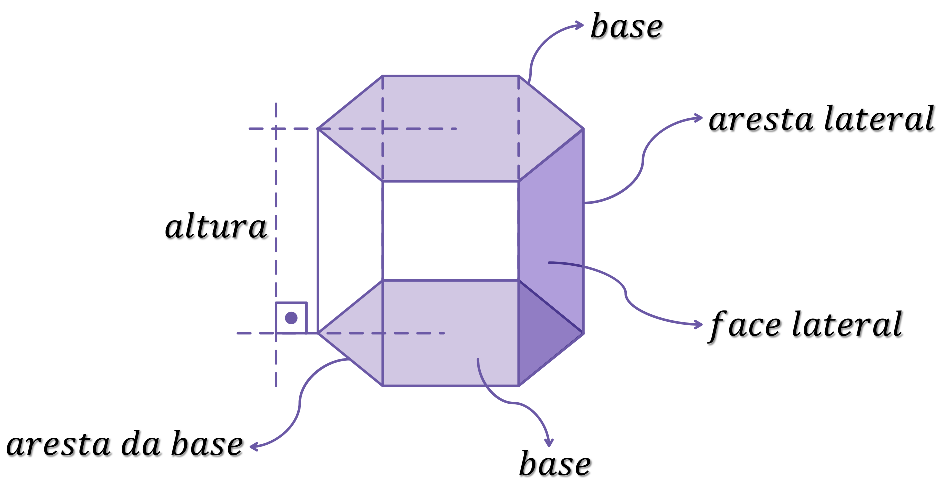
PRISMAS

Agora que já aprendemos sobre poliedros, podemos falar sobre um tipo especial de poliedro chamado prisma.

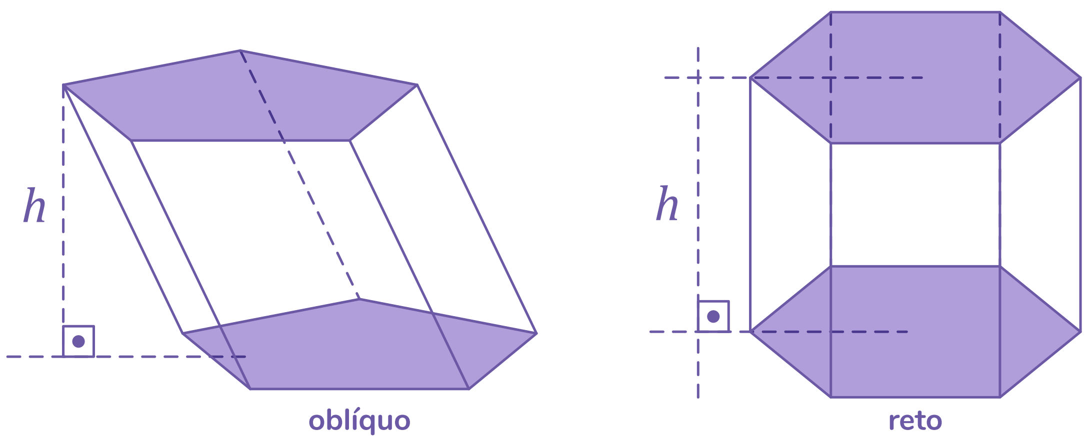
Definição 1. Um prisma é um poliedro que possui uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes, cada uma chamada de **base**.

As faces que fazem a ligação entre as bases do prisma são chamadas de **faces laterais** (as quais são formadas pelas **arestas laterais**). Além disso, o segmento de reta perpendicular entre as bases é a **altura** do prisma. Por fim, cada base é formada pelas **arestas da base**, conforme figura abaixo.



Os elementos que formam um prisma.

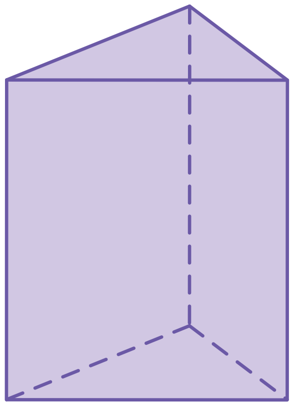
Os prismas podem ser classificados em **retos**, quando sua altura é paralela às arestas laterais, e oblíquos, quando sua altura não é paralela às arestas laterais. Observe a figura abaixo, que mostra a diferença entre os dois tipos de prismas.



Diferença entre um prisma oblíquo e um prisma reto.

PRISMA TRIANGULAR

Os prismas possuem uma nomenclatura própria de acordo com o formato do polígono da base. Vamos abordar cada um individualmente, começando pelo prisma triangular, exemplificado na figura abaixo.



Triangular

Prisma triangular

O prisma triangular possui como formato das bases um triângulo. Recorda-se aqui algumas das equações relativas aos triângulos:

$$h = r + R$$

$$R = 2r$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

E, para um triângulo equilátero:

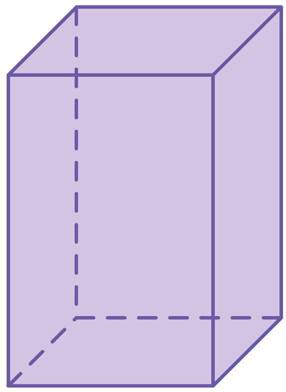
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$P = 3l$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

PRISMA QUADRANGULAR

O prisma quadrangular é mostrado na figura abaixo, o qual possui como objeto das bases um quadrado.



