



ITA 2023



FÍSICA

AULA 05

Força de atrito e dinâmica do movimento curvilíneo

Prof. Toni Burgatto





Sumário

Introdução	3
1. Força de atrito	3
1.1. Atrito seco entre sólidos	3
1.2. Qual a origem das forças de atrito?	8
1.3. Atrito estático	8
1.4. Atrito dinâmico	11
1.5. Resistência dos fluidos	13
2. Dinâmica do movimento curvilíneo	20
2.1. As resultantes tangencial e centrípeta	20
2.2. A componente tangencial	21
2.3. A componente centrípeta	23
2.4. As componentes tangencial e centrípeta nos principais movimentos	24
2.5. Força centrífuga	36
3. Lista de questões nível 1	38
4. Gabarito sem Comentários nível 1	42
5. Lista de questões nível 1 comentada	43
6. Lista de questões nível 2	54
7. Gabarito sem Comentários nível 2	70
8. Lista de questões nível 2 comentada	71
9. Lista de questões nível 3	124
10. Gabarito sem Comentários nível 3	136
11. Lista de questões nível 3 comentada	138
12. Referências Bibliográficas	180
13. Considerações Finais	180



Introdução

Nessa aula, continuaremos com o estudo de dinâmica, abordando os seguintes temas: força elástica, força de atrito e forças no movimento curvilíneo.

Este assunto é muito abordado no ITA não apenas em questões propriamente ditas, mas de forma interdisciplinar.

É muito importante que você tenha todos os conceitos bem enraizados e treine com muitas questões, sem sair do foco dos nossos vestibulares.

Questões clássicas que envolvem análise de dinâmica e de energia mecânica serão trabalhadas posteriormente na aula de energia mecânica. Assim como trabalharemos algumas questões de dinâmica na aula de dinâmica impulsiva.

Fique à vontade para tirar dúvidas comigo no fórum ou se preferir:

Siga minha rede social!



@proftoniburgatto

1. Força de atrito

1.1. Atrito seco entre sólidos

Forças de atrito de estão presentes na vida diária. Quando vencemos as forças de atrito somos capazes de locomover e de girar.

Ela surge da interação entre a superfície dos corpos. Quando um corpo desliza sobre a superfície de outro corpo, logo, há movimento relativo entre as superfícies, os corpos exercem entre eles uma força tangente à superfície de contato, se opondo ao deslizamento.

Até agora estudamos casos onde essa interação era desprezível. Entretanto, na prática as forças de atrito sempre existem e são essenciais, por exemplo, quando você segura um lápis para escrever, enquanto você caminha, pregos e parafusos segurando algo e etc.

É possível reduzir bem o atrito entre superfícies sólidas utilizando lubrificantes ou fazendo um ótimo polimento das superfícies.



Vamos estudar alguns exemplos da utilização da força atrito na nossa vida.

Exemplo 1: força de atrito freando objetos.

Um bloco lançado com velocidade inicial \vec{v}_0 em uma mesa horizontal.

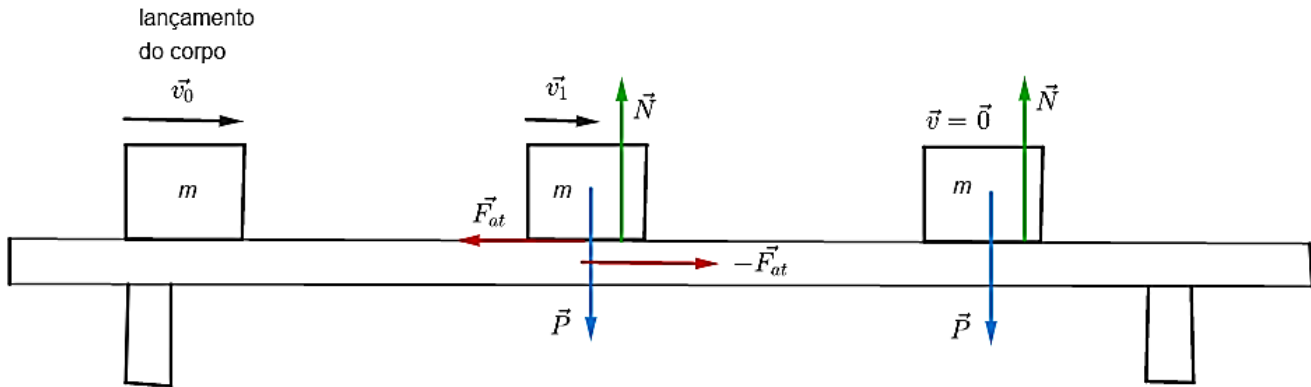


Figura 1: Lançamento de um bloco com massa m sobre uma mesa que possui atrito.

Após lançar o corpo com velocidade inicial \vec{v}_0 , devido a interação entre as superfícies surge uma força de atrito \vec{F}_{at} no bloco contrária ao seu movimento. Pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco deve ter exercido uma força de mesma intensidade e sentido contrário na mesa ($-\vec{F}_{at}$).



Quando o bloco para a força de atrito se anula. Note que a força resultante que a superfície da mesa faz sobre o bloco é a composição da força normal e da força de atrito.

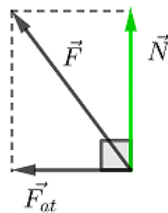
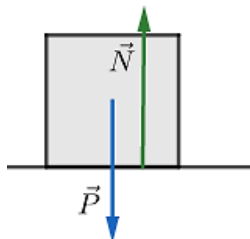


Figura 2: Componentes que definem a força de contato entre bloco e superfície.

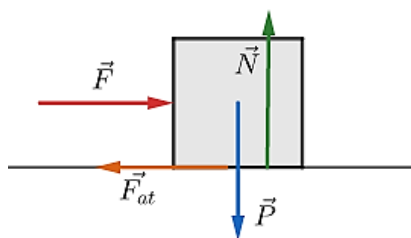
$$F^2 = N^2 + F_{at}^2$$

Exemplo 2: força de atrito oposta a tendência do movimento.

Um saco de cimento repousa sobre uma superfície plana e horizontal, onde atuam apenas as forças peso (\vec{P}) e normal (\vec{N}).



Se um operador faz uma força horizontal \vec{F} mas está ainda não suficiente para tirar o saco de cimento da sua posição inicial, dizemos que a força exercida pela pessoa é igual a força de atrito estático entre o solo e o objeto. Neste caso, a força de atrito deve ter sentido contrário à **tendência do movimento**.



