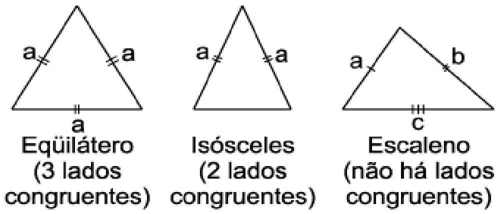
INDICE MATEMÁTICA 2 - GEOMETRIA

AULA 01 - TRIÂNGULOS

Dados os pontos A, B e C não alinhados, chama-se triângulo A, B, C (indicado por: ABC) à reunião dos segmentos AB, AC e BC. Os triângulos podem ser classificados quanto a lados e ângulos como veremos a seguir.

CLASSIFICAÇÃO QUANTO A LADO



CLASSIFICAÇÃO QUANTO A ÂNGULO

$a^2 < b^2 + c^2$ triângulo acutângulo
$a^2 = b^2 + c^2$ triângulo retângulo
$a^2 > b^2 + c^2$ triângulo obtusângulo

OBS:
Será que com 3 palitos quaisquer de dimensões diferente podemos formar uma triângulo? A resposta é não! Tente imaginar a seguinte situação; 1cm, 3cm e 7cm. Jamais será possível formar um triangulo com palitos nessas dimensões. E justamente essa situação vem a condição de existência de um triângulo.

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

Um triângulo só é formado se $|b-c| < a < b+c$, para a, b e c lados do triângulo.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área de um triângulo pode ser encontrada pelo produto entre a sua base e a altura do triangulo que neste caso será a distancia do vértice até a base oposto a ele.

Porém temos outras situações. Veja as formulas a seguir.

$$i.A = \frac{1}{2}.altura.base \qquad ii.A = \frac{1}{2}.a.b.sen\theta$$

$$iii.A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$iv.A = p.r$$

$$v.A = \frac{abc}{4R}$$

$$vi.A = \frac{(lado)^2\sqrt{3}}{4}$$

Onde em *ii* temos θ ângulo formado entre os lados a e b, em *iii* temos *p* como semi perímetro, em *iv* temos r raio do círculo inscrito ao triângulo, em *v* temos R como raio do círculo circunscrito ao triângulo e em *vi* triângulo equilátero.

CEVIANAS

- Bissetriz – Parte do vértice e divide o ângulo ao meio.
- Mediana – Parte do vértice e divide o lado oposto ao meio.
- Altura – Parte do vértice e forma um ângulo reto com lado ou projeção dele.
- Mediatriz – Parte do ponto médio de um dos lados e passa pelo vértice oposto a esse lado.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

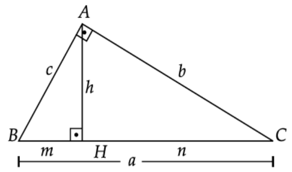
Dois triângulos são semelhantes se e somente se os ângulos internos forem congruentes e os lados proporcionais. Assim temos:

$$Se: \begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \text{ então } \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

k é a constante de proporção ou constante de semelhança. As medidas dos perímetros de dois triângulos semelhantes são proporcionais às medidas de dois lados homólogos quaisquer.

RELAÇÕES MÉTRICAS TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seus elementos são:
a: hipotenusa
b e **c**: catetos
h: altura relativa à hipotenusa
n e **m**: projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.



Através da semelhança de triângulos podemos estabelecer as seguintes relações:

- $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras)
- $a.h = b.c$
- $b^2 = a.n$
- $c^2 = a.m$
- $h^2 = m.n$

AULA 02 - QUADRILÁTEROS

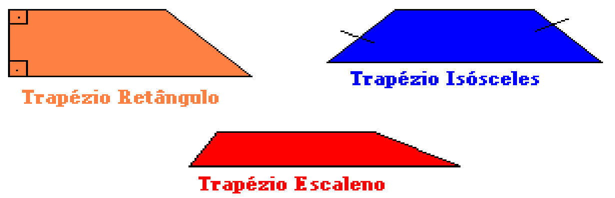
Um **quadrilátero** é um polígono de quatro lados, cuja soma dos ângulos internos é 360°, e a soma dos ângulos externos, assim como qualquer outro polígono, é 360°. Seus elementos são vértices (quatro), lados (quatro) e diagonais (duas).

TRAPÉZIO

Um quadrilátero é considerado um trapézio se pelo menos dois dos seus lados forem paralelos. No caso de serem exatamente dois os seus lados paralelos, trata-se de um Trapézio propriamente dito.

Tipos de trapézios

- **Trapézio Isósceles**: Os lados opostos não paralelos são congruentes (de mesmo comprimento), os lados opostos paralelos não são congruentes e apresenta um eixo de simetria;
- **Trapézio Retângulo**: Contem dois ângulos de 90°,e não tem um eixo de simetria;
- **Trapézio Escaleno**: Todos os lados são diferentes.