Quadrangular

Prisma quadrangular.

Algumas das fórmulas relativas ao quadrado são apresentadas abaixo.

$$r = \frac{l}{2}$$

$$d = 2R$$

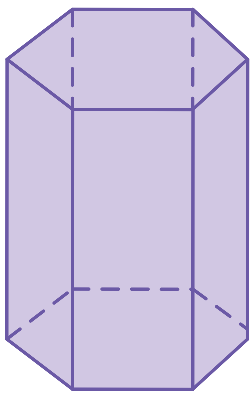
$$d = l\sqrt{2}$$

$$P = 4l$$

$$A = l^2$$

PRISMA HEXAGONAL

Além destes citados, também podemos falar no prisma hexagonal, que possui um hexágono em cada uma das suas bases.



Hexagonal

Prisma hexagonal.

Lembramos também algumas relações para o hexágono:

$$R = l$$

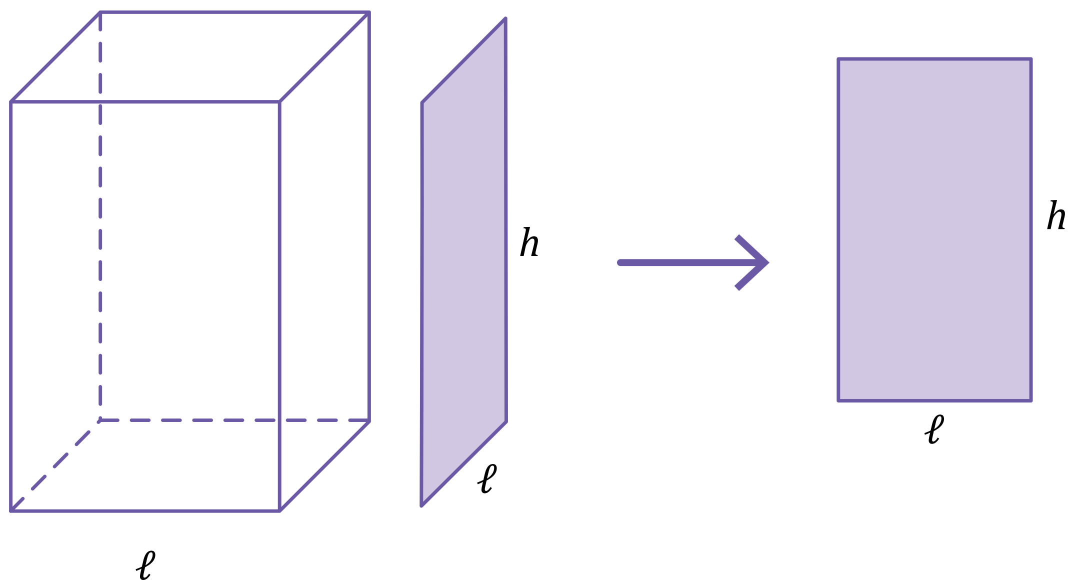
$$r = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$P = 6l$$

$$A = 6.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

ÁREAS

A área lateral de um prisma é definida como a soma das áreas das faces laterais. Podemos calculá-la analisando que a área de uma face é obtida pela multiplicação da aresta da base pela altura do prisma. Assim, para a área lateral, podemos efetuar simplesmente a multiplicação do perímetro da base pela altura, visto que resultará na mesma operação que somar as áreas de cada face. Observe abaixo esta operação ilustrada.

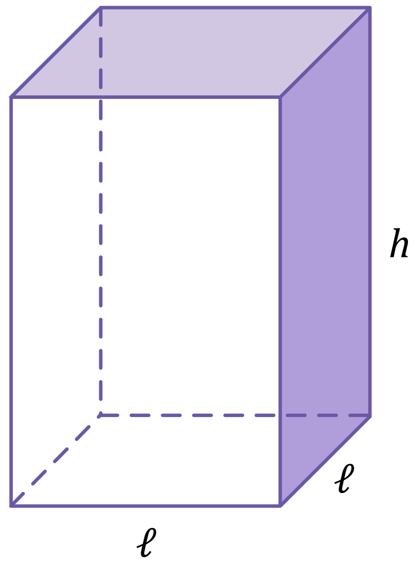


Área lateral de um prisma.

Então, temos que a área lateral será:

$$A_l = P_b \, . \, h$$

A área total do prisma será a soma da área lateral com as áreas das duas bases, conforme figura abaixo.



Área da base de um prisma.

