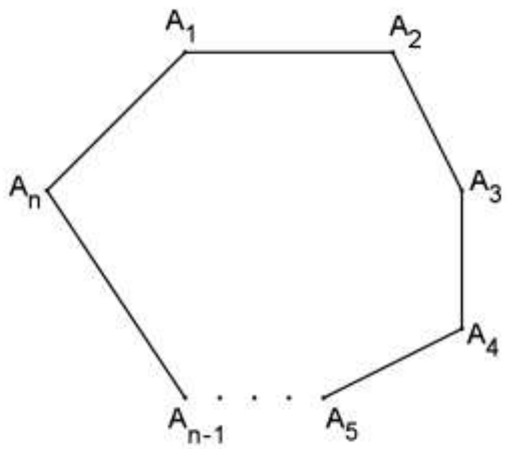
POLÍGONOS

1. DEFINIÇÃO

Seja uma sequência de pontos distintos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, com $n \geq 3$, onde três pontos consecutivos não são colineares (A_{n-1}, A_n, A_1 e A_n, A_1, A_2 são considerados consecutivos). A reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, …, $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ é o polígono $A_1A_2\ldots A_n$.

Os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ são os vértices do polígono; os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, …, $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ são os seus lados; e os ângulos $\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2$, $\hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3$, …, $\hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ são os ângulos internos do polígono.



Um polígono de n vértices possui também n lados e n ângulos, e diz-se de gênero n.

GÊNERO	DENOMINAÇÃO
$n=3$	trilátero ou triângulo
$n=4$	quadrilátero
$n=5$	pentágono
$n=6$	hexágono
$n=7$	heptágono
$n=8$	octógono
$n=9$	eneágono
$n=10$	decágono
$n=11$	undecágono
$n=12$	dodecágono
$n=15$	pentadecágono
$n=20$	icoságono
n	n-látero

Um polígono é **simples** se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia.

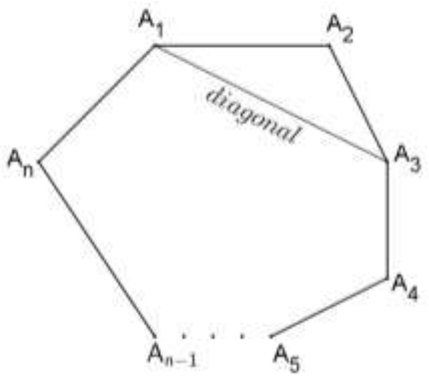
Um polígono simples é **convexo** se, e somente se, a reta determinada por quaisquer dois de seus vértices consecutivos deixa todos os outros vértices no mesmo semiplano.

Um polígono que possui todos os lados congruentes é dito **equilátero**. Um polígono que possui todos os ângulos congruentes é dito **equiângulo**. Um polígono é dito **regular** se é equilátero e equiângulo.

O desenvolvimento a seguir refere-se a polígonos simples que possuem todos os vértices no mesmo plano.

2. DIAGONAIS

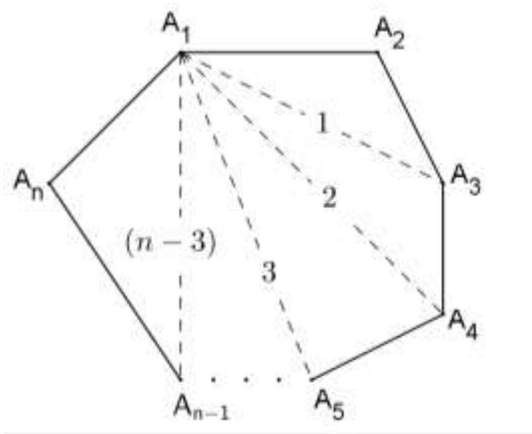
Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são dois vértices não consecutivos do polígono.



O número de diagonais que se pode traçar partindo-se de cada vértice de um polígono de gênero n é: $d = n - 3$.

O número total de diagonais de um polígono de gênero n é: $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO:



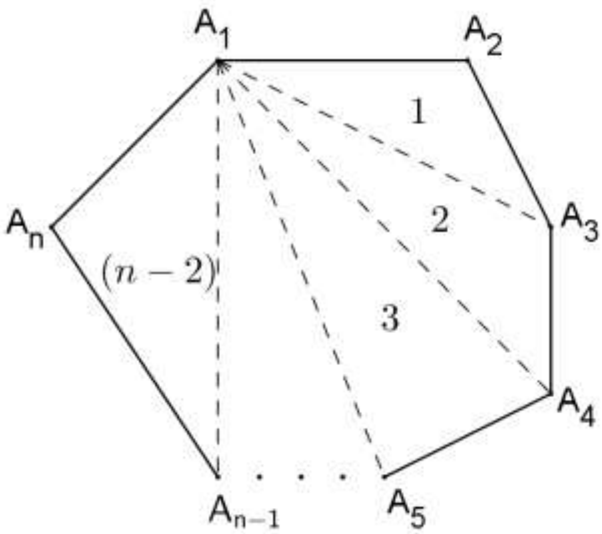
Basta contar a quantidade de diagonais traçadas em todos os n vértices, totalizando $n(n-3)$ e observar que cada diagonal é contada duas vezes, uma em cada extremidade. Portanto, o número de diagonais é $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

3. ÂNGULOS INTERNOS

A soma dos ângulos internos de um polígono de gênero n é:

$S_i = 180^\circ(n-2)$.

DEMONSTRAÇÃO:



Ligando-se um dos vértices de um polígono gênero n aos $(n-3)$ vértices não adjacentes a ele, o polígono fica dividido em $(n-2)$ triângulos. A soma dos ângulos internos desses $(n-2)$ triângulos é igual à soma dos ângulos internos do polígono. Assim, a soma dos ângulos internos do polígono é $S_i = 180^\circ(n-2)$.

4. ÂNGULOS EXTERNOS

Ângulo externo de um polígono é o ângulo suplementar adjacente do ângulo interno do polígono.

A soma dos ângulos externos de um polígono de gênero n é:

$S_e = 360^\circ$.

DEMONSTRAÇÃO:

Há n pares de ângulos internos e externos, e cada par soma 180°. Assim, a soma de todos os ângulos internos e externos do polígono é $180^\circ \cdot n$. Portanto,

$S_i + S_e = 180^\circ \cdot n \Leftrightarrow 180^\circ(n-2) + S_e = 180^\circ n \Leftrightarrow S_e = 360^\circ$

Observe que a soma dos ângulos externos de um polígono é constante e não depende de seu gênero.

5. POLÍGONOS REGULARES

Um polígono regular é um polígono equilátero e equiângulo.

Os polígonos regulares são inscritíveis e circunscritíveis. O centro das circunferências inscrita e circunscrita é chamado **centro** do polígono.

Cada ângulo interno de um polígono regular é igual a $\hat{A}_i = \frac{S_i}{n} = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ e cada ângulo externo é igual a $\hat{A}_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}$.

PROBIZU

Um polígono regular de gênero n par possui $d_c = \frac{n}{2}$ diagonais que passam pelo centro e $d_{nc} = \frac{n(n-4)}{2}$ diagonais que não passam pelo centro.
Um polígono regular de gênero ímpar não possui diagonais que passam pelo centro.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (UEM 2007) Seja $k \in \mathbb{N}^*$. Se o número de diagonais de um polígono convexo é k vezes o seu número de lados, então é correto afirmar que o número de lados do polígono é:

a) $3k+2$

b) $2k-3$

c) k

d) $3k-2$

e) $2k+3$

2. (CMBR 2010) Na analise as afirmativas abaixo:

(I) Se o número de diagonais de um polígono convexo é $\frac{5}{2}$ do número de lados; então, esse polígono é um decágono.

(II) Se o ângulo externo de um polígono regular convexo P é $\frac{1}{24}$ da soma dos ângulos internos de P; então, P é um octógono.

(III) Se um trapézio isósceles, de bases 20 e 80, está circunscrito a uma circunferência; então, o raio da circunferência é 40.

Associando V ou F a cada afirmativa, conforme seja verdadeira ou falsa, respectivamente, obtém-se a sequência:

a) F F V

b) F V V

c) V V F

d) F V F

e) V V F

3. (CMRJ 2012) A diferença entre as medidas do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular vale 144°. O número de lados deste polígono é igual a:

a) 18

b) 20

c) 22

d) 24

e) 26

4. (CMF 2009) Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130º cada um, e os demais ângulos internos medem 128º cada um. O número de lados do polígono é igual a:

a) 6

b) 7

c) 13

d) 16

e) 17

5. Em um polígono convexo, um dos ângulos internos mede 150^o e cada um dos outros é maior que 166^o. O menor número de lados que esse polígono pode ter é:

a) 22

b) 23

c) 24

d) 25

e) 26

6. Os pontos A, B, C e D, nesta ordem sobre uma circunferência são tais que AB é o lado do hexágono regular inscrito, BC é o lado do decágono regular convexo e CD é o lado do pentágono regular estrelado, inscritos nessa circunferência. O segmento AD é o lado de um polígono regular inscrito. Este polígono é o:

a) triângulo equilátero

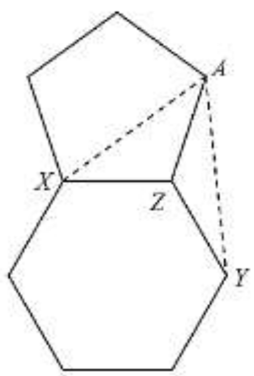
b) pentágono convexo

c) octógono estrelado

d) quadrado

e) dodecágono estrelado

7. A figura abaixo mostra um pentágono e um hexágono regulares com um lado comum.



O ângulo $X\hat{A}Y$ que aparece na figura mede:

a) 56°

b) 58°

c) 60°

d) 62°

e) 64°

8. ABCDE é um pentágono regular e ABF é um triângulo equilátero interior. O ângulo FCD mede:

a) 38°

b) 40°

c) 42°

d) 44°

e) 46°

9. Em um pentágono $ABCDE$, $AB = BC = CD = DE$, $\hat{B} = 96^\circ$ e $\hat{C} = \hat{D} = 108^\circ$. A medida do ângulo $\hat{E}$ é:

a) 120°

b) 108°

c) 102°

d) 96°

e) 94°

10. (CN 1978) A diferença entre o número de diagonais de dois polígonos convexos é 29, e a diferença entre as somas dos ângulos internos destes polígonos é de $360º$. A soma dos números de lados dos dois polígonos é:

a) 22

b) 28

c) 32

d) 36

e) 35

11. (CN 1982) Um polígono $ABCD\ldots$ é regular. As bissetrizes internas dos ângulos dos vértices A e C formam um ângulo de $72º$.

O número de lados desse polígono é:

a) 7

b) 10

c) 12

d) 15

e) 20

12. (CN 1983) O total de diagonais de dois polígonos regulares é 41. Um desses polígonos tem dois lados a mais que o outro. O ângulo interno do polígono que tem o ângulo central menor mede:

a) 120º

b) 135º

c) 140º

d) 144º

e) 150º

13. (CN 1985) Um polígono regular possui 70 diagonais que não passam pelo seu centro. O valor da medida do ângulo interno do referido polígono está, em graus, compreendido entre

a) 70° e 80°.

b) 100° e 120°.

c) 120° e 130°.

d) 140° e 150°.

e) 150° e 160°.

14. (CN 1987) O total de polígonos convexos cujo número n de lados é expresso por dois algarismos iguais e tais que seu número d de diagonais é tal que $d > 26n$ é:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

15. (CN 1988) Um polígono regular tem vinte diagonais. A medida, em graus, de um de seus ângulos internos é:

a) 201º

b) 167º

c) 162º

d) 150º

e) 135º

16. (CN 1990) O número de polígonos regulares de gênero par tais que, quaisquer duas de suas diagonais, que passam pelo seu centro, formam entre si ângulo expresso em graus por número inteiro, é:

a) 17

b) 18

c) 21

d) 23

e) 24

17. (CN 1991) Um polígono regular admite para medida de suas diagonais apenas os números $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{27}$ tais que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{27}$. Logo este polígono

a) tem 30 lados.

b) pode ter 54 lados.

c) pode ter 57 lados.

d) pode ter 58 lados.

e) tem um número de lados maior que 60 .

18. (CN 1992) Sobre uma circunferência, marcam-se os n pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de tal maneira que os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ e A_nA_1 têm medidas iguais a da corda do arco de $157º30'$ dessa mesma circunferência. Logo o número $\underline{n}$ é:

a) primo.

b) múltiplo de 3 .

c) múltiplo de 6 .

d) potência de 2 .

e) múltiplo de 5 .

19. (CN 1994) Um aluno escreveu o ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados adjacentes de um polígono regular convexo de treze lados, em graus, minutos e segundos. Sendo estes últimos com uma parte inteira e outra fracionária. Assim sendo, pode-se afirmar que o número inteiro de segundos é:

a) 26

b) 28

c) 30

d) 32

e) 34

20. (CN 1995) Um polígono regular convexo tem seu número de diagonais expresso por $n^2-10n+8$, onde n é o seu número de lados. O seu ângulo interno x é tal que:

a) $x<120º$

b) $120º<x<130º$

c) $130º<x<140º$

d) $140º<x<150º$

e) $x>150º$

21. (CN 1997) Um aluno declarou o seguinte, a respeito de um polígono convexo P de n lados: "Partindo da premissa de que eu posso traçar $(n-3)$ diagonais de cada vértice de P, então, em primeiro lugar, o total de diagonais de P é dado por $n\cdot(n-3)$; e, em segundo lugar, a soma dos ângulos internos de P é dada por $(n-3).180º$. Logo o aluno:

a) Errou na premissa e nas conclusões.

b) Acertou na premissa e na primeira conclusão, mas errou na segunda conclusão.

c) Acertou na premissa e na segunda conclusão, mas errou na primeira conclusão.

d) Acertou na premissa e nas conclusões.

e) Acertou na premissa e errou nas conclusões.

22. (CN 1998) Considere as afirmativas abaixo sobre um polígono regular de n lados, onde o número de diagonais é múltiplo de n.

I. O polígono **não** pode ter diagonal que passa pelo seu centro.

II. n pode ser múltiplo de 17.

III. n pode ser um cubo perfeito.

IV. n pode ser primo.

Assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmativas são falsas.

b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

c) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

23. (CN 2001) Os pontos X, O e Y são vértices de um polígono regular de n lados. Se o ângulo $X\hat{O}Y$ mede $22^\circ 30'$, considere as afirmativas:

(I) n pode ser igual a 8.

(II) n pode ser igual a 12.

(III) n pode ser igual a 24.

Podemos afirmar que:

a) apenas I e II são verdadeiras.

b) apenas I e III são verdadeiras.

c) apenas II e III são verdadeiras.

d) apenas uma delas é verdadeira

e) I, II e III são verdadeiras

24. (CN 2004) Um estudante foi calculando o lado de um polígono regular de $2n$ lados, inscrito em uma circunferência de raio 10 centímetros, para n sucessivamente igual a 6, 12, 24, 48, 96, etc. Após determinar cada lado, calculou o perímetro p do respectivo polígono, e observou que p é um número cada vez mais próximo de, porém menor que

a) 60

b) 61

c) 62

d) 63

e) 64

25. (CN 2006) O número de diagonais de um polígono regular P inscrito em um círculo K é 170. Logo

a) o número de lados de P é ímpar.

b) P não tem diagonais passando pelo centro de K.

c) o ângulo externo de P mede 36°.

d) uma das diagonais de P é o lado do pentágono regular inscrito em K.

e) o número de lados de P é múltiplo de 3.

26. (CN 2006) Um polígono convexo de n lados tem três dos seus ângulos iguais a $83º$, $137º$ e $142º$. Qual é o menor valor de n para que nenhum dos outros ângulos desse polígono seja menor que $121º$?

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

27. (CN 2012) Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de $'N'$ e $'n'$ lados $(N \neq n)$, e com $'D'$ e $'d'$ diagonais, respectivamente, de modo que $N-n=D-d$. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) indeterminada.

28. (ITA 1988) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2160°. Então o número de diagonais deste polígono, que não passam pelo centro da circunferência que o circunscreve, é:

a) 50

b) 60

c) 70

d) 80

e) 90

29. (ITA 1998) Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I. Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II. Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III. Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

Todas as afirmações são verdadeiras.

a) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

b) Apenas (I) é verdadeira.

c) Apenas (III) é verdadeira.

d) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

30. (ITA 2005) Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n-1$ ângulos (internos) do polígono é 2004°, determine o número n de lados do polígono.

Seja o hexágono equiângulo ABCDEF, onde $AB=3,\ BC=4,\ CD=5$ e $EF=1.$ Pode-se afirmar que $DE+AF$ é igual a:

a) 11

b) 12

c) 13

d) 14

e) 15

31. Os ângulos de um polígono convexo de gênero n são $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, n\alpha$. A quantidade de possíveis valores de n é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

GABARITO

1.

$$\frac{n(n-3)}{2}=k\cdot n \Leftrightarrow n-3=2k \Leftrightarrow n=2k+3$$

RESPOSTA: E

2.

(I) F

$$\frac{n(n-3)}{2}=\frac{5}{2}n \Leftrightarrow n-3=5 \Leftrightarrow n=8$$

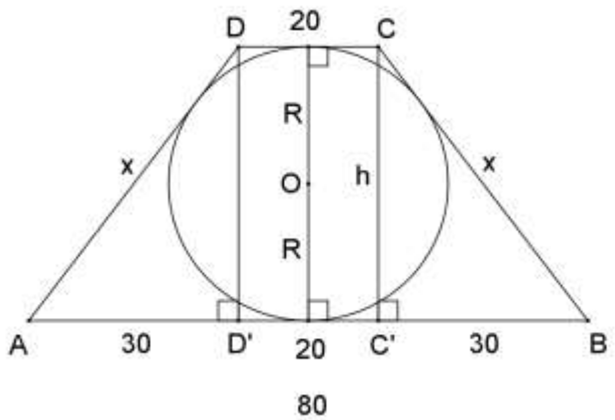
Logo, o polígono é um octógono.

(II) V

$$\frac{360^\circ}{n}=\frac{1}{24}\cdot 180^\circ(n-2) \Leftrightarrow n^2-2n-48=0 \Leftrightarrow n=-6\,(\textit{não convém})\ \ ou\ \ n=8$$

Logo, P é um octógono.

(III) F



Seja x a medida dos lados não paralelos. Como o trapézio é circunscritível, então, pelo teorema de Pitot, temos: $2x=20+80 \Leftrightarrow x=50$. Seja h a altura do trapézio, então, no triângulo retângulo BCC', temos $h^2+30^2=50^2 \Leftrightarrow h=40$. O diâmetro da circunferência é igual à altura do trapézio, logo o raio da circunferência é 20.

RESPOSTA: D

3. Sejam $\hat{A}_i$ e $\hat{A}_e$, respectivamente, o ângulo interno e o ângulo externo do polígono regular de n lados, então

$$\begin{cases}\hat{A}_i+\hat{A}_e=180^\circ\\ \hat{A}_i-\hat{A}_e=144^\circ\end{cases} \Rightarrow \left(\hat{A}_i+\hat{A}_e\right)-\left(\hat{A}_i-\hat{A}_e\right)=180^\circ-144^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_e=18^\circ$$

$$\hat{A}_e=\frac{360^\circ}{n}=18^\circ \Leftrightarrow n=20$$

RESPOSTA: B

4. Seja n o gênero do polígono, então a soma dos seus ângulos internos é dada por

$S_i = 2 \cdot 130^\circ + (n-2) \cdot 128^\circ = 180^\circ (n-2) \Leftrightarrow 52n = 364 \Leftrightarrow n = 7$.

RESPOSTA: B

5.

$180^\circ \cdot (n-2) > 150^\circ + 166^\circ \cdot (n-1) \Rightarrow n > 24{,}5$

Logo, o menor número de lados é 25.

RESPOSTA: D

6. Somando as frações que cada arco representa da circunferência temos: $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Assim, o arco AD é 1/3 da circunferência e o segmento AD é o lado do triângulo equilátero.

RESPOSTA: A

7.

O ângulo interno do pentágono mede 108^o e o do hexágono 120^o, então $A\hat{Z}Y = 360^\circ - 108^\circ - 120^\circ = 132^\circ$.

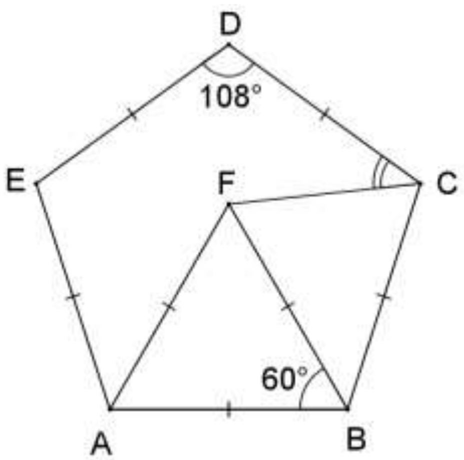
No triângulo isósceles AZX, temos $Z\hat{A}X = Z\hat{X}A = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

No triângulo isósceles AZY, temos $Z\hat{A}Y = Z\hat{Y}A = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ$.

Assim, $X\hat{A}Y = X\hat{A}Z + Z\hat{A}Y = 36^\circ + 24^\circ = 60^\circ$.

RESPOSTA: C

8.



$A\hat{B}C = B\hat{C}D = \frac{180(5-2)}{5} = 108°$

$A\hat{B}F = 60°$

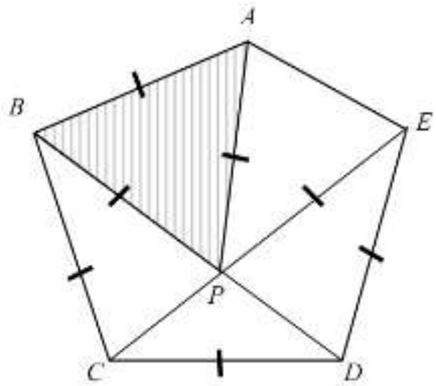
$F\hat{B}C = 108^\circ - 60^\circ = 48°$

$B\hat{C}F = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66°$

$F\hat{C}D = 108° - 66° = 42°$.

RESPOSTA: C

9.



Seja P a interseção de BD e CE, então $P\hat{B}C = P\hat{E}D = P\hat{C}D = P\hat{D}C = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

Logo, $B\hat{C}P = B\hat{P}C = 72^\circ \Rightarrow BP = BC = AB$ e $A\hat{B}P = 96^\circ - 36^\circ = 60^\circ$.

$\Rightarrow \Delta ABP$ é equilátero e $AP = PE$

$\Rightarrow A\hat{P}E = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ \;\; e \;\; A\hat{E}P = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$

$\Rightarrow \hat{E} = A\hat{E}D = 66^\circ + 36^\circ = 102^\circ$

REFERÊNCIA: Hong Kong Preliminary Selection Contest 2009

RESPOSTA: C

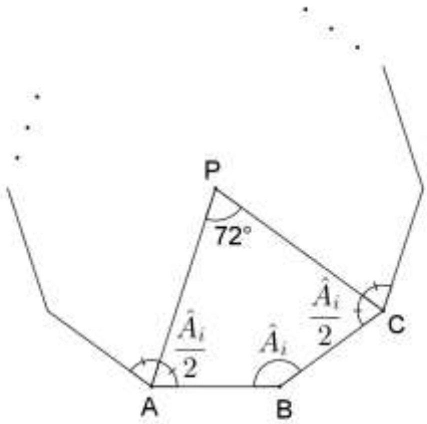
10. Sejam $m > n$ os números de lados dos dois polígonos, então

$180^\circ(m-2) - 180^\circ(n-2) = 360^\circ \Leftrightarrow m - n = 2 \Leftrightarrow m = n + 2$

$\frac{m(m-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 29 \Rightarrow (n+2)(n-1) - n(n-3) = 58 \Leftrightarrow n = 15 \; e \; m = 17 \Rightarrow m + n = 32$

RESPOSTA: C

11.



Seja P o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, e $\hat{A}_i$ e $\hat{A}_e$ as medidas dos ângulos interno e externo, respectivamente, do polígono regular de gênero n. A soma dos ângulos internos do quadrilátero $ABCP$ é 360°, então temos:

$$\frac{\hat{A}_i}{2}+\hat{A}_i+\frac{\hat{A}_i}{2}+72^\circ=360^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A}_i=288^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_i=144^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}_e=180^\circ-144^\circ=36^\circ=\frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n=10$$

Portanto, o número de lados do polígono regular é $n=10$.

RESPOSTA: B

12.

Sejam n e $(n+2)$ as quantidades de lados dos dois polígonos, então o total de diagonais de ambos é:

$$\frac{n(n-3)}{2}+\frac{(n+2)(n+2-3)}{2}=41 \Leftrightarrow n^2-3n+n^2+n-2=82 \Leftrightarrow n^2-n-42=0 \Leftrightarrow n=-6 \vee n=7$$

Como o gênero de um polígono deve ser um número natural maior ou igual a 3, então $n=7$ (heptágono regular) e $n+2=9$ (eneágono regular).

O polígono de menor ângulo central é o de maior número de lados, portanto é o eneágono regular cujo ângulo interno é $\hat{A}_i=\frac{180^\circ\cdot(9-2)}{9}=140^\circ$.

RESPOSTA: C

13. Se o gênero do polígono regular é par, o número de diagonais que não passam pelo centro é $D_{NC}=\frac{n(n-3)}{2}-\frac{n}{2}=\frac{n(n-4)}{2}$. Já se o polígono regular tem gênero ímpar, nenhuma diagonal passa pelo centro e o número de diagonais que não passam pelo centro é $D_{NC}=\frac{n(n-3)}{2}$.

Se o gênero do polígono é ímpar, temos

$D_{NC} = \frac{n(n-3)}{2} = 70 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 140 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{569}}{2} \notin \mathbb{N}$

Se o gênero do polígono é par, temos

$D_{NC} = \frac{n(n-4)}{2} = 70 \Leftrightarrow n^2 - 4n - 140 = 0 \Leftrightarrow n = -10 \ \vee \ n = 14$.

Como o gênero do polígono n deve ser um número inteiro maior ou igual a 3, então $n = 14$.

Portanto, o ângulo interno desse polígono é $A_i = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} = \frac{180^\circ \cdot (14-2)}{14} = \frac{1080^\circ}{7} = 154\frac{2}{7}^\circ$ que está compreendido entre 150° e 160°.

RESPOSTA: E

14.

$d = \frac{n(n-3)}{2} > 26n \overset{n>0}{\Rightarrow} n - 3 > 52 \Leftrightarrow n > 55$

Como n é formado por dois algarismos iguais, então $n \in \{66, 77, 88, 99\}$. Logo, há 4 polígonos.

RESPOSTA: A

15.

$D = \frac{n(n-3)}{2} = 20 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Leftrightarrow n = -5 \left(\text{não convém}\right) \ \vee \ n = 8$

$\hat{A}_i = \frac{180^\circ (n-2)}{n} = \frac{180^\circ \cdot (8-2)}{8} = 135^\circ$

RESPOSTA: E

16. Se quaisquer duas diagonais de um polígono regular, que passam pelo seu centro, formam entre si ângulo expresso em graus por número inteiro, então o ângulo central determinado pelo polígono deve ser expresso por um número inteiro.

O ângulo central determinado por um polígono regular de gênero par $n \geq 3$ é $\frac{360^\circ}{n}$. Para que esse ângulo seja expresso por um número inteiro, n deve ser um divisor natural e par de 360°. A quantidade de divisores naturais e pares de $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ é $d_{pares}(360) = (3) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 18$. Mas, 2 é um divisor par de 360 e não é um valor válido para n. Portanto, o número de polígonos que satisfazem as condições pedidas é $18 - 1 = 17$.

RESPOSTA: A

17. Cada diagonal de um polígono regular de gênero n é uma corda que determina um arco de $\frac{360º}{n}\cdot k$, $k\neq 1$, e quando esse arco fica maior que $180º$, a diagonal tem a mesma medida que a do arco replementar já computado. Logo, $k\in\left\{2,3,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$.

