Estratégia
Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023

TRIGONOMETRIA I

AULA 05

Prof. Victor So

Sumário

INTRODUÇÃO

Olá,

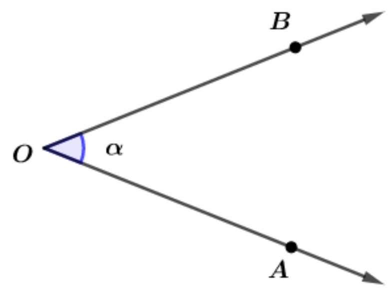
Vamos iniciar o estudo sobre trigonometria. A trigonometria é uma parte da Matemática que estuda a relação entre os ângulos e os lados de um triângulo. Esse tema é muito cobrado nos concursos militares. Veremos todos os conceitos fundamentais que precisamos para resolver as questões dos concursos e vamos aprender a resolver cada tipo de questão das provas anteriores!

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!

1. ÂNGULOS E SUAS MEDIDAS

1.1. DEFINIÇÃO

Antes de iniciarmos o estudo da trigonometria, vamos entender alguns conceitos básicos de ângulo. Um ângulo é definido pela união de duas semirretas com uma origem comum, veja o exemplo abaixo:



Nesse caso, temos que o ponto O é a origem comum das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Podemos denotar o ângulo acima por $A\hat{O}B$ ou $\angle AOB$. Usualmente, usamos letras minúsculas gregas para nomear os ângulos, as mais comuns são: α (alfa), β (beta), θ (teta) e γ (gama). A título de curiosidade veja a tabela abaixo com as letras gregas minúsculas e seus respectivos nomes:

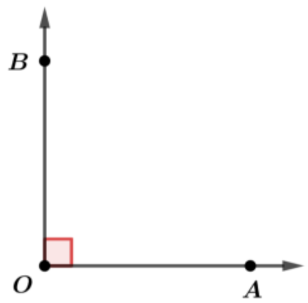
Letra grega minúscula	Nome	Letra grega minúscula	Nome	Letra grega minúscula	Nome
$\boldsymbol{\alpha}$	Alfa	θ	Teta	μ	Mi
$\boldsymbol{\beta}$	Beta	λ	Lambda	ρ	Rô
$\boldsymbol{\gamma}$	Gama	ϵ	Épsilon	ϕ	Fi
$\boldsymbol{\delta}$	Delta	η	Eta	ω	Ômega

Para cada ângulo associamos um número real, esse número é chamado de medida angular. Vamos estudar os dois principais sistemas de medidas angulares: o sistema sexagesimal e o sistema radial.

1.2. UNIDADES DE MEDIDAS

1.2.1. SISTEMA SEXAGESIMAL

Inicialmente, vamos definir o conceito de **ângulo reto**. Dizemos que um ângulo é reto quando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são **perpendiculares**, geometricamente.



Perceba que o símbolo usado para o ângulo reto é um quadrado. Normalmente, esse quadrado vem acompanhado de um ponto no meio.

No sistema sexagesimal, um ângulo reto é dividido em 90 partes iguais e cada uma dessas partes é chamada de grau. **A unidade do grau é definida por $1°$.**

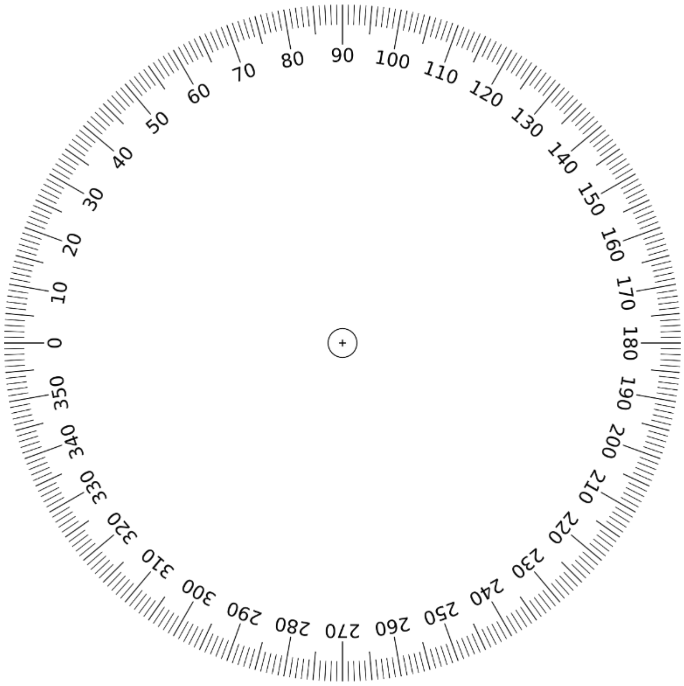
Como o sistema sexagesimal é um sistema de numeração de base 60, temos que as subdivisões do grau são baseadas nesse sistema. Um grau é equivalente a 60 minutos (representado por $60'$) e 1 minuto é equivalente a 60 segundos (representado por $60''$). Veja abaixo as correspondências:

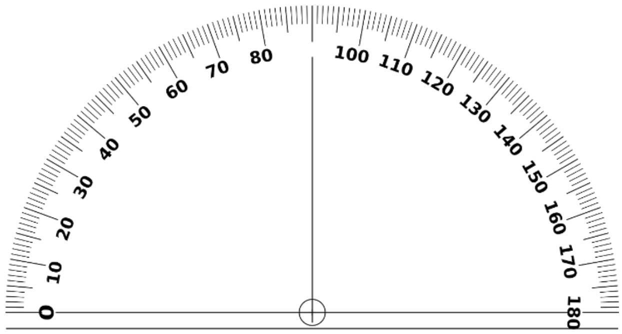
$$\hat{a}ngulo\ reto = 90°$$

$$1° = 60'\ (60\ minutos)$$

$$1' = 60'' \; (60 \; segundos)$$

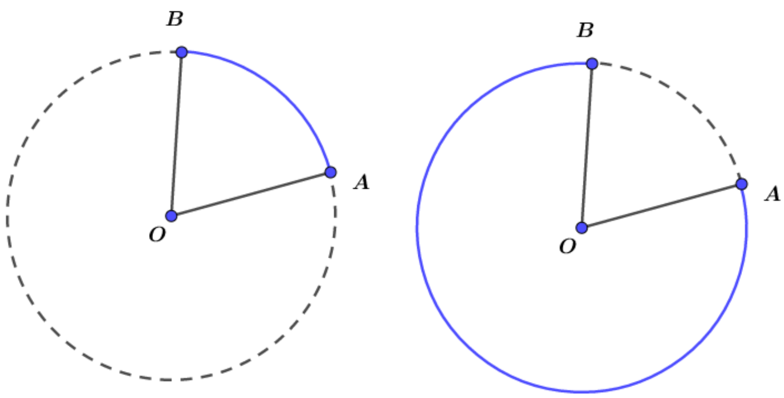
Assim, podemos ver que uma circunferência é composta por 4 ângulos retos, logo podemos afirmar que a medida angular total de uma circunferência é $360°$ e a medida angular de uma semicircunferência (metade de uma circunferência) é $180°$. As figuras abaixo mostram uma circunferência e uma semicircunferência, ambas na unidade grau.





1.2.2. SISTEMA CIRCULAR

Antes de estudarmos o sistema circular, precisamos entender o que é um arco de circunferência. Um arco de circunferência é definido por dois pontos distintos na circunferência. Veja o exemplo abaixo:

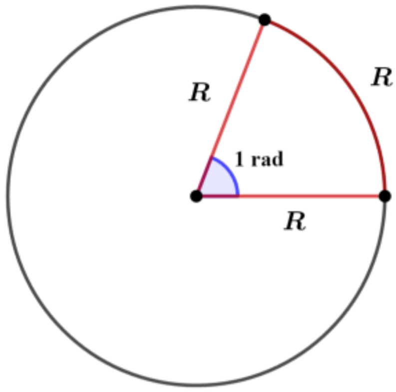


Note que podemos ter dois arcos de circunferência, um maior e outro menor. Normalmente, usamos o menor.

Um arco de circunferência possui medida angular e medida linear, este também é chamado de comprimento do arco. É muito comum confundir esses termos. A medida angular de um arco independe do tamanho do raio da circunferência, enquanto o comprimento do arco depende do raio da circunferência. Podemos relacionar a medida angular de um arco com sua medida linear de acordo com a seguinte fórmula:

$$\boxed{A\hat{O}B = \frac{comprimento\ do\ arco\ AB}{raio}\ rad}$$

A fórmula acima resulta na medida angular no **sistema circular**, cuja unidade de medida é o radiano que pode ser denotada por rad. 1 rad corresponde a 1 raio da circunferência conforme a figura a seguir:



Por vezes, podemos simplesmente ocultar o termo rad. Se isso ocorrer, devemos considerar que ângulo está na unidade radiano.

O comprimento de uma circunferência é igual a $2\pi R$, em que π é chamado de "pi" e equivale a aproximadamente 3,14 e R é o raio da circunferência. Assim, aplicando a fórmula para calcular a medida angular de uma circunferência, obtemos:

$$\alpha = \frac{comprimento\ da\ circunferência}{raio} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

Veja que a circunferência possui medida angular igual a $2\pi\ rad$, logo uma semicircunferência possui $\pi\ rad$.

Podemos calcular o comprimento de um arco AB de circunferência pela seguinte fórmula:

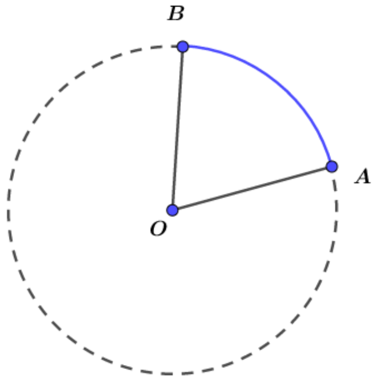
$$\boxed{AB = \alpha R}$$

Em que α é o ângulo em radianos e R é o raio da circunferência.

ESCLARECENDO!

Observações:

1) A medida do arco menor AB, em **graus**, é igual à medida do ângulo central $A\hat{O}B$, também em graus.

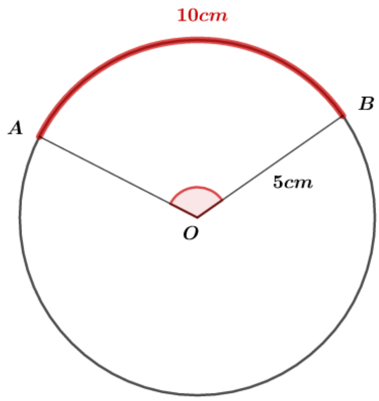


2) A medida angular do arco, em **radianos**, somente será igual ao seu comprimento quando $R = 1$.
3) Podemos aproximar o número π como $\pi \approx 22/7$.

Vamos ver alguns exemplos de aplicação.

1) Um arco de circunferência AB mede 10 cm e o raio da circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do arco em radianos.

Temos a seguinte figura:



Vamos usar a fórmula da medida do arco:

$$A\hat{O}B = \frac{comprimento\ AB}{comprimento\ raio}$$

$$A\hat{O}B = \frac{10\ cm}{5\ cm} = 2\ rad$$

2) O arco AB possui medida angular igual a $5\ rad$, determine o comprimento do arco sabendo que ele pertence a uma circunferência de raio 4 cm.

Vamos usar a fórmula da medida angular do arco:

$$\alpha = \frac{comprimento\ do\ arco\ AB}{raio}$$

Do enunciado:

$$5 = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 20\ cm$$

1.2.3. CONVERSÃO DE UNIDADES DE MEDIDAS

Vamos aprender nesse tópico como transformamos um ângulo em graus para radiano e vice-versa. Para isso, vamos tomar a medida angular de uma semicircunferência como referência. Sabemos que ela é igual a $180°$ e também a $\pi\ rad$. Assim, podemos escrever a equivalência:

$$\boxed{\pi\ rad = 180° \Leftrightarrow 1\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)° \Leftrightarrow 1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)\ rad}$$

Para converter um ângulo de radianos para graus, basta multiplicar o ângulo por $180/\pi$. E para converter de graus para radiano, basta multiplicar o ângulo por $\pi/180$. Veja os exemplos:

1) Converta o ângulo $30°$ para radianos.

Seja $\theta = 30°$. Assim, temos:

$$\theta = 30° = 30 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{6}\ rad$$

2) Converta o ângulo $2\pi/3$ para graus.

Seja $\theta = 2\pi/3$, logo:

$$\theta = \frac{2\pi}{3}\ rad = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120°$$

3) Um arco de circunferência AB possui 16 cm de comprimento e seu ângulo central é igual a $80°$. Determine a medida do raio da circunferência.

Vamos usar a fórmula da medida angular do arco:

$$\alpha = \frac{comprimento\ do\ arco\ AB}{raio}$$

Para usar essa fórmula, o ângulo central precisa estar em radianos. Então, vamos converter o ângulo $80°$ para radianos:

$$\alpha = 80° = 80 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{4\pi}{9}\ rad$$

Sabemos que o comprimento do arco mede 16 cm, logo:

$$\frac{4\pi}{9} = \frac{16}{R} \Rightarrow 4\pi R = 16 \cdot 9 \Rightarrow R = \frac{16 \cdot 9}{4\pi} = \frac{4 \cdot 9}{\pi} = \frac{36}{\pi} cm$$

4) Expresse o ângulo $45°20'10''$ em radianos.

Sabemos que $1' = \left(\frac{1}{60}\right)°$ e $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{60 \cdot 60}\right)° = \left(\frac{1}{3600}\right)°$, logo:

$$10'' = 10 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)° = \left(\frac{1}{360}\right)°$$

$$20' = 20 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)° = \left(\frac{1}{3}\right)°$$

Assim, temos:

$$45°20'10'' = \left(45 + \frac{1}{3} + \frac{1}{360}\right)° = \left(\frac{16200 + 120 + 1}{360}\right)° = \left(\frac{16321}{360}\right)°$$

Convertendo o ângulo para radianos:

$$\left(\frac{16321}{360}\right)° = \frac{16321}{360} \cdot \frac{\pi}{180}$$

Usando a aproximação $\pi \cong 3{,}14$, obtemos:

$$\left(\frac{16321}{360}\right)° \cong \frac{16321}{360} \cdot \frac{3{,}14}{180} = 0{,}79\, rad$$

1. Transforme para radianos os seguintes ângulos dados em graus:

a) $120°$

b) $135°$

c) $150°$

d) $210°$

e) $225°$

f) $240°$

g) $300°$

h) $315°$

i) $330°$

j) $360°$

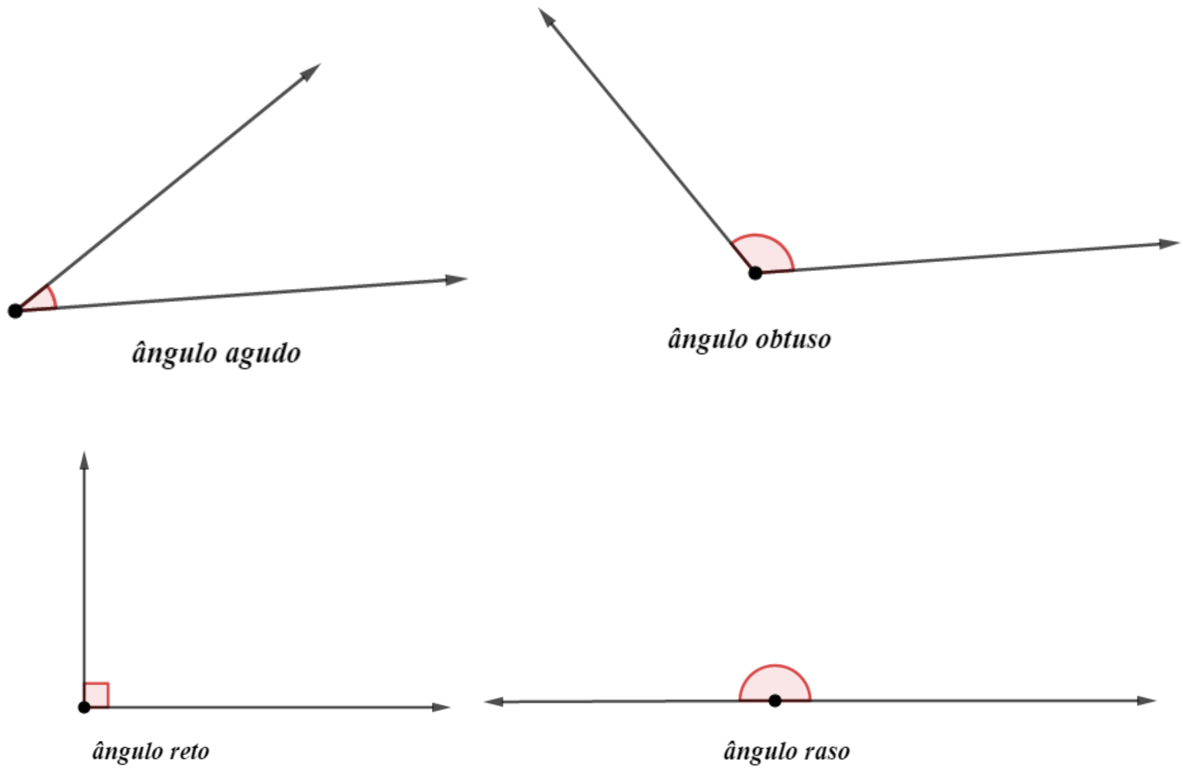
Resolução:

Arco em graus	Arco em radianos
$120°$	$120° = 120° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{2}\cancel{120°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{2\pi}{3} rad$
$135°$	$135° = 135° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{3}\cancel{135°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{3\pi}{4} rad$
$150°$	$150° = 150° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{150°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{6} rad$
$210°$	$210° = 210° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{7}\cancel{210°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{7\pi}{6} rad$
$225°$	$225° = 225° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{225°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{4} rad$
$240°$	$240° = 240° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{4}\cancel{240°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{4\pi}{3} rad$
$300°$	$300° = 300° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{300°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{3} rad$
$315°$	$315° = 315° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{7}\cancel{315°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{7\pi}{4} rad$
$330°$	$330° = 330° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{11}\cancel{330°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{11\pi}{6} rad$
$360°$	$360° = 360° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{2}\cancel{360°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{1}\cancel{180°}} = 2\pi\, rad$

Gabarito: a) $\frac{2\pi}{3} rad$ **b)** $\frac{3\pi}{4} rad$ **c)** $\frac{5\pi}{6} rad$ **d)** $\frac{7\pi}{6} rad$ **e)** $\frac{5\pi}{4} rad$ **f)** $\frac{4\pi}{3} rad$ **g)** $\frac{5\pi}{3} rad$ **h)** $\frac{7\pi}{4} rad$ **i)** $\frac{11\pi}{6} rad$ **j)** $2\pi\, rad$

1.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

Dizemos que um ângulo é agudo quando ele é menor que 90° e é obtuso quando ele é maior que 90°. Quando o ângulo é igual a 180°, dizemos que ele é raso. Veja as figuras abaixo:



2. Classifique os ângulos abaixo em agudo, obtuso, reto ou raso.

a) $30°$

b) $120°$

c) $90°$

d) π

e) $\pi/2$

f) $2\pi/5$

Comentários

a) $30°$ é menor que $90°$, logo é agudo.

b) $120°$ é maior que $90°$, logo é obtuso.

c) $90°$ é ângulo reto.

d) π rad é igual a $180°$, logo é raso.

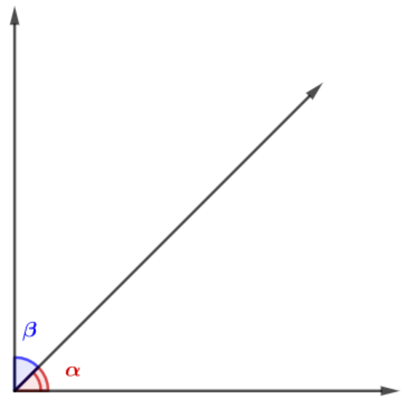
e) $\pi/2$ rad é igual a $90°$, logo é reto.

f) Esse ângulo é menor que um ângulo reto $\pi/2$, logo é agudo.

1.4. RELAÇÃO ENTRE OS ÂNGULOS

1.4.1. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Dois ângulos são complementares quando sua soma é $90°$ ou $\pi/2$ rad.



α e β são ângulos complementares:

$$\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2}$$

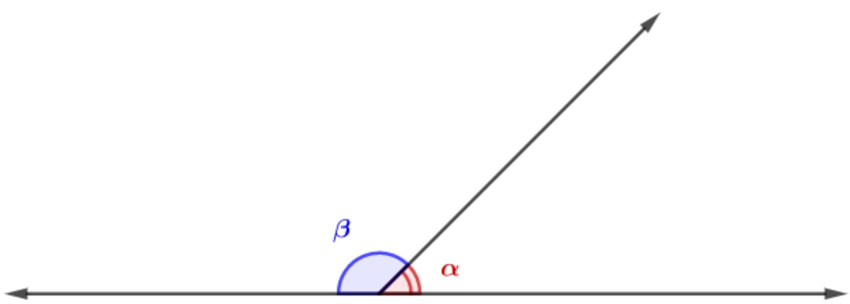
Note que para encontrar o complementar de um ângulo, basta resolver a equação:

$$\alpha = 90° - \beta$$

Ou seja, basta verificar quanto falta para o ângulo completar $90°$.

1.4.2. ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Dois ângulos são suplementares quando sua soma é $180°$ ou $\pi\ rad$.

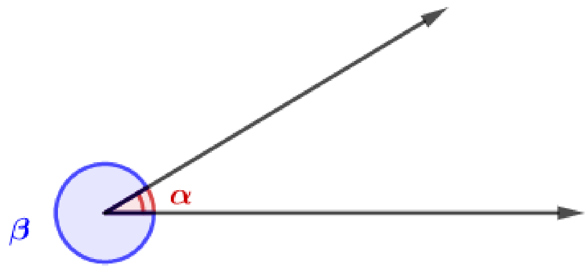


α e β são ângulos suplementares:

$$\alpha + \beta = 180° = \pi$$

1.4.3. ÂNGULOS REPLEMENTARES

Dois ângulos são replementares quando sua soma é $360°$ ou $2\pi\ rad$.



α e β são replementares:

$$\alpha + \beta = 360° = 2\pi$$

3. Considere os ângulos do conjunto $\{30°, 45°, 60°, 135°, 150°, 300°\}$, verifique quais são complementares, suplementares e replementares.

Comentários

Ângulos complementares: $30°$ e $60°$

Ângulos suplementares: $30°$ e $150°$, $45°$ e $135°$

Ângulos replementares: $60°$ e $300°$

4. Encontre o que se pede, na mesma unidade de medida:

a) Complementar de $45°$.

b) Complementar de $60°$.

c) Complementar de $\pi/6$.

d) Suplementar de $30°$.

e) Suplementar de $\pi/4$.

f) Replementar de $\pi/2$.

Comentários

a) $\alpha = 90° - 45° = 45°$

b) $\alpha = 90° - 60° = 30°$

c) $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \pi/3$

d) $\alpha = 180° - 30° = 150°$

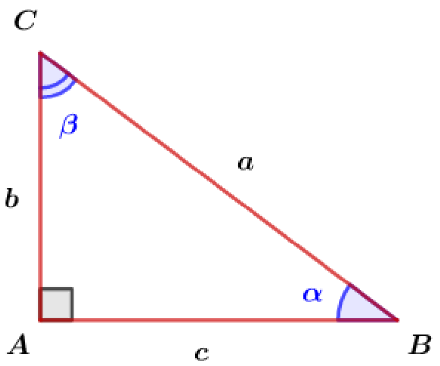
e) $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = 3\pi/4$

f) $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi - \pi}{2} = 3\pi/2$

2. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

2.1. PRINCIPAIS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Dizemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos é igual a $90°$. Observe o triângulo ABC abaixo:



No triângulo retângulo, chamamos de hipotenusa o lado BC e de catetos os lados AB e AC. **Lembre-se que a hipotenusa sempre será o maior lado!**

Na trigonometria temos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Elas são dadas por:

$$\boxed{sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}}$$

$$\boxed{cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}}$$

Note que o cateto oposto ao ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ é o lado em que ele "enxerga", ou seja, o lado de medida b. E o cateto adjacente é o lado que é vizinho a ele, ou seja, o lado de medida c.

Uma forma de memorizar essas razões trigonométricas é lembrar do mnemônico:

$$\boxed{\boldsymbol{SOH\ CAH\ TOA}}$$

SOH significa Seno igual ao Oposto sobre a Hipotenusa.

CAH significa Cosseno igual ao Adjacente sobre a Hipotenusa.

TOA significa Tangente igual ao Oposto sobre o Adjacente.

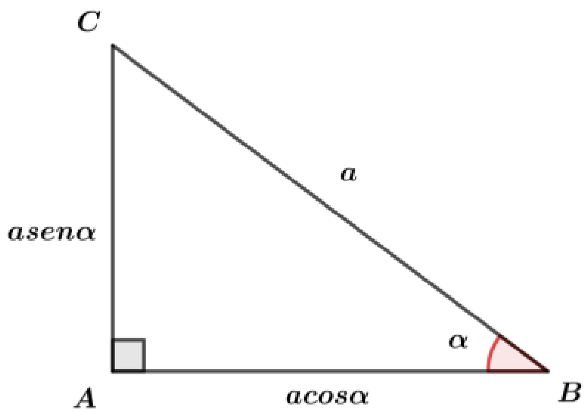
Perceba que também podemos escrever tangente como:

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$\boxed{\boldsymbol{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}}$$

Usando as razões trigonométricas, podemos escrever os catetos em função da hipotenusa e do seno e cosseno:

$$b = a\ sen\alpha \text{ e } c = a\cos\alpha$$



Ainda, das relações do triângulo retângulo, temos o **Teorema de Pitágoras**:

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}}$$

O Teorema de Pitágoras afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos a **relação fundamental** da trigonometria:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

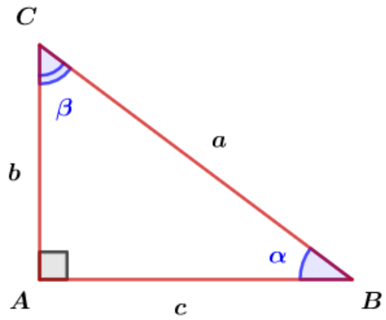
$$a^2 = (asen\alpha)^2 + (acos\alpha)^2$$

$$a^2 = a^2sen^2\alpha + a^2\cos^2\alpha$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}}$$

2.2. RAZÕES DE ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Consideremos o seguinte triângulo retângulo:



Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos sempre é igual a $\pi\ rad$ ou $180°$, logo no caso acima:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta=\pi$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}$ **e** $\boldsymbol{\beta}$ são complementares

Dessa relação, temos as seguintes consequências:

$$sen\alpha=\frac{b}{a}\ e\ cos\beta=\frac{b}{a}\Rightarrow sen\alpha=cos\beta$$

$$tg\alpha=\frac{b}{c}\ e\ tg\beta=\frac{c}{b}\Rightarrow tg\alpha=\frac{1}{tg\beta}$$

ESQUEMATIZANDO

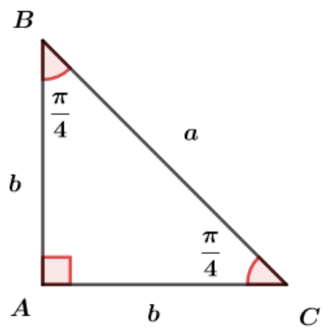
$\boldsymbol{\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}}$
$sen\alpha=sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=cos\beta$
$tg\alpha=tg\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{1}{tg\beta}$

2.3. ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos $\pi/6, \pi/4$ e $\pi/3$ são considerados ângulos notáveis. Vamos calcular o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

1) $\pi/4$:

Considere o seguinte triângulo isósceles:



Através do Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

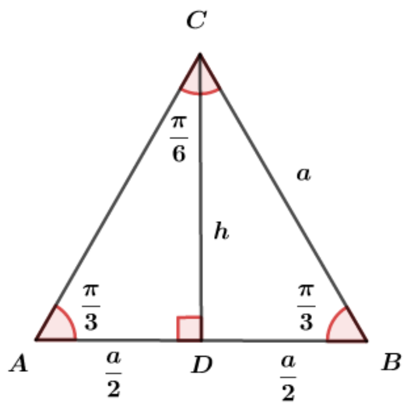
$$a^2 = b^2 + b^2$$
$$a^2 = 2b^2$$
$$a = \sqrt{2}b$$

Usando a definição de seno, cosseno e tangente, obtemos:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{b} = 1$$

2) $\pi/6$ e $\pi/3$:

Agora, considere o triângulo equilátero:



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Calculando o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\pi/6$ e $\pi/3$:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podemos construir a tabela das razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

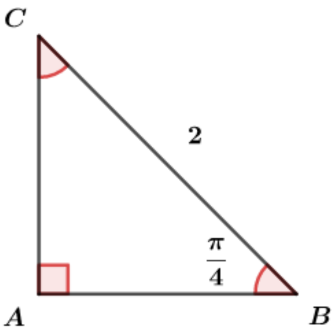
	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

***Dica de memorização:**

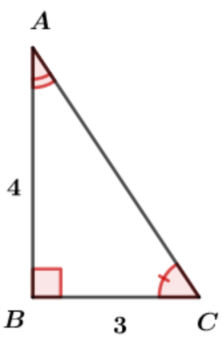
Você pode lembrar apenas dos valores para o seno na seguinte ordem: $1/2$, $\sqrt{2}/2$ e $\sqrt{3}/2$. O cosseno será a ordem inversa: $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{2}/2$ e $1/2$. Para a tangente, basta dividir o valor do seno pelo do cosseno.

5. Dados os triângulos abaixo, calcule o valor dos lados que faltam:

a)



b)



Resolução:

a) Conhecemos o valor do $sen(\pi/4)$, podemos calcular o valor dos catetos usando a seguinte razão:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$AB = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b) Basta aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AC = \sqrt{25} = 5$$

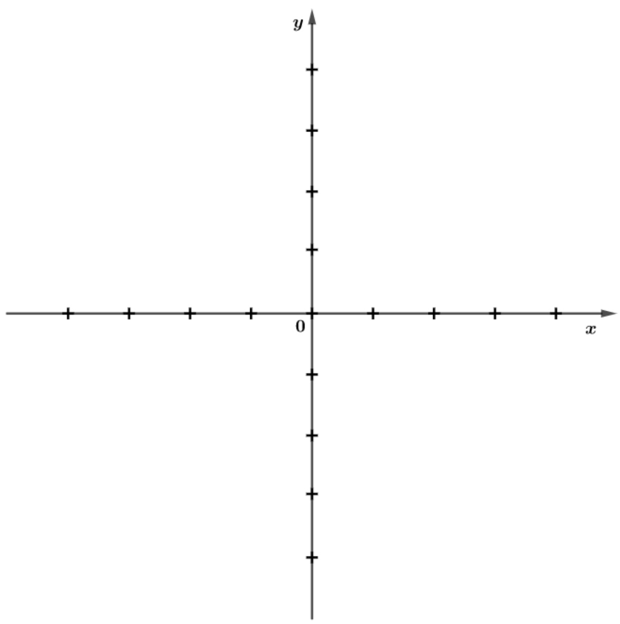
Gabarito: a) $AB = \sqrt{2}$ b) $AC = 5$

3. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Antes de estudar o círculo trigonométrico ou ciclo trigonométrico, vamos entender o que é um sistema de coordenadas cartesianas.

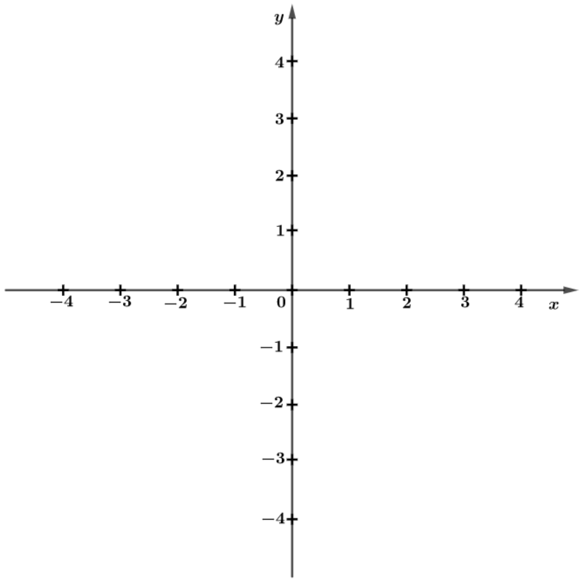
3.1. PLANO CARTESIANO

Um plano cartesiano é definido por dois eixos reais e, por isso, dizemos que ele é o plano $\mathbb{R}^2$. Denominamos o eixo horizontal como o eixo das abcissas (eixo Ox ou, simplesmente, eixo x) e o eixo vertical como o eixo das ordenadas (eixo Oy ou eixo y), eles são perpendiculares entre si. Esses eixos se interceptam em um único ponto chamado de origem. A figura abaixo representa o plano cartesiano:

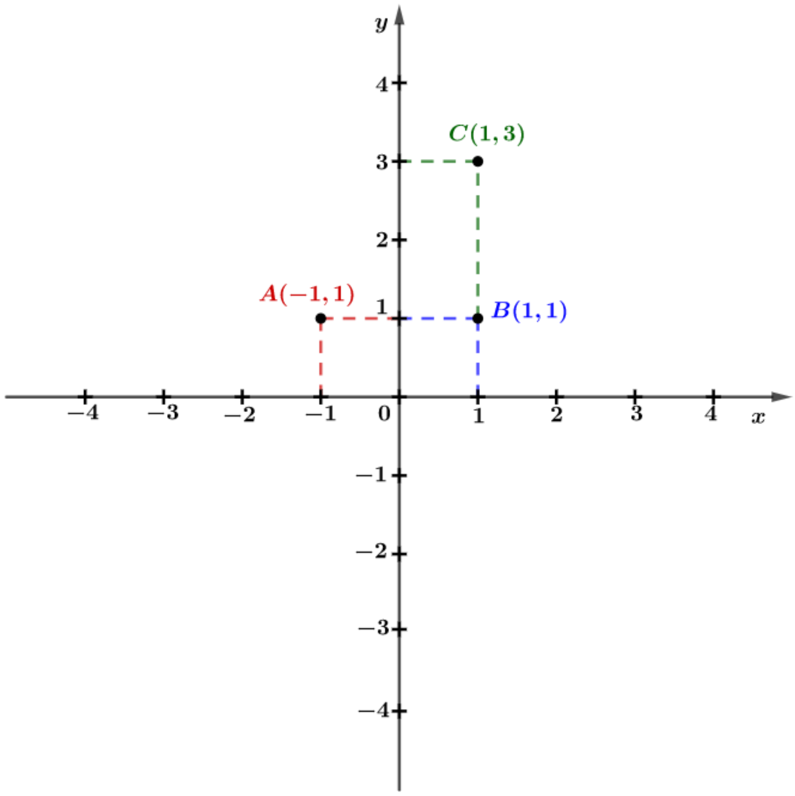


Note que o eixo x possui uma seta à extremidade direita e o eixo y possui uma seta para cima. Essas setas representam a ordenação dos números no eixo. Tomando a origem como referência, todos os pontos acima da origem possuem ordenada positiva (eixo y) e todos os pontos à direita da origem possuem abcissa positiva (eixo x). Desse modo, o sentido contrário àqueles serão os pontos que possuem ordenada e abcissa negativas.

Veja a ordenação dos números no diagrama abaixo:



Vamos representar alguns pontos no plano. Preliminarmente, devemos entender que pontos são pares ordenados no plano $\mathbb{R}^2$, também podemos entender esses pares ordenados como coordenadas. Sejam os pontos A, B, C tais que $A = (-1, 1), B = (1, 1)$ e $C = (1, 3)$. Para representar esses pontos no gráfico, devemos lembrar que o primeiro número do par ordenado é a abcissa do ponto e o segundo número é a sua ordenada. Então, para o ponto $A(-1, 1)$, temos $x_a = -1$ e $y_a = 1$. Como x_a é negativo, ele está à esquerda da origem e como y_a é positivo, ele está acima da origem. Assim, A, B, C estão localizados do seguinte modo:



O plano pode ser dividido em quadrantes. Veja o diagrama ao lado:

Os quadrantes são definidos de acordo com o sinal das coordenadas.

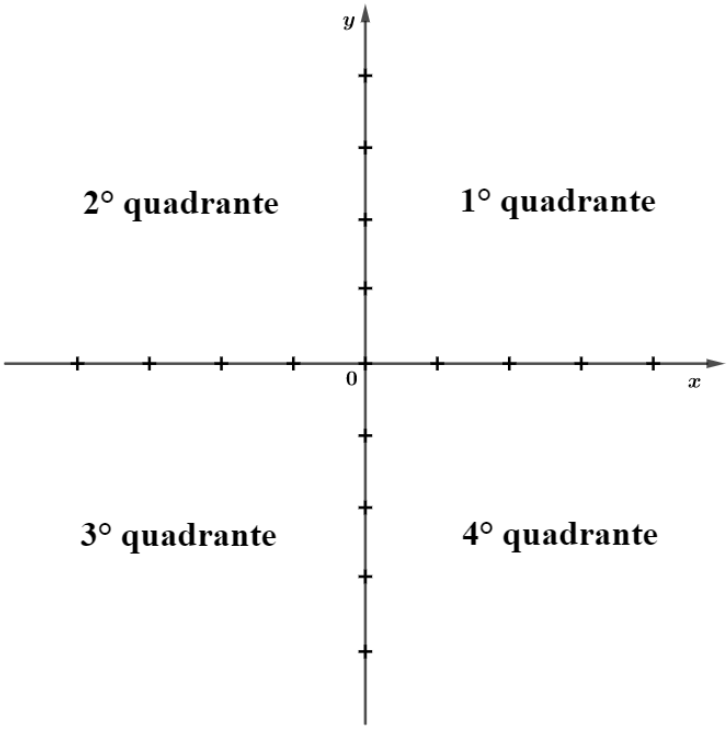
$$1° \; quadrante \rightarrow x > 0 \; e \; y > 0$$

$$2° \; quadrante \rightarrow x < 0 \; e \; y > 0$$

$$3° \; quadrante \rightarrow x < 0 \; e \; y < 0$$

$$4° \; quadrante \rightarrow x > 0 \; e \; y < 0$$

Perceba que os pontos que estão localizados nos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante. Por esse fato, dizemos que o plano cartesiano é formado pelos quatro quadrantes e pelos eixos coordenados.



3.2. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Aprenderemos o método formal do círculo trigonométrico e vamos simplificar seu entendimento com diversos exemplos. Iniciaremos pela definição de circunferência.

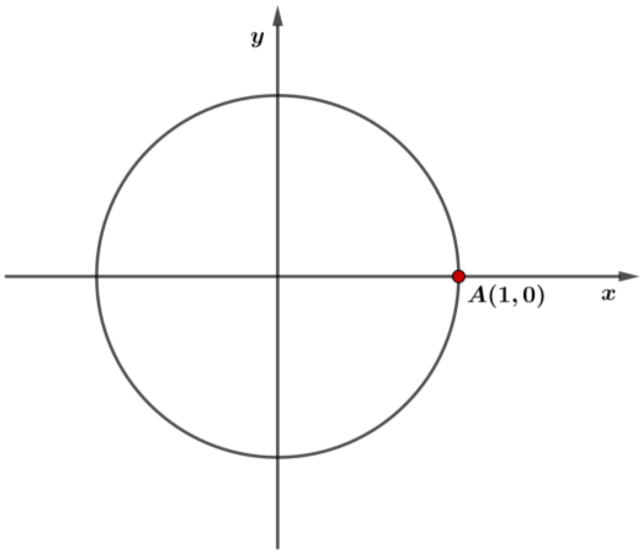
Uma circunferência pode ser definida pela seguinte equação no plano cartesiano:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Em que (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e R é seu raio.

Na trigonometria, usamos uma circunferência de raio unitário e centro na origem $(0,0)$ para definir o **ciclo trigonométrico ou círculo trigonométrico**:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$



O **ponto $\boldsymbol{A(1,0)}$** é considerado como a **origem do círculo**. Usamos uma circunferência de raio unitário para que a medida do arco seja igual à medida do ângulo em radianos. Por isso, normalmente, usamos a medida angular em radianos para denotar os ângulos na circunferência.

Vamos entender seu funcionamento usando a função de Euler.

3.2.1. FUNÇÃO DE EULER

Seja E uma função que associa um número real t a um ponto $P(x,y)$ do círculo trigonométrico C.

$$E: \mathbb{R} \to C$$

E é chamado de função de Euler. Para cada número real t, temos associado um ponto $E(t) = (x,y)$ na circunferência. Ela funciona da seguinte forma:

Se $\boldsymbol{t = 0}$, temos $E(0) = (1,0)$. Esse ponto será a **origem** do círculo.

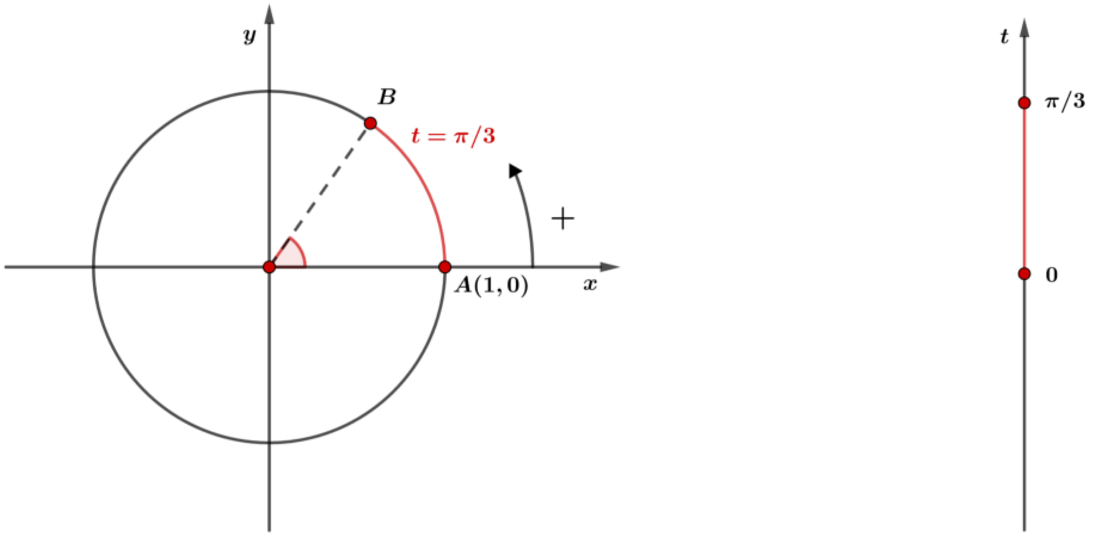
Se $\boldsymbol{t > 0}$, temos que $E(t)$ será obtido desenhando-se um arco de medida t no **sentido anti-horário** na circunferência, a partir da origem $(1,0)$. O ponto será a extremidade do arco.

Se $\boldsymbol{t < 0}$, temos que $E(t)$ será obtido desenhando-se um arco de medida t no **sentido horário** na circunferência, a partir da origem $(1,0)$. O ponto será a extremidade do arco.

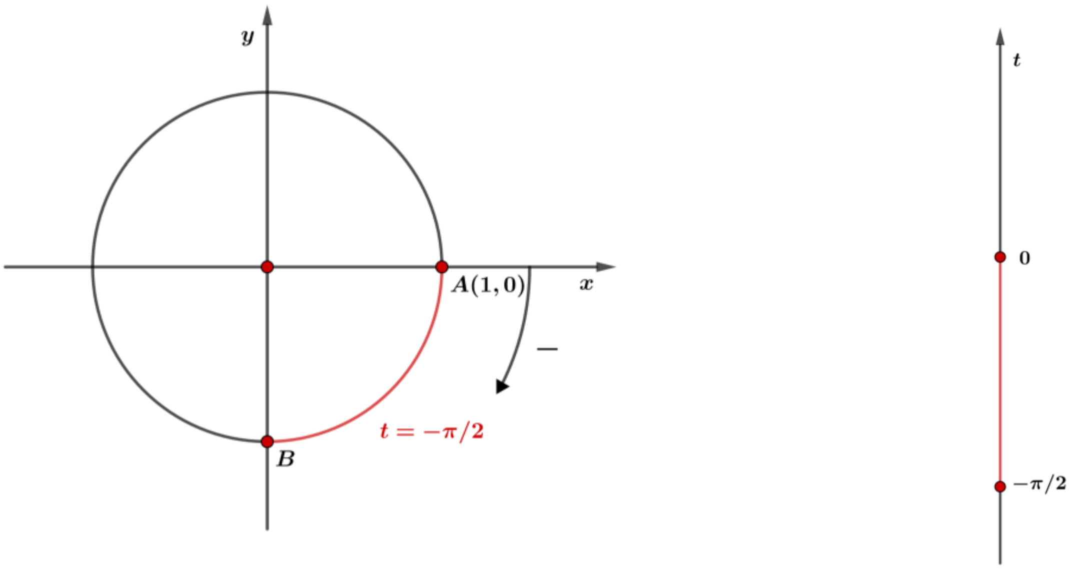
Pode parecer um pouco confuso no começo, mas após alguns exemplos você verá que é mais simples do que parece.