Neste caso, temos que:

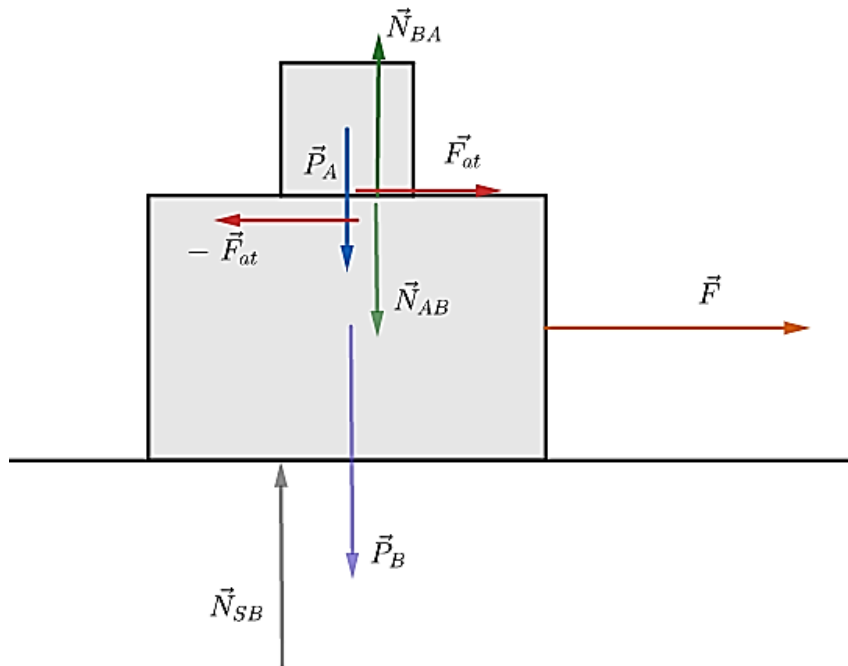
$$\vec{F} + \vec{F}_{at} = \vec{0}$$

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_{at}|$$

Se olharmos apenas para estes dois exemplos, somos levados a concluir que a força de atrito sempre tem sentido contrário a tendência do movimento ou contrário ao movimento. Entretanto, há casos onde a força de atrito tem **o mesmo sentido** que o movimento do corpo.

Exemplo 3: força de atrito na direção do movimento.

Vamos colocar um objeto A em cima de um objeto maior B, de tal forma que aplicamos uma força horizontal em B. Inicialmente o sistema está em repouso. Se considerarmos o atrito entre B e o solo desprezível, temos os seguintes diagramas de força.



Quando aplicamos a força na horizontal ao bloco B, dependendo da intensidade de \vec{F} pode acontecer dos dois blocos se deslocarem juntos, ou seja, o bloco A não escorrega sobre B. Isso acontece pois existe uma força de atrito no bloco A no mesmo sentido de \vec{F} .

Outra maneira de enxergar isso é pelo princípio da Inércia. Se não houvesse atrito, o bloco A deveria ficar parado em relação ao solo, pois não existem força resultante atuando nele, quando desconsideramos o atrito.

Se colocássemos o referencial no bloco B, o corpo A deveria ir para a esquerda, sentido oposto a tendência do movimento de A em relação a B. Observe que por Ação e Reação a força de atrito no bloco B está orientada para a esquerda, sentido contrário ao movimento dos blocos.

Exemplo 4: força de atrito na caminhada de uma pessoa.

Quando uma pessoa caminha para a direita em relação ao solo, o pé do indivíduo aplica ao chão uma força $-\vec{F}$ para a esquerda. De acordo com a 3ª lei, o chão aplica sobre o pé da pessoa uma força \vec{F} para a direita.

Note que as forças $-\vec{F}$ e \vec{F} são forças de atrito. Caso não existisse atrito entre a sola do sapato e o chão, a pessoa escorregaria, isto é, ela faria uma força horizontal para trás e não teria nenhum efeito do solo para “lançar” ela para frente.



Figura 3: Força de atrito responsável pelo movimento de uma pessoa para frente.

Observe que a tendência do movimento do indivíduo é para a esquerda. Novamente, a força de atrito atua no sentido contrário a tendência do movimento da pessoa.

Se existe movimento relativo entre as superfícies em contato, chamamos de **força de atrito dinâmico**. Quando não há movimento relativos entre as superfícies de contato, denominamos por **força de atrito estático**.

Exemplo 5: força de atrito na tração de um automóvel.

Quando dizemos que um carro tem tração traseira, dizemos apenas que as rodas traseiras são tracionadas pelo motor. Considere um móvel com tração traseira. Se as rodas de trás são tracionadas pelo motor, elas “empurram” o chão para trás com uma força $-\vec{F}$. Pela 3ª lei, o chão exerce uma força nas rodas \vec{F} que impulsiona o carro para frente. Se a roda não derrapar, $-\vec{F}$ e \vec{F} são as forças de atrito estático.

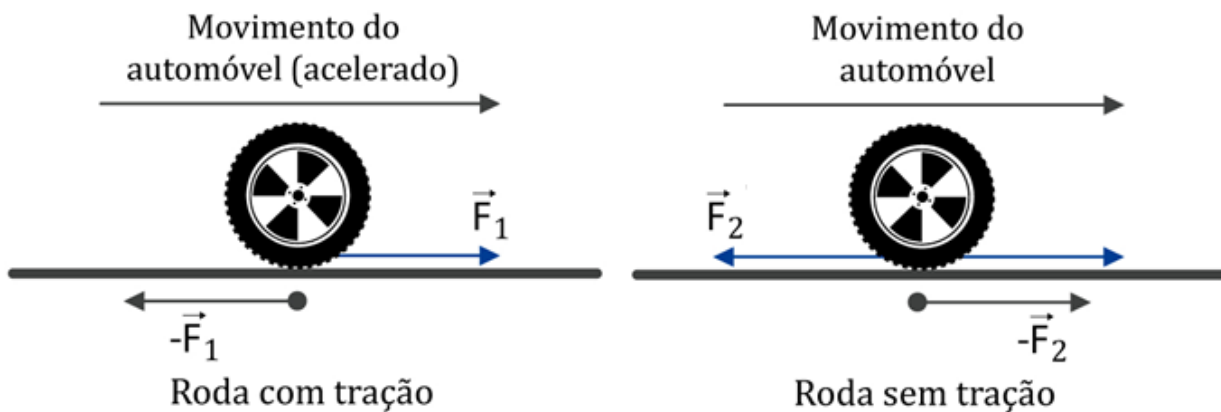


Figura 4: Roda tracionada (à esquerda) onde a ação da força de atrito é responsável pelo deslocamento para a direita e roda sem tração (à direita) onde a reação do atrito impulsiona o carro para a direita.