Assim, a quantidade de medidas distintas das diagonais de um polígono regular de gênero n é $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$.

No caso do enunciado, há 27 medidas distintas para as diagonais, então $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1=27\Leftrightarrow\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=28\Leftrightarrow n=56\vee n=57$.

Logo, esse polígono pode ter 56 ou 57 lados.

RESPOSTA: C

18.

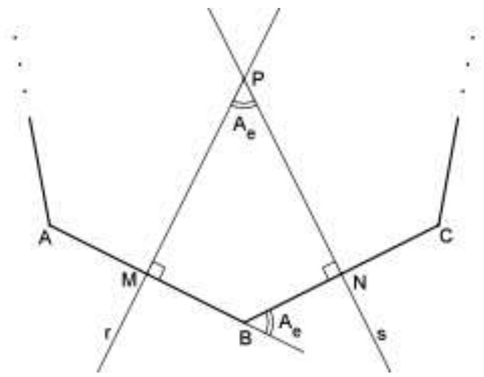
Como a extremidade final do último segmento coincide com a extremidade inicial do primeiro segmento, a soma dos arcos determinados por todos os segmentos deve ser um número inteiro de voltas.

Como há um total de n segmentos, a soma dos arcos é $157º30'\cdot n$. Assim, existe $k\in\mathbb{Z}_+^*$ tal que $157º30'\cdot n=360º\cdot k\Leftrightarrow 315º\cdot n=360º\cdot k\Leftrightarrow n=\frac{8}{7}\cdot k\Rightarrow k=7\wedge n=8$.

Logo, n é uma potência de 2.

RESPOSTA: D

19.



Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ lados adjacentes de um polígono regular, e r e s suas respectivas mediatrizes.

Como $r\perp\overline{AB}$ e $s\perp\overline{BC}$, então o quadrilátero $BMPN$ é inscritível, o que implica que o ângulo entre as mediatrizes dos lados adjacentes é igual ao ângulo externo do polígono, ou seja, $M\hat{P}N=\hat{A}_e=\frac{360^\circ}{n}$, onde n é o gênero do polígono.

No caso em análise o gênero do polígono é $n=13$, então o ângulo entre as mediatrizes dos lados adjacentes é igual a

$$\frac{360^\circ}{13}=27^\circ+\left(\frac{9}{13}\right)^\circ=27^\circ+\left(\frac{9\cdot 60}{13}\right)'=$$
$$=27^\circ+41'+\left(\frac{7}{13}\right)'=27^\circ+41'+\left(\frac{7\cdot 60}{13}\right)''=.$$
$$=27^\circ 41' 32\frac{4}{13}''$$

Portanto, o número inteiro de segundos é 32.

RESPOSTA: D

20.

$$d=\frac{n(n-3)}{2}=n^2-10n+8\Leftrightarrow n^2-3n=2n^2-20n+16\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^2-17n+16=0\Leftrightarrow n=1\ \vee\ n=16$$

Como $n=1$ não pode ser o número de lados de um polígono, então $n=16$.

O ângulo interno do polígono regular convexo de gênero $n=16$ é $x=A_i=\frac{180^\circ(16-2)}{16}=157^\circ 30'$.

Logo, conclui-se que $x>150^\circ$.

RESPOSTA: E

21. A premissa está correta, pois de cada vértice é possível traçar diagonais para todos os outros vértices, exceto para ele mesmo e para os dois vértices adjacentes (nesse caso a ligação é um lado), totalizando $(n-3)$ diagonais traçadas de cada vértice.

A primeira conclusão está errada, pois o produto $n\cdot(n-3)$ do número de vértices pela quantidade de diagonais traçadas de cada vértice é o dobro do número de diagonais, visto que conta cada diagonal duas vezes em cada um dos vértices de suas extremidades. Dessa forma, o total de diagonais do polígono é dado por $D=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A segunda conclusão também está errada, pois, ao serem traçadas as $(n-3)$ diagonais de cada vértice, o polígono fica dividido em $(n-2)$ triângulos e, consequentemente, a soma dos ângulos internos é $S=180^\circ\cdot(n-2)$.

Logo, o aluno acertou na premissa e errou nas duas

RESPOSTA: E

22. Se o número de diagonais de um polígono regular de n lado é múltiplo de n, então existe $k\in\mathbb{N}$ tal que: $D=\frac{n(n-3)}{2}=k\cdot n\Leftrightarrow n=2k+3$.

Logo, n assume todos os valores ímpares maiores ou iguais a 3.

I. VERDADEIRA

Como $n=2k+3$ é ímpar, o polígono de gênero n não possui diagonais passando pelo centro.

II. VERDADEIRA

$k=7 \Rightarrow n=2\cdot 7+3=17$

III. VERDADEIRA

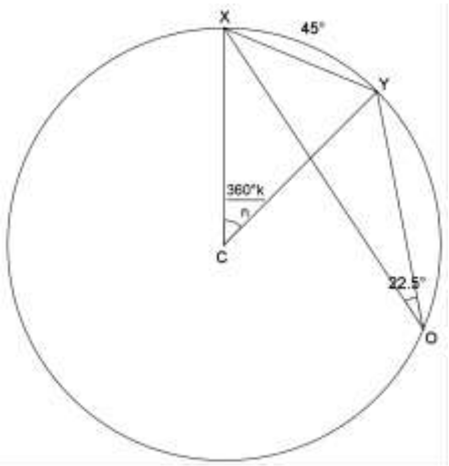
$k=12 \Rightarrow n=2\cdot 12+3=3^3$

IV. VERDADEIRA

$k=1 \Rightarrow n=2\cdot 1+3=5$ que é primo.

RESPOSTA: E

23.



O ângulo central determinado por um lado de um polígono regular de n lados mede $\frac{360^\circ}{n}$.

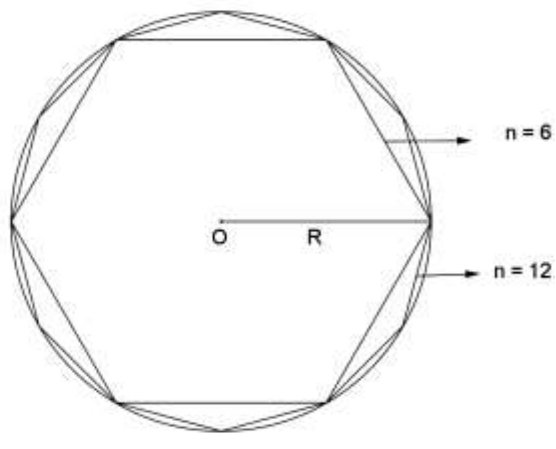
O ângulo $X\hat{O}Y$ é um ângulo inscrito que determina um ou mais lados do polígono. Assim, temos:

$\frac{360^\circ}{n}\cdot k = 2\cdot 22^\circ 30' \Leftrightarrow 360^\circ k = 45^\circ n \Leftrightarrow n = 8k$, onde $k \in \mathbb{Z}^*$.

Logo, n é múltiplo de 8 e as afirmativas (I) e (III) são verdadeiras.

RESPOSTA: B

24.



O perímetro do polígono de $2n$ lados inscrito em um círculo de raio R aproxima-se do perímetro da circunferência $2\pi R$, quando n cresce, sem, porém, ultrapassar esse valor.

No caso em análise $R=10$, p tende a 20π e $p<20\pi$. O número π é um número irracional dado por $3{,}141592\ldots$, então $20\pi \approx 62{,}83$. Logo, p aproxima-se sem ultrapassar o número 63.

RESPOSTA: D

25. Sejam n o número de lados e D o número de diagonais do polígono regular P, então

$$D=\frac{n(n-3)}{2}=170 \Leftrightarrow n^2-3n-340=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n=-17\,(\text{não convém}) \vee n=20$$

Como $n=20$ é um número par, há $\frac{n}{2}=10$ diagonais passando pelo centro de K.

O ângulo central e o ângulo externo de P são $\frac{360^\circ}{n}=\frac{360^\circ}{20}=18^\circ$.

A diagonal determinada por 4 lados consecutivos determina um ângulo central de $4\cdot 18^\circ=72^\circ=\frac{360^\circ}{5}$, logo é igual ao lado do pentágono regular inscrito no círculo K.

RESPOSTA: D

26.

$$S_i=180º\cdot(n-2)\geq 83º+137º+142º+121º\cdot(n-3)\Leftrightarrow 59n\geq 360\Leftrightarrow n\geq 7$$

Logo, o menor valor de n é 7.

RESPOSTA: B

27.

$$N-n=D-d \Leftrightarrow N-n=\frac{N(N-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}\Leftrightarrow 2(N-n)=N^2-3N-n^2+3n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N^2-n^2=5(N-n)\Leftrightarrow (N+n)(N-n)=5(N-n)$$

$$N\neq n \Rightarrow N-n\neq 0 \Rightarrow N+n=5$$

Mas N e n são gêneros de polígonos, então $N\geq 3$ e $n\geq 3$, o que implica $N+n\geq 6$.

Logo, não há nenhuma solução correta (A).

RESPOSTA: A

28.

$$S_n=180^\circ\cdot(n-2)=2160^\circ \Leftrightarrow n=14$$

O número de diagonais que passam pelo centro do polígono regular, que é o centro da circunferência circunscrita ao polígono, é $\frac{14}{2}=7$. Logo, o número de diagonais que não passam pelo centro é $\frac{14\cdot(14-3)}{2}-7=70$.

Alternativamente, poderíamos ter utilizado diretamente a expressão $\frac{n\cdot(n-4)}{2}$ para a quantidade de diagonais que não passam pelo centro de um polígono com número para de lados.

RESPOSTA: C

29.

(I) VERDADEIRA

$D=\frac{n(n-3)}{2}=n\overset{n\neq 0}{\Leftrightarrow}n-3=2\Leftrightarrow n=5$

(II) FALSA

$D=\frac{n(n-3)}{2}=4n\overset{n\neq 0}{\Leftrightarrow}n-3=8\Leftrightarrow n=11$

(III) VERDADEIRA

$\frac{D}{n}=k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\frac{\frac{n(n-3)}{2}}{n}=k\Leftrightarrow n=2k+3, k\in\mathbb{N}$. Portanto, n é um número ímpar.

RESPOSTA: B

30.

Seja α a medida do ângulo interno não somado, então: $\alpha+2004^\circ=180^\circ\cdot(n-2)\Leftrightarrow\alpha=180^\circ n-2364^\circ$.

Como α é um ângulo interno de um polígono convexo, temos:

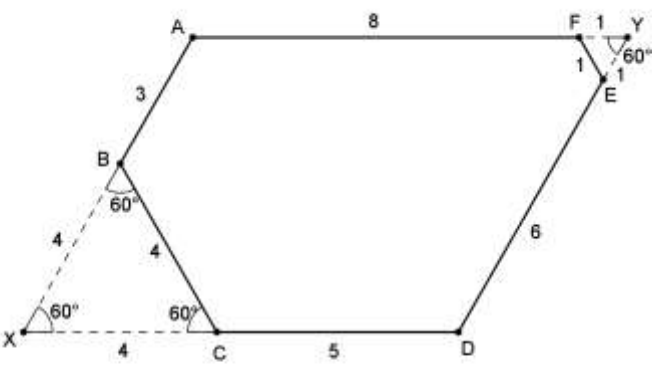
$0^\circ<\alpha<180^\circ\Leftrightarrow 0^\circ<180^\circ n-2364^\circ<180^\circ\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2364^\circ<180^\circ n<2544^\circ\Leftrightarrow\frac{2364^\circ}{180^\circ}<n<\frac{2544^\circ}{180^\circ}$

$\Leftrightarrow 13\frac{2}{15}<n<14\frac{2}{15}\Rightarrow n=14$

RESPOSTA: 14

31.



Como o hexágono equiângulo possui todos os ângulos internos iguais a 120°, prolongando os lados, conforme a figura acima, obtemos os triângulos equiláteros BCX e EFY e o paralelogramo AXDY. Para encontrar DE e AF basta usar a igualdade dos lados opostos.

$\Rightarrow DE+AF=6+8=14$

RESPOSTA: D

32. Como se trata de um polígono, temos $n \geq 3$.

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + \ldots + n\alpha = 180^\circ (n-2) \Leftrightarrow \frac{n \cdot (\alpha + n\alpha)}{2} = 180^\circ (n-2) \Leftrightarrow \alpha = \frac{360^\circ (n-2)}{n(n+1)}$$

Como o polígono é convexo, temos $n\alpha = \dfrac{360^\circ (n-2)}{n+1} < 180^\circ \Leftrightarrow n < 5$.

$n = 3 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$n = 4 \Rightarrow \alpha = 36^\circ$

Note que são ambas as soluções válidas.

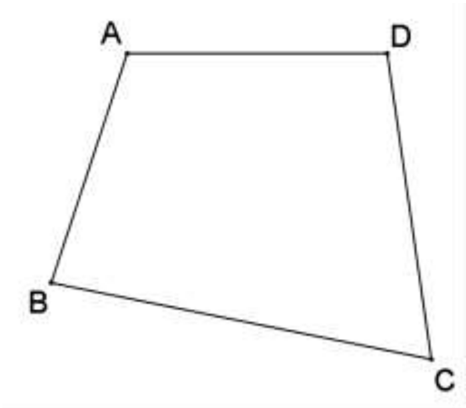
REFERÊNCIA: EstonianMathCompetition 2002

RESPOSTA: C

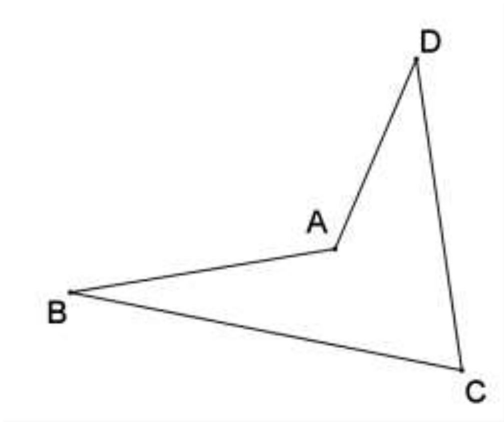
QUADRILÁTEROS

1. QUADRILÁTEROS

Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.



Quadrilátero convexo



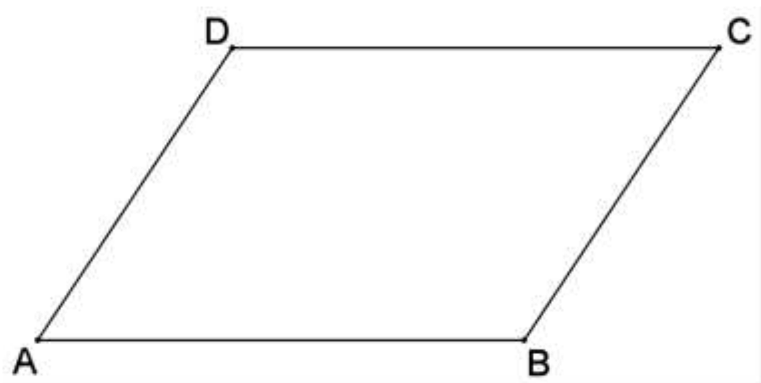
Quadrilátero côncavo

Os quadriláteros planos não entrecruzados são chamados **trapezoides**.

Um quadrilátero possui duas diagonais, a soma de seus ângulos internos é 360° e a soma dos seus ângulos externos é 360°.

2. PARALELOGRAMO

Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui lados opostos paralelos.



$\#ABCD$ é um paralelogramo

$$\Updownarrow$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \wedge \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

Em um paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Demonstração:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \hat{D} = 180^\circ - \hat{A}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - (180^\circ - \hat{A}) = \hat{A}$.

Todo quadrilátero convexo que possui ângulos opostos congruentes é um paralelogramo.

Demonstração:

$\hat{A} \equiv \hat{C} \wedge \hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$

$ABCD$ é um quadrilátero $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \overline{AD} \| \overline{BC} \wedge \overline{AB} \| \overline{CD}$

$\Rightarrow ABCD$ é um paralelogramo.

Em um paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

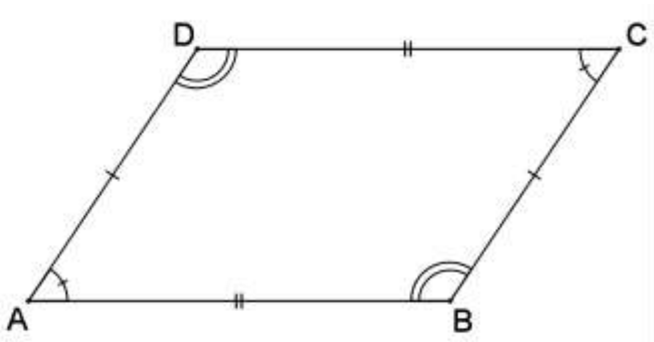
Demonstração: $\Delta ABD \equiv \Delta CDB \,(\text{A.L.A.}) \Rightarrow \overline{AD} \equiv \overline{BC} \wedge \overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Todo quadrilátero convexo que possui lados opostos congruentes é um paralelogramo.

Demonstração:

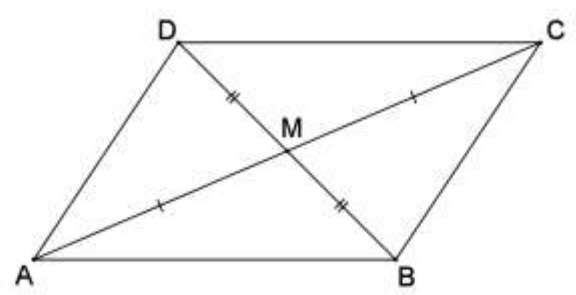
$\Delta ABD \equiv \Delta CDB \,(\text{L.L.L.}) \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{C};\ A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B \wedge A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{C} \wedge \hat{B} \equiv \hat{D}$

Como os ângulos opostos de $ABCD$ são congruentes, então $ABCD$ é um paralelogramo.



$$\overline{AB} \| \overline{CD} \wedge \overline{AD} \| \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{C} \\ \hat{B} \equiv \hat{D} \\ \overline{AB} \equiv \overline{CD} \\ \overline{AD} \equiv \overline{BC} \end{cases}$$

As diagonais de um paralelogramo intersectam-se ao meio.



Demonstração: $\Delta MAB \equiv \Delta MCD\,(A.L.A.) \Rightarrow \overline{AM} \equiv \overline{MC} \wedge \overline{BM} \equiv \overline{MD}$

Todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam-se ao meio é um paralelogramo.

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta AMB \equiv \Delta CMD\,(L.A.L.) \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD} \\ \Delta AMD \equiv \Delta CMD\,(L.A.L.) \Rightarrow \overline{AD} \equiv \overline{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \#ABCD \text{ é um paralelogramo}$$

Todo quadrilátero convexo que possui dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

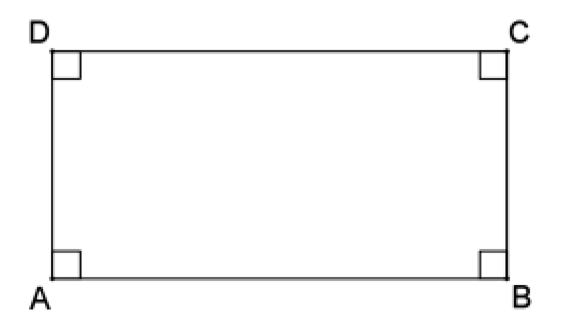
Demonstração:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow B\hat{A}C = D\hat{C}A$

$$\left.\begin{array}{c} \overline{AB} = \overline{CD} \\ B\hat{A}C = D\hat{C}A \\ \overline{AC} \text{ comum} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta CDA\,(L.A.L.) \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} \Rightarrow \#ABCD \text{ é um paralelogramo}$$

3. RETÂNGULO

Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes (quadrilátero equiângulo).



 # ABCD é um retângulo

$$\Updownarrow$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

Os retângulos são paralelogramos, pois possuem ângulos adjacentes congruentes. Assim, os retângulos possuem todas as propriedades dos paralelogramos.

As diagonais de um retângulo são congruentes.

Demonstração:

$\Delta ABD \equiv \Delta BAC\,(L.A.L.) \Rightarrow \overline{BD} \equiv \overline{AC}$.

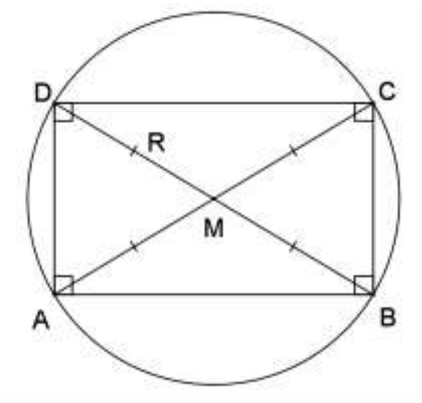
Todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é um retângulo.

Demonstração:

$\overline{AB}=\overline{BA}; \overline{AD}=\overline{BC}; \overline{BD}=\overline{AC} \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta BAC\,(L.L.L.) \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}$

$\#ABCD$ é um paralelogramo $\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}=90^\circ=\hat{C}=\hat{D} \Rightarrow \#ABCD$ é um retângulo

Todo retângulo é circunscritível e o ponto de concurso das diagonais é o seu circuncentro.



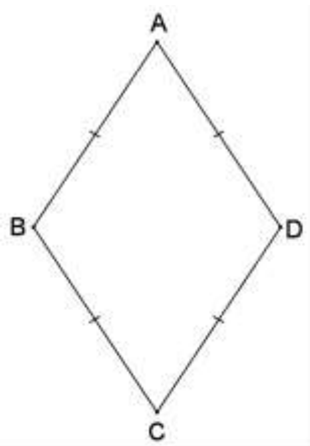
Demonstração:

Basta observar que as diagonais são iguais e cortam-se ao meio.

Os lados opostos do retângulo são cordas paralelas da circunferência circunscrita e suas diagonais são diâmetros dessa circunferência.

4. LOSANGO

Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes (quadrilátero equilátero).



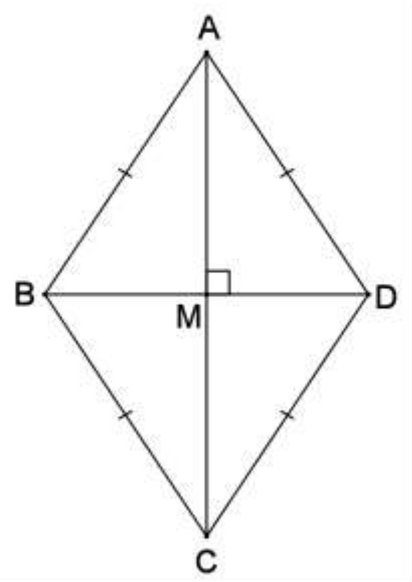
$\#ABCD$ é um losango

$$\Updownarrow$$

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

Os losangos são paralelogramos, pois possuem lados opostos congruentes. Assim, os losangos possuem todas as propriedades dos paralelogramos.

Todo losango possui diagonais perpendiculares.



Demonstração:

$\overline{AB}=\overline{AD};\overline{BM}=\overline{DM};\overline{MA}$ comum $\Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ADM\,(\text{L.L.L.}) \Rightarrow A\hat{M}B = A\hat{M}D = 90^\circ$

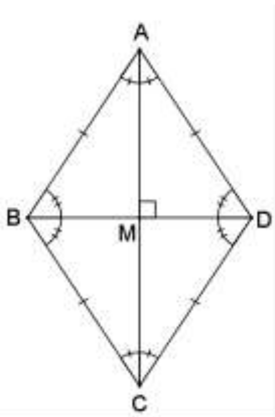
Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Demonstração:

$\#ABCD$ é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{AB}\equiv\overline{CD};\overline{AD}\equiv\overline{BC};\overline{BM}\equiv\overline{MD};\overline{AM}\equiv\overline{MC}$

$\Delta AMB \equiv \Delta AMD\,(\text{L.A.L.}) \Rightarrow \overline{AB}\equiv\overline{AD}\equiv\overline{CD}\equiv\overline{BC} \Rightarrow \#ABCD$ é um losango

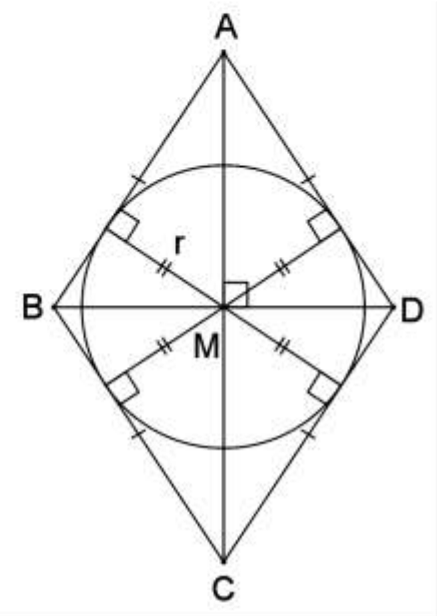
As diagonais são bissetrizes dos ângulos internos do losango.



Demonstração:

Basta observar que $\Delta AMB \equiv \Delta AMD \equiv \Delta CMD \equiv \Delta CMB$ (L.L.L.)

Todo losango é inscritível e o ponto de concurso das diagonais é o seu incentro.

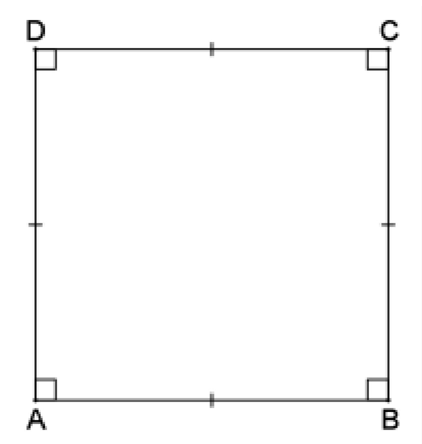


Demonstração:

Basta observar que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são bissetrizes dos ângulos do losango e que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo. Assim, o ponto M, interseção das duas diagonais, equidista dos quatro lados do losango.

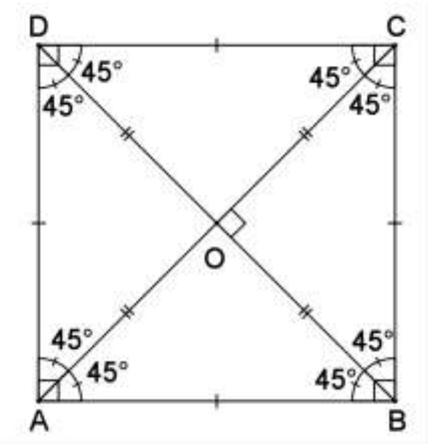
5. QUADRADO

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui quatro lados congruentes e quatro ângulos congruentes, ou seja, o quadrado é o quadrilátero regular (equilátero e equiângulo).

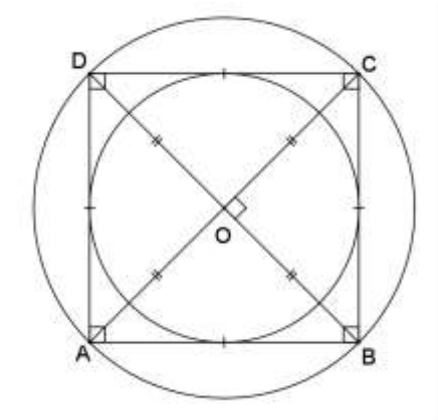


$$\#\,\textbf{ABCD é um quadrado} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA} \\ \text{e} \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \end{cases}$$

O quadrado é equilátero e equiângulo, portanto, possui todas as propriedades dos losangos, dos retângulos e também dos paralelogramos.



As diagonais de um quadrado cortam-se ao meio perpendicularmente, são iguais e são bissetrizes dos ângulos internos.



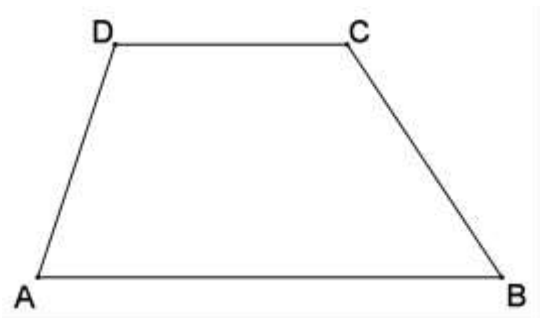
Todo quadrado é inscritível e circunscritível, e o ponto de concurso das diagonais é o seu centro.