Exemplos:

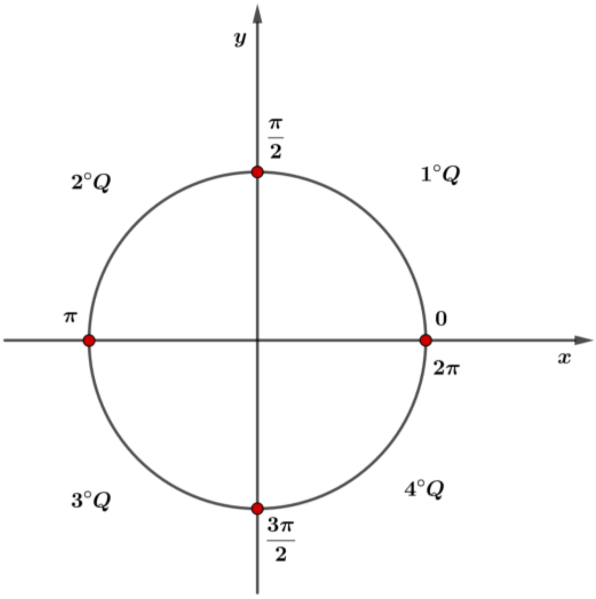
1) Vamos tomar $t = \pi/3$. Como esse valor é positivo, vamos desenhar um arco de medida $\pi/3$ no sentido anti-horário na circunferência trigonométrica:



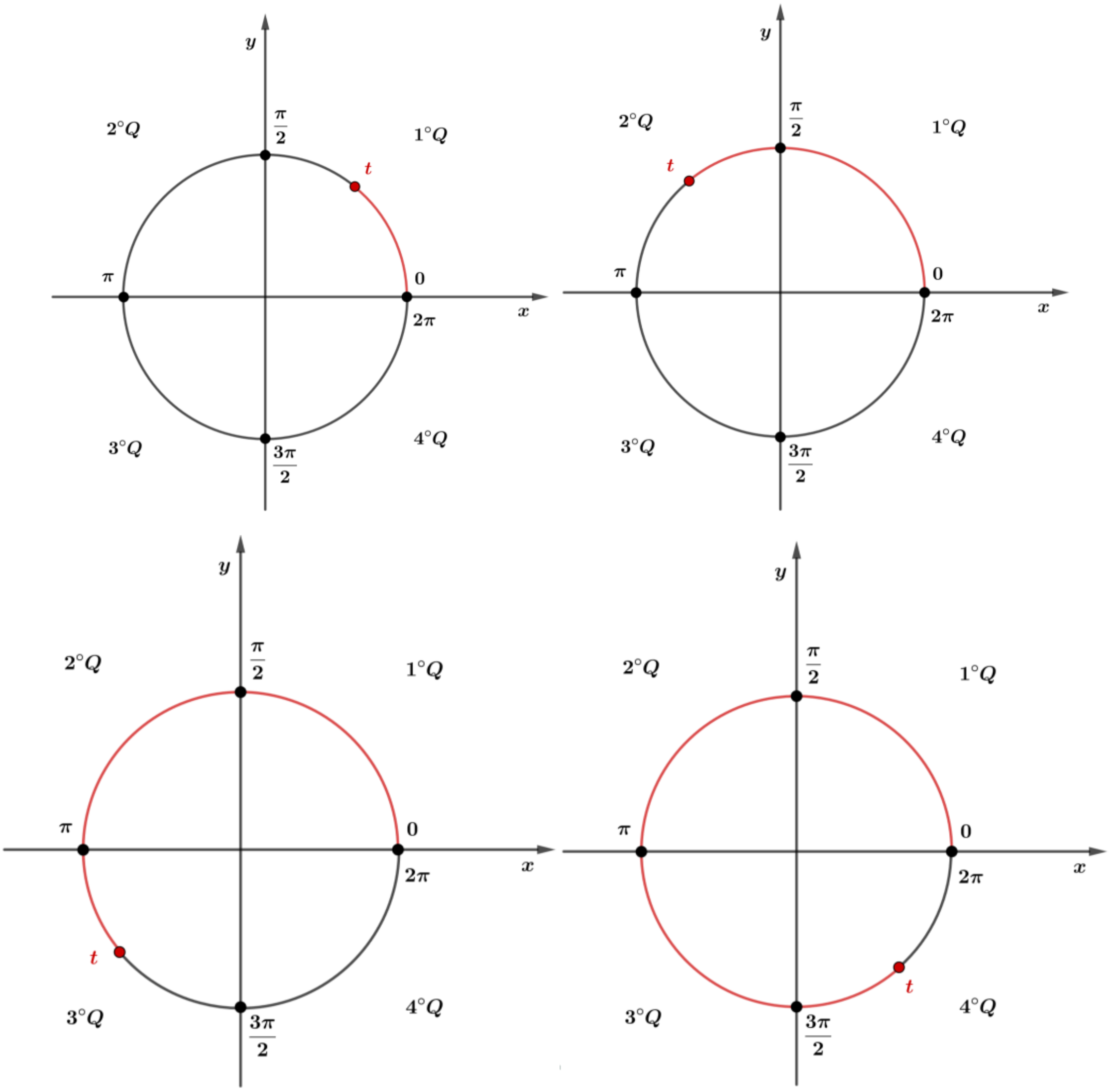
2) Vamos tomar $t = -\pi/2$. Note que o valor de t é negativo, logo devemos percorrer a circunferência no sentido horário:



Perceba que **na prática seria como se estivéssemos enrolando um fio inextensível de comprimento t ao longo de um carretel**, que é a circunferência. Então, podemos ver que a circunferência adota o sentido anti-horário para os valores positivos! Logo, podemos inserir os arcos de acordo com a seguinte figura:



Do sistema cartesiano, sabemos quais regiões representam os quadrantes e elas foram identificadas na figura. Preste atenção! Pois é importante entender quais regiões do plano representam os quadrantes! Vejamos alguns exemplos de arcos e suas localizações nos quadrantes.



Note que

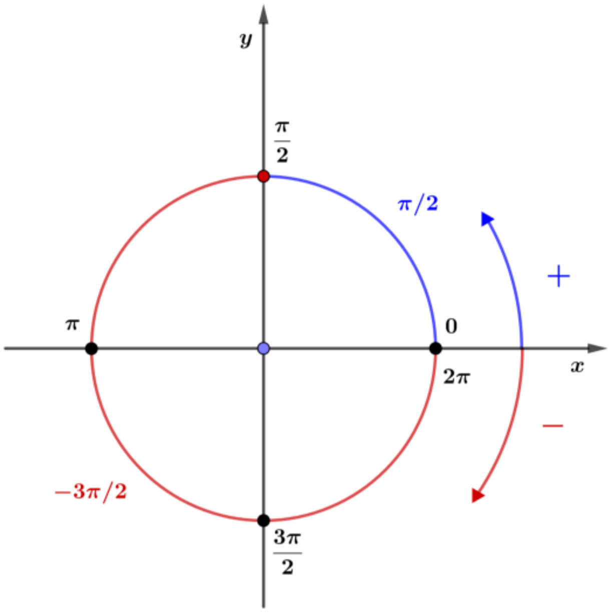
$$t \in \left]0, \pi/2\right[\Rightarrow t \text{ } pertence \text{ } ao \text{ } 1°quadrante$$
$$t \in \left]\pi/2, \pi\right[\Rightarrow t \text{ } pertence \text{ } ao \text{ } 2°quadrante$$
$$t \in \left]\pi, 3\pi/2\right[\Rightarrow t \text{ } pertence \text{ } ao \text{ } 3°quadrante$$
$$t \in \left]3\pi/2, 2\pi\right[\Rightarrow t \text{ } pertence \text{ } ao \text{ } 4°quadrante$$

Para localizar os arcos nos quadrantes, também podemos usar a medida angular dos arcos em graus:

$$\alpha \in \left]0, 90°\right[\Rightarrow arco \text{ } do \text{ } 1°Q$$
$$\alpha \in \left]90°, 180°\right[\Rightarrow arco \text{ } do \text{ } 2°Q$$
$$\alpha \in \left]180°, 270°\right[\Rightarrow arco \text{ } do \text{ } 3°Q$$
$$\alpha \in \left]270°, 360°\right[\Rightarrow arco \text{ } do \text{ } 4°Q$$

Vamos ver mais alguns exemplos de aplicação da função de Euler.

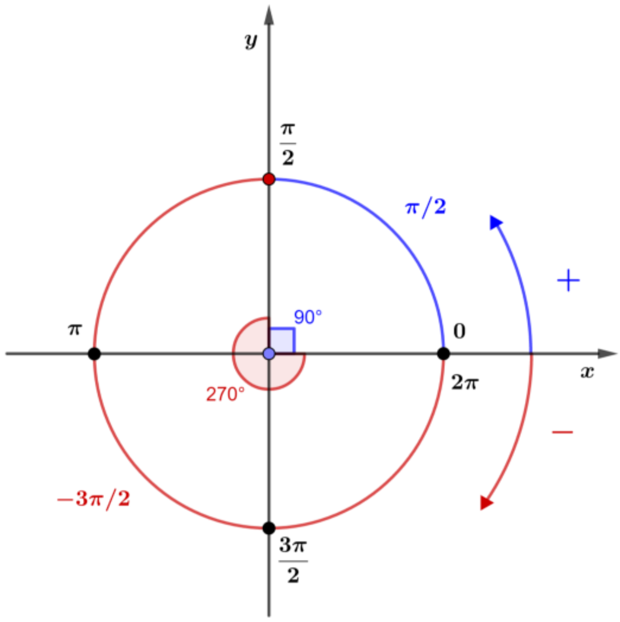
3) Agora, vamos tomar $t = \pi/2$ e $t = -3\pi/2$.



Note que podemos chegar no mesmo ponto percorrendo a circunferência no sentido horário ou anti-horário. Além disso, perceba que no sentido horário, devemos iniciar pela posição 2π e fazer $-3\pi/2$:

$$2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{4\pi - 3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Atenção! Você também pode usar as medidas angulares em graus, mas ela será a medida do ângulo central do arco e jamais poderá associá-lo como a medida do comprimento do arco (lembre-se que ela somente é igual ao ângulo quando estamos tralhando com radianos!).

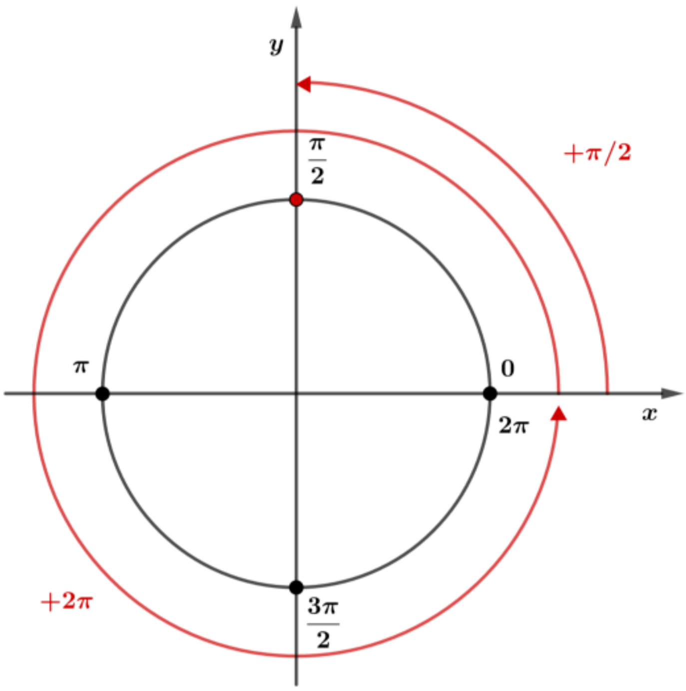


Perceba que o comprimento do arco azul é $\pi/2$ rad e o seu ângulo central é $90°$. Assim como o arco vermelho tem comprimento $3\pi/2$ e ângulo central $270°$. Nesse momento, você já deve estar acostumado a converter ângulos em radianos para graus.

4) Vamos tomar $t = 5\pi/2$. Note que devemos enrolar um fio de tamanho maior que o arco de circunferência 2π! Nesse caso, basta dar voltas completas na circunferência até que o fio de comprimento $5\pi/2$ esteja completamente enrolado! Assim, temos:

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi + \pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

Então, $5\pi/2$ dá uma volta completa na circunferência e percorre mais $\pi/2$ no sentido anti-horário.



Perceba que a extremidade do fio coincide com o caso em que tomamos $t = \pi/2$, ou seja, $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.

Assim, percebemos que a **função de Euler é periódica**! Podemos dar diversas voltas completas na circunferência e chegar no mesmo ponto! Logo, podemos entender que a cada $2\pi\, rad$, damos 1 volta completa na circunferência. Então, $4\pi\, rad = 2 \cdot 2\pi$ que significa que damos 2 voltas completas. De forma geral, $k \cdot 2\pi$ representa k voltas completas na circunferência. Logo:

$$\boxed{E(t) = E(t + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}}$$

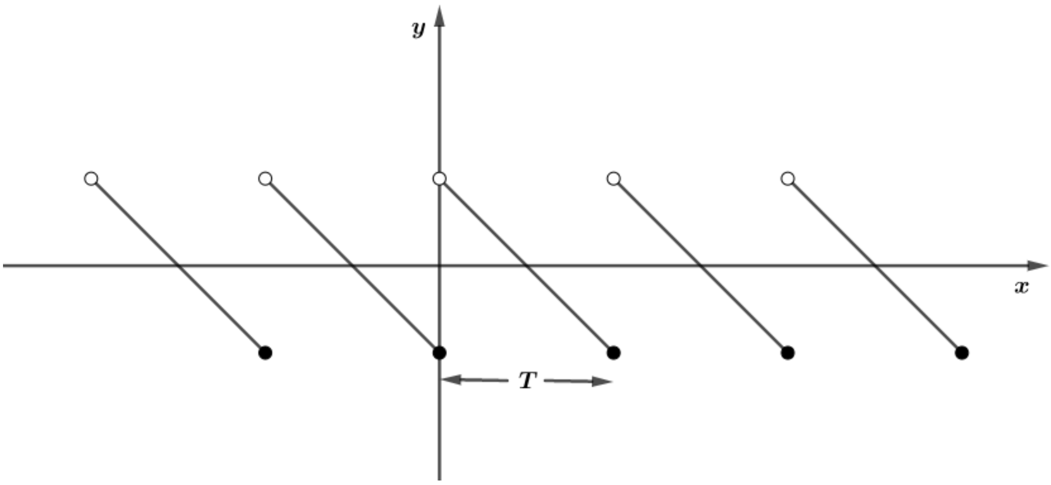
Atenção! O valor de k é inteiro, pois pode ser **negativo**. Nesse caso, basta dar **voltas na circunferência no sentido horário**!

Nesse momento, vamos introduzir a ideia de arcos congruentes.

Definição:
Uma função $f: A \to B$ é periódica se vale a relação:

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in A$$

Onde $T > 0$, o menor valor de T que satisfaz essa relação é chamado de período fundamental da função f.
Exemplo gráfico:



Note que a função se repete a cada período T.

3.2.2. ARCOS CONGRUENTES

Dizemos que os arcos α e β são congruentes quando:

$$\boxed{\alpha \equiv \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Assim, temos que α será congruente a β quando ela resultar no mesmo ponto no círculo trigonométrico! Na prática, basta verificar quantas voltas completas um arco percorre no círculo trigonométrico.

*Perceba que o símbolo ≡ significa congruente a.

Veja os exemplos:

1) $25\pi/3$

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi + \pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = \underbrace{4 \cdot 2\pi}_{4\ voltas\ completas} + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{25\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$$

$25\pi/3$ dá 4 voltas completas na circunferência e é congruente a $\pi/3$.

2) $31\pi/6$

$$\frac{31\pi}{6} = \frac{24\pi + 7\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = 4\pi + \frac{7\pi}{6} = \underbrace{2 \cdot 2\pi}_{2\ voltas\ completas} + \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{31\pi}{6} \equiv \frac{7\pi}{6}$$

$31\pi/6$ dá 2 voltas completas na circunferência e é congruente a $7\pi/6$.

Na prática, basta reescrever o numerador da seguinte forma: multiplicamos o denominador por 2π e depois procuramos o maior número inteiro que multiplicado pelo valor encontrado é menor que o numerador. Após isso, somamos o valor que falta para completar o valor do numerador.

No exemplo 1, multiplicamos $2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Vemos que o maior inteiro que deve ser multiplicado por 6π é 4, pois $6\pi \cdot 4 = 24\pi < 25\pi$. Para completar 25π, somamos π.

Vimos exemplos com medidas em radianos, mas também podemos considerar a medida angular dos arcos em graus. Para isso, basta usar:

$$\boxed{\alpha \equiv \beta + k \cdot 360°, k \in \mathbb{R}}$$

A ideia é a mesma: verificar se após k voltas completas chegamos no mesmo ponto.

Exemplos:

3) $1270°$

Para os graus, o método é dividir o ângulo por $360°$ e o resto encontrado será justamente o ângulo equivalente do arco. Dividindo $1270°$ por $360°$:

$$1270° = \underbrace{360° \cdot 3}_{3\ voltas\ completas} + \underbrace{190°}_{resto}$$

Portanto, podemos afirmar que o arco com ângulo central de $1270°$ é congruente ao arco com ângulo central $190°$.

*Observação: faça a divisão euclidiana para encontrar os resultados no começo dos estudos!

4) $735°$

Dividindo $735°$ por $360°$:

$$735° = \underbrace{360° \cdot 2}_{2\ voltas\ completas} + \underbrace{15°}_{resto}$$

O arco de medida angular $735°$ é congruente ao arco de medida angular $15°$.

*Atenção! Quando usamos os graus para denotar os arcos, entenda que se trata da medida angular e não do comprimento do arco. Então, podemos simplesmente dizer que o arco de $735°$ é congruente ao arco de $15°$.

6. Encontre os arcos côngruos.

a) $\mathbf{81\pi/4}$

b) $\mathbf{41\pi/3}$

c) $\mathbf{2100°}$

d) $\mathbf{3020°}$

Comentários

a)

$$\frac{81\pi}{4} = \frac{80\pi + \pi}{4} = 20\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\frac{41\pi}{3} = \frac{36\pi + 5\pi}{3} = 12\pi + \frac{5\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$$

c) $2100° = 360° \cdot 5 + 300° \equiv 300°$

d) $3020° = 360° \cdot 8 + 140° \equiv 140°$

Gabarito: a) $\mathbf{\pi/4}$ **b)** $\mathbf{5\pi/3}$ **c)** $\mathbf{300°}$ **d)** $\mathbf{140°}$

---

7. Localize o quadrante dos arcos abaixo.

a) $\mathbf{81\pi/4}$

b) $\mathbf{41\pi/3}$

c) $\mathbf{2100°}$

d) $\mathbf{3020°}$

Comentários

Da questão anterior, temos:

a)

$$\frac{81\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$$

$$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \in 1°Q$$

b)

$$\frac{41\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$$

$$\therefore \frac{5\pi}{3} \in 4°Q$$

c) $2100° \equiv 300°$

$$270° < 300° < 360°$$

$$\therefore 300° \in 4°Q$$

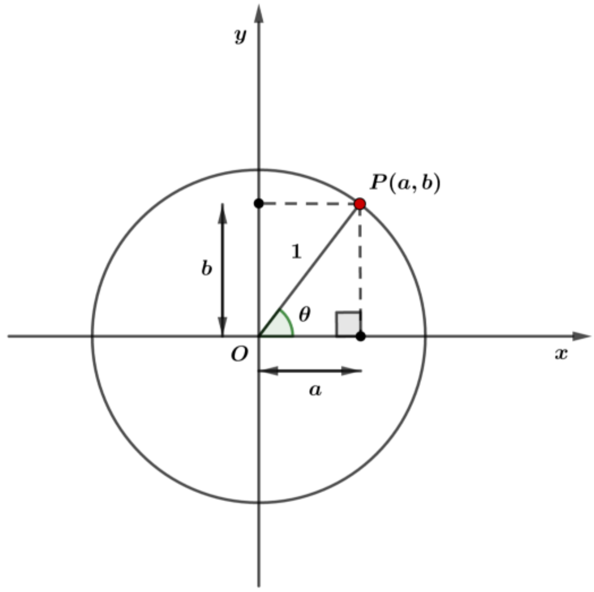
d) $3020° \equiv 140°$

$$90° < 140° < 180°$$

$$\therefore 140° \in 2°Q$$

3.2.3. RAZÃO SENO E COSSENO NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Vamos tomar um ponto $P(a, b)$ pertencente ao círculo trigonométrico de raio unitário. Observe a figura abaixo:

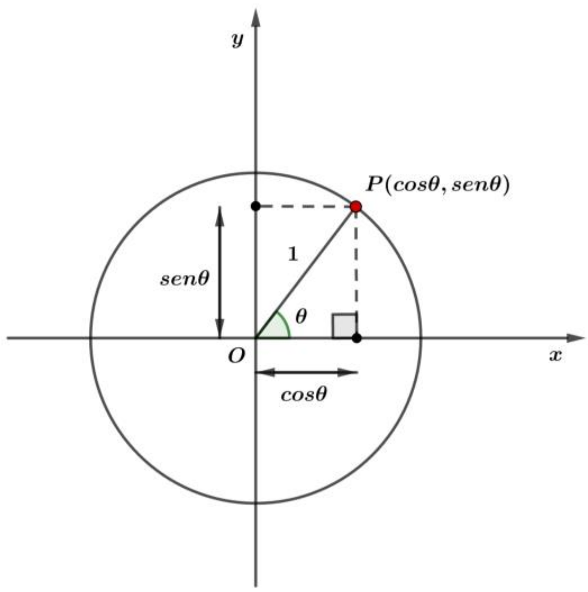


Note que as coordenadas (a, b) do ponto P podem ser representadas pela razão seno e cosseno, pois analisando o triângulo retângulo presente na figura, obtemos:

$$sen\theta = \frac{b}{1} \Rightarrow b = sen\theta$$

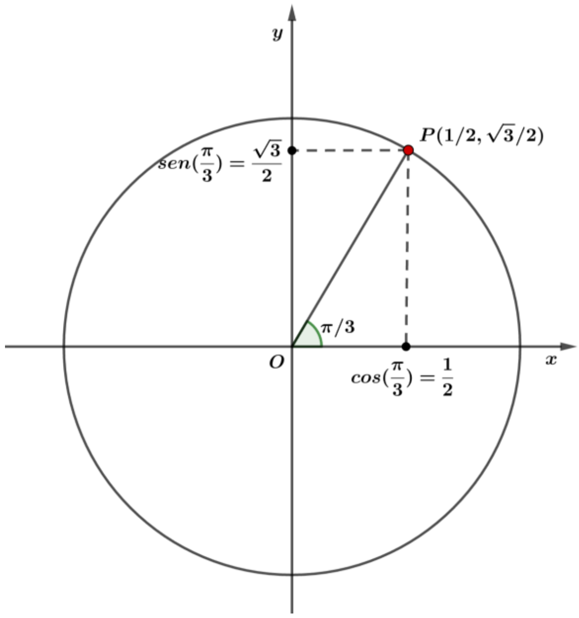
$$\cos\theta = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\theta$$

Assim, veja que a coordenada x do ponto P é igual ao cosseno do ângulo θ e a coordenada y é igual ao seno do ângulo θ.



Por esse motivo, quando usamos o círculo trigonométrico, dizemos que o **eixo x representa o eixo dos cossenos** e o **eixo y é o eixo dos senos**. Vamos inserir o arco de $\pi/3$ no círculo. Sabemos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \; e \; sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



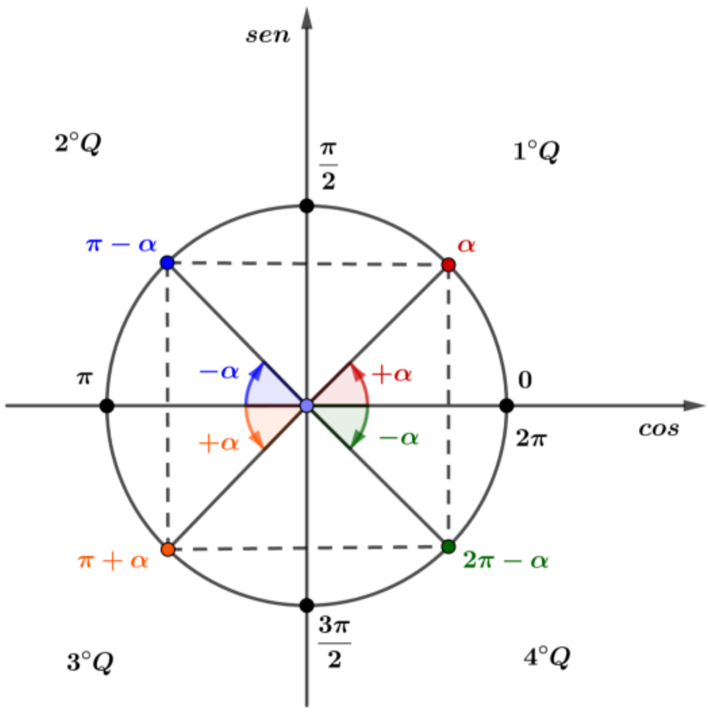
Observando-se o círculo e suas coordenadas no sistema cartesiano, podemos ver que

$$\cos 0 = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \cos\pi = -1$$

$$sen\ 0 = sen\ \pi = 0, sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Esses valores são obtidos pelas coordenadas do ponto P para cada um desses arcos.

Para obtermos o valor do seno e cosseno dos arcos que não estão no 1° quadrante, usaremos o fato de que no círculo há diversas simetrias. Para o círculo trigonométrico, chamaremos o eixo x de cosseno e o eixo y de seno. Vamos supor que temos um arco α que está no primeiro quadrante, assim para os outros quadrantes devemos usar o seguinte esquema:



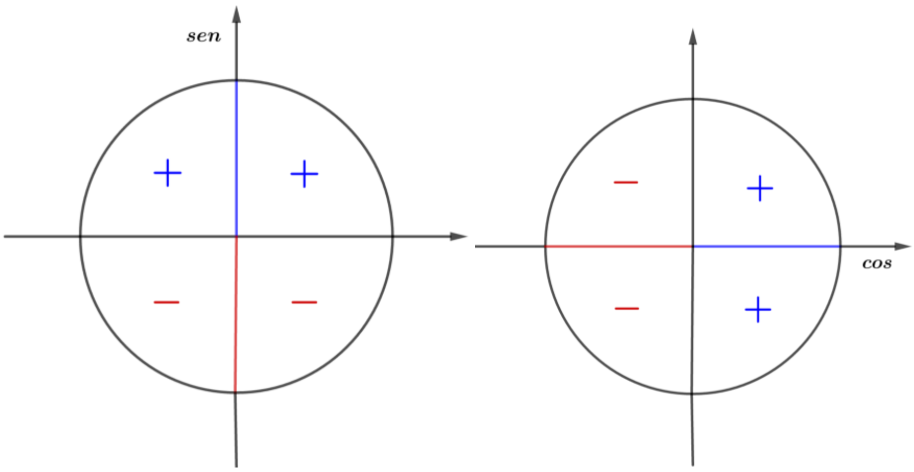
Da figura, podemos ver que

$$sen\ \alpha = sen(\pi - \alpha) > 0\ (região\ positiva\ do\ eixo\ y)$$
$$sen(\pi + \alpha) = sen(2\pi - \alpha) < 0\ (região\ negativa\ do\ eixo\ y)$$
$$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha) > 0\ (região\ positiva\ do\ eixo\ x)$$
$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha) < 0\ (região\ negativa\ do\ eixo\ x)$$

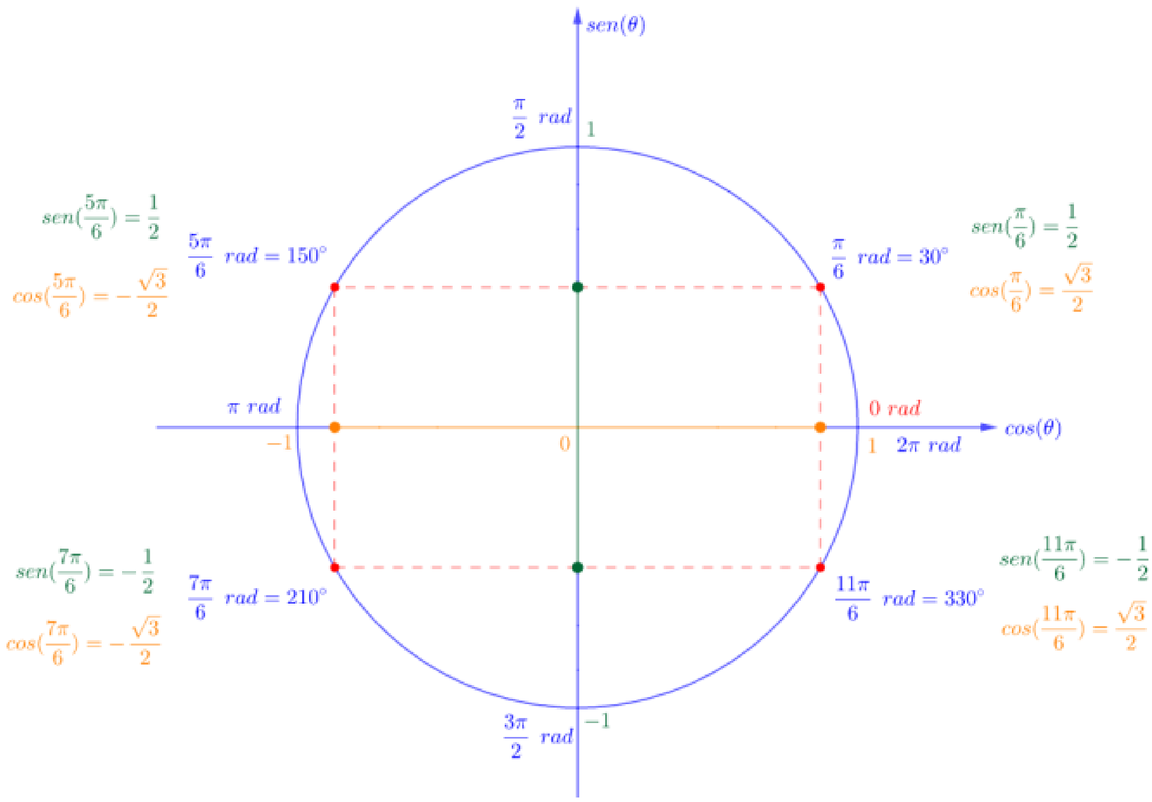
Além disso, em módulo (valor absoluto), podemos escrever que

$$|sen\ \alpha| = |sen(\pi - \alpha)| = |sen(\pi + \alpha)| = |sen(2\pi - \alpha)|$$
$$|\cos\alpha| = |\cos(\pi - \alpha)| = |\cos(\pi + \alpha)| = |\cos(2\pi - \alpha)|$$

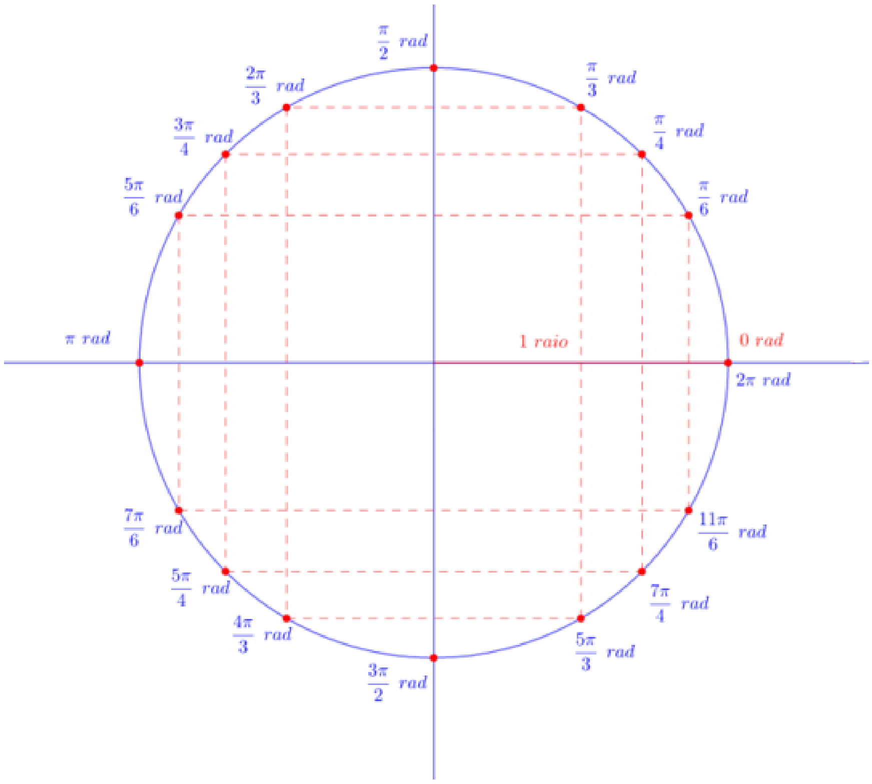
Assim, podemos ver que o seno é positivo no 1° e 2° quadrantes e é negativo no 3° e 4° quadrantes. O cosseno é positivo no 1° e 4° quadrantes e é negativo no 2° e 3° quadrantes.



Usando o esquema, vamos desenhar o círculo para o arco de $\pi/6$ e encontrar o valor do seno e cosseno dos outros arcos:

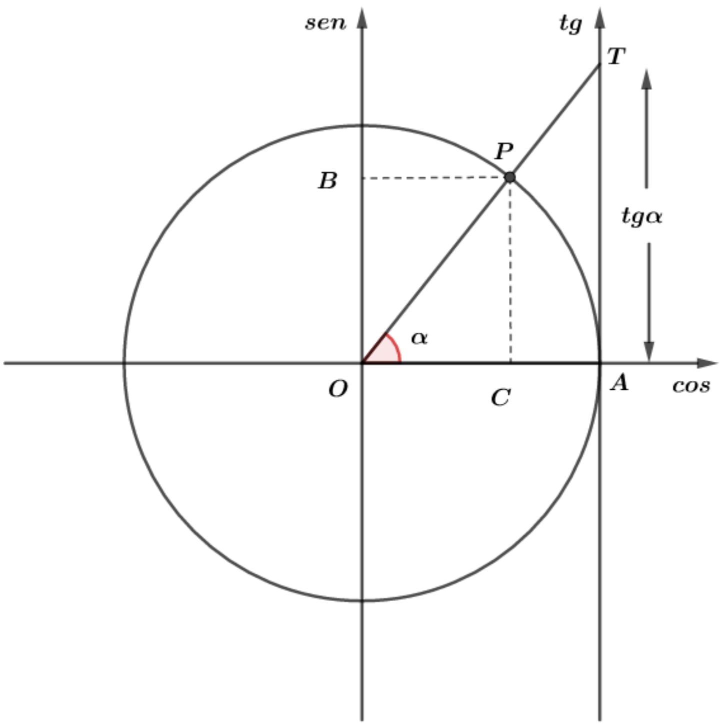


Usando o esquema para todos os arcos notáveis, obtemos a seguinte figura:

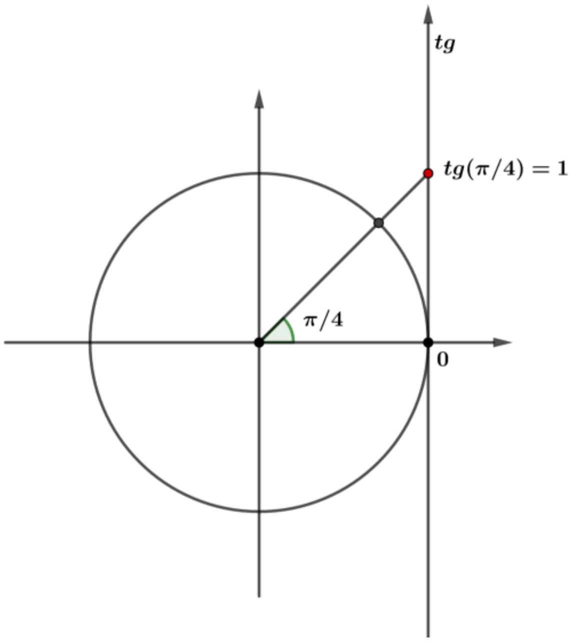


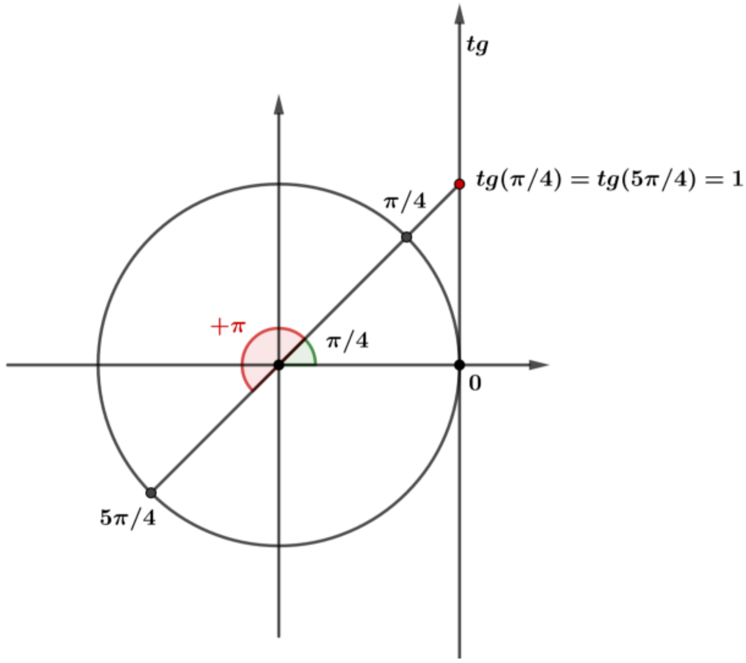
3.2.4. RAZÃO TANGENTE NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Sabemos que o cosseno e o seno são representados pelos eixos x e y, respectivamente, no círculo trigonométrico. A razão tangente é representada por uma reta que passa pela origem do círculo e tangencia este mesmo ponto:



Para obter o valor da tangente, basta prolongar o segmento OP até que ele atinja a reta da tangente. O ponto de coincidência indicará o valor da tangente. Vejamos o caso do arco de $\pi/4$:

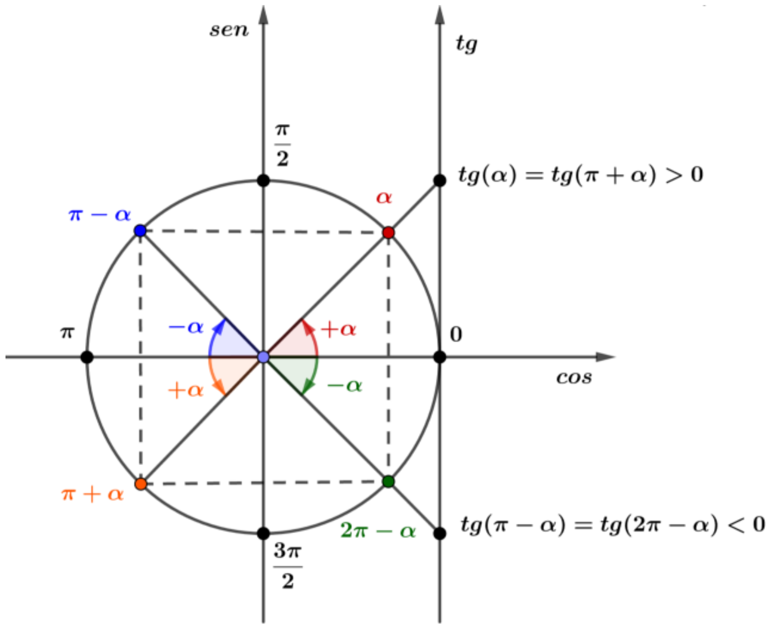




Note que para obter o valor da tangente no 3° quadrante, somamos π, pois os valores da tangente são determinados pelo segmento de reta que passa pela origem do círculo e pelos arcos. Assim, podemos ver que

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = tg\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$$

Então, podemos criar o seguinte esquema:



Perceba que

$$tg\alpha = tg(\pi + \alpha) = -tg(\pi - \alpha) = -tg(2\pi - \alpha)$$

Assim, podemos afirmar que

$$tg\theta > 0, se\ \theta \in 1°Q\ ou\ 3°Q$$

$$tg\theta < 0, se\ \theta \in 2°Q\ ou\ 4°Q$$

*Observação: no esquema usamos apenas arcos positivos, mas nada impede de usarmos arcos negativos. Poderíamos muito bem escrever $tg(2\pi - \alpha) = tg(-\alpha)$. Lembre-se que o sinal apenas indica qual o sentido que o arco percorre!

8. Determine o valor das razões trigonométricas abaixo.

a) $\boldsymbol{sen\ 225°}$

b) $\boldsymbol{cos\ 330°}$

c) $\boldsymbol{tg(-60°)}$

d) $\boldsymbol{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$

e) $\boldsymbol{cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

f) $\boldsymbol{tg\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

g) $\boldsymbol{tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$

***Sugestão: caso esteja no começo da preparação e não tenha familiaridade com o círculo, desenhe o esquema em um papel e use-o como guia para localizar os arcos.**

Comentários

a) Temos:

$$sen(225°) = sen(180° + 45°)$$

Esse arco pertence ao terceiro quadrante, logo o seno deve ser negativo.

$$sen(225°) = -sen(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Temos:

$$\cos(330°) = \cos(360° - 30°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Note que $-60°$ indica que o arco está no quarto quadrante, pois caminha $60°$ no sentido horário, logo:

$$tg(-60°) = -tg(60°) = -\sqrt{3}$$

d) Temos:

$$sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = sen\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Caminho alternativo:

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{5}{3} \cdot 180° = 300°$$

$$sen(300°) = sen(360° - 60°) = -sen(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

*Observação: alguns alunos preferem trabalhar com o arco em graus, mas tente se acostumar com a notação em radianos porque será muito cobrado em prova.

e) Temos:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

f) Temos:

$$tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = tg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

g) Um modo de achar o arco positivo é somar 2π:

$$tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = tg\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = tg\left(\frac{-4\pi + 6\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Gabarito: a) $-\sqrt{2}/2$ b) $\sqrt{3}/2$ c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}/2$ e) $-\sqrt{3}/2$ f) $-\sqrt{3}$ g) $-\sqrt{3}$

---

9. (EEAR/2018)

O valor de $\text{sen}\ 1270°$ é igual a

a) $-\cos 10°$

b) $-\text{sen}\ 30°$

c) $-\text{sen}\ 10°$

d) $-\cos 30°$

Comentários

$$\text{sen}\ 1270° = \text{sen}(3 \cdot 360° + 190°) = \text{sen}\ 190° = \text{sen}(180° + 10°) = -\text{sen}\ 10°$$

Gabarito: "c".

---

10. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\text{tg}\ 10° = \text{tg}(-10°)$

II- $\text{tg}\ 770° = -\text{tg}(50°)$

III- $\text{sen}\ 250° = \text{sen}\ 20°$

IV- $\text{sen}\ 460° = \text{sen}\ 100°$

O número de igualdades verdadeiras é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

Comentários

I- Falsa. A tangente é uma função ímpar:

$$\operatorname{tg}(-10°) = \frac{\operatorname{sen}(-10°)}{\cos(-10°)} = \frac{-\operatorname{sen}(10°)}{\cos(10°)} = -\operatorname{tg} 10°$$

II- Falsa.

$$\operatorname{tg} 770° = \operatorname{tg}(4 \cdot 180° + 50°) = \operatorname{tg} 50° \neq \operatorname{tg}(-50°)$$

III-Falsa.

$$\operatorname{sen} 250° = \operatorname{sen}(270° - 20°) = \operatorname{sen} 270° \cos 20° - \operatorname{sen} 20° \cos 270° = -\cos 20° \neq \operatorname{sen} 20°.$$

IV-Verdadeira.

$$\operatorname{sen} 460° = \operatorname{sen}(360° + 100°) = \operatorname{sen} 100°$$

Gabarito: "a".

4. OUTRAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Além das razões seno, cosseno e tangente, temos as razões secante, cossecante e cotangente. Elas são definidas por:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Note que **secante é o inverso do cosseno**, **cossecante é o inverso do seno** e a **cotangente é o inverso da tangente**. Logo, podemos afirmar que eles **terão os mesmos sinais das suas inversas nos quatro quadrantes**.

Assim, usando a relação fundamental, temos as seguintes relações:

$sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Se dividirmos a equação fundamental por $\cos^2 \alpha$, obtemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\boxed{\boldsymbol{tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}}$$

Se dividirmos a equação fundamental por $sen^2\alpha$, obtemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$\boxed{\boldsymbol{1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha}}$$

Além dessas apresentadas, temos mais duas que podem ajudar a resolver algumas questões:

$$\boxed{\boldsymbol{\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}}$$

Demonstração:

Sabemos que $sec\alpha = 1/cos\alpha$, assim, temos:

$$\cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{\sec^2\alpha}$$

Usando a relação fundamental $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$, obtemos:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$$

Para a relação do seno:

$$sen\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} sen\ \alpha \Rightarrow sen^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow sen^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{\sec^2\alpha}$$

$$\Rightarrow sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

11. Determine o valor das seguintes razões trigonométricas.

a) $\boldsymbol{cossec\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

b) $\boldsymbol{sec(45°)}$

c) $\boldsymbol{cotg(60°)}$

Comentários

a) Temos:

$$\text{cossec}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Temos:

$$\sec(45°) = \frac{1}{\cos(45°)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

c) Temos:

$$cotg(60°) = \frac{1}{tg(60°)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: a) $2\sqrt{3}/3$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}/3$

---

12. Sabendo que $tg(\alpha) = 2$, calcule:

a) $cotg(\alpha)$

b) $sec\ \alpha$

c) $cossec\ \alpha$

Comentários

a) Sabemos que cotangente é o inverso da tangente, logo:

$$cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{1}{2}$$

b) Usando a relação fundamental:

$$1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$$

$$1 + 2^2 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \pm\sqrt{5}$$

*Dado que o valor da tangente é positivo, não sabemos se o ângulo está no primeiro ou no terceiro quadrante, por isso assumimos que o secante (inverso do cosseno) pode ser positivo ou negativo.

c) Usando a relação fundamental:

$$1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$$

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \text{cossec}^2\alpha \Rightarrow \frac{5}{4} = \text{cossec}^2\alpha \Rightarrow \text{cossec}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Gabarito: a) $1/2$ b) $\pm\sqrt{5}$ c) $\pm\sqrt{5}/2$

---

13. (EEAR/2017)

Seja $M = \frac{\text{cossec}\,x + \sec x}{\text{cotg}\,x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\text{sen}\,x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\text{cossec}\, x$

Comentários

$$M = \frac{\text{cossec}\, x + \sec x}{\text{cotg}\, x + 1} = \frac{\frac{1}{\text{sen}\, x} + \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\text{sen}\, x} + 1} = \frac{\text{sen}\, x + \cos x}{\cos^2 x + \text{sen}\, x \cos x} = \frac{\text{sen}\, x + \cos x}{(\cos x + \text{sen}\, x) \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Gabarito: C

5. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

5.1. DEFINIÇÕES E GRÁFICOS

5.1.1. FUNÇÃO SENO

Seja $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, a função seno é dada por:

$$f(x) = senx$$

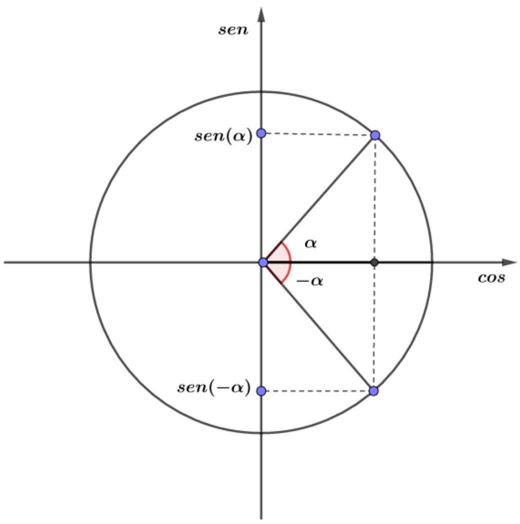
Domínio: $\mathbb{R}$

Imagem: $[\mathbf{-1}, \mathbf{1}]$

Período: $\mathbf{2\pi}$

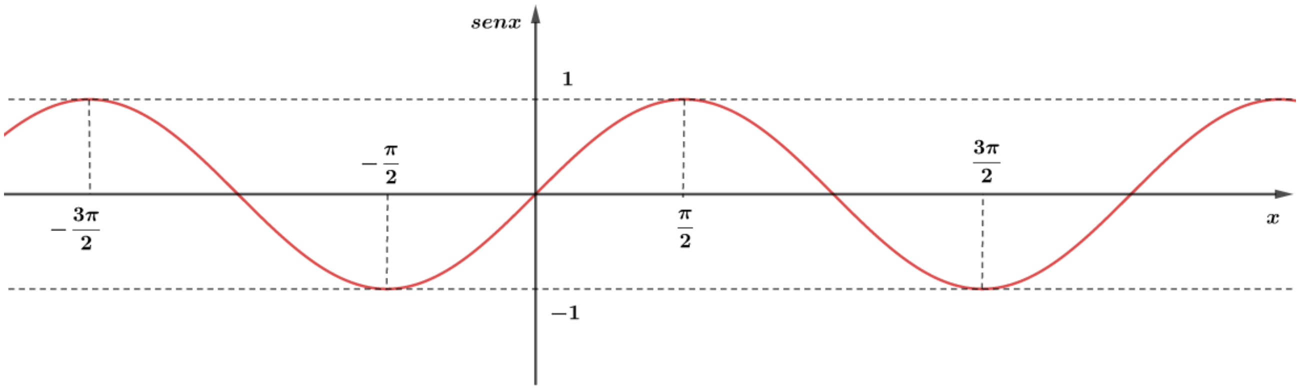
Paridade: ímpar

A função seno possui paridade ímpar, veja:



Pela figura, podemos ver que $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$. Isso caracteriza uma função ímpar.