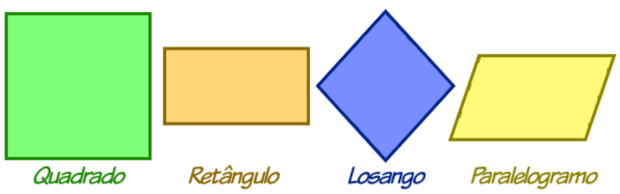
PARALELOGRAMO

Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos. Se todos os lados opostos forem iguais e paralelos, trata-se de um Paralelogramo. Um paralelogramo apresenta as seguintes características:

- A soma de dois ângulos consecutivos é de 180°;
- As diagonais cortam-se no ponto médio;
- Os lados opostos são congruentes;
- Os ângulos opostos são congruentes.

Tipos de paralelogramos

- Paralelogramo obliquângulo: Os lados opostos são iguais entre si;
- Retângulo: Possui quatro ângulos de 90°, e os lados opostos são iguais entre si; As diagonais são congruentes.
- Losango: Todos os lados são iguais entre si; As diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos.
- Quadrado: Possui quatro ângulos de 90°, e todos os lados são iguais entre si. Por ser um losango e um quadrado simultaneamente, as diagonais são congruentes e perpendiculares cujo comprimento é $lado\sqrt{2}$.



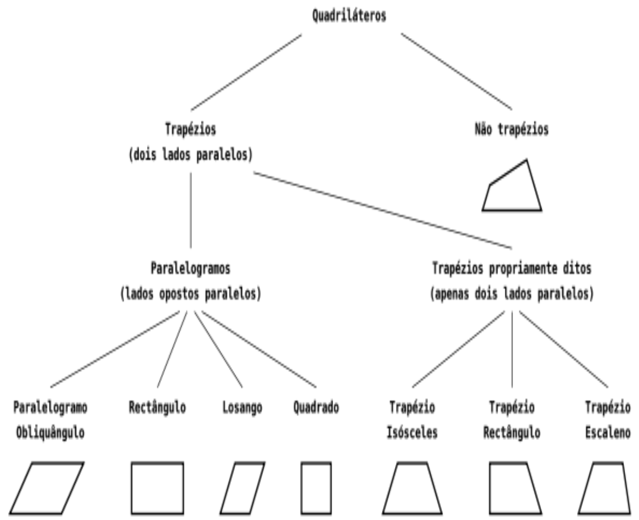
ÁREAS

$\boxed{Trapézio: \frac{(B+b).h}{2}}$ $\boxed{Losango: \frac{D.d}{2}}$

$\boxed{Parelogramo: base.altura}$ $\boxed{Quadrado: (lado)^2}$

$\boxed{Retângulo: base.altura}$

RESUMO GRÁFICO



OBS

Devemos atentar para:

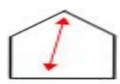
- Todo quadrado é retângulo mas nem todo retângulo é quadrado
- Todo quadrado é losango mas nem todo losango é quadrado.

AULA 03 - POLÍGONOS

Polígonos são figuras fechadas formadas por segmentos de reta, sendo caracterizados pelos seguintes elementos: ângulos, vértices, diagonais e lados. Um polígono é regular quando tem lados e ângulos congruentes. Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

TIPOS DE POLÍGONOS

Se os ângulos do polígono forem menores que 180º ele será classificado de convexo.



Caso tenha um ângulo com medida maior que 180º ele será classificado como não convexo ou côncavo.

CLASSIFICAÇÃO DOS POLÍGONOS

Aqui relacionamos lados e nomenclatura

3: Triângulo	8: Octógono	12: Dodecágono
4: Quadrilátero	9: Eneágono	15. Pentadecágono.

5: Pentágono	10: Decágono	20. Icoságono
6: Hexágono	11:Hendecágono	
7: Heptágono	ou Undecágono	

DIAGONAIS

Diagonal de um polígono é o segmento que liga um vértice a outro (não consecutivo). A diagonal só vai passar pelo centro de um polígono se este tiver um número “n” de lados par. O total de diagonais “d” de um polígono com “n” lados é:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} \qquad d_{CENTRO} = \frac{n}{2}, n \to par$$

OBS
Nem todas as diagonais passam pelo centro. Alias só teremos diagonais passando pelo centro se o polígono tiver um numero n par de lados e as diagonais que passam pelo centro equivalem a metade do número de lados do polígono.

SOMA DOS ÂNGULOS

- A soma dos ângulos internos é: $Si = (n-2)180^o$
- A soma dos ângulos externos é: $Se = 360^o$
- Âng. <u>*Suplementares:*</u> $Ai + Ae = 180^o$ $Ae = 360^o / n$

APÓTEMA

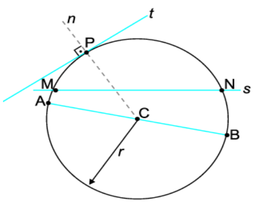
Chamamos de apótema a distância do centro do polígono ao ponto médio de um dos lados.