OBSERVAÇÃO

O diâmetro do círculo inscrito no quadrado é igual ao lado do quadrado e o diâmetro do círculo circunscrito é igual à sua diagonal.

6. TRAPÉZIOS

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos.



#ABCD é um trapézio

$$\Updownarrow$$

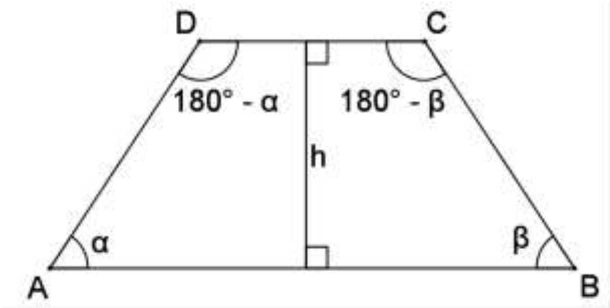
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \vee \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

Os lados paralelos são chamados bases do trapézio.

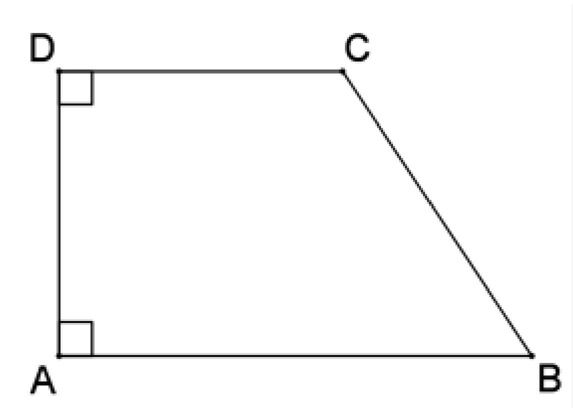
Os ângulos adjacentes a um mesmo lado não paralelo de um trapézio são suplementares (ângulos colaterais internos).

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



A distância entre os lados paralelos é chamada altura do trapézio (h).

Se um trapézio possui dois ângulos retos adjacentes a um dos lados não paralelos, ele é chamado **trapézio retângulo**.

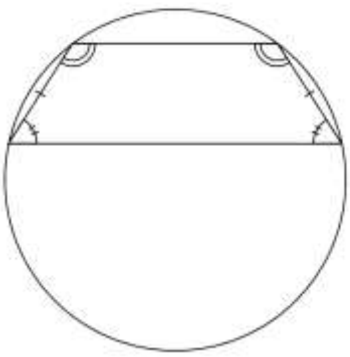


Se os lados não paralelos de um trapézio não são congruentes, ele é chamado **trapézio escaleno**.

6.1. TRAPÉZIO ISÓSCELES

Se os lados não paralelos de um trapézio são congruentes, ele é chamado **trapézio isósceles**.

Os ângulos adjacentes às bases de um trapézio isósceles são congruentes.

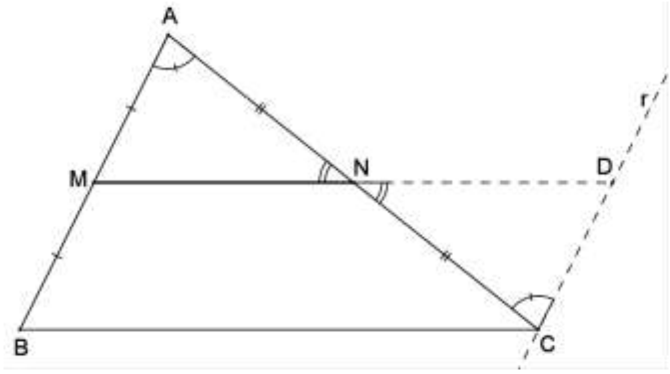


As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Todo trapézio isósceles é inscritível em uma circunferência. Os lados paralelos são cordas paralelas dessa circunferência e os lados não paralelos cordas que determinam arcos de mesma medida.

6.2. BASE MÉDIA DO TRIÂNGULO

Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e é igual à metade do terceiro lado. Esse segmento é denominado base média do triângulo, relativa ao terceiro lado.



Demonstração:

Seja M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

Seja a reta $r \parallel \overline{AB}$ por C, e D a interseção de r e com o prolongamento de $\overline{MN}$.

$$\left.\begin{array}{r} M\hat{A}N \equiv D\hat{C}N \\ \overline{AN} \equiv \overline{CN} \\ M\hat{N}A \equiv D\hat{N}C\ (\text{o.p.v.}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMN \equiv \Delta CDN \Rightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AM} \wedge \overline{MN} \equiv \overline{DN}$$

Como $\overline{CD} \equiv \overline{AM} \equiv \overline{MB}$ e $\overline{CD} \parallel \overline{MB}$, então o quadrilátero $BMDC$ é um paralelogramo, o que implica $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{MD} \equiv \overline{BC}$. Portanto, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

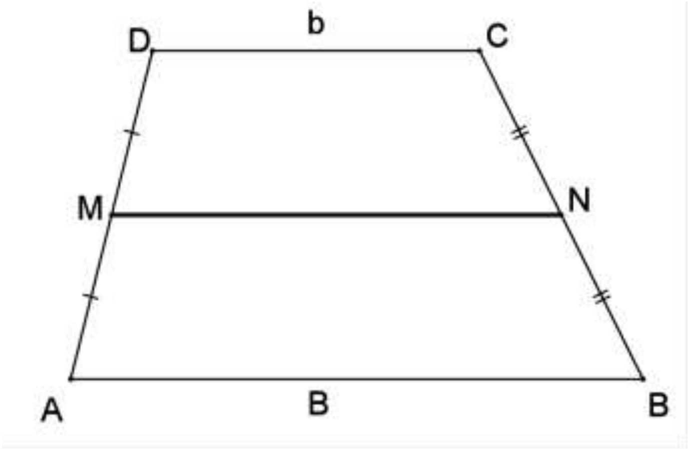
Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então esta extremidade é o ponto médio do terceiro lado.

Demonstração:

Seja $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Supondo que N_1 é o ponto médio de $\overline{AC}$, temos $\overline{MN_1} \parallel \overline{BC}$. Como a reta paralela a $\overline{BC}$ por M é única, então $\overline{MN} \equiv \overline{MN_1}$. Mas, $N, N_1 \in \overline{AC}$, então $N \equiv N_1$ o que implica $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$.

6.3. BASE MÉDIA DO TRAPÉZIO

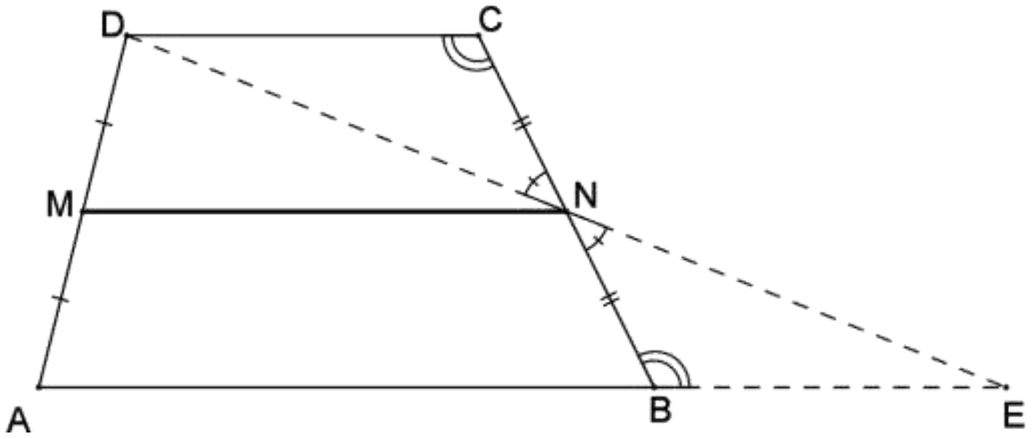
A base média de um trapézio é o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não paralelos.



$$\overline{AM} \equiv \overline{MD} \text{ e } \overline{BN} \equiv \overline{NC}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{MB} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{MN} = \frac{B+b}{2}$$

A base média de um trapézio é paralela às bases e igual à semissoma das bases.

Demonstração:



$$\Delta DCN \equiv \Delta EBN (\text{A.L.A.}) \Rightarrow \overline{BE} = \overline{CD} \text{ e } \overline{EN} = \overline{DN}$$

No ΔADE, M e N são pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{ED}$, respectivamente. Portanto, $\overline{MN}$ é base média do ΔADE, o que implica $\overline{MN} \parallel \overline{AE} \Leftrightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{MN} = \frac{\overline{AE}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$.

Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos lados não paralelos e a outra extremidade sobre o outro lado não paralelo, então esta extremidade é o ponto médio deste lado.

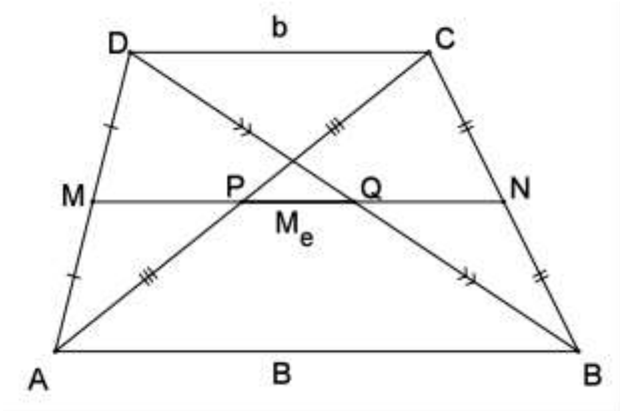
Demonstração:

Sejam $\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AM} \equiv \overline{MD}$ e $N \in \overline{BC}$. Seja ainda N_1 o ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overline{MN_1} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Como a reta paralela a $\overline{AB}$ por M é única e $N, N_1 \in \overline{BC}$, então $N \equiv N_1$, o que implica $\overline{BN} \equiv \overline{NC}$.

6.4. MEDIANA DE EULER

A mediana de Euler de um trapézio é o segmento de reta que une os pontos médios das diagonais do trapézio.

A mediana de Euler está sobre a base média do trapézio e é igual à semidiferença das bases.



$$\overline{AP} \equiv \overline{PC} \text{ e } \overline{CQ} \equiv \overline{QD}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{PQ} \subset \overline{MN},\ \overline{PQ} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } M_e = \overline{PQ} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{B-b}{2}$$

Demonstração:

Basta observar que $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$ são bases médias dos triângulos ΔACD e ΔBCD, respectivamente, então $\overline{PQ} \subset \overline{MN} \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Além disso, $\overline{PQ} = \overline{MN} - \overline{MP} - \overline{NQ} = \frac{B+b}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{B-b}{2}$.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (EsSA 2011) A medida do raio de uma circunferência inscrita em um trapézio isósceles de bases 16 e 36 é um número

a) primo

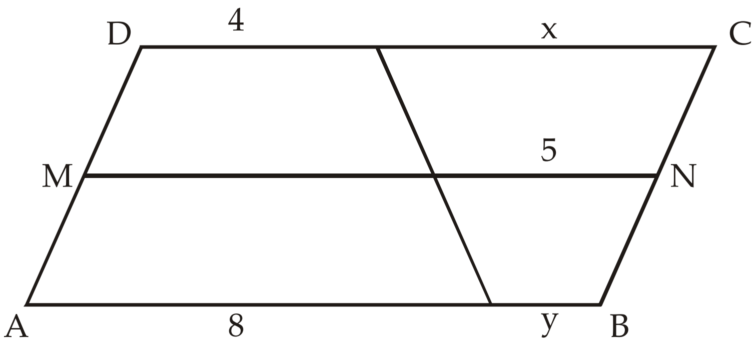
b) par

c) irracional

d) múltiplo de 5

e) múltiplo de 9

2. Na figura abaixo, $ABCD$ é um paralelogramo e M e N são médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. O valor de $x \cdot y$ é



a) 10

b) 21

c) 24

d) 25

e) 30

3. Calcule o perímetro em centímetros de um trapézio isósceles cujas bases medem 10 cm e 8 cm, sabendo-se que as diagonais são as bissetrizes dos ângulos da base maior.

a) 36

b) 38

c) 34

d) 27

e) 30

4. Considere as afirmações a seguir:

I. A figura formada pelos pontos médios dos lados de um trapézio isósceles é um losango.

II. A figura formada pelas bissetrizes internas de um paralelogramo é um retângulo.

III. A figura formada pelas bissetrizes internas dos ângulos de um retângulo é um quadrado.

IV. A figura formada pelos pontos médios de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo.

A quantidade de afirmativas verdadeiras é:

a) zero

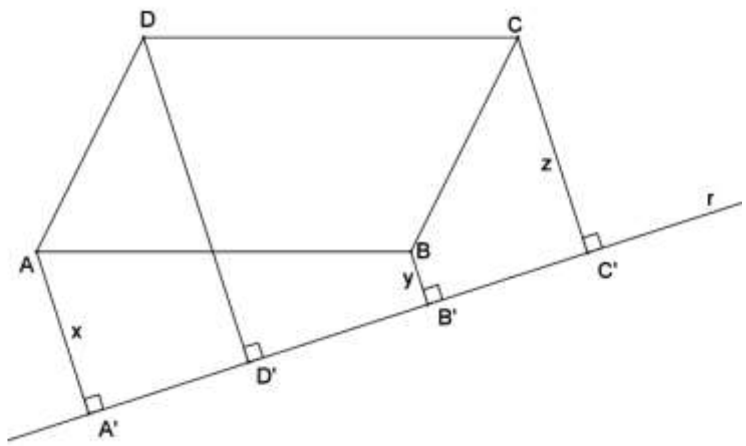
b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

5. Uma reta (r) pertencente ao plano de um paralelogramo $ABCD$ é exterior a ele. Se A, B e C distam x, y e z, respectivamente de r, a distância do vértice D à reta r é igual a:



a) $\frac{x+y+z}{2}$

b) $\frac{x+z-2}{2}$

c) $x+z-y$

d) $\frac{x+z-y}{2}$

e) $y+z-x$

6. (ITA 1989) Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:

a) 22 cm

b) 5,5 cm

c) 8,5 cm

d) 11 cm

e) 13 cm

7. (ITA 1989) Dadas as afirmações:

I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.

II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então este paralelogramo é um losango.

Podemos garantir que:

a) Todas são verdadeiras

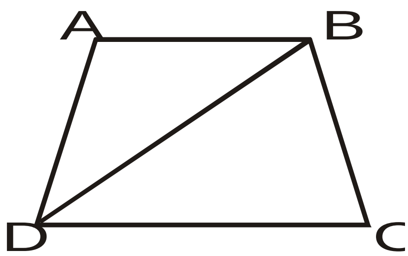
b) Apenas I e II são verdadeiras

c) Apenas II e III são verdadeiras

d) Apenas II é verdadeira

e) Apenas III é verdadeira

8. (EEAr 2005) O trapézio ABCD é isósceles, e as medidas dos ângulos $D\hat{B}A$ e $D\hat{C}B$ são 30º e 45º, respectivamente. Se BC = 12 cm, então a medida de $\overline{BD}$, em cm, é



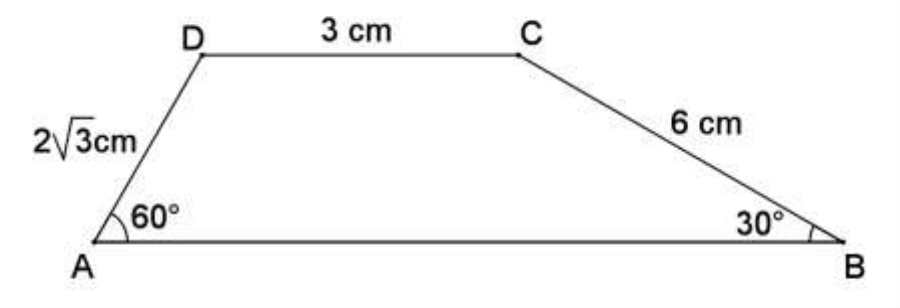
a) $6\sqrt{2}$.

b) $8\sqrt{2}$.

c) $10\sqrt{2}$.

d) $12\sqrt{2}$.

9. (EFOMM 1998) O valor de $\overline{AB}$ no trapézio da figura, em centímetros, é:



a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2}$

c) $8+2\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{3}$

e) $3+4\sqrt{3}$

10. (EFOMM 2010) Analise as afirmativas abaixo.

I. Seja K o conjunto dos quadriláteros planos, seus subconjuntos são:

$P=\{x \in K \mid x \text{ possui lados opostos paralelos}\}$;

$L=\{x \in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes}\}$;

$R=\{x \in K \mid x \text{ possui 4 ângulos retos}\}$; e

$Q=\{x \in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes e 2 ângulos com medidas iguais}\}$.

Logo, $L \cap R = L \cap Q$.

II. Seja o conjunto $A=\{1,2,3,4\}$, nota-se que A possui somente 4 subconjuntos.

III. Observando as seguintes relações entre conjuntos: $\{a,b,c,d\} \cup Z = \{a,b,c,d,e\}$, $\{c,d\} \cup Z = \{a,c,d,e\}$ e $\{b,c,d\} \cap Z = \{c\}$; pode-se concluir que $Z=\{a,c,e\}$.

Em relação às afirmativas acima, assinale a opção correta:

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

11. (EN 1991) Quando as diagonais de um paralelogramo são também bissetrizes dos seus ângulos internos?

a) Só se dois ângulos internos e consecutivos forem complementares.

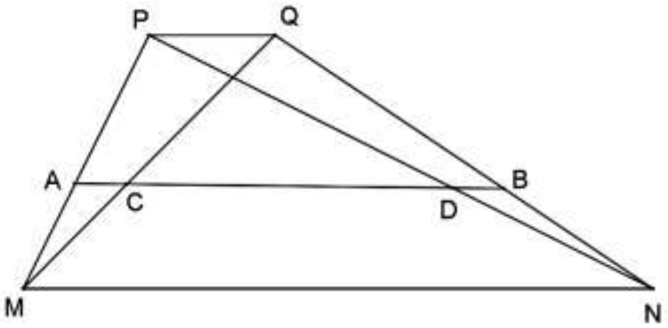
b) Só se o paralelogramo for um quadrado.

c) Só se o paralelogramo for um retângulo.

d) Só se o paralelogramo for um losango.

e) Só se a soma dos ângulos internos for 360^o.

12. (EN 2004) Considere o trapézio $MNPQ$ de bases $\overline{MN}=m$ e $\overline{PQ}=4$, com $m>4$ e altura igual a 6, conforme figura abaixo. Sendo A e B os pontos médios dos lados $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$, respectivamente, e sabendo que $\overline{AB}=10$, então a área do trapézio $MCDN$ vale:



a) 28

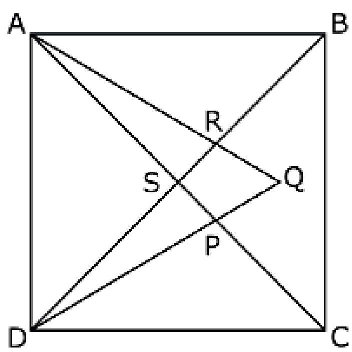
b) 33

c) 37

d) 42

e) 45

13. (EPCAr 2010) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e ADQ é um triângulo equilátero.



Os pontos D, S, R e B estão alinhados assim como A, S, P e C. Se $\overline{RB}\equiv\overline{QB}\equiv\overline{PC}\equiv\overline{QC}$, então é INCORRETO afirmar que

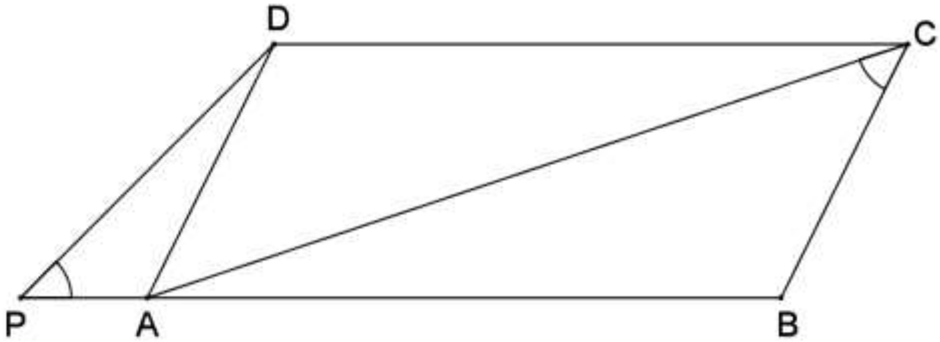
a) nos triângulos CBQ e SAR têm-se $S\hat{A}R \neq C\hat{B}Q$.

b) nos triângulos BDQ, ARB e AQD têm-se $B\hat{Q}D + A\hat{R}B = 4(A\hat{Q}D)$.

c) a soma dos ângulos $D\hat{P}C$ e $A\hat{S}D$ dos triângulos DPC e ASD é maior do que o ângulo $B\hat{Q}C$ do triângulo BQC.

d) nos triângulos SAR e PCQ tem-se $S\hat{R}A - C\hat{P}Q = 0$.

14. (EPCAr 2013) Seja $ABCD$ um paralelogramo cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 5 e $\sqrt{10}$. Prolongando o lado $\overline{AB}$ até o ponto P, obtém-se o triângulo APD, cujo ângulo $A\hat{P}D$ é congruente ao ângulo $A\hat{C}B$, conforme a figura.



Então, a medida $\overline{AP}$ é

a) 0,2

b) 2

c) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

15. (CN 1985) Unindo-se os pontos médios dos quatro lados de um quadrilátero L, obtém-se um losango. Pode-se afirmar que L

a) é um retângulo.

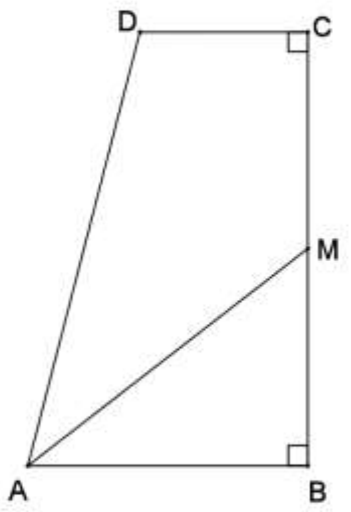
b) tem diagonais perpendiculares.

c) é um trapézio isósceles.

d) é um losango.

e) tem diagonais congruentes.

16. (CN 1986) O trapézio ABCD da figura é retângulo de bases AB de medida 10 e CD de medida 6. A bissetriz do ângulo Â intercepta BC no seu ponto médio M. A altura do trapézio é igual a:



a) $2\sqrt{15}$

b) $8\sqrt{15}$

c) $6\sqrt{15}$

d) $4\sqrt{15}$

e) $5\sqrt{15}$

17. (CN 1986) As bases de um trapézio medem 3 cm e 9 cm. Os segmentos determinados pelas diagonais do trapézio sobre a base média são proporcionais aos números:

a) $1, 1, 1$

b) $1, 2, 1$

c) $1, 3, 1$

d) $1, 4, 1$

e) $2, 3, 4$

18. (CN 1989) Considere as 4 afirmações abaixo. A seguir, coloque (V) ou (F) nos parênteses, conforme sejam verdadeiras ou falsas, e assinale a alternativa correta.

(1) $(\quad)$ Em qualquer trapézio circunscrito a uma circunferência, a medida da base média é a quarta parte do seu perímetro.

(2) $(\quad)$ As diagonais de um trapézio podem se intersectar no seu ponto médio.

(3) ( ) Todo quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares é um losango.

(4) ( ) Existe quadrilátero plano cujos segmentos das diagonais não se intersectam.

a) Apenas 2 é verdadeira.

b) Apenas 3 é verdadeira.

c) Apenas 3 e 4 são verdadeiras.

d) 2, 3 e 4 são verdadeiras.

e) 1 e 4 são verdadeiras.

19. (CN 1995) Um retângulo é obtido unindo-se os pontos médios de um trapézio retângulo $ABCD$, de bases $AB = 32$ e $CD = 8$. A altura BC é igual a:

a) 8

b) 10

c) 12

d) 16

e) 20

20. (CN 1997) Um quadrilátero de bases paralelas B e b, é dividido em dois outros semelhantes pela sua base média, caso seja, necessariamente, um:

a) paralelogramo.

b) trapézio retângulo.

c) trapézio isósceles.

d) trapézio qualquer.

e) losango.

21. (CN 2001) A, B, C e D são vértices consecutivos de um quadrado e PAB é um triângulo equilátero, sendo P interno ao quadrado $ABCD$. Qual é a medida do ângulo PCB?

a) 30°

b) 45°

c) 60°

d) 75°

e) 90°

22. (CN 2002) Considere um quadrado $ABCD$ e dois triângulos equiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}P$, $B\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ é igual a:

a) $270°$

b) $300°$

c) $330°$

d) $360°$

e) $390°$

23. (CN 2007) Em um quadrado $ABCD$ de lado 10, toma-se internamente sobre o lado CD o ponto P, que dista 4 do vértice C, e internamente sobre o lado BC, o ponto Q, de modo que os triângulos ADP e PCQ sejam semelhantes, com o segmento CQ menor possível. Nessas condições, o ângulo BAQ será igual ao ângulo:

a) APB.

b) PAQ.

c) PAC.

d) BPQ.

e) AQP.

24. (CN 2009) Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo $ABCD$. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno do vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?

a) 120°

b) 135°

c) 150°

d) 165°

e) 175°

25. (CN 2012) Dado um quadrilátero convexo em que as diagonais são perpendiculares, analise as afirmações abaixo.

I. Um quadrilátero assim formado sempre será um quadrado.

II. Um quadrilátero assim formado sempre será um losango.

III. Pelo menos uma das diagonais de um quadrilátero assim formado divide esse quadrilátero em dois triângulos isósceles.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
c) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são falsas.

26. Em um trapézio de base maior AB e base menor DC tem-se que AC é perpendicular a CB, $AC = CB$ e $BA = BD$. A medida do ângulo $C\hat{B}D$ é igual a:

a) 15^{o}

b) 20^{o}

c) 30^{o}

d) 45^{o}

e) 60^{o}

27. Num trapézio $ABCD$, de bases AD e BC, as bissetrizes externas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ intersectam-se no ponto $\hat{K}$ e as bissetrizes externas dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ intersectam-se no ponto E. Se $KE = 12$, o perímetro do trapézio é igual a:

a) 12

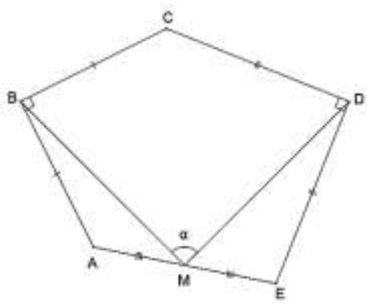
b) 24

c) 36

d) 48

e) 60

28. Na figura abaixo, calcule o ângulo α, sabendo que ABCDE é um pentágono onde $\hat{B} = \hat{D} = 90^{\circ}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DE}$ e que M é o ponto médio do lado $\overline{AE}$.



a) 45°

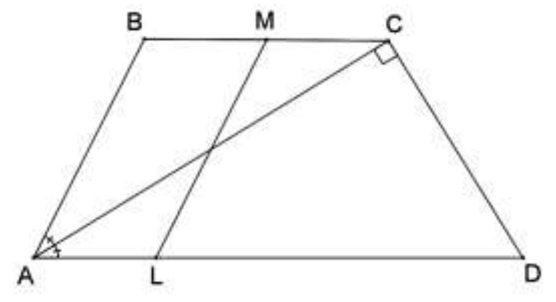
b) 60°

c) 75°

d) 90°

e) 120°

29. Na figura abaixo, sabe-se que $BM = MC$, $B\hat{A}C = C\hat{A}D$ e $AD = 4 \cdot AL$. Sabendo que $AD + 2 \cdot AB = 16\text{ cm}$ e que o ângulo $A\hat{C}D$ é reto, podemos afirmar que o comprimento de LM e:



a) 10 cm

b) 8 cm

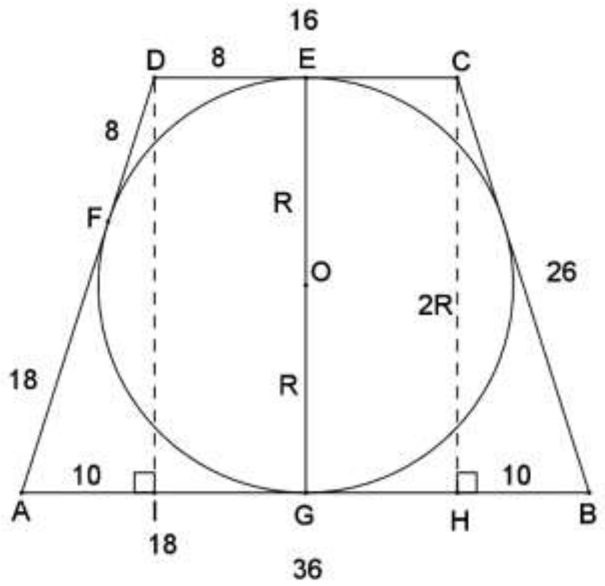
c) 6 cm

d) 4 cm

e) 2 cm

GABARITO

1.