A função seno possui o seguinte gráfico:



5.1.2. FUNÇÃO COSSENO

Seja $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, a função cosseno é dada por:

$$f(x) = cosx$$

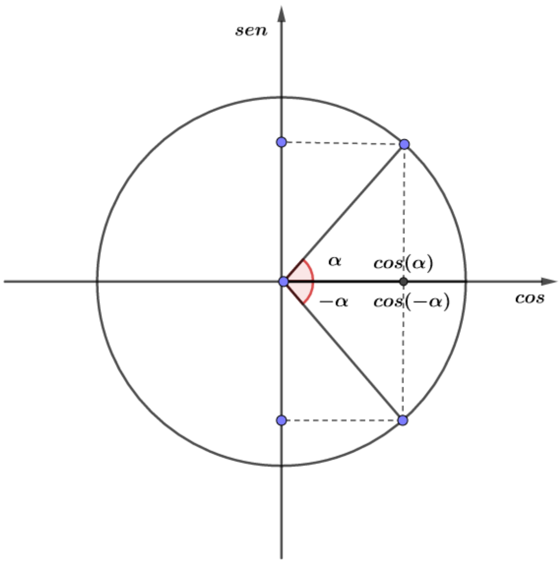
Domínio: $\mathbb{R}$

Imagem: $[\mathbf{-1}, \mathbf{1}]$

Período: $\mathbf{2\pi}$

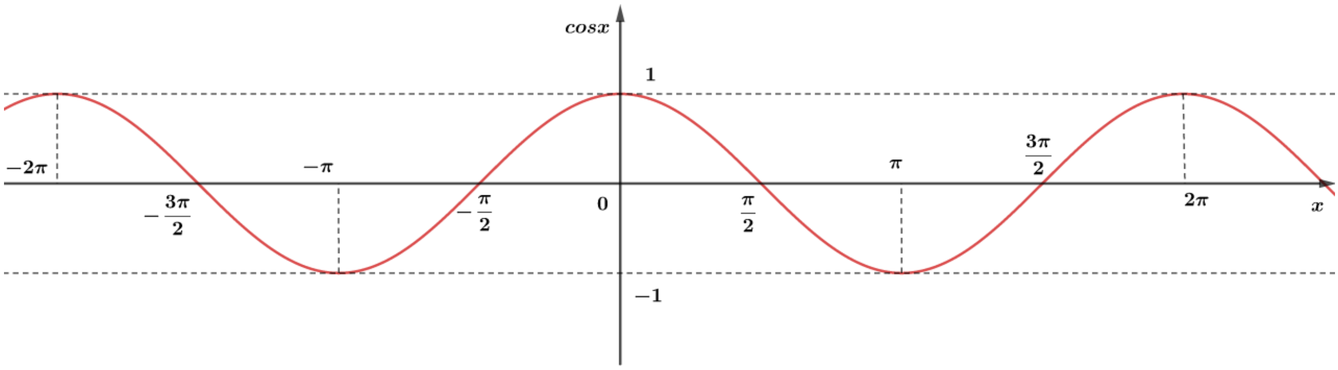
Paridade: par

A função cosseno possui paridade par, veja:



Podemos ver que $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$. Isso caracteriza uma função par.

A função cosseno possui o seguinte gráfico:



5.1.3. FUNÇÃO TANGENTE

$$f(x) = tg(x)$$

Domínio: $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \boldsymbol{x} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{2} + \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem: $\mathbb{R}$

Período: $\boldsymbol{\pi}$

Paridade: ímpar

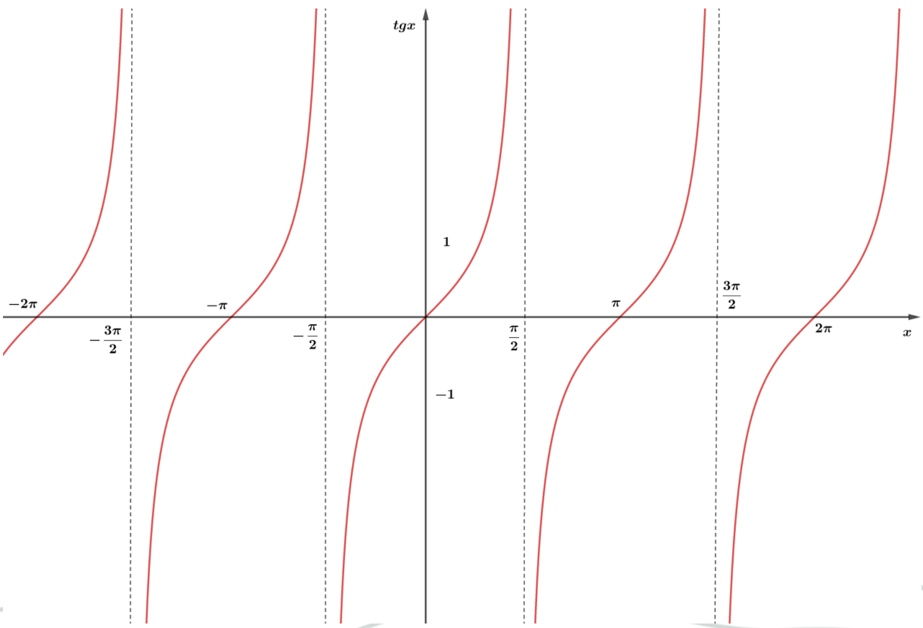
Como a tangente é a razão entre seno e cosseno, sabemos que o denominador não pode ser nulo, caso contrário, o valor da tangente ficaria indefinido. Assim, todos os ângulos que resultam em cosseno nulo não pertencem ao domínio da tangente:

$$\boldsymbol{tg\alpha} \in]-\infty, +\infty[, \boldsymbol{\alpha} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k\pi}$$

A paridade da função tangente é ímpar, pois:

$$tg(-\alpha) = \frac{sen(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -tg(\alpha)$$

A função tangente possui o seguinte gráfico:



5.1.4. FUNÇÃO COTANGENTE

$$f(x) = cotg(x)$$

Domínio: $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$

Imagem: $\mathbb{R}$

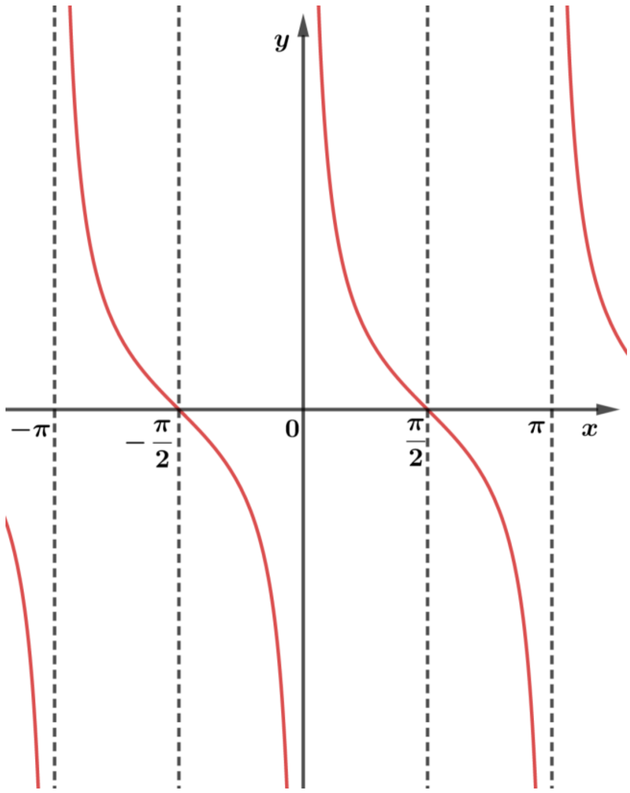
Período: $\boldsymbol{\pi}$

Paridade: ímpar

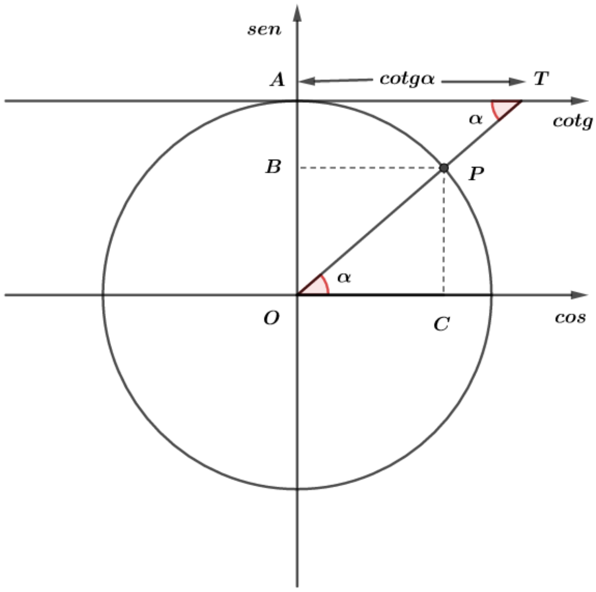
Como a função cotangente é a razão inversa da tangente, temos que ela possui a mesma paridade e periodicidade que a tangente.

Note que o domínio deve possuir $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pois esse valor anula o seno que é o denominador da cotangente.

O seu gráfico é dado por:



O eixo da cotangente também pode ser representado no ciclo trigonométrico. Veja a figura:



Os triângulos POC e OTA são semelhantes, assim, podemos escrever as seguintes razões:

$$\frac{AT}{AO} = \frac{OC}{BC}$$

$$\frac{cotg\alpha}{1} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\Rightarrow cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

O que nos mostra que a relação fundamental é satisfeita.

5.1.5. FUNÇÃO SECANTE

$$f(x) = sec(x)$$

Domínio: $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \boldsymbol{x} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem: $]-\infty, -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{1}, +\infty[$

Período: $\boldsymbol{2\pi}$

Paridade: par

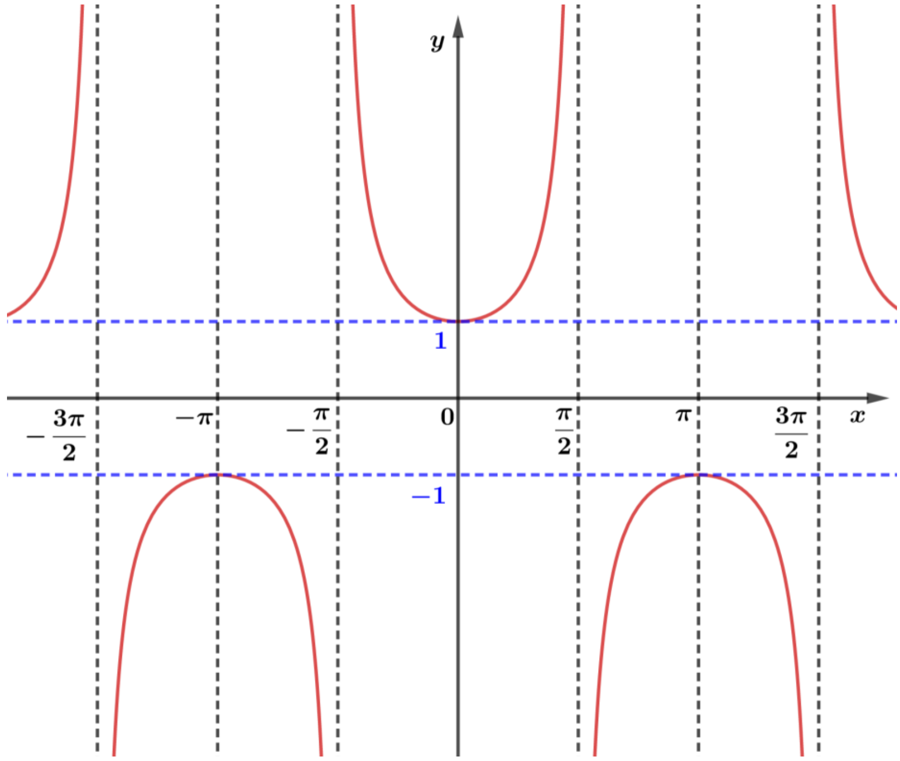
Como a função secante é a razão inversa do cosseno, temos que ela possui a mesma paridade e periodicidade que essa função. Além disso, dado que cosseno é limitado entre -1 e 1, temos:

$$-1 \leq cos\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{cos\alpha} \geq 1 \; ou \; \frac{1}{cos\alpha} \leq -1$$

$$\therefore \sec\alpha \geq 1 \; ou \sec\alpha \leq 1$$

$$\boldsymbol{sec\alpha} \in (-\infty, -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{1}, +\infty)$$

O seu gráfico é dado por:



5.1.6. FUNÇÃO COSSECANTE

$$f(x) = cossec(x)$$

Domínio: $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$

Imagem: $]-\infty, -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{1}, +\infty[$

Período: $\boldsymbol{2\pi}$

Paridade: ímpar

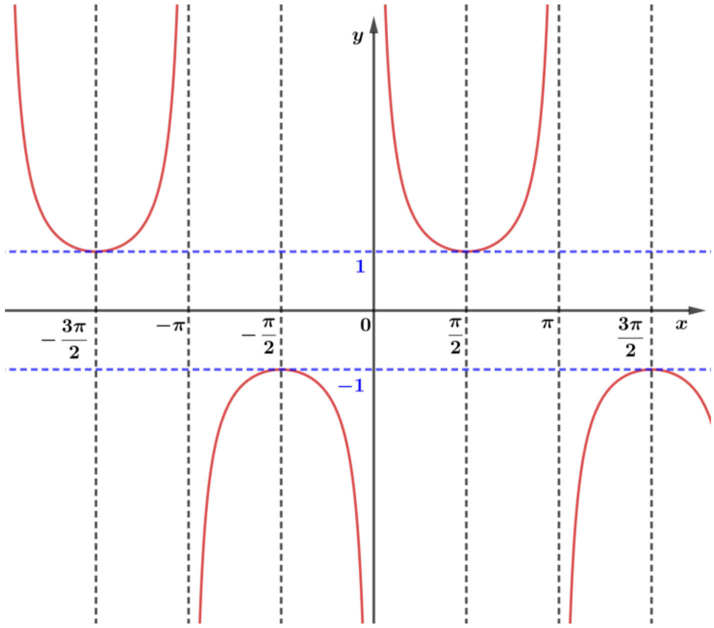
Como a função cossecante é a razão inversa do seno, temos que ela possui a mesma paridade e periodicidade que essa função. Além disso, dado que seno é limitado entre -1 e 1, temos:

$$-1 \leq sen\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{sen\ \alpha} \geq 1\ ou\ \frac{1}{sen\ \alpha} \leq -1$$

$$\therefore \operatorname{cossec} \alpha \geq 1\ ou \operatorname{cossec} \alpha \leq 1$$

$$\boldsymbol{cossec\ \alpha} \in (-\infty, -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{1}, +\infty)$$

O seu gráfico é dado por:



5.2. MONOTONICIDADE DAS FUNÇÕES NOS QUADRANTES

Analisando os valores das funções trigonométricas nos quatro quadrantes, podemos criar a seguinte tabela:

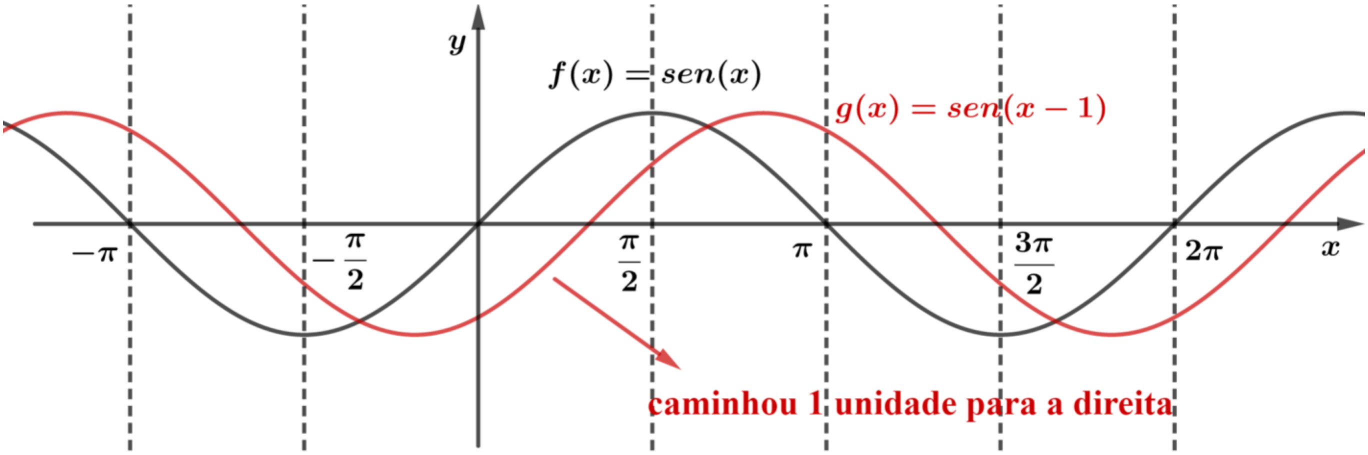
Função	1° quadrante	2° quadrante	3° quadrante	4° quadrante
$sen\ \theta$	Crescente (varia de 0 a 1)	Decrescente (varia de 1 a 0)	Decrescente (varia de 0 a -1)	Crescente (varia de -1 a 0)
$\cos\theta$	Decrescente (varia de 1 a 0)	Decrescente (varia de 0 a -1)	Crescente (varia de -1 a 0)	Crescente (varia de 0 a 1)
$tg\ \theta$	Crescente (varia de 0 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a 0)	Crescente (varia de 0 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a 0)
$cotg\ \theta$	Decrescente (varia de ∞ a 0)	Decrescente (varia de 0 a $-\infty$)	Decrescente (varia de ∞ a 0)	Decrescente (varia de 0 a $-\infty$)
$\sec\theta$	Crescente (varia 1 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a -1)	Decrescente (varia de -1 a $-\infty$)	Decrescente (varia de ∞ a 1)
$cossec\ \theta$	Decrescente (varia de ∞ a 1)	Crescente (varia 1 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a -1)	Decrescente (varia de -1 a $-\infty$)

5.3. TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

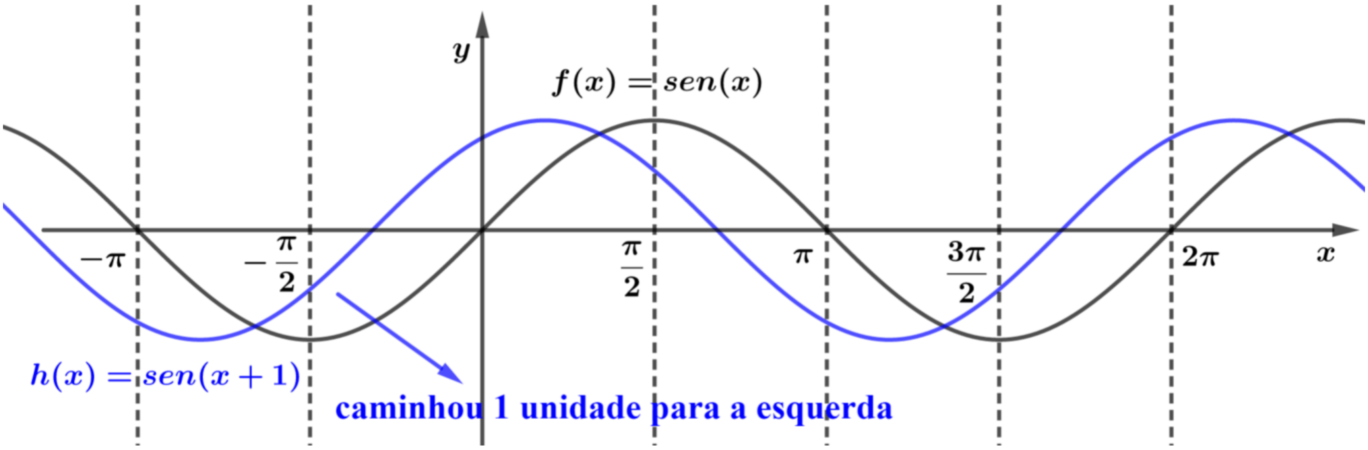
5.3.1. TRANSLAÇÃO HORIZONTAL

Podemos fazer uma translação horizontal na função $y = f(x)$, basta fazer $y = f(x - a)$. **Se $a > 0$, o gráfico de f caminhará a unidades para a direita na direção do eixo x.**

Vamos tomar como exemplo a função $f(x) = sen(x)$. Observe o gráfico de $g(x) = sen(x - 1)$:

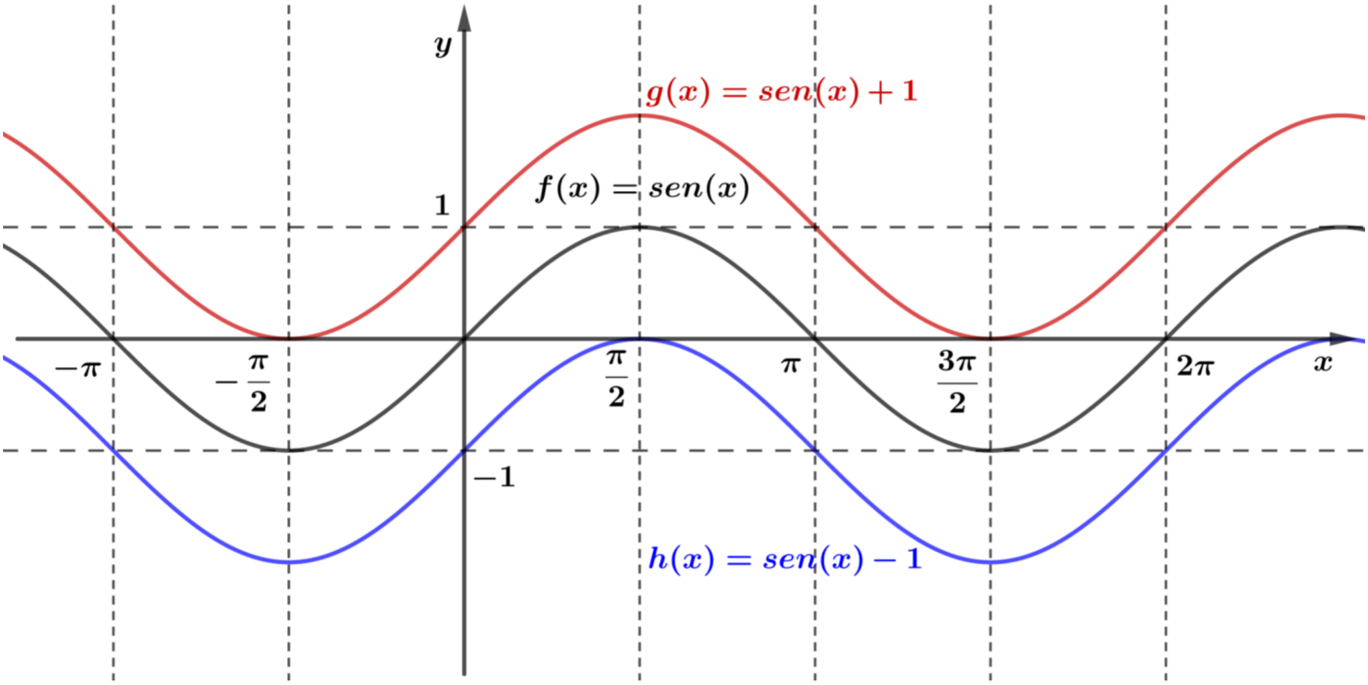


Se quiséssemos fazer uma translação para a esquerda, bastaria fazer $h(x) = sen(x + a)$, com $a > 0$, como no exemplo a seguir:



5.3.2. TRANSLAÇÃO VERTICAL

Para fazer uma translação vertical para cima em uma função $y = f(x)$, basta fazer a soma $y = f(x) + a$, com $a > 0$. Para transladar para baixo, basta fazer $y = f(x) - a$, com $a > 0$. Veja os gráficos para $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(x) + 1$ e $h(x) = sen(x) - 1$:

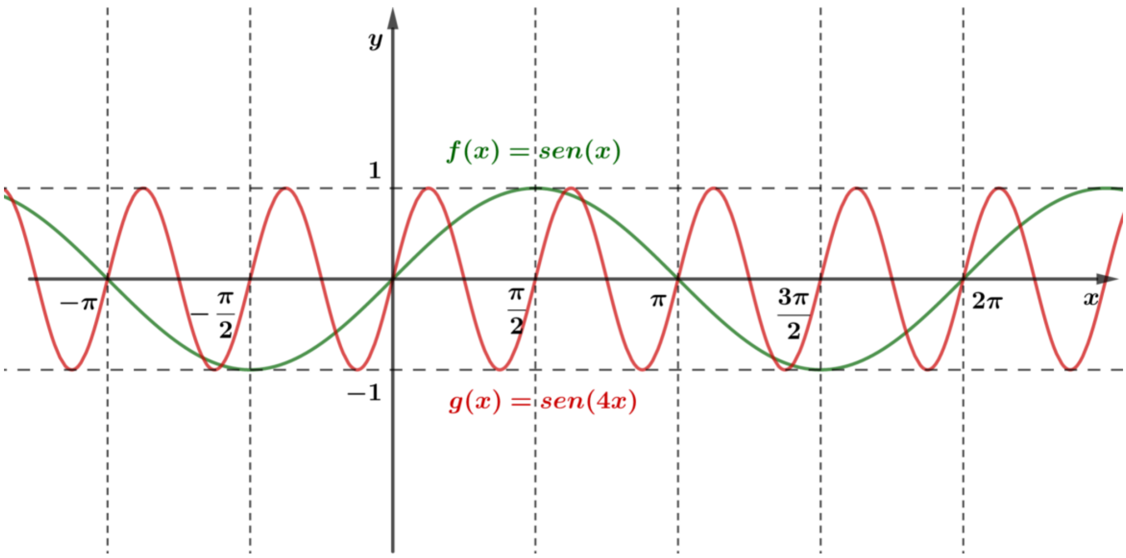


5.3.3. MUDANÇA DE PERÍODO

Se temos uma função $y = f(x)$ com período T e multiplicamos o x dentro de f por $a \in \mathbb{R}$, então $y = f(ax)$ terá período igual a $\frac{T}{|a|}$.

Veja o exemplo para $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{sen}(4x)$. Sabemos que o período de $\operatorname{sen} x$ é 2π, logo o período de g será:

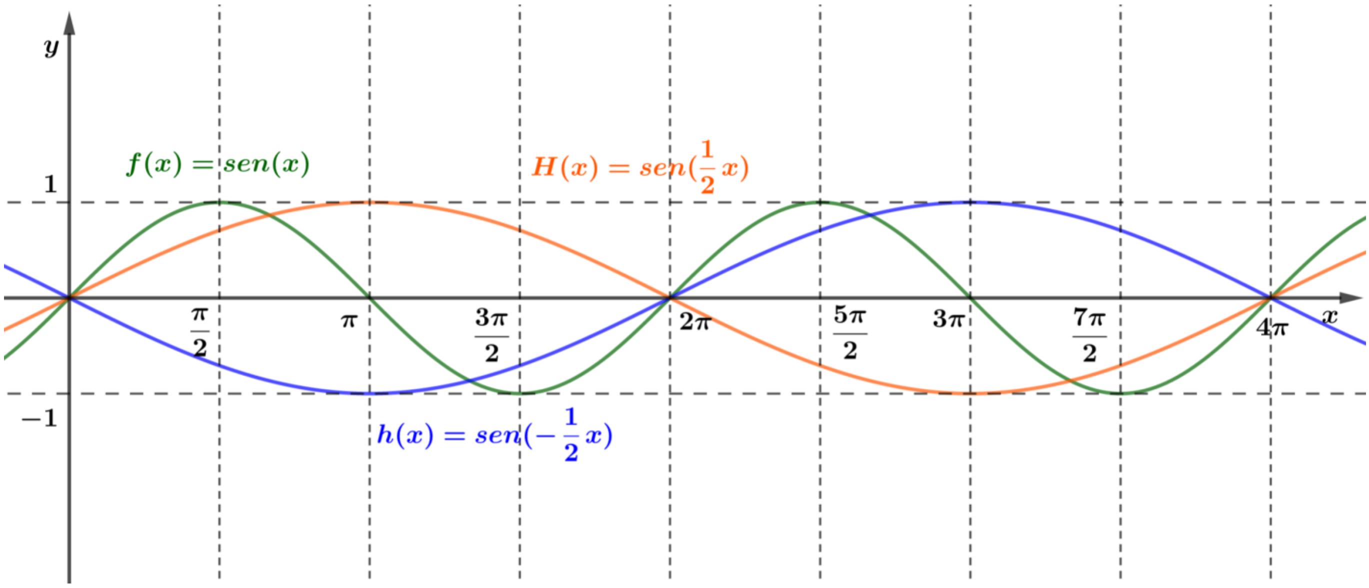
$$T_g = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$



Note que dividimos pelo módulo do número que multiplica x, então se $h(x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$, teríamos como período:

$$T_h = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

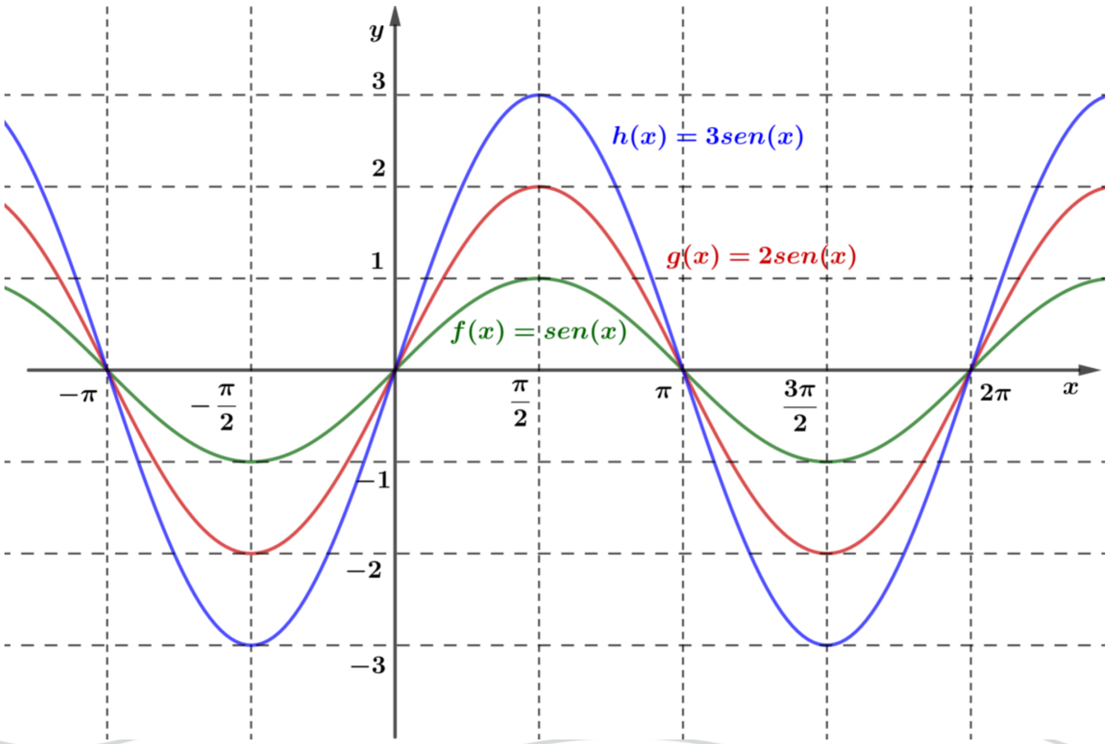
O sinal negativo não altera o período, mas pode mudar os valores da função para os diferentes valores de x. Vamos esboçar o gráfico de $h(x) = \text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$ e $H(x) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$:



Note que os valores de $h(x)$ são os valores de $H(x)$ espelhados em relação ao eixo x.

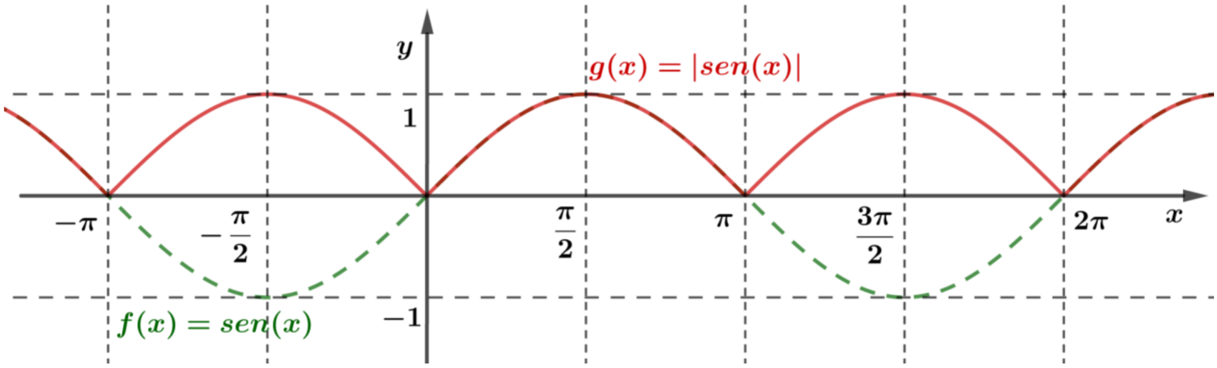
5.3.4. MUDANÇA DA AMPLITUDE DA FUNÇÃO

Para mudar a amplitude da função $y = f(x)$, basta fazer a multiplicação $y = af(x)$. Veja os exemplos:



5.3.5. APLICAÇÃO DO MÓDULO

Quando aplicamos o módulo, apenas rebatemos a parte negativa da função para cima. Veja o exemplo com $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = |sen(x)|$:



6. FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

Iniciemos o estudo das funções inversas. Devemos lembrar que uma função possui inversa se, e somente se, for bijetora. Assim, temos que restringir o domínio das funções circulares de modo que elas sejam bijetoras.

6.1. DEFINIÇÕES

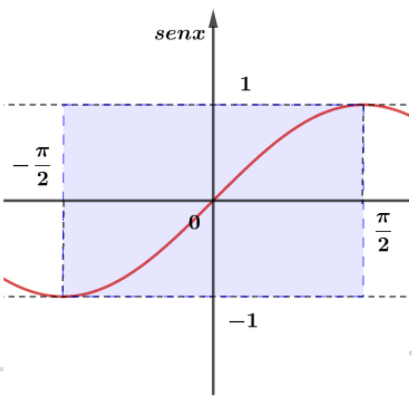
6.1.1. FUNÇÃO ARCO-SENO

Seja $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, se $f(x) = senx$ a função arco-seno é dada por:

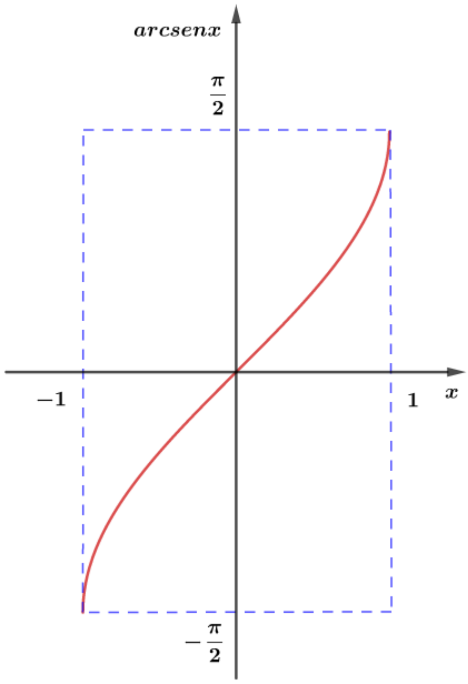
$$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(x) = arcsenx$$

Note que no domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a função seno é bijetora:



O gráfico da função arco-seno é dado por:



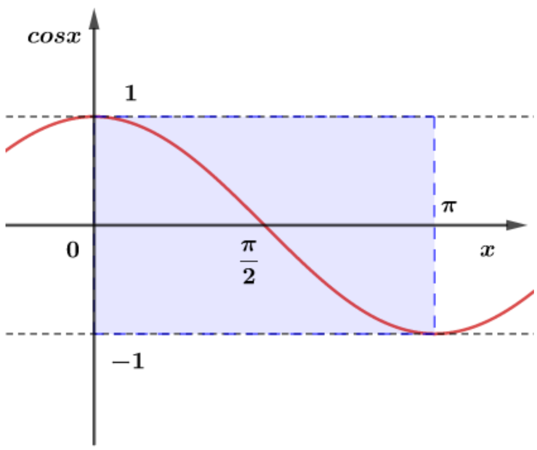
6.1.2. FUNÇÃO ARCO-COSSENO

Seja $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$, se $f(x) = cosx$ a função arco-cosseno é dada por:

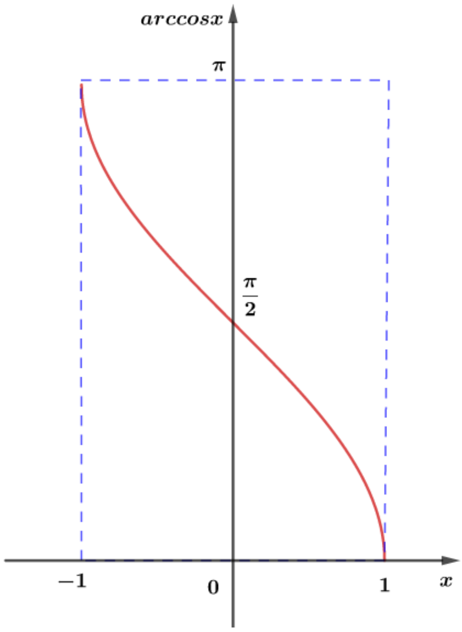
$$f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$f^{-1}(x) = arccosx$$

Note que no domínio $[0, \pi]$, a função cosseno é bijetora:



O gráfico da função arco-cosseno é dado por:



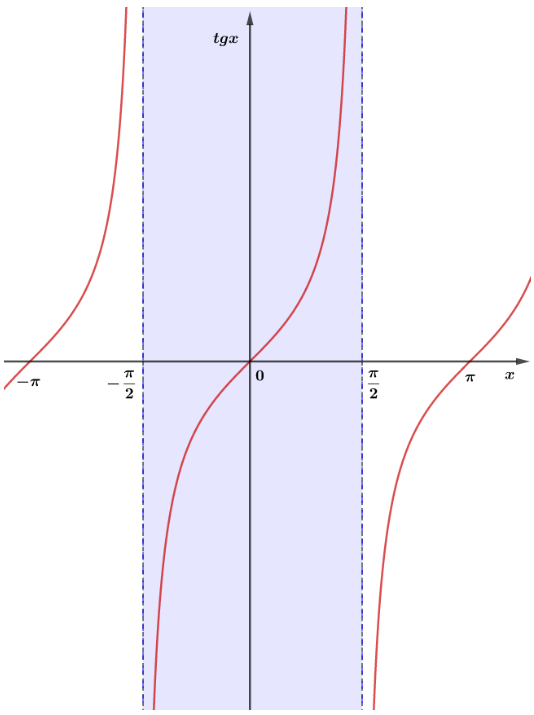
6.1.3. FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

Seja $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, se $f(x) = tgx$ a função arco-tangente é dada por:

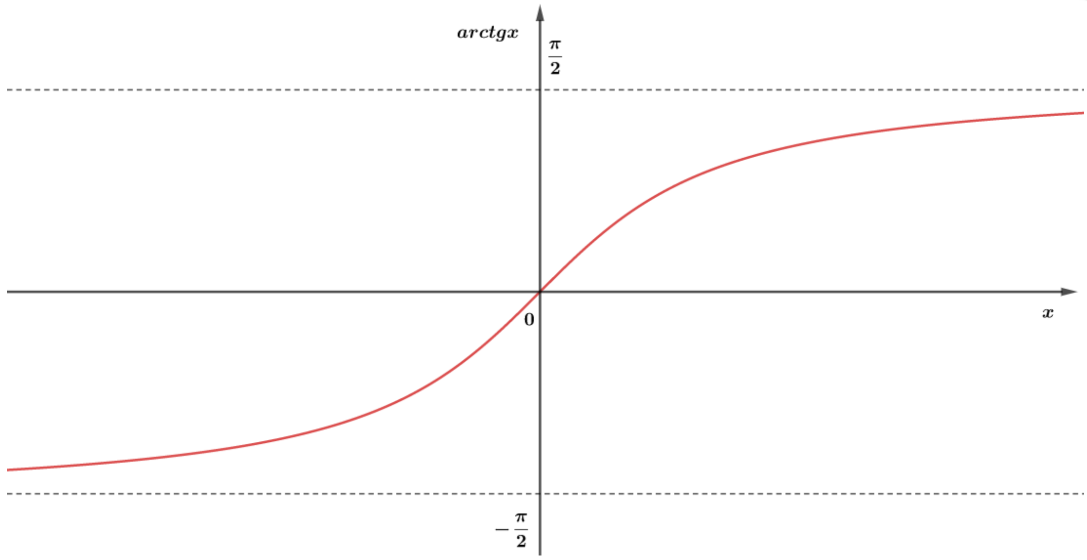
$$f^{-1}: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$f^{-1}(x) = arctgx$$

A função tangente é bijetora no domínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



O gráfico da sua inversa é dado por:



6.2. PROBLEMAS COM FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

As questões que envolvem funções inversas trigonométricas seguem um padrão. Vamos aprender a resolver esse tipo de problema com um exemplo.

1) Calcule o valor de $sen(x)$, sabendo que $x = arctg(1)$ e $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Quando vemos o termo $arctg(1)$, devemos entender que se trata de um arco. Então, podemos chamá-lo de um arco α:

$$\alpha = arctg(1)$$

Temos a função arco tangente que é a função inversa da tangente. Dependendo do caso, é possível encontrar o valor do arco. Para isso, basta pensar: qual arco cuja tangente resulta no número dentro do arco tangente? No exemplo acima, dado que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, temos que $x = \pi/4$, pois $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Assim, a questão pede:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Determine o valor de $tg\left(arctg(2) + arctg\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Nesse caso, não conseguimos determinar os valores dos arcos que resultam em $arctg(2)$ e $arctg\left(\frac{1}{3}\right)$. Mas não será necessário encontrá-los, pois queremos apenas o valor da tangente da soma desses arcos. Vamos fazer

$$\alpha = arctg(2)$$

$$\beta = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$$

O bizu nessa questão é aplicar a inversa da função nos arcos acima. Nesse caso, ambos os arcos são funções arco tangente, logo devemos aplicar a tangente nos arcos acima:

$$\alpha = arctg(2) \Rightarrow tg(\alpha) = tg\big(arctg(2)\big) = 2$$

$$\beta = arctg\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow tg(\beta) = tg\left(arctg\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

Note que acabamos de obter os valores da $tg\alpha$ e $tg\beta$, assim, queremos calcular:

$$tg\left(arctg(2) + arctg\left(\frac{1}{3}\right)\right) = tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7$$

14. Calcule:

a) $\boldsymbol{sen\left(arctg(\sqrt{2})\right)}$

b) $\boldsymbol{tg\left(2arctg\left(\frac{1}{5}\right)\right)}$

c) $\boldsymbol{tg\left(arcsen\left(\frac{3}{5}\right) - arctg\left(\frac{5}{12}\right)\right)}$

Resolução:

a) Vamos fazer $\alpha = arctg(\sqrt{2})$, assim, temos:

$$tg\alpha = \sqrt{2}$$

Queremos calcular $sen\alpha$, podemos a seguinte identidade:

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{1 + \sqrt{2}^2}}$$

$$sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

b) Fazendo $\alpha = 2arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, temos $\frac{\alpha}{2} = arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, logo:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

Queremos calcular $tg\alpha$, vamos usar a seguinte identidade:

$$tg\alpha = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\alpha = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$tg\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}$$

c) Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\beta = arctg\left(\frac{5}{12}\right)$, temos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$tg\beta = \frac{5}{12}$$

Queremos calcular $tg(\alpha - \beta)$. Podemos usar a diferença de arcos da tangente:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$$

Conhecemos o valor de $tg\beta$, vamos encontrar $tg\alpha$:

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$9 + 9tg^2\alpha = 25tg^2\alpha$$

$$tg^2\alpha = \frac{9}{16}$$

$$tg\alpha = \pm\frac{3}{4}$$

Para $tg\alpha = 3/4$, temos:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right)}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{63}{48}} = \frac{16}{63}$$

Para $tg\alpha = -3/4$, temos:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\left(-\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{5}{12}}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\left(-\frac{14}{12}\right)}{\frac{33}{48}}=-\frac{56}{33}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{sen\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}}$ **b)** $\boldsymbol{tg\alpha=\frac{5}{12}}$ **c)** $\boldsymbol{tg(\alpha-\beta)=\frac{16}{63}\ ou\ tg(\alpha-\beta)=-\frac{56}{33}}$

15. Calcule a soma das soluções da equação $\boldsymbol{arctg\left(\frac{x}{2}\right)+arctg\left(\frac{x}{3}\right)=arctg\left(\frac{1}{5}\right)}$**.**

Resolução:

Fazendo $\alpha=arctg\left(\frac{x}{2}\right), \beta=arctg\left(\frac{x}{3}\right)$ e $\gamma=arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, temos:

$$tg\alpha=\frac{x}{2}$$

$$tg\beta=\frac{x}{3}$$

$$tg\gamma=\frac{1}{5}$$

Aplicando a tangente na equação, obtemos:

$$tg(\alpha+\beta)=tg\gamma$$

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=tg\gamma$$

Substituindo os valores das tangentes:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)}{1-\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{5x}{6-x^2}=\frac{1}{5}$$

$$25x=6-x^2$$

$$x^2+25x-6=0$$

$$x=\frac{-25\pm\sqrt{625+24}}{2}=\frac{-25\pm\sqrt{649}}{2}$$

A soma das soluções é dada por:

$$x_1+x_2=-25$$

Gabarito: $\boldsymbol{x_1+x_2=-25}$

7. TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos estudar as principais transformações que podem ser cobradas na prova. Tente decorar pelo menos as fórmulas de soma e diferença de arcos. Assim, se você esquecer as outras, você saberá deduzi-las na hora da prova.