AULA 04 - CÍRCULO

Na Matemática e na Geometria, um **círculo** ou **disco** o conjunto dos pontos internos de uma circunferência. Por vezes, também se chama círculo ao conjunto de pontos cuja distância ao centro é menor ou igual a um dado valor (ao qual chamamos raio).

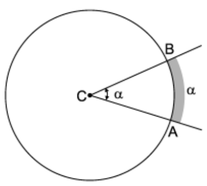
ELEMENTOS

Raio: segmento CB.
Corda: segmento MN.
Diâmetro: segmento AB.



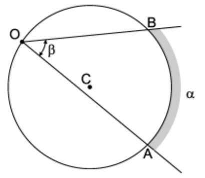
ÂNGULOS DA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo Central: ângulo que tem vértice no centro da circunferência.



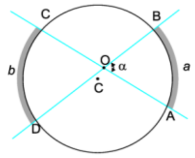
Ângulo Inscrito: ângulo que tem vértice na circunferência.

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$



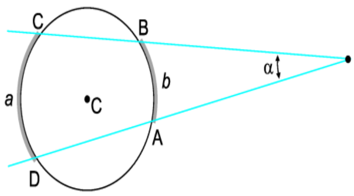
Ângulo excêntrico (fora do centro) interior

$$\alpha = \frac{a+b}{2}$$



Ângulo excêntrico (fora do centro) exterior

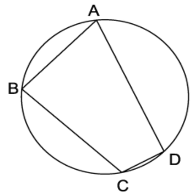
$$\alpha = \frac{a-b}{2}$$



Quadrilátero Inscrito na circunferência

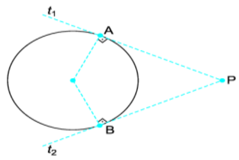
$$\hat{A} + \hat{C} = 180°$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180°$$



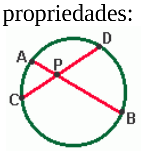
SEGMENTO TANGENTE

$$PA = PB$$

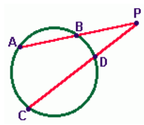


POTÊNCIA DE UM PONTO

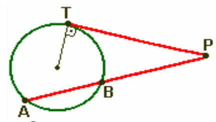
Na ordem que aparecem as figuras abaixo temos as seguintes propriedades:



AP.PB = CP.PD



PA.PB = PC.PD

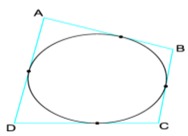


PT^2 = PA.PB

TEOREMA DE PITOT

Em todo quadrilátero convexo circunscrito a uma circunferência a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois:

$$AB + DC = AD + BC$$



ÁREA E COMPRIMENTO

A área de um círculo é o que o difere de uma circunferência. A circunferência não tem área, só perímetro. Já o círculo possui área e perímetro (comprimento).

$$\boxed{Área = \pi.(raio)^2} \text{ e } \boxed{C = 2.\pi.raio}$$

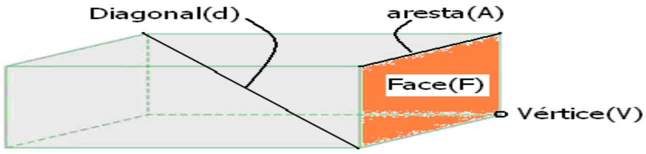
AULA 05 - POLIEDROS

As figuras geométricas espaciais também recebem o nome de sólidos geométricos, que são divididos em: poliedros e corpos redondos. Vamos abordar as definições e propriedades dos poliedros.

Poliedros são figuras geométricas formadas por três elementos básicos: vértices, arestas e faces. Um poliedro é considerado regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes.

ELEMENTOS

- Faces são os polígonos que limitam o poliedro.
- Arestas são os segmentos de reta que limitam suas faces.
- Vértices são os pontos de interseção de três ou mais arestas.
- Diagonal: Distancia entre os vértices que estão em faces distintas.



FÓRMULA DE EULER

A fórmula de Euler está atribuída à relação de dependência entre os elementos de um poliedro. A expressão matemática desenvolvida por Leonhard Euler, matemático suíço, é a seguinte: V + F = A + 2. Onde:

V = vértice   A = arestas   F = Faces

Essa expressão determina o número de faces, arestas e vértices de qualquer poliedro.

SOMA DOS ÂNGULOS DE UM POLIEDRO

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro com *v* vértices é dada por:

$$\boxed{Si = (v-2)360^o}$$

POLIEDROS DE PLATÃO

Chamamos de poliedros de Platão, quando todas as faces têm o mesmo número de lados, quando em todos os vértices coincidem o número de arestas e quando segue a relação de Euler (V+ F = A + 2). Poliedros de Platão:

- **T**etraedro
- **H**exaedro
- **O**ctaedro
- **D**odecaedro
- **I**cosaedro

NOMECLATURA

Os poliedros recebem nomes de acordo com o número de faces.