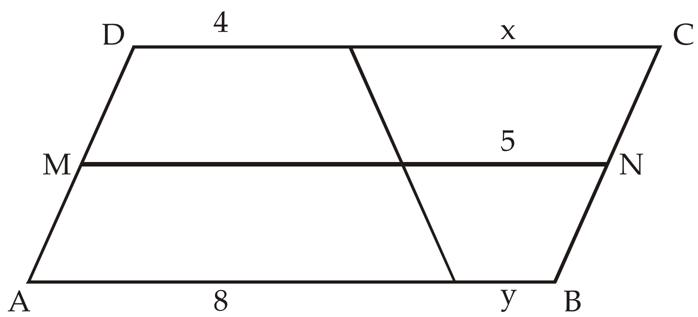
Aplicando o teorema de Pitágoras no BCH, temos:

$(2R)^2 + 10^2 = 26^2 \Leftrightarrow 4R^2 = 576 \Leftrightarrow R^2 = 144 \Leftrightarrow R = 12$.

Logo, a medida do raio da circunferência é um número par.

RESPOSTA: B

2.



Como o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, então $\overline{AB} \,||\, \overline{CD}$.

Como M e N são médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, então $\overline{MF}$ e $\overline{FN}$ são bases médias dos trapézios $ADGE$ e $BCGE$, respectivamente.

Assim, temos:

$$\overline{MF} = \frac{\overline{AE} + \overline{DG}}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{MN} = \overline{MF} + \overline{FN} = 6 + 5 = 11$$

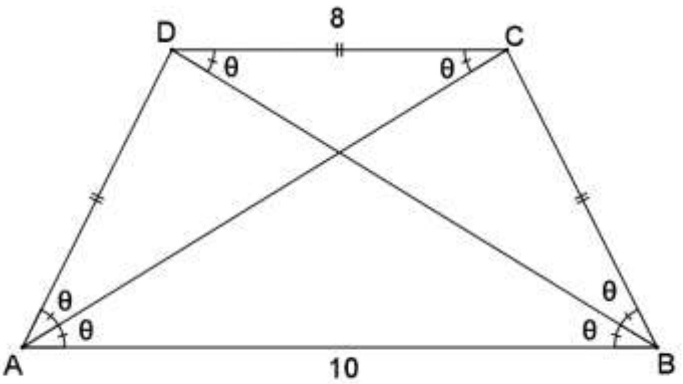
$\overline{AB} = 8 + y = 11 \Leftrightarrow y = 3$

$\overline{CD} = 4 + x = 11 \Leftrightarrow x = 7$

Logo, $x \cdot y = 3 \cdot 7 = 21$

RESPOSTA: b

3.



Seja o trapézio isósceles $ABCD$, então $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $B\hat{A}D = A\hat{B}C = 2\theta$.

Como $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são bissetrizes dos ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$, respectivamente, então $B\hat{A}C = C\hat{A}D = A\hat{B}D = D\hat{B}C = \theta$.

Como $ABCD$ é um trapézio, então $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, o que implica $C\hat{D}B = D\hat{B}A = \theta$ e $D\hat{C}A = C\hat{A}B = \theta$.

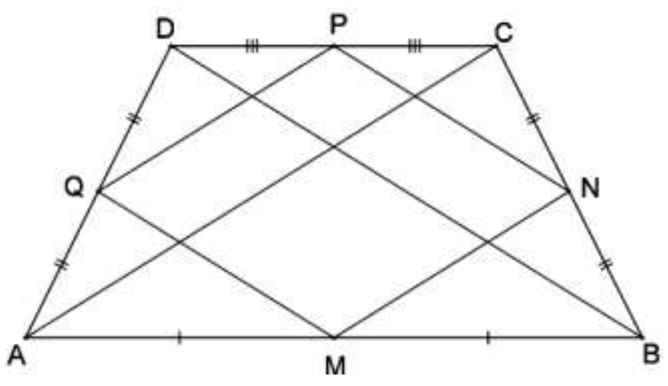
Portanto, os triângulos ADC e BCD são isósceles, donde $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC} = 8$.

Assim, o perímetro do trapézio é $2p(ABCD) = 10 + 8 + 8 + 8 = 34 \text{ cm}$.

RESPOSTA: C

4.

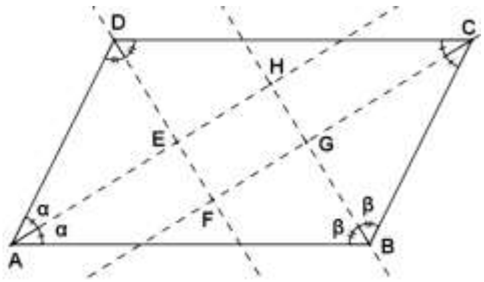
I) VERDADEIRA



$\overline{QM} = \overline{PN} = \dfrac{\overline{BD}}{2}$; $\overline{PQ} = \overline{MN} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$

No trapézio isósceles, $\overline{AC} = \overline{BD}$, então $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QM}$ e, portanto, o quadrilátero $MNPQ$ é um losango.

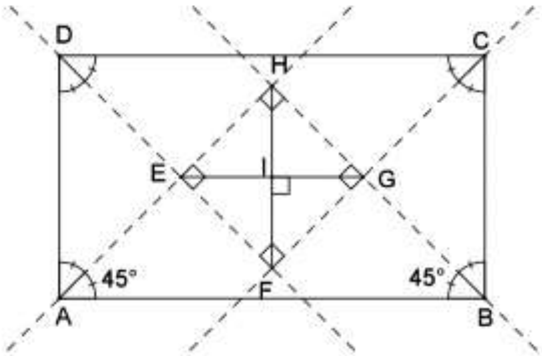
II) VERDADEIRA



$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{H}B = 90^\circ$$

Analogamente para os outros ângulos, conclui-se que $\hat{E} = \hat{F} = \hat{G} = \hat{H} = 90^\circ$ e que o $\#EFGH$ é um retângulo.

III) VERDADEIRA



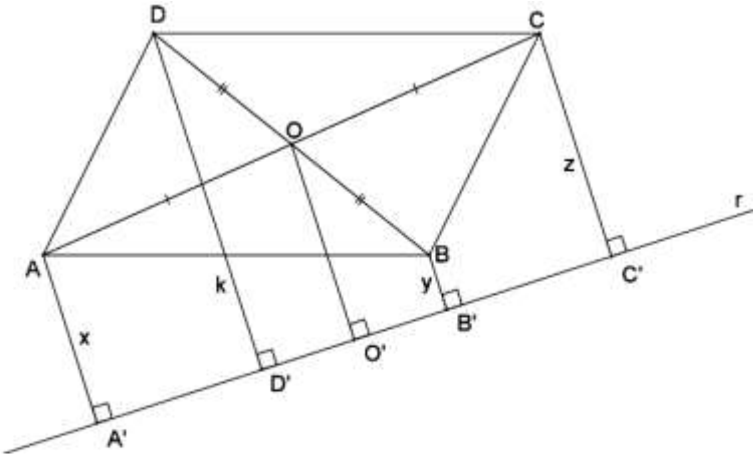
Basta observar o desenvolvimento do item anterior e que $EG \perp HF$.

IV) VERDADEIRA

Basta observar o desenvolvimento do item I. Como para um quadrilátero qualquer não teremos diagonais iguais, o quadrilátero resultante terá lados opostos iguais, portanto um paralelogramo.

RESPOSTA: E

5.



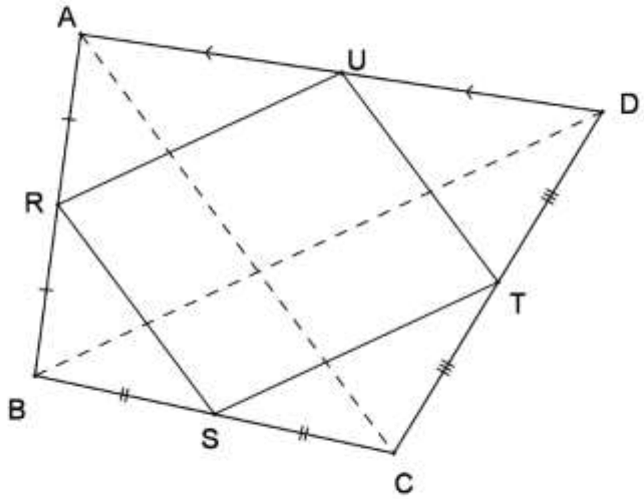
O segmento $\overline{OO'}$ é base média dos trapézios $AA'C'C$ e $BB'D'D$. Assim, temos:

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{AA'} + \overline{CC'}}{2} = \frac{\overline{BB'} + \overline{DD'}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + z = y + k \Leftrightarrow k = x + z - y$$

RESPOSTA: C

6.



Os segmentos RS, ST, TU e UR são bases médias dos triângulos ABC, BCD, CDA e DAB, respectivamente. Assim, temos:

$$RS \parallel AC \parallel TU \text{ e } RS = TU = \frac{AC}{2}$$

$$ST \parallel BD \parallel UR \text{ e } ST = UR = \frac{BD}{2}.$$

Assim, o perímetro do quadrilátero RSTU é

$$(2p)_{RSTU} = RS + ST + TU + UR = \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} = AC + BD = 5 + 6 = 11 \text{ cm}.$$

RESPOSTA: D

7.

I. FALSA

Isso só é verdade para quadriláteros inscritíveis.

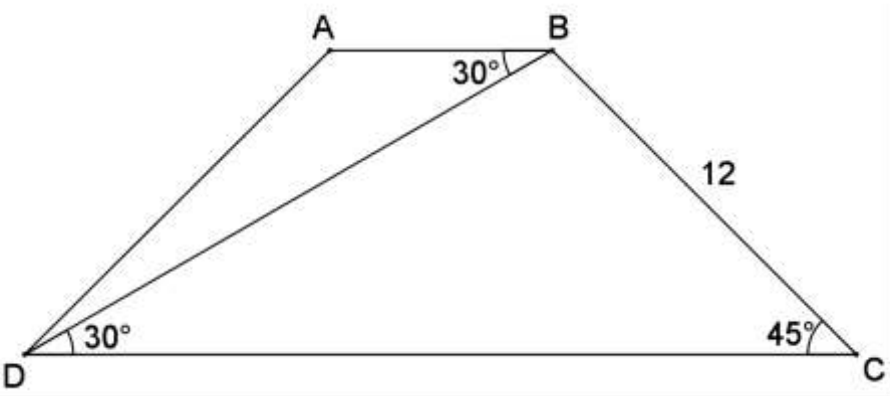
II. VERDADEIRO

III. VERDADEIRO

As diagonais de um paralelogramo sempre se cruzam em seu ponto médio, mas se elas são perpendiculares entre si os quatro triângulos pelas diagonais são congruentes e o quadrilátero será equilátero, ou seja, um losango.

RESPOSTA: C

8.

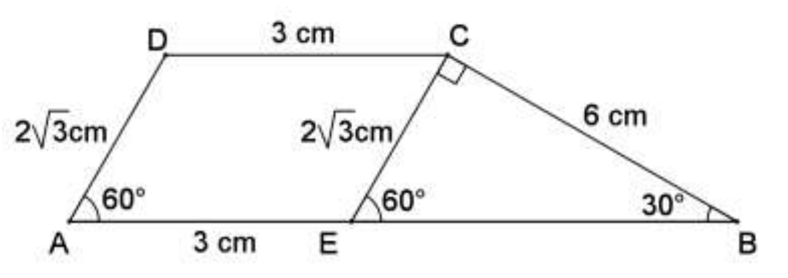


$AB \parallel CD \Rightarrow B\hat{D}C = D\hat{B}A = 30°$

Lei dos senos no $\triangle BCD$: $\dfrac{BD}{\text{sen}45°} = \dfrac{12}{\text{sen}30°} \Leftrightarrow BD = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{12}{1/2} = 12\sqrt{2}$ cm

RESPOSTA: D

9.



$CE \parallel AD \Rightarrow \# ADCE$ é um paralelogramo $\Rightarrow CE = 2\sqrt{3} \wedge B\hat{E}C = 60^\circ$

$\triangle BCE: B\hat{C}E = 90^\circ \Rightarrow \text{sen}30^\circ = \dfrac{CE}{BE} = \dfrac{2\sqrt{3}}{BE} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow BE = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = AE + EB = \left(3 + 4\sqrt{3}\right)$ cm

RESPOSTA: E

10.

I – FALSA

$L \cap R \neq L \cap Q$, basta notar que losangos pertencem a $L \cap Q$, mas não pertencem a $L \cap R$, no qual só há quadrados.

II – FALSA

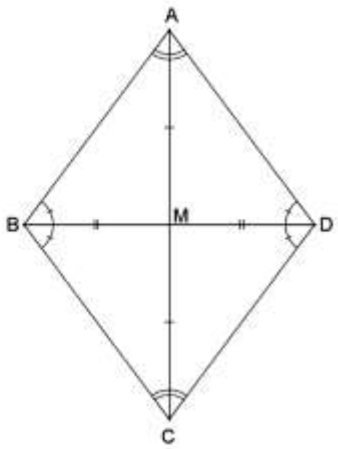
A quantidade de subconjuntos de A é $2^4 = 16$.

III – VERDADEIRA

$$\{a,b,c,d\} \cup Z = \{a,b,c,d,e\} \Rightarrow Z \subset \{a,b,c,d,e\} \ \wedge \ e \in Z$$
$$\{c,d\} \cup Z = \{a,c,d,e\} \Rightarrow Z \subset \{a,c,d,e\} \ \wedge \ a \in Z \ \wedge \ b \notin Z$$
$$\{b,c,d\} \cap Z = \{c\} \Rightarrow c \in Z \ \wedge \ b \notin Z \ \wedge \ d \notin Z$$
$$\Rightarrow Z = \{a,c,e\}$$

RESPOSTA: D

11.



Seja o paralelogramo ABCD cujas diagonais são bissetrizes dos ângulos internos.

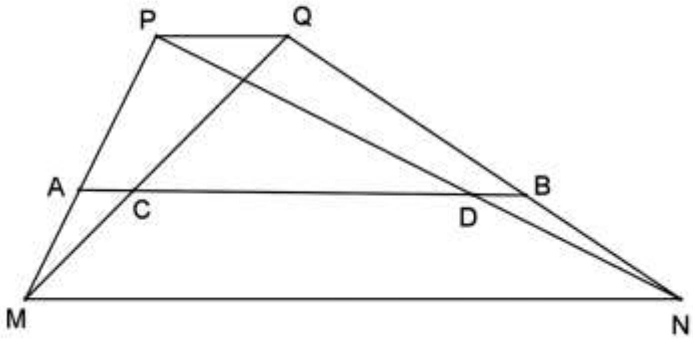
Sabemos que em todo paralelogramo as diagonais cortam-se ao meio. Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{l} AM \text{ comum} \\ M\hat{A}B = M\hat{A}D \\ M\hat{B}A = M\hat{D}A \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ADM \left(L.A.A_o.\right) \Rightarrow AB = AD$$

Portanto, $AB = CD = AD = BC$ e o quadrilátero é um losango.

RESPOSTA: D

12.



O segmento $\overline{AB}=10$ é base média do trapézio $MNPQ$, então $\overline{AB}=\frac{\overline{MN}+\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow 2\cdot 10=m+4 \Leftrightarrow m=16$.

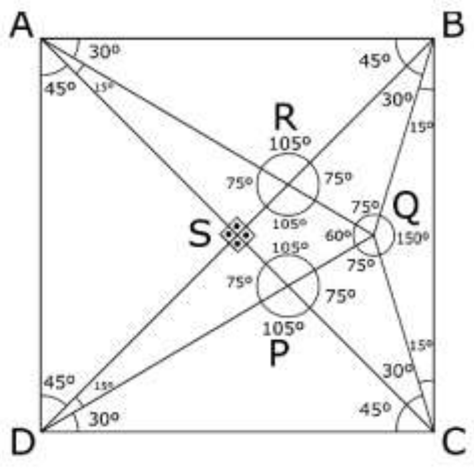
O segmento $\overline{CD}$ é a mediana de Euler do trapézio $MNPQ$, então $\overline{CD}=\frac{\overline{MN}-\overline{PQ}}{2}=\frac{16-4}{2}=6$.

A altura do trapézio $MCDN$ é metade da altura do trapézio $MNPQ$, ou seja, $h=\frac{6}{2}=3$.

Portanto a área do trapézio $MCDN$ é dada por $S_{MCDN}=\frac{\overline{MN}+\overline{CD}}{2}\cdot h=\frac{16+6}{2}\cdot 3=33\,\text{u.a.}$.

RESPOSTA: B

13.



a) INCORRETA

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{A}D=45^\circ \\ Q\hat{A}D=60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow S\hat{A}R=Q\hat{A}D-C\hat{A}D=60^\circ-45^\circ=15^\circ$$

$$Q\hat{A}B=90^\circ-60^\circ=30^\circ \Rightarrow Q\hat{B}A=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ \Rightarrow C\hat{B}Q=15^\circ$$

$$\Rightarrow S\hat{A}R=C\hat{B}Q$$

b) CORRETA

$B\hat{Q}A = Q\hat{B}A = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ \Rightarrow B\hat{Q}D = B\hat{Q}A + A\hat{Q}D = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ$

$A\hat{R}B = 180^\circ - Q\hat{A}B - A\hat{B}D = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

$A\hat{Q}D = 60^\circ$

$B\hat{Q}D + A\hat{R}B = 135^\circ + 105^\circ = 240^\circ = 4\left(A\hat{Q}D\right)$

c) CORRETA

$D\hat{P}C = A\hat{R}B = 105^\circ$

$A\hat{S}D = 90^\circ$ (ângulo entre as diagonais do quadrado)

$B\hat{Q}C = 180^\circ - B\hat{C}Q - C\hat{B}Q = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ$

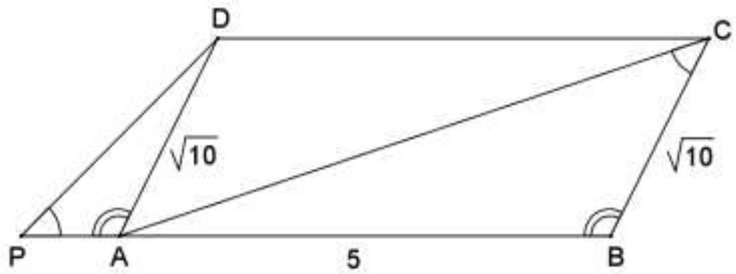
$D\hat{P}C + A\hat{S}D = 105^\circ + 90^\circ = 195^\circ > 150^\circ = B\hat{Q}C$

d) CORRETA

$C\hat{P}Q = B\hat{R}Q \overset{(\text{o.p.v.})}{=} S\hat{R}A$

RESPOSTA: A

14.



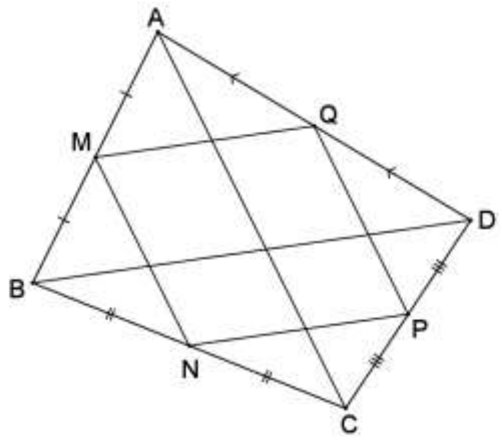
$\#ABCD$ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{AD} \,||\, \overline{BC} \;\wedge\; \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{10}$.

$\overline{AD} \,||\, \overline{BC} \Rightarrow P\hat{A}D = A\hat{B}C$

$A\hat{P}D = A\hat{C}B \;\wedge\; P\hat{A}D = A\hat{B}C \Rightarrow \Delta APD \sim \Delta BCA\,(\text{A.A.}) \Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \overline{AP} = 2\text{ u.c.}$

RESPOSTA: B

15. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer e M, N, P e Q os pontos médios de seus lados.



Os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{MQ}$ são bases médias dos triângulos ABC, BCD, ACD e ABD, respectivamente. Dessa forma, temos:

$$\overline{MQ} \,||\, \overline{BD} \,||\, \overline{NP} \text{ e } \overline{MQ} = \overline{NP} = \frac{\overline{BD}}{2}$$

$$\overline{MN} \,||\, \overline{AC} \,||\, \overline{PQ} \text{ e } \overline{MN} = \overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

Note que para qualquer quadrilátero $ABCD$, o quadrilátero $MNPQ$ possui lados opostos paralelos e iguais e, portanto, é um paralelogramo.

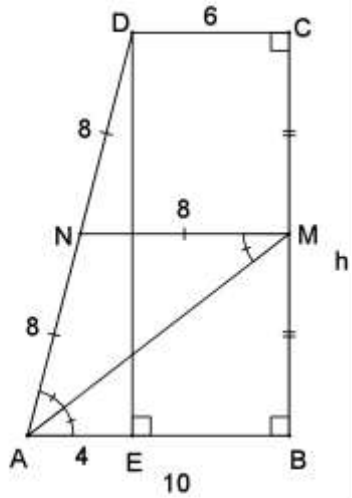
No caso do enunciado, o quadrilátero $MNPQ$ é um losango, então todos os lados são iguais, ou seja,

$$\overline{MQ} = \overline{NP} = \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{MN} = \overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AC}.$$

Assim, isso ocorre quando o quadrilátero $ABCD$ tem diagonais congruentes.

RESPOSTA: E

16.



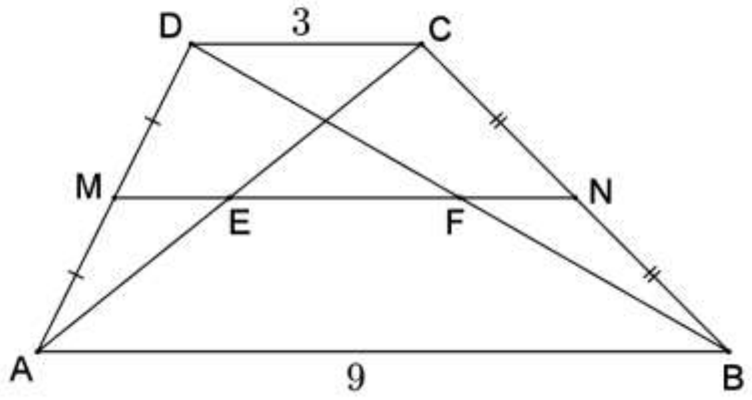
Seja N ponto médio de AD e E a projeção do ponto D sobre AB.

$$B\hat{A}M = M\hat{A}N = A\hat{M}N \Rightarrow AN = ND = AM = \frac{AB+CD}{2} = 8$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔADE: $h^2 + 4^2 = 16^2 \Leftrightarrow h^2 = 240 \Leftrightarrow h = 4\sqrt{15}$

RESPOSTA: D

17.



Seja o trapézio $ABCD$ da figura de bases $\overline{AB}=9$ e $\overline{CD}=3$. Sejam M e N os pontos médios dos lados não paralelos, então $\overline{MN}$ é a base média do trapézio o que implica $\overline{MN} \| \overline{AB} \| \overline{CD}$ e $\overline{MN}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}=\frac{9+3}{2}=6$.

Note que, como M é ponto médio de $\overline{AD}$ e $\overline{ME} \| \overline{DC}$, então $\overline{ME}$ é base média do ΔACD e $\overline{ME}=\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{3}{2}$.

Da mesma forma, como N é ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{NF} \| \overline{DC}$, então $\overline{NF}$ é base média do ΔBCD e $\overline{NF}=\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{3}{2}$.

Assim, temos $\overline{EF}=\overline{MN}-\overline{ME}-\overline{NF}=6-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=3$.

Os segmentos determinados pelas diagonais sobre a base média são $(\overline{ME},\overline{EF},\overline{FN})=\left(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot(1,2,1)$, ou seja, são proporcionais aos números 1, 2, 1.

RESPOSTA: B

18.

(1) - (V) Em qualquer trapézio circunscrito a uma circunferência, a medida da base média é a quarta parte do seu perímetro.

Sejam B e b, ℓ_1 e ℓ_2 as bases e os lados não paralelos de um trapézio circunscrito a um circunferência, então, pelo teorema de Pitot, $B+b=\ell_1+\ell_2$. O perímetro do trapézio é igual a $2p=B+b+\ell_1+\ell_2=2(B+b)$.

Assim, a base média é dada por $B_m=\frac{B+b}{2}=\frac{2(B+b)}{4}=\frac{2p}{4}$.

(2) - (F) As diagonais de um trapézio podem se intersectar no seu ponto médio.

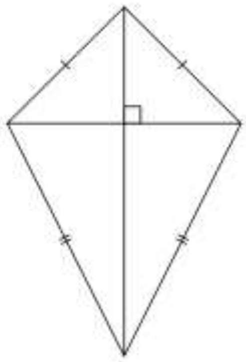
Existe uma controvérsia entre os autores quanto à definição de trapézio. Enquanto alguns os definem como quadriláteros que possuem exatamente um par de lados paralelos; outros os definem como quadriláteros que possuem pelo menos um par de lados paralelos, ou seja, nesse caso, paralelogramos, que possuem dois pares de lados paralelos, seriam considerados trapézios particulares.

Nesse exercício, vamos adotar a primeira definição, pois caso contrário não haveria alternativa correta.

Se um quadrilátero possui diagonais que cortam-se em seu ponto médio, ele é um paralelogramo e, portanto, não é um trapézio.

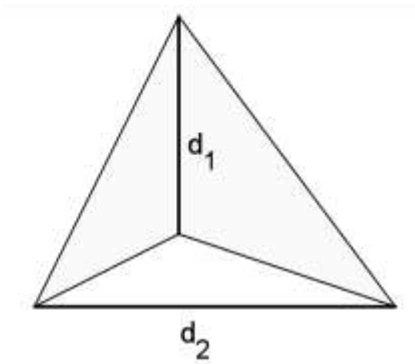
(3) - (F) Todo quadrilátero que tem as diagonais perpendiculares é um losango.

A figura a seguir é um contra exemplo para essa afirmativa.



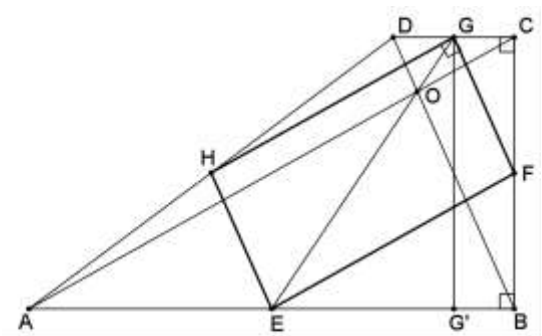
(4) - (V) Existe quadrilátero plano cujos segmentos das diagonais não se intersectam.