Por outro lado, as rodas da frente não são tracionadas (apenas se o automóvel for 4x4 terá tração nas 4 rodas) e essas rodas “empurram” o chão para frente como uma força \vec{F}' . Pelo Princípio da Ação e Reação, o chão empurra a roda com mesma força, mas sentido contrário $-\vec{F}'$. Se a roda **não derrapar**, as forças \vec{F}' e $-\vec{F}'$ são forças de **atrito estático**.



1.2. Qual a origem das forças de atrito?

Independente de quão lisa seja a superfície, utilizando um microscópio podemos ver as irregularidades que ela apresenta. Considere um livro sobre uma mesa.

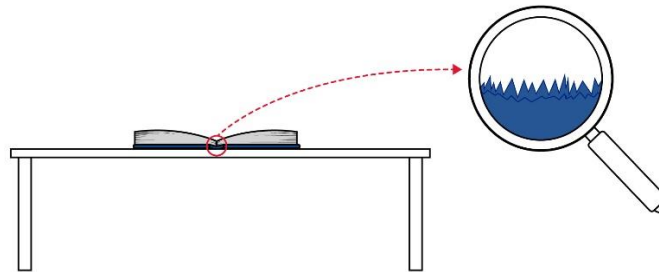


Figura 5: Ampliação de uma superfície rugosa, mostrando as imperfeições das áreas de contato.

Notamos que na verdade a área real de contato é menor que a área da base do livro. Apenas os pontos mais salientes se tocam. Assim, os “picos” e as “depressões” se interpenetram dificultando o movimento de uma superfície em relação à outra.

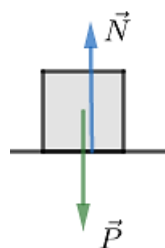
Essa não é a única causa do atrito, ainda existe a força de coesão ou de adesão entre as moléculas dos dois corpos em contato. Chamamos de força de coesão quando os materiais são iguais e força de adesão quando os materiais são diferentes.

Se colocarmos duas superfícies metálicas bem polidas e limpas em contato em alto vácuo, é quase impossível fazer uma deslizar em relação à outra. Devido ao fato de serem muito lisas, a interação entre os átomos é muito forte e as superfícies se soldam a frio formando uma única peça metálica.



1.3. Atrito estático

Para estudar o atrito estático, vamos utilizar um bloco em repouso em cima de uma mesa horizontal e fazer o diagrama de forças que nele atuam.

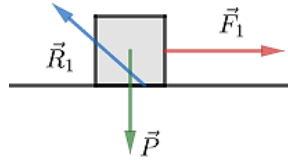


Note que essas são as forças que atuam no corpo e pela condição de equilíbrio temos que:

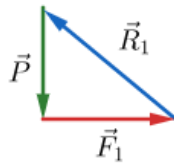


$$\vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$$

Se uma pessoa faz uma força \vec{F}_1 na horizontal, mas este não se move, então, a força de contato da mesa, a força exercida pelo indivíduo e o peso do bloco devem ter resultante nula, ou seja:



Pela condição de equilíbrio, temos que:

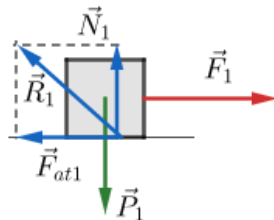


$$\vec{R}_1 + \vec{P} + \vec{F}_1 = \vec{0}$$

Repare que a força de contato \vec{R}_1 pode ser decomposta em duas componentes:

- 1) Componente perpendicular à superfície de contato, a qual chamamos de **força normal**; e
- 2) Componente tangencial à superfície de contato, a qual chamamos de **força de atrito**.

Diagrama de forças com \vec{R}_1 decomposta:



Podemos separar a condição de equilíbrio para cada direção:

- Na horizontal:

$$F_{at1} = F_1$$

- Na vertical:

$$N_1 = P_1$$

Se aumentarmos a força \vec{F}_1 aplicada pelo indivíduo, a força de atrito entre o corpo e a superfície também aumentaria e a normal continuaria a mesma, já que o peso do objeto não se alterou.

Poderíamos repetir esse processo até o momento que a força aplicada pela pessoa seja quase suficiente para mover o bloco. Dizemos que o bloco está na iminência de mover-se. Nessa situação, temos que o atrito estático é máximo ($\vec{F}_{at,e1}^{máx}$).



Se repetirmos a experiência, mas com uma massa maior em cima do bloco, verificaremos que a força de atrito máxima aumentou ($\vec{F}_{at,e2}^{máx}$), já que a normal aumentou também (N_2). Entretanto, quando fazemos $\frac{F_{at,e}^{máx}}{N}$, temos que:

$$\frac{F_{at,e1}^{máx}}{N_1} = \frac{F_{at,e2}^{máx}}{N_2} = \dots = \frac{F_{at,e}^{máx}}{N}$$

Chamamos de coeficiente de atrito estático μ_e este quociente entre a força de atrito máxima e sua respectiva normal:

$$\frac{F_{at,e1}^{máx}}{N_1} = \frac{F_{at,e2}^{máx}}{N_2} = \dots = \frac{F_{at,e}^{máx}}{N} = \mu_e$$

Portanto:

$$F_{at,e}^{máx} = \mu \cdot N$$

Note que μ_e é definido como quociente de duas grandezas de mesma dimensão, assim, o coeficiente de atrito será adimensional, isto é, não possui unidade.

Observe que a força de atrito e a normal são apenas composição da força de contato entre as superfícies.