- 4 faces → tetraedro
- 5 faces → pentaedro
- 6 faces → hexaedro
- 7 faces → heptaedro
- 8 faces → octaedro
- 10 faces → decaedro
- 12 faces → dodecaedro
- 20 faces → icosaedro

OBS
Atentar quando for trabalhar questões onde os números de arestas são informados aleatoriamente. Lembre que a aresta surge do encontro entre duas faces então num caso errôneo tendemos a contar as arestas em dobro.

Ex: Um poliedro convexo de 15 arestas tem somente faces quadrangulares e pentagonais. Quantas faces têm de cada tipo se a soma dos ângulos das faces é 32 ângulos retos?

Solução. Encontramos o número de vértices pela fórmula da soma dos ângulos das faces: S = (V – 2).360º

$$\begin{cases} S = (V-2).360^o \\ S = 32(90^o) = 2880^o \end{cases} \Rightarrow V - 2 = \frac{2880^o}{360^o} \Rightarrow V = 2 + 8 = 10$$

Utilizando a relação de Euler A + 2 = F + V e, substituindo pelos valores, calculamos o número de vértices.

$$\begin{cases} A = 15 \\ V = 10 \end{cases} \Rightarrow F = 15 + 2 - 10 = 7$$

Considerando “x” o número de faces quadrangulares e “y” o de faces pentagonais forma-se um sistema onde uma das equações envolve o número de arestas em função do número de faces.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{4x}{2} + \frac{5y}{2} = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \to \times(-4) \\ 4x + 5y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + -4y = -28 \\ 4x + 5y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 7 - 2 = 5 \end{cases}$$

Logo possui 5 faces quadrangulares e 2 pentagonais.

Ex: Determine o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por 5 ângulos triedros, sete ângulos tetraédricos, nove ângulos pentaédricos e oito ângulos hexaédricos.

Solução. Um ângulo triédrico contém um vértice onde concorrem 3 arestas. Da mesma forma o tetraédrico contém um vértice onde concorrem 4 arestas, o mesmo ocorrendo com os pentaédricos (5 arestas) e hexaédricos (6 arestas). De acordo com a expressão para o total de arestas em função do número de arestas que concorrem a um vértice, temos:

$$\begin{cases} V = 5 + 7 + 9 + 8 = 29 \\ A = \frac{nV}{2} = \frac{5(3) + 7(4) + 9(5) + 8(6)}{2} = \frac{136}{2} = 68. \end{cases} \Rightarrow F = A + 2 - V \Rightarrow F = 68 + 2 - 29 = 41$$

Logo há 29 vértices, 68 arestas e 41 faces.

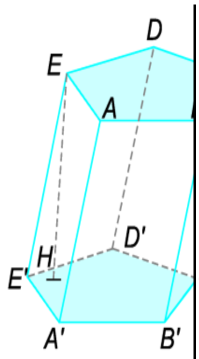
AULA 06 - PRISMAS

Um **prisma** é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas. As laterais de um prisma são paralelogramos. A nomenclatura dos prismas é dada de acordo com a forma das bases. Assim, se temos hexágonos nas bases, teremos um prisma hexagonal.

O prisma pode ser classificado em reto quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases, e oblíquo quando não são.

ELEMENTOS

Bases: são os polígonos A´B´C´D´E´ e ABCDE
Faces laterais: São os paralelogramos ABA´B´; BCB´C; CDC´D´; ……
Arestas Laterais: são os segmentos AA´; BB´; CC´; DD´ e EE´
Altura: A distância EH é denominada altura do Prisma.
Arestas das bases: são os segmentos A´B´; B´C´; C´D´ ; D´E´ e E´A´



NOMENCLATURA

O nome do prisma se dá através da figura da base.

- Prisma Triangular: A base é um triangulo.
- Prima Quadrangular: A bases é um quadrado.
- Prisma Hexagonal: A base é um hexágono.

ÁREAS E VOLUME

- A_{LAT} = Soma das áreas das faces exceto a base e sua face oposta.
- A_{BASE} = Área da superfície em contato com o solo desde que esta tenha uma face oposta idêntica.
- $A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2.\ A_{BASE}$
- Volume = A_{BASE}.altura

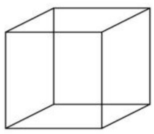
CUBO

O apresenta certa particularidade em suas propriedades por ter todas arestas iguais. Desta forma considerando aresta a podemso afirma que para o cubo vale:

$$A_{TOTAL} = 6a^2$$

$$Volume = a^3$$

$$Diagonal = a\sqrt{3}$$



AULA 07 - PIRÂMIDES

Pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal ABCDEF e as faces são regiões triangulares.

Uma pirâmide se diz regular quando for reta (projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base) e a figura da base for regular.

