrac{1}{30}$
   h) $\dfrac{12}{5}$
   i) $\dfrac{1}{3}$
   j) -1
2. a) $3{,}\overline{142857}$ (6 algarismos)
   b) 8
   c) 0,0013
   d) 880 m
3. a) $x^5 < x^4 < x^3 < x^2 < x^1$
   b) $x^5 < x^3 < x^1 < x^2 < x^4$
   c) $x^1 < x^3 < x^5 < x^4 < x^2$
4. a) 3 074
   b) 1 000 000
   c) 6,24
   d) $5\sqrt{2}$
   e) $6\sqrt{6}$
   f) $\sqrt[6]{32}$
   g) $2\sqrt{2}$
5. C

6. a)

$$\begin{array}{r|l} 4200 & 2 \\ 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 4200 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 1500 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$$

b) d(4200) = 96
d(1500) = 48

c) mmc(4200, 1500) = 21000

d) mdc(4200, 1500) = 300

7. a) mmc(8000, 10000) = 40000 km

b) mmc(8000, 12000) = 24000 km

c) mmc(10000, 12000) = 60000 km

d) mmc(10000, 8000, 12000) =
= 120000 km

8. a) 50 escolas.

b) 224 balas.

c) 750 chicletes.

d) 369 pirulitos.

9. N = 67

10. $\frac{23}{99}$

Exercícios propostos

1. B
2. Soma: 01 + 08 = 09
3. C
4. E
5. B
6. B
7. B
8. B
9. A
10. C
11. E
12. A
13. D
14. Apenas a quarta afirmativa está correta.
15. A
16. D
17. B
18. A
19. C
20. C
21. D
22. E
23. E
24. A
25. A
26. {2}
27. C
28. B
29. A
30. D
31. D
32. E
33. C
34. B
35. E
36. C
37. D
38. B
39. C
40. C
41. A
42. B
43. B
44. 256
45. D
46. B
47. E
48. C
49. A
50. E
51. B
52. C
53. A
54. C
55. A
56. a) N = 1681
b) 41 saquinhos plásticos /41 bolinhas de gude em cada um.
57. B
58. A
59. $x = 6$
60. Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29

Exercícios complementares

1. C
2. D
3. C
4. C
5. A
6. a) 1009
b) 576
7. $x = 9$
8. A
9. E
10. D
11. C
12. A
13. A
14. B
15. B
16. A
17. A
18. a) $x = 3 - 2\sqrt{2}$ é unidade de J.
b) $x = 5 + 3\sqrt{2}$ não é unidade de J.
c) −7 e 7
19. a) $n \in \{1, 2, 3, 6\}$
b) $m = 2^6 = 64$
20. B
21. A
22. $\frac{1}{2}$
23. B
24. B
25. $(a, b, c) \in \{(0, 2, 2), (-2, 1, 4), (6, -1, -4)\}$
26. a) 2018
b) 2018^2
c) 2017
27. A
28. $p_1 = 2$
29. E
30. $C_1 = \{x, y, z\} = \{1400, 1960, 7000\}$ ou $C_2 = \{y, z, w\} = \{1960, 7000, 9800\}$.
31. D
32. D
33. a) 360 dias.
b) 72 dias.
34. a) 100 colunas usando 200 canudinhos.
b) No máximo, 240 canudinhos para fazer 20 colunas.
35. E
36. C
37. 964
38. D
39. B
40. A
41. C
42. a) N = 655556, não é um múltiplo de 9.
b) $n = 4$
43. A soma dos algarismos de N é 10.
44. E
45. D
46. D
47. E
48. D
49. E
50. B
51. E
52. C
53. E
54. E
55. C
56. C
57. E
58. $n = 285714$
59. C
60. D