Como vimos através do experimento, a força de atrito estático varia de 0 até seu valor máximo:

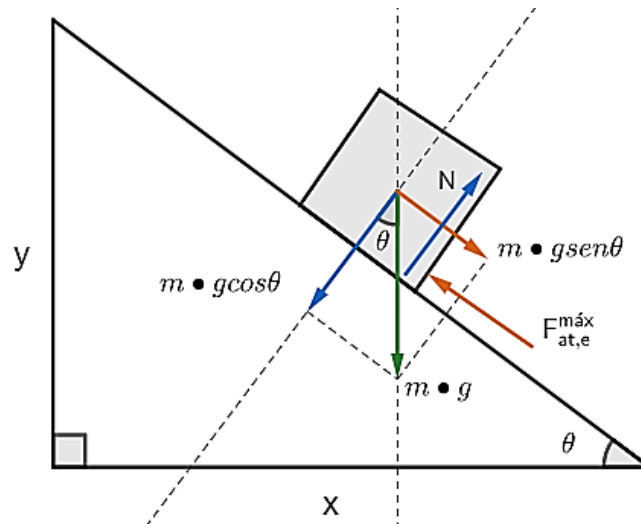
$$0 \leq F_{at,e} \leq F_{at,e,máx} = \mu_e \cdot N$$

Os coeficientes de atrito são determinados experimentalmente. Os valores de μ_e dependem das propriedades dos corpos e das superfícies de contato. Assim, sempre que mencionamos coeficiente de atrito colocamos a preposição **entre**, por exemplo, atrito *entre* o ovo e uma frigideira de Teflon é próximo de 0,04 e o atrito *entre* o sapato de um alpinista e a rocha pode chegar a 1,2 (Halliday, Resnick 2009).

ESCLARECENDO!



Vamos calcular o coeficiente de atrito entre um bloco que está na iminência de deslizar e um plano inclinado, dado as dimensões do plano:



Fazendo a condição de equilíbrio na direção normal ao plano, temos que:

$$N = m \cdot g \cdot \cos\theta \text{ (eq. 1)}$$

Fazendo a condição de equilíbrio na direção tangencial ao plano, temos que:

$$m \cdot g \cdot \sin\theta = F_{at,e}^{m\acute{a}x} = \mu_e \cdot N \text{ (eq. 2)}$$

Substituindo a normal na eq. 2, temos que:

$$m \cdot g \cdot \sin\theta = \mu_e \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta \therefore \mu_e = \frac{y}{x}$$



1.4. Atrito dinâmico

Enquanto a força aplicada horizontalmente sobre um corpo não for maior que a força de atrito estático máxima, este corpo permanecerá em repouso. Somente quando $F > \mu_e \cdot N$ teremos movimento relativo entre as superfícies. Quando isso ocorrer, o atrito deixará de ser estático e passará a ser dinâmico.

Diferentemente da $F_{at,e}$, a força de atrito dinâmico $F_{at,d}$ não varia e seu módulo é sempre dado por:

$$F_{at,d} = \mu_d \cdot N$$

Em que μ_d é o coeficiente de atrito dinâmico (ou cinético).



Novamente, μ_d depende do material de que é feito cada corpo, assim como do estado de polimento e lubrificação das superfícies em contato, entretanto, independem da área das superfícies em contato.

Geralmente, tem-se $\mu_d < 1$, mas existem casos onde $\mu_d \geq 1$. Além disso, semelhante ao μ_e , o coeficiente de atrito dinâmico também é adimensional.

Experimentalmente, verifica-se que à medida que a velocidade se torna muito grande, o coeficiente de atrito cinético diminui, mas essa variação é tão pequena que em geral é desprezada.

Além disso, a experiência mostra que o coeficiente de atrito estático é maior que o cinético:

$$\mu_e \geq \mu_d$$

Entretanto, há casos em que a diferença entre os coeficientes é tão pequena que pode ser desprezada. Então:

$$\mu_e = \mu_d = \mu$$

Quando iniciado o movimento, reduz o acoplamento entre as saliências das superfícies e alteram-se as forças de interação entre as moléculas das superfícies. Vemos isso no nosso dia a dia. É sempre mais tranquilo manter um objeto em movimento que retirá-lo do repouso.



Podemos relacionar a força de atrito com a força que um operador aplica horizontalmente:

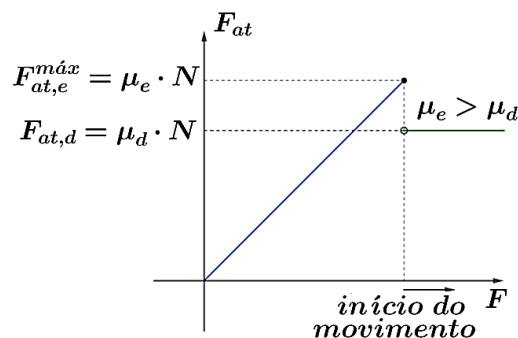


Figura 6: Gráfico da força de atrito em função da força aplicada para mover o corpo.



Podemos sintetizar as características da força de atrito da seguinte forma:



Tipo de Atrito	Direção da F_{at}	Sentido da F_{at}	Intensidade da F_{at}
Estático	Paralela à superfície de contato	Contrário à tendência do movimento	$0 \leq F_{at,e} \leq \mu_e \cdot N$
Dinâmico ou Cinético		Contrário ao movimento	$F_{at,d} = \mu_d \cdot N$

Note a importância de analisar se há movimento ou não entre as superfícies e assim saber se a força de atrito é contrária a tendência ao movimento ou contrária ao movimento. Além disso, se o atrito for estático, é necessário você investigar se o corpo está na iminência de movimento ou não.



1.5. Resistência dos fluidos

Fluidos são substâncias capazes de escoar. Constituem fluidos os líquidos, os gases, os plasmas.

Se um corpo se move no interior de um fluido, ele sofre a ação de uma força de resistência \vec{F}_r de sentido contrário ao movimento do corpo em relação ao fluido e a denotamos por força de atrito fluido, força de atrito viscoso ou força de resistência do fluido.

Estudar as forças e os movimentos dos corpos em fluidos é extremamente difícil e requer uma matemática muito pesada. A maioria das leis propostas são obtidas experimentalmente, como o caso da força de oposição ao movimento, dada por:

$$F_r = K \cdot v^n$$

Em que:

- v é o módulo da velocidade do corpo em relação ao fluido;
- n é uma constante a ser determinada. Ela depende da ordem de grandeza da velocidade e do tamanho do corpo, para muitos casos temos $n = 1$ ou $n = 2$;
- k constante que depende da natureza do fluido, da geometria do corpo, da área da maior seção reta do corpo, na direção perpendicular ao movimento. Se a área aumenta, o valor de k também aumenta.