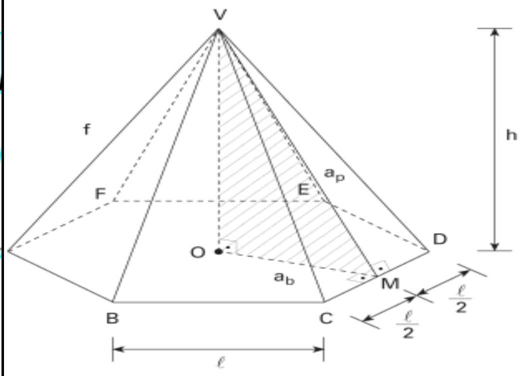
NOMENCLATURA

Dá-se o nome da pirâmide através do polígono da base.
Observe alguns exemplos.

- Pirâmide Triangular a base é um triângulo
- Pirâmide quadrangular a base é um quadrado
- Pirâmide Pentagonal a base é um pentágono

ELEMENTOS

- aresta da base - ℓ
- aresta lateral -aℓ
- altura – h
- apótema da base – ab
- apótema da pirâmide – ap
- Raio da circunferência circunscrita – R



RELAÇÕES AUXILIARES NA PIRÂMIDE

- $a_p{}^2 = h^2 + a_b{}^2$
- $al^2 = a_p{}^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2$
- $al^2 = h^2 + R^2$

ÁREAS E VOLUME

A_{LAT} = Soma das áreas das faces laterais
A_{BASE} = Área do polígono oposto ao vértice.
Volume = (1/3).A_{BASE}.Altura

TETRAEDRO

O tetraedro é uma pirâmide com 4 faces todas idênticas. Ou seja, as faces são triângulos eqüiláteros. Para o tetraedro teremos:

$$A_{TOTAL} = (lado)^2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{(lado)\sqrt{6}}{3}$$

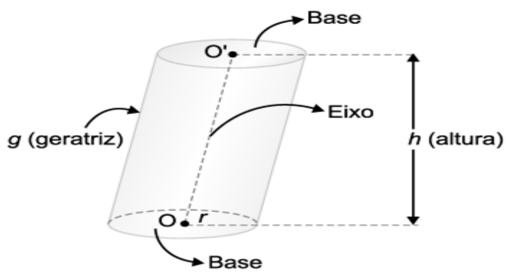
$$Volume = \frac{(lado)^3\sqrt{2}}{12}$$

AULA 08 - CILINDROS

O cilindro segue os mesmos conceitos do prisma. Podemos até considerar o cilindro um prisma especial. Especial porque ele tem mesma formula para as áreas e volume, com a diferença do cilindro ter sempre na base um círculo.

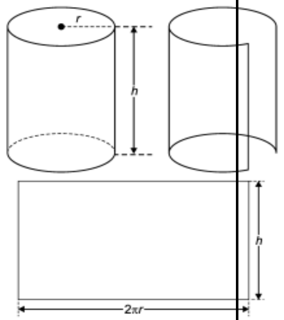
ELEMENTOS

Se as geratrizes forem perpendiculares ao plano da base dizemos que o cilindro é reto, caso contrário, é dito cilindro oblíquo. No caso do cilindro reto, temos que g = h



FÓRMULAS

$$A_{LAT} = 2.\pi.R.h$$
$$A_{BASE} = \pi.(raio)^2$$
$$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE}$$
$$Volume = A_{BASE}.h$$



$A_{LAT} = \pi.r.g$

$A_{BASE} = \pi.r^2$

AT $+ A_{BASE}$

$A_{BASE}.(altura)$

IDIANA

io de um cone reto com um plano de corte que eixo é um **triângulo isósceles** chamado **secção** cone. No cone dito eqüilátero a secção será um triângulo equilátero. Daí teremos g = 2r

SECÇÃO MERIDIANA

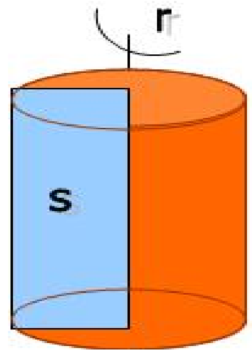
A secção feita no cilindro reto por um plano que contém o seu eixo denomina-se secção meridiana do cilindro. A secção meridiana é um retângulo de área: **2r.h**. Quando a secção é um quadrado temos um *cilindro eqüilátero*.
(g = h = 2r)

CILINDRO DE REVOLUÇÃO

Cilindro de revolução é o sólido obtido quando giramos em torno de uma reta uma região retangular. Também é chamado de cilindro circular.

Devemos atentar para as dimensões do cilindro formado. Este terá como altura e raio as mesmas dimensões do retângulo que está sendo rotacionado.

