Exercícios dissertativos

1. (2000)

   a) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação $\bar{z} = iz^2$, onde i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$ e $\bar{z}$ é o conjugado de z.

   b) Represente essas soluções no plano complexo, usando o sistema de coordenadas desenhado ao lado.

---

2. (2001) No plano complexo, cada ponto representa um número complexo. Nesse plano, considere o hexágono regular, com centro na origem, tendo i, a unidade imaginária, como um de seus vértices.

   a) Determine os vértices do hexágono.

   b) Determine os coeficientes de um polinômio de grau 6, cujas raízes sejam os vértices do hexágono.

---

3. (2003) Nos ítens abaixo, z denota um número complexo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Suponha $z \neq i$.

   a) Para quais valores de z tem-se $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2$?

   b) Determine o conjunto de todos os valores de z para os quais $\dfrac{z+i}{1+iz}$ é um número real.

---

4. (2004) Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z}$, onde α é um número real e $\bar{z}$ indica o conjugado do complexo z.

   a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.

   b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação, quando $\alpha = 0$.

---

5. (2006) Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $Im\left(\dfrac{z-i}{1+i}\right) = \dfrac{1}{2}$.

   Lembretes: $i^2 = -1$, se $w = a + ib$, como a e b reais, então $|w| = \sqrt{a^2+b^2}$ e $Im(w) = b$.

---

6. (2008) A figura na página de respostas representa o número $\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária. Nessas condições,

   a) determine as partes real e imaginária de $\dfrac{1}{\omega}$ e de ω^3.

   b) represente $\dfrac{1}{\omega}$ e de ω^3 na figura ao lado.

   c) determine as raízes complexa da equação $z^3 - 1 = 0$.

7. (2011)

a) Sendo i a unidade imaginária, determine as partes real e imaginária do número complexo

$$z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i.$$

b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

c) Determine os números complexos w tais que $z_0 \cdot w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0 \cdot w$ sejam iguais.

d) No plano complexo, determine o número complexo z_1 que é o simétrico de z_0 com relação à reta de equação $y - x = 0$.

(2015) Resolva os três itens abaixo.

(a) Calcule $cos(3\pi/8)$ e $sen(3\pi/8)$.

(b) Dado o número complexo $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$, encontre o menor inteiro $n > 0$ para o qual Z^n seja real.

(c) Encontre um polinômio de coeficientes inteiros que possua z como raiz e que não possua raiz real.