7.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

Esse assunto é muito cobrado nas questões de trigonometria das provas! Então, tente decorar todas elas!

$$\boxed{\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{sen(A+B)=\mathrm{sen}(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B})+\mathrm{sen}(\mathrm{B})\cos(\mathrm{A})}$$

$$\boxed{sen(A-B)=\mathrm{sen}(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B})-\mathrm{sen}(\mathrm{B})\cos(\mathrm{A})}$$

$$\boxed{tg(A+B)=\frac{tg(A)+tg(B)}{1-tg(A)tg(B)}}$$

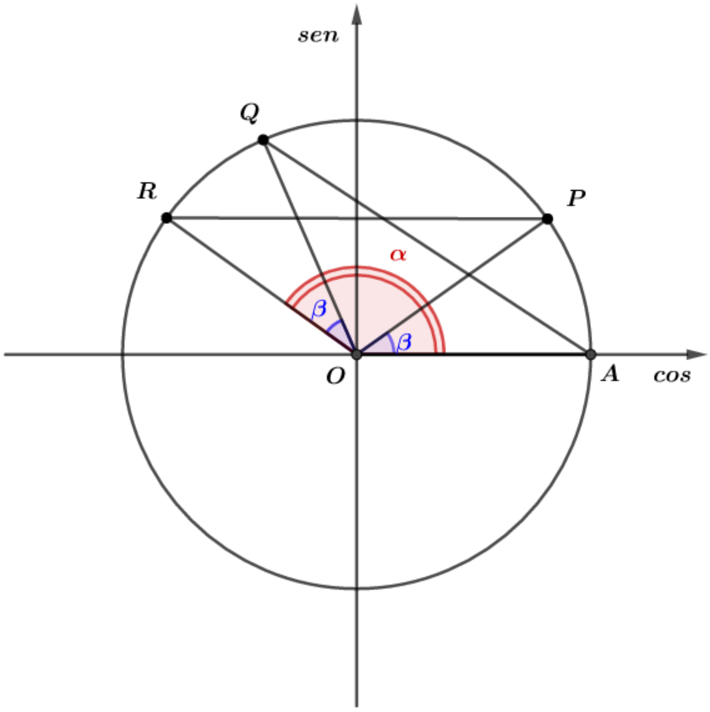
$$\boxed{tg(A-B)=\frac{tg(A)-tg(B)}{1+tg(A)tg(B)}}$$

Demonstração:

1) $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-sen(A)sen(B)$

Vamos usar o ciclo trigonométrico para demonstrar essa propriedade e a fórmula da distância da geometria analítica.

Sejam dados os pontos A, P, Q, R conforme ilustra a figura abaixo:



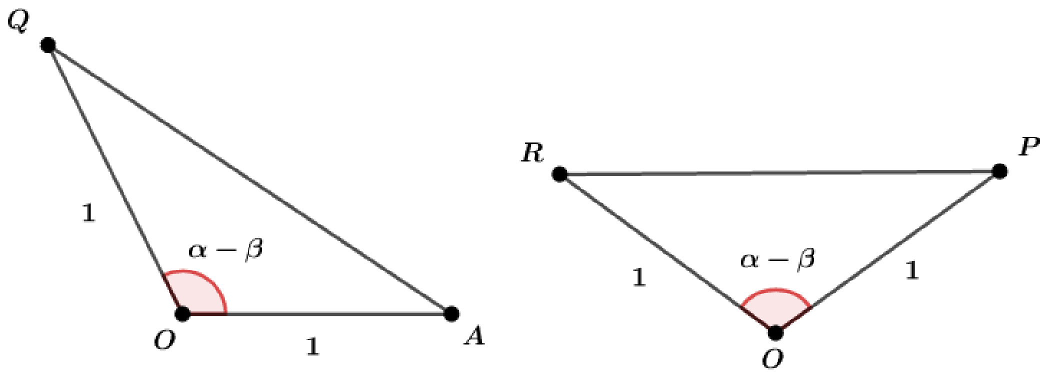
Os pontos P, Q, R possuem as seguintes coordenadas no plano:

$$P(cos\beta, sen\beta)$$

$$Q(\cos(\alpha-\beta), sen(\alpha-\beta))$$

$$R(cos\alpha, sen\alpha)$$

Note que os triângulos OAQ e OPR são semelhantes:



Como os arcos Ô são iguais, podemos afirmar que $AQ = PR$. Usando a fórmula da distância da geometria analítica ($d_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$), temos:

(Estudaremos com mais detalhes na aula de Geometria Analítica)

$$AQ^2 = (x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2$$

$$AQ^2 = (1 - \cos(\alpha-\beta))^2 + (0 - \text{sen}(\alpha-\beta))^2$$

$$AQ^2 = (1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta)) + sen^2(\alpha-\beta)$$

$$AQ^2 = 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1$$

$$\Rightarrow AQ^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

$$PR^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$
$$PR^2 = (cos\beta - cos\alpha)^2 + (sen\beta - sen\alpha)^2$$
$$PR^2 = \cos^2\beta - 2cos\alpha cos\beta + \cos^2\alpha + sen^2\beta - 2sen\alpha sen\beta + sen^2\alpha$$
$$PR^2 = \underbrace{\cos^2\beta + sen^2\beta}_{1} + \underbrace{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}_{1} - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$
$$\Rightarrow PR^2 = 2 - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$

Igualando $AQ = PR$, temos:

$$AQ^2 = PR^2$$
$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta}$$

2) $\cos(A + B) = cosAcosB - senAsenB$

Para demonstrar essa propriedade, podemos usar a fórmula acima e inserir $\beta = -\beta'$:

$$\cos\big(\alpha - (-\beta')\big) = cos\alpha\cos(-\beta') + sen\alpha sen(-\beta')$$

A função cosseno é par: $\cos(-\beta') = \cos(\beta')$.

A função seno é ímpar: $sen(-\beta') = -sen(\beta')$.

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos(\alpha + \beta') = cos\alpha cos\beta' - sen\alpha sen\beta'}$$

3) $sen(A + B) = \mathrm{sen(A)\cos(B) + sen(B)\cos(A)}$

Vamos usar a relação de ângulos complementares:

$$sen(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$

Usando a fórmula da diferença de arcos do cosseno, temos:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)cos\beta + sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)sen\beta = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta}$$

4) $sen(A - B) = \mathrm{sen(A)\cos(B) - sen(B)\cos(A)}$

Podemos obter o seno da diferença usando o seno da soma:

$$sen\big(\alpha + (-\beta)\big) = sen\alpha\cos(-\beta) + cos\alpha sen(-\beta)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha}$$

5) $tg(A + B) = \frac{tg(A)+tg(B)}{1-tg(A)tg(B)}$

Vamos usar o seno e o cosseno da soma:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{sen(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{sen\alpha cos\beta+cos\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\frac{cos\alpha cos\beta-sen\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}}$$

6) $tg(A-B)=\frac{tg(A)-tg(B)}{1+tg(A)tg(B)}$

Podemos usar a fórmula da demonstração 5:

$$tg\big(\alpha+(-\beta)\big)=\frac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha tg(-\beta)}$$

Como a função tangente é ímpar, temos:

$$\Rightarrow \boldsymbol{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}}$$

7.2. ARCO DUPLO, ARCO TRIPLO E ARCO METADE

Agora que conhecemos as fórmulas da soma e diferença de arcos, podemos expandir o conhecimento para arco duplo, arco triplo e arco metade.

7.2.1. FÓRMULAS DE ARCO DUPLO

$$\boxed{\boldsymbol{\cos(2A)=\cos^2 A-sen^2A}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen(2A)=2senAcosA}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{tg(2A)=\frac{2tgA}{1-tg^2A}}}$$

Demonstrações:

1) $\cos(2A)=\cos^2 A-sen^2A$

Usando a fórmula da soma do cosseno, temos:

$$\cos(A+A)=cosAcosA-senAsenA$$

$$\Rightarrow \cos(2A)=\cos^2 A-sen^2A$$

Também podemos representar essa identidade de outras formas. Usando a relação fundamental $sen^2A+\cos^2 A=1$:

$$\cos(2A)=(1-sen^2A)-sen^2A$$

$$\Rightarrow \cos(2A)=1-2sen^2A$$

$$\cos(2A)=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)$$

$$\Rightarrow \cos(2A) = 2\cos^2 A - 1$$

2) $sen(2A) = 2senAcosA$

Usando a fórmula da soma do seno, temos:

$$sen(A + A) = senAcosA + senAcosA$$
$$\Rightarrow sen(2A) = 2senAcosA$$

3) $tg(2A) = \frac{2tgA}{1-tg^2A}$

Usando a fórmula da soma da tangente, temos:

$$tg(A + A) = \frac{tgA + tgA}{1 - tgAtgA}$$
$$\Rightarrow tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2A}$$

7.2.2. FÓRMULAS DE ARCO TRIPLO

$$\boxed{\mathbf{\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA}}$$
$$\boxed{\mathbf{sen(3A) = 3senA - 4sen^3A}}$$
$$\boxed{\mathbf{tg(3A) = \frac{3tgA - tg^3A}{1 - 3tg^2A}}}$$

Demonstrações:

1) $\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA$

Podemos usar as fórmulas de arco duplo e soma:

$$\cos(2A + A) = \cos(2A)\,cosA - sen(2A)senA$$
$$\cos(3A) = (2\cos^2 A - 1)cosA - (2senAcosA)senA$$
$$\cos(3A) = 2\cos^3 A - cosA - 2sen^2AcosA$$
$$\cos(3A) = 2\cos^3 A - cosA - 2(1 - \cos^2 A)cosA$$
$$\Rightarrow \cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA$$

2) $sen(3A) = 3senA - 4sen^3A$

Usando as fórmulas de arco duplo e soma, temos:

$$sen(2A + A) = sen(2A)cosA + senAcos(2A)$$
$$sen(3A) = (2senAcosA)cosA + senA(1 - 2sen^2A)$$
$$sen(3A) = 2senAcos^2A + senA - 2sen^3A$$
$$sen(3A) = 2senA(1 - sen^2A) + senA - 2sen^3A$$

$$\Rightarrow sen(3A) = 3senA - 4sen^3A$$

3) $tg(3A) = \frac{3tgA - tg^3A}{1-3tg^2A}$

$$tg(2A+A) = \frac{tg(2A) + tgA}{1 - tg(2A)tgA}$$

$$tg(3A) = \frac{\frac{2tgA}{1-tg^2A} + tgA}{1 - \left(\frac{2tgA}{1-tg^2A}\right)tgA}$$

$$\Rightarrow tg(3A) = \frac{3tgA - tg^3A}{1-3tg^2A}$$

Observações:

Vale a pena decorar as fórmulas de arco triplo do seno e cosseno, pois eles já foram cobrados em provas anteriores.

7.2.3. FÓRMULAS DE ARCO METADE

$$\boxed{\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cosA}{2}}}$$

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-cosA}{senA} = \frac{senA}{1+cosA}}$$

$$\boxed{senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A) = \frac{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{tgA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}}$$

Demonstrações:

1) $\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cosA}{2}}$

Podemos usar a fórmula do arco duplo do cosseno:

$$\cos(2A) = 2\cos^2 A - 1$$

Fazendo $A = \alpha/2$, temos:

$$\cos\left(2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(1+\cos\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

2) $\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$

Sabemos que $\cos(2A) = 1 - 2sen^2A$, assim, temos:

$$\cos\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$$

3) $tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$$

4) $tg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1-cosA}{senA}=\frac{senA}{1+cosA}$

Usando as fórmulas de arco duplo, temos:

$$\frac{1-cosA}{senA}=\frac{1-\left(1-2sen^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{2sen^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=tg\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{senA}{1+cosA}=\frac{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{1+2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)-1}=\frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}=tg\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow tg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1-cosA}{senA}=\frac{senA}{1+cosA}$$

5) $senA=\frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

Para deduzir essa fórmula, podemos usar o seno do arco duplo e usar $A=\frac{\alpha}{2}$:

$$sen\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$sen(\alpha)=\frac{2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$sen(\alpha)=2\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{1}{\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow sen(\alpha)=\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

6) $tgA=\frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

Usando o arco duplo da tangente e fazendo $A=\alpha/2$, temos:

$$tg(2A)=\frac{2tgA}{1-tg^2A}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha) = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

7) $\cos(A) = \frac{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{sen\alpha}{tg\alpha}$$

Substituindo $sen\alpha$ e $tg\alpha$ na relação do cosseno, encontramos:

$$cos\alpha = \frac{\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow cos\alpha = \frac{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

7.3. FÓRMULAS DE WERNER

As fórmulas de Werner são a **transformação de produto em soma ou diferença**. Elas estão listadas abaixo:

$$\boxed{\boldsymbol{2cosAcosB = \cos(A+B) + \cos(A-B)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{-2senAsenB = \cos(A+B) - \cos(A-B)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{2senAcosB = sen(A+B) + sen(A-B)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{2senBcosA = sen(A+B) - sen(A-B)}}$$

Demonstrações:

1) $2cosAcosB = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$$\cos(A + B) = cosAcosB - senAsenB$$

$$\cos(A - B) = cosAcosB + senAsenB$$

Podemos somar as duas identidades:

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2cosAcosB$$

2) $-2senAsenB = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

$$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$

$$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$

Podemos subtrair as duas identidades:

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2senAsenB$$

3) $2senAcosB = sen(A+B) + sen(A-B)$

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Somando as duas identidades:

$$sen(A+B) + sen(A-B) = 2senAcosB$$

4) $2senBcosA = sen(A+B) - sen(A-B)$

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Subtraindo as duas identidades:

$$sen(A+B) - sen(A-B) = 2senBcosA$$

7.4. FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE

Ao nos depararmos com equações trigonométricas, algumas questões podem exigir que você saiba como aplicar uma transformação trigonométrica para conseguir resolvê-las. Vamos estudar cada uma delas.

As fórmulas abaixo são conhecidas como a transformação de soma ou diferença em produto:

$$\boxed{\boldsymbol{sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

Demonstrações:

1) $sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Vamos usar as fórmulas da soma e diferença de arcos do seno:

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Somando essas duas identidades, temos:

$$sen(A+B) + sen(A-B) = 2senAcosB$$

Agora, vamos fazer as seguintes substituições:

$$A + B = p$$

$$A - B = q$$

Assim, podemos escrever:

$$A = \frac{p+q}{2}$$

$$B = \frac{p-q}{2}$$

Substituindo na identidade $sen(A+B) + sen(A-B) = 2senAcosB$, encontramos:

$$sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2) $sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$$sen(A+B) = senAcosB + senBcosA$$

$$sen(A-B) = senAcosB - senBcosA$$

Vamos subtrair essas identidades:

$$sen(A+B) - sen(A-B) = 2senBcosA$$

Substituindo A e B em função de p e q, temos:

$$sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

3) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$

$$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$

Somando as duas identidades, temos:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2cosAcosB$$

Substituindo A e B:

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

4) $\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right) sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\cos(A+B) = cosAcosB - senAsenB$$

$$\cos(A-B) = cosAcosB + senAsenB$$

Subtraindo as duas identidades e escrevendo A e B em função de p e q:

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2senAsenB$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right) sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

16. (EEAR/2018)

O valor de $\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)$ é igual a

a) $\text{sen}\,2a$

b) $\cos 2a$

c) $2\,\text{sen}\,b \cdot \cos a$

d) $2\,\text{sen}\,a \cdot \cos b$

Comentários

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \text{sen}\,b\cos a$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\,a\cos b - \text{sen}\,b\cos a$$

Logo,

$$\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b) = 2\,\text{sen}\,b \cdot \cos a$$

Gabarito: "c".

---

17. (EEAR/2015)

Se $\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta = \frac{4}{13}$ e $\text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha = \frac{36}{65}$, então $\text{sen}\,(\alpha+\beta)$ é igual a:

a) $\frac{56}{65}$

b) $\frac{40}{65}$

c) $\frac{13}{36}$

d) $\frac{13}{56}$

Comentários

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha=\frac{4}{13}+\frac{36}{65}=\frac{20+36}{65}=\frac{56}{65}$$

Gabarito: "a".

---

18. (EEAR/2013)

Sejam $\operatorname{sen} x=\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} 2x=\frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b-a$ é igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

$$\operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x\cos x=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}\Rightarrow b-a=25-24=1$$

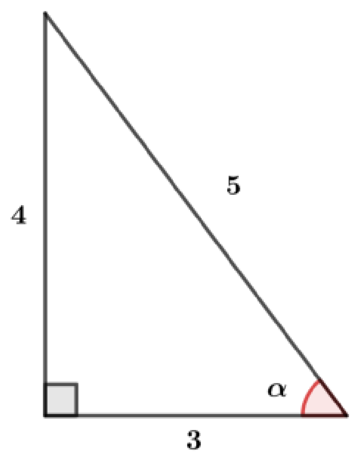
Gabarito: "a".

---

19. Sejam α e β dois arcos do primeiro e segundo quadrantes, respectivamente. Se $cos\ \alpha=3/5$ e $sen\beta=12/13$, determine o valor de $cos(\alpha+\beta)$.

Comentários

Para resolver esse problema, podemos usar o artifício do triângulo retângulo. A única coisa que devemos nos atentar é sobre o sinal das funções para os arcos. Sabendo que $\cos\alpha=3/5$, temos:



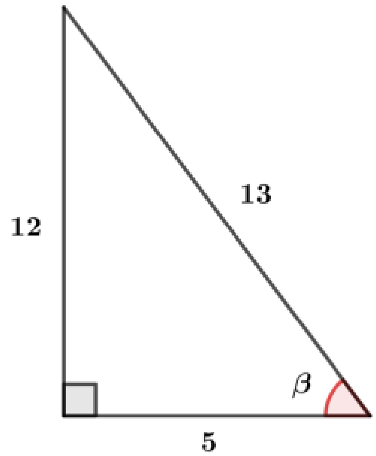
Note que o outro cateto foi obtido pelo teorema de Pitágoras:

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \therefore x = 4$$

Assim, como α é do primeiro quadrante, temos que $sen\ \alpha > 0$, logo:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5}$$

Para $sen\beta = 12/13$, temos:



Como β é do segundo quadrante, temos que $\cos\beta < 0$, logo:

$$\cos\beta = -\frac{5}{13}$$

Assim, temos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{3}{13} - \frac{48}{65} = \frac{-15-48}{65}$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = -\frac{63}{65}$$

Gabarito: $-\frac{63}{65}$

---

20. Determine o valor de $tg(75°)$.

Comentários

Podemos escrever que $75° = 30° + 45°$. Lembrando que

$$\boldsymbol{tg(A+B) = \frac{tg(A)+tg(B)}{1-tg(A)tg(B)}}$$

Temos:

$$tg(75°) = tg(30°+45°) = \frac{tg(30°)+tg(45°)}{1-tg(30°)tg(45°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$tg(75°) = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

Gabarito: $2+\sqrt{3}$

---

21. Se $\cos(2x)=\frac{1}{3}$, onde $x\in(0,\pi)$, calcule o valor de $y=(sen(3x)-sen(x))/\cos(2x)$.

Resolução:

Vamos transformar a subtração em produto usando a fórmula de Prostaférese:

$$senp-senq=2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$y=\frac{sen(3x)-sen(x)}{\cos(2x)}$$

$$y=\frac{2sen\left(\frac{3x-x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)}{\cos(2x)}$$

$$y=\frac{2senxcos(2x)}{\cos(2x)}$$

$$y=2senx$$

Usando a informação $\cos(2x)=1/3$, temos:

$$\cos(2x)=1-2sen^2x=\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}=2sen^2x$$

$$senx=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $x\in(0,\pi)$, $senx>0$, então:

$$senx=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: $y=2\sqrt{3}/3$

---

22. Transformando-se $sen40°+cos10°$ em produto, obtemos:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}sen40°$

b) $\sqrt{3}sen20°$

c) $\sqrt{3}cos20°$

d) $\sqrt{2}sen20°$

Resolução:

Podemos usar o ângulo complementar e escrever:

$$\cos 10°=sen80°$$

Assim, podemos usar a fórmula de Prostaférese:

$$senp + senq = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$sen40° + sen80° = 2sen\left(\frac{40° + 80°}{2}\right)\cos\left(\frac{80° - 40°}{2}\right)$$

$$sen40° + sen80° = 2sen60°cos20°$$

$$\Rightarrow sen40° + sen80° = \sqrt{3}cos20°$$

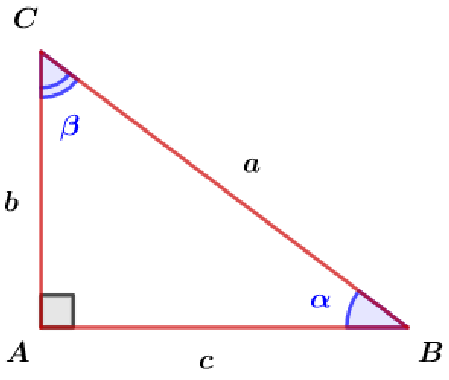
Gabarito: "c".

8. RESUMO

8.1. MEDIDAS USUAIS

Grau	Radiano
$180°$	$\pi\ rad$

8.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS



Principais Razões	
$sen\alpha$	$\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$
$cos\alpha$	$\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$
$tg\alpha$	$\frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{b}{c}$
$sec\alpha$	$\frac{1}{cos\alpha}$
$csc\alpha$	$\frac{1}{sen\alpha}$
$cotg\alpha$	$\frac{1}{tg\alpha}$

8.3. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

$$\boxed{cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$$

$$\boxed{1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}$$

8.4. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
$sen\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\beta$
$tg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{tg\beta}$

8.5. TRANSFORMAÇÕES

8.5.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

$$\boxed{\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{sen(A + B) = \text{sen}(\text{A})\cos(\text{B}) + \text{sen}(\text{B})\cos(\text{A})}$$

$$\boxed{sen(A - B) = \text{sen}(\text{A})\cos(\text{B}) - \text{sen}(\text{B})\cos(\text{A})}$$

$$\boxed{tg(A + B) = \frac{tg(A) + tg(B)}{1 - tg(A)tg(B)}}$$

$$\boxed{tg(A-B)=\frac{tg(A)-tg(B)}{1+tg(A)tg(B)}}$$

8.5.2. ARCO DUPLO

$$\boxed{\cos(2A)=\cos^2 A-sen^2 A}$$

$$\boxed{sen(2A)=2senAcosA}$$

$$\boxed{tg(2A)=\frac{2tgA}{1-tg^2 A}}$$

8.5.3. ARCO TRIPLO

$$\boxed{\cos(3A)=4\cos^3 A-3cosA}$$

$$\boxed{sen(3A)=3senA-4sen^3 A}$$

$$\boxed{tg(3A)=\frac{3tgA-tg^3 A}{1-3tg^2 A}}$$

8.5.4. ARCO METADE

$$\boxed{\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cosA}{2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1-cosA}{senA}=\frac{senA}{1+cosA}}$$

$$\boxed{senA=\frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{tgA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

8.5.5. FÓRMULAS DE WERNER

$$\boxed{2cosAcosB = \cos(A + B) + \cos(A - B)}$$

$$\boxed{-2senAsenB = \cos(A + B) - \cos(A - B)}$$

$$\boxed{2senAcosB = sen(A + B) + sen(A - B)}$$

$$\boxed{2senBcosA = sen(A + B) - sen(A - B)}$$

8.5.6. FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE

$$\boxed{sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boxed{sen(p) - sen(q) = 2sen\left(\frac{p-q}{2}\right)cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boxed{\cos(p) - \cos(q) = -2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

9. QUESTÕES NÍVEL 1

1. **(EsPCEx/2018)**

Considere o triângulo com ângulos internos x, $45°$ e $120°$. O valor de $\text{tg}^2(x)$ é igual a

a) $\sqrt{3} - 2$

b) $4\sqrt{3} - 7$

c) $7 - 4\sqrt{3}$

d) $2-\sqrt{3}$

e) $2-4\sqrt{3}$

2. (EsPCEx/2018)

Sendo $M=\operatorname{arctg}(x), N=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $P=\operatorname{tg}(M-N)$, o valor de $30P$ para $x=15$ é:

a) $\frac{224}{30}$

b) $\frac{45}{6}$

c) 45

d) 224

e) 225

3. (EsPCEx/2014)

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t)=10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t=6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t=4$ com 6000 animais.

4. (EsPCEx/2014)

O valor de $(\cos 165° + \operatorname{sen} 155° + \cos 145° - \operatorname{sen} 25° + \cos 35° + \cos 15°)$ é

a) $\sqrt{2}$

b) -1

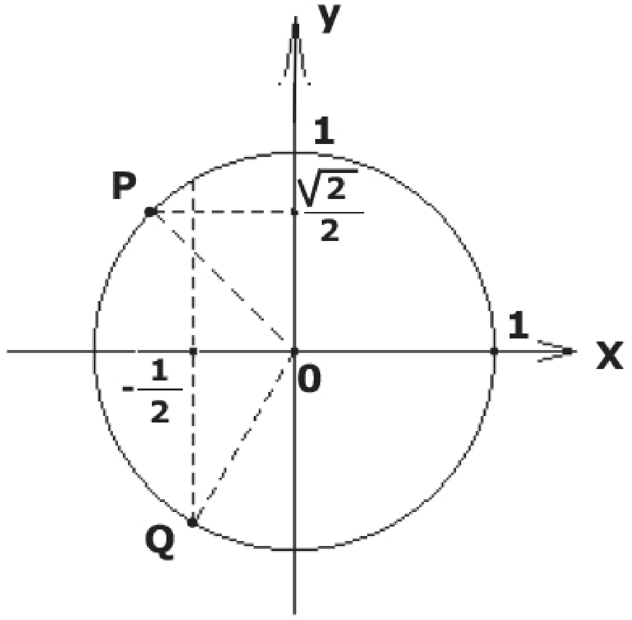
c) 0

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

5. (EsPCEx/2012)

Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo.



O valor de $\text{tg}(\alpha + \beta)$ é

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

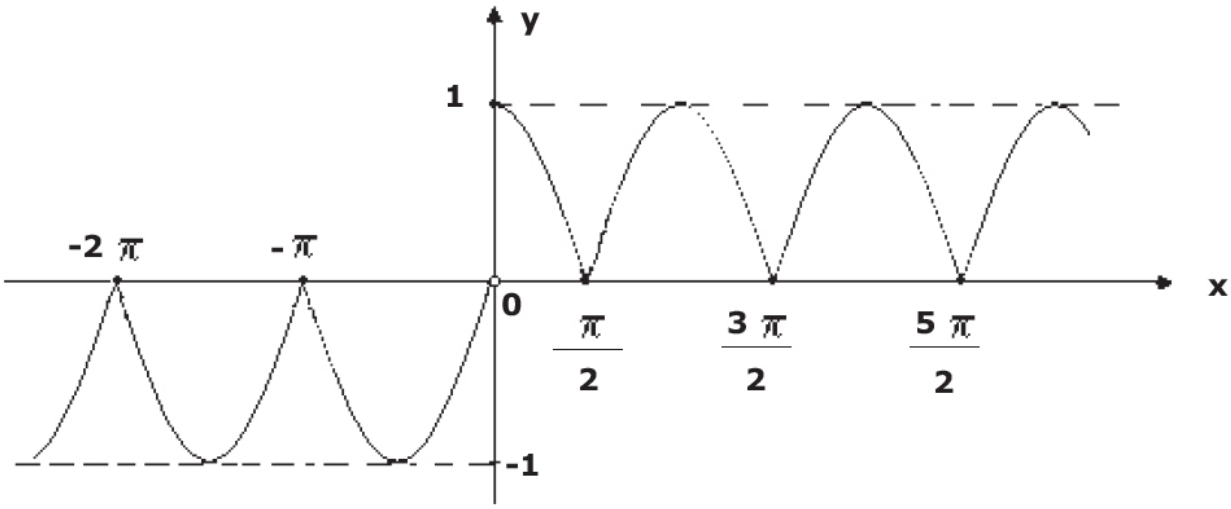
c) $2 + \sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $-1 + \sqrt{3}$

6. (EsPCEx/2011)

A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo. A expressão algébrica de $f(x)$ é:



a) $\begin{cases} -|\operatorname{sen} x|, & se\ x < 0 \\ |\cos x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -|\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} |\operatorname{sen} x|, & se\ x < 0 \\ |\cos x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \operatorname{sen} x, & se\ x < 0 \\ \cos x, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

7. (EsPCEx/2011)

O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320°}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220°)^2$ é:

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (EsPCEx/2011)

O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$

b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$

c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$

d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

e) $\frac{(2+\sqrt{3})}{4}$

9. (EsPCEx/2010)

Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \cdots\right)$.

Se todos os termos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um

a) pentágono (5 lados).

b) hexágono (6 lados).

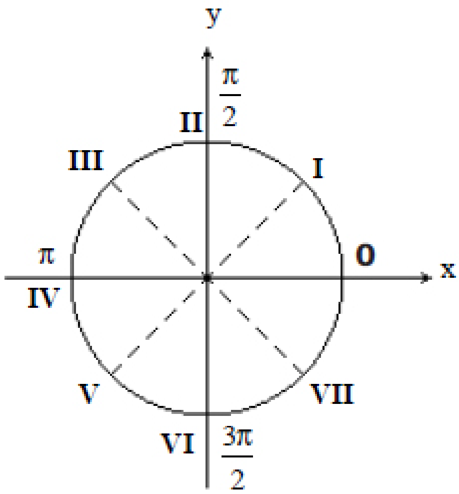
c) octógono (8 lados).

d) decágono (10 lados).

e) dodecágono (12 lados).

10. (EsPCEx/2007)

Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}, \dots$ correspondem às medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo. Os pontos identificados por 0 a VII representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti-horário, a partir de 0.



Nessas condições, o arco correspondente ao $13°$ termo da sequência, igualmente medido no sentido anti-horário e a partir de 0, terá sua extremidade situada entre os pontos

a) I e II

b) II e III

c) IV e V

d) V e VI

e) VII e 0

11. (EsPCEx/2006)

O valor da expressão $\frac{\cos 15° + \cos 75°}{\text{sen } 15°} + \frac{\text{sen } 15° + \text{sen } 75°}{\cos 15°}$ é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

12. (EsPCEx/2005)

A função $f(x) = \left[\operatorname{sen} 2x \cdot \left(\frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2\operatorname{sen} x}\right)\right]^2 - \operatorname{sen} 2x$ é definida para todo x real e $x \neq \frac{k\pi}{2}$, com k inteiro. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) $f(2006) = f(2004) + f(2005)$.

b) $f(2005) = f(2006) - 2f(2003)$.

c) $f(2006) = f(2005) + f(2004) + f(2003)$.

d) $f(2005) = f(2006) - f(2004)$.

e) $f(2006) = f(2003) + f(2004) - f(2005)$.

13. (EsPCEx/2003)

Considere as expressões:

I- $\frac{\operatorname{sen} 30° \cdot \cos 150°}{\operatorname{tg} 210°}$

II- $\frac{\operatorname{cotg} 50° \cdot \operatorname{sen} 93°}{\operatorname{tg} 181°}$

III- $\frac{\cos x \cdot \operatorname{cossec} x}{\sec x \cdot \operatorname{cotg} x}, x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

IV- $\frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x}, x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Têm sempre valor negativo:

a) I e II.

b) I e IV.

c) II e III.

d) I e III.

e) III e IV.

14. (EsPCEx/2002)

Se $z = \frac{2 - 3\operatorname{sen} x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em

a) $-2 \leq x \leq -1$

b) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$

d) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

15. (EsPCEx/2002)

Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w, ambos pertencentes ao $1°$ quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

a) $[0°, 15°]$

b) $[15°, 30°]$

c) $[30°, 45°]$

d) $[45°, 60°]$

e) $[60°, 90°]$

16. (EsPCEx/2002)

O valor numérico da expressão $\text{sen}\frac{13\pi}{12} \cdot \cos\frac{11\pi}{12}$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

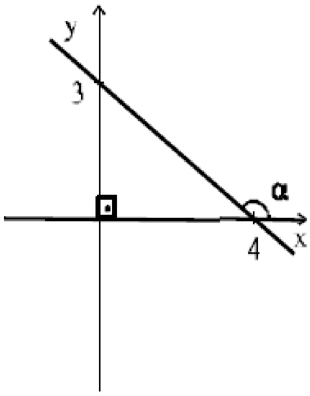
c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{8}$

17. (EsPCEx/2001)

A cossecante do ângulo da figura abaixo é:



a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $-\frac{5}{4}$

18. (EsPCEx/2001)

São arcos côngruos:

a) $-730°$ e $-\frac{\pi}{12}$ rad

b) $1640°$ e $-\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $350°$ e $-\frac{\pi}{18}$ rad

d) $1235°$ e $\frac{5\pi}{6}$ rad

e) $2000°$ e $-\frac{4\pi}{3}$ rad

19. (EsPCEx/2001)

Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então o valor de tg α é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{12}{13}$

d) $\frac{12}{5}$

e) $-\frac{12}{13}$

20. (EsPCEx/2001) [Adaptada]

Para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, simplificando a expressão $\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$, obtém-se o valor:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $3/2$

d) 2

e) 0

21. (EsPCEx/2000)

Sendo $\left\{k \in \mathbb{Z} \; e \; x \neq \frac{k\pi}{4}\right\}$, então $2 - \frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$ é equivalente a:

a) $\cos^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\sec^2 x$

d) $\operatorname{cossec}^2 x$

e) 1

22. (EsPCEx/2000)

Se y é a medida de um ângulo $0° < y < 30°$, o maior dentre os números $\operatorname{sen} y$, $\cos y$, $\operatorname{sen}^2 y$, $\cos^2 y$ e $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$ é

a) $\operatorname{sen} y$

b) $\cos y$

c) $\operatorname{sen}^2 y$

d) $\cos^2 y$

e) $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$

23. (EsPCEx/2000)

O valor de $3\operatorname{sen} 10° \cdot (\operatorname{tg} 5° + \operatorname{cotg} 5°)$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$

b) 2

c) 3

d) 5

e) 6

24. (EsPCEx/2000)

O número de arcos existentes entre $0°$ e $1560°$ cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

25. (EsPCEx/2000) [Adaptada]

O domínio e imagem da função $f(x) = \frac{1}{5-\text{sen}\, x}$ são, respectivamente,

a) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $[-1, 1]$

b) $\mathbb{R}$ e $\left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$

c) $\mathbb{R}$ e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$

d) $\mathbb{R}^*$ e $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

e) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $\left]-1, \frac{1}{3}\right]$

26. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Num triângulo retângulo ABC, a hipotenusa BC mede 10 cm e $\cos \hat{B} = 0,6$. Calcular a soma dos catetos.

27. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Num triângulo ABC tem-se $BC = 6, A\hat{B}C = 30°$ e $B\hat{C}A = 45°$. Calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

28. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Obter M tal que $cosx = \frac{1}{M}$ e $senx = \frac{\sqrt{M+1}}{M}$.

29. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Calcular $secx$ sabendo que $senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}, a > b > 0$.

30. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:

$$y = (tgx - senx)^2 + (1 - cosx)^2 - (secx - 1)^2$$

31. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:

$$y = \frac{\cos^4 x - sen^4 x}{1 - tg^4 x} + \frac{cossecx - senx}{secx - cosx}$$

32. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as seguintes identidades:

a) $\operatorname{tg}(-2734°) = -\operatorname{tg} 34°$

b) $\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

33. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Utilizando um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 e um dos ângulos agudos de medida θ encontre $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em função de senos e cossenos.

34. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $y = 2 - 3senx$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em ▯ é:

a) 5

b) 1

c) 3

d) -1

e) 6

35. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sendo dado que $senx + cosx = a$, calcule:

a) $senxcosx$

b) $sen^4x + cos^4x$

c) $sen^6x + \cos^6 x$

36. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $\frac{senx-seny}{cosx-cosy} = 2$ e $tgx = \frac{1}{3}$, então tgy é igual a:

a) 3

b) $1/6$

c) 0

d) $-4/3$

e) -3

37. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = 1 - 2sen^2x$

b) $\frac{cosx-senx}{cosx+senx} = \frac{1-tgx}{1+tgx}$

38. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $tgx + secx = 3/2$, calcular $senx$ e $cosx$.

39. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $sen^2x + senx = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

40. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, prove as identidades abaixo:

a) $\frac{secx}{tgx+cotgx} = senx$

b) $\frac{tgx-cotgx}{tgx+cotgx} = 2sen^2x - 1$

41. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Elimine o arco x na equação:

$$\begin{cases} senx - cosx = a \\ cos2x = b \end{cases}$$

42. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Verifique a seguinte identidade:

$$2arctg\left(\frac{1}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$

43. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $0 < x < \pi/2$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $tgx = -tg\alpha$

b) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $secx = cossec\alpha$

c) Sendo $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então, $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

d) A função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - \cos x$

44. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sobre a função f definida por $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, podemos afirmar que:

a) f não é limitada.

b) f é constante.

c) f é injetora.

d) f é ímpar.

e) $f(x) = \cos^2 x$, para todo x real.

45. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

O valor numérico da expressão

$$sen\left(\frac{13\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

É

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $1/4$

d) $1/6$

e) $1/8$

GABARITO

1. c
2. d
3. a
4. c
5. d
6. a
7. d
8. d
9. c
10. d
11. d
12. e
13. b
14. c
15. e
16. c
17. d
18. c
19. a
20. d
21. c
22. b
23. e
24. d
25. c
26. $S = 14$
27. $h = 3\sqrt{3} - 3$
28. $M = -1 \ ou \ M = 2$ b
29. $secx = \pm\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
30. $y = 0$
31. $y = \cos^4 x + cotg^3 x$ c
32. Demonstração
33. Demonstração
34. $y = 5$
35. a)$senxcosx = \frac{a^2-1}{2}$ b)$sen^4 x + \cos^4 x = \frac{-a^4+2a^2+1}{2}$ c) $sen^6 x + \cos^6 x = \frac{-3a^4+6a^2+1}{4}$
36. e
37. Demonstração
38. $senx = 5/13$ e $cosx = 12/13$

39. Demonstração
40. Demonstração
41. $\boldsymbol{b^2 = a^2(2 - a^2)}$
42. Demonstração
43. a) V b) V c) F d) V
44. b
45. c

RESOLUÇÃO

1. (EsPCEx/2018)

Considere o triângulo com ângulos internos x, $45°$ e $120°$. O valor de $\text{tg}^2(x)$ é igual a

a) $\sqrt{3} - 2$

b) $4\sqrt{3} - 7$

c) $7 - 4\sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $2 - 4\sqrt{3}$

Comentários

Todo triângulo tem a soma de seus ângulos internos resultando em $180°$:

$$180° = x + 45° + 120° \Leftrightarrow x = 15°.$$

$$\text{tg}\, x = \text{tg}(15°) = \text{tg}(45° - 30°) = \frac{\text{tg}\, 45° - \text{tg}\, 30°}{1 + \text{tg}\, 45° \cdot \text{tg}\, 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{3^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3}}{3^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

Dessa forma, $\text{tg}^2\, x = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$.

Gabarito: "c".

---

2. (EsPCEx/2018)

Sendo $M = \text{arctg}(x), N = \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $P = \text{tg}(M - N)$, o valor de $30P$ para $x = 15$ é:

a) $\frac{224}{30}$

b) $\frac{45}{6}$

c) 45

d) 224

e) 225

Comentários

$$M = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} M$$

$$N = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \operatorname{tg} N$$

$$P = \operatorname{tg}(M - N) = \frac{\operatorname{tg} M - \operatorname{tg} N}{1 + \operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} N} = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + x \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Para $x = 15$, $P = \frac{1}{2} \cdot \left(15 - \frac{1}{15}\right) = \frac{224}{30}$. Logo, $30P = 224$.

Gabarito: "d".

---

3. **(EsPCEx/2014)**

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right) + 5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

Comentários

Sempre que temos uma expressão do tipo $y(t) = \mathrm{a} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{ftrig}(c \cdot t + d)$, onde a função trigonométrica $\mathrm{ftrig} = \mathrm{sen}$ ou $\cos$, o período da função $y(t)$ é calculado por $T = \frac{2\pi}{c}$.

Sabendo disso, a função $P(t)$, com $c = \frac{\pi}{6}$, tem período $T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ meses (anual). Como a função base é uma função do tipo cosseno, ela cresce em metade desse período e decresce na outra metade. Dessa forma, a resposta correta é o item a), já que a metade de 12 meses são 6 meses = dois trimestres.

As outras alternativas estão erradas:

A população atinge seu máximo em $t = 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$, isto é, todo mês de fevereiro.

O período de seca (estiagem) também corresponde a 6 meses do ano.

A população média anual é de 5000 animais.

A população atinge seu mínimo em $t = 5 + 12k$ com -1000 animais.

Gabarito: "a".

---

4. **(EsPCEx/2014)**

O valor de $(\cos 165° + \operatorname{sen} 155° + \cos 145° - \operatorname{sen} 25° + \cos 35° + \cos 15°)$ é

a) $\sqrt{2}$

b) -1

c) 0

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

Comentários

Seja E a expressão pedida. Podemos reescrevê-la da seguinte forma, agrupando termos suplementares:

$$E = (\cos 165° + \cos 15°) + (\operatorname{sen} 155° - \operatorname{sen} 25°) + (\cos 145° + \cos 35°)$$

Usando que $\cos(180° - x) = -\cos x$ e que $\operatorname{sen}(180° - x) = \operatorname{sen} x$, temos:

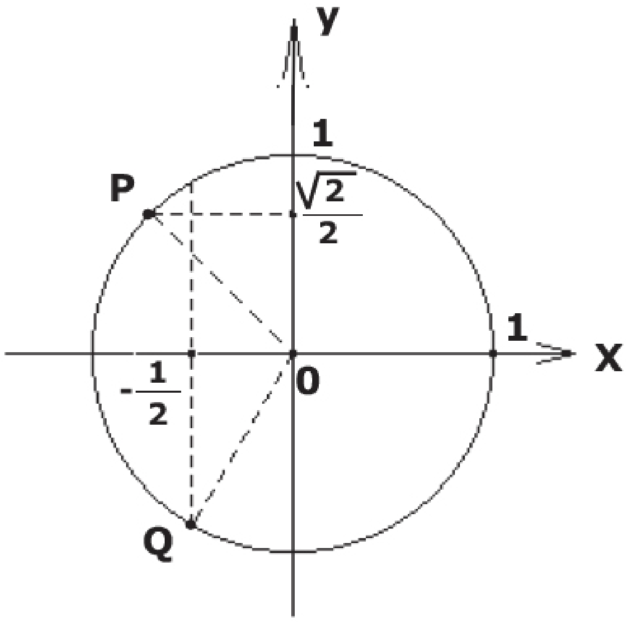
$$E = (-\cos 15° + \cos 15°) + (\operatorname{sen} 25° - \operatorname{sen} 25°) + (-\cos 35° + \cos 35°) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Gabarito: "c".

---

5. **(EsPCEx/2012)**

Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo.



O valor de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ é

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

c) $2+\sqrt{3}$

d) $2-\sqrt{3}$

e) $-1+\sqrt{3}$

Comentários

Seja A o ponto $(1{,}0)$. Então $\alpha = \widehat{AOP}$ e $\beta = \widehat{AOPQ}$. Das propriedades do círculo trigonométrico, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\beta = -\frac{1}{2}, \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \beta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{25\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{25\pi}{12} - 2\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}(15°)$

$$\operatorname{tg}(15°) = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg}45° - \operatorname{tg}30°}{1 + \operatorname{tg}45° \cdot \operatorname{tg}30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)$$

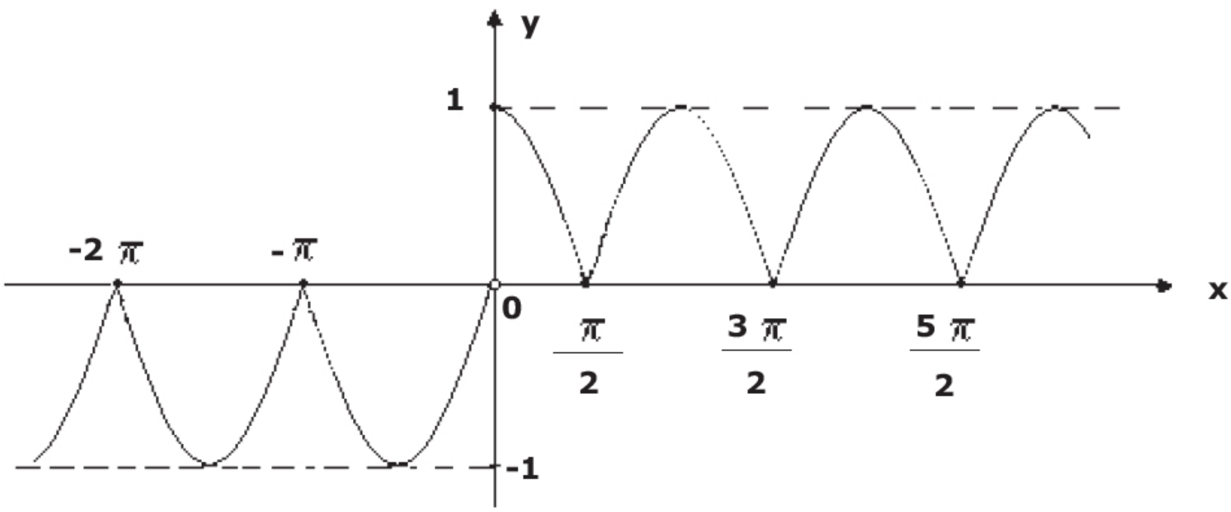
$$= \frac{3^2 + \sqrt{3}^2 - 2\cdot 3\sqrt{3}}{3^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

Gabarito: "d".