O volume do cilindro quando eqüilátero é calculado por:



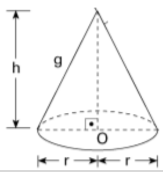
$$V_{CIL.EQUILA} = 2\pi(raio)^3$$

AULA 09 - CONES

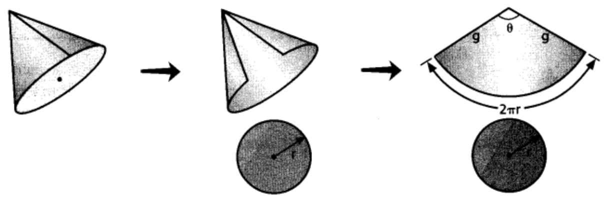
O cone tem um estudo muito parecido com a pirâmide, tanto que a fórmula de seu volume é a mesma. O que vem a diferir a pirâmide do cone é que na pirâmide podemos ter qualquer polígono como base, já no cone temos apenas o círculo.

ELEMENTOS

- g – geratriz
- h – altura
- r – raio
- $g^2 = r^2 + h^2$



FÓRMULAS

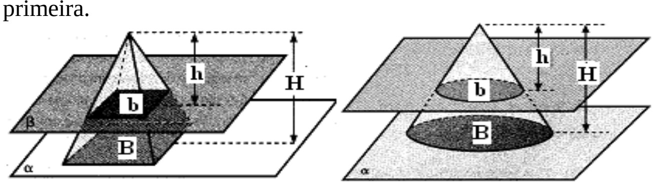


AULA 10 - TRONCOS

Antes mesmo de iniciarmos o estudo de troncos de sólidos vamos ver um pouco de sólidos semelhantes. As relações abaixo tanto vale para pirâmide como para cone. Veja:

SÓLIDOS SEMELHANTES

Ao seccionar uma pirâmide por um plano paralelo ao plano da sua base determina-se outra pirâmide, menor e semelhante à primeira.



Sejam h e H, respectivamente, a área da base e a altura do cone; b e B, respectivamente, a área da secção e a distância do corte ao vértice do cone e ainda v e V, respectivamente, volume do solido menor e volume do solido maior. Desta forma, temos:

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{b}{B} \quad e \quad \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{v}{V}$$

TRONCOS

Com as relações adquiridas no tópico anterior podemos chegar a conclusão fácil de que

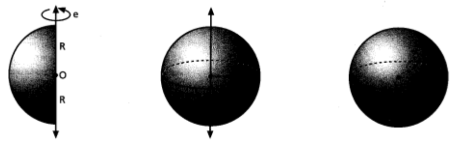
$$V_{TRONCO} = V_{MAIOR} - V_{MENOR}$$

E assim expressão essa equação trabalhada como:

$$V_{TRONCO} = \frac{h}{3}(A_1 + \sqrt{A_1A_2} + A_2) \qquad A_1 \rightarrow A_{MAIOR} \quad A_2 \rightarrow A_{MENOR}$$

AULA 11 - ESFERA

A esfera é um corpo sólido e maciço. Chama-se esfera ao conjunto de pontos do espaço gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.



Note que o centro e o raio do semicírculo são, também, o centro e o raio da esfera.

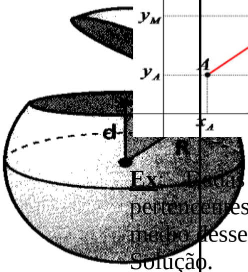
ÁREA E VOLUME

$$Área = 4.\pi.R^2 \qquad Volume = \frac{4\pi R^3}{3}$$

SECÇÃO NA ESFERA

A secção plana de uma esfera de raio R é um círculo de raio r (r < R). A secção cujo centro coincide com o centro da esfera chama-se **círculo máximo** ou **secção máxima**. Sendo d a distância da secção ao centro da esfera, segundo Pitágoras, temos:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

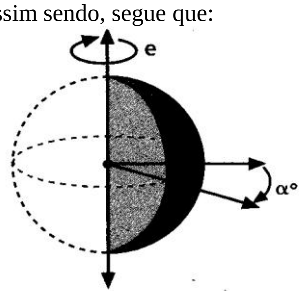


PARTES DA ESFERA

Consideremos um semicírculo de raio R e um eixo de rotação que contém o seu diâmetro. Se esse eixo efetuar um giro de α^0, a reunião dos pontos atingidos pelo semicírculo constitui uma **cunha esférica** de raio R e ângulo central α^0. À parte da superfície esférica determinada por uma cunha dá-se o nome de **fuso esférico**.

Note que a **cunha esférica** é uma **parte do volume** da esfera; por outro lado, o **fuso esférico** é uma **parte da superfície esférica**.