Para o caso de um objeto movimentando no ar, essa força recebe o nome de arrasto (em inglês *drag*) e sua equação é dada por:



$$D = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Com:

- C é uma constante determinada experimentalmente, chamada de coeficiente de arrasto;
- ρ é a massa específica do ar;
- A é área de seção reta efetiva (área de uma seção reta perpendicular à velocidade \vec{v});

O coeficiente de arrasto depende da velocidade do corpo. Para nossos estudos, consideraremos C constante.

Se uma pessoa está em queda livre, temos a força peso para baixo e a força de arrasto para cima, de tal forma que a resultante é dada por:

$$m \cdot g - D = m \cdot a$$

Notamos que a força de arrasto depende da velocidade e medida que esta aumenta, a força de arrasto também aumenta. Se considerarmos um tempo suficientemente grande, a força de arrasto se iguala a força peso e, assim, a aceleração se anula. A partir desse momento, o corpo começa a cair com velocidade constante, dizemos que ele chegou na velocidade terminal (v_t).

Assim, podemos escrever que:

$$m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot v_t^2 = 0$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{C \cdot \rho \cdot A}}$$

Se a força de resistência é escrita como $F_r = k \cdot v^2$, podemos escrever a segunda lei de Newton a cada instante da queda e teríamos que:

$$m \cdot g - k \cdot v^2 = m \cdot a$$

$$a = g - \frac{k \cdot v^2}{m}$$

Note que não temos mais o caso de uma aceleração constante, como foi no estudo de um MUV no vácuo.

Se plotarmos a aceleração do corpo em relação ao tempo, teremos a seguinte curva:

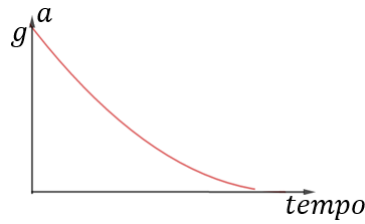


Figura 7: Gráfico da aceleração de um corpo caindo e sofrendo ação da resistência do fluido.

Se o corpo é abandonado de uma dada altura, sua velocidade inicial é nula, logo, $a = g$.

Quando olhamos a força de resistência na forma $F_r = k \cdot v^2$, podemos escrever a velocidade terminal ou velocidade limite da seguinte forma:

$$F_r = P$$

$$k \cdot v_t^2 = m \cdot g$$

$$v_t = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$$

Se quando o corpo atinge a velocidade limite ele passa a desenvolver um movimento uniforme, então o gráfico da velocidade em função do tempo é:

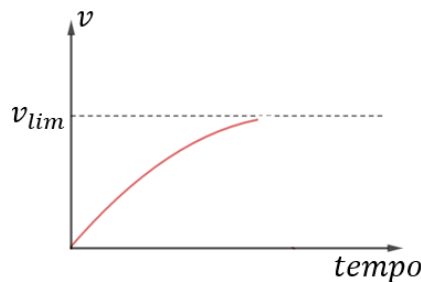


Figura 8: Gráfico da velocidade de um corpo que sofre a ação de resistência do fluido.

Notamos que a unidade de k é dada por:

$$u(k) = \frac{u(F_r)}{u(v^2)} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{kg}{m}$$

ESCLARECENDO!

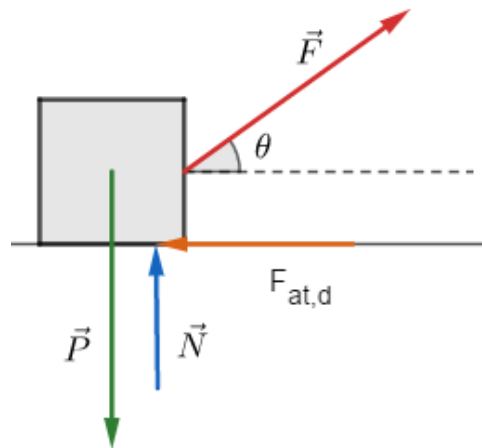


1)
Uma caixa de m repousa sobre um plano horizontal, onde o atrito cinético é μ_d . A caixa é puxada por um operador por uma força de módulo F que faz um ângulo θ . Se a aceleração do corpo é a , calcule o módulo F .

Comentários:



Fazendo o diagrama de forças, temos:



Aplicando a segunda lei de Newton na direção normal, temos:

$$F_{sen\theta} + N = P$$

$$N = mg - F_{sen\theta}$$

Fazendo novamente a 2ª lei, mas na direção tangencial a superfície, temos que:

$$Fcos\theta - F_{at,d} = m \cdot a$$

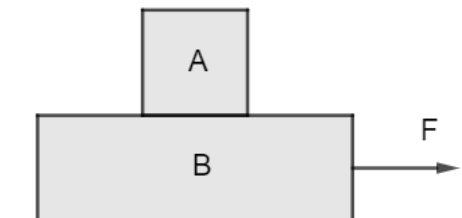
Porém, $F_{at,d} = \mu \cdot N$, então:

$$Fcos\theta - \mu_d \cdot (mg - Fsen\theta) = m \cdot a$$

$$F = \frac{m(a + g \cdot \mu_d)}{cos\theta + \mu_d \cdot sen\theta}$$

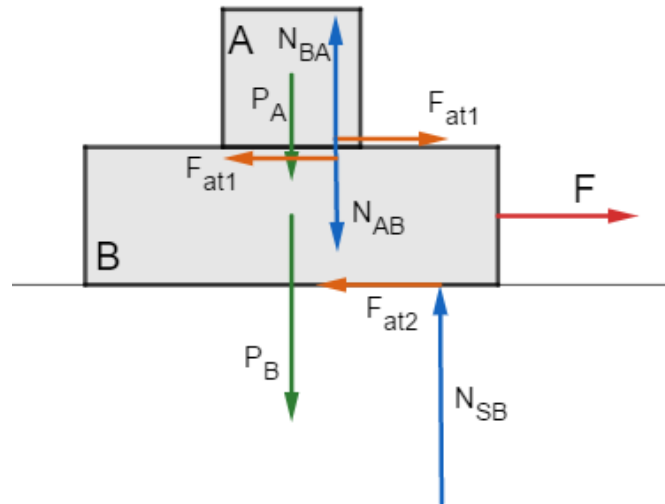
2)

Considere um sistema constituído de dois blocos, onde o coeficiente de atrito estático entre A e B vale μ_1 e o coeficiente de atrito dinâmico entre B e o solo vale μ_2 . Determine a máxima força aplicada em B para que o bloco A não escorregue em relação a B. Qual a aceleração de cada bloco se a força aplicada em B for $2F_{m\acute{a}x}$? Dado que o coeficiente de atrito dinâmico entre A e B vale μ_{1d} .