---

6. **(EsPCEx/2011)**

A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo. A expressão algébrica de $f(x)$ é:



a) $\begin{cases} -|\operatorname{sen} x|, & se\ x < 0 \\ |\cos x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -|\cos x|, & se\ x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & se\ x \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} |\operatorname{sen} x|, \ se\ x < 0 \\ |\cos x|, se\ x \geq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \operatorname{sen} x, \ se\ x < 0 \\ \cos x, se\ x \geq 0 \end{cases}$

Comentários

O gráfico se assemelha ao de funções trigonométricas do tipo seno ou cosseno, ligeiramente modificadas com modularização. Observe que para $x \geq 0, f(x) \geq 0$ e para $x < 0$, $f(x) \leq 0$. Logo, excluímos as alternativas b), d) e e) de nossa análise. Olhando para $x = \frac{\pi}{2}$ temos, pelo gráfico, que $f(x) = 0$, o que está de acordo com a alternativa a) e em desacordo com c).

Gabarito: "a".

---

7. **(EsPCEx/2011)**

O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320°}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220°)^2$ é:

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

Vamos primeiro fazer a equivalência dos ângulos para o intervalo $(0°, 360°]$

$$1320° = 3 \cdot 360° + 240°$$

$$\frac{53\pi}{3} = 8 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3} = 8 \cdot 360° + 300°$$

$$2220° = 6 \cdot 360° + 60°$$

Logo,

$$\sec 1320° = \sec 240° = \frac{1}{\cos 240°} = \frac{1}{-\cos 60°} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) = \cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2200° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

Portanto, $\frac{\sec 1320°}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220°)^2 = -1 - 1 + 3 = 1$.

Gabarito: "d".

---

8. **(EsPCEx/2011)**

O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$

b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$

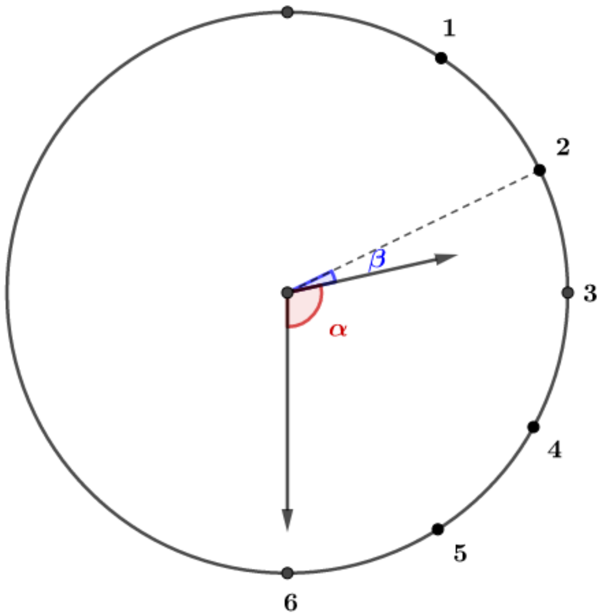
c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$

d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

e) $\frac{(2+\sqrt{3})}{4}$

Comentários

Desenhando o relógio do problema, temos:



No relógio, temos 12 horas. Cada hora possui um ângulo de $30°$:

$$\frac{360°}{12} = 30°$$

No momento em que o ponteiro dos minutos percorre 30 minutos, o ponteiro das horas percorrerá metade do ângulo de cada hora:

$$\beta = \frac{30°}{2} = 15°$$

Então, o ângulo α é dado por:

$$\alpha = 3 \cdot 30° + 15° = 105°$$

Queremos calcular o cosseno desse ângulo:

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = cos60°cos45° - sen60°sen45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: “d”.

9. (EsPCEx/2010)

Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \cdots\right)$.

Se todos os termos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um

a) pentágono (5 lados).

b) hexágono (6 lados).

c) octógono (8 lados).

d) decágono (10 lados).

e) dodecágono (12 lados).

Comentários

A razão da PA é $r = \frac{59\pi}{60} - \frac{47\pi}{60} = \frac{12\pi}{60} = \frac{2\pi}{10}$.

Assim, basta analisar quantas razões conseguimos inserir até que se complete uma volta completa na circunferência. Isso pode ser feito dividindo-se a razão por 2π:

$$n = \left(\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{10}}\right) = 10$$

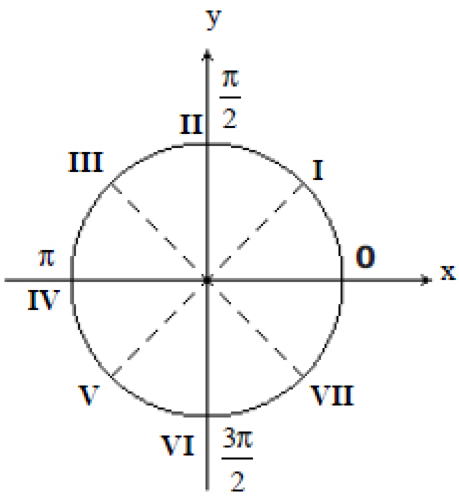
Portanto, temos um decágono.

Gabarito: D

---

10. (EsPCEx/2007)

Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$ correspondem às medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo. Os pontos identificados por 0 a VII representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti-horário, a partir de 0.



Nessas condições, o arco correspondente ao $13°$ termo da sequência, igualmente medido no sentido anti-horário e a partir de 0, terá sua extremidade situada entre os pontos

a) I e II

b) II e III

c) IV e V

d) V e VI

e) VII e 0

Comentários

A sequência tem termo inicial $a_1 = \frac{\pi}{3}$ e razão $r = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$. Assim,

$$a_{13} = a_1 + (13-1) \cdot r$$

$$\Rightarrow a_{13} = \frac{\pi}{3} + 12 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$$

Assim, a_{13} terá sua extremidade no mesmo ponto em que estaria a de $\frac{4\pi}{3}$. Como $\frac{5\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} < \frac{6\pi}{4}$ (verifique!), a_{13} está entre V e VI.

Gabarito: "d".

---

11. (EsPCEx/2006)

O valor da expressão $\frac{\cos 15° + \cos 75°}{\text{sen } 15°} + \frac{\text{sen } 15° + \text{sen } 75°}{\cos 15°}$ é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Comentários

$$\frac{\cos 15° + \cos 75°}{\text{sen } 15°} + \frac{\text{sen } 15° + \text{sen } 75°}{\cos 15°} = \frac{\cos 15° + \text{sen } 15°}{\text{sen } 15°} + \frac{\text{sen } 15° + \cos 15°}{\cos 15°}$$

$$= (\text{sen } 15° + \cos 15°) \cdot \left(\frac{1}{\text{sen } 15°} + \frac{1}{\cos 15°}\right) = (\text{sen } 15° + \cos 15°) \cdot 2 \cdot \left(\frac{\text{sen } 15° + \cos 15°}{2 \cdot \text{sen } 15° \cos 15°}\right)$$

$$= (\text{sen } 15° + \cos 15°)^2 \cdot \frac{2}{\text{sen}(2 \cdot 15°)} = (\text{sen}^2\, 15° + cos^2 15° + 2 \cdot \text{sen } 15° \cos 15°) \cdot \frac{2}{\text{sen } 30°}$$

$$= (1 + \text{sen } 30°) \cdot \frac{2}{\text{sen } 30°} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}} = 6$$

Gabarito: "d".

---

12. (EsPCEx/2005)

A função $f(x) = \left[\operatorname{sen} 2x \cdot \left(\frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2\operatorname{sen} x}\right)\right]^2 - \operatorname{sen} 2x$ é definida para todo x real e $x \neq \frac{k\pi}{2}$, com k inteiro. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) $f(2006) = f(2004) + f(2005)$.

b) $f(2005) = f(2006) - 2f(2003)$.

c) $f(2006) = f(2005) + f(2004) + f(2003)$.

d) $f(2005) = f(2006) - f(2004)$.

e) $f(2006) = f(2003) + f(2004) - f(2005)$.

Comentários

Desenvolvendo-se a expressão:

$$f(x) = \left[\operatorname{sen} 2x \cdot \left(\frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2\operatorname{sen} x}\right)\right]^2 - \operatorname{sen} 2x = \left[\operatorname{sen} 2x \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2\operatorname{sen} x\cos x}\right)\right]^2 - \operatorname{sen} 2x$$

$$= \left[\operatorname{sen} 2x \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} 2x}\right)\right]^2 - \operatorname{sen} 2x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - \operatorname{sen} 2x$$

$$= (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x) - \operatorname{sen} 2x = 1 + \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2x = 1$$

Assim, $f(2006) = 1 = 1 + 1 - 1 = f(2003) + f(2004) - f(2005)$.

Gabarito: "e".

---

13. (EsPCEx/2003)

Considere as expressões:

I- $\frac{\operatorname{sen} 30° \cdot \cos 150°}{\operatorname{tg} 210°}$

II- $\frac{\operatorname{cotg} 50° \cdot \operatorname{sen} 93°}{\operatorname{tg} 181°}$

III- $\frac{\cos x \cdot \operatorname{cossec} x}{\sec x \cdot \operatorname{cotg} x}, x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

IV- $\frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x}, x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Têm sempre valor negativo:

a) I e II.

b) I e IV.

c) II e III.

d) I e III.

e) III e IV.

Comentários

I- $30° \in 1°Q \Rightarrow \operatorname{sen} 30° > 0, 150° \in 2°Q \Rightarrow \cos 150° < 0, 210° \in 3°Q \Rightarrow \operatorname{tg} 210° > 0$. Assim, a expressão E_I resulta num valor negativo, pois $E_I = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$.

II- $50° \in 1°\text{Q} \Rightarrow \text{cotg}\, 50° > 0, 93° \in 2°\text{Q} \Rightarrow \text{sen}\, 93° > 0, 181° \in 3°\text{Q} \Rightarrow \text{tg}\, 210° > 0$. Assim, a expressão E_{II} resulta num valor positivo, pois $E_{II} = \frac{(+)\cdot(+)}{(+)} = (+)$.

III- No intervalo $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[= 4°Q$, $E_{III} = \frac{\cos x \cdot \text{cossec}\, x}{\sec x \cdot \text{cotg}\, x} = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)\cdot(-)} = (+)$, isto é, E_{III} é positivo.

IV- No intervalo $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[= 2°Q$, $E_{IV} = \frac{\text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x}{\text{cossec}\, x} = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$, isto é, E_{III} é negativo.

Assim, são negativos E_I e E_{IV}.

Gabarito: "b".

---

14. (EsPCEx/2002)

Se $z = \frac{2-3\,\text{sen}\, x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em

a) $-2 \leq x \leq -1$

b) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$

d) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

Comentários

Isolando-se a função trigonométrica, temos:

$$\text{sen}\, x = \frac{2-4z}{3}$$

Assim, temos:

$$-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2-4z}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 2 - 4z \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -4z \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4} \geq z \geq \frac{-1}{4}$$

Gabarito: "c".

---

15. (EsPCEx/2002)

Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w, ambos pertencentes ao $1°$ quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

a) $[0°, 15°]$

b) $[15°, 30°]$

c) $[30°, 45°]$

d) $[45°, 60°]$

e) $[60°, 90°]$

Comentários:

$$\cos k = 2 \cdot \cos w$$

Como $k \in 1°$ quadrante, temos $0 \leq \cos k \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \cdot \cos k \leq \frac{1}{2}$. Assim,

$$0 \leq \cos w \leq \frac{1}{2}$$

Como $w \in 1°$ quadrante, devemos ter $w \in [60°, 90°]$, visto que $\arccos 0 = 90°$ e $\arccos \frac{1}{2} = 60°$.

Gabarito: "e".

---

16. (EsPCEx/2002)

O valor numérico da expressão $\operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{8}$

Comentários

$$\operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} = \left(-\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}\right) \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{12}\right)$$

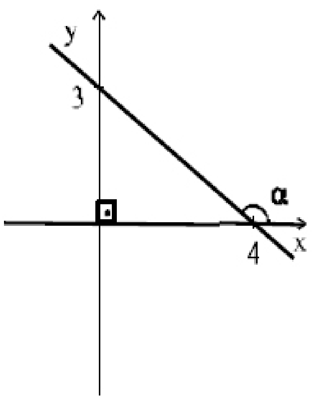
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Gabarito: "c".

---

17. (EsPCEx/2001)

A cossecante do ângulo da figura abaixo é:



a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $-\frac{5}{4}$

Comentários

Seja $\beta = 180° - \alpha$ o ângulo complementar. Da figura, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180° - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{cossec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{25}{9}$.

Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\operatorname{sen}\alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{cossec}\alpha > 0$. Logo, $\operatorname{cossec}\alpha = \frac{5}{3}$.

Gabarito: "d".

---

18. (EsPCEx/2001)

São arcos côngruos:

a) $-730°$ e $-\frac{\pi}{12}$ rad

b) $1640°$ e $-\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $350°$ e $-\frac{\pi}{18}$ rad

d) $1235°$ e $\frac{5\pi}{6}$ rad

e) $2000°$ e $-\frac{4\pi}{3}$ rad

Comentários

1) Usando que π rad = 180°, temos:	2) Fazendo a equivalência do valor na primeira coluna para o primeiro quadrante	2) Equivalência do outro valor
$-\frac{\pi}{12}$ rad = $-\frac{180°}{12} = -15°$	$-15° \rightarrow\ -15° + 1 \cdot 360° = 345°$	$-730° \rightarrow\ -730° + 3 \cdot 360° = 350°$
$-\frac{7\pi}{6}$ rad = $-\frac{7 \cdot 180°}{6} = -210°$	$-210° \rightarrow\ -210° + 1 \cdot 360° = 150°$	$1640° \rightarrow\ 1640° - 4 \cdot 360° = 200°$
$-\frac{\pi}{18}$rad = $-\frac{180°}{18} = -10°$	$-10° \rightarrow\ -10° + 1 \cdot 360° = 350°$	$350° \rightarrow\ 350° + 0 \cdot 360° = 350°$
$\frac{5\pi}{6}$ rad = $\frac{5 \cdot 180°}{6} = 150°$	$150° \rightarrow\ 150° + 0 \cdot 360° = 150°$	$1235° \rightarrow\ 1235° - 3 \cdot 360° = 155°$

$-\frac{4\pi}{3}$ rad $= -\frac{4\cdot 180°}{3} = -240°$	$-240° \to -240° + 1\cdot 360° = 120°$	$2000° \to 2000° - 5\cdot 360° = 200°$

Pode-se perceber que apenas no item “c” os ângulos são trigonometricamente equivalentes.

Gabarito: “c”.

---

19. (EsPCEx/2001)

Se sen $\alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então o valor de tg α é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$

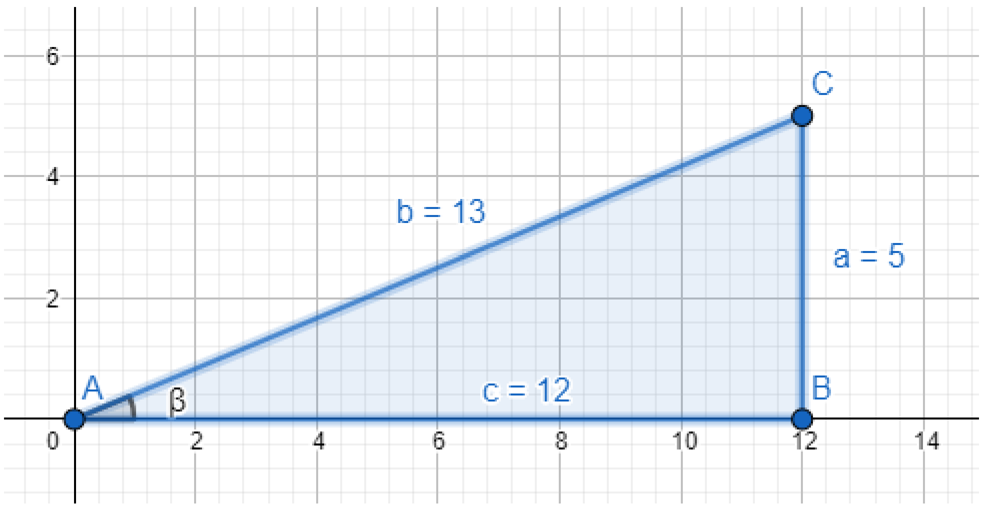
b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{12}{13}$

d) $\frac{12}{5}$

e) $-\frac{12}{13}$

Comentários



Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$, temos que α e β são suplementares, isto é, $\alpha + \beta = \pi$. Temos que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{5}{12}$.

Gabarito: “a”.

---

20. (EsPCEx/2001) [Adaptada]

Para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, simplificando a expressão $\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$, obtém-se o valor:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $3/2$

d) 2

e) 0

Comentários

Dica de prova: como a expressão deve valer para todo x naquele conjunto, então tente entrar com um x qualquer do conjunto e calcule o valor da expressão! Exemplo com $x = 30° = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}+\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\frac{7}{4}}+\frac{1}{\frac{7}{3}}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$$

$$=1+1=2$$

Caso prefira uma solução genérica:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x}=\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}=1.$$

$$\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}=\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}=1.$$

Logo, temos

$$\left(\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x}\right)+\left(\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}\right)=1+1=2.$$

Gabarito: "d".

---

21. (EsPCEx/2000)

Sendo $\left\{k \in \mathbb{Z}\ e\ x \neq \frac{k\pi}{4}\right\}$, então $2-\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$ é equivalente a:

a) $\cos^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\sec^2 x$

d) $\operatorname{cossec}^2 x$

e) 1

Comentários

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\Leftrightarrow\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}=1-\operatorname{tg}^2 x\Leftrightarrow 2-\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$$

Pois,

$$1+\operatorname{tg}^2 x=1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

Gabarito: “c”.

22. (EsPCEx/2000)

Se y é a medida de um ângulo $0° < y < 30°$, o maior dentre os números $\operatorname{sen} y$, $\cos y$, $\operatorname{sen}^2 y$, $\cos^2 y$ e $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$ é

a) $\operatorname{sen} y$

b) $\cos y$

c) $\operatorname{sen}^2 y$

d) $\cos^2 y$

e) $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$

Comentários

$$0 < \operatorname{sen} y < 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 y < \operatorname{sen} y < 1$$
$$0 < \cos y < 1 \Rightarrow \cos^2 y < \cos y < 1$$

Além disso, como $0° < y < 30°$, e como $\cos y < 1$,

$$\cos y > \operatorname{sen} y > \operatorname{sen} y \cdot \cos y$$

Portanto, $\cos y$ é o maior número.

Gabarito: “b”.

23. (EsPCEx/2000)

O valor de $3\operatorname{sen} 10° \cdot (\operatorname{tg} 5° + \operatorname{cotg} 5°)$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$

b) 2

c) 3

d) 5

e) 6

Comentários

$$3\operatorname{sen} 10° \cdot (\operatorname{tg} 5° + \operatorname{cotg} 5°) = 3 \operatorname{sen} 10° \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} 5°}{\cos 5°} + \frac{\cos 5°}{\operatorname{sen} 5°}\right)$$
$$= 3 \operatorname{sen} 10° \cdot \left(\frac{2 \operatorname{sen}^2 5°}{2 \operatorname{sen} 5° \cos 5°} + \frac{2 \cos^2 5°}{2 \operatorname{sen} 5° \cos 5°}\right) = 3 \operatorname{sen} 10° \cdot \left(\frac{2(\operatorname{sen}^2 5° + \cos^2 5°)}{2 \operatorname{sen} 5° \cos 5°}\right).$$

Usando a identidade fundamental da trigonometria e a fórmula para seno do arco duplo, temos que a expressão acima é igual a

$$3 \operatorname{sen} 10° \cdot \left(\frac{2}{\operatorname{sen} 10°}\right) = 6$$

Gabarito: “e”.

24. (EsPCEx/2000)

O número de arcos existentes entre $0°$ e $1560°$ cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é

a) 6

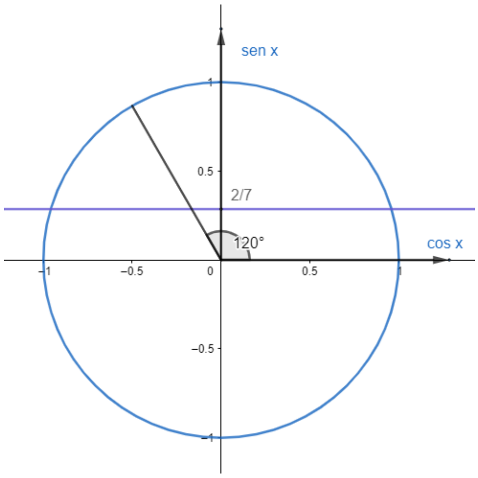
b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

Comentários



$1560° = 4 \cdot 360° + 120°$. Assim, estamos dando quatro voltas no círculo trigonométrico e avançando mais $120°$ além. Como $\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{7}$ e como, no segundo quadrante, a função seno é decrescente, temos que o ângulo do segundo quadrante cujo seno é $\frac{2}{7}$ é maior que $120°$. Logo, temos 2 ângulos cujo seno é $\frac{2}{7}$ a cada volta (um no primeiro e outro no segundo quadrante) e mais um último ângulo no primeiro quadrante, contido no intervalo $[4 \cdot 360°, 4 \cdot 360° + 120°)$, dando um total de 9 arcos.

Gabarito: "d".

---

25. (EsPCEx/2000) [Adaptada]

O domínio e imagem da função $f(x) = \frac{1}{5 - \operatorname{sen} x}$ são, respectivamente,

a) $\mathbb{R} - \{5\}$ **e** $[-1, 1]$

b) $\mathbb{R}$ **e** $\left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$

c) $\mathbb{R}$ **e** $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$

d) $\mathbb{R}^*$ **e** $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$

e) $\mathbb{R} - \{5\}$ **e** $\left]-1, \frac{1}{3}\right]$

Comentários

O maior domínio para essa função é aquele que considera todos os números reais, exceto aqueles que zeram o denominador da expressão, pois aí a função não ficaria definida. Acontece que se tivermos $5 - \operatorname{sen} x = 0$, então $\operatorname{sen} x = 5$, equação que não tem solução nos reais. Logo, nenhum número será excluído e o domínio é todos os reais, isto é, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para a imagem, pensemos o seguinte (na primeira equivalência, faz-se o produto por -1):

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\operatorname{sen} x \le 1 \Leftrightarrow 5 - 1 \le 5 - \operatorname{sen} x \le 5 + 1 \Leftrightarrow 4 \le 5 - \operatorname{sen} x \le 6.$$

Assim, como $5 - \operatorname{sen} x$ está entre 4 e 6, o inverso, que é $f(x) = \frac{1}{5-\operatorname{sen} x}$, deve estar entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. Como $\frac{1}{6}$ é menor, temos $\frac{1}{6} \le f(x) \le \frac{1}{4}$, isto é, $Im(f) = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$.

Gabarito: "c".

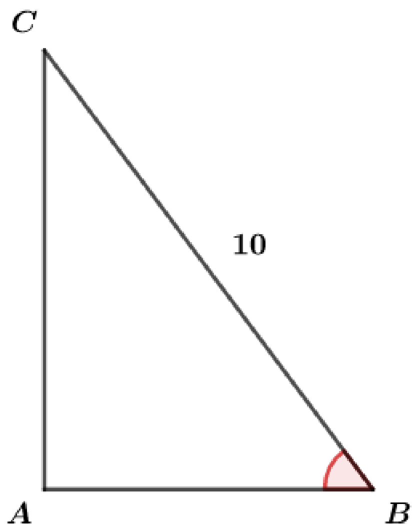
---

26. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Num triângulo retângulo ABC, a hipotenusa BC mede 10 cm e $\cos \hat{B} = 0,6$. Calcular a soma dos catetos.

Comentários

Temos o seguinte triângulo:



Usando os dados do enunciado:

$$\cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$0,6 = \frac{AB}{10} \Rightarrow AB = 6$$

Aplicando a relação fundamental:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

A soma dos catetos é dada por:

$$S = AB + AC = 6 + 8 = 14$$

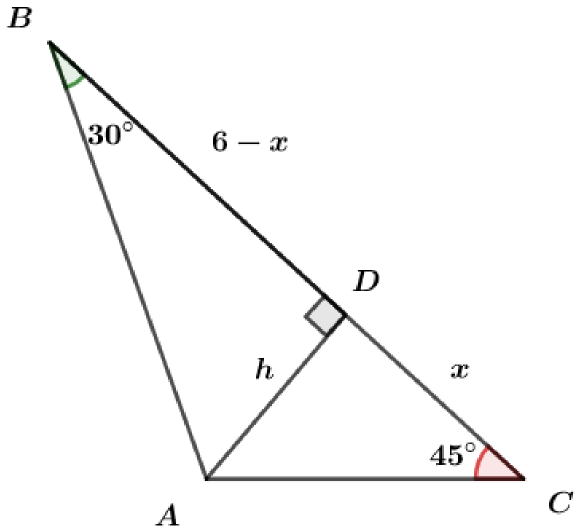
Gabarito: $\boldsymbol{S = 14}$

27. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Num triângulo ABC tem-se $BC = 6, A\widehat{B}C = 30°$ e $B\widehat{C}A = 45°$. Calcular a medida da altura relativa ao lado BC.

Comentários

Temos o seguinte triângulo:



Queremos calcular h. Perceba que o triângulo ADC é isósceles:

$$D\hat{A}C + 45° + 90° = 180° \Rightarrow D\hat{A}C = 45°$$

Assim, podemos afirmar que $x = h$. Usando a razão tangente no triângulo ADB:

$$tg(30°) = \frac{h}{6-h} \Rightarrow h = \frac{(6-h)\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (3+\sqrt{3})h = 6\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 3$$

Gabarito: $\boldsymbol{h = 3\sqrt{3} - 3}$

28. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Obter M tal que $cosx = \frac{1}{M}$ e $senx = \frac{\sqrt{M+1}}{M}$.

Comentários

Usando a relação fundamental, obtemos:

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{M+1}{M^2} + \frac{1}{M^2} = 1$$

$$M^2 - M - 2 = 0$$

As raízes são dadas por:

$$M = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1 \; ou \; 2$$

Gabarito: $\boldsymbol{M = -1 \ ou\ M = 2}$

29. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Calcular $\boldsymbol{secx}$ sabendo que $\boldsymbol{senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}, a > b > 0}$.

Comentários

Sabemos que $secx = \frac{1}{cosx}$. Então, devemos calcular cosseno. Usando a relação fundamental:

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - sen^2x}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{(a^2-b^2)^2}}{a^2+b^2}$$

$$\cos x = \pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

Assim, o secante é dado por:

$$\sec x = \pm\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{secx = \pm\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$

30. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:

$$\boldsymbol{y = (tgx - senx)^2 + (1 - cosx)^2 - (secx - 1)^2}$$

Comentários

Vamos desenvolver a expressão:

$$y = tg^2x - 2tgxsenx + sen^2x + 1 - 2cosx + \cos^2 x - (\sec^2 x + 1 - 2secx)$$

Usando a relação $tg^2x = \sec^2 x - 1$, temos:

$$y = \sec^2 x - 1 - 2tgxsenx + \underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1} + 1 - 2cosx - \sec^2 x - 1 + 2secx$$

$$y = -2tgxsenx - 2cosx + 2secx$$

$$y = -\frac{2sen^2x}{cosx} - 2cosx + \frac{2}{cosx}$$

$$y=\frac{\underbrace{-2sen^2x-2\cos^2 x}_{-2}+2}{cosx}$$

$$\Rightarrow y=0$$

Gabarito: $\boldsymbol{y=0}$

31. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:

$$y=\frac{\cos^4 x-sen^4x}{1-tg^4x}+\frac{cossecx-senx}{secx-cosx}$$

Comentários

Vamos simplificar a expressão, escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$y=\frac{\cos^4 x-sen^4x}{1-\frac{sen^4x}{\cos^4 x}}+\frac{\frac{1}{senx}-senx}{\frac{1}{cosx}-cosx}$$

$$y=\frac{\cos^4 x-sen^4x}{\frac{\cos^4 x-sen^4x}{\cos^4 x}}+\frac{\frac{1-sen^2x}{senx}}{\frac{1-\cos^2 x}{cosx}}$$

$$y=\cos^4 x+\frac{cosx(\cos^2 x)}{senx(sen^2x)}$$

$$y=cos^4x+\frac{\cos^3 x}{sen^3x}$$

$$\Rightarrow y=\cos^4 x+cotg^3x$$

Gabarito: $\boldsymbol{y=\cos^4 x+cotg^3x}$

32. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as seguintes identidades:

a) $\mathbf{tg(-2734°)=-tg\,34°}$

b) $\mathbf{\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)}$

Comentários

a) Sabemos que os valores da razão tangente repetem para cada $k\cdot 180°, k\in\mathbb{Z}$. Assim, vamos encontrar o valor do arco congruente a $-2734°$:

$$tg(-2734°)=tg(-34°-15\cdot 180°)=tg(-34°)$$

b) A função cosseno repete seus valores para cada $k\cdot 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Desse modo:

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right)=\cos\left(-5\pi-\frac{2\pi}{7}\right)=\cos\left(-\pi-\frac{2\pi}{7}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

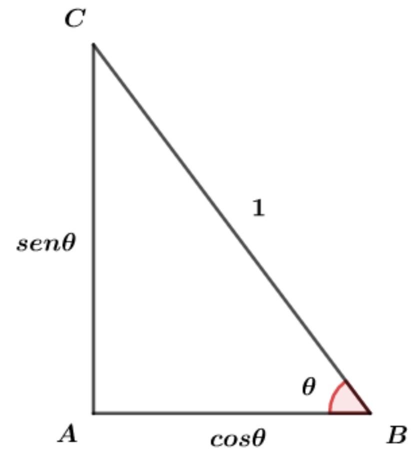
Gabarito: Demonstração

33. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

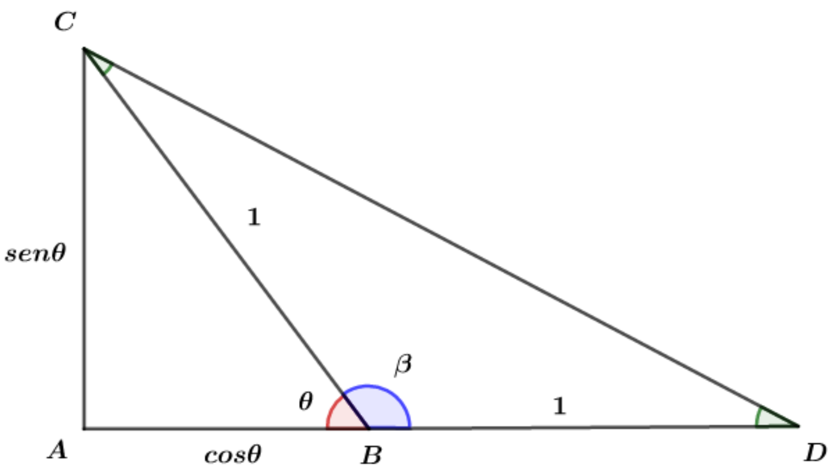
Utilizando um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 e um dos ângulos agudos de medida θ encontre $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em função de senos e cossenos.

Comentários

A figura inicial é dada por:



Podemos estender o lado AB de forma a obter um triângulo isósceles BCD:



Pelas propriedades do triângulo isósceles, como $BD = BC$, temos $\widehat{D} = \hat{C} = \alpha$.

O ângulo externo θ é a soma dos ângulos adjacentes $\hat{C}$ e $\widehat{D}$. Veja:

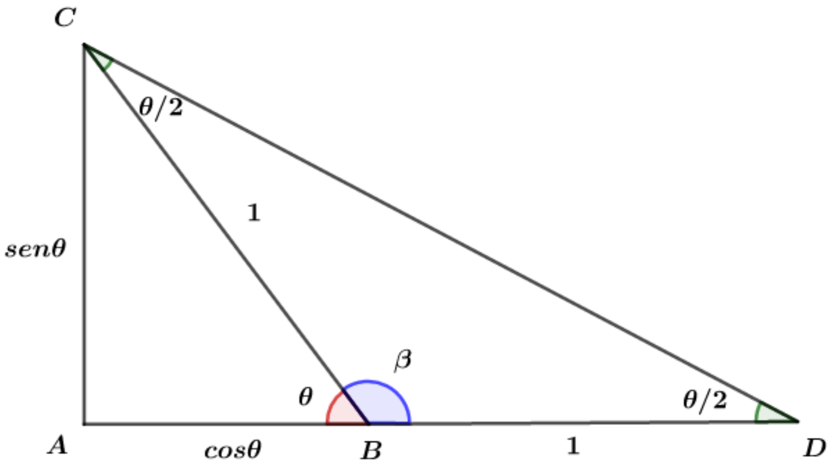
$$\theta + \underbrace{\beta}_{\alpha+\alpha+\beta=\pi} = \pi$$

$$\theta + \big(\pi - (\alpha + \alpha)\big) = \pi$$

$$\theta = 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

Assim, temos a seguinte figura:



Podemos escrever:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen\theta}{1 + \cos\theta}$$

Gabarito: Demonstração

---

34. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $y = 2 - 3senx$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em $\mathbb{R}$ é:

a) 5

b) 1

c) 3

d) -1

e) 6

Comentários

Sabemos que a imagem da função seno é dada por:

$$-1 \leq senx \leq 1$$

Então, o valor máximo que y assume ocorre quando $senx$ é mínimo, isto é, $senx = -1$:

$$y = 2 - 3(-1) = 5$$

Gabarito: $y = 5$

---

35. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sendo dado que $senx + cosx = a$, calcule:

a) $senxcosx$

b) $sen^4x + cos^4x$

c) $sen^6x + \cos^6 x$

Comentários

a) Podemos elevar a equação dada ao quadrado:

$$(senx + cosx)^2 = a^2$$

$$\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1} + 2senxcosx = a^2$$

$$1 + 2senxcosx = a^2$$

$$senxcosx = \frac{a^2 - 1}{2}$$

b) Vamos escrever a relação como um quadrado perfeito:

$$sen^4x + \cos^4 x = sen^4x + \cos^4 x + 2sen^2xcos^2x - 2sen^2xcos^2x$$

$$sen^4x + \cos^4 x = \left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)^2 - 2(senxcosx)^2$$

Substituindo o valor calculado de $senxcosx$:

$$sen^4x + \cos^4 x = 1 - 2\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2$$

$$sen^4x + \cos^4 x = 1 - \frac{2(a^4 - 2a^2 + 1)}{4}$$

$$sen^4x + \cos^4 x = \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2}$$

c) Usando a fatoração clássica:

$$sen^6x + \cos^6 x = \left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)(sen^4x - sen^2xcos^2x + \cos^4 x)$$

Substituindo os valores de $senxcosx$ e $sen^4x + \cos^4 x$, obtemos:

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2} - \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-2a^4 + 4a^2 + 2}{4} - \frac{(a^4 - 2a^2 + 1)}{4}$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-2a^4 + 4a^2 + 2 - a^4 + 2a^2 - 1}{4}$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \frac{-3a^4 + 6a^2 + 1}{4}$$

Gabarito: a) $senxcosx = \frac{a^2-1}{2}$ b) $sen^4x + \cos^4 x = \frac{-a^4+2a^2+1}{2}$ c) $sen^6x + \cos^6 x = \frac{-3a^4+6a^2+1}{4}$

---

36. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $\frac{senx-seny}{cosx-cosy} = 2$ e $tgx = \frac{1}{3}$, então tgy é igual a:

a) 3

b) $1/6$

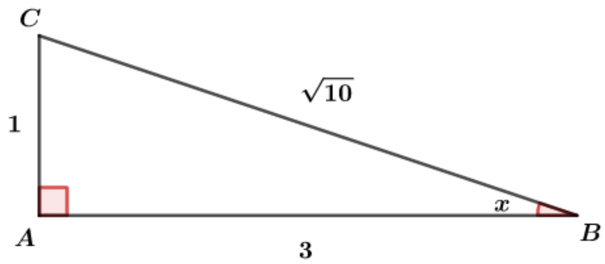
c) 0

d) $-4/3$

e) -3

Comentários

Podemos usar o triângulo:



BC foi obtido usando o teorema de Pitágoras:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$BC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Assim, temos as seguintes razões:

$$senx = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$cosx = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Substituindo os valores na expressão, obtemos:

$$\frac{senx - seny}{cosx - cosy} = 2$$

$$senx - seny = 2(cosx - cosy)$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} - seny = \frac{6}{\sqrt{10}} - 2cosy$$

$$2cosy - seny = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

Dividindo a equação por $cosy$:

$$2 - tgy = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{cosy}$$

$$2 - tgy = \frac{5}{\sqrt{10}} secy$$

Elevando a equação ao quadrado e usando a relação $\sec^2 y = 1 + tg^2 y$:

$$4 + tg^2 y - 4tgy = \frac{25}{10}(1 + tg^2 y)$$

$$8 + 2tg^2 y - 8tgy = 5 + 5tg^2 y$$

$$3tg^2 y + 8tgy - 3 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$tgy = \frac{-4 \pm \sqrt{25}}{3} = -3 \; ou \; \frac{1}{3}$$

Não podemos ter $tgy = 1/3$, pois:

$$tgy = \frac{1}{3} \Rightarrow seny = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow cosy = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{senx - seny}{cosx - cosy} = \frac{0}{0} \; (valor \; indeterminado)$$

Portanto:

$$tgy = -3$$

Gabarito: “e”.

---

37. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x} = 1 - 2sen^2 x$

b) $\frac{cosx - senx}{cosx + senx} = \frac{1-tgx}{1+tgx}$

Comentários

a) Vamos escrever a tangente em função do seno e cosseno:

$$\frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = \frac{1 - \frac{sen^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{sen^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\overbrace{\cos^2 x}^{1-sen^2 x} - sen^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\underbrace{\cos^2 x + sen^2 x}_{1}} = 1 - 2sen^2 x$$

b) Vamos dividir a expressão à esquerda por $cosx$:

$$\frac{cosx - senx}{cosx + senx} = \frac{1 - \frac{senx}{cosx}}{1 + \frac{senx}{cosx}} = \frac{1 - tgx}{1 + tgx}$$

Gabarito: Demonstração

---

38. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $tgx + secx = 3/2$, calcular $senx$ e $cosx$.

Comentários

$$tgx + secx = \frac{3}{2}$$

$$tgx = \frac{3}{2} - secx$$

Elevando a equação ao quadrado, obtemos:

$$tg^2x = \frac{9}{4} - 3secx + \sec^2 x$$

Usando a relação $\sec^2 x = 1 + tg^2x$:

$$\sec^2 x - 1 = \frac{9}{4} - 3secx + \sec^2 x$$

$$3secx = \frac{9}{4} + 1$$

$$\frac{1}{cosx} = \frac{13}{12}$$

$$cosx = \frac{12}{13}$$

$$senx = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}$$

Testando os valores:

$$tgx + \frac{13}{12} = \frac{3}{2}$$

$$tgx = \frac{5}{12} > 0$$

Como a tangente é positiva, temos que o seno deve ser positivo:

$$cosx > 0 \Rightarrow senx > 0$$

$$\therefore senx = \frac{5}{13}$$

Gabarito: $senx = 5/13$ e $cosx = 12/13$

---

39. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $sen^2x + senx = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

Comentários

Vamos calcular o valor da expressão $\cos^4 x + \cos^2 x$:

$$\cos^4 x + \cos^2 x = \cos^2 x\,(\cos^2 x + 1)$$

Usando a relação fundamental:

$$\cos^4 x + \cos^2 x = (1 - sen^2x)(1 - sen^2x + 1)$$

$$\cos^4 x + \cos^2 x = 2 - sen^2x - 2sen^2x + sen^4x$$

$$\cos^4 x + \cos^2 x = 2 - 3sen^2x + (sen^2x)^2$$

Usando o dado do enunciado:

$$sen^2x = 1 - senx$$

$$\Rightarrow \cos^4 x + \cos^2 x = 2 - 3(1 - senx) + (1 - senx)^2$$

$$\cos^4 x + \cos^2 x = 2 - 3 + 3senx + 1 + sen^2x - 2senx$$

$$\Rightarrow \cos^4 x + \cos^2 x = sen^2x + senx = 1$$

Gabarito: Demonstração

---

40. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, prove as identidades abaixo:

a) $\frac{secx}{tgx+cotgx} = senx$

b) $\frac{tgx-cotgx}{tgx+cotgx} = 2sen^2x - 1$

Comentários

a) Vamos simplificar a expressão:

$$\frac{secx}{tgx + cotgx}$$

Escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$\frac{\frac{1}{cosx}}{\frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx}} = \frac{\frac{1}{cosx}}{\frac{sen^2x + \cos^2 x}{cosxsenx}} = \frac{1}{cosx} \cdot \frac{cosxsenx}{1} = senx$$

b) Simplificando a expressão:

$$\frac{tgx - cotgx}{tgx + cotgx}$$

Escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$\frac{\frac{senx}{cosx} - \frac{cosx}{senx}}{\frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx}} = \frac{\frac{sen^2x - \cos^2 x}{cosxsenx}}{\frac{sen^2x + \cos^2 x}{cosxsenx}} = sen^2x - (1 - sen^2x) = 2sen^2x - 1$$

Gabarito: Demonstração

---

41. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Elimine o arco x na equação:

$$\begin{cases} senx - cosx = a \\ cos2x = b \end{cases}$$

Comentários

Analisando a segunda equação, temos:

$$\cos^2 x - sen^2x = b$$

$$\Big(\underbrace{cosx - senx}_{-a}\Big)(cosx + senx) = b$$

$$cosx + senx = -\frac{b}{a}$$

Somando a equação acima com a primeira equação do sistema, temos:

$$2senx = a - \frac{b}{a}$$

$$senx = \frac{a^2 - b}{2a}$$

Substituindo o valor do seno na primeira equação:

$$cosx = senx - a$$

$$cosx = \frac{a^2 - b}{2a} - a$$

$$cosx = \frac{-a^2 - b}{2a}$$

Usando a relação fundamental:

$$sen^2x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{a^2 - b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-a^2 - b}{2a}\right)^2 = 1$$

$$2a^4 + 2b^2 = 4a^2$$

$$b^2 = a^2(2 - a^2)$$

Gabarito: $\boldsymbol{b^2 = a^2(2 - a^2)}$

---

42. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Verifique a seguinte identidade:

$$\boldsymbol{2arctg\left(\frac{1}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}}$$

Comentários

Fazendo $\alpha = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$ e $\beta = arctg\left(\frac{1}{7}\right)$, temos para $\alpha, \beta \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$tg\alpha = \frac{1}{3}$$

$$tg\beta = \frac{1}{7}$$

Vamos calcular o valor da seguinte expressão:

$$tg(2\alpha + \beta) = \frac{tg(2\alpha) + tg\beta}{1 - tg(2\alpha)tg\beta}$$

Calculando $tg(2\alpha)$:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

Substituindo os valores na expressão:

$$tg(2\alpha + \beta) = \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

Gabarito: Demonstração

---

43. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $0 < x < \pi/2$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $tgx = -tg\alpha$

b) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $secx = cossec\alpha$

c) Sendo $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então, $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

d) A função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - \cos x$

Comentários

a) Verdadeira.

$$x = 2\pi - \alpha$$

$$tgx = tg(2\pi - \alpha) = \frac{sen(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = -\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha$$

b) Verdadeira.

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$secx = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{sen(\alpha)} = cossec\alpha$$

c) Falsa.

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{5}$$

d) Verdadeira.

$$f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = -sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 = -\cos x + 2 = g(x)$$

Gabarito: a) V b) V c) F d) V

44. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sobre a função f definida por $f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$, podemos afirmar que:

a) f não é limitada.

b) f é constante.

c) f é injetora.

d) f é ímpar.

e) $f(x)=\cos^2 x$, para todo x real.

Comentários

Desenvolvendo a função, obtemos:

$$f(x)=\cos^2 x+\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cosx-sen\left(\frac{\pi}{3}\right)senx\right]^2+\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cosx+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)senx\right]^2$$

$$f(x)=\cos^2 x+2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^2 x+2sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)sen^2x$$

$$f(x)=\cos^2 x+2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos^2 x+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 sen^2x$$

$$f(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}sen^2x$$

$$f(x)=\frac{3}{2}$$

Portanto, f é constante.

Gabarito: "b".

45. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

O valor numérico da expressão

$$sen\left(\frac{13\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

É

a) $1/2$

b) $1/3$

c) $1/4$

d) $1/6$

e) $1/8$

Comentários

Reescrevendo a expressão:

$$sen\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\left[-sen\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\left[-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{sen\left(\frac{2\pi}{12}\right)}{2}=\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$$

Gabarito: "c".

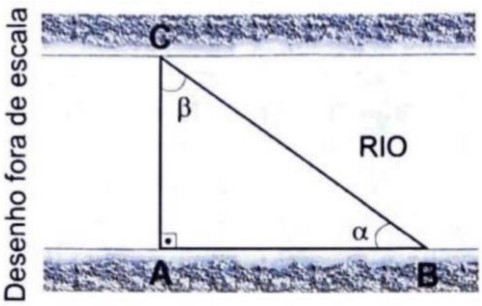
---

10. QUESTÕES NÍVEL 2

46. (AFA/2021)

Em uma aula de topografia, o professor queria medir a largura de um rio.