BNCC em foco

1. A
2. E
3. C

Capítulo 2 – Sentenças matemáticas e modelagens algébricas

Revisando

1. a) $25x^2 + 30x + 9$
   b) $9a^2 - 6ab^2 + b^4$
   c) $\frac{4x^2}{9} - xy + \frac{9y^2}{16}$
   d) $4x^2 - 12xy - 20x + 9y^2 + 30y + 25$
   e) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
   f) $27x^3 - 135x^2y + 225xy^2 - 125y^3$
   g) $8m^9 - 6m^6 + \frac{3}{2}m^3 - \frac{1}{8}$
   h) $9a^2 - 1$
   i) $\frac{x^4}{9} - \frac{y^6}{4}$
   j) $x^2 - 10x + 21$
   k) $y^2 - 9y - 22$
   l) $\frac{1}{8} + x^3$
   m) $a^9 - \frac{b^6}{8}$
2. a) $-\frac{41}{25}$
   b) $-\frac{198}{125}$
3. D
4. a) $(x - y)(x - 5)$
   b) $(a - m)(ab - c)$
   c) $(2x + 3y)^2$
   d) $\left(1 - \frac{a}{2b}\right)^2$
   e) $(x + 5)(x - 9)$
   f) $(y + 2)(y - 1)$
   g) $(x - 4)\left(x + \frac{1}{3}\right)$
   h) $\left(x - \frac{1}{5}\right)(x + 2)$
   i) $(1 + 5x)(1 - 5x)$
   j) $\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{9}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{z}{9}\right)$
5. $(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
6. A
7. A
8. 4
9. a) $S = \{0, 7\}$
   b) $S = \left\{0, \frac{11}{2}\right\}$
   c) $S = \{-6, 6\}$
   d) $S = \varnothing$
   e) $S = \{-5, 3\}$
   f) $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$
   g) $S = \varnothing$
   h) $S = \{\sqrt{7}, 3\}$
   i) $S = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$
   j) $S = \{-1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
   k) $S = \{-1, 1\}$
   l) $S = \{5\}$
   m) $S = \{8\}$
10. $t = \pm 4$

Exercícios propostos

1. A
2. B
3. B
4. A
5. E
6. a) $(x - y + z) \cdot (x - y - z)$
   b) $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$
7. B
8. A
9. a) $F = x - 1$
   b) $F = 1$
10. A
11. C
12. C
13. $(5, -1), (1, -5), (3, -2)$ e $(2, -3)$
14. C
15. B
16. B
17. A
18. D
19. E
20. A
21. A
22. D
23. D
24. D
25. A
26. D
27. B
28. 20 anos.
29. D
30. A
31. C
32. C
33. a) $k \neq 2$
    b) $k = 6$
34. $m = \frac{1}{3}$
35. $p = 10$
36. E
37. D
38. B
39. A
40. B
41. B
42. C
43. B
44. D
45. A
46. A
47. D
48. C
49. A
50. D
51. B
52. C
53. C
54. a) O resultado está mais próximo de patologia benigna.
    b) 8,8 ng/mL
55. D
56. D
57. A
58. D
59. B
60. C

Exercícios complementares

1. C
2. B
3. E
4. C
5. C
6. B
7. -1
8. $A - B = 7{,}5$
9. $m = \pm 1$
10. $x = -1$ e $y = -6$ ou $x = 5$ e $y = 0$
11. a) Identidade.
    b) Equação.
    c) Equação.
12. D
13. A
14. E
15. B
16. B
17. D
18. a) Cafezinho: 50%;
    Cafezinho com leite: 60%.
    b) R$ 100,00 por litro.