Comentários:

Vamos fazer o diagrama de forças para os dois objetos:



O sentido da força de atrito no bloco A pode ser determinado pelo Princípio da Inércia, conforme no exemplo dado na teoria.

1) Para o caso da força aplicada F ser máxima sem movimento relativo dos blocos, devemos ter que:

$$a_A = a_B = a$$

Dessa forma, podemos escrever a segunda lei para cada um dos corpos em cada direção:

Bloco A:

$$\begin{cases} \text{horizontal: } F_{at1} = m_A \cdot a \\ \text{vertical: } N_{BA} = P_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 \cdot m_A \cdot g = m_A \cdot a \\ N_{BA} = m_A \cdot g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \mu_1 \cdot g}$$

Bloco B:

$$\begin{cases} \text{horizontal: } F_{m\acute{a}x} - F_{at1} - F_{at2} = m_B \cdot a_B \\ \text{vertical: } N_{SB} = N_{AB} + P_B \\ N_{AB} = N_{BA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{m\acute{a}x} = \mu_1 \cdot m_A \cdot g + \mu_2 \cdot N_{SB} + m_B \cdot \mu_1 \cdot g \\ N_{SB} = (m_A + m_B)g \\ N_{AB} = N_{BA} = m_A \cdot g \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{F_{m\acute{a}x} = (\mu_1 + \mu_2) \cdot (m_A + m_B) \cdot g}$$

2) Para o caso em que $F = 2F_{m\acute{a}x}$ teremos que se a força F supera a máxima força para o qual não existe movimento relativo entre os blocos. Portanto, os blocos terão acelerações diferentes. Vamos rescrever a 2ª Lei para cada bloco na direção horizontal:

$$\begin{cases} F_{at1d} = m_A \cdot a_A \\ 2F_{m\acute{a}x} - F_{at1d} - F_{at2} = m_B \cdot a_b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{1d} \cdot m_A \cdot g = m_A \cdot a_A \\ 2F_{m\acute{a}x} - \mu_{1d} \cdot m_A \cdot g - \mu_2 \cdot m_B \cdot g = m_B \cdot a_B \end{cases}$$



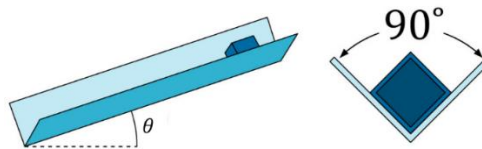
$$\Rightarrow \begin{cases} a_A = \mu_{1d} \cdot g \\ a_B = \frac{2F_{m\acute{a}x} - (\mu_{1d} \cdot m_A + \mu_2 \cdot m_B) \cdot g}{m_B} \end{cases}$$

Em que $F_{m\acute{a}x} = (\mu_1 + \mu_2) \cdot (m_A + m_B) \cdot g$.



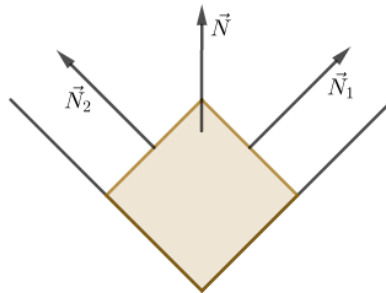
3) (Halliday, Rensick e Walker – 4ª edição)

Uma caixa desliza para baixo através de uma calha de perfil de 90° , que está inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, conforme mostra a figura. O coeficiente de atrito cinético entre elas é μ_k . Qual a aceleração da caixa em função de μ_k , θ e g ?

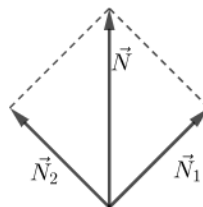


Comentários:

Inicialmente, representaremos as normais que a calha exerce sobre a caixa:



Pela simetria do problema, temos que $N_1 = N_2$. Pela soma vetorial das normais, temos que:



$$N = \sqrt{2} \cdot N_1$$

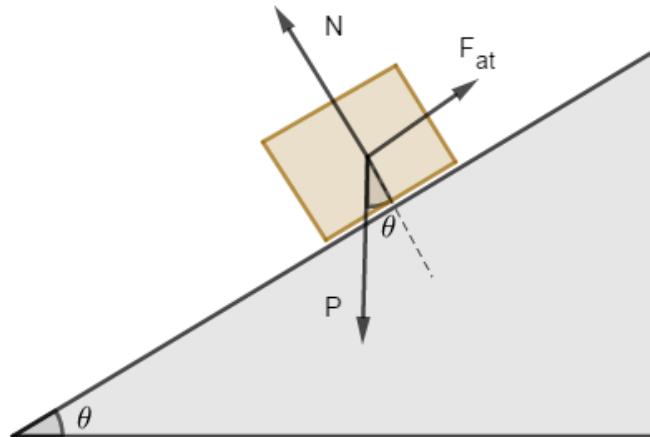
A força de atrito total na caixa, é a soma das forças de atrito em cada lado da caixa:

$$F_{at} = F_{at1} + F_{at2} = 2 \cdot \mu_k \cdot N_1 = 2 \cdot \mu_k \cdot \frac{N}{\sqrt{2}}$$

$$F_{at} = \sqrt{2} \cdot \mu_k \cdot N$$



A partir disso, podemos fazer a vista lateral da caixa, para conhecer a aceleração na direção da calha:



Assim, temos as seguintes equações nas duas direções:

$$\begin{cases} \text{normal: } N = m \cdot g \cdot \cos\theta \\ m \cdot g \cdot \text{sen}\theta - \sqrt{2} \cdot \mu_k \cdot N = m \cdot a \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen}\theta - \mu_k \cdot \sqrt{2} \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta = m \cdot a$$

$$\boxed{a = g \cdot (\text{sen}\theta - \sqrt{2} \cdot \mu_k \cdot \cos\theta)}$$

Se o bloco estivesse na iminência de deslizar na calha, toda análise de forças seria semelhante, mas com aceleração nula e trabalharemos com o coeficiente de atrito estático μ_s . Dessa forma, a relação entre o ângulo e o μ_s é dado por:

$$a = 0 \Rightarrow \text{sen}\theta = \sqrt{2} \cdot \mu_s \cdot \cos\theta$$

$$\boxed{\mu_s = \frac{\text{tg}\theta}{\sqrt{2}}}$$

TOME
NOTA!