Nesse sentido, tanto o volume da cunha como a área do fuso esférico são proporcionais ao ângulo central correspondente. Assim sendo, segue que:



- $A_{FUSO} = \frac{\alpha}{360} 4\pi R^2$
- $V_{CUNHA} = \frac{\alpha}{360} \frac{4}{3}\pi R^3$

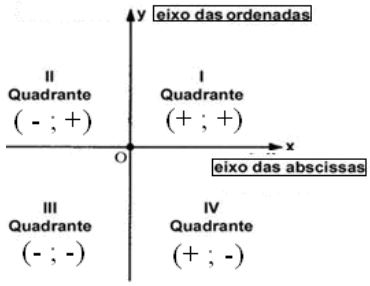
AULA 12 – ESTUDO DO PONTO

O curso de Geometria Analítica é dividido em 4 aulas: estudo do ponto, estudo da reta, estudo da circunferência e estudo das cônicas. Para nosso propósito os tudo das cônicas será abolido, portanto vamos ao que interessa.

PLANO CARTESIANO

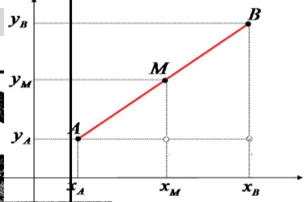
Instrumento de trabalho de Renê Descartes, o plano cartesiano é também conhecido como R^2. São dois eixos ortogonais (perpendiculares) representado por xOy. O Eixo Ox é o eixo das abscissas e o eixo Ou eixo das ordenadas.

Existe ainda uma distribuição de quadrantes no plano cartesiano. Observe a ilustração ao lado.



PONTO MÉDIO

O ponto médio é a média aritmética das coordenadas de dois pontos. Pode ser expresso por:



$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Ex.: Dadas as coordenadas dos pontos A(4,6) e B(8,10) pertencentes ao segmento AB, determine as coordenadas do ponto médio desse segmento.

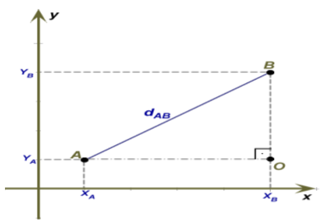
Solução.

$x_M = (x_A + x_B) / 2 \rightarrow x_M = (4 + 8) / 2 \rightarrow \underline{x_M = 6}$

$y_M = (yA + yB) / 2 \rightarrow y_M = (6 + 10) / 2 \rightarrow \underline{y_M = 8}$

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Note que o segmento AB é a hipotenusa do triângulo AOB, e a medida de AB corresponde à distância entre esses dois pontos. Por se tratar de um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras, no qual teremos:



$$d^2{}_{AB} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

com

$$\Delta x = x_A - x_B$$

$$\Delta y = y_A - y_B$$

PONTOS COLINEARES

Chamamos de pontos colineares a condição de alinhamento entre os pontos. Se eles são colineares é por que pertencem a uma mesma reta. Para que 3 pontos sejam colineares deve ser feita a seguinte condição.

Sejam A (x_A; y_A), B (x_B; y_B) e C (x_C; y_C) os três pontos, então o seguinte determinante deve ter valor nulo.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Apesar de já termos vistos diversos tipos de área de triângulo, nesse capitulo vamos ver o cálculo da área conhecendo as coordenadas de seus vértices.

Sejam A (x_A; y_A), B (x_B; y_B) e C (x_C; y_C) os vértices, então:

$$Área = \frac{1}{2} . \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

MEDIANA

Já estudada em geometria plana, a mediana é uma das cevianas do triângulo. Ela tem a característica de sair de um vértice atingindo o lado oposto a este vértice em seu ponto médio, ou seja, seu comprimento é a distância entre dois pontos sendo um deles o vértice e o outro ponto o ponto médio dos outros dois vértices.

OBS
O encontro das medianas de um triângulo é um ponto chamado baricentro (G). Ele divide a mediana em uma razão de 2:1, sendo então sua distância ao vértice o dobro da distância
Sejam $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ os vértices, então:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

AULA 13 – ESTUDO DA RETA I

Para construção de uma reta são necessários apenas dois pontos distintos. Nessa aula vamos ver como construir uma reta conhecendo:

- Dois pontos
- Um ponto e o coeficiente angular.

EQUAÇÂO DA RETA CONHECIDOS 2 PONTOS

Obtemos a equação da reta através do calculo de um determine da matriz 3x3 que aparece logo abaixo. Atente para condição forçada de alinhamento entre os pontos $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e um ponto genérico (x, y).

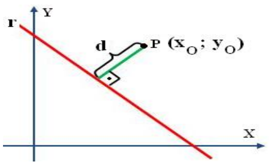
$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Ax + By + C = 0$$

O resultado $Ax + By + C = 0$ é o que chamamos de *Equação Geral da Reta*.

DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

Vamos ver agora como calcular a distância de um ponto conhecendo suas coordenadas P (x_P, y_P) até uma reta onde sua equação geral seja conhecida.

$$dp,r = \frac{|A.x_P + B.y_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

Coeficiente Angular (CA): Tangente do ângulo formada entre o a reta e o eixo x no sentido anti-horário.

$$CA = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

OBS
Se o ângulo formado entre a reta e o eixo x for obtuso, devemos considerar seu suplemento e colocar o sinal de negativo ao calcular a tangente para assim obter Coeficiente Angular.