19. B
20. E
21. a) 240 calorias.
b) $\frac{c}{m \cdot v} = 0{,}21$
22. C
23. C
24. D
25. B
26. Demonstração.
27. 11
28. C
29. A
30. C
31. C
32. B
33. A
34. A
35. a) Demonstração.
b) Demonstração.
36. a) 0
b) 6
c) 3
37. $m \in \left]-2, -\sqrt{2}\right[$
38. B
39. $(m, n) \in \{(13, 51), (-13, -51), (37, 99), (-7, -21), (7, 21), (-37, -99)\}$
40. D
41. C
42. B
43. $x = 8$
44. E
45. E
46. B
47. Soma: 04 + 08 = 12
48. B
49. C
50. $a = \frac{5}{3}$ e $b = \frac{26}{9}$
51. $x = a + b + c$
52. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
53. Demonstração.
54. D
55. E
56. E
57. a) 2
b) $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4$
c) $\frac{1}{505}$
58. a) $x = 3 - 2\sqrt{2}$ é unidade de J.
b) $x = 5 + 3\sqrt{2}$ não é unidade de J.
c) -7 e 7.
59. a) $k = 1$, $k = 9$ ou $k = 10$.
b) $S = \left\{-\frac{5}{12}\right\}$, $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ou $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.
60. Demonstração.

BNCC em foco

1. C
2. D
3. D

Capítulo 3 – Razões e proporções

Revisando

1. E
2. E
3. B
4. E
5. a) R$ 1500,00
b) Aproximadamente 16,7%.
c) Aproximadamente 14,3%.
6. a) 350 g
b) 100 g
c) 10%
d) 65%
e) 30%
f) 5%
7. a) Antes: 80%; depois: 75%.
b) 300 litros.
c) 240 litros.
8. a) 56%
b) 35,9%
9. a) Estados Unidos.
b) Peru.
c) 51,5 milhões de pessoas.
d) Estados Unidos.
e) Estados Unidos.
f) 5,5 milhões de pessoas.
10. a) 60%
b) 62,5%
c) 75%
d) 72%
e) 45%

Exercícios propostos

1. B
2. A
3. A
4. B
5. A
6. D
7. B
8. C
9. B
10. C
11. B
12. C
13. C
14. D
15. E
16. B
17. D
18. D
19. E
20. A
21. A
22. D
23. B
24. C
25. B
26. D
27. E
28. C
29. A
30. E
31. B
32. A
33. D
34. B
35. A
36. C
37. D
38. D
39. C
40. C

Exercícios complementares

1. a) 5 km
b) R$ 0,60
c) R$ 1,60
2. D
3. E
4. D
5. B
6. E
7. A
8. C
9. B
10. E
11. B
12. B
13. C
14. a) Índice 1 ≅ 129%
b) Índice 2 ≅ 39% e Índice 3 ≅ 21%.
c) Índice 2 ≅ 15%
15. D
16. a) 110 para 3.
b) $4{,}5 \cdot 10^{12}$/L
c) 5,5%
17. a) 36 mL
b) $x = 5$
18. E

19. E
20. B
21. D
22. D
23. B
24. A
25. B
26. D
27. B
28. C
29. E
30. E
31. A
32. E
33. a) 55
    b) 92%
34. D
35. C
36. a) Escola A
    b) R$ 3 564,00
37. a) 75%
    b) Exame 2
38. B
39. E
40. Banco B: R$ 2 000,00; Banco C: R$ 3 000,00; $\alpha = 87°$; $\beta = 162°$ e $\gamma = 111°$.

BNCC em foco

1. D
2. A
3. C

Frente 3

Capítulo 1 – Ferramentas básicas da Geometria

Revisando

1. $10\sqrt{2}$ cm
2. Perímetro: 24 cm
3. C
4. $h = 24$ cm
5. B
6. C
7. C
8. C
9. C
10. $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{3\sqrt{91}}{91}$
11. C
12. C

Exercícios propostos

1. D
2. D
3. C
4. D
5. D
6. D
7. D
8. C
9. C
10. AB = 21 m e EF = 23 m.
11. $AE = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$
12. C
13. A
14. C
15. 1
16. C
17. C
18. A
19. C
20. C