Para tal, ele tomou dois pontos A e B em uma margem do rio e outro ponto C na margem oposta, de modo que o segmento $\overline{CA}$ ficasse perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, como indicado na figura a seguir.



Considere que:

- **a distância entre os pontos A e B é de 30m;**
- **os ângulos agudos α e β podem ser obtidos através da equação $(sen^2\alpha)x^2 - 9(sen\alpha)(\cos\beta)+\frac{5}{2}\cos\beta=0$, na qual $x=2$ é uma de suas raízes;**
- **$\sqrt{2}=1,4$ e $\sqrt{3}=1,7$.**

A largura aproximada do rio, em m, é igual a

a) 15

b) 17

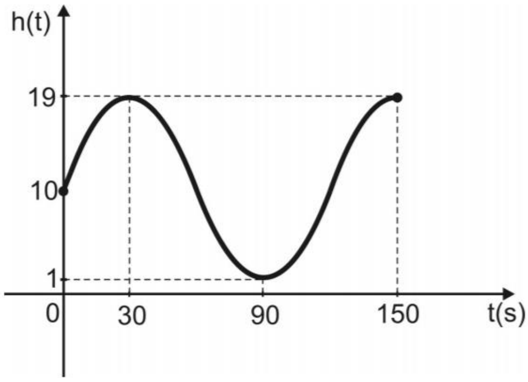
c) 21

d) 51

47. (AFA/2020)

Em uma roda gigante, a altura h, em metros, em que uma pessoa se encontra, em relação ao solo, no instante t, em segundos, é dada pela função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(t) = A + Bsen(Ct)$, em que A, B e C são constantes reais.

A figura a seguir ilustra o gráfico dessa função, no intervalo $[0, 150]$



Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) $|A \cdot B \cdot C| = \pi$

( ) No instante $t = 20s$, a pessoa estará a uma altura h tal que $h \in [17,5; 17,8]$

( ) A função real f definida por $f(t) = 10 - 9\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$ é idêntica à função h

Sobre as proposições, tem-se que:

a) todas são verdadeiras.

b) apenas duas são verdadeiras.

c) apenas uma é verdadeira.

d) nenhuma delas é verdadeira.

48. (AFA/2016)

Considera a função real sobrejetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{sen3x}{senx} - \frac{cos3x}{cosx}$

Sobre f é FALSO afirmar que

a) O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

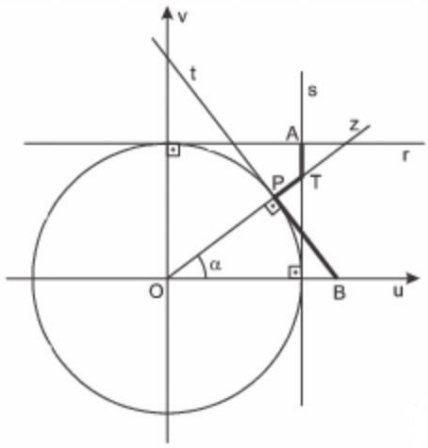
b) f é par

c) f é injetora.

d) $B = \{2\}$

49. (AFA/2014)

No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z.



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT, TP e PB, pode ser calculado, como função de α, por

a) $\sec \alpha$

b) $\cos \sec \alpha$

c) $tg\ \alpha + cotg\ \alpha$

d) $\cos \sec \alpha + \sec \alpha$

50. (AFA/2013)

Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x) = 3\ sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) sen\left(\frac{\pi x}{4}\right) sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão NÃO condiz com o modelo proposto.

a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.

b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.

c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.

d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

51. (AFA/2012)

Considere A o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{sen\ x}{cossec\ x} + \frac{\cos x}{sec\ x}$.

Sobre a função f é correto afirmar que

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) é periódica com período igual a π.

c) é decrescente se $x \in \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) é ímpar.

52. (AFA/2011)

O período da função real f definida por $f(x) = \frac{sen\ 3x + sen\ x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

a) 2π

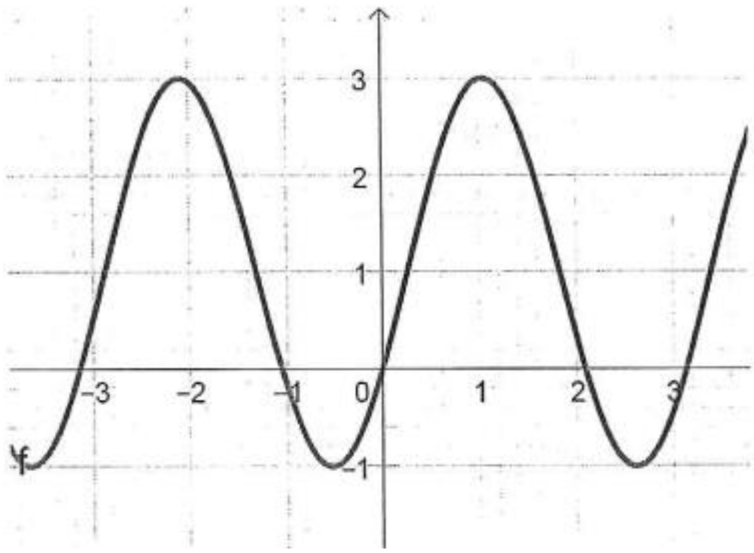
b) π

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

53. (EFOMM/2020)

Uma parte do gráfico da função f está representado na figura abaixo. Assinale a alternativa que pode representar $f(x)$.



a) $f(x) = sen(x - \pi) + 1$

b) $f(x) = 2sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

c) $f(x) = sen\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

d) $f(x) = 2sen(2x) + 1$

e) $f(x) = 2sen\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

54. (EFOMM/2017)

Dado $f(x) = x + a,\ f(g(x)) = \frac{sen\,x + a^2 + a}{a+1}$ e $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Determine o valor de a.

a) $a = 0$

b) $a = 1$

c) $a = 2$

d) $a = 3$

e) $a = 4$

55. (EFOMM/2013)

Se $tgx + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $sen\,x + \cos x$ vale:

a) $-7/13$.

b) $5/13$.

c) $12/13$.

d) $15/12$.

e) $17/13$.

56. (EFOMM/2010)

O valor numérico da expressão $\frac{\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) - \sec(2400°) + tg\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{cossec^2(-780°)}$ é igual a

a) 1

b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{8}$

57. (EFOMM/2009)

Duas pessoas estão na beira da praia e conseguem ver uma lancha B na água. Adotando a distância entre as pessoas como $\overline{P_1P_2}$ sendo 63 metros, o ângulo $B\widehat{P}_1P_2 = \alpha$, $B\widehat{P}_2P_1 = \beta$, $tg\alpha = 2$ e $tg\beta = 4$. A distância da lancha até a praia vale

a) 83

b) 84

c) 85

d) 86

e) 87

58. (EFOMM/2009)

Considerando-se a função clássica $f(x) = arcsen\, x$ e a sua inversa $g(x) = f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de fog e gof são

a) iguais

b) diferentes, mas o de fog está contido no de gof.

c) diferentes, mas o de gof está contido no de fog.

d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.

e) diferentes e de intersecção vazia.

59. (EFOMM/2006)

O valor de $\cos\left[\frac{29\pi}{4}\right] + tg\left[\frac{-16\pi}{3}\right]$ é

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

e) $-\left[\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

60. (EFOMM/2006)

Sejam α um arco do 1º quadrante e β um arco do 2º quadrante, tais que $\cos\alpha = 0,8$ e $sen\,\beta = 0,6$. O valor se $sen(\alpha + \beta)$ é

a) $1,00$

b) $0,96$

c) $0,70.$

d) $0,48$

e) $0,00$

61. (EFOMM/2005)

Dois barcos navegam em direções perpendiculares. A trajetória de um deles forma um ângulo de $18° \, 24'$ com direção indicada pela agulha da bússola, indicando o norte. Qual é a medida do ângulo agudo formado pela trajetória do outro e pela direção indicada pela agulha da bússola?

a) $41° \, 36'$

b) $51° \, 36'$

c) $71° \, 36'$

d) $75° \, 36'$

e) $70° \, 36'$

62. (EFOMM/2005)

O período e o conjunto imagem da função $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$, são, respectivamente:

a) $\frac{\pi}{2}$; $[1,5 \, , 2,5]$

b) π; $[-0,5, 2]$

c) 2π; $[-0,5 \, , 2]$

d) $\frac{\pi}{2}$; $[-0,5 \, , 0,5]$

e) 2π; $[1,5 \, , 2,5]$

63. (Escola Naval/2016)

Seja $q = (\cos 5°) \cdot (\cos 20°) \cdot (\cos 40°) \cdot (\cos 85°)$ a razão de uma progressão geométrica infinita com termo inicial $a_0 = \frac{1}{4}$ .Sendo assim, é correto afirmar que a soma dos termos dessa progressão vale:

a) $\frac{1}{15}$

b) $\frac{2}{15}$

c) $\frac{3}{15}$

d) $\frac{4}{15}$

e) $\frac{7}{15}$

64. (Escola Naval/2014)

O valor do produto $cos40° \cdot cos80° \cdot cos160°$ é

a) $\frac{-1}{8}$

b) $\frac{-1}{4}$

c) -1

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

65. (Escola Naval/2013)

Para que valores de m vale a igualdade $sen\ x = \frac{m-1}{m-2}, x \in \mathbb{R}$?

a) $m < 2$

b) $m \leq \frac{3}{2}$

c) $m \leq \frac{3}{2}$ ou $m \geq 2$

d) $m \leq \frac{5}{2}$ e $m \neq 2$

e) $m \leq \frac{7}{2}$ e $m \neq 2$

66. (Escola Naval/2013)

Considerando a função $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$, é inversível, o valor de $tg\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$ é

a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

b) $-\frac{4}{25}$

c) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{21}}{25}$

e) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

67. (Escola Naval/2012)

Qual o valor da expressão $\sqrt{\operatorname{cossec}^2 \pi x + cotg\frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $arctg\ x + arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$?

a) $\sqrt{3}$

b) -1

c) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$

d) 2

e) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

68. (EFOMM/2021)

O valor de $\frac{\sec^5(5)+cossec^2(5)}{cossec^2(10)}$ é igual a:

a) $1/2$

b) 1

c) 2

d) $5/2$

e) 4

GABARITO

46. b
47. b
48. c
49. a
50. c
51. a
52. d
53. e
54. d
55. e
56. e
57. b
58. c
59. e
60. e
61. c
62. e
63. d
64. a

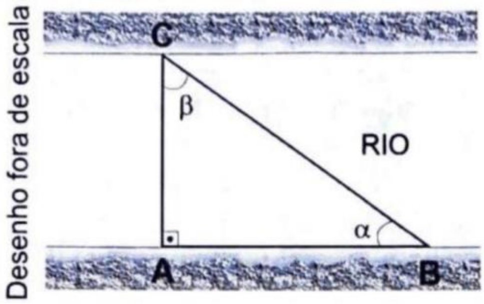
65. b
66. e
67. d
68. e

RESOLUÇÃO

46. (AFA/2021)

Em uma aula de topografia, o professor queria medir a largura de um rio.

Para tal, ele tomou dois pontos A e B em uma margem do rio e outro ponto C na margem oposta, de modo que o segmento $\overline{CA}$ ficasse perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, como indicado na figura a seguir.



Considere que:

- **a distância entre os pontos A e B é de 30m;**
- **os ângulos agudos α e β podem ser obtidos através da equação $(sen^2\alpha)x^2 - 9(sen\alpha)(\cos\beta) + \frac{5}{2}\cos\beta = 0$, na qual $x = 2$ é uma de suas raízes;**
- **$\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$.**

A largura aproximada do rio, em m, é igual a

a) 15

b) 17

c) 21

d) 51

Comentários

Como α e β são ângulos internos do triângulo retângulo, temos:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha \Rightarrow \cos\beta = \cos(90° - \alpha) = sen\,\alpha$$

Usando a equação e sabendo que $x = 2$ é raiz:

$$(sen^2\alpha)2^2 - 9(sen\alpha)(\cos\beta) + \frac{5}{2}\cos\beta = 0$$

$$4(sen^2\alpha) - 9(sen\alpha)(sen\alpha) + \frac{5}{2}(sen\alpha) = 0$$

$$-5sen^2\alpha + \frac{5}{2}sen\alpha = 0$$

$$sen\alpha\left(-sen\alpha + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow sen\alpha = 0 \; ou \; sen\alpha = \frac{1}{2}$$

Como $0 < \alpha < 90°$, devemos ter $sen\alpha = \frac{1}{2}$, logo $\alpha = 30°$.

A largura do rio é dada por:

$$tg\ 30° = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AC}{30} \Rightarrow AC = 10\sqrt{3} = 10 \cdot 1{,}7 = 17\ m$$

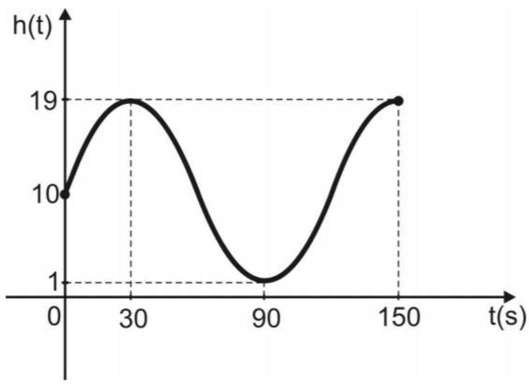
Gabarito: B

---

47. (AFA/2020)

Em uma roda gigante, a altura h, em metros, em que uma pessoa se encontra, em relação ao solo, no instante t, em segundos, é dada pela função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(t) = A + Bsen(Ct)$, em que A, B e C são constantes reais.

A figura a seguir ilustra o gráfico dessa função, no intervalo $[0, 150]$



Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) $|A \cdot B \cdot C| = \pi$

( ) No instante $t = 20s$, a pessoa estará a uma altura h tal que $h \in [17,5; 17,8]$

( ) A função real f definida por $f(t) = 10 - 9\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$ é idêntica à função h

Sobre as proposições, tem-se que:

a) todas são verdadeiras.

b) apenas duas são verdadeiras.

c) apenas uma é verdadeira.

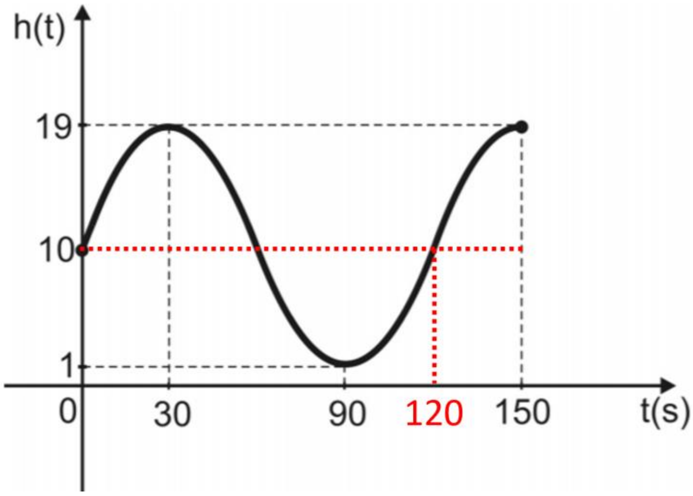
d) nenhuma delas é verdadeira.

Comentários

Precisamos encontrar os coeficientes A, B e C da função h dada por:

$$h(t) = A + Bsen(Ct)$$

Analisando o gráfico dado, temos que o período é 120s:



Assim, temos:

$$T = \frac{2\pi}{C} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{120} \therefore \boxed{C = \frac{\pi}{60}}$$

A amplitude B é igual à diferença entre o maior valor que função assume e o seu menor valor, logo:

$$B = \frac{19-1}{2} = \frac{18}{2} \therefore \boxed{B = 9}$$

Como B vale 9, ele deveria variar entre -9 e $+9$. Entretanto, o que se percebe é que ele varia entre 1 e 19, o que significa que a função foi transladada verticalmente, ou seja:

$$\begin{matrix} 1 = -9 + 10 \\ 19 = +9 + 10 \end{matrix} \therefore \boxed{A = 10}$$

Portanto, a função h é:

$$h(t) = 10 + 9sen\left(\frac{\pi}{60}t\right)$$

Vamos analisar as alternativas:

Para o primeiro item:

$$A \cdot B \cdot C = 10 \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{3\pi}{2} \neq \pi \therefore Falso$$

Segundo item:

Substituindo $t = 20s$ na função, temos:

$$h(20) = 10 + 9sen\left(\frac{\pi}{60} \cdot 20\right) = 10 + 9sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 + 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 10 + 4{,}5 \cdot 1{,}7$$

$$h(20) \cong 17{,}65$$

Esse valor está contido no intervalo $[17{,}5; 17{,}8]$, portanto, assertiva VERDADEIRA.

Terceiro Item:

Aplicando-se as transformações na função f:

$$f(t) = 10 - 9\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$$

Veja que:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{60}t\right) + sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{60}t\right)$$

$$= 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{60}t\right) + (-1) \cdot sen\left(\frac{\pi}{60}t\right) = -sen\left(\frac{\pi}{60}t\right)$$

Substituindo:

$$f(t) = 10 - 9\left(-sen\left(\frac{\pi}{60}t\right)\right) = 10 + 9sen\left(\frac{\pi}{60}t\right) = h(t)$$

Portanto, assertiva VERDADEIRA.

Gabarito: "b"

---

48. (AFA/2016)

Considera a função real sobrejetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = \frac{sen3x}{senx} - \frac{cos3x}{cosx}$

Sobre f é FALSO afirmar que

a) O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) f é par

c) f é injetora.

d) $B = \{2\}$

Comentários

Analisando a condição de existência da função, temos:

$$sen\, x \neq 0\; e\; \cos x \neq 0 \therefore x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Note que:

$$f(x) = \frac{sen3x}{senx} - \frac{cos3x}{cosx} = \frac{sen3x \cdot cosx - cos3x \cdot senx}{senx \cdot cosx} = \frac{sen(3x - x)}{senx \cdot cosx} = \frac{sen(2x)}{senx \cdot cosx}$$

$$= \frac{2senx \cdot cosx}{senx \cdot cosx} = 2$$

a) VERDADEIRA. Sabemos que $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, o conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) VERDADEIRA. Como $f(x) = 2, \forall\, x \in A$, então $f(x) = f(-x) = 2$, logo a função é par.

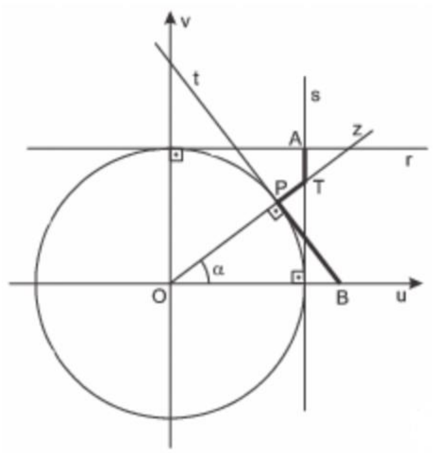
c) FALSA. Para todo x do domínio, sabe-se que f vale sempre 2. Logo, f não é injetora.

d) VERDADEIRA. Como a função é sobrejetora, então $B = \{2\}$ para que seja satisfeita a condição do problema.

Gabarito: “c”.

49. (AFA/2014)

No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z.



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT, TP e PB, pode ser calculado, como função de α, por

a) $\sec\alpha$

b) $\cos\sec\alpha$

c) $tg\,\alpha + cotg\,\alpha$

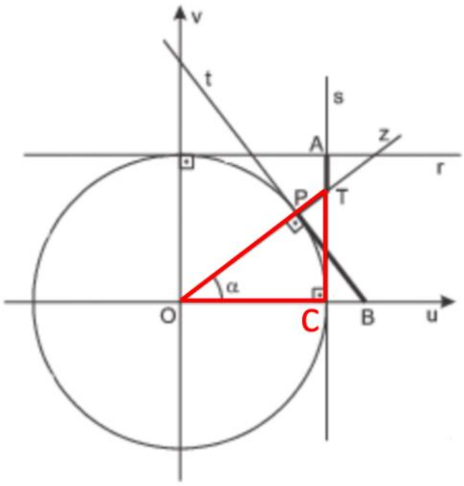
d) $\cos\sec\alpha + \sec\alpha$

Comentários:

Do triângulo OPB, temos:

$$tg\alpha = \frac{PB}{OP} = \frac{PB}{1} = PB \Rightarrow PB = tg\alpha$$

Sendo C o encontro das retas s e u temos:



$$\Delta OCT: \cos\alpha = \frac{OC}{OT} \Rightarrow OT = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{TC}{OC} \Rightarrow TC = tg\alpha$$

$$TP = OT - OP = \sec\alpha - 1$$

$$AT = AC - TC = 1 - tg\alpha$$

Logo,

$$AT + TP + PB = (1 - tg\alpha) + (\sec\alpha - 1) + tg\alpha = \sec\alpha$$

Gabarito: "a".

50. (AFA/2013)

Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x) = 3\,sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) sen\left(\frac{\pi x}{4}\right) sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão NÃO condiz com o modelo proposto.

a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.

b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.

c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.

d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

Comentários

Veja que

$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=3\underbrace{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)sen\left(\frac{\pi x}{4}\right)}_{\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{3}{2}sen^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

a) (V) Como $sen^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\leq 1$, então $f(x)\leq\frac{3}{2}$ e, portanto, nunca atinge 2 metros.

b) (V) Queremos que $\left|sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|=1$, logo

$$\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\,,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi(1+2k)}{2}\Rightarrow x=1+2k$$

Assim, entre duas ondas consecutivas temos $2\cdot 1=2\ minutos$.

c) (F) Há apenas cristas em $x=1$ e 3 minutos, pois $\left|sen\frac{\pi}{2}\right|=\left|\frac{sen3\pi}{2}\right|=1$. Portanto, não há mais de duas cristas de zero a 4 minutos.

d) Perceba que:

$$x=30\ seg=\frac{1}{2}min$$

$$x=90\ seg=\frac{3}{2}min$$

$$x=150\ seg=\frac{5}{2}min$$

Logo,

$$sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=sen^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=sen^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cdots=\frac{1}{2}$$

Assim, as alturas nesses tempos são iguais.

Gabarito: "c".

---

51. (AFA/2012)

Considere A o conjunto mais amplo possível na função real $f: A\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\frac{sen\,x}{cossec\,x}+\frac{\cos x}{sec\,x}$.

Sobre a função f é correto afirmar que

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x\neq\frac{k\pi}{2}\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) é periódica com período igual a π.

c) é decrescente se $x \in \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) é impar.

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência da função.

$$f(x) = \frac{sen\ x}{cossec\ x} + \frac{\cos x}{sec\ x}$$

$$cossec\ x \Rightarrow senx \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sec x \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Unindo as restrições:

$$x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, temos:

$$f(x) = \frac{sen\ x}{\frac{1}{senx}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra "a".

Gabarito: "a".

---

52. (AFA/2011)

O período da função real f definida por $f(x) = \frac{sen\ 3x + sen\ x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

a) 2π

b) π

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

Comentários

Da transformação de soma em produto no numerador e denominador:

$$f(x) = \frac{2sen\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)} = \frac{sen(2x) \cdot \cos(x)}{\cos(2x) \cdot \cos(x)}$$

Para $\cos x \neq 0$:

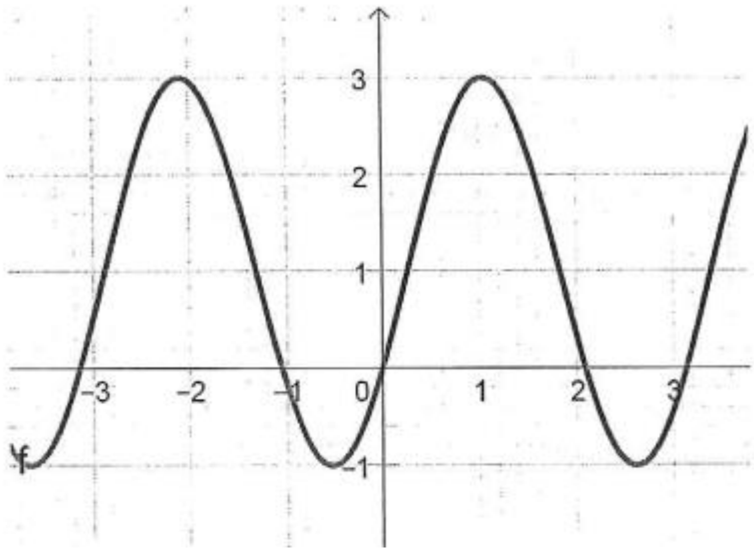
$$f(x) = tg(2x)$$

Logo, como o período da função tgx é π, quando dobramos o argumento da tangente seu período cai pela metade. Assim, $T = \frac{\pi}{2}$.

Gabarito: "d".

53. (EFOMM/2020)

Uma parte do gráfico da função f está representado na figura abaixo. Assinale a alternativa que pode representar $f(x)$.



a) $f(x) = sen(x - \pi) + 1$

b) $f(x) = 2sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

c) $f(x) = sen\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

d) $f(x) = 2sen(2x) + 1$

e) $f(x) = 2sen\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Comentários

Analisando o gráfico, vemos que:

$f(0) = 0 \; e \; f(1) \cong 3$

Nessa questão, devemos analisar o gráfico e a partir dele inferir algumas funções que possam ter correspondência correta como é pedido na questão. Pela análise do gráfico perceba que as alternativas a, b, c e d não satisfazem o gráfico da questão para os 2 valores acima

a) $f(0) = sen(-\pi) + 1 = 1 \neq 0$

b) $f(0) = 2sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -1 \neq 0$

c) $f(0) = sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$

d) $f(0) = 2sen(0) + 1 = 1 \neq 0$

Mas a letra e satisfaz.

e) $f(0) = 2sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

$f(1) = 2sen\left(2 - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Para $\pi = 3{,}14$:

$$f(1) \cong 2sen(2 - 0{,}5) + 1 \cong 2sen(1{,}5) + 1 \cong 2sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \cong 3$$

Assim, ela é a correta.

Gabarito: “e”.

---

54. (EFOMM/2017)

Dado $f(x) = x + a,\ f(g(x)) = \frac{sen\,x + a^2 + a}{a+1}$ e $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Determine o valor de a.

a) $a = 0$

b) $a = 1$

c) $a = 2$

d) $a = 3$

e) $a = 4$

Comentários

$$f(x) = x + a \Rightarrow f(g(x)) = g(x) + a \Rightarrow \frac{sen\,x + a^2 + a}{a+1} = g(x) + a$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{sen\,x + a^2 + a}{a+1} - a = \frac{sen\,x + a^2 + a - a^2 - a}{a+1} = \frac{sen\,x}{a+1}$$

Sabendo que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$, temos:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{a+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a+1} \Rightarrow 2a + 2 = 8 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Gabarito: “d”.

---

55. (EFOMM/2013)

Se $tgx + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $sen\,x + \cos x$ vale:

a) $-7/13$.

b) $5/13$.

c) $12/13$.

d) $15/12$.

e) $17/13$.

Comentários

Da relação fundamental, temos:

$$tg^2x + 1 = sec^2x$$

$$\sec^2 x - tg^2x = 1$$

$$(secx + tgx)(secx - tgx) = 1$$

Substituindo o valor do enunciado:

$$\frac{3}{2}(secx - tgx) = 1$$

Logo,

$$secx - tgx = \frac{2}{3}$$

$$tgx + \sec x = \frac{3}{2}$$

Somando as duas equações, temos:

$$2secx = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9+4}{6} = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{13}{12} \Rightarrow \cos x = \frac{12}{13}$$

Subtraindo as duas equações:

$$2tgx = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow tgx = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{senx}{\cos x} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow senx = \frac{5}{13}$$

Assim,

$$senx + cosx = \frac{17}{13}$$

Gabarito: "e".

---

56. (EFOMM/2010)

O valor numérico da expressão $\frac{\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) - \sec(2400°) + tg\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{cossec^2(-780°)}$ **é igual a**

a) 1

b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{8}$

Comentários

Vamos simplificar os termos da expressão:

$$\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{42\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(14\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sec(2400°) = \sec(360° \cdot 6 + 240°) = \sec(240°) = \frac{1}{\cos(240°)} = -2$$

$$tg\left(-\frac{33\pi}{4}\right) = tg\left(-\frac{32\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = tg\left(-8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$cossec(-780°) = cossec(-360° \cdot 2 - 60°) = cossec(-60°) = \frac{1}{sen(-60°)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$cossec^2(-780°) = \frac{4}{3}$$

Logo,

$$\frac{\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) - \sec(2400°) + tg\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{cossec^2(-780°)} = \frac{-\frac{1}{2} + 2 - 1}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{-1+4-2}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}$$

Gabarito: "e".

---

57. (EFOMM/2009)

Duas pessoas estão na beira da praia e conseguem ver uma lancha B na água. Adotando a distância entre as pessoas como $\overline{P_1P_2}$ sendo 63 metros, o ângulo $B\widehat{P}_1P_2 = \alpha$, $B\widehat{P}_2P_1 = \beta$, $tg\alpha = 2$ e $tg\beta = 4$. A distância da lancha até a praia vale

a) 83

b) 84

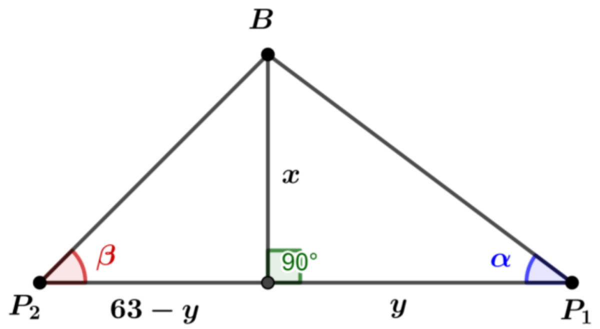
c) 85

d) 86

e) 87

Comentários

De acordo com o enunciado, temos:



Observando os triângulos retângulos:

$$tg\alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow 2 = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$tg\beta = \frac{x}{63 - y} \Rightarrow 4 = \frac{x}{63 - y} \Rightarrow 252 - 4y = x$$

Substituindo y na última equação:

$$252 - 4\left(\frac{x}{2}\right) = x \Rightarrow 252 - 2x = x \Rightarrow 3x = 252 \Rightarrow x = 84$$

Gabarito: "b".

---

58. (EFOMM/2009)

Considerando-se a função clássica $f(x) = arcsen\ x$ e a sua inversa $g(x) = f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de fog e gof são

a) iguais

b) diferentes, mas o de fog está contido no de gof.

c) diferentes, mas o de gof está contido no de fog.

d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.

e) diferentes e de intersecção vazia.

Comentários

Para que f seja inversível, ela deve ser bijetora. Assim, temos:

$$f: [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = senx$$

$$fog(x) = arcsen(senx)$$

$$gof(x) = sen(arcsenx)$$

Como o seno varia entre -1 e $+1$ e o arcoseno varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, temos:

$$fog(\pm 1) = arcsen(\pm 1) \cong \pm 1{,}57$$

E

$$gof\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$

Logo, a imagem de gof está contido na imagem de fog.

Gabarito: "c".

59. (EFOMM/2006)

O valor de $\cos\left[\frac{29\pi}{4}\right] + tg\left[\frac{-16\pi}{3}\right]$ é

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

e) $-\left[\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Comentários

Simplificando as razões trigonométricas:

$$\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(6\pi+\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{18\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{2\pi}{3}-6\pi\right) = tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Logo:

$$\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right) + tg\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}$$

Gabarito: "e".

60. (EFOMM/2006)

Sejam α um arco do 1º quadrante e β um arco do 2º quadrante, tais que $\cos\alpha = 0,8$ e $sen\,\beta = 0,6$. O valor se $sen(\alpha+\beta)$ é

a) $1,00$

b) $0,96$

c) $0,70.$

d) $\mathbf{0,48}$

e) $\mathbf{0,00}$

Comentários

Se α é do 1º quadrante, então $sen\alpha > 0$, logo:

$$sen\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Sendo β do 2º quadrante, então $\cos\beta < 0$:

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = -\sqrt{1-0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$$

$$\Rightarrow sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot \cos\alpha = 0{,}6 \cdot (-0{,}8) + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}00$$

Gabarito: "e".

---

61. (EFOMM/2005)

Dois barcos navegam em direções perpendiculares. A trajetória de um deles forma um ângulo de $\mathbf{18^\circ\,24'}$ com direção indicada pela agulha da bússola, indicando o norte. Qual é a medida do ângulo agudo formado pela trajetória do outro e pela direção indicada pela agulha da bússola?

a) $\mathbf{41^\circ\,36'}$

b) $\mathbf{51^\circ\,36'}$

c) $\mathbf{71^\circ\,36'}$

d) $\mathbf{75^\circ\,36'}$

e) $\mathbf{70^\circ\,36'}$

Comentários

$$\text{Ângulo suplementar} = 90^\circ - 18^\circ 24' = 89^\circ 60' - 18^\circ 24' = 71^\circ 36'$$

Gabarito: "c"

---

62. (EFOMM/2005)

O período e o conjunto imagem da função $\boldsymbol{f(x) = 2 - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)}$, são, respectivamente:

a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}; [1,5\,,2,5]}$

b) $\boldsymbol{\pi; [-0,5, 2]}$

c) $\boldsymbol{2\pi; [-0,5\,,2]}$

d) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}; [-0,5\,,0,5]}$

e) $\boldsymbol{2\pi; [1,5\,,2,5]}$

Comentários

Veja que:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = 2 - \frac{1}{2}sen(x)$$

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \leq 2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 1{,}5 \leq f(x) \leq 2{,}5$$

Assim, temos que $Im(f) = [1{,}5; 2{,}5]$ e o seu período é igual ao período da função $sen\ x$, ou seja, 2π.

Gabarito: "e".

---

63. (Escola Naval/2016)

Seja $q = (\cos 5°) \cdot (\cos 20°) \cdot (\cos 40°) \cdot (\cos 85°)$ a razão de uma progressão geométrica infinita com termo inicial $a_0 = \frac{1}{4}$ .Sendo assim, é correto afirmar que a soma dos termos dessa progressão vale:

a) $\frac{1}{15}$

b) $\frac{2}{15}$

c) $\frac{3}{15}$

d) $\frac{4}{15}$

e) $\frac{7}{15}$

Comentários

Vamos reescrever a razão:

$$q = (\cos 5°) \cdot (\cos 20°) \cdot (\cos 40°) \cdot (\cos 85°)$$

$$q = (\cos 5°) \cdot (\cos 20°) \cdot (\cos 40°) \cdot (\operatorname{sen}(90° - 85°))$$

$$q = \underbrace{(\operatorname{sen} 5°)(\cos 5°)}_{\frac{1}{2}sen(10°)}(\cos 20°)(\cos 40°)$$

$$q = \frac{1}{2}sen(10°)\cos(20°)\cos(40°)$$

Multiplicando a equação por $4\cos 10°$:

$$4\cos 10°\, q = 4\cos 10° \frac{1}{2}sen(10°)\cos(20°)\cos(40°)$$

$$4\cos 10°\, q = \underbrace{2\cos 10°\, sen(10°)}_{sen(20°)}\cos(20°)\cos(40°)$$

$$4\cos 10^\circ q = \underbrace{sen(20^\circ)\cos(20^\circ)}_{\frac{1}{2}sen(40^\circ)}\cos(40^\circ)$$

$$4\cos 10^\circ q = \frac{1}{2}\underbrace{sen(40^\circ)\cos(40^\circ)}_{\frac{1}{2}sen(80^\circ)}$$

$$4\cos 10^\circ q = \frac{1}{4}sen(80^\circ)$$

$$4\cos 10^\circ q = \frac{1}{4}\cos(90^\circ - 80^\circ)$$

$$4\cos 10^\circ q = \frac{1}{4}\cos 10^\circ$$

$$\therefore q = \frac{1}{16}$$

Como a PG é infinita e a razão é menor que 1, temos que a soma dos seus termos é:

$$S = \frac{a_0}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{16}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{4}{15}$$

Gabarito: "d".

---

64. (Escola Naval/2014)

O valor do produto $cos40^\circ \cdot cos80^\circ \cdot cos160^\circ$ é

a) $\frac{-1}{8}$

b) $\frac{-1}{4}$

c) -1

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Seja $P = cos40^\circ \cdot cos80^\circ \cdot cos160^\circ$. Multiplicando P por $2sen40^\circ$, temos:

$$2sen40^\circ P = \underbrace{2sen40^\circ \cdot cos40^\circ}_{sen80^\circ} \cdot cos80^\circ \cdot cos160^\circ$$

$$2sen40^\circ P = \underbrace{sen80^\circ \cdot cos80^\circ}_{\frac{1}{2}sen160^\circ} \cdot cos160^\circ$$

$$2sen40^\circ P = \frac{1}{2}\underbrace{sen160^\circ \cdot cos160^\circ}_{\frac{1}{2}sen320^\circ}$$

$$2sen40°P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot sen320°$$

$$sen40°P = \frac{1}{8} \cdot sen(360° - 40°)$$

$$sen40°P = \frac{1}{8} \cdot sen(-40°)$$

$$sen40°P = -\frac{1}{8} \cdot sen(40°)$$

$$\therefore P = -\frac{1}{8}$$

Gabarito: “a”.

---

65. (Escola Naval/2013)

Para que valores de m vale a igualdade $sen\ x = \frac{m-1}{m-2}, x \in \mathbb{R}$?

a) $m < 2$

b) $m \leq \frac{3}{2}$

c) $m \leq \frac{3}{2}$ ou $m \geq 2$

d) $m \leq \frac{5}{2}$ e $m \neq 2$

e) $m \leq \frac{7}{2}$ e $m \neq 2$

Comentários

A imagem da função seno é o conjunto $[-1, 1]$, logo:

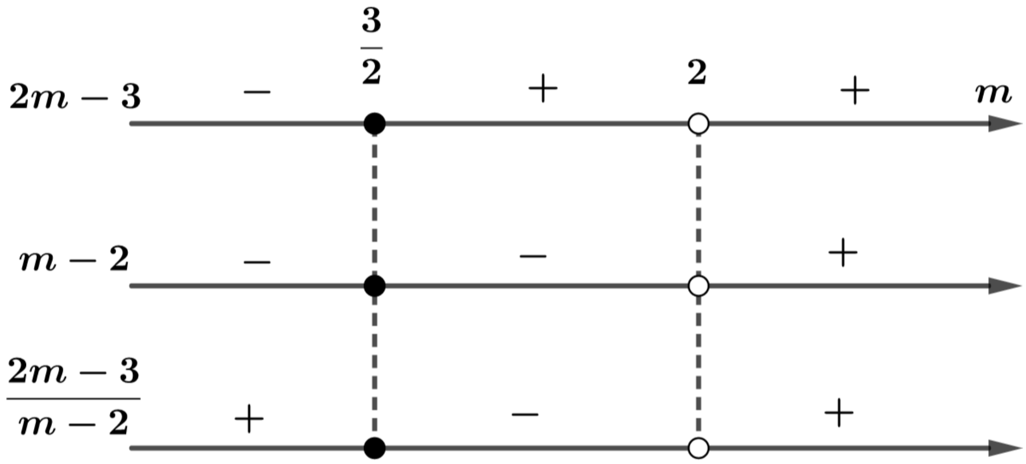
$$-1 \leq sen\ x \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{m-1}{m-2} \leq 1$$

$$\begin{cases} \frac{m-1}{m-2} \geq -1 \\ \frac{m-1}{m-2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{m-2} + 1 \geq 0 \\ \frac{m-1}{m-2} - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-1+m-2}{m-2} \geq 0 \\ \frac{m-1-m+2}{m-2} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2m-3}{m-2} \geq 0 \ \ (i) \\ \frac{1}{m-2} \leq 0 \ \ (ii) \end{cases}$$

Fazendo o estudo do sinal:

(i)



Logo,

$$m \leq \frac{3}{2} \; ou \; m > 2$$

Para (ii):

$$\frac{1}{m-2} \leq 0 \Rightarrow m-2 \leq 0 \Rightarrow m \leq 2$$

Fazendo a intersecção das soluções de (i) e (ii):

$$S = \left\{ m \in \mathbb{R} \middle| m \leq \frac{3}{2} \right\}$$

Gabarito: "b".

---

66. (Escola Naval/2013)

Considerando a função $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$, é inversível, o valor de $tg\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$ é

a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

b) $-\frac{4}{25}$

c) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{21}}{25}$

e) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

Comentários

$$x = \arccos\frac{2}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{5}$$

Assim, x pertence ao primeiro quadrante, logo, $senx$ é positivo. Pela relação fundamental:

$$sen^2x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow senx = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Logo,

$$tg\left(\arccos\frac{2}{5}\right) = tg(x) = \frac{sen\,x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Gabarito: "e".

---

67. (Escola Naval/2012)

Qual o valor da expressão $\sqrt{\mathbf{cossec}^2\,\pi x + cotg\frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $arctg\,x + arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$?

a) $\sqrt{3}$

b) -1

c) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$

d) 2

e) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Vamos resolver a equação e encontrar o valor de x. Consideremos:

$$\alpha = arctg\,x \Rightarrow tg\alpha = x$$

$$\beta = arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow tg\beta = \frac{x}{x+1}$$

Aplicando a tangente na equação e sabendo que $x \neq -1$:

$$arctg\,x + arctg\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow tg(\alpha+\beta) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x + \frac{x}{x+1}}{1 - x\frac{x}{x+1}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{-x^2+x+1} = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = -x^2 + x + 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = -1 \; ou \; x_2 = \frac{1}{2}$$

Como $x \neq -1$, temos:

$$x = \frac{1}{2}$$

Assim, o valor da expressão é dado por:

$$\sqrt{\text{cossec}^2\frac{\pi}{2} + cotg\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + 2} = \sqrt{1 + cotg\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2} = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2$$

Gabarito: "d".

---

68. (EFOMM/2021)

O valor de $\frac{\sec^5(5)+cossec^2(5)}{cossec^2(10)}$ é igual a:

a) $1/2$

b) 1

c) 2

d) $5/2$

e) 4

Comentários

Vamos simplificar a expressão:

$$\frac{\sec^5(5) + cossec^2(5)}{cossec^2(10)} = \frac{\frac{1}{\cos^2(5)} + \frac{1}{sen^2(5)}}{\frac{1}{sen^2(10)}} = \frac{\text{sen}^2(5) + \cos^2(5)}{sen^2(5)\cos^2(5)} \cdot sen^2(10)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2sen(5)\cos(5)}{2}\right)^2} \cdot sen^2(10) = \frac{1}{\left(\frac{sen(10)}{2}\right)^2} \cdot sen^2(10) = 4$$

Gabarito: E

---

11. QUESTÕES NÍVEL 3

69. (ITA/2021)

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta + \gamma = -3\pi$, $sen\ \alpha + sen\ \beta + sen\ \gamma = 1/2$ e $cos\ \alpha + cos\ \beta + cos\ \gamma = -1/2$. Determine o valor de $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma$.

70. (ITA/2019)

Seja $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x) = arcsen(x)$. Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)\right)$ é igual a

a) $\frac{253}{162}\pi$

b) $\frac{245}{162}\pi$

c) $-\frac{152}{81}\pi$

d) $-\frac{82}{81}\pi$

e) $-\frac{79}{162}\pi$

71. (ITA/2019)

Considere um retângulo $ABCD$ em que o comprimento do lado AB é o dobro do comprimento do lado BC. Sejam M o ponto médio de BC e N o ponto médio de CM. A tangente do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a

a) $\frac{1}{35}$

b) $\frac{2}{35}$

c) $\frac{4}{35}$

d) $\frac{8}{35}$

e) $\frac{16}{35}$

72. (ITA/2019)

Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$\cos a + \cos b + \cos c = 0$ e $\text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c = 0$.

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

73. (ITA/2017)

O maior valor de tgx, com $x = \frac{1}{2} arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 3

74. (ITA/2016)

Se $tgx = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $sen(3x)$ é igual a

a) $-\frac{\sqrt{14}}{8}$

b) $\frac{\sqrt{14}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{14}}{6}$

75. (ITA/2015)

Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2sen\ (x) - \cos x = 1$ são

a) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

b) $\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π

c) $\text{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π

e) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π

76. (ITA/2014)

Sabendo que $senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}, a \neq 0\ e\ b \neq 0$, um possível valor para $cossec(2x) - \frac{1}{2}tgx$ é

a) $\frac{a-b}{ab}$

b) $\frac{a+b}{2ab}$

c) $\frac{a^2-b^2}{ab}$

d) $\frac{a^2+b^2}{4ab}$

e) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$

77. (ITA/2013)

Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{cotgx-1}{cossec(x-\pi)-\sec(\pi-x)}$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) 2

78. (ITA/2012)

Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| arcsen\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right) + arccos\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}$. Então

a) $S = \emptyset$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$

d) $S = \mathbb{R}^+$

e) $S = \mathbb{R}$

79. (ITA/2012)

A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

a) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.

b) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

c) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.

d) $sen(\alpha)$ quando n é par.

e) zero quando n é ímpar.

80. (ITA/2012)

Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $sen(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $tg(x)$ são, respectivamente,

a) 1 e 0

b) 1 e $\frac{5}{2}$.

c) -1 e 0.

d) 1 e 5.

e) -1 e $-\frac{5}{2}$.

81. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

a) $\frac{23}{11}\pi$

b) $\frac{16}{6}\pi$

c) $\frac{24}{11}\pi$

d) $\frac{25}{11}\pi$

e) $\frac{7}{3}\pi$

82. (ITA/2011)

a) Calcule $\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10} - 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

83. (ITA/2010)

A equação em x, $arctg(e^x + 2) - arccotg\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{\pi}{4}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.

b) admite uma única solução, e esta é positiva.

c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

d) admite apenas soluções negativas.

e) não admite solução.

84. (ITA/2010)

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right]$

b) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - sen\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

c) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$

e) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right]$

85. (ITA/2008)

O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2sen^2(3x) + sen(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) $[-3, 3]$ e 2π

b) $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$

c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$

e) $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

86. (ITA/2008)

Sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o contradomínio da função arco-seno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arco-cosseno, assinale o valor de

$$\cos\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right) + arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$$

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

87. (ITA/2007)

Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\} \text{ e}$$

$$B=\left\{y_k=sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right):k=1,2\right\}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) $(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})/3$

e) $(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})/3$

88. (ITA/2004)

Considerando as funções

$$arcsen:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \text{ e}$$

$$arccos:[-1,1]\to[0,\pi],$$

Assinale o valor de cos $\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right)+arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$.

a) $6/25$

b) $7/25$

c) $1/3$

d) $2/5$

e) $5/12$

89. (ITA/2004)

Prove que, se os ângulos internos α,β e γ de um triângulo satisfazem a equação:

$sen(3\alpha)+sen(3\beta)+sen(3\gamma)=0$, então, pelo menos, um dos três ângulos α,β ou γ é igual a $60°$.