Sim, se considerarmos quadriláteros planos, mas não convexos. A figura a seguir, onde o quadrilátero está sombreado, é um exemplo dessa afirmativa.



RESPOSTA: E

19.



Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados do trapézio retângulo ABCD da figura.

$$\left.\begin{array}{l} AC \,||\, GH \,||\, EF \ (\text{bases médias}) \\ BD \,||\, EH \,||\, FG \,(\text{bases médias}) \\ EF \perp FG \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp AC$$

$\Delta COD \sim \Delta AOB \Rightarrow$ as medianas EO e OG estão alinhadas.

A mediana relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da hipotenusa.

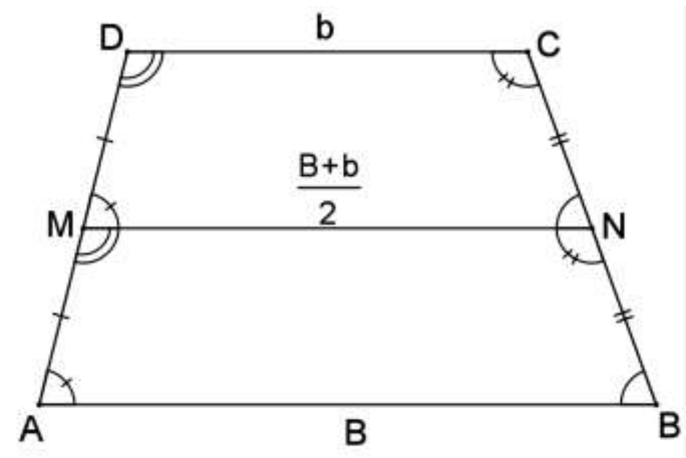
$$\Rightarrow\ OG = \frac{CD}{2} = 4 \text{ e } OE = \frac{AB}{2} = 16 \ \Rightarrow GE = OG + OE = 4 + 16 = 20$$

Projetando G sobre AB, obtemos G' que forma o triângulo retângulo $GG'E$, temos $GG' = BC = h$ e $EG' = EB - G'B = EG - GC = 16 - 4 = 12$.

Teorema de Pitágoras no $\Delta GG'E$: $h^2 + 12^2 = 20^2 \Leftrightarrow h^2 = 256 \Leftrightarrow h = 16$.

RESPOSTA: D

20.



Se $\#ABNM \sim \#MNCD$, então seus lados correspondentes são proporcionais.

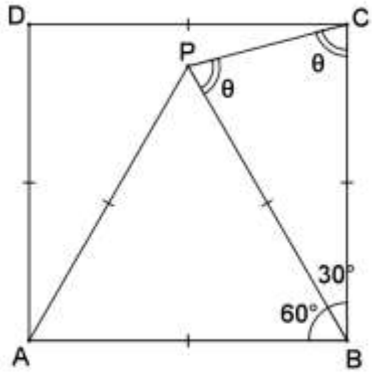
Mas, $\frac{AM}{DM} = 1$, então a razão de semelhança é 1, o que implica $\#ABNM \equiv \#MNCD$.

Portanto, $b = \frac{B+b}{2} \wedge B = \frac{B+b}{2} \Leftrightarrow B = b$.

Um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e iguais é um paralelogramo.

RESPOSTA: A

21.



O quadrilátero $ABCD$ é um quadrado e o triângulo PAB é equilátero, então $BC = CD = DA = AB = AP = BP$.

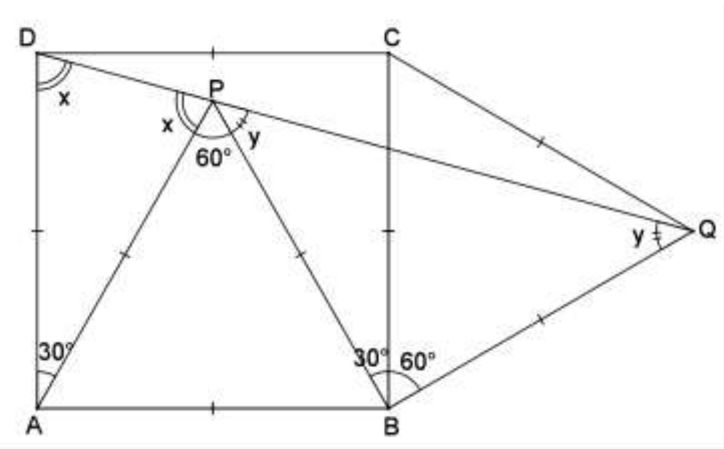
Como $BP = BC$, o triângulo BCP é isósceles de vértice B e, então $B\hat{C}P = B\hat{P}C = \theta$.

Tendo em vista que os ângulos internos do quadrado medem 90° e os do triângulo equilátero 60°, então $C\hat{B}P = A\hat{B}C - A\hat{B}P = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Assim, no ΔBCP, temos $2\theta + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \theta = 75^\circ$, ou seja, $P\hat{C}B = 75^\circ$.

RESPOSTA: D

22.



$D\hat{A}P = D\hat{A}B - P\hat{A}B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

ΔADP é isósceles $\Rightarrow x + x + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 75^\circ$

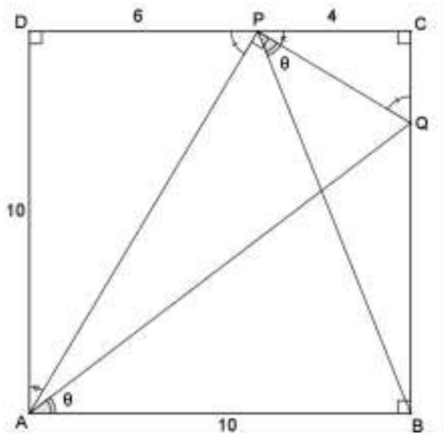
$P\hat{B}Q = P\hat{B}C + C\hat{B}Q = (A\hat{B}C - A\hat{B}P) + C\hat{B}Q = (90^\circ - 60^\circ) + 60^\circ = 90^\circ$

ΔBPQ é isósceles $\Rightarrow y + y + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow y = 45^\circ$

$\Rightarrow A\hat{D}P + B\hat{Q}P + D\hat{P}Q = x + y + (x + 60^\circ + y) = 2(x + y) + 60^\circ = 2 \cdot (75^\circ + 45^\circ) + 60^\circ = 300^\circ$

RESPOSTA: B

23. A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado e as conclusões obtidas.



Dado que os triângulos retângulos ΔADP e ΔPCQ são semelhantes, então seus catetos são proporcionais.

Como o segmento CQ deve ser o menor possível e os catetos do ΔADP são $AD = 10$ e $DP = 6$, então CQ deve ser proporcional ao menor cateto DP.

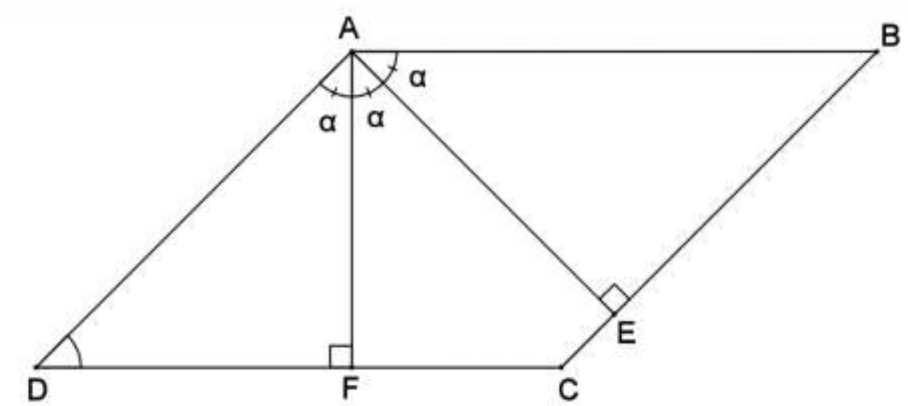
Dessa forma, os ângulos opostos a DP e CQ devem ser iguais, ou seja, $D\hat{A}P = C\hat{P}Q$ e, os ângulos opostos a AD e CP também serão iguais, ou seja, $A\hat{P}D = P\hat{Q}C$.

$D\hat{A}P + A\hat{P}D = 90^\circ \Rightarrow C\hat{P}Q + A\hat{P}D = 90^\circ \Rightarrow A\hat{P}Q = 180^\circ - \left(C\hat{P}Q + A\hat{P}D\right) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$A\hat{P}Q + A\hat{B}Q = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \# APQB$ é inscritível $\Rightarrow B\hat{A}Q = B\hat{P}Q$

RESPOSTA: D

24.



Como o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, então $\hat{D} = 180° - \hat{A} = 180° - 3\alpha$.

No triângulo retângulo AFD, temos $\hat{D} = 90° - \alpha$.

Portanto, $180° - 3\alpha = 90° - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45°$.

Logo, o maior ângulo interno do paralelogramo é $3\alpha = 3 \cdot 45° = 135°$.

RESPOSTA: B

25.

I – FALSA

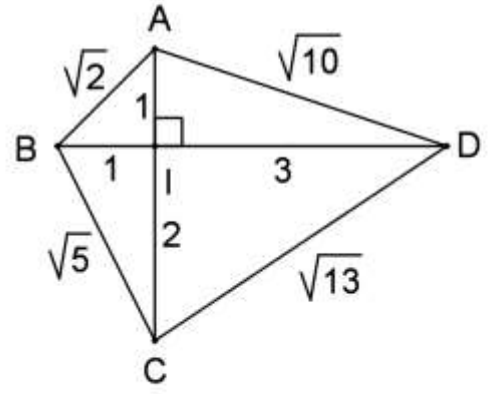
Se as diagonais têm medidas diferentes ou não se cortam ao meio, o quadrilátero não será um quadrado.

II – FALSA

Se as diagonais não se cortam ao meio, o quadrilátero não será um losango.

III – FALSA

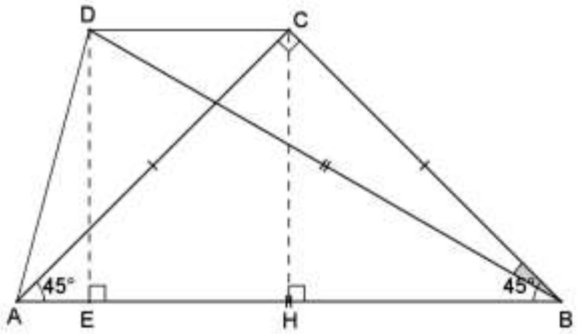
Basta observar o contra exemplo a seguir.



Esse contra exemplo também mostra que as afirmativas I e II são FALSAS.

RESPOSTA: E

26.



Traçando-se a altura CH do triângulo retângulo isósceles ABC, tem-se $CH = \frac{AB}{2}$.

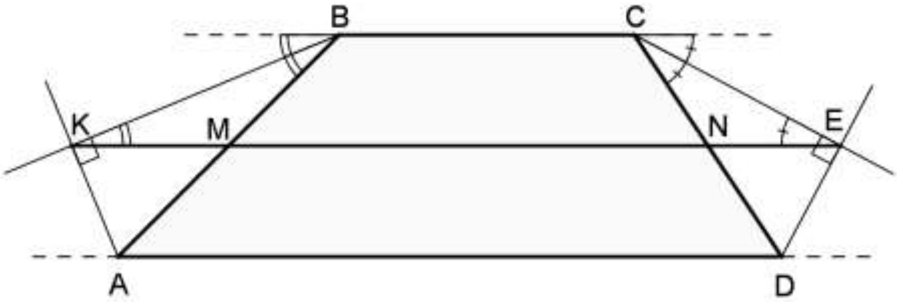
Seja $DE \| CH$, com E sobre AB, então $DE = CH = \frac{AB}{2}$.

No triângulo retângulo BED, temos $\text{sen}(D\hat{B}E) = \frac{DE}{BD} = \frac{\frac{AB}{2}}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow D\hat{B}E = 30^\circ$

Portanto, $C\hat{B}D = C\hat{B}A - D\hat{B}E = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

RESPOSTA: A

27.



Os triângulos AKB e CED são retângulos com hipotenusas AB e CD respectivamente.

Se M e N são os pontos médios de AB e CD, respectivamente, então $KM \| BC \| NE$, $KM = \frac{AB}{2}$ e $EN = \frac{CD}{2}$.

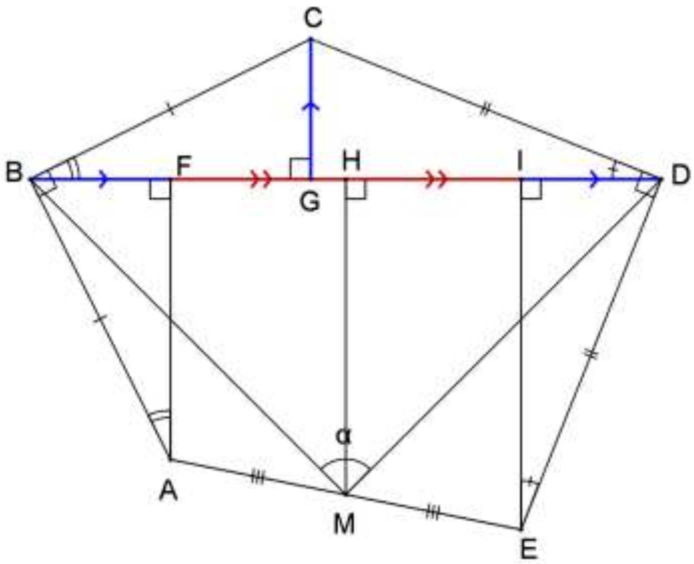
O segmento MN é base média do trapézio, então $MN \| BC$ e $MN = \frac{AD+BC}{2}$.

Como $KM \| MN \| NE \| BC$, então os pontos K, M, N e E estão alinhados. Assim, temos:

$$KE = KM + MN + NE = \frac{AB}{2} + \frac{AD+BC}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{(2p)_{ABCD}}{2} \Leftrightarrow (2p)_{ABCD} = 2 \cdot KE = 24$$

RESPOSTA: B

28.



Sejam $\overline{AF}$, $\overline{MH}$, $\overline{EI}$ e $\overline{CG}$ perpendiculares a $\overline{BD}$.

Pelo caso especial de congruência para triângulos retângulos, temos:

$\Delta ABF \equiv \Delta BCG$ e $\Delta EDI \equiv \Delta DCG \Rightarrow \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DI}$, $\overline{AF} = \overline{BG}$ e $\overline{EI} = \overline{DG}$.

Como $\overline{AM} = \overline{ME}$ e $\overline{HM} \parallel \overline{AF} \parallel \overline{EI}$, então

$\overline{FH} = \overline{HI}$ e $\overline{MH} = \dfrac{\overline{AF} + \overline{EI}}{2}$ (base média do trapézio AFIE).

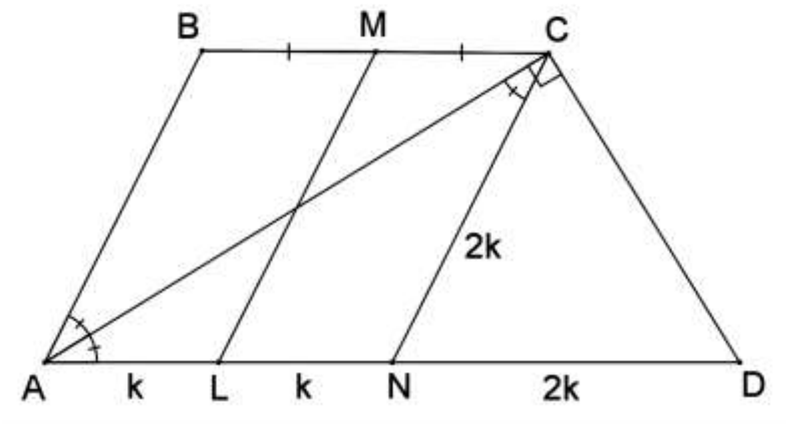
Portanto, $\overline{BH} = \overline{BF} + \overline{FH} = \overline{HI} + \overline{ID} = \overline{DH}$.

Mas, $\overline{BD} = \overline{BG} + \overline{GD} = \overline{AF} + \overline{EI} = 2 \cdot \overline{MH}$, então

$\overline{MH} = \dfrac{\overline{BD}}{2} = \overline{BH} = \overline{DH}$, o que implica que o ΔBDM é retângulo isósceles e que $\alpha = 90^\circ$.

RESPOSTA: D

29.



Seja $AL = k$.

$AD = 4 \cdot AL \Rightarrow AD = 4k$

Seja N o ponto médio de AD, então CN é mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ACD, donde $CN = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{4k}{2} = 2k$.

$AN = CN = 2k \Rightarrow N\hat{C}A = N\hat{A}C = C\hat{A}B \Rightarrow AB \parallel CN$

Como $AL = AN = k$ e $BM = MC$, então $ML \parallel AB \parallel CN$.

Assim, o $\# ABCN$ é um trapézio e ML é base média do trapézio, logo

$$ML = \frac{AB + CN}{2} = \frac{AB + 2k}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

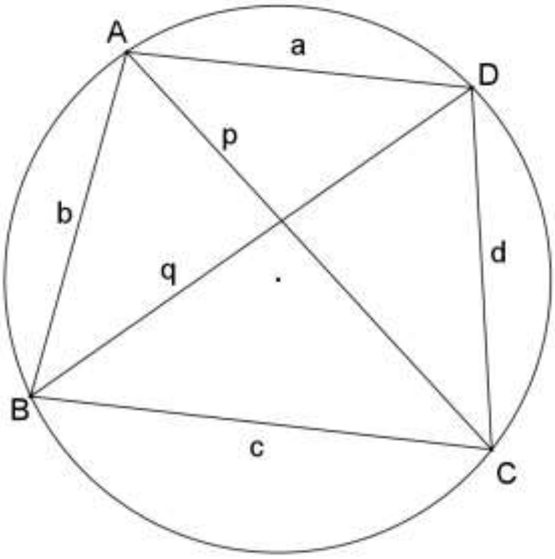
onde foi usado que $AD + 2 \cdot AB = 16 \Leftrightarrow 4k + 2 \cdot AB = 16 \Leftrightarrow AB + 2k = 8$.

RESPOSTA: D

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS QUADRILÁTEROS

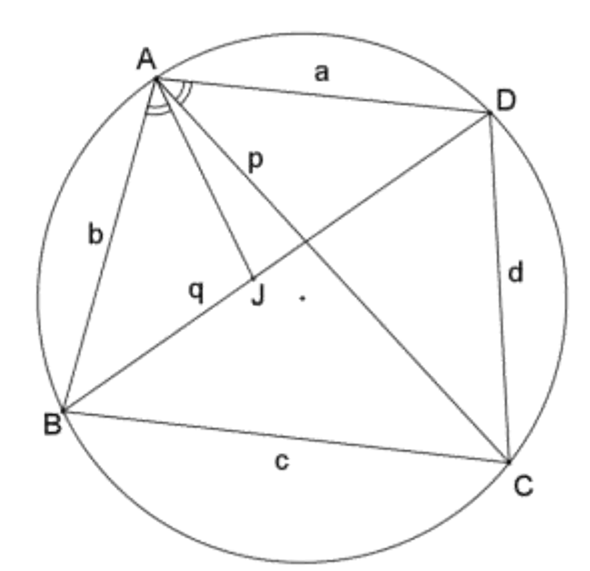
1. TEOREMA DE PTOLOMEU

Em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.



$$ac+bd=pq$$

DEMONSTRAÇÃO:

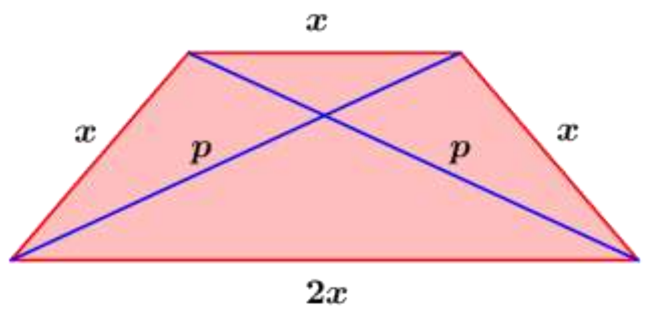


No quadrilátero ABCD, seja AJisogonal de AC, então:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AJD \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{DJ}{BC}=\dfrac{AD}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{DJ}{c}=\dfrac{a}{p} \\ \Delta AJB \sim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BJ}{CD}=\dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{BJ}{d}=\dfrac{b}{p}\end{array}\right\} \Rightarrow BJ+DJ=\dfrac{ac+bd}{p} \Leftrightarrow ac+bd=pq$$

EXEMPLO:

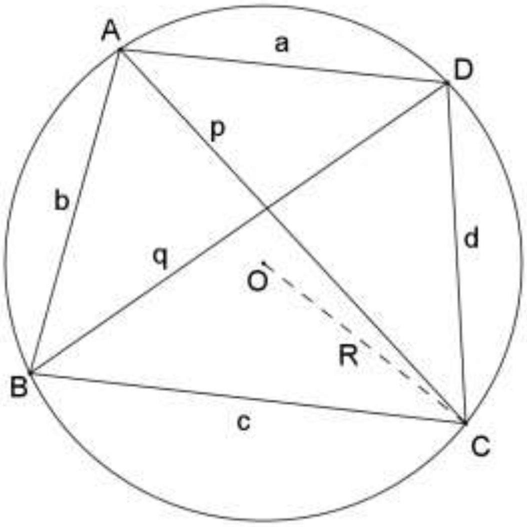
Calcule o comprimento das diagonais do trapézio isósceles da figura.



Observemos inicialmente que todo trapézio isósceles é inscritível. Assim, aplicando o teorema de Ptolomeu, temos: $x \cdot 2x + x \cdot x = p \cdot p \Leftrightarrow p^2 = 3x^2 \Leftrightarrow p = x\sqrt{3}$.

2. TEOREMA DE HIPARCO

Em um quadrilátero inscritível, a razão entre as diagonais é igual à razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem as respectivas diagonais.



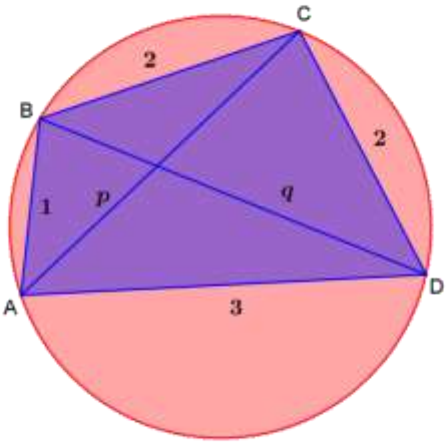
$$\frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$S_{BAC} + S_{DAC} = S_{ABD} + S_{CBD} \Leftrightarrow \frac{bcp}{4R} + \frac{adp}{4R} = \frac{abq}{4R} + \frac{cdq}{4R} \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

EXEMPLO:

Calcule a menor diagonal do quadrilátero inscritível ABCD cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ medem, respectivamente, 1, 2, 2 e 3.



Aplicando o teorema de Ptolomeu, temos: $p\cdot q=1\cdot 2+2\cdot 3\Leftrightarrow pq=8\Leftrightarrow q=\frac{8}{p}$

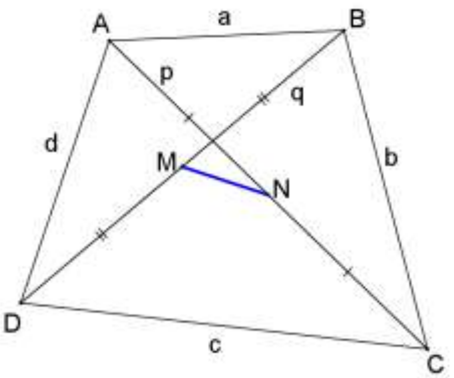
Aplicando o teorema de Hiparco, temos: $\frac{p}{q}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 2}{1\cdot 2+2\cdot 3}\Leftrightarrow \frac{p}{q}=\frac{7}{8}$

$$(p\cdot q)\cdot\frac{p}{q}=8\cdot\frac{7}{8}=7\Leftrightarrow p^2=7\Leftrightarrow p=\sqrt{7}\ \wedge\ q=\frac{8}{\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Logo, a menor diagonal do quadrilátero é $\sqrt{7}$.

3. MEDIANA DE EULER

Sejam um quadrilátero ABCD de lados AB = a, BC = b, CD = c, DA = d e diagonais AC = p e BD = q, cujos pontos médios são N e M, respectivamente, então o segmento MN é chamado **mediana de Euler** do quadrilátero e é dado pela expressão a seguir:



$$a^2+b^2+c^2+d^2=p^2+q^2+4\cdot MN^2$$

DEMONSTRAÇÃO:

Como N é ponto médio de AC, então BN e DN são medianas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot BN^2 = 2\left(a^2+b^2\right)-p^2 \\ 4\cdot DN^2 = 2\left(c^2+d^2\right)-p^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 = p^2+2\left(BN^2+DN^2\right).$$

Como M é ponto médio de BD, então NM é mediana no triângulo BND:

$$4\cdot MN^2 = 2\left(BN^2+DN^2\right)-q^2 \Leftrightarrow 2\left(BN^2+DN^2\right) = q^2+4\cdot MN^2.$$

Logo, $a^2+b^2+c^2+d^2 = p^2+q^2+4\cdot MN^2$.

TEOREMA:

Em um trapézio, sejam a e c os lados não paralelos, B e b as bases, p e q as diagonais, então a mediana de Euler é $M_e = \dfrac{B-b}{2}$, o que implica $p^2+q^2 = a^2+c^2+2Bb$.

DEMONSTRAÇÃO:

$$a^2+b^2+c^2+B^2 = p^2+q^2+4\cdot\left(\frac{B-b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+B^2 = p^2+q^2+B^2-2Bb+b^2 \Leftrightarrow p^2+q^2 = a^2+c^2+2Bb$$

TEOREMA:

Num paralelogramo de lados a e b, e diagonais p e q, temos $2\left(a^2+b^2\right) = p^2+q^2$.