Exercícios complementares

1. B
2. B
3. $\dfrac{125}{12}$ polegadas.
4. B
5.
    a) $x = \sqrt{5}$ cm
    b) Demonstração.
6. D
7. a) $h = \dfrac{5+3\sqrt{3}}{4}$ m
    b) $h = 2{,}7$ m
8. B
9. B
10. a) $FV = \dfrac{15}{4}$ cm.
    b) $\cos\theta = \dfrac{24}{25}$.
11. a) $a = 1$ cm, $b = 4$ cm e $c = 5$ cm
    b) $c = 10$
12. $\alpha = \text{arctg}\left(\dfrac{h}{a+b+2d}\right)$
13. B
14. D
15. C
16. a) $2(6 + \pi)$ m
    b) 4,2 m
17. A
18. $\sqrt{2}$ e 2 ou $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ e $4 + 2\sqrt{3}$
19. B
20. A área é dada por: $A(x) = x\sqrt{400 - x^2}$ e seu domínio é o intervalo]0, 20[.
21. D
22. C

BNCC em foco

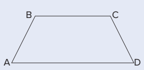
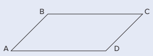
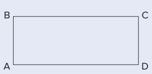
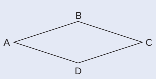
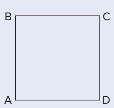
1. E
2. C
3. D

Capítulo 2 – Princípios de Geometria Plana

Revisando

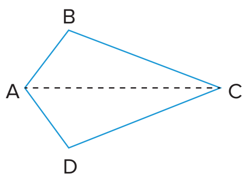
1. **Reto:** 2 eixos de simetria e invariante por rotações de 180° em torno de seu centro.
T: 1 eixo de simetria.
L: assimétrico.
Reverso: 0 eixo de simetria, mas invariante por rotações de 180° em torno de seu centro.
Quadrado: 4 eixos de simetria e invariante por rotações de 90° em torno de seu centro.

2.

	Figura	Ângulos internos	Diagonais
I		$\hat{A} = \hat{D}$ $\hat{B} = \hat{C}$ $\hat{A} + \hat{B} =$ $= \hat{C} + \hat{D} =$ $= 180°$	AC = BD
II		$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$ $\hat{A} + \hat{B} =$ $= \hat{C} + \hat{D} =$ $= 180°$	$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio.
III		$\hat{A} = \hat{B} =$ $= \hat{C} = \hat{D}$ $= 90°$	AC = BD $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio.
IV		$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$ $\hat{A} + \hat{B} =$ $= \hat{C} + \hat{D} =$ $= 180°$	$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio. $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares. $\overline{AC}$ é a bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{C}$. $\overline{BD}$ é a bissetriz de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.
V		$\hat{A} = \hat{B} =$ $= \hat{C} = \hat{D}$ $= 90°$	AC = BD $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se dividem ao meio. $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares. $\overline{AC}$ é a bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{C}$. $\overline{BD}$ é a bissetriz de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

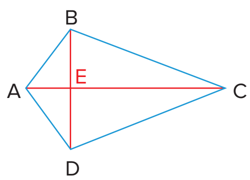
3. a) Complemento: 30°
Suplemento: 120°
b) Complemento: 52°
Suplemento: 142°
c) Complemento: 67°30'
Suplemento: 157°30'
d) Complemento: 81°14'48''
Suplemento: 171°14'48''

4. a)



Traçando a diagonal $\overline{AC}$, temos que os triângulos ABC e ADC são congruentes pelo caso LLL.
Portanto, os ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ têm a mesma medida.

b)



- $\overline{AC}$ divide $\overline{BD}$ ao meio: EB = ED.
- $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares.
- $\overline{AC}$ é bissetriz dos ângulos internos de vértices A e C do quadrilátero.

c) Há três pares de triângulos congruentes na figura: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, $\triangle ABE \cong \triangle ADE$ e $\triangle BCE \cong \triangle DCE$.

5. a) 160°
b) 18
c) 135
d) 126

6. B

7. a) 8 triângulos.
b) ABC, ACD e ABD.
c) $\alpha + \beta = 35°$

8. B

9. a) Certo.
b) Certo.
c) Errado.