90. (ITA/2003)

Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $[0,\pi]$, respectivamente.

Com respeito à função $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x)=arcsenx+arccosx$, temos que:

a) f é não-crescente e ímpar.

b) f não é par nem ímpar.

c) f é sobrejetora.

d) f é injetora.

e) f é constante.

91. (ITA/2003)

Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento CD e F um ponto sobre o segmento CE tal que $m(BC) + m(CF) = m(AF)$. Prove que $cos\alpha = cos2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

92. (ITA/2003)

Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2[sen(2x)]^2 senx$ é igual a:

a) $2^{-4}[sen(2x) + sen(5x) + sen(7x)]$.

b) $2^{-4}[2sen(x) + sen(7x) - sen(9x)]$.

c) $2^{-4}[-sen(2x) - sen(3x) + sen(7x)]$.

d) $2^{-4}[-sen(x) + 2sen(5x) - sen(9x)]$.

e) $2^{-4}[sen(x) + 2sen(3x) + sen(5x)]$.

93. (ITA/2002)

Seja $f: \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ dada por $f(x) = \{y \in \mathbb{R}; seny < x\}$.

Se A é tal que $f(x) = \mathbb{R}, \forall x \in A$, então

a) $A = [-1, 1]$.

b) $A = [a, \infty), \forall a > 1$.

c) $A = [a, \infty), \forall a \geq 1$.

d) $A = (-\infty, a], \forall a < -1$.

e) $A = (-\infty, a], \forall a \leq -1$.

94. (ITA/2002)

Se x, y e z são ângulos internos de um triângulo ABC e $senx = (seny + senz)/(cosy + cosz)$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

95. (ITA/2001)

Considere as funções

$$f(x)=\frac{5+7^x}{4},\, g(x)=\frac{5-7^x}{4} \text{ e } h(x)=arctgx$$

Se a é tal que $h(f(a))+h(g(a))=\pi/4$, então $f(a)-g(a)$ vale:

a) 0

b) 1

c) $7/4$

d) $7/2$

e) 7

96. (ITA/2001)

Sendo α e β os ângulos de um triângulo retângulo, e sabendo que $sen^2 2\beta - 2cos2\beta = 0$, então $sen\alpha$ é igual a:

a) $\sqrt{2}/2$

b) $\sqrt[4]{2}/2$

c) $\sqrt[4]{8}/2$

d) $\sqrt[4]{8}/4$

e) zero

97. (ITA/2000)

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=2sen3x-\cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right]$. Sobre f podemos afirmar que:

a) é uma função par.

b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.

d) é uma função periódica de período fundamental 2π.

e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

98. (ITA/1999)

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0<a<\pi/2$. A expressão $\left[sen\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+sen\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]sen\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ é idêntica a:

a) $\frac{\sqrt{2}cotg^2 a}{1+cotg^2 a}$

b) $\frac{\sqrt{2}cotga}{1+cotg^2 a}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{1+cotg^2 a}$

d) $\frac{1+3cotga}{2}$

e) $\frac{1+2cotga}{1+cotga}$

99. (ITA/1999)

Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4tg^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de $sen(2x) + sen(4x)$ é:

a) $\sqrt{15}/4$

b) $\sqrt{15}/8$

c) $3\sqrt{5}/8$

d) $1/2$

e) 1

100.(ITA/1996)

Seja α um número real tal que $\alpha > 2(1+\sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

a) $30°$

b) $45°$

c) $60°$

d) $135°$

e) $120°$

101.(ITA/1996)

Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $sen\alpha + cos\alpha = m$. Então, o valor de $y = sen2\alpha/(sen^3\alpha + \cos^3\alpha)$ será:

a) $\frac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$

b) $\frac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$

c) $\frac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$

d) $\frac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$

e) $\frac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

102.(ITA/1995)

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \frac{\pi}{2}\right), se\ x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{x} senx, se\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R}; f(y) = 0\}$. Qual o valor de a, sabendo-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in K$?

a) $\pi/4$

b) $\pi/2$

c) π

d) $\pi^2/2$

e) π^2

103.(ITA/1995)

Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois progéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, atinge-a a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:

a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$

b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$

c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$

d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$

e) $H = hd^2/(d^2 + h)$

104.(ITA/1995)

A expressão $sen\theta/(1 + cos\theta)$, $0 < \theta < \pi$, é idêntica a:

a) $\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

b) $cossec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) $cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

e) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

105.(IME/2020)

Seja $\frac{1}{b} = sen\frac{\pi}{14} \cdot sen\frac{3\pi}{14} \cdot sen\frac{5\pi}{14}$. Determine b, onde b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

106. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

107.(IME/2017)

Calcule o valor de $\frac{sen^4\alpha + \cos^4\alpha}{sen^6\alpha + \cos^6\alpha}$, sabendo-se que $sen\alpha cos\alpha = \frac{1}{5}$.

a) $\frac{22}{21}$

b) $\frac{23}{22}$

c) $\frac{25}{23}$

d) $\frac{13}{12}$

e) $\frac{26}{25}$

108.(IME/2017)

Se $\frac{cosx}{cosy} + \frac{senx}{seny} = -1$, calcule o valor de S.

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3sen\, y - sen\, 3y}{sen\, x}$$

109.(IME/2015)

Os lados a, b e c de um triângulo estão em PA nesta ordem, sendo opostos aos ângulos internos A, B e C, respectivamente. Determine o valor da expressão:

$$\frac{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

a) $\sqrt{2}$

b) 2

c) $2\sqrt{2}$

d) 3

e) 4

110.(IME/2014)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x) = x^2 - \pi x$. Sejam também a, b, c e d números reais tais que:

$$a = sen^{-1}\left(\frac{1}{3}\right); b = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right); c = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ e } d = cotg^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

A relação de ordem, no conjunto dos reais, entre as imagens $f(a), f(b), f(c)$ e $f(d)$ é

a) $f(b) > f(a) > f(d) > f(c)$

b) $f(d) > f(a) > f(c) > f(b)$

c) $f(d) > f(a) > f(b) > f(c)$

d) $f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$

e) $f(a) > f(b) > f(d) > f(c)$

111.(IME/2014)

Sejam $f(x) = sen(\log x)$ e $g(x) = \cos(log\, x)$ duas funções reais, nas quais $\log x$ representa o logaritmo decimal de x. O valor da expressão $f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right) - g(x \cdot y)\right]$ é

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

112.(IME/2014)

Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2 - 9y + 8 = 0$ pode ser representada pela expressão $e^{(sen^2 x + sen^4 x + sen^6 x + \cdots)\ln 2}$. Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x + sen\, x}$ é

Observação: $\ln 2$ representa o logaritmo neperiano de 2.

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\sqrt{3} - 1$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

e) $\sqrt{3} + 1$

113.(IME/2013)

Assinale a alternativa que representa o mesmo valor da expressão $[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3]$:

a) $sen(9°)$

b) $tg\ (9°)$

c) $\cos(9°)$

d) $\sec(9°)$

e) $cossec\ (9°)$

114.(IME/2012)

Seja $arcsenx + arcseny + arcsenz = \frac{3\pi}{2}$, onde x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Determine o valor de $x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}$.

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

115.(IME/2012)

O valor de $y = sen70°cos50° + sen260°cos280°$ é:

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

116.(IME/2010)

Considere a sequência $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}, a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}, a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}}, \ldots$

Determine o produto dos 20 primeiros termos dessa sequência.

117.(IME/2001)

Calcule o valor exato de:

$$sen\left[2arccotg\left(\frac{4}{3}\right)\right] + \cos\left[2arccossec\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

118.(IME/1997)

Se tga e tgb são as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:

$$y = sen^2(a+b) + psen(a+b)\cos(a+b) + qcos^2(a+b)$$

Considere $p, q \in \mathbb{R}$ com $q \neq 1$.

119.(IME/1991)

Mostre que se num triângulo ABC vale a relação:

$$\frac{\cos(B-C)}{senA + sen(C-B)} = tgB$$

Então o triângulo é retângulo com ângulo reto em A.

120.(IME/1991)

Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que:

$$sen(2A) + sen(2B) + sen(2C) = 4senAsenBsenC$$

121. (IME/1989)

Provar que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação:

$$sen(4A) + sen(4B) + sen(4C) = 0$$

Então, o triângulo ABC é retângulo.

122. (IME/2021)

Seja ABC um triângulo tal que $2sen(\widehat{A}) - sen(\widehat{B}) - sen(\widehat{C}) = 0$. Prove que o valor de $cotg\frac{(\widehat{B})}{2}cotg\frac{(\widehat{C})}{2}$ é um número inteiro e o determine.

Observação: $cotg(\widehat{A})$ é a cotangente do ângulo $\widehat{A}$.

GABARITO

69. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
70. b
71. c
72. $r_{min} = 2\pi/3$
73. b
74. b
75. a
76. e
77. a
78. b
79. e
80. b
81. c
82. a) 0 b) $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$
83. b
84. a
85. c
86. b
87. c
88. b
89. Demonstração
90. e
91. Demonstração
92. b
93. b
94. Demonstração
95. d
96. c
97. b
98. a

99. b
100. d
101. c
102. d
103. a
104. d
105. $\boldsymbol{b = 8}$
106. d
107. b
108. $\boldsymbol{S = 4}$
109. b
110. d
111. e
112. a
113. b
114. c
115. d
116. $\boldsymbol{P = \frac{\sqrt{3}}{2^{21}} \cdot \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)}}$
117. $\boldsymbol{17/25}$
118. $\boldsymbol{y = q}$
119. Demonstração
120. Demonstração
121. Demonstração
122. $\boldsymbol{cotg\frac{(\hat{B})}{2} cotg\frac{(\hat{C})}{2} = 3}$

RESOLUÇÃO

69. (ITA/2021)

Sejam $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}}$ tais que $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = -3\pi}$, $\boldsymbol{sen\ \alpha + sen\ \beta + sen\ \gamma = 1/2}$ e $\boldsymbol{cos\ \alpha + cos\ \beta + cos\ \gamma = -1/2}$. Determine o valor de $\boldsymbol{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma}$.

Comentários

Usando as equações e elevando ao quadrado:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma) = \frac{1}{4} \quad (I)$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma + 2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma) = \frac{1}{4} \quad (II)$$

Usando a relação fundamental em (II):

$$(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)+2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma)=\frac{1}{4}\quad(II)$$

Fazendo $(I)-(II)$:

$$2\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+2\cos^2\gamma-3+2\left(\underbrace{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}_{\cos(\alpha+\beta)}+\underbrace{\cos\alpha\cos\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}_{\cos(\alpha+\gamma)}+\underbrace{\cos\beta\cos\gamma-\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}_{\cos(\beta+\gamma)}\right)=0$$

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3+2(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\gamma)+\cos(\beta+\gamma))=0$$

Usando a relação $\alpha+\beta+\gamma=-3\pi$, obtemos:

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3+2(\cos(-3\pi-\gamma)+\cos(-3\pi-\beta)+\cos(-3\pi-\alpha))=0$$

Como cosseno é função par:

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3+2(\cos(3\pi+\gamma)+\cos(3\pi+\beta)+\cos(3\pi+\alpha))=0$$

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3+2(\cos(\pi+\gamma)+\cos(\pi+\beta)+\cos(\pi+\alpha))=0$$

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3+2\underbrace{(-\cos\gamma-\cos\beta-\cos\alpha)}_{-\left(-\frac{1}{2}\right)}=0$$

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3+2\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=2$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Gabarito: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

---

70. (ITA/2019)

Seja $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x)=arcsen(x)$. Então, a soma $\sum_{n=0}^{4} f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)\right)$ é igual a

a) $\frac{253}{162}\pi$

b) $\frac{245}{162}\pi$

c) $-\frac{152}{81}\pi$

d) $-\frac{82}{81}\pi$

e) $-\frac{79}{162}\pi$

Comentários

Vamos calcular o valor de cada termo:

Para n = 0:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^0}\right)=1\Rightarrow f(1)=arcsen(1)=\frac{\pi}{2}$$

Para n = 1:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Para n = 2:

Temos que usar a relação $cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^2}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right) \Rightarrow f\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}$$

Para n = 3:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right) \Rightarrow f\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}$$

Para n = 4:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3^4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right) \Rightarrow f\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right)\right) = arcsen\left(sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}$$

A soma desses valores nos dá:

$$S = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{27}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{81}\right) = \frac{245}{162}\pi$$

Gabarito: “b”.

---

71. (ITA/2019)

Considere um retângulo $ABCD$ em que o comprimento do lado AB é o dobro do comprimento do lado BC. Sejam M o ponto médio de BC e N o ponto médio de CM. A tangente do ângulo $M\hat{A}N$ é igual a

a) $\frac{1}{35}$

b) $\frac{2}{35}$

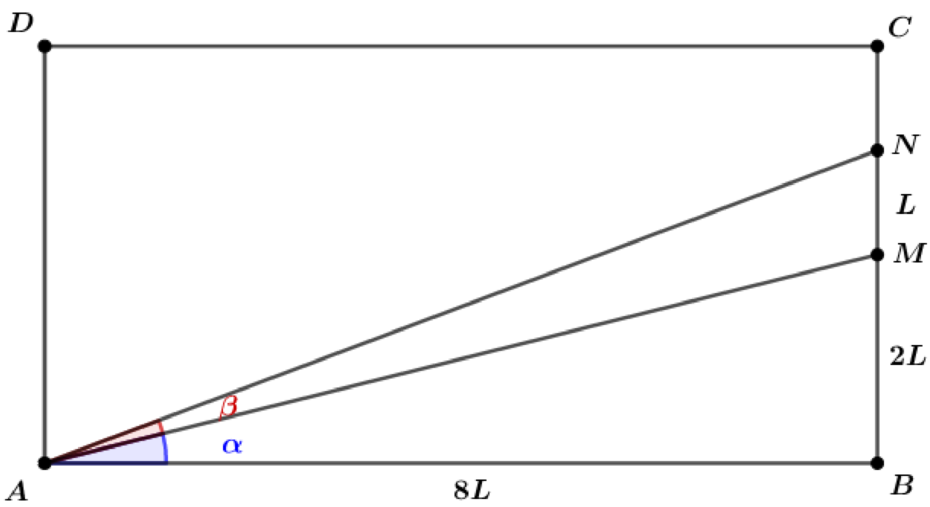
c) $\frac{4}{35}$

d) $\frac{8}{35}$

e) $\frac{16}{35}$

Comentários

Pelos dados do enunciado e para simplificar nossos cálculos, vamos escrever $AB = 8L$, $BM = 2L$ e $MN = L$. Queremos descobrir β que é o ângulo de $M\hat{A}N$. Assim, temos a seguinte figura:



Vamos aplicar a tangente nos triângulos ABM e AMN:

ΔABM:

$$tg(\alpha) = \frac{2L}{8L} = \frac{1}{4}$$

ΔABN:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{3L}{8L} = \frac{3}{8}$$

Usando a fórmula da soma da tangente:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{3}{8}$$

Substituindo o valor de $tg(\alpha)$ na equação, obtemos:

$$\frac{\frac{1}{4} + tg\beta}{1 - \frac{tg\beta}{4}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1 + 4tg\beta}{4 - tg\beta} = \frac{3}{8}$$

$$8 + 32tg\beta = 12 - 3tg\beta$$

$$35tg\beta = 12$$

Portanto, a tangente de $M\hat{A}N$ é dada por:

$$tg\beta = \frac{4}{35}$$

Gabarito: "c".

---

72. (ITA/2019)

Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \text{ e } \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

Comentários

(a, b, c) é uma PA crescente, vamos escrevê-lo como $(b-r, b, b+r)$, com r sua razão.

Para as condições do problema, temos:

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \Rightarrow \cos(b-r) + \cos b + \cos(b+r) = 0$$

Aplicando as transformações trigonométricas:

$$\cos b \cos r + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} r + \cos b + \cos b \cos r - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} r = 0$$

$$2\cos b \cos r + \cos b = 0 \Rightarrow \cos b\,(2\cos r + 1) = 0$$

$$\cos b = 0 \text{ ou } \cos r = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(b-r) + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(b+r) = 0$$

$$\operatorname{sen} b \cos r - \operatorname{sen} r \cos b + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} b \cos r + \operatorname{sen} r \cos b = 0$$

$$2\operatorname{sen} b \cos r + \operatorname{sen} b = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} b\,(2\cos r + 1) = 0$$

$$sen\, b = 0 \text{ ou } \cos r = -\frac{1}{2}$$

Se $\cos b = 0$, temos $sen\, b \neq 0$, logo, $\cos r = -1/2$. Se $sen\, b = 0$, temos, analogamente, $\cos r = -1/2$.

Como a PA é crescente, devemos ter $r > 0$, desse modo:

$$\cos r = -\frac{1}{2} \Rightarrow r = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

O menor valor possível é:

$$r_{min} > 0 \Rightarrow r_{min} = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{r_{min} = \frac{2\pi}{3}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{r_{min} = \frac{2\pi}{3}}$

---

73. (ITA/2017)

O maior valor de tgx, com $x = \frac{1}{2} arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) 3

Comentários

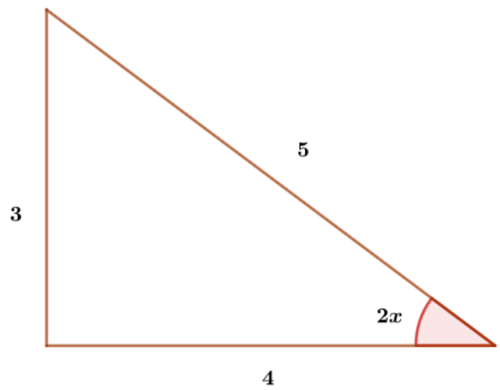
O bizu nessa questão é usar a fórmula da tangente em função de seno e cosseno:

$$tgx = \frac{sen2x}{1 + cos2x}$$

O enunciado nos dá:

$$x = \frac{1}{2} arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$$



$$sen2x = \frac{3}{5}$$

$$cos2x = \frac{4}{5}$$

Substituindo em tgx, encontramos:

$$tgx = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: "b".

---

74. (ITA/2016)

Se $tgx = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $sen(3x)$ é igual a

a) $-\frac{\sqrt{14}}{8}$

b) $\frac{\sqrt{14}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{14}}{6}$

Comentários

Devemos trabalhar com os ângulos.

Usando a identidade $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$:

$$\sec^2 x = 1 + tg^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 7$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{8} \Rightarrow sen^2 x = \frac{7}{8}$$

Calculando $sen(3x)$:

$$sen(3x) = sen(2x + x) = sen(2x)\cos(x) + sen(x)\cos(2x)$$

$$2sen(x)\cos^2(x) + sen(x)\left(1 - 2sen^2(x)\right)$$

$$\Rightarrow sen(3x) = 3sen(x) - 4sen^3(x)$$

Como $sen^2 x = \frac{7}{8}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, temos:

$$senx = -\sqrt{\frac{7}{8}} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$sen(3x) = 3\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}\right) - 4\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^3$$

$$sen(3x) = -\frac{3}{4}\sqrt{14} + 4 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4^3}$$

$$sen(3x) = -\frac{3}{4}\sqrt{14} + \frac{14}{16}\sqrt{14}$$

$$sen(3x) = \frac{2}{16}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

Gabarito: "b".

---

75. (ITA/2015)

Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2sen\,(x) - \cos x = 1$ são

a) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ **e** π

b) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ **e** π

c) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ **e** π

d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ **e** π

e) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ **e** π

Comentários

A equação possui seno e cosseno do mesmo ângulo. Vamos elevá-lo ao quadrado (lembrando que devemos verificar as raízes):

$$2sen(x) - \cos(x) = 1$$

$$\cos(x) + 1 = 2sen(x)$$
$$\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 4sen^2(x)$$
$$\cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 = 4(1 - \cos^2(x))$$
$$5\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$$

As raízes são dadas por:

$$cosx = \frac{(-1 \pm \sqrt{16})}{5} = -1 \ ou \ \frac{3}{5}$$
$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi$$
$$cosx = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

Testando os valores:

$$x = \pi \Rightarrow 2sen\pi - cos\pi = -(-1) = 1$$
$$cosx = \frac{3}{5} \Rightarrow senx = \frac{4}{5} \Rightarrow 2senx - cosx = 2\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} = 1$$

Gabarito: "a".

---

76. (ITA/2014)

Sabendo que $senx = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $cossec(2x) - \frac{1}{2}tgx$ é

a) $\frac{a-b}{ab}$

b) $\frac{a+b}{2ab}$

c) $\frac{a^2-b^2}{ab}$

d) $\frac{a^2+b^2}{4ab}$

e) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$

Comentários

Vamos analisar a expressão:

$$cossec(2x) - \frac{1}{2}tgx = \frac{1}{sen(2x)} - \frac{1}{2}tg(x) = \frac{1}{2sen(x)\cos(x)} - \frac{tg(x)}{2}$$

Do enunciado, temos:

$$sen(x) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{1 - sen^2(x)} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \pm\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$$

Encontrando o valor da expressão:

$$\frac{1}{2sen(x)\cos(x)}-\frac{tg(x)}{2}=\frac{1}{2sen(x)\cos(x)}-\frac{sen(x)}{2\cos(x)}=\frac{1}{2\cos(x)}\left(\frac{1}{sen(x)}-sen(x)\right)$$

$$\frac{1}{2\left(\pm\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\right)}\left(\frac{1}{\frac{2ab}{a^2+b^2}}-\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$$

Vamos simplificar a expressão:

$$\pm\frac{1}{2}\frac{(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)}\left(\frac{((a^2+b^2)^2-4a^2b^2)}{2ab(a^2+b^2)}\right)$$

$$\pm\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{(a^4+b^4+2a^2b^2-4a^2b^2)}{2ab}\right)$$

$$\pm\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{(a^2-b^2)^2}{2ab}\right)$$

$$\pm\frac{a^2-b^2}{4ab}$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra e.

Gabarito: "e".

---

77. (ITA/2013)

Se $\cos 2x=\frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{cotgx-1}{cossec(x-\pi)-\sec(\pi-x)}$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) 2

Comentários

Analisando o cosseno dado, temos:

$$cos2x=\frac{1}{2}$$

$$1-2sen^2x=\frac{1}{2}$$

$$sen^2x=\frac{1}{4}$$

$$senx=\pm\frac{1}{2}$$

$$cosx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calculando o valor da expressão:

$$\frac{cotgx - 1}{cossec(x-\pi) - \sec(\pi - x)} = \frac{\frac{cosx}{senx} - 1}{\frac{1}{sen(x-\pi)} - \frac{1}{\cos(\pi - x)}}$$

$$*sen(x-\pi) = senxcos\pi - sen\pi cosx = -senx$$

$$*\cos(\pi - x) = cos\pi cosx + sen\pi senx = -cosx$$

$$\left(\frac{cosx - senx}{senx}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{-senx} + \frac{1}{cosx}}\right)$$

$$\left(\frac{cosx - senx}{senx}\right)\left(\frac{-senxcosx}{cosx - senx}\right)$$

$$-cosx$$

Sabemos que $cosx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra a.

Gabarito: "a".

---

78. (ITA/2012)

Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| arcsen\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right) + arccos\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}$. Então

a) $S = \emptyset$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \mathbb{R}^{+}\backslash\{0\}$

d) $S = \mathbb{R}^{+}$

e) $S = \mathbb{R}$

Comentários

Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right)$ e $\beta = \arccos\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)$:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$sen\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\beta$$

Conhecemos os valores de $sen\alpha$ e $cos\beta$. Dessa forma:

$$\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$2e^{-x} = 2e^{x}$$

$$e^{2x} = 1$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore S = \{0\}$$

Gabarito: "b".

---

79. (ITA/2012)

A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

a) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.

b) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

c) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.

d) $sen(\alpha)$ quando n é par.

e) zero quando n é ímpar.

Comentários

Vamos analisar a expressão $\cos(\alpha + k\pi)$:

$$\cos(\alpha + k\pi) = cos\alpha \cos(k\pi) - sen\alpha sen(k\pi) = cos\alpha \cos(k\pi)$$

Para os valores de k, temos:

$$k\ par \Rightarrow \cos(\alpha + k\pi) = cos\alpha$$

$$k\ ímpar \Rightarrow \cos(\alpha + k\pi) = -cos\alpha$$

Portanto, a soma depende do valor de n:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi) = cos\alpha - cos\alpha + cos\alpha - \cdots + cos\alpha$$

$$S = \begin{cases} cos\alpha, n\ par \\ 0, n\ ímpar \end{cases}$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra e.

Gabarito: "e".

---

80. (ITA/2012)

Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $sen(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $tg(x)$ são, respectivamente,

a) 1 e 0

b) 1 e $\frac{5}{2}$.

c) -1 e 0.

d) 1 e 5.

e) -1 e $-\frac{5}{2}$.

Comentários

Do enunciado:

$$sen(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$$

$$2sen(x)\cos(x) = \frac{4}{5}$$

$$sen(2x) = \frac{4}{5}$$

Usando a fórmula $sen(2x) = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$, temos:

$$\frac{2tgx}{1+tg^2x} = \frac{4}{5}$$

$$10tgx = 4 + 4tg^2x$$

$$2tg^2x - 5tgx + 2 = 0$$

Raízes:

$$tgx = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = 2\ ou\ \frac{1}{2}$$

Encontrando o que se pede:

$$S = tgx_1 + tgx_2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$P = tgx_1 tgx_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Gabarito: "b".

---

81. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

a) $\frac{23}{11}\pi$

b) $\frac{16}{6}\pi$

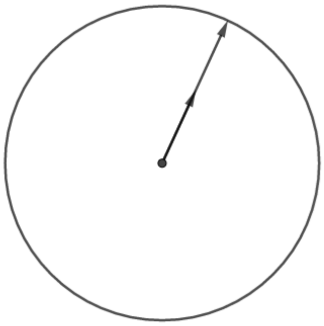
c) $\frac{24}{11}\pi$

d) $\frac{25}{11}\pi$

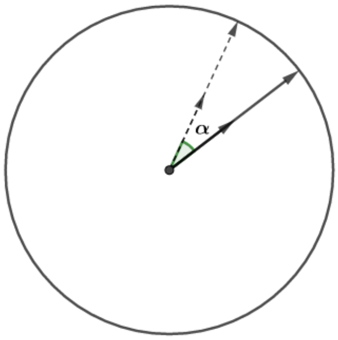
e) $\frac{7}{3}\pi$

Comentários

Supondo a situação inicial dada pela figura:



Após a segunda superposição, temos a seguinte figura:



Quando os ponteiros dos minutos percorrerem 2π radianos, o ponteiro das horas percorrerá $\pi/6$ radianos. Assim, podemos calcular o ângulo α usando a regra de 3:

$$\frac{2\pi + \alpha}{\alpha} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}$$

$$2\pi + \alpha = 12\alpha$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{11}$$

Portanto, o ponteiro dos minutos após 2 superposições, percorrerá $2\pi + \alpha$ radianos:

$$2\pi + \alpha = 2\pi + \frac{2\pi}{11} = \frac{24\pi}{11}$$

Gabarito: "c".

---

82. (ITA/2011)

a) Calcule $\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10} - 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Comentários

a) Vamos calcular o valor da expressão:

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10} - 2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - sen\left(\frac{2\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10}-2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=0$$

b) Usando o que acabamos de mostrar em a):

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10}-2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=0$$

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-sen^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi}{10}=2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)sen\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{4sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

Agora, basta perceber que $\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$$

Gabarito: a) 0 b) $sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$

---

83. (ITA/2010)

A equação em x, $arctg(e^x + 2) - arccotg\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{\pi}{4}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.

b) admite uma única solução, e esta é positiva.

c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

d) admite apenas soluções negativas.

e) não admite solução.

Comentários

Fazendo $\alpha = arctg(e^x + 2)$ e $\beta = arccotg\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)$:

$$tg\alpha = e^x + 2$$

$$cotg(\beta) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \Rightarrow tg(\beta) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

Aplicando a tangente na equação acima, temos:

$$tg(\alpha - \beta) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} = 1$$

Substituindo $tg\alpha$ e $tg\beta$:

$$(e^x + 2) - \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right) = 1 + (e^x + 2)\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)$$

$$e^{2x} + 2e^x - e^{2x} + 1 = e^x + e^{3x} - e^x + 2e^{2x} - 2$$

$$e^{3x} + 2e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

Fazendo $y = e^x$:

$$y^3 + 2y^2 - 2y - 3 = 0$$

Fatorando:

$$y^3 + y^2 + y^2 - 2y - 2 - 1 = 0$$

$$y^2(y + 1) + y^2 - 1 - 2(y + 1) = 0$$

$$y^2(y + 1) + (y - 1)(y + 1) - 2(y + 1) = 0$$

$$(y + 1)(y^2 + y - 1 - 2) = 0$$

$$(y + 1)(y^2 + y - 3) = 0$$

Raízes:

$$y = -1$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Como $y=e^x>0$, temos uma única solução:

$$e^x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: “b”.

---

84. (ITA/2010)

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-cos\alpha\right]$

b) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right)-sen\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

c) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$

e) $\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-cos\alpha\right]$

Comentários

Podemos escrever o produto do seno dessa forma:

$$sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right]$$

Assim, a soma fica:

$$S=\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$$

$$S=\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right]$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)-\cos(\alpha)\right)+\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3^2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)+\cdots+\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{3^5}\right)\right)\right]$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right)-\cos(\alpha)\right]$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos(\alpha)\right]$$

Gabarito: “a”.

---

85. (ITA/2008)

O conjunto imagem e o período de $f(x)=2sen^2(3x)+sen(6x)-1$ são, respectivamente,

a) $[-3,3]$ **e** 2π

b) $[-2, 2]$ **e** $\frac{2\pi}{3}$

c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ **e** $\frac{\pi}{3}$

d) $[-1, 3]$ **e** $\frac{\pi}{3}$

e) $[-1, 3]$ **e** $\frac{2\pi}{3}$

Comentários

Perceba que temos o termo escondido $\cos(6x) = 1 - 2sen^2(3x)$.

Assim, podemos escrever:

$$f(x) = sen(6x) - \left(1 - 2sen^2(3x)\right)$$
$$f(x) = sen(6x) - \cos(6x)$$

Agora, encontramos uma equação clássica. Veja o pulo do gato:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(sen(6x) - \cos(6x))$$
$$f(x) = \sqrt{2}\left(sen(6x)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(6x)\right)$$
$$f(x) = \sqrt{2}\left(sen(6x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(6x)\right)$$

Essa é a fórmula da diferença do seno:

$$f(x) = \sqrt{2}\left(sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Sabemos que a função seno pertence ao intervalo $[-1;\ 1]$, dessa forma:

$$-1 \leq sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$
$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$
$$-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow Im(f) = [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$$

Para encontrar o período da função, podemos usar a definição:

$$f(x + T) = f(x)$$
$$\sqrt{2}sen\left(6(x + T) - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}sen\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Sabemos que o período da função seno é $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$6x + 6T - \frac{\pi}{4} = 6x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$6T = 2k\pi$$

$$T = \frac{k\pi}{3}$$

O período é dado pelo menor valor positivo de T:

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

Com isso, encontramos o gabarito na letra "c".

Gabarito: "c".

---

86. (ITA/2008)

Sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o contradomínio da função arco-seno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arco-cosseno, assinale o valor de

$$\cos\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right) + arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$$

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Comentários

Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\beta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$, temos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$cos\beta = \frac{4}{5}$$

Perceba que podemos usar a relação fundamental:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como o contradomínio da função arco-seno é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow cos\alpha = \frac{4}{5}$$

O contradomínio da função arco-cosseno é $[0, \pi]$, então:

$$cos\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Assim, podemos afirmar que $\alpha = \beta$, pois $cos\alpha = cos\beta = 4/5$.

Calculando o valor da expressão:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(2\alpha)=1-2sen^2\alpha=1-2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$$

Gabarito: "b".

---

87. (ITA/2007)

Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A=\left\{x_k=sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right):k=1,2\right\} \text{ e}$$

$$B=\left\{y_k=sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right):k=1,2\right\}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) $(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})/3$

e) $(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})/3$

Comentários

Vamos encontrar os elementos de cada conjunto:

$$A=\left\{x_k=sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right):k=1,2\right\}$$

$$x_1=sen^2\left(\frac{1^2\pi}{24}\right)=sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$x_2=sen^2\left(\frac{2^2\pi}{24}\right)=sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$B=\left\{y_k=sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right):k=1,2\right\}$$

$$y_1=sen^2\left(\frac{(3+5)\pi}{24}\right)=sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_2=sen^2\left(\frac{(6+5)\pi}{24}\right)=sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right)$$

Os elementos de $A \cup B$ são dados por:

$$A\cup B=\{x_1,x_2\}\cup\{y_1,y_2\}=\left\{sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right),sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right),sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right),sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right)\right\}$$

Queremos a soma dos elementos desse conjunto:

$$S = sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right)$$

Perceba que temos ângulos complementares:

$$\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24} \Rightarrow sen^2\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Reescrevendo a soma:

$$S = \underbrace{sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)}_{1} + \underbrace{sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{1}$$

$$\Rightarrow S = 2$$

Gabarito: "c".

---

88. (ITA/2004)

Considerando as funções

$$\boldsymbol{arcsen}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e}$$

$$\boldsymbol{arccos}: [-1, 1] \to [0, \pi],$$

Assinale o valor de cos $\left[arcsen\left(\frac{3}{5}\right) + arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right]$.

a) $6/25$

b) $7/25$

c) $1/3$

d) $2/5$

e) $5/12$

Comentários

Fazendo $\alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\beta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$, temos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $sen\alpha = 3/5$, temos $cos\alpha > 0$:

$$cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Para β:

$$cos\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow sen\beta = \pm\frac{3}{5}$$

Como $\beta \in [0, \pi]$, temos $sen\beta > 0$:

$$sen\beta = \frac{3}{5}$$

Queremos calcular o valor da expressão:

$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

Substituindo os valores:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$$

Gabarito: "b".

---

89. (ITA/2004)

Prove que, se os ângulos internos α, β e γ de um triângulo satisfazem a equação:

$sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = 0$, então, pelo menos, um dos três ângulos α, β ou γ é igual a $60°$.

Comentários

Se α, β, γ são os ângulos internos do triângulo, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$$

Vamos transformar a soma $sen(3\alpha) + sen(3\beta)$ em produto e substituir $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$:

Lembrando que:

$$sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = 0$$

$$2sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right) + sen\big(3\cdot 180° - 3(\alpha+\beta)\big) = 0$$

Sabemos que $sen\big(3\cdot 180° - 3(\alpha+\beta)\big) = sen(3\alpha+3\beta)$, usando a fórmula do arco metade:

$$2sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right) + 2sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right) = 0$$

$$2sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\right) = 0$$

$$2sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) + sen\left(\frac{3\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{3\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) - sen\left(\frac{3\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{3\beta}{2}\right)\right) = 0$$

$$2sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0\ ou\ \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)ou\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)=0$$

Para $sen\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0$:

$$\frac{3\alpha+3\beta}{2}=k180°\Rightarrow\alpha+\beta=k120°$$

Como $\alpha,\beta,\gamma\in(0,180°)$, temos:

$$\alpha+\beta=120°$$

Substituindo $\alpha+\beta=180°-\gamma$:

$$180°-\gamma=120°\Rightarrow\gamma=60°$$

Para $\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=0$:

$$\frac{3\alpha}{2}=90°\Rightarrow\alpha=60°$$

Para $\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)=0$:

$$\frac{3\beta}{2}=90°\Rightarrow\beta=60°$$

Portanto, em qualquer uma das situações temos que um dos três ângulos é $60°$.

Gabarito: Demonstração

---

90. (ITA/2003)

Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $[0,\pi]$, respectivamente.

Com respeito à função $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x)=arcsenx+arccosx$, temos que:

a) f é não-crescente e ímpar.

b) f não é par nem ímpar.

c) f é sobrejetora.

d) f é injetora.

e) f é constante.

Comentários

Fazendo $\alpha=arcsenx$ e $\beta=arccosx$ tal que $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e $\beta\in[0,\pi]$, temos:

$$sen\alpha=x$$

$$cos\beta=x$$

Igualando os dois valores de x:

$$sen\alpha=cos\beta$$

$$sen\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \beta \leq \pi \Rightarrow -\pi \leq -\beta \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Devido às restrições dos intervalos, podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$arcsenx + arccosx = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore f \text{ é constante}$$

Gabarito: "e".

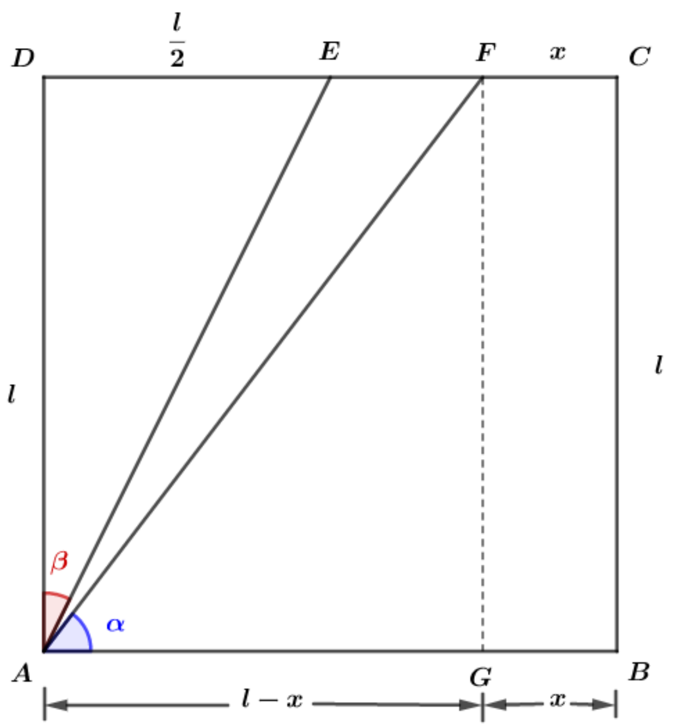
---

91. (ITA/2003)

Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento CD e F um ponto sobre o segmento CE tal que $m(BC) + m(CF) = m(AF)$. Prove que $cos\alpha = cos2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos EAD e GAF:

$$AE^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2$$

$$AE = \frac{\sqrt{5}}{2}l$$

$$AF^2 = l^2 + (l-x)^2$$

Do enunciado, temos:

$$m(BC) + m(CF) = m(AF)$$

$$AF = l + x$$

$$\Rightarrow (l+x)^2 = l^2 + (l-x)^2$$

$$l^2 + 2lx + x^2 = l^2 + l^2 - 2lx + x^2$$

$$\cancel{l^2} + 2lx + \cancel{x^2} = \cancel{l^2} + l^2 - 2lx + \cancel{x^2}$$

$$l^2 - 4lx = 0$$

$$l(l-4x) = 0$$

Como $l \neq 0$:

$$l = 4x \Rightarrow x = \frac{l}{4}$$

Assim, os valores dos cossenos são dados por:

$$cos\alpha = \frac{AG}{AF} = \frac{\frac{3l}{4}}{\frac{5l}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$cos\beta = \frac{AD}{AE} = \frac{l}{\frac{\sqrt{5}}{2}l} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Calculando $\cos(2\beta)$:

$$\cos(2\beta) = 2\cos^2\beta - 1 = 2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos(2\beta) = \cos\ \alpha$$

Gabarito: Demonstração

---

92. (ITA/2003)

Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2[sen(2x)]^2 senx$ é igual a:

a) $2^{-4}[sen(2x) + sen(5x) + sen(7x)]$.

b) $2^{-4}[2sen(x) + sen(7x) - sen(9x)]$.

c) $2^{-4}[-sen(2x) - sen(3x) + sen(7x)]$.

d) $2^{-4}[-sen(x) + 2sen(5x) - sen(9x)]$.

e) $2^{-4}[sen(x)+2sen(3x)+sen(5x)]$.

Comentários

Podemos simplificar a expressão:

$$[\cos(2x)\,sen(2x)]^2 senx = \left[\frac{sen(4x)}{2}\right]^2 senx = \frac{sen(4x)sen(4x)senx}{4}$$

Analisando as alternativas, devemos transformar o produto em soma. Usando a seguinte fórmula de Werner:

$$\boxed{\boldsymbol{-2senAsenB = \cos(A+B) - \cos(A-B)}}$$

$$2senAsenB = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$\frac{sen(4x)sen(4x)senx}{4} = \frac{2sen(4x)[sen(4x)senx]}{8}$$

$$\frac{sen(4x)[\cos(3x)-\cos(5x)]}{8} = \frac{2sen(4x)\cos(3x) - 2sen(4x)\cos(5x)}{16}$$

Usando a outra fórmula de Werner:

$$\boxed{\boldsymbol{2senAcosB = sen(A+B) + sen(A-B)}}$$

$$\frac{sen(7x)+sen(x)-\left(sen(9x)+\underbrace{sen(-x)}_{-sen(x)}\right)}{16}$$

$$\frac{1}{2^4}\Big(sen(7x)+sen(x)-sen(9x)-\big(-sen(x)\big)\Big)$$

$$\frac{1}{2^4}\big(2sen(x)+sen(7x)-sen(9x)\big)$$

Gabarito: “b”.

---

93. (ITA/2002)

Seja $f:\mathbb{R}\to P(\mathbb{R})$ dada por $f(x)=\{y\in\mathbb{R}; seny < x\}$.

Se A é tal que $f(x)=\mathbb{R}, \forall x\in A$, então

a) $A=[-1,1]$.

b) $A=[a,\infty), \forall a>1$.

c) $A=[a,\infty), \forall a\geq 1$.

d) $A=(-\infty,a], \forall a<-1$.

e) $A=(-\infty,a], \forall a\leq -1$.

Comentários

Analisando a função e de acordo com o enunciado:

$$f(x)=\mathbb{R}, \forall x \in A$$

$$f(x) = \{y \in \mathbb{R}; seny < x\}$$
$$\Rightarrow \{y \in \mathbb{R}; seny < x\} = \mathbb{R}$$

Para todo real y, temos $seny \leq 1$, então, se $x > 1$ a igualdade acima torna-se verdadeira. Portanto, $x \in A \Leftrightarrow x > 1$.

$$A = [a, \infty], \forall a > 1$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: "b".

---

94. (ITA/2002)

Se x, y e z são ângulos internos de um triângulo ABC e $senx = (seny + senz)/(cosy + cosz)$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

Comentários

Como x, y, z são os ângulos internos do triângulo ABC, temos:

$$x + y + z = \pi$$
$$y + z = \pi - x$$

Vamos transformar as somas em produto, usando as seguintes transformações:

$$\boxed{\boldsymbol{sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right) cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}}$$

$$senx = \frac{2sen\left(\frac{y+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{y+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)}$$

$$senx = tg\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

Substituindo $y + z = \pi - x$:

$$senx = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = cotg\left(\frac{x}{2}\right)$$

Usando a fórmula de arco metade do seno:

$$2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sabemos que $x < \pi$, então, $\frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x) \neq 0$. Assim, temos:

$$2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{sen\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como x é um ângulo do triângulo, temos $x > 0$, então:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, o triângulo ABC é retângulo.

Gabarito: Demonstração

---

95. (ITA/2001)

Considere as funções

$$f(x) = \frac{5+7^x}{4}, g(x) = \frac{5-7^x}{4} \text{ e } h(x) = arctgx$$

Se a é tal que $h(f(a)) + h(g(a)) = \pi/4$, então $f(a) - g(a)$ vale:

a) 0

b) 1

c) $7/4$

d) $7/2$

e) 7

Comentários

Usando os dados do problema, temos:

$$arctg(f(a)) + arctg(g(a)) = \frac{\pi}{4}$$

Fazendo $\alpha = arctg(f(a))$ e $\beta = arctg(g(a))$ e aplicando a função tangente na equação acima:

$$tg\alpha = f(a) \; e \; tg\beta = g(a)$$

$$tg(\alpha+\beta) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)} = 1$$

$$tg(\alpha)+tg(\beta) = 1 - tg(\alpha)tg(\beta)$$

$$f(a)+g(a) = 1 - f(a)g(a)$$

Substituindo os valores das funções:

$$\frac{5+7^a}{4} + \frac{5-7^a}{4} = 1 - \left(\frac{5+7^a}{4}\right)\left(\frac{5-7^a}{4}\right)$$

$$\frac{10}{4} = 1 - \frac{25 - 7^{2a}}{16}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{7^{2a} - 9}{16}$$

$$49 = 7^{2a}$$

$$a = 1$$

Calculando o valor da expressão $f(a) - g(a)$:

$$f(a) = f(1) = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$g(a) = g(1) = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f(a) - g(a) = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

Gabarito: "d".

---

96. (ITA/2001)

Sendo α e β os ângulos de um triângulo retângulo, e sabendo que $sen^2 2\beta - 2cos2\beta = 0$, então $sen\alpha$ é igual a:

a) $\sqrt{2}/2$

b) $\sqrt[4]{2}/2$

c) $\sqrt[4]{8}/2$

d) $\sqrt[4]{8}/4$

e) zero

Comentários

Substituindo $sen^2 2\beta = 1 - \cos^2 2\beta$:

$$1 - \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$$

$$\cos^2 2\beta + 2\cos 2\beta - 1 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$\cos 2\beta = -1 \pm \sqrt{2}$$

Como $-1 \leq \cos 2\beta \leq 1$, temos:

$$\cos 2\beta = \sqrt{2} - 1$$

Reescrevendo o cosseno:

$$2\cos^2 \beta - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\cos^2 \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos\beta$ é positivo, pois é ângulo de um triângulo. Então:

$$cos\beta = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$$

$$cos\beta = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt[4]{2^2} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Queremos calcular o valor de $sen\alpha$, sendo α e β ângulos de um triângulo retângulo, temos a seguinte relação:

$$sen\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Gabarito: "c".

---

97. (ITA/2000)

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2sen3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right]$. Sobre f podemos afirmar que:

a) é uma função par.

b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.

d) é uma função periódica de período fundamental 2π.

e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

Comentários

Como a função cosseno é par, podemos escrever:

$$f(x) = 2sen3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right] = 2sen3x - \cos\left[\frac{\pi - x}{2}\right] = 2sen3x - sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

Analisando a paridade da função:

$$f(-x) = 2sen(-3x) - sen\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$f(-x) = -2sen(3x) + sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\therefore f \text{ é ímpar}$$

O período da função $sen(3x)$ é:

$$T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

O período da função $sen\left(\frac{x}{2}\right)$ é:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Perceba que $T_2 = 4\pi = 6\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6T_1$. Portanto, o período fundamental da função f é:

$$T = T_2 = 4\pi$$

Gabarito: “b”.