INTERSEÇÃO DE RETAS

O encontro de duas retas gera um ponto e para encontrar esse ponto devemos usar as retas em sua forma reduzida como parcelas de um sistema linear. Ou ainda igualar os "y" de cada uma obtendo assim o par "(x ; y)".

AULA 14 - ESTUDO DA RETA II

Vamos ver as possíveis posições que duas retas podem ter uma em relação a outra. Para esse estudo, o ideal é que as retas tenham sua equação na forma reduzida, ou seja: y = CAx + CL.

EQUAÇÃO DA RETA REDUZIDA

A equação da reta pode ser obtida conhecido o coeficiente angular e um ponto P $(x_P; y_P)$.. A equação da reta então fica:

$$\boxed{y - y_P = CA(x - x_P)}$$

Onde $(x_O; y_O)$ é o ponto conhecido e CA é o coeficiente angular. Ficando assim apenas x e y como variáveis na equação.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS

- Retas
  - Paralelas
  - Concorrentes
    - Perpendiculares
    - Não Perpendiculares

Paralelas – Não possui ponto em comum e seus coeficientes angulares são iguais. $CA_1 = CA_2$
Concorrente – Possui um único ponto em comum e o produto de seus coeficientes angulares vale -1. $CA_1.CA_2 = -1$

OBS
- Existe o caso em que as retas não são paralelas nem concorrentes, são as chamadas ***retas reversas***. Elas devem estar obrigatoriamente em planos distintos.
- Quando concorrentes e não perpendiculares, o ângulo θ formado entre estas retas pode ser encontrado por:

$$tg\theta = \left| \frac{CA_1 - CA_2}{1 + CA_1.CA_2} \right|$$

AULA 15 - ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto C é igual a r. O ponto C é chamado centro da circunferência e o segmento de reta que liga um ponto qualquer dela ao centro é chamado raio da circunferência. Assim, r é a medida desse segmento.

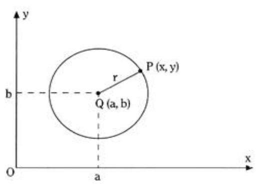
EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Seja uma circunferência com centro no ponto Q (a, b) e raio r; temos o ponto P (x, y) pertencente à circunferência se, e somente se:

$$(d_{QP})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$d_{QP} = r \qquad \Delta x = (x - a) \qquad \Delta y = (y - b)$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

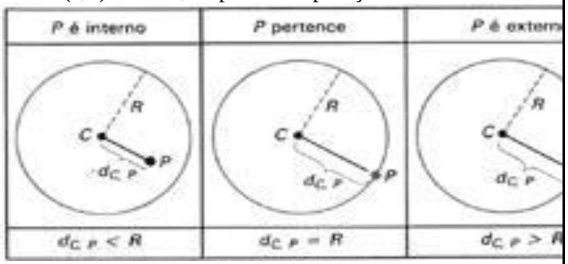


Se trabalharmos essa equação chegamos a equação geral:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + (a^2 + b^2 - r^2) = 0}$$

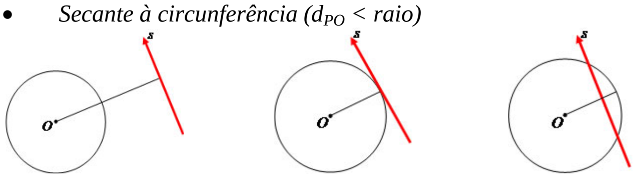
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Quando temos um ponto P (x,y) e uma circunferência C de centro (a,b) e raio r, as possíveis posições relativas de P e C são:



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

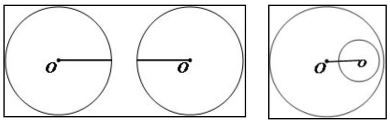
- *Reta externa à circunferência (d_{PO} > raio)*
- *Tangente à circunferência (d_{PO} = raio)*
- *Secante à circunferência (d_{PO} < raio)*



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE CIRCUNFERÊNCIAS

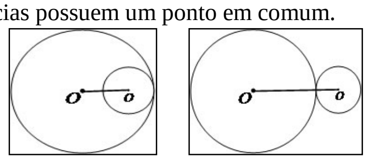
Não possuem pontos em comum:

Externas $D > r_1 + r_2$
Internas $D < r_1 - r_2$



Possuem um ponto em comum:

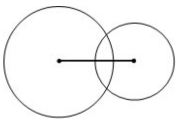
Tangentes: as circunferências possuem um ponto em comum.
Tangentes internas: D = r
Tangentes externas: D = r



Possuem dois pontos em comum

Secante: possuem dois pontos em comum.

$r_1 - r_2 < D < r_1 + r_2$



Circunferências concêntricas

São circunferências que possuem o mesmo centro, não existindo distância entre eles. D = 0