DEMONSTRAÇÃO:

Como as diagonais do paralelogramo cortam-se ao meio, sua mediana de Euler tem medida zero, então:

$$a^2+b^2+a^2+b^2 = p^2+q^2+4\cdot 0^2 \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) = p^2+q^2.$$

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. No lado AB de um quadrado ABCD, constrói-se externamente um triângulo retângulo ABF com hipotenusa AB. Calcule EF, sabendo que $AF = 6$, $BF = 8$ e que E é o ponto de encontro das diagonais do quadrado.

a) $7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) $5\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{7}$

e) $\sqrt{5}$

2. Um ponto P no lado AB de um triângulo retângulo ABC é tal que $BP = PA = 2$. Sendo o ponto Q na hipotenusa AC tal que PQ é perpendicular a AC, determine BQ, sabendo que $CB = 3$

a) $\frac{4}{5}\sqrt{7}$

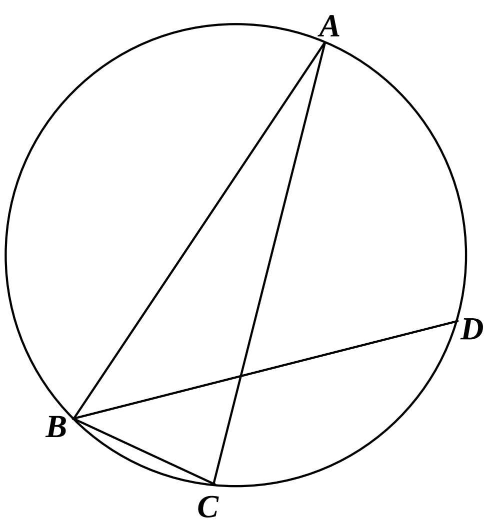
b) 0,8

c) 5,04

d) $\frac{4}{5}.\sqrt{13}$

e) $\sqrt{13}$

3. Na circunferência abaixo, temos que: AB = 4, BC = 2, AC é diâmetro e os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ são iguais. Qual é o valor de BD?



a) $2\sqrt{3} + 1$

b) $\frac{9}{\sqrt{5}}$

c) $3\sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{5}$

e) 4

4. (CN 1988) Uma expressão que dá o lado do eneágono regular, em função das diagonais $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$, com $a<b<c$, é:

a) $\dfrac{c^2+b^2}{a}$

b) $\dfrac{cb}{a}$

c) $\dfrac{c^2-b^2}{a}$

d) $\dfrac{(c+b)^2}{a}$

e) $\dfrac{(c-b)^2}{a}$

5. Seja um quadrilátero inscritível de lados a, b, c e d, nessa ordem, então suas diagonais são:

a) $\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$ e $\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$

b) $\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$ e $\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}}$

c) $\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ab+cd)}{ac+bd}}$ e $\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$

d) $\sqrt{\dfrac{ad+bc}{(ac+bd)(ab+cd)}}$ e $\sqrt{\dfrac{ab+cd}{(ac+bd)(ad+bc)}}$

e) $\dfrac{(ad+bc)^2}{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)}}$ e $\dfrac{(ab+cd)^2}{\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)}}$

6. Uma expressão que dá o lado do heptágono regular em função das diagonais a e b, com $a<b$ é:

a) $\dfrac{a^2+b^2-ab}{a}$

b) $\dfrac{a^2-b^2+ab}{b}$

c) $\dfrac{a^2+b^2}{a}$

d) $\dfrac{a^2-ab}{a+b}$

e) $\dfrac{a^2+b^2-ab}{ab}$

7. (ITA 1995) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:

a) $x^2+x-2=0$
b) $x^2-x-2=0$
c) $x^2-2x+1=0$
d) $x^2+x-1=0$
e) $x^2-x-1=0$

8. As diagonais de um quadrilátero ABCD inscritível, se encontram em um ponto E. Sabendo que AE = 2, BE = 5, DE = 4 e BC = 7,5. Determine quanto mede o raio da circunferência circunscrita ao quadrilátero ABCD sabendo que a distância de DC ao centro O é de 2,5.

a) 7.
b) 10.
c) 15.
d) 4.
e) 3.

9. (IME 1966) Em um círculo de $10\sqrt{2}$ cm de diâmetro temos duas cordas de 2 cm e 10 cm. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

a) $4\sqrt{3}$ cm
b) $5\sqrt{2}$ cm
c) $6\sqrt{3}$ cm
d) $8\sqrt{2}$ cm
e) 10 cm

10. Em um círculo de $10\sqrt{2}$ de diâmetro, temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda do arco diferença dos arcos das cordas anteriores.

a) 4
b) $2\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $6\sqrt{2}$

11. (IME 2004) Um quadrilátero convexo ABCD está inscrito em um círculo de diâmetro d. Sabe-se que $\overline{AB}=\overline{BC}=a$, $\overline{AD}=d$ e $\overline{CD}=b$, com a, b e d diferentes de zero. Demonstre que $d^2=bd+2a^2$.

12. ABC é um triângulo equilátero inscrito num círculo e P é um ponto do menor arco AB. Provar que $PC=PA+PB$

13. A ceviana AQ do triângulo equilátero ABC é prolongada encontrando o circuncírculo em P. Mostre que

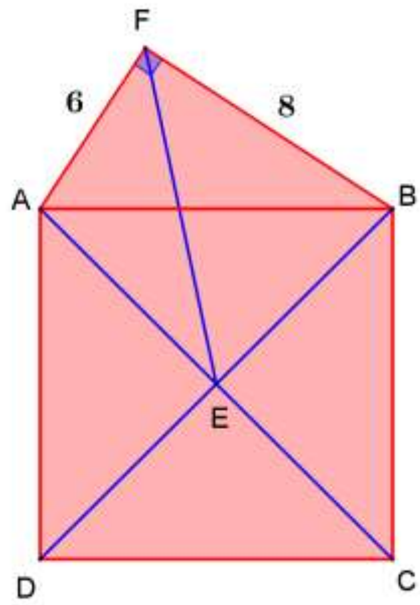
$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}.$$

14. (IME 1987) Sejam A, B, C, D e E os vértices de um pentágono regular inscrito num círculo e P um ponto qualquer sobre arco BC. Unindo-se P a cada um dos vértices do pentágono, mostre que $PA+PD=PB+PC+PE$.

15. Prove que, se ABCDEFG é um heptágono regular convexo, então: $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$.

GABARITO

1.



No triângulo retângulo AFB temos: $AF = 6$, $BF = 8$ e $AB = 10$.

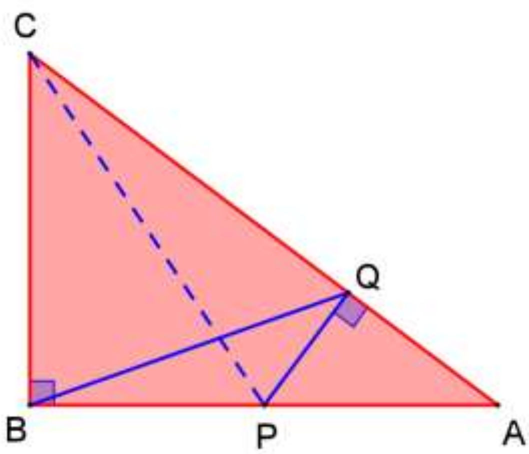
No triângulo retângulo isósceles AEB, temos: $AE = BE = 5\sqrt{2}$.

Como $A\hat{F}B = A\hat{E}B = 90^\circ$, o quadrilátero AFBE é circunscritível. Logo, pelo teorema de Ptolomeu, temos:

$AF \cdot BE + AE \cdot BF = AB \cdot EF \Leftrightarrow 6 \cdot 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \cdot 8 = 10 \cdot EF \Leftrightarrow EF = 7\sqrt{2}$

RESPOSTA: A

2.



Traçando CP, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PCB, obtendo $PC = \sqrt{13}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos $AB = 5$.

Como os triângulos AQP e ABC são semelhantes, temos:

$$\Delta AQP \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{PQ}{CB} = \frac{PA}{AC} \Leftrightarrow \frac{PQ}{3} = \frac{2}{5} \Rightarrow PQ = \frac{6}{5}$$

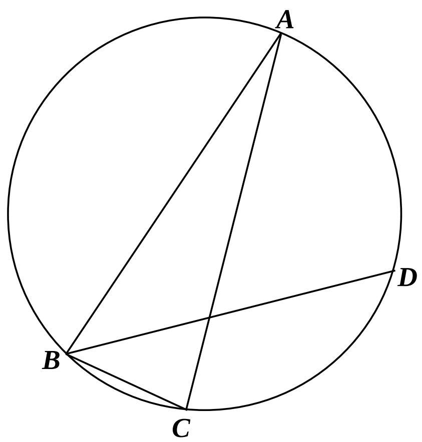
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo PQC, temos:

$$PQ^2 + CQ^2 = CP^2 \Leftrightarrow \frac{36}{25} + CQ^2 = 13 \Leftrightarrow CQ = \frac{17}{5}$$

Como os ângulos $C\hat{B}P \equiv C\hat{Q}P \equiv 90^o$,então o quadrilátero BPQC é inscritível. Assim, aplicando o teorema de Ptolomeuao $\#BPQC$, temos: $BQ \cdot CP = PQ \cdot BC + BP \cdot QC \Leftrightarrow BQ \cdot \sqrt{13} = \frac{6}{5} \cdot 3 + 2 \cdot \frac{17}{5} \Leftrightarrow BQ = \frac{4}{5}.\sqrt{13}$.

RESPOSTA: D

3.



Como AC é diâmetro, então $A\hat{B}C = 90°$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{5}$.

Como AC é diâmetro, o arco ADC mede $180°$.

Como $A\hat{B}D = B\hat{C}D$, então $AD = CD = 90°$ e $\overline{AD} = \overline{CD} = R\sqrt{2} = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$ (lado do quadrado inscrito na circunferência).

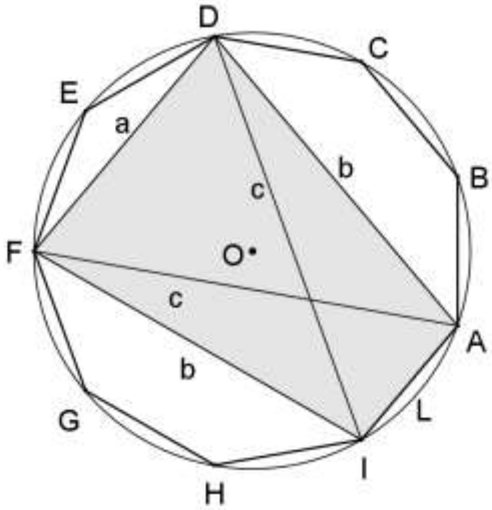
Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível ABCD, temos:

$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD \Leftrightarrow 2\sqrt{5} \cdot BD = \sqrt{10} \cdot 2 + 4 \cdot \sqrt{10} = 6\sqrt{10} \Leftrightarrow BD = 3\sqrt{2}$.

REFERÊNCIA: OBM FASE 1 NÍVEL 3 2002

RESPOSTA: C

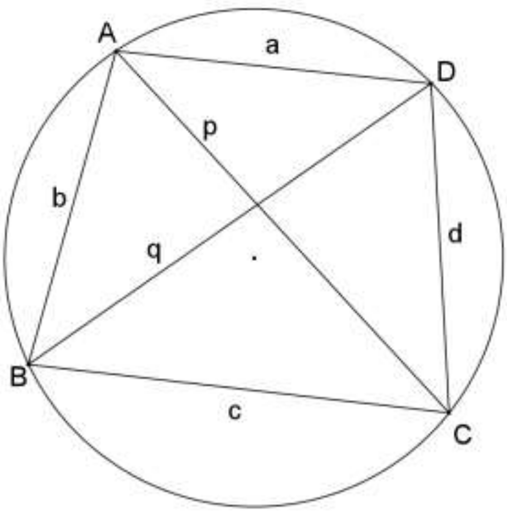
4.



Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível ADFI, temos: $a \cdot L + b \cdot b = c \cdot c \Leftrightarrow L = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$.

RESPOSTA: C

5.



Teorema de Ptolomeu: $p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$

Teorema de Hiparco: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot d + b \cdot c}$

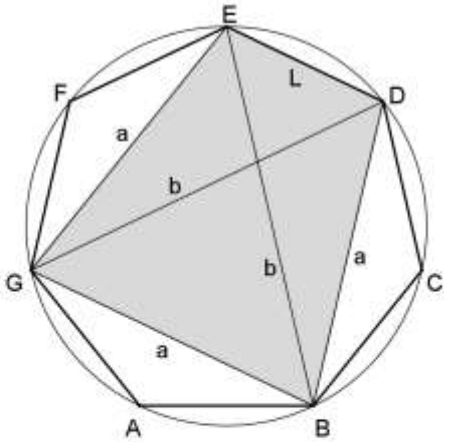
$$\frac{p}{q} \cdot (p \cdot q) = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot d + b \cdot c} \cdot (a \cdot c + b \cdot d) \Leftrightarrow p^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \Leftrightarrow p = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

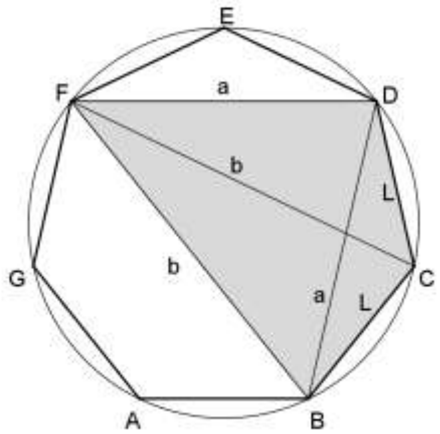
$$\frac{q}{p} \cdot (p \cdot q) = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d} \cdot (a \cdot c + b \cdot d) \Leftrightarrow q^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

REFERÊNCIA: Morgado, A. C.; Wagner, E. e Jorge, M. – Geometria II – pg. 180.

RESPOSTA: A

6.





Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível $BDEG$, temos:

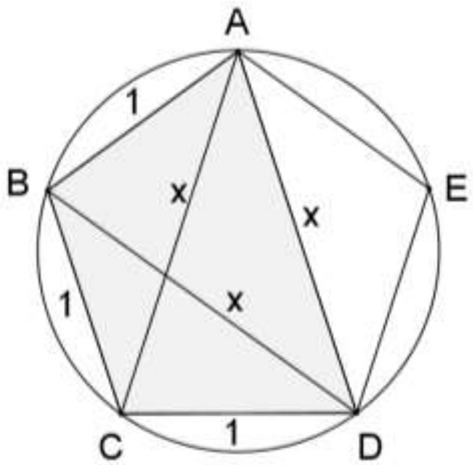
$$a \cdot L + a \cdot a = b \cdot b \Leftrightarrow L = \frac{b^2 - a^2}{a}$$

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível $BCDF$, temos:

$$a \cdot L + b \cdot L = a \cdot b \Rightarrow a \cdot \frac{b^2 - a^2}{a} + b \cdot L = ab \Leftrightarrow b \cdot L = a^2 - b^2 + ab \Leftrightarrow L = \frac{a^2 - b^2 + ab}{b}$$

RESPOSTA: B

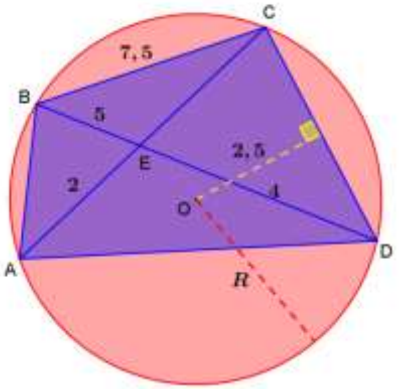
7.



O pentágono regular é inscritível. Portanto, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível e podemos aplicar o teorema de Ptolomeu. Assim, temos: $x \cdot x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

RESPOSTA: E

8.



Inicialmente, utilizamos a potência do ponto E em relação à circunferência:

$AE \cdot EC = BE \cdot ED \Leftrightarrow 2 \cdot EC = 5 \cdot 4 \Leftrightarrow EC = 10$.

$$\Delta AED \sim \Delta BEC\,(L_p.A.L_p.) \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AD} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{AD} \Leftrightarrow AD = 3$$

$$\Delta AEB \sim \Delta DEC\,(L_p.A.L_p.) \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{DC} \Leftrightarrow DC = 2AB$$

Como o quadrilátero é inscritível, temos, pelo teorema de Ptolomeu:

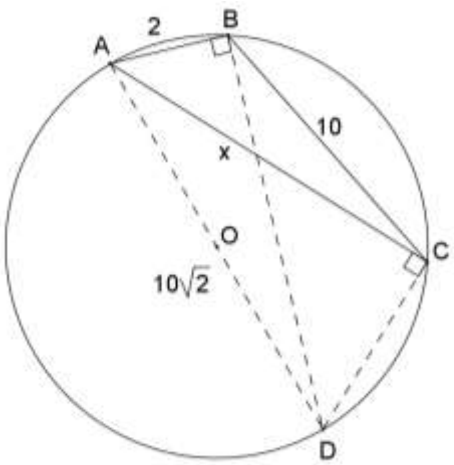
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD \Leftrightarrow AB \cdot (2AB) + 3 \cdot 7{,}5 = 12 \cdot 9 \Leftrightarrow AB^2 = \frac{171}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{171}}{2}$$

Como a distância de O a DC é 2,5, então o ΔOCD é isósceles de altura 2,5 e lados congruentes $OC = OD = R$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo determinado pela altura, temos:

$$R^2 = (2{,}5)^2 + \left(\frac{\sqrt{171}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{171}{4} = \frac{196}{4} = 49 \Leftrightarrow R = 7 \text{ u.c.}$$

RESPOSTA: A

9.



Seja $\overline{AD}$ um diâmetro da circunferência.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ACD e ABD, temos:

$x^2 + CD^2 = 200$ (*)

$BD^2 + 4 = 200 \Leftrightarrow BD = \sqrt{196} = 14$

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível $ABCD$, temos:

$x \cdot 14 = 2 \cdot CD + 10 \cdot 10\sqrt{2} \Leftrightarrow CD = 7x - 50\sqrt{2}$.

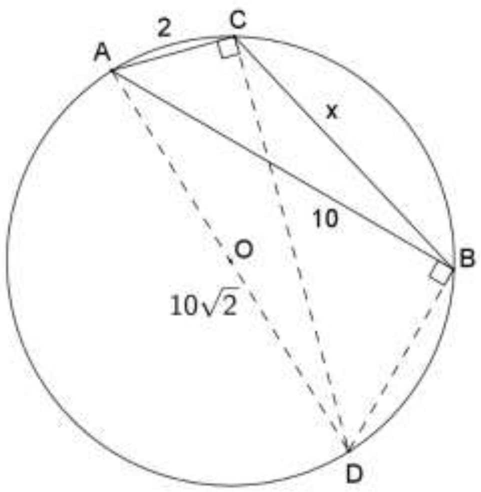
Substituindo a expressão acima em (*), temos:

$x^2 + \left(7x - 50\sqrt{2}\right)^2 = 200 \Leftrightarrow x^2 - 14\sqrt{2}x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2} \vee x = 8\sqrt{2}$

Como $CD = 7x - 50\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{50}{7}\sqrt{2} > 7\sqrt{2}$, então $x = 8\sqrt{2}$ cm.

RESPOSTA: D

10.



Sejam AC = 2 e AB = 10 duas cordas de uma circunferência de diâmetro $AD = 10\sqrt{2}$.

Como AD é um diâmetro, então $A\hat{C}D = A\hat{B}D = 90°$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACD, temos: $CD^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 - 2^2 = 196 \Leftrightarrow BC = 14$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABD, temos: $BD^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 - 10^2 = 100 \Leftrightarrow BD = 10$.

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível ACBD, temos:

$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD \Leftrightarrow 10 \cdot 14 = 2 \cdot 10 + x \cdot 10\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2}$.

RESPOSTA: E

11.

Teorema de Pitágoras no $\Delta ABD: BD=\sqrt{d^2-a^2}$

Teorema de Pitágoras no $\Delta ACD: AC=\sqrt{d^2-b^2}$

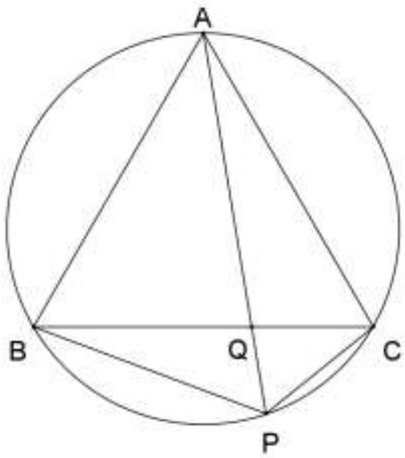
Teorema de Hiparco: $\frac{AC}{BD}=\frac{BC\cdot CD+AB\cdot AD}{AB\cdot BC+AD\cdot CD}=\frac{ab+ad}{a^2+bd}$ (1)

Teorema de Ptolomeu: $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC\Leftrightarrow AC\cdot BD=ab+ad$ (2)

Substituindo (2) em (1):

$\frac{AC}{BD}=\frac{AC\cdot BD}{a^2+bd}\Leftrightarrow BD^2=a^2+bd\Leftrightarrow d^2-a^2=a^2+bd\Leftrightarrow d^2=2a^2+bd$ C.Q.D.

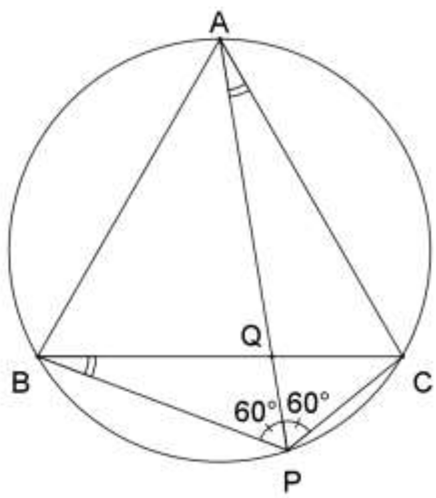
12.



Considere o quadrilátero inscritível APBC cujas diagonais são AB e CP. Aplicando o Teorema de Ptolomeu:

$AP\cdot \cancel{BC}+PB\cdot \cancel{AC}=\cancel{AB}\cdot PC\Rightarrow PC=PA+PB$

13.



Seja L o lado do triângulo equilátero ABC.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível ABPC, temos:

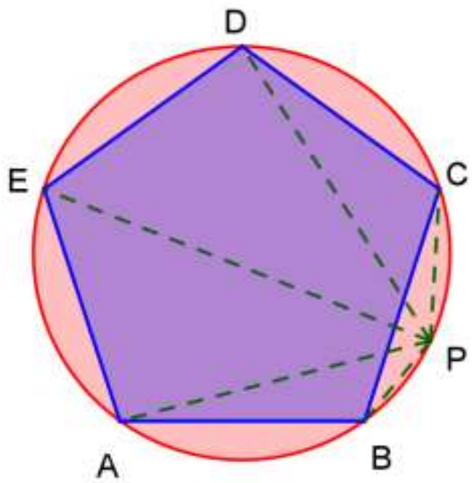
$AP \cdot L = L \cdot PC + L \cdot PB \Leftrightarrow AP = PB + PC$.

$$\Delta BQP \sim \Delta ACP \Rightarrow \frac{PQ}{PC} = \frac{PB}{AP} \Leftrightarrow AP = \frac{PB \cdot PC}{PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{PB \cdot PC}{PQ} = PB + PC \Leftrightarrow \frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$$

REFERÊNCIA: Oliveira, M. R. e Pinheiro, M. R. – Coleção elementos da Matemática – Volume 2 – Geometria Plana – pg. 277.

14.



Seja o pentágono regular ABCDE de lado ℓ e diagonais d.

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível ABPC, temos:

$PA \cdot BC = AB \cdot PC + PB \cdot AC \Leftrightarrow PA \cdot \ell = \ell \cdot PC + PB \cdot d$

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível BPCD, temos:

$BC \cdot PD = PB \cdot CD + PC \cdot BD \Leftrightarrow \ell \cdot PD = PB \cdot \ell + PC \cdot d$

Somando as expressões, temos: $(PA + PD) \cdot \ell = (PB + PC) \cdot \ell + (PB + PC) \cdot d \quad (*)$

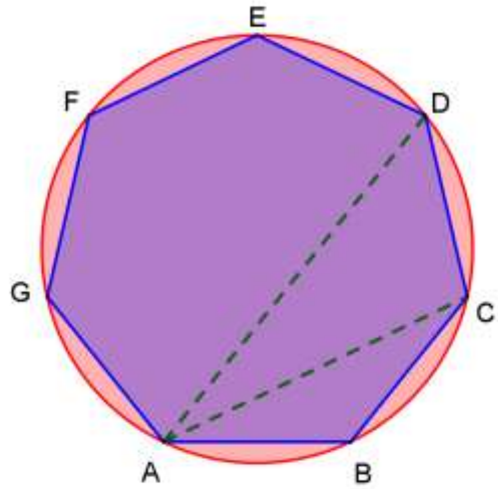
Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível $BPCE$, temos:

$BC \cdot PE = PB \cdot CE + PC \cdot BE \Leftrightarrow \ell \cdot PE = PB \cdot d + PC \cdot d \Leftrightarrow \ell \cdot PE = (PB + PC) \cdot d \quad (**)$

Substituindo (**) em (*), temos:

$(PA + PD) \cdot \ell = (PB + PC) \cdot \ell + PE \cdot \ell \Leftrightarrow PA + PD = PB + PC + PE \ _{\text{C.Q.D.}}$.

15.



Seja ABCDEFG um heptágono regular convexo de lado ℓ e diagonais $a < b$.

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero inscritível ACDE, temos:

$$AD \cdot CE = AC \cdot DE + CD \cdot AE \Leftrightarrow b \cdot a = a \cdot \ell + \ell \cdot b \overset{\div ab\ell}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\ell} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ C.Q.D.}$$

REFERÊNCIA: Revista Eureka n° 5 – pg. 24.

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS POLÍGONOS REGULARES

1. CARACTERÍSTICAS DOS POLÍGONOS REGULARES

Um polígono regular é um polígono que possui lados e ângulos congruentes.

Os polígonos regulares são inscritíveis e circunscritíveis.

Os centros das circunferências inscrita e circunscrita são coincidentes e esse ponto é denominado centro do polígono.

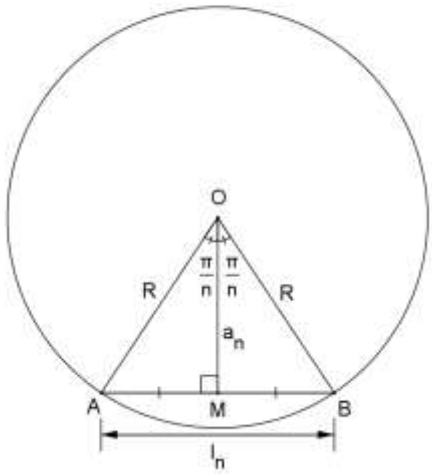
O apótema de um polígono é o segmento de reta com extremidades no centro do polígono e no ponto médio um de seus lados, e perpendicular ao lado. O apótema coincide com o raio da circunferência inscrita ao polígono.

Lado do polígono regular de gênero n

$$l_n = 2R\,\text{sen}\frac{\pi}{n}$$

Apótema do polígono regular de gênero n

$$a_n = R\cos\frac{\pi}{n}$$



O lado de um polígono regular de gênero n determina um ângulo central de $\frac{2\pi}{n}\text{rad}$ na sua circunferência circunscrita. Dessa forma, trançando-se a bissetriz OM do triângulo isósceles OAB e conhecendo as linhas trigonométricas de $\frac{\pi}{n}\text{rad}$, podemos determinar a expressão do lado do polígono regular de gênero n, l_n, em função do raio da sua circunferência circunscrita R.

$$\text{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{l_n/2}{R} \Leftrightarrow l_n = 2R\,\text{sen}\frac{\pi}{n}$$

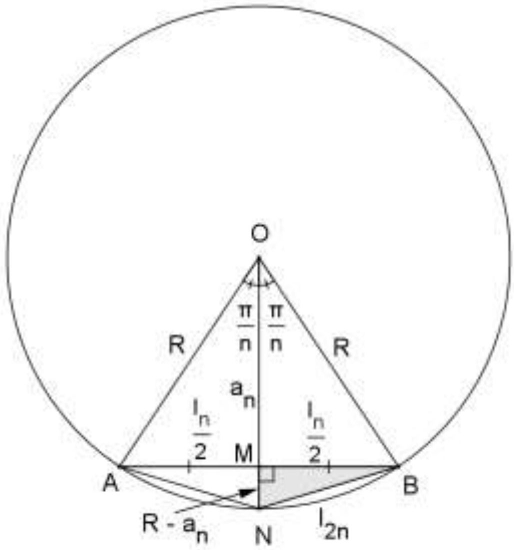
O apótema a_n de um polígono de gênero n pode ser obtido de maneira análoga. Assim,

$$\cos\frac{\pi}{n}=\frac{a_n}{R}\Leftrightarrow a_n=R\cos\frac{\pi}{n}$$

Note ainda que, conhecendo-se o lado do polígono regular de gênero n, o apótema pode ser obtido pela aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAM. Assim, temos:

$$a_n^2=R^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2\Leftrightarrow a_n=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_n^2}$$

Vamos agora desenvolver uma expressão para o lado de um polígono regular de gênero $2n$ em função do lado do polígono regular de gênero n. Para tanto, considere a figura a seguir.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BMN, temos:

$$l_{2n}^2=\left(\frac{l_n}{2}\right)^2+\left(R-a_n\right)^2=\frac{l_n^2}{4}+\left(R-\frac{\sqrt{4R^2-l_n^2}}{2}\right)^2=\frac{l_n^2+4R^2-4R\sqrt{4R^2-l_n^2}+4R^2-l_n^2}{4}=2R^2-R\sqrt{4R^2-l_n^2}$$

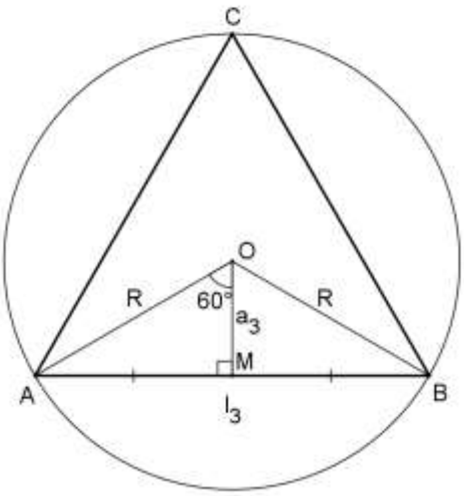
$$\mathbf{l_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-l_n^2}}}$$

Nas próximas seções vamos apresentar expressões para o lado e o apótema dos polígonos regulares em função do raio da circunferência circunscrita ao mesmo.