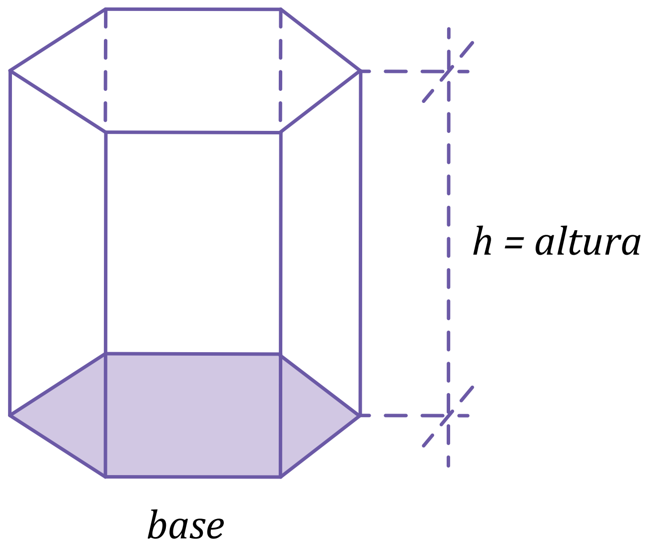
Assim, a área total será:

$$A_{total} = A_l + 2A_b$$

Onde A_b é a área da base.

VOLUME

Os prismas, por se tratarem de sólidos em três dimensões, naturalmente possuem um volume associado. Considere o prisma abaixo.



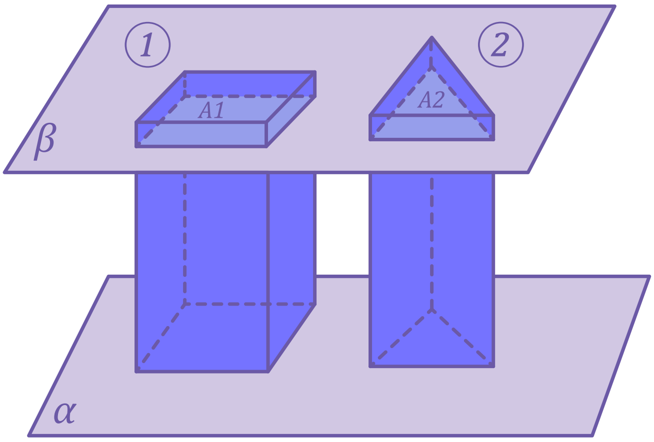
O volume de um prisma.

Este volume pode ser calculado como a multiplicação da área da base pela altura, conforme a equação abaixo.

$$V = A_b \cdot h$$

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Por último, vamos falar do princípio de Cavalieri. Matemático italiano do século XVI, ele formulou o princípio que diz o seguinte: imagine que temos dois prismas de mesma altura, que estão sobre um plano que chamaremos de α. Ao pegarmos um segundo plano, agora denominado β, e interceptarmos os prismas de modo que β fique paralelo à α e as seções interceptadas dos dois prismas tenham a mesma área, então os dois sólidos possuem volumes iguais. A imagem abaixo representa o princípio de Cavalieri.



Princípio de Cavalieri.

No caso da imagem acima, se $A_1 = A_2$, então:

$$V_1 = V_2$$

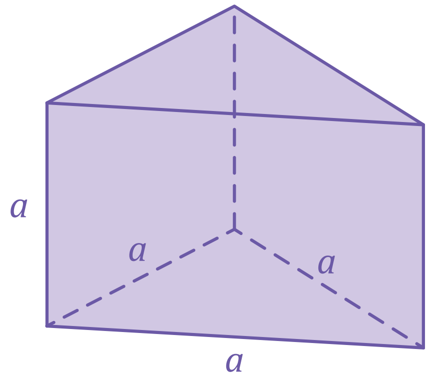
Sendo V_1 o volume do primeiro prisma e V_2 o volume do segundo prisma.

EXERCICIO RESOLVIDO

Exercício: Um prisma regular triangular possui todas as arestas congruentes e 36 m² de área lateral. Qual é o volume do prisma?

Resolução:

Primeiramente, vamos desenhar um prisma regular triangular. Observe a seguir.



Como todas as suas arestas são congruentes, os retângulos das faces laterais têm todos as mesmas medidas e, portanto, cada retângulo possui uma área igual à área lateral dividida por 3. Logo,

$$A_r = \frac{36}{3} = 12\, m^2$$

Pela figura, analisamos que os retângulos são quadrados, e assim podemos achar o valor de cada aresta a:

$$a^2 = 12\, m^2$$

$$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\, m$$

Como estamos tratando de um prisma regular triangular, o triângulo das bases é equilátero. Para calcular a área do triângulo, utilizamos a fórmula correspondente:

$$A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = \frac{4.3\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = 3\sqrt{3}\, m^2$$

Finalmente, para calcularmos o volume do prisma, fazemos a multiplicação da área da base (recém-calculada) pela altura (aresta a):

$$V = A_t \,.\, h$$

$$V = 3\sqrt{3}\,.\,(2\sqrt{3})$$

$$V = 6\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$V = 6.3 = 18\, m^3$$

Logo, o volume do prisma é de $18\, m^{3.}$