10. a) $S_e = 360°$
b) 40°
c) $S_i = 1260°$
d) 140°
e) 120°
f) 20°
g) 100°
h) $d = 27$
i) 80°
j) 60°

Exercícios propostos

1. D
2. D
3. E
4. E
5. E
6. B
7. B
8. A
9. B
10. C
11. B
12. D
13. A
14. C
15. B
16. B
17. E
18. B
19. E
20. C
21. C
22. D
23. D
24. C
25. B
26. D
27. D
28. A
29. E
30. B
31. C
32. B
33. E
34. C
35. C
36. D
37. C
38. B
39. B
40. B
41. E

Exercícios complementares

1. 179°54'52''
2. 67°30'
3. 16
4. C
5. E
6. 192°
7. a) Errado.
b) Certo.
c) Errado.
d) Certo.
e) Certo.
8. B
9. 180°
10. 72° e 108°.
11. a) 25°
b) 50°
c) 25°
12. C
13. $\beta - \alpha = 80°$
14. C
15. D
16. a) Aproximadamente 10 m.
b) Aproximadamente 11 m.
c) Aproximadamente 764 m.
17. C
18. a) 33 m
b) 61 estacas.
19. E
20. Aproximadamente 73°22'48''.
21. 614 m

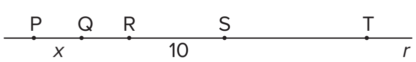
22. C
23. E
24. C
25. D
26. E
27. 60°
28. 45° e 35°.
29. a) 60°
b) 30°
c) $\alpha = 180° - 3\theta$
30. B
31. a) Octógono côncavo.
b) 225°
c) 1080°
d) Aproximadamente 193 cm.
32. C
33. E
34. B
35. 108°, 38°, 70° e 144°.
36. 140°, 100°, 60° e 20°.
37. E
38. a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = 0$.
b) $D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 3\}$
c) Para $y = 28$, $n = 8$.
Não existe valor de n para o qual y seja igual a 32.
39. a) 70
b) Aproximadamente 128° e 38°30'.
40. F; V; F; V; F; F; V; F; V; F

BNCC em foco

1. D
2. B
3. E

Capítulo 3 – Teoria das proporções geométricas

Revisando

1.


PT = 35 cm
2. a) 4 pontos: P, Q, R e S.
b) 6 segmentos de reta: $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{QR}$, $\overline{QS}$ e $\overline{RS}$.
c) QR = 18 (menor).
d) PS = 98 (maior).
3. C
4. A
5. a) Lado: 12 m
b) FG = 21 m
c) $k^2 = 49\%$
6. B
7. a) PQ = 130 cm
b) PQ = 120 cm
8. a) AB = 10 cm
b) AP = 8 cm
9. Opção 1: aprox. 34,3 m.
Opção 2: aprox. 32,4 m.
10. a) $\frac{AP}{BP} = \frac{5}{12}$
b) $\frac{AP}{BP} = \frac{25}{144}$
11. C

Exercícios propostos

1. A
2. B
3. A
4. C
5. B
6. B
7. D
8. D
9. B
10. C
11. D
12. E
13. D
14. A
15. D
16. A
17. C
18. A
19. C
20. C
21. C
22. D
23. D
24. C
25. E
26. C
27. D
28. C
29. B
30. D
31. $x = 7$
32. B
33. C
34. C
35. C
36. C
37. C
38. C
39. C
40. B
41. E