2. TRIÂNGULO EQUILÁTERO

O lado de um triângulo equilátero (regular) inscrito em uma circunferência de raio R é $l_3=R\sqrt{3}$ e o seu apótema é $a_3 = \frac{R}{2}$.

$$\mathbf{l_3 = R\sqrt{3}} \qquad \mathbf{a_3 = \frac{R}{2}}$$



DEMONSTRAÇÃO:

No triângulo retângulo AOM da figura temos:

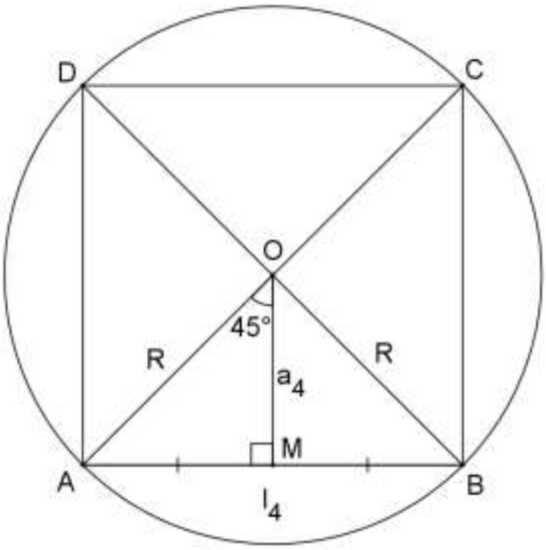
$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{l_3}{2}}{R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l_3}{2R} \Leftrightarrow l_3 = R\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a_3}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_3}{R} \Leftrightarrow a_3 = \frac{R}{2}$$

3. QUADRADO

O lado de um quadrado (quadrilátero regular convexo) inscrito em uma circunferência de raio R é $l_4 = R\sqrt{2}$ e o seu apótema é $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

$$\mathbf{l_4 = R\sqrt{2}} \qquad \mathbf{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$



DEMONSTRAÇÃO:

No triângulo retângulo AOM da figura temos:

$$\operatorname{sen}45^\circ = \frac{\frac{l_4}{2}}{R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{l_4}{2R} \Leftrightarrow l_2 = R\sqrt{2}$$

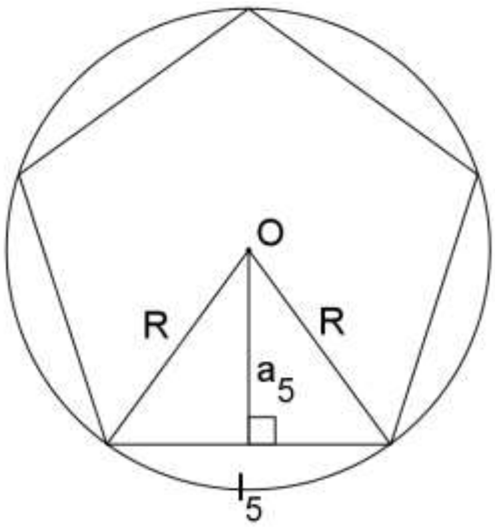
$$\cos 45^\circ = \frac{a_4}{R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a_4}{R} \Leftrightarrow a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Poderíamos observar também que o triângulo da figura é um triângulo retângulo isósceles e, portanto, $a_4 = \frac{l_4}{2}$.

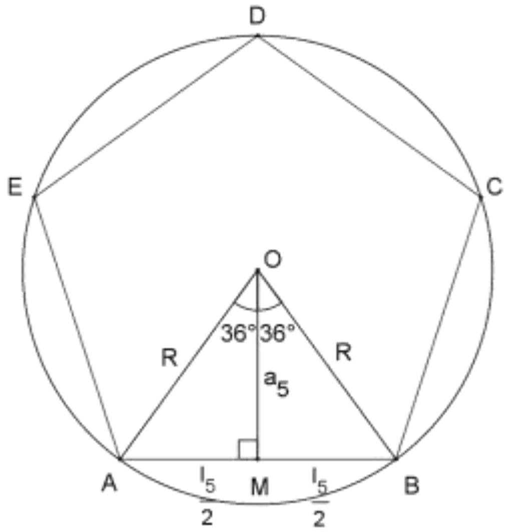
4. PENTÁGONO REGULAR CONVEXO

O lado de um pentágono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio R é $l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ e o seu apótema é $a_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

$$\mathbf{l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \qquad \mathbf{a_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)}$$



DEMONSTRAÇÃO:



Na figura da demonstração do lado do decágono regular, vamos aplicar a lei dos cossenos ao ΔOAB. Assim, temos:

$$l_{10}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 36^\circ \Leftrightarrow \frac{R^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = 2R^2\left(1-\cos 36^\circ\right) \Leftrightarrow 6-2\sqrt{5} = 8-8\cos 36^\circ \Leftrightarrow \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Voltando à figura do pentágono, consideremos o triângulo retângulo OAM. Assim, temos:

$$\cos 36^\circ = \frac{a_5}{R} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \Leftrightarrow a_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}R.$$

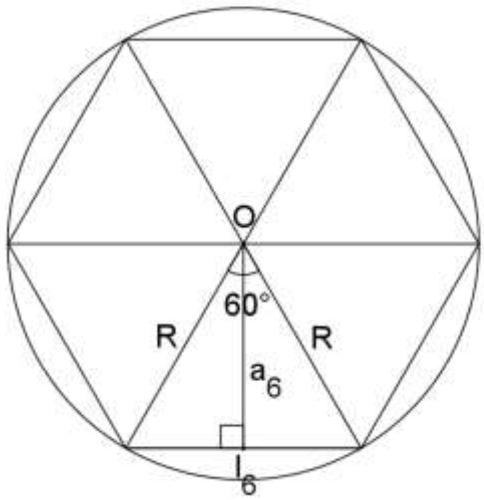
Aplicando o teorema de Pitágoras a esse triângulo, temos:

$$\left(\frac{l_5}{2}\right)^2 = R^2 - a_5^2 \Leftrightarrow \frac{l_5^2}{4} = R^2 - \frac{R^2}{16}\left(\sqrt{5}+1\right)^2 = \left(10-2\sqrt{5}\right)\cdot\frac{R^2}{16} \Leftrightarrow l_5^2 = \left(10-2\sqrt{5}\right)\cdot\frac{R^2}{4} \Leftrightarrow l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

5. HEXÁGONO REGULAR CONVEXO

O lado de um hexágono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio R é $l_6 = R$ e o seu apótema é $a_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathbf{l_6 = R} \qquad \mathbf{a_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$



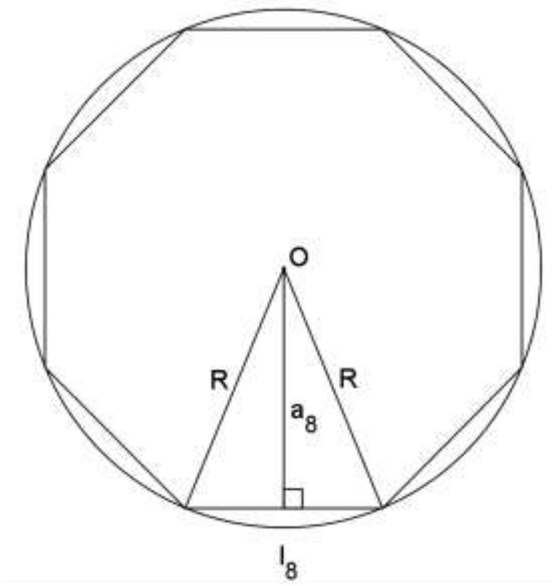
DEMONSTRAÇÃO:

O hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. Dessa forma, o lado de cada triângulo equilátero é $l_6 = R$ e o apótema é igual à altura desse triângulo $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

6. OCTÓGONO REGULAR CONVEXO

O lado de um octógono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio R é $l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e o seu apótema é $a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$$\mathbf{l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}} \qquad \mathbf{a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Vamos utilizar a fórmula de duplicação de gênero desenvolvida anteriormente: $l_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-l_n^2}}$.

Assim, temos:

$$l_8=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-l_4^2}}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-\left(R\sqrt{2}\right)^2}}=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

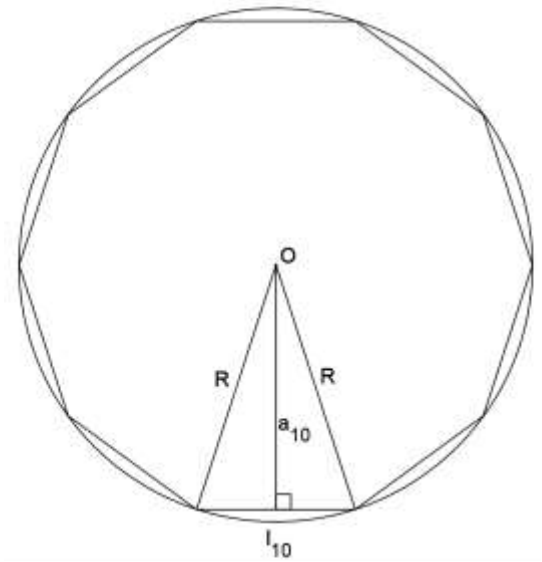
Utilizando agora a expressão para o cálculo do apótema $a_n=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_n^2}$, temos:

$$a_8=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\left(R\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{R}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

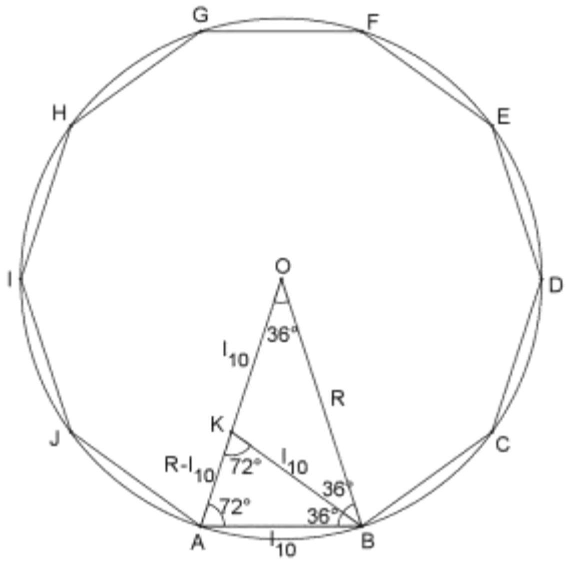
7. DECÁGONO REGULAR CONVEXO

O lado de um decágono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio R é $l_{10}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ e o seu apótema é $a_{10}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

$$\mathbf{l_{10}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} \qquad \mathbf{a_{10}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$



DEMONSTRAÇÃO:



$$\Delta OAB \sim \Delta BAK \Leftrightarrow \frac{l_{10}}{R - l_{10}} = \frac{R}{l_{10}} \Leftrightarrow l_{10}^2 + R \cdot l_{10} - R^2 = 0 \Leftrightarrow l_{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} R$$

Como $l_{10} > 0$, então $l_{10} = \frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}$.

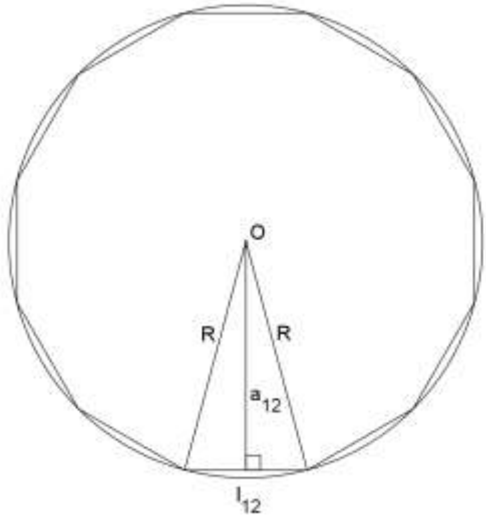
O apótema é dado por

$$a_{10}^2 = R^2 - \left(\frac{l_{10}}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{16}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} R^2 \Leftrightarrow a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

8. DODECÁGONO REGULAR CONVEXO

O lado do dodecágono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio R é $l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e o seu apótema é $a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$\mathbf{l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}} \qquad \mathbf{a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Vamos utilizar a fórmula de duplicação de gênero desenvolvida anteriormente: $l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$. Assim, temos:

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_6^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Utilizando agora a expressão para o cálculo do apótema $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$, temos:

$$a_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_{12}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{4-\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. Qual é o perímetro de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, sabendo-se que foi construído utilizando-se, pelo menos uma vez e somente, os lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular inscritos nessa circunferência?

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

b) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1$

c) $2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

d) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2$

e) $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)$

2. O perímetro do heptágono regular convexo, inscrito num círculo de raio $2{,}5$, é um número $x \in \mathbb{R}$ tal que

a) $14 < x < 15$

b) $15 < x < 16$

c) $16 < x < 17$

d) $17 < x < 18$

e) $18 < x < 19$

3. (ITA 2007) Sejam p_1 e p_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de p_1 e A_2 a área de p_2, então a razão $\frac{A_1}{A_2}$ é igual a

a) $\sqrt{\frac{5}{8}}$

b) $\frac{9\sqrt{2}}{16}$

c) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

d) $\frac{4\sqrt{2}+1}{8}$

e) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

4. (ITA 1996) Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$

d) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$

e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$

5. (ITA 1992) A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é

a) $\frac{1}{2}$

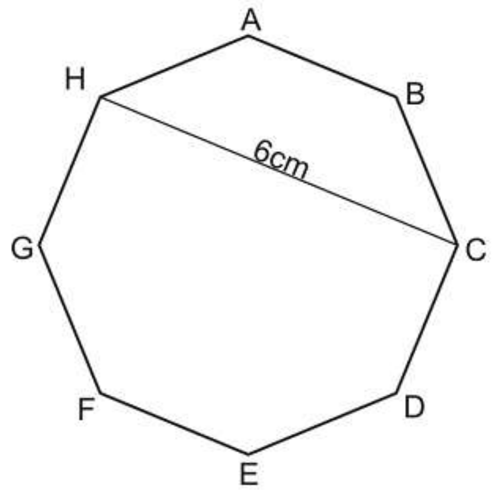
b) 1

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{8}$

e) n.d.a.

6. (EPCAr 2012) A figura abaixo representa um octógono regular tal que $\overline{CH}=6\text{ cm}$.



A área desse polígono, em cm^2, é igual a

a) $56(\sqrt{2}-1)$

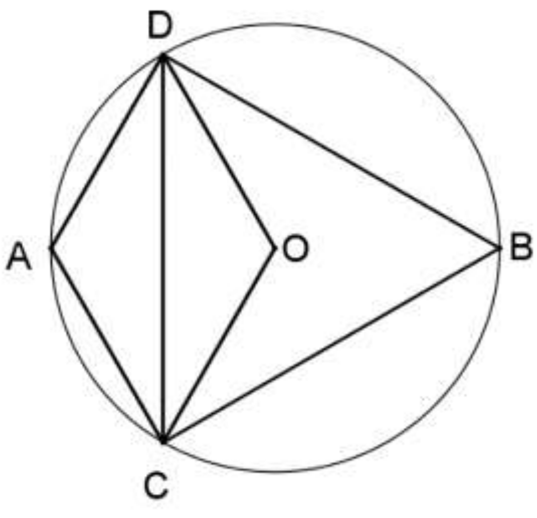
b) $64(\sqrt{2}-1)$

c) $72(\sqrt{2}-1)$

d) $80(\sqrt{2}-1)$

7. (EPCAr 2010) Durante as comemorações dos 60 anos da EPCAR, em virtude do louvável destaque que os alunos do CPCAR alcançaram em 2008 nas Olimpíadas de Matemática, serão produzidas placas para premiação dos melhores classificados.

Tais placas deverão conter o emblema abaixo cujas figuras geométricas serão contornadas por um fio de ouro de espessura uniforme.



Dados:

$AB=180^\circ$; $\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=12\text{ cm}$; $\overline{AC}=\overline{AD}$; $C\hat{O}D=120^\circ$; $\pi=3$; $\sqrt{3}=1{,}7$

Sabendo que 10 g de ouro custam R$ 450, 00 e produzem 10 cm desse fio, pode-se estimar que o valor, em reais, gasto com o ouro para a confecção de uma medalha estará entre os números

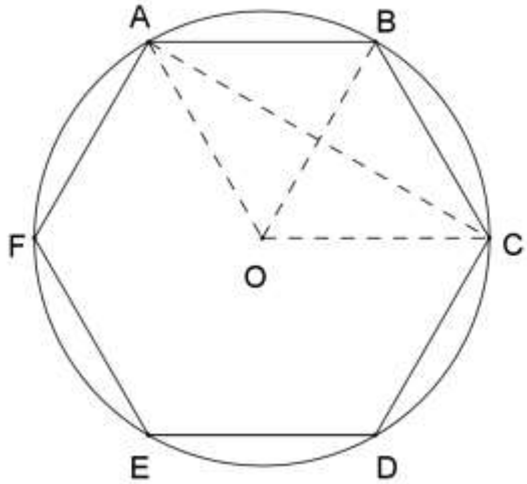
a) 7500 e 8000

b) 8000 e 8500

c) 8500 e 9000

d) 9000 e 9500

8. (EPCAr 2002) A área do losango ABCO da figura abaixo mede 24 cm^2. O lado do hexágono regular ABCDEF é, em cm, igual a



a) $4\sqrt[4]{3}$

b) $4\sqrt{3}$

c) 4

d) $16\sqrt{3}$

9. (EPCAr 2001) O apótema de um hexágono regular é igual à altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm. A área do hexágono mede, em cm^2

a) $4\sqrt{3}$

b) $16\sqrt{3}$

c) $18\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

10. (EPCAr 2000) O perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência mede $20\sqrt{2}$ m. O apótema do

hexágono regular inscrito nessa mesma circunferência mede, em m,

a) $2\sqrt{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $5\sqrt{3}$

11. (CN 2008) Um hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito em uma circunferência de raio 6. Traçam-se as tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e F, obtendo-se, assim, um quadrilátero circunscrito a essa circunferência. Usando-se $1{,}7$ para raiz quadrada de 3, qual é o perímetro desse quadrilátero?

a) $54{,}4$

b) $47{,}6$

c) $40{,}8$

d) $34{,}0$

e) $30{,}6$

12. (CN 2007) Qual é o perímetro de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, sabendo-se que foi construído utilizando-se, pelo menos uma vez e somente, os lados do triangulo equilátero, quadrado e hexágono regular inscritos nessa circunferência?

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

b) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1$

c) $2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

d) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2$

e) $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)$

13. (CN 2006) Três dos quatro lados de um quadrilátero circunscritível são iguais aos lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular circunscritos a um circulo de raio 6. Qual é a medida do quarto lado desse quadrilátero, sabendo-se que é o maior valor possível nas condições dadas?

a) $16\sqrt{3}-12$

b) $12\sqrt{3}-12$

c) $8\sqrt{3}+12$

d) $12\sqrt{3}+8$

e) $16\sqrt{3}-8$

14. (CN 2006) Um professor usa para medir comprimentos uma unidade denominada “nix”, definida como $1\,\text{nix}=\sqrt{3}\,\text{centímetros}$. Ele mediu na unidade nix as diagonais de um hexágono regular de lado $1\,\text{cm}$ e encontrou para as menores x e para as maiores y. Pode-se concluir que x e y são, respectivamente,

a) números racionais.

b) números irracionais.

c) um número inteiro e um número irracional.

d) um número irracional e um número inteiro.

e) um número racional não inteiro e um número irracional.

15. (CN 2000) Em uma circunferência de raio R está escrito um pentadecágono regular P. Coloque (V) verdadeiro ou (F) falso nas afirmativas abaixo.

( ) P tem diagonal que mede $2R$.

( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{2}$.

( ) P tem diagonal que mede $R\sqrt{3}$.

( ) P tem diagonal que mede $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Assinale a alternativa correta.

a) (V) (V) (F) (F)

b) (F) (V) (V) (F)

c) (F) (F) (V) (V)

d) (V) (V) (V) (F)

e) (V) (V) (V) (V)

16. (CN 1999) Quando uma pessoa caminha em linha reta uma distância x, ela gira para a esquerda de um ângulo de $60°$; e quando caminha em linha reta uma distância $y=x\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ela gira para a esquerda de um ângulo de $45°$. Caminhando x ou y a partir de um ponto P, pode-se afirmar, para qualquer que seja o valor

de x, é possível chegar ao ponto P descrevendo um:

I) Pentágono convexo
II) Hexágono convexo
III) Heptágono convexo
IV) Octógono convexo

O número de assertivas verdadeiras é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

17. (CN 1999) Um hexágono regular $ABCDEF$ tem lado 3 cm. Considere os pontos: M, pertencente a AB, tal que MB igual a 1 cm; N, pertencente a CD, tal que ND igual a 1 cm; e P, pertencente a EF, tal que PF igual a 1 cm. O perímetro, em centímetros, do triângulo MNP é igual a:

a) $3\sqrt{15}$

b) $3\sqrt{17}$

c) $3\sqrt{19}$

d) $3\sqrt{21}$

e) $3\sqrt{23}$

18. (CN 1996) Sejam $ABCDEFGHIJKL$ os vértices consecutivos de um dodecágono regular num círculo de raio $\sqrt{6}$. O perímetro do triângulo de vértices AEH é igual a:

a) $3\left[3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$.

b) $3\left[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$.

c) $3\left[1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$.

d) $3\left[2+\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right]$.

e) $3\left[1-\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right]$.

19. (CN 1994) Sendo x o lado do quadrado inscrito em um hexágono regular convexo de lado 12, tem-se que:

a) $13 < x < 13,5$

b) $13,5 < x < 14$

c) $14 < x < 14,5$

d) $14,5 < x < 15$

e) $15 < x < 15,5$

20. (CN 1990) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo de raio unitário. Os lados AB, BC e CD são respectivamente, os lados do triângulo equilátero, do quadrado e do pentágono regular inscrito no círculo. Se x é a medida do lado AD do quadrilátero, pode-se afirmar que:

Observação: $\overline{CD}$ é aproximadamente igual a $1,2$.

a) $1,0 < x < 1,2$

b) $1,2 < x < 1,4$

c) $1,4 < x < 1,6$

d) $1,6 < x < 1,8$

e) $1,8 < x < 2,0$

21. (CN 1976) Sobre os lados de um hexágono regular de 4 cm de lado, e exteriormente a ele, constroem-se quadrados, de modo que cada quadrado tenha um lado em comum com o hexágono. Calcular a área do dodecágono cujos vértices são os vértices dos quadrados que não são vértices do hexágono:

a) $48\left(\sqrt{3}+2\right)\text{ cm}^2$

b) $50\left(\sqrt{3}+2\right)\text{cm}^2$

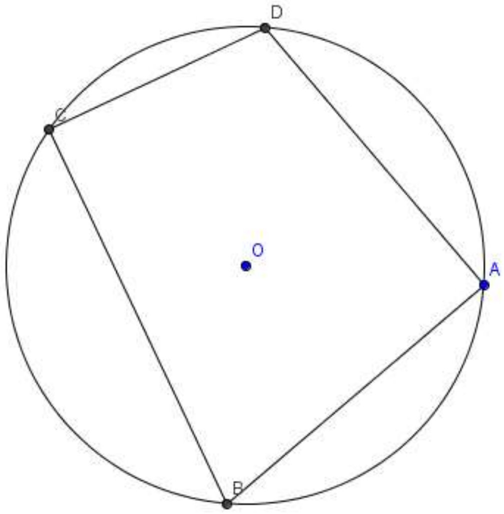
c) $24\left(\sqrt{3}+4\right)\text{ cm}^2$

d) 192 cm^2

e) 36 cm^2

GABARITO

1.



Suponhamos sem perder generalidade que AB é o lado do quadrado inscrito na circunferência, que BC é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência e que CD é o lado do hexágono regular inscrito na circunferência, então temos:

$AB+BC+CD=90°+120°+60°=270° \Rightarrow AD=90°$.

Como $AD=90°$, então AD é igual ao lado do quadrado inscrito nessa circunferência.

Portanto, o perímetro do quadrilátero formado é dado por

$2p_{ABCD}=AB+BC+CD+DA=l_4+l_3+l_6+l_4=2l_4+l_3+l_6=2\cdot\left(1\cdot\sqrt{2}\right)+1\cdot\sqrt{3}+1=2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$.

RESPOSTA: B

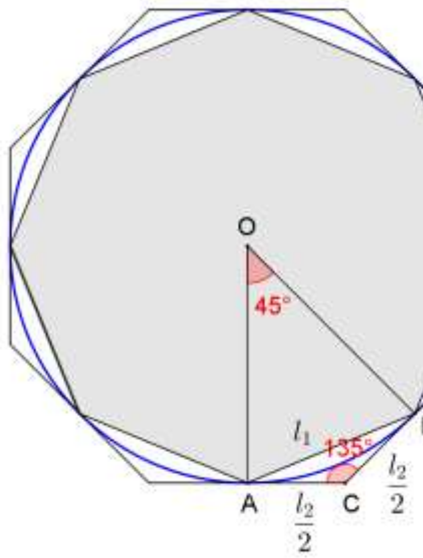
2.

Considerando que o perímetro do heptágono regular convexo é maior que o do hexágono regular convexo inscrito na mesma circunferência e menor que o perímetro dessa circunferência, temos:

$2p_{HEX}=6\cdot l_6=6\cdot R<2p_{HEP}<2\pi R=2p_{CIRC} \Leftrightarrow 6\cdot 2,5<2p_{HEP}<2\pi\cdot 2,5 \Rightarrow 15<2p_{HEP}<16$

RESPOSTA: B

3.



Supondo, sem perda de generalidade, que os vértices do octógono regular p_1 coincidem com os pontos médios dos lados do octógono regular p_2 e sejam l_1 e l_2 os lados dos octógonos regulares p_1 e p_2, respectivamente.

Aplicando o lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$l_1^2 = \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{l_2}{2}\cdot\frac{l_2}{2}\cdot\cos 135° = \frac{l_2^2}{4} + \frac{l_2^2}{4} - 2\cdot\frac{l_2^2}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{l_2^2}{4}\left(2+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

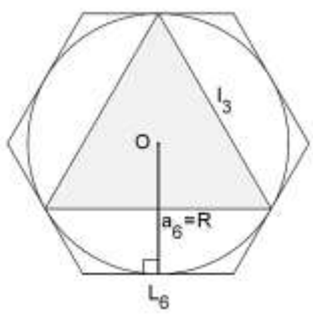
Como p_1 e p_2 são polígonos semelhantes, então a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, temos: $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

RESPOSTA: E

4. A distância é dada pela diferença $a_6 - a_4 = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$.

RESPOSTA: A

5.