Note que esse resultado é diferente daquele na teoria quando fomos calcular o μ para um objeto descendo um plano inclinado, onde apenas existe uma superfície de contato.

4)

Uma partícula de massa $m = 20 \text{ kg}$ é lançada verticalmente para baixo com velocidade inicial de módulo $v_0 = 7,0 \text{ m/s}$, numa região em que $g = 10 \text{ m/s}^2$. Desprezando o empuxo do ar e admitindo que a força de resistência do ar que atua na partícula tem módulo $F_r = 8,0 v^2$ (no SI). Analise o que ocorre com a velocidade da partícula.

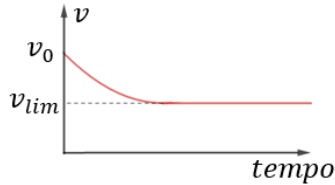
Comentários:



Inicialmente, vamos calcular a velocidade limite da partícula:

$$F_r = P \Rightarrow 8 \cdot v_{lim}^2 = 20 \cdot 10 \Rightarrow v_{lim} = 5 \text{ m/s}$$

Note que a velocidade inicial é maior que a velocidade limite. Isso mostra que teremos $F_r > P$ e o movimento será retardado até quando o corpo atinge a velocidade limite e a partir desse instante começa a descrever um movimento uniforme.



2. Dinâmica do movimento curvilíneo

2.1. As resultantes tangencial e centrípeta

Para estudar a dinâmica do movimento curvilíneo, vamos considerar uma partícula descrevendo uma trajetória curva em relação a um referencial inercial, em um dado plano α .

Se em um dado instante existem as forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 agem sobre a partícula, podemos decompor essas forças em duas direções: normal e tangencial.

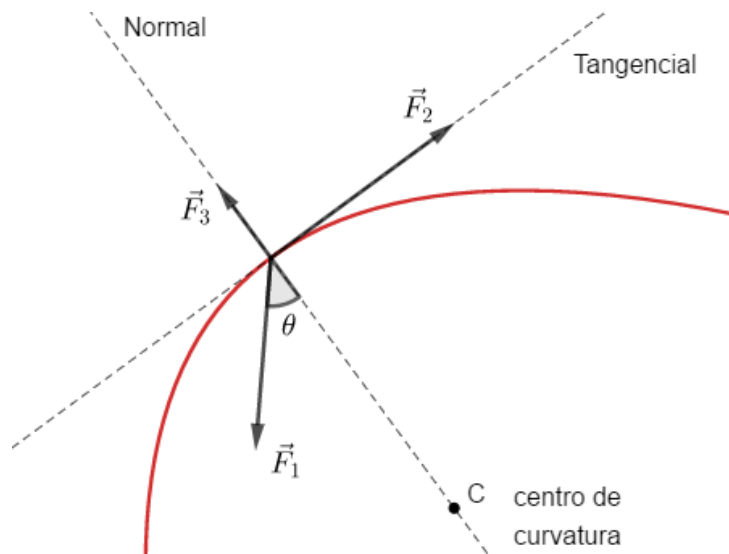


Figura 9: Forças atuando em uma partícula em movimento curvilíneo.

Decompondo as forças nas direções normal e tangencial, encontramos a componente em cada direção:

$$F_t = F_2 - F_1 \cdot \text{sen } \theta$$

$$F_c = F_1 \cdot \text{cos } \theta - F_3$$

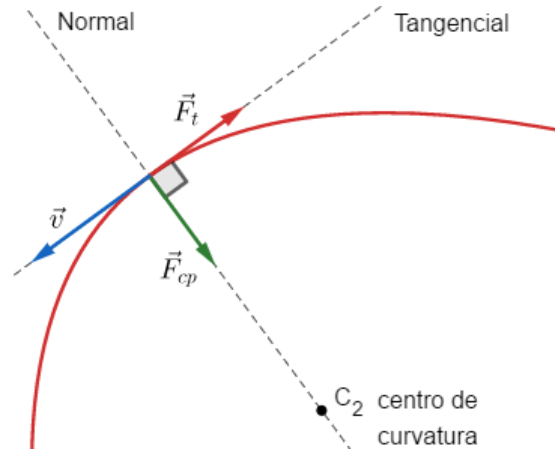


Figura 10: Vetores decompostos nas direções normal e tangencial em movimento curvilíneo.

Dessa forma, a força resultante na partícula pode ser encontrada pela soma vetorial das componentes tangencial e centrípeta (força na direção normal, orientada para o centro de curvatura da trajetória). O módulo pode ser dado pelo Teorema de Pitágoras:

$$F_R^2 = F_t^2 + F_{cp}^2$$

2.2. A componente tangencial

A resultante tangencial é responsável por variar o módulo da velocidade vetorial \vec{v} da partícula. Ela pode ser escrita pela 2ª Lei de Newton como:

$$\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t$$

A direção de \vec{F}_t é sempre a da tangente à trajetória em cada instante. Portanto, ela possui a mesma direção da velocidade vetorial da partícula. Entretanto, o sentido de \vec{F}_t depende da natureza do movimento: acelerado ou retardado.

- Acelerado:

Nesse caso, \vec{F}_t tem o mesmo sentido da velocidade vetorial \vec{v} .

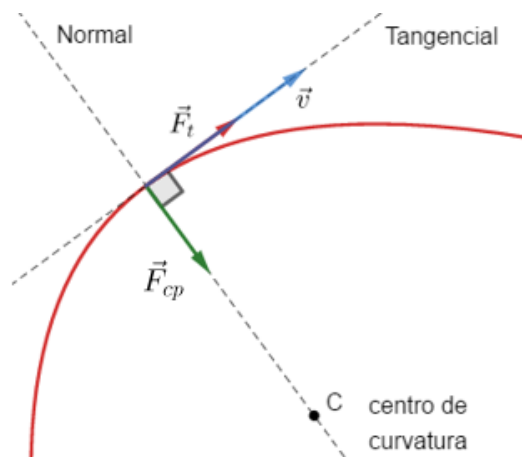


Figura 11: Velocidade e aceleração tangencial no mesmo sentido.