Exercícios complementares

1. E
2. E
3. Demonstração.
4. A
5. E
6. A
7. Atingirá a 9 m da rede.
8. D
9. B
10. $x = 22$ mm
11. Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29
12. Lados: 54 cm.
13. a) 1 m
b) $\alpha = 30°$
14. a) AB = 40 cm
b) AC ≅ 67 cm
15. B
16. A
17. C
18. B
19. A
20. a) $k = 4$
b) $k^3 = 64$
c) Faltam 315 mL.
21. CD = 5 cm
22. a) CD = 10 cm
b) BE = 16 cm
23. C
24. A
25. C
26. A
27. a) $AB = \frac{50}{3}$ cm
b) AW = AX = 15 cm
c) $[ABCD] = \frac{475}{3}$ cm^2
28. C
29. Soma: 01 + 02 + 04 + 16 = 23
30. B
31. C
32. A
33. D
34. $r = 1,2$ m
35. E
36. a) $AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}r$
b) $CO = r\sqrt{3}$
37. E
38. C
39. a) $x = 19,2$ m
b) Demonstração.
40. $d = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ell$

BNCC em foco

1. E
2. D
3. C

Capítulo 4 – Teorema dos senos e teorema dos cossenos

Revisando

1. D
2. B
3. Situação 1: AB = 20 m.
Situação 2: AB = 700 m.
4. AB = 7 km
5. B
6. a) AB = 5 cm
b) $\text{sen}(\hat{B}) = \frac{3}{5}$
c) $AP = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm

7. a) BC = 3 cm
   b) $r = 3$ cm
8. a) $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$
   b) $\alpha = 60°$
   c) $\text{sen}(\beta) = \frac{3\sqrt{21}}{14}$, $\text{sen}(\gamma) = \frac{\sqrt{21}}{7}$.
9. BD = 7
10. D

Exercícios propostos

1. A
2. B
3. B
4. B
5. A
6. E
7. $2\sqrt{21}$ metros.
8. A
9. D
10. D
11. D
12. A
13. C
14. C
15. C
16. C
17. B
18. $r = \frac{7\sqrt{3}}{3}$
19. D
20. D

Exercícios complementares

1. a) $\alpha = 45°$
   b) $x = 4\sqrt{6}$ cm
2. E
3. D
4. A
5. $ED = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)R}{4}$
6. E
7. a) Perímetro: 21,2 cm.
   b) Não, as medidas não formam um triângulo.
8. a) $AB = 5\sqrt{3}$
   b) $BD = 5\sqrt{7}$
9. D
10. D
11. B
12. a) Área = 10 cm^2
    b) Raio = $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ cm
13. Demonstração, NP = 3 km.
14. a) $\text{med}(\widehat{AB}) = \frac{12\,800\pi}{3}$ km
    b) $d = 6\,400\sqrt{2}$ km
15. C
16. D
17. CF = 10
18. D
19. A
20. A

BNCC em foco

1. E
2. D
3. D

Capítulo 5 – Centros dos triângulos e polígonos

Revisando

1. A
2. 40 cm^2
3. a) $\sqrt{21}$ cm
   b) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm
4. D
5. C
6. B
7. C
8. D
9. E
10. C
11. D
12. A

Exercícios propostos

1. a) 14 cm
   b) 7 cm
   c) 22,5 cm
   d) 12 cm
2. D
3. A
4. A
5. D
6. E
7. A
8. B
9. B
10. 31° e 59°
11. V – F – V – F – F – F – F – F
12. B
13. A
14. C
15. E
16. A
17. a) 12 cm
    b) $12(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
18. E
19. B
20. D

Exercícios complementares

1. $2\sqrt{\frac{13}{5}}$
2. a) 33 m
   b) 38 m
3. $3\sqrt{3}$ cm
4. D
5. 26 cm
6. D
7. A
8. B
9. C
10. $\frac{225}{4}$ cm^2
11. D
12. C
13. 45,6 cm
14. A
15. B
16. a) $A = \frac{n+2}{2n} \cdot \pi \cdot \ell^2$
    b) $A = \ell^2(n + \pi)$
17. a) AB = 207 m, BC = 159 m e CD = 500 m.
    b) Alex.
18. A
19. E
20. D

BNCC em foco

1. C
2. B
3. B