Supondo que o círculo tenha raio R, então o lado do triângulo equilátero inscrito é $l_3 = R\sqrt{3}$ e o lado do hexágono circunscrito é tal que $\frac{L_6\sqrt{3}}{2} = R \Leftrightarrow L_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

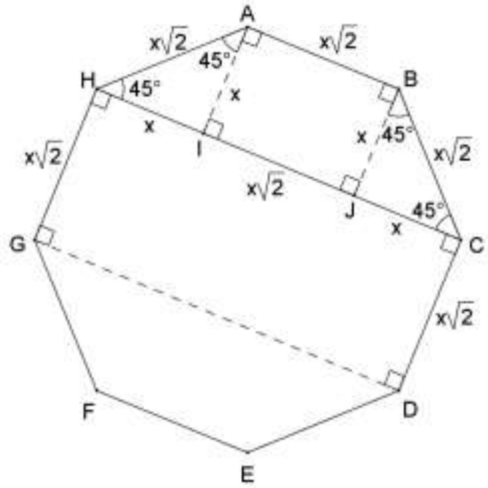
A razão entre as áreas é dada por

$$\frac{S_{tri}}{S_{hex}} = \frac{\frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}}{6\cdot\frac{L_6^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{l_3}{L_6}\right)^2 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{R\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}R}\right)^2 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{8}.$$

RESPOSTA: D

6. Inicialmente observemos que o ângulo interno do octógono regular é $\hat{A}_i = \frac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$.

Como $\overline{HC} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{AH} = \overline{BC}$, o quadrilátero $ABCH$ é um trapézio isósceles.



Os segmentos $\overline{AI}$ e $\overline{BJ}$ perpendiculares a $\overline{HC}$ determinam dois triângulos retângulos isósceles AIH e BJC, respectivamente, e o retângulo $ABJI$.

Sendo $\overline{AI} = \overline{BJ} = x$, então $\overline{HI} = \overline{CJ} = x$ e $\overline{AH} = \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{IJ} = x\sqrt{2}$ (lado do octógono). Assim, temos:

$$\overline{HC} = \overline{HI} + \overline{IJ} + \overline{JC} = x + x\sqrt{2} + x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Observando a figura, notamos que a área do octógono é igual à soma da área dos trapézios isósceles congruentes $ABCH$ e $FEDG$, e do retângulo $CDGH$.

A área do trapézio isósceles $ABCH$ é dada por:

$$S_{ABCH} = \frac{\left(\overline{CH} + \overline{AB}\right)\cdot\overline{AI}}{2} = \frac{\left(6 + 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = 18\left(\sqrt{2}-1\right) = S_{FEDG}.$$

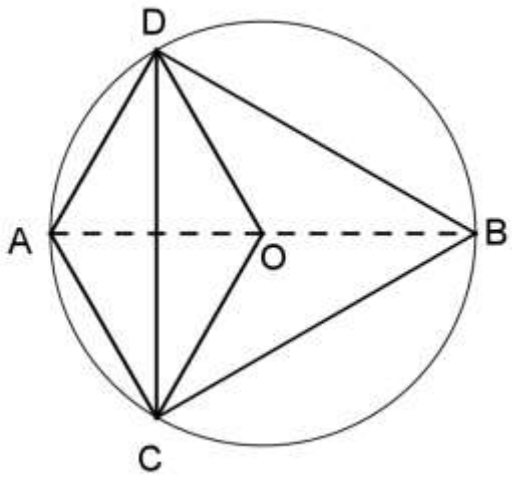
A área do retângulo $CDGH$ é dada por $S_{CDGH} = \overline{CH}\cdot\overline{CD} = 6\cdot 3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{2} = 36\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Portanto, a área do octógono é

$$S_{ABCDEFGH} = S_{ABCH} + S_{FEDG} + S_{CDGH} = 2 \cdot 18\left(\sqrt{2}-1\right) + 36\left(\sqrt{2}-1\right) = 72\left(\sqrt{2}-1\right)\text{ cm}^2 .$$

RESPOSTA: C

7.



As cordas AD e AC são lados do hexágono regular inscrito na circunferência.

Como AB é um diâmetro, $BC = BD = 120^\circ$ e, consequentemente, o triângulo BCD é equilátero.

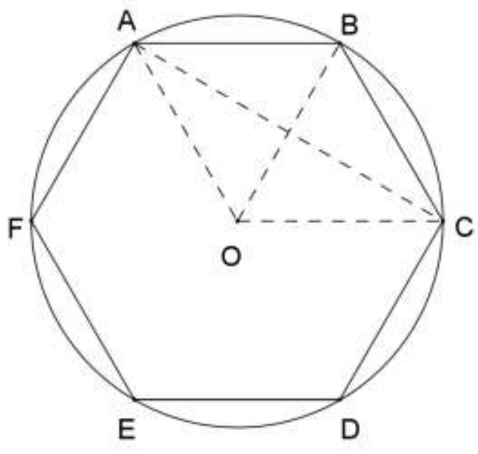
O comprimento do contorno da figura é

$$2p_{circ.} + 3L_3 + 2L_6 + 2R = 2\pi R + 3R\sqrt{3} + 2R + 2R = R\left(2\pi + 3\sqrt{3} + 4\right) = R\left(2 \cdot 3 + 3 \cdot 1{,}7 + 4\right) = 15{,}1 \cdot R = 181{,}2\text{ cm}$$

O gasto com ouro é $181{,}2 \cdot \frac{450}{10} = 8154$ reais.

RESPOSTA: B

8.



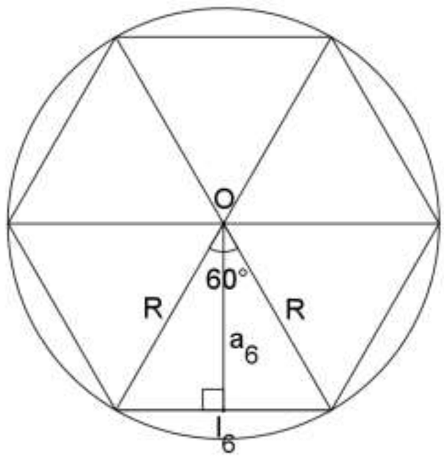
A área do losango $ABCO$ é igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros ABO e BCO ambos de lados iguais a R, então

$$S_{ABCO} = 2 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 24 \Leftrightarrow R^2 = \frac{48}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3} \Leftrightarrow R = 4\sqrt[4]{3}$$

Sabemos que o lado do hexágono regular inscrito em uma circunferência é igual ao seu raio. Logo, o lado do hexágono é igual a $4\sqrt[4]{3}\text{ cm}$.

RESPOSTA: A

9.



Como pode ser observado na figura acima, se o apótema de um hexágono regular é igual à altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm, então o lado do hexágono é igual ao lado do triângulo equilátero, ou seja, 4 cm.

A área do hexágono é igual à soma das áreas de seis triângulos equiláteros de lado 4 cm. Dessa forma, $S_{hex} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

RESPOSTA: D

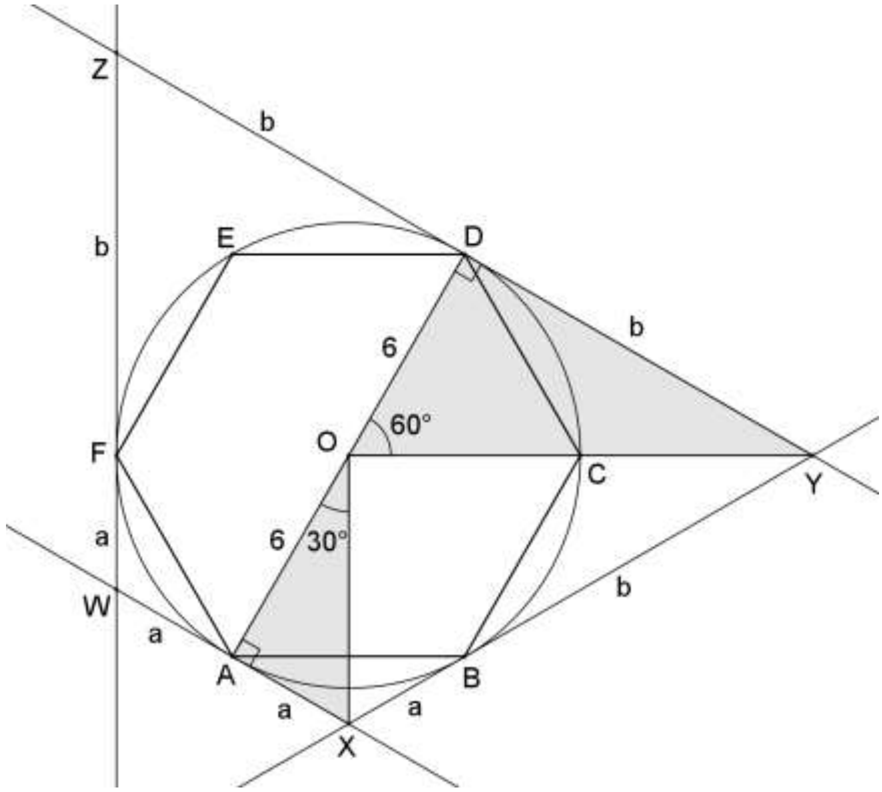
10.

$$L_4 = R\sqrt{2} \Rightarrow 2p_{quad} = 4 \cdot L_4 = 4 \cdot R\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \Leftrightarrow R = 5$$

O apótema do hexágono regular inscrito na circunferência de raio R é $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ m}$.

RESPOSTA: C

11. A figura a seguir ilustra a situação descrita no enunciado.



Sabemos que uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Como $BC = CD = 60^\circ$, então O, C e Y estão alinhados.

No triângulo retângulo OAX, $A\hat{O}X = 30^\circ$ e $\frac{AX}{OA} = \operatorname{tg} 30^\circ \Leftrightarrow \frac{a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$.

No triângulo retângulo ODY, $D\hat{O}Y = 60^\circ$ e $\frac{DY}{DO} = \operatorname{tg} 60^\circ \Leftrightarrow \frac{b}{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = 6\sqrt{3}$.

Como retas tangentes a uma circunferência por um mesmo ponto são iguais e como $A\hat{O}X = A\hat{O}W = 30^\circ$, temos $a = XA = XB = WA = WF = 2\sqrt{3}$.

Da mesma forma, $b = YB = YD = WD = WF = 6\sqrt{3}$.

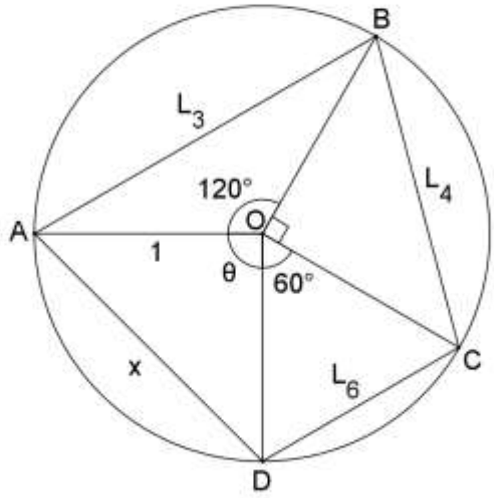
Portanto, o perímetro do quadrilátero $XYZW$ é:

$$2p_{XYZW} = XY + YZ + ZW + WX = (a+b) + 2b + (a+b) + 2a = 4 \cdot (a+b) =$$
$$= 4 \cdot \left(2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) = 32\sqrt{3} = 32 \cdot 1{,}7 = 54{,}4 \text{ u.c.}$$

Observe que o quadrilátero $XYZW$ é um trapézio isósceles.

RESPOSTA: A

12.



Os lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular inscritos na circunferência determinam ângulos centrais de $120^\circ, 90^\circ$ e 60°, respectivamente.

Assim, independente da ordem em que esses lados apareçam, o quarto lado vai determinar um ângulo central $\theta = A\hat{O}B = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

Logo, o quarto lado é igual ao lado do quadrado inscrito na circunferência, ou seja, $x = AD = L_4$.

Portanto, o perímetro do quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência de raio $R = 1\,\text{u.c.}$ é

$$2p_{ABCD} = L_3 + L_6 + 2L_4 = R\sqrt{3} + R + 2R\sqrt{2} = R\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1 \text{ u.c.}.$$

RESPOSTA: B

13. O lado do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio R é $L_3 = 2\sqrt{3}R$.

O lado do quadrado circunscrito a um círculo de raio R é $L_4 = 2R$.

O lado do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio R é $L_6 = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

O teorema de Pitot estabelece que as somas dos lados opostos de um quadrilátero circunscritível são iguais. Assim, para que o quarto lado tenha a maior medida possível, ele deve ser oposto ao menor lado, ou seja, o lado do hexágono regular circunscrito.

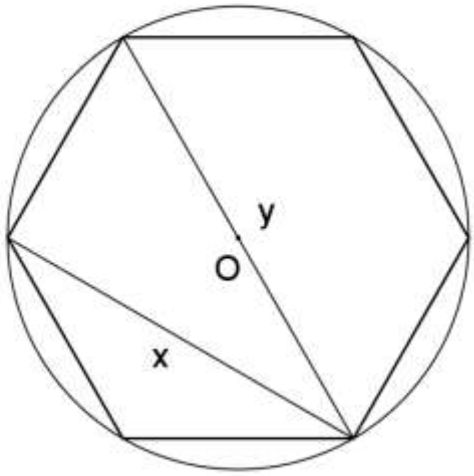
Sendo x a medida do quarto lado, pelo teorema de Pitot, temos:

$$x + L_6 = L_3 + L_4 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}R + 2R - \frac{2\sqrt{3}}{3}R = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\right)R.$$

$R = 6 \Rightarrow x = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\right) \cdot 6 = \left(8\sqrt{3} + 12\right)$ unidades de comprimento.

RESPOSTA: C

14. Seja um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r, conforme a figura abaixo.



A menor diagonal x determina um arco de 120°, logo $x = L_3 = R\sqrt{3}$.

A maior diagonal y é um diâmetro, logo $y = 2R$.

$$1\,\text{nix} = \sqrt{3}\,\text{cm} \Leftrightarrow 1\,\text{cm} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{nix}$$

$$R = 1\,\text{cm} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{nix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1\,\text{nix} \ \wedge \ y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{nix}$$

Logo, x e y são, respectivamente, um número inteiro e um número irracional.

RESPOSTA: C

15. O ângulo central do pentadecágono regular é $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$. Logo, suas diagonais são cordas que determinam arcos múltiplos de 24°.

(F) P tem diagonal que mede $2R$.

$2R$ é o diâmetro da circunferência e determina um arco de 180°. Como $\frac{180^\circ}{24^\circ} = 7,5 \notin \mathbb{Z}$, o pentadecágono não possui uma diagonal de medida $2R$.

(F) P tem diagonal que mede $R\sqrt{2}$.

$R\sqrt{2}$ é o lado do quadrado inscrito na circunferência e determina um arco de 90°. Como $\frac{90^\circ}{24^\circ} = 3,75 \notin \mathbb{Z}$, o pentadecágono não possui uma diagonal de medida $R\sqrt{2}$.

(V) P tem diagonal que mede $R\sqrt{3}$.

$R\sqrt{3}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência e determina um arco de 120°. Como

$\frac{120°}{24°}=5\in\mathbb{Z}$, o pentadecágono possui uma diagonal de medida $R\sqrt{3}$.

(V) P tem diagonal que mede $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ é o lado do pentágono regular convexo inscrito na circunferência e determina um arco de $72°$.
Como $\frac{72°}{24°}=3\in\mathbb{Z}$, o pentadecágono possui uma diagonal de medida $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

RESPOSTA: C

16. Nessa solução é útil saber que o lado do hexágono regular convexo e do octógono regular convexo inscritos em uma circunferência de raio R são $l_6=R$ e $l_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, respectivamente.

Supondo que a pessoa caminhou a vezes a distância x e b vezes a distância $y=x\sqrt{2-\sqrt{2}}$, então, se ele parte do ponto P e retorna ao ponto P, forma-se um polígono convexo.

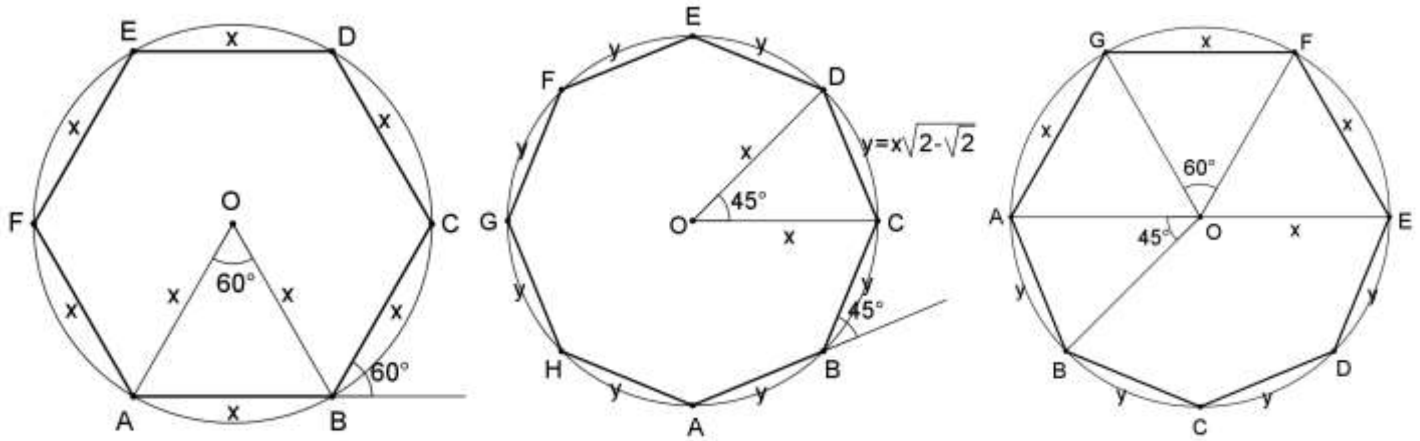
A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é $360°$, logo: $a\cdot 60°+b\cdot 45°=360°\Leftrightarrow 4a+3b=24$

Como a e b são inteiros não negativos, temos $(a,b)\in\{(6,0);(3,4);(0,8)\}$.

Se $a=6$ e $b=0$, forma-se um hexágono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio x.

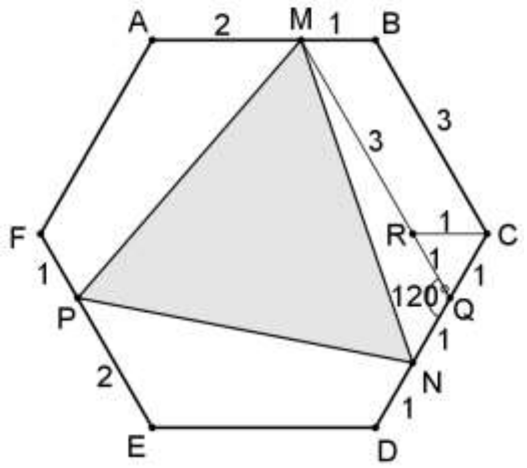
Se $a=0$ e $b=8$, forma-se um octógono regular convexo inscrito em uma circunferência de raio x.

Se $a=3$ e $b=4$, forma-se um heptágono convexo inscrito em uma circunferência de raio x. Os três lados de medida x determinam um arco de $3\cdot 60°=180°$ e os quatro lados de medida $y=x\sqrt{2-\sqrt{2}}$ determinam um arco de $4\cdot 45°=180°$, completando a circunferência. Como esse heptágono está inscrito em uma circunferência, é possível trocar a ordem dos lados e continuaremos formando um heptágono convexo.



RESPOSTA: D

17.



Pela simetria da figura, conclui-se que o triângulo MNP é equilátero.

Traçando MQ paralelo a BC, obtém-se o trapézio isósceles BCQM.

Traçando RC paralelo a MB, obtém-se o paralelogramo MBCR e o triângulo equilátero CRQ. Logo, $MQ = MR + RQ = 3 + 1 = 4$.

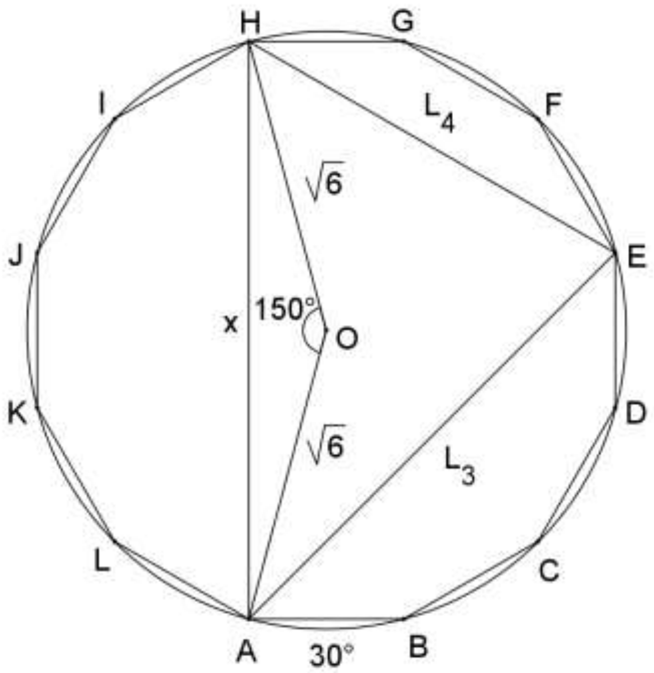
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo MQN, temos:

$$MN^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 17 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 21 \Leftrightarrow MN = \sqrt{21}$$

Assim, o perímetro do triângulo equilátero MNP é $2p = 3\sqrt{21}$ cm.

RESPOSTA: D

18.



O dodecágono regular determina arcos de $\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$ sobre o círculo circunscrito de centro O e raio $R=\sqrt{6}$.

$AE=4\cdot 30^\circ=120^\circ \Rightarrow AE=L_3=R\sqrt{3}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

$EH=3\cdot 30^\circ=90^\circ \Rightarrow EH=L_4=R\sqrt{2}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}$

Aplicando a lei dos cossenos no ΔAOH, então

$$AH^2=AO^2+AH^2-2\cdot AO\cdot AH\cdot\cos 150^\circ \Leftrightarrow x^2=\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=12+6\sqrt{3}$$

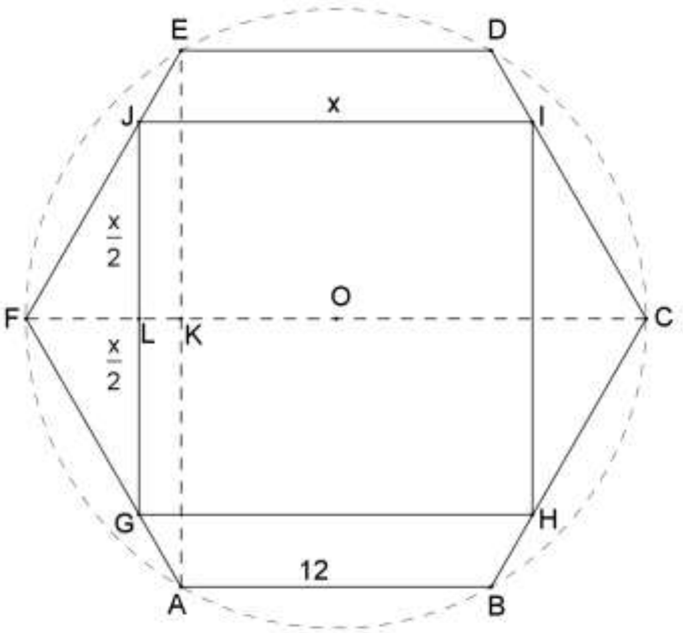
$$\Leftrightarrow x^2=3\left(4+2\sqrt{3}\right)=3\left(1+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+3$$

Logo, o perímetro do ΔAEH é

$$2p_{AEH}=AE+EH+AH=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}+3\right)=3\left[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]\text{u.c.}.$$

RESPOSTA: B

19.



Seja GHIJ um quadrado inscrito no hexágono regular de lado 12 ABCDEF, onde $GH \| IJ \| AB \| DE$ e $HI \| JG \| AE \| BD$.

Observando que o raio do círculo circunscrito ao hexágono é 12, então $CF=24$ é um diâmetro e $AE=12\sqrt{3}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito na mesma circunferência.

Os triângulos FLJ e FKE possuem lados paralelos, então $\Delta FLJ \sim \Delta FKE \Rightarrow \frac{JL}{EK}=\frac{FL}{FK}$.

Sabemos que $EK = \frac{AE}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $FL = \frac{24-x}{2}$ e $FK = \frac{OF}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Assim,

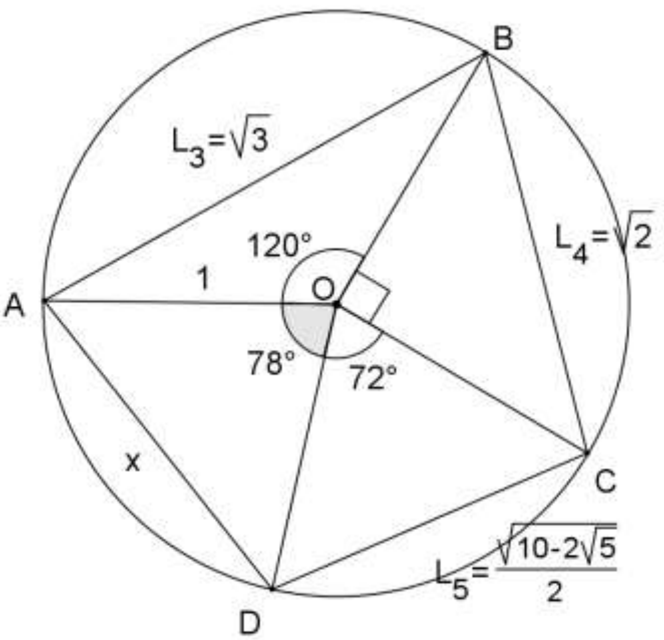
$$\frac{JL}{EK} = \frac{FL}{FK} \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\frac{24-x}{2}}{6} \Leftrightarrow x = 24\sqrt{3} - x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 12\left(3-\sqrt{3}\right) \text{ u.c.}.$$

Portanto,

$$1,72 < \sqrt{3} < 1,75 \Leftrightarrow 1,25 < 3-\sqrt{3} < 1,28 \Leftrightarrow 15 < 12\left(3-\sqrt{3}\right) < 15,36 \Rightarrow 15 < x < 15,5.$$

RESPOSTA: E

20.



O lado do triângulo equilátero é $L_3 = R\sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1,7$, o lado do quadrado é $L_4 = R\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1,4$ e o lado do pentágono regular é $L_5 = \frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \simeq 1,2$.

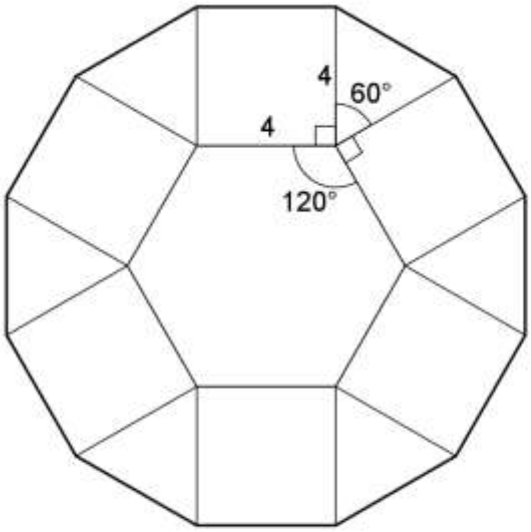
O lado AD de medida x é uma corda que determina um arco de $78°$.

Mas, $72° < 78° < 90° \Rightarrow L_5 < x < L_4 \Rightarrow 1,2 < x < 1,4$.

Observe que não era necessário conhecer a expressão do lado do triângulo equilátero, pois não foi usada, e nem a do pentágono regular, pois sua medida foi dada. O importante nesse problema era identificar o ângulo central.

RESPOSTA: B

21.



A área do dodecágono é a área de uma hexágono de lado 4, mais a área de 6 quadrados de lado 4 e mais 6 triângulos equiláteros de lado 4.

A área do hexágono de lado 4 é igual à área de 6 triângulos equiláteros de lado 4.

$$S_{\text{dodecágono}} = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 4^2 + 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\left(\sqrt{3}+2\right) \text{cm}^2$$

RESPOSTA: A