---

98. (ITA/1999)

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < \pi/2$. A expressão $\left[sen\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+sen\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]sen\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ é idêntica a:

a) $\frac{\sqrt{2}cotg^2 a}{1+cotg^2 a}$

b) $\frac{\sqrt{2}cotga}{1+cotg^2 a}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{1+cotg^2 a}$

d) $\frac{1+3cotga}{2}$

e) $\frac{1+2cotga}{1+cotga}$

Comentários

Perceba que $sen\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a$. Vamos transformar a soma do seno em produto, usando a seguinte fórmula:

$$sen(p) + sen(q) = 2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

A expressão fica:

$$\left[2sen\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+a+\frac{3\pi}{4}-a}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+a-\frac{3\pi}{4}+a}{2}\right)\right]\cos\ a$$

$$\left[2sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos a\right]\cos a$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2}\cos^2 a$$

$$\sqrt{2}\cos^2 a$$

Analisando as alternativas, vemos que devemos escrever o cosseno como cotangente:

$$\sqrt{2}\cos^2 a = \frac{\sqrt{2}\cos^2 a}{sen^2 a}\cdot sen^2 a = \frac{\sqrt{2}cotg^2 a}{cossec^2 a} = \frac{\sqrt{2}cotg^2 a}{1+cotg^2 a}$$

Gabarito: “a”.

---

99. (ITA/1999)

Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4tg^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de $sen(2x) + sen(4x)$ é:

a) $\sqrt{15}/4$

b) $\sqrt{15}/8$

c) $3\sqrt{5}/8$

d) $1/2$

e) 1

Comentários

Usando os dados do enunciado, temos:

$$4tg^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$$

$$\frac{4sen^4 x}{\cos^4 x} = \frac{1 + 4\cos^4 x}{\cos^4 x}$$

$$4sen^4 x - 4\cos^4 x = 1$$

$$4(sen^2 x - \cos^2 x)\left(\underbrace{sen^2 x + \cos^2 x}_{1}\right) = 1$$

$$4(-\cos(2x)) = 1$$

$$\cos(2x) = -\frac{1}{4}$$

Aplicando o teorema fundamental:

$$sen(2x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(2x)} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

O enunciado afirma que x pertence ao intervalo:

$$0 \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le 2x < \pi$$

Para esses valores, temos $sen(2x) > 0$, desse modo:

$$sen(2x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Calculando o valor da expressão:

$$sen(2x) + sen(4x) = sen(2x) + 2sen(2x)\cos(2x)$$

Substituindo os valores:

$$\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{2\sqrt{15}}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Gabarito: "b".

---

100. (ITA/1996)

Seja α um número real tal que $\alpha > 2(1 + \sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

a) $30°$

b) $45°$

c) $60°$

d) $135°$

e) $120°$

Comentários

Seja θ, β, γ os ângulos internos de um triângulo ABC. Vamos calcular as raízes da equação:

$$x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha + 1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2} \; e \; x_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2}$$

Definindo $cotg\beta = x_1 \; e \; cotg\gamma = x_2$, temos da propriedade do triângulo:

$$\theta + \beta + \gamma = 180°$$

$$\beta + \gamma = 180° - \theta$$

$$cotg(\beta + \gamma) = cotg(180° - \theta) = -cotg(\theta)$$

$$cotg(\theta) = -cotg(\beta + \gamma)$$

Calculando $cotg(\theta)$:

$$cotg(\theta) = -cotg(\beta + \gamma) = -\frac{1}{tg(\beta + \gamma)} = \frac{tg\beta tg\gamma - 1}{tg\beta + tg\gamma}$$

$$cotg(\theta) = \frac{\left(\frac{1}{cotg\beta cotg\gamma} - 1\right)}{\frac{1}{cotg\beta} + \frac{1}{cotg\gamma}} = \frac{1 - cotg\beta cotg\gamma}{cotg\beta + cotg\gamma}$$

Sabemos que:

$$cotg\beta = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2} \; e \; cotg\gamma = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4}}{2}$$

$$\Rightarrow cotg\beta + cotg\gamma = \alpha$$

$$\Rightarrow cotg\beta cotg\gamma = \frac{\alpha^2 - (\alpha^2 - 4\alpha - 4)}{4} = \alpha + 1$$

*Poderíamos ter aplicado diretamente as relações de Girard na equação para encontrar esses valores. Ainda estudaremos esse tema na aula de Polinômios.

Substituindo esses valores na equação da cotangente:

$$cotg(\theta) = \frac{1-(\alpha+1)}{\alpha} = -\frac{\alpha}{\alpha} = -1$$

Logo:

$$\theta = 135°$$

Gabarito: "d".

101.(ITA/1996)

Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $sen\alpha + cos\alpha = m$. Então, o valor de $y = sen2\alpha/(sen^3\alpha + \cos^3\alpha)$ será:

a) $\frac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$

b) $\frac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$

c) $\frac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$

d) $\frac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$

e) $\frac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

Comentários

Usando os dados do enunciado, temos:

$$sen\alpha + cos\alpha = m \Rightarrow \underbrace{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + \underbrace{2sen\alpha cos\alpha}_{sen(2\alpha)} = m^2 \Rightarrow sen(2\alpha) = m^2 - 1$$

Vamos fatorar a expressão:

$$y = \frac{sen(2\alpha)}{sen^3\alpha + \cos^3\alpha}$$

$$y = \frac{sen(2\alpha)}{(sen\alpha + cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha cos\alpha + \cos^2\alpha)}$$

$$y = \frac{sen(2\alpha)}{(sen\alpha + cos\alpha)\left(1 - \frac{sen(2\alpha)}{2}\right)}$$

Substituindo os valores das variáveis, obtemos:

$$y = \frac{m^2-1}{m\left(1 - \frac{m^2-1}{2}\right)}$$

$$y = \frac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$$

Gabarito: "c".

102.(ITA/1995)

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(x+\frac{\pi}{2}\right), se\ x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}-\frac{a}{x}senx, se\ x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Onde $a>0$ é uma constante. Considere $K=\{y\in\mathbb{R}; f(y)=0\}$. Qual o valor de a, sabendo-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\in K$?

a) $\pi/4$

b) $\pi/2$

c) π

d) $\pi^2/2$

e) π^2

Comentários

De acordo com o enunciado, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\in K\Rightarrow f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Calculando $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{a}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}$$

Temos que calcular $f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)$:

Como $a>0$, temos:

$$-a<0\Rightarrow-\frac{2a}{\pi}<0$$

Então:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}<\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)=a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)=a\left(\pi-\frac{2a}{\pi}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2a}{\pi}\right)=0\Rightarrow a\left(\pi-\frac{2a}{\pi}\right)=0$$

Como $a>0$:

$$\pi-\frac{2a}{\pi}=0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi^2}{2}$$

Gabarito: "d".

103.(ITA/1995)

Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois progéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, atinge-a a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:

a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$

b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$

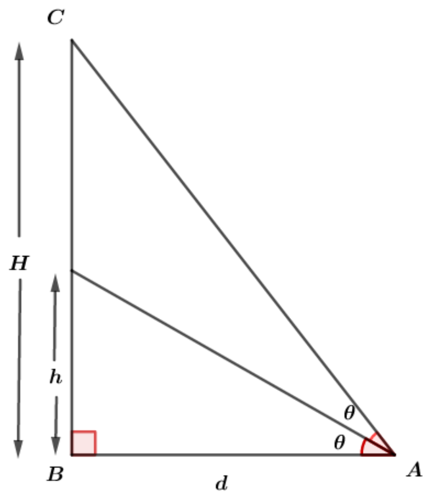
c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$

d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$

e) $H = hd^2/(d^2 + h)$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos o seguinte triângulo ABC:



Assim, temos as seguintes razões:

$$tg\theta = \frac{h}{d}$$

$$tg(2\theta) = \frac{H}{d}$$

$$\frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \frac{H}{d}$$

$$\frac{\frac{2h}{d}}{1 - \left(\frac{h}{d}\right)^2} = \frac{H}{d}$$

$$H = \frac{2hd^2}{d^2 - h^2}$$

Gabarito: “a”.

104.(ITA/1995)

A expressão $sen\theta/(1 + cos\theta)$, $0 < \theta < \pi$, é idêntica a:

a) $\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

b) $cossec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

c) $cotg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) $tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$

e) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Comentários

Vamos simplificar a expressão:

$$\frac{sen\theta}{1 + cos\theta} = \frac{2sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} = \frac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Gabarito: “d”.

105.(IME/2020)

Seja $\frac{1}{b} = sen\frac{\pi}{14} \cdot sen\frac{3\pi}{14} \cdot sen\frac{5\pi}{14}$. Determine b, onde b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte expressão:

$$E = sen\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Multiplicando os dois lados por $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$, temos:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot E = \underbrace{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{14}\right)}_{sen\left(2 \cdot \frac{\pi}{14}\right)} \cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot E = sen\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Entretanto:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14} \Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) = sen\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Logo:

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\underbrace{sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)}_{\frac{sen\left(2\cdot\frac{5\pi}{14}\right)}{2}}\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)$$

Por outro lado:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{7}=-\frac{3\pi}{14}\Rightarrow\cos\left(-\frac{3\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)}_{\frac{sen\left(2\cdot\frac{3\pi}{14}\right)}{2}}$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

Mas:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}=\frac{3\pi}{7}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

Portanto:

$$E=\frac{1}{8}=\frac{1}{b}$$

$$\therefore\boxed{b=8}$$

Gabarito: $b=8$.

---

106. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\dots,\theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11}+\theta_{26}+\theta_{75}+\theta_{90}=\frac{\pi}{4}$. O valor de $sen\left(\sum_{i=1}^{100}\theta_i\right)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

Comentários

Calculando o valor do somatório usando a fórmula da soma de uma PA:

$$\sum_{i=1}^{100}\theta_i=\frac{(\theta_1+\theta_{100})100}{2}=50(\theta_1+\theta_{100})$$

O bizu nessa questão é perceber que os termos $\theta_1 + \theta_{100} = \theta_{11} + \theta_{90} = \theta_{26} + \theta_{75}$ são equidistantes. Assim, basta substituir:

$$\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$$

$$2(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{4}$$

$$(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{8}$$

$$sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = sen\big(50(\theta_1 + \theta_{100})\big) = sen\left(\frac{50\pi}{8}\right) = sen\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: "d".

---

107. (IME/2017)

Calcule o valor de $\frac{sen^4\alpha+\cos^4\alpha}{sen^6\alpha+\cos^6\alpha}$, sabendo-se que $sen\alpha cos\alpha = \frac{1}{5}$.

a) $\frac{22}{21}$

b) $\frac{23}{22}$

c) $\frac{25}{23}$

d) $\frac{13}{12}$

e) $\frac{26}{25}$

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$\frac{sen^4\alpha + \cos^4\alpha}{sen^6\alpha + \cos^6\alpha}$$

$$\frac{\overbrace{sen^4\alpha + \cos^4\alpha + 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}^{(sen^2\alpha+\cos^2\alpha)^2} - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}{(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)(sen^4\alpha - sen^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)}$$

$$\frac{1 - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}{(sen^4\alpha + \cos^4\alpha - sen^2\alpha\cos^2\alpha)}$$

$$\frac{1 - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha}{1 - 2sen^2\alpha\cos^2\alpha - sen^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1 - 2(sen\alpha cos\alpha)^2}{1 - 3(sen\alpha cos\alpha)^2}$$

Usando a informação dada no enunciado:

$$sen\alpha cos\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1-2(sen\alpha cos\alpha)^2}{1-3(sen\alpha cos\alpha)^2} = \frac{1-2\left(\frac{1}{5}\right)^2}{1-3\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{23}{25}}{\frac{22}{25}} = \frac{23}{22}$$

Gabarito: "b".

108.(IME/2017)

Se $\frac{cosx}{cosy} + \frac{senx}{seny} = -1$, calcule o valor de S.

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3sen\, y - sen\, 3y}{sen\, x}$$

Comentários

Essa questão é trabalhosa e para resolvê-la, temos que usar o método da tentativa e erro. Inicialmente, tentamos simplificar a expressão e depois usamos a informação dada no enunciado para obter algum resultado numérico.

Para os termos $cos3y$ e $sen3y$, temos:

$$\cos(3y) = 4\cos^3 y - 3cosy$$

$$sen(3y) = 3seny - 4sen^3y$$

Substituindo na expressão:

$$S = \frac{3\cos y + \cos 3y}{\cos x} + \frac{3sen\, y - sen\, 3y}{sen\, x}$$

$$S = \frac{3\cos y + 4\cos^3 y - 3cosy}{\cos x} + \frac{3sen\, y - (3seny - 4sen^3y)}{sen\, x}$$

$$S = \frac{4\cos^3 y}{\cos x} + \frac{4sen^3y}{sen\, x}$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcos^3y + sen^3ycosx)$$

Vamos expandir os termos cúbicos:

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcosy(\cos^2 y) + (sen^2y)senycosx)$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcosy(1 - sen^2y) + (1 - \cos^2 y)senycosx)$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcosy - senxcosysen^2y + senycosx - senycosxcos^2y)$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}(senxcosy + senycosx - senxcosysen^2y - senycosxcos^2y)$$

$$S = \frac{4}{senxcosx}\big(sen(x+y) - senycosy(senxseny + cosxcosy)\big)$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)-senycosy(\cos(x-y))\right)$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)-\frac{1}{2}sen(2y)cos(x-y)\right)$$

Agora, vamos analisar a informação dada no enunciado:

$$\frac{cosx}{cosy}+\frac{senx}{seny}=-1$$

$$\frac{senycosx+senxcosy}{senycosy}=-1$$

$$\frac{sen(x+y)}{senycosy}=-1$$

$$sen(x+y)=-senycosy$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}sen(2y)=sen(x+y)$$

Substituindo essa informação na soma, obtemos:

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)+sen(x+y)cos(x-y)\right)$$

Vamos transformar o produto $sen(x+y)\cos(x-y)$ em soma:

Usando a seguinte identidade, temos:

$$sen(A+B)+sen(A-B)=2senA\cos B$$

$$sen(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{2}[sen(x+y+x-y)+sen(x+y-x+y)]$$

$$\Rightarrow sen(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{2}[sen(2x)+sen(2y)]$$

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(sen(x+y)+\frac{1}{2}[sen(2x)+sen(2y)]\right)$$

Substituindo $sen(x+y)=-\frac{1}{2}sen(2y)$:

$$S=\frac{4}{senxcosx}\left(-\frac{1}{2}sen(2y)+\frac{1}{2}[sen(2x)+sen(2y)]\right)$$

$$S=\frac{4}{sen(2x)}\left(sen(2x)\right)$$

$$\therefore S=4$$

Gabarito: $S=4$

---

109. (IME/2015)

Os lados a,b e c de um triângulo estão em PA nesta ordem, sendo opostos aos ângulos internos A,B e C, respectivamente. Determine o valor da expressão:

$$\frac{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

a) $\sqrt{2}$

b) 2

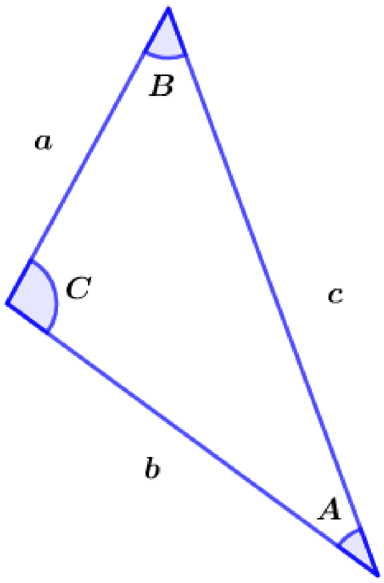
c) $2\sqrt{2}$

d) 3

e) 4

Comentários

De acordo com o enunciado, (a, b, c) estão em PA. Temos a seguinte figura:



Se r é a razão da PA, podemos reescrever os seus termos dessa forma:

$$a = b - r$$

$$c = b + r$$

$$(b - r, b, b + r)$$

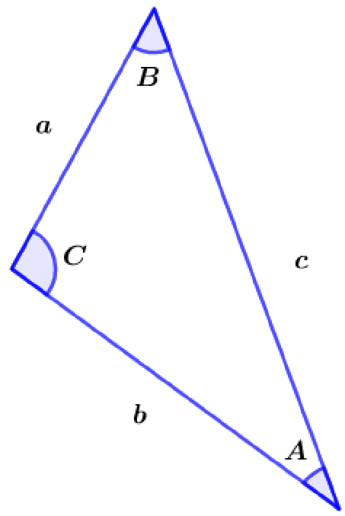
Vamos calcular o valor da expressão:

$$\frac{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) + sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) - sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$, encontramos:

$$\frac{1+tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Precisamos calcular o valor de $tg\left(\frac{A}{2}\right)$ e $tg\left(\frac{C}{2}\right)$, vamos encontrar essa informação no triângulo dado:



Usando a Lei dos Cossenos em A e C:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+(b+r)^2-(b-r)^2}{2b(b+r)}$$

$$\cos(A) = \frac{b^2+b^2+2br+r^2-b^2+2br-r^2}{2b(b+r)}$$

$$\cos(A) = \frac{b^2+4br}{2b(b+r)}$$

$$\cos(A) = \frac{b+4r}{2(b+r)}$$

Analogamente para C:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

$$\cos(C) = \frac{(b-r)^2+b^2-(b+r)^2}{2(b-r)b}$$

$$\cos(C) = \frac{b^2-4br}{2b(b-r)}$$

$$\cos(C) = \frac{b-4r}{2(b-r)}$$

Vamos usar a identidade:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}$$

Como $0<A<\pi$ (das condições do triângulo), temos $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$. Assim, podemos escrever:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}$$

Substituindo $cosA$ na equação:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{b+4r}{2(b+r)}\right)}{1+\left(\frac{b+4r}{2(b+r)}\right)}}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{b+4r}{2(b+r)}\right)}{1+\left(\frac{b+4r}{2(b+r)}\right)}}=\sqrt{\frac{b-2r}{3b+6r}}=\sqrt{\frac{b-2r}{3(b+2r)}}$$

Fazendo o mesmo para $cosC$:

$$tg\left(\frac{C}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{b-4r}{2(b-r)}\right)}{1+\left(\frac{b-4r}{2(b-r)}\right)}}=\sqrt{\frac{b+2r}{3(b-2r)}}$$

Substituindo esses valores na expressão, obtemos:

$$\frac{1+tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)}$$

$$\frac{1+\sqrt{\frac{b-2r}{3(b+2r)}}\sqrt{\frac{b+2r}{3(b-2r)}}}{1-\sqrt{\frac{b-2r}{3(b+2r)}}\sqrt{\frac{b+2r}{3(b-2r)}}}$$

$$\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{2}=2$$

Portanto, encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: "b".

---

110. (IME/2014)

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x)=x^2-\pi x$. Sejam também a,b,c e d números reais tais que:

$$a = sen^{-1}\left(\frac{1}{3}\right); b = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right); c = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ e } d = cotg^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

A relação de ordem, no conjunto dos reais, entre as imagens $f(a), f(b), f(c)$ e $f(d)$ é

a) $f(b) > f(a) > f(d) > f(c)$

b) $f(d) > f(a) > f(c) > f(b)$

c) $f(d) > f(a) > f(b) > f(c)$

d) $f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$

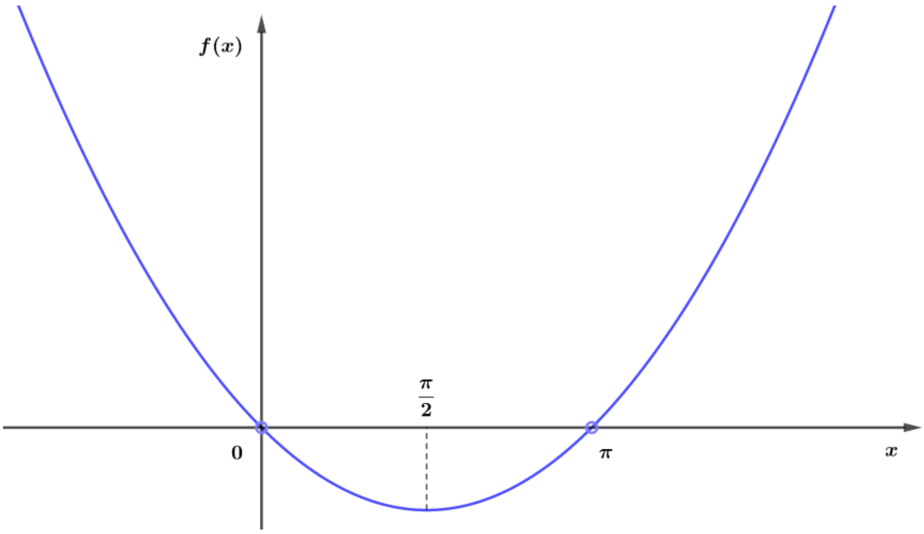
e) $f(a) > f(b) > f(d) > f(c)$

Comentários

Inicialmente, vamos analisar a função:

$$f(x) = x^2 - \pi x$$

Esboçando o gráfico dessa função:



A função f é decrescente para $x \leq \frac{\pi}{2}$ e crescente para $x \geq \frac{\pi}{2}$.

Vamos analisar os ângulos da questão:

Devemos usar o círculo trigonométrico para fazer as comparações.

Para cada ângulo, devemos analisar o domínio da função arco:

$$a = arcsen\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b = arctg\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$c = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow c \in [0, \pi]$$

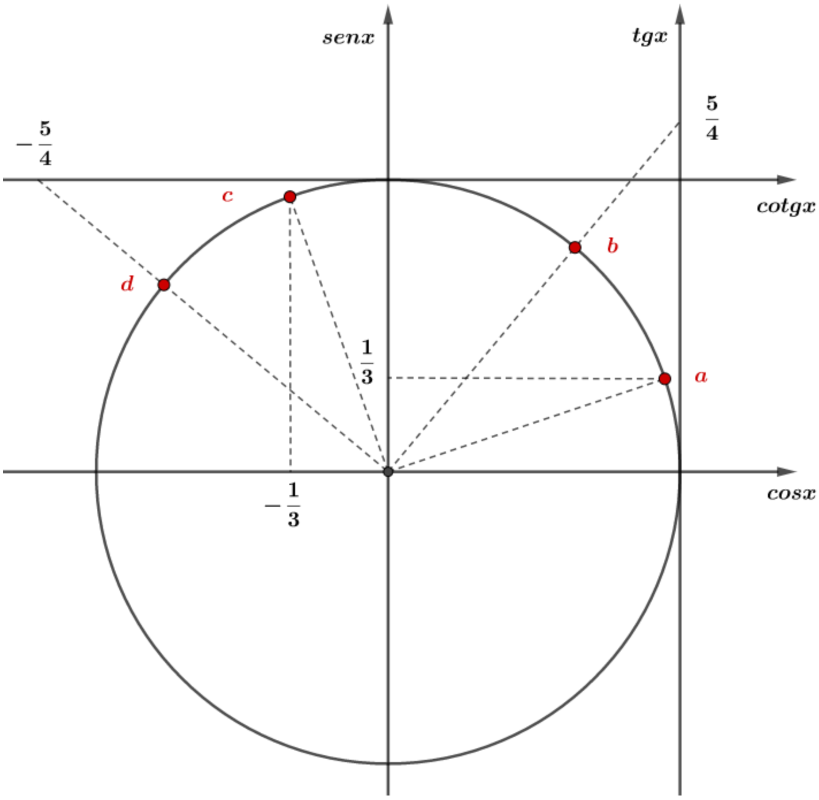
$$d = arccotg\left(-\frac{5}{4}\right) \Rightarrow d \in (0, \pi)$$

Perceba que temos ângulos complementares:

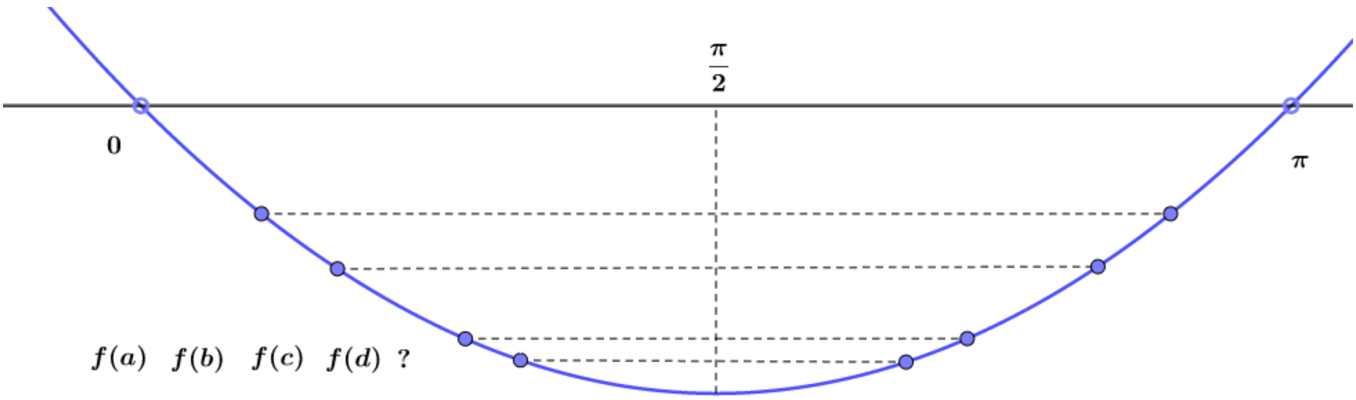
$$sena = \frac{1}{3} \; e \; cosc = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = c - \frac{\pi}{2}$$

$$tgb = \frac{5}{4} \; e \; cotgd = -\frac{5}{4} \Rightarrow b = d - \frac{\pi}{2}$$

Colocando os ângulos no círculo, temos:



Para comparar os valores de $f(a), f(b), f(c)$ e $f(d)$, devemos lembrar que a função f é simétrica em relação à reta $x = \pi/2$. Assim, temos que escolher um lado da parábola para fazer as comparações:

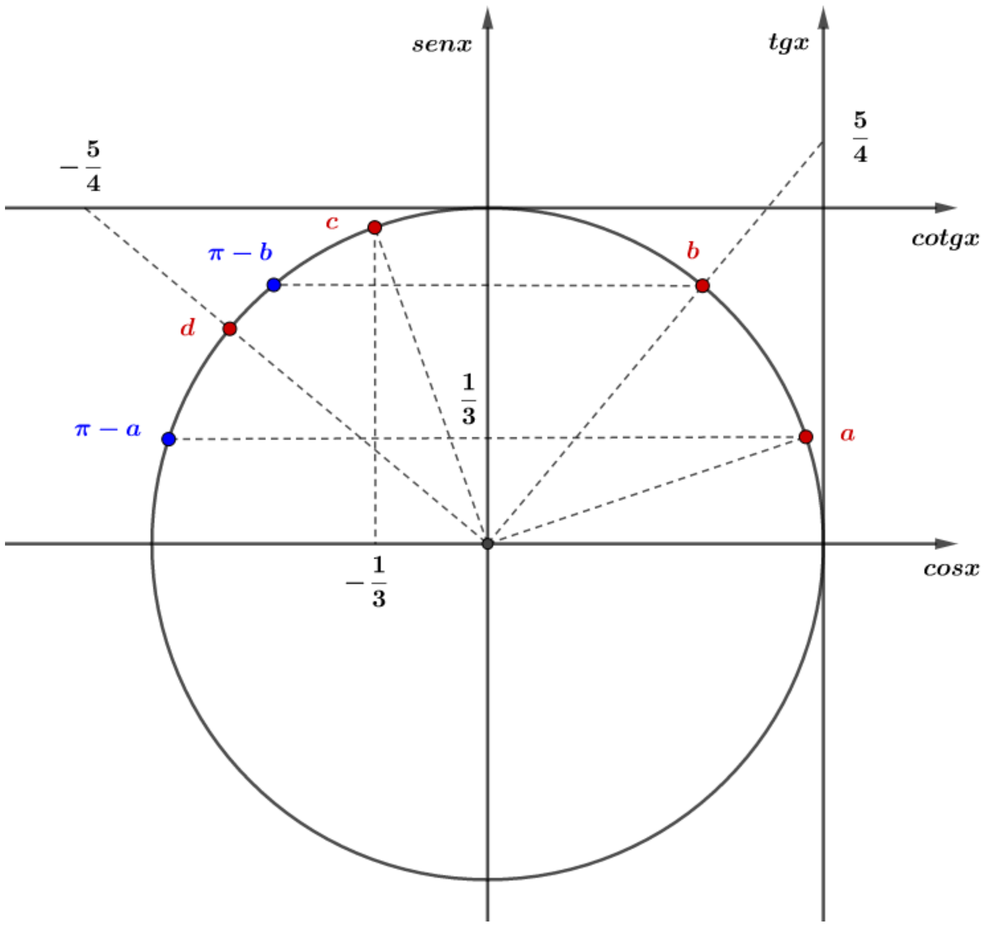


Vamos escolher o lado crescente da função e comparar os valores $x \geq \pi/2$. De acordo com o círculo, $0 < a < b < \pi/2$. Devemos pegar o simétrico de a e b. Assim, temos:

$$f(a) = f(\pi - a)$$

$$f(b) = f(\pi - b)$$

Usando o círculo trigonométrico:



Agora, com os ângulos no segundo quadrante, basta comparar os valores:

$$f(\pi - a) > f(d) > f(\pi - b) > f(c)$$
$$f(a) > f(d) > f(b) > f(c)$$

Gabarito: "d".

111.(IME/2014)

Sejam $f(x) = sen(\log x)$ e $g(x) = \cos(log\, x)$ duas funções reais, nas quais $\log x$ representa o logaritmo decimal de x. O valor da expressão $f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right) - g(x \cdot y)\right]$ é

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

Comentários

Se $f(x) = sen(\log x)$ e $g(x) = \cos(log\, x)$, temos:

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = \cos\left(log\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \cos(log\, x - log\, y)$$
$$g(x \cdot y) = \cos(log(x \cdot y)) = \cos(log\, x + log\, y)$$

Calculando o valor da expressão:

$$f(x)\cdot f(y)-\frac{1}{2}\left[g\left(\frac{x}{y}\right)-g(x\cdot y)\right]$$

$$sen(\log x)\ \cdot sen(\log y)\ -\frac{1}{2}[\cos(log\,x-log\,y)-\cos(log\,x+log\,y)]$$

$$sen(\log x)\cdot sen(\log y)-\frac{1}{2}[2sen(\log x)sen(\log y)]=0$$

Portanto, o valor da expressão é zero.

Gabarito: "e".

112.(IME/2014)

Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2-9y+8=0$ pode ser representada pela expressão $e^{(sen^2x+sen^4x+sen^6x+\cdots)\ln 2}$. Sendo $0<x<\frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x+sen\,x}$ é

Observação: $\ln 2$ representa o logaritmo neperiano de 2.

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\sqrt{3}-1$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

e) $\sqrt{3}+1$

Comentários

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$y^2-9y+8=0$$

$$y=\frac{9\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$y_1=1\ e\ y_2=8$$

Agora, vamos analisar a expressão:

$$e^{(sen^2x+sen^4x+sen^6x+\cdots)\ln 2}$$

Como $0<x<\pi/2$, temos $0<senx<1$. Então, a soma $sen^2x+sen^4x+\cdots$ é uma soma de PG infinita de razão sen^2x. Dessa forma, temos:

$$sen^2x+sen^4x+\cdots=\frac{sen^2x}{1-sen^2x}$$

$$e^{\left(\frac{sen^2x}{1-sen^2x}\right)\ln 2}=e^{\log_e 2^{\frac{sen^2x}{1-sen^2x}}}=2^{\frac{sen^2x}{1-sen^2x}}=2^{\frac{sen^2x}{\cos^2 x}}=2^{tg^2x}$$

De acordo com o enunciado, uma das raízes é o valor dessa expressão:

$$2^{tg^2x}=1\ ou\ 2^{tg^2x}=8$$

Para $2^{tg^2x} = 1$:

$$tg^2x = 0 \Rightarrow \text{não tem solução}$$

Para $2^{tg^2x} = 8$:

$$2^{tg^2x} = 2^3 \Rightarrow tg^2x = 3 \Rightarrow tgx = \pm\sqrt{3}$$

Como $0 < x < \pi/2$, temos:

$$tgx = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Calculando o valor da razão, temos:

$$\frac{\cos x}{\cos x + sen\ x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Gabarito: "a".

---

113. (IME/2013)

Assinale a alternativa que representa o mesmo valor da expressão $[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3]$:

a) $sen(9°)$

b) $tg\ (9°)$

c) $\cos(9°)$

d) $\sec(9°)$

e) $cossec\ (9°)$

Comentários

Perceba que os termos da expressão são muito próximos da fórmula do arco triplo:

$$[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3]$$

Lembrando que o arco triplo é dado por:

$$\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3cosA$$

Como $\cos(9°) > 0$ e $\cos(27°) > 0$, podemos multiplicar a expressão por $\cos(27°)\cos(9°)$ e obter:

$$[4\cos^2(9°) - 3][4\cos^2(27°) - 3] = \frac{[4\cos^3(9°) - 3\cos(9°)][4\cos^3(27°) - 3\cos(27°)]}{\cos(27°)\cos(9°)}$$

$$\frac{\cos(27°)\cos(81°)}{\cos(27°)\cos(9°)} = \frac{\text{sen}(9°)}{\cos(9°)} = tg(9°)$$

Gabarito: "b".

---

114. (IME/2012)

Seja $arcsenx + arcseny + arcsenz = \frac{3\pi}{2}$, onde x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Determine o valor de $x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101}+y^{101}+z^{101}}$.

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Comentários

Do enunciado, temos:

$$arcsenx + arcseny + arcsenz = \frac{3\pi}{2}$$

Sabemos que a imagem da função arco-seno é:

$$arcsen(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Então, a única possibilidade é quando a função arco-seno assume seu valor máximo:

$$arcsenx = arcseny = arcsenz = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = y = z = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Substituindo esses valores na expressão, obtemos:

$$x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}} = 1^{100} + 1^{100} + 1^{100} - \frac{9}{1^{101} + 1^{101} + 1^{101}} = 3 - \frac{9}{3}$$
$$= 0$$

Gabarito: "c".

---

115. (IME/2012)

O valor de $y = sen70°cos50° + sen260°cos280°$ é:

a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Comentários

Vamos calcular o valor da expressão:

$$y = sen70°cos50° + sen260°cos280°$$

$$y = sen70°cos50° + sen(180° + 80°)\cos(180° + 100°)$$

$$*sen(180° + 80°) = sen(180°)\cos(80°) + sen(80°)\cos(180°) = -sen(80°)$$

$$*\cos(180° + 100°) = cos(180°)\cos(100°) - sen(180°)\,\text{sen}(100°) = -cos(100°)$$

$$y = sen70°cos50° + \left(-sen(80°)\right)\left(-cos(100°)\right)$$

$$y = sen70°cos50° + sen80°cos100°$$

Vamos transformar o produto em soma usando a fórmula de Werner:

$$senAcosB = \frac{1}{2}\left(sen(A+B) + sen(A-B)\right)$$

$$sen70°cos50° = \frac{1}{2}\left(sen(120°) + sen(20°)\right)$$

$$sen80°cos100° = \frac{1}{2}\left(sen(180°) + sen(-20°)\right) = \frac{1}{2}\left(sen(180°) - sen(20°)\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(sen(120°) + sen(20°)\right) + \frac{1}{2}\left(sen(180°) - sen(20°)\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Gabarito: "d".

116.(IME/2010)

Considere a sequência $a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}, a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}, a_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}, \ldots$

Determine o produto dos 20 primeiros termos dessa sequência.

Comentários

Vamos analisar cada termo da sequência:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_1}$$

$$2a_2^2 = 1 + a_1$$

A relação acima nos lembra da seguinte fórmula do cosseno:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

$$2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$$

Vamos escrever os termos em função do cosseno:

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^1}\right)$$

$$2a_2^2 = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow a_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^2}\right)$$

Analogamente para os outros termos, encontramos:

$$a_3 = \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^3}\right)$$

$$\vdots$$

$$a_{20} = \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)$$

Queremos calcular o produto dos 20 primeiros termos da sequência:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{20}$$

$$P = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)}_{20\ termos}$$

Podemos usar a fórmula do arco duplo do seno:

$$sen(2\alpha) = 2sen\alpha cos\alpha$$

Vamos multiplicar essa expressão por $2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)$:

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) \cdot 2^{20}$$

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{19}}\right) \cdot 2^{19}$$

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \ldots \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{18}}\right) \cdot 2^{18}$$

$$\vdots$$

$$2^{20} sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right) P = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{3}}{2^{21}} \cdot \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{P = \frac{\sqrt{3}}{2^{21}} \cdot \frac{1}{sen\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2^{20}}\right)}}$

117.(IME/2001)

Calcule o valor exato de:

$$sen\left[2arccotg\left(\frac{4}{3}\right)\right] + \cos\left[2arccossec\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

Comentários

Fazendo as seguintes substituições:

Para $\alpha \in]0,\pi[$:

$$\alpha = arccotg\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow cotg\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow cotg^2\alpha = \frac{16}{9} \Rightarrow cossec^2\alpha - 1 = \frac{16}{9}$$

$$\frac{1}{sen\alpha} = \pm\frac{5}{3}$$

Como $\alpha \in]0,\pi[$, temos $sen\alpha > 0$:

$$\Rightarrow sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Para $\beta \in]-\pi/2\,,0[\,\cup\,]0,\pi/2[$:

$$\beta = arccossec\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow cossec\beta = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{sen\beta} = \frac{5}{4} \Rightarrow sen\beta = \frac{4}{5}$$

Queremos calcular:

$$sen(2\alpha) + \cos(2\beta) = 2sen\alpha cos\alpha + 1 - 2sen^2\beta$$

$$2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} - \frac{7}{25} = \frac{17}{25}$$

$$\therefore sen(2\alpha) + \cos(2\beta) = \frac{17}{25}$$

Gabarito: $17/25$

118.(IME/1997)

Se tga e tgb são as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão:

$$y = sen^2(a+b) + psen(a+b)\cos(a+b) + qcos^2(a+b)$$

Considere $p, q \in \mathbb{R}$ com $q \neq 1$.

Comentários

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = tga + tgb = -p$$

$$x_1x_2 = tgatgb = q$$

Agora, dividindo a expressão por $\cos^2(a+b)$:

$$\frac{y}{\cos^2(a+b)} = tg^2(a+b) + ptg(a+b) + q$$

$$y=\frac{tg^2(a+b)+ptg(a+b)+q}{\sec^2(a+b)}$$

$$y=\frac{tg^2(a+b)+ptg(a+b)+q}{1+tg^2(a+b)}$$

Calculando $tg(a+b)$:

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}=-\frac{p}{1-q}=\frac{p}{q-1}$$

Substituindo o valor na expressão:

$$y=\frac{\left(\frac{p}{q-1}\right)^2+p\left(\frac{p}{q-1}\right)+q}{1+\left(\frac{p}{q-1}\right)^2}$$

$$y=\frac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}$$

$$y=\frac{p^2+p^2q-p^2+q^3-2q^2+q}{q^2-2q+1+p^2}$$

$$y=\frac{q(p^2+q^2-2q+1)}{p^2+q^2-2q+1}$$

$$\Rightarrow y=q$$

Gabarito: $\boldsymbol{y=q}$

119.(IME/1991)

Mostre que se num triângulo ABC vale a relação:

$$\frac{\cos(B-C)}{senA+sen(C-B)}=tgB$$

Então o triângulo é retângulo com ângulo reto em A.

Comentários

Se A, B, C são os ângulos internos de um triângulo ABC, temos:

$$A+B+C=\pi\Rightarrow A=\pi-(B+C)$$

Vamos simplificar o lado esquerdo da expressão:

$$\frac{\cos(B-C)}{sen\big(\pi-(B+C)\big)+sen(C-B)}$$

$$\frac{\cos(B-C)}{sen(B+C)+sen(C-B)}$$

$$\frac{\cos B\cos C+senBsenC}{senBcosC+senCcosB+senCcosB-senBcosC}$$

$$\frac{cosBcosC+senBsenC}{2senCcosB}$$

$$\frac{cotgC + tgB}{2}$$

Usando a relação do enunciado:

$$\frac{cotgC + tgB}{2} = tgB$$

$$cotgC = tgB$$

$$\frac{cosC}{senC} = \frac{senB}{cosB}$$

$$cosBcosC - senBsenC = 0$$

$$cos(B + C) = 0$$

Usando a relação dos ângulos internos do triângulo:

$$\cos(\pi - A) = 0$$

$$-\cos(A) = 0$$

Como $A \in]0, \pi[$, temos:

$$A = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, o triângulo é retângulo em A.

Gabarito: Demonstração

---

120. (IME/1991)

Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que:

$$sen(2A) + sen(2B) + sen(2C) = 4senAsenBsenC$$

Comentários

Se A, B, C são ângulos internos de um triângulo, temos:

$$A + B + C = \pi$$

$$2A = 2\pi - 2(B + C)$$

Calculando o valor da expressão:

$$sen(2A) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$sen\big(2\pi - 2(B + C)\big) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$-sen\big(2(B + C)\big) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$-(sen(2B)\cos(2C) + sen(2C)\cos(2B)) + sen(2B) + sen(2C)$$

$$sen(2B)(1 - \cos(2C)) + sen(2C)(1 - \cos(2B))$$

$$2senBcosB(2sen^2C) + 2senCcosC(2sen^2B)$$

$$4senBsenC(senCcosB + senBcosC)$$

$$4senBsenCsen(B + C)$$

$$4senBsenCsen(\pi - A)$$

$$4senAsenBsenC$$

Portanto:

$$sen(2A) + sen(2B) + sen(2C) = 4senAsenBsenC$$

Gabarito: Demonstração

121.(IME/1989)

Provar que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação:

$$sen(4A) + sen(4B) + sen(4C) = 0$$

Então, o triângulo ABC é retângulo.

Comentários

Como A, B, C são ângulos de um triângulo ABC, temos:

$$A + B + C = \pi$$

$$4A = 4\pi - 4(B + C)$$

Vamos calcular o valor da expressão:

$$sen(4A) + sen(4B) + sen(4C)$$

$$sen\big(4\pi - 4(B + C)\big) + sen(4B) + sen(4C)$$

$$-sen(4B + 4C) + sen(4B) + sen(4C)$$

$$-sen(4B)\cos(4C) - sen(4C)\cos(4B) + sen(4B) + sen(4C)$$

$$sen(4B)(1 - \cos(4C)) + sen(4C)(1 - \cos(4B))$$

$$2sen(2B)\cos(2B)\,(2\,\mathrm{sen}^2(2C)) + 2sen(2C)\cos(2C)(2\,\mathrm{sen}^2(2B))$$

$$4sen(2B)\,\mathrm{sen}(2C)\,(sen(2C)\cos(2B) + sen(2B)\cos(2C))$$

$$4\,\mathrm{sen}(2B)\,\mathrm{sen}(2C)\,\big(sen(2B + 2C)\big)$$

$$4\,\mathrm{sen}(2B)\,\mathrm{sen}(2C)\,sen(2\pi - 2A)$$

$$-4sen(2A)\,\mathrm{sen}(2B)\,\mathrm{sen}(2C)$$

Usando a relação do enunciado:

$$-4\,\mathrm{sen}(2B)\,\mathrm{sen}(2C)\,sen(2A) = 0$$

Como A, B, C são ângulos internos de um triângulo, temos $A, B, C \in (0, \pi)$. Então:

$$sen(2A) = 0 \Rightarrow 2A = \pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

Ou

$$sen(2B) = 0 \Rightarrow 2B = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{2}$$

Ou

$$sen(2C) = 0 \Rightarrow 2C = \pi \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Para qualquer um dos casos, temos que o triângulo possui um ângulo reto.

Gabarito: Demonstração

122. (IME/2021)

Seja ABC um triângulo tal que $2sen(\hat{A}) - sen(\hat{B}) - sen(\hat{C}) = 0$. Prove que o valor de $cotg\frac{(\hat{B})}{2}cotg\frac{(\hat{C})}{2}$ é um número inteiro e o determine.

Observação: $cotg(\hat{A})$ é a cotangente do ângulo $\hat{A}$.

Comentários

Sabendo que A, B e C são ângulos de um triângulo e usando a relação dada, temos:

$$A + B + C = \pi \Rightarrow A = \pi - (B + C)$$

$$2sen(A) - sen(B) - sen(C) = 0$$

$$2sen\big(\pi - (B + C)\big) = sen(B) + sen(C)$$

$$\Rightarrow 2sen(B + C) = sen(B) + sen(C)$$

Usando as transformações:

$$sen(B) + sen(C) = 2sen\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B - C}{2}\right)$$

$$sen(B + C) = 2sen\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B + C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(2sen\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B + C}{2}\right)\right) = 2sen\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B - C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos\left(\frac{B - C}{2}\right)$$

Abrindo a soma de arcos dos cossenos:

$$2\left(\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) - sen\left(\frac{B}{2}\right)sen\left(\frac{C}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) + sen\left(\frac{B}{2}\right)sen\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) = 3sen\left(\frac{B}{2}\right)sen\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{cotg\frac{(\hat{B})}{2}cotg\frac{(\hat{C})}{2} = 3}$$

Gabarito: $cotg\frac{(\hat{B})}{2}cotg\frac{(\hat{C})}{2} = 3$

12. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da nossa aula de trigonometria. Esse assunto possui uma alta taxa de incidência nas provas militares. Tente resolver todos os exercícios dessa aula.

O melhor jeito de estudar trigonometria é resolver uma grande quantidade de exercícios e pegar todos os bizus da aula. Na hora da prova, não teremos surpresas pois já saberemos resolver cada tipo de problema que possa cair.

Lembre-se! A prática leva à perfeição! Conte comigo na sua preparação!

Se ficar com dúvidas ou tiver alguma sugestão e/ou crítica, nos procure no fórum de dúvidas ou fale diretamente comigo:

/profvictorso

13. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. Atual, 2013. 311p.

[2] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Perdigão do Carmo, Manfredo. Trigonometria Números Complexos. 3 ed. SBM, 2005. 164p.

14. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.