- Retardado:

Nesse caso, \vec{F}_t tem sentido contrário ao da velocidade vetorial \vec{v} .

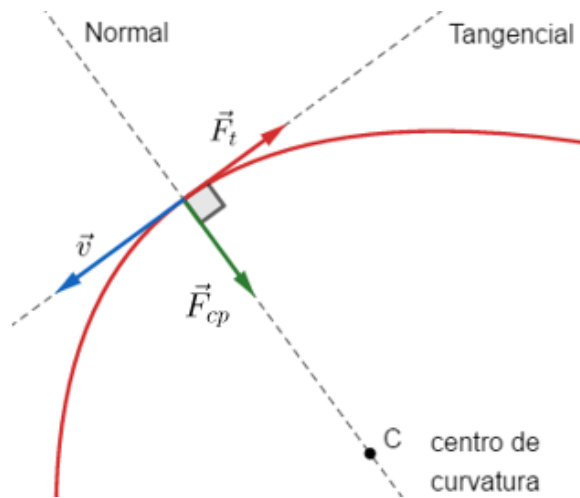


Figura 12: Velocidade e aceleração tangencial em sentidos opostos.

Vamos analisar um pêndulo simples, onde o fio de massa desprezível está fixado em C. Se soltarmos a massa do pêndulo é abandonado em A, o pêndulo passa por B onde tem velocidade máxima e para simetricamente em C. Desprezamos a resistência do ar.

Note que de A para B, o pêndulo descreve um movimento acelerado e de B para C, o pêndulo descreve um movimento retardado:

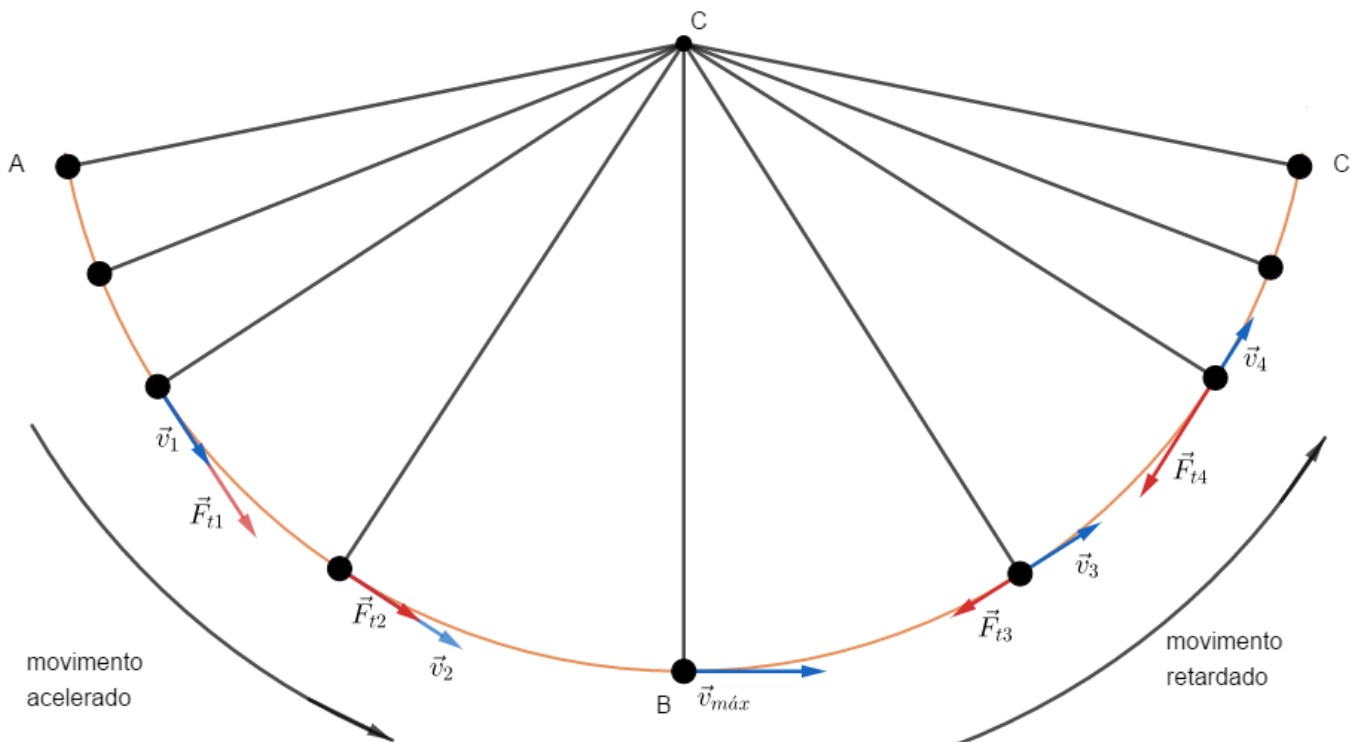


Figura 13: Representação dos vetores velocidade e força tangencial no movimento de um pêndulo.

Novamente, vamos reforçar a ideia de que a força tangencial é responsável por alterar o módulo da velocidade vetorial \vec{v} . Isso se explica pelo fato de \vec{F}_t e \vec{v} terem a mesma direção.



Para movimentos variados (acelerados ou retardados), \vec{v} varia em módulo e quem causa essa mudança é a \vec{F}_t , pois nestes casos ela é não-nula.

Por outro lado, nos movimentos uniformes o módulo de \vec{v} não varia, pois nessas situações a \vec{F}_t é nula.

2.3. A componente centrípeta

A componente centrípeta pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

Conforme visto no capítulo de cinemática vetorial, o módulo da aceleração centrípeta pode ser dado por:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Em que R é o raio de curvatura da trajetória.

A componente centrípeta \vec{F}_{cp} tem como função variar a direção da velocidade vetorial \vec{v} . É por isso que \vec{F}_{cp} é perpendicular à \vec{v} . Nos movimentos retilíneos, \vec{v} não varia de direção, mostrando que $\vec{F}_{cp} = \vec{0}$. Podemos imaginar que nos movimentos retilíneos teríamos raios de curvaturas tendendo ao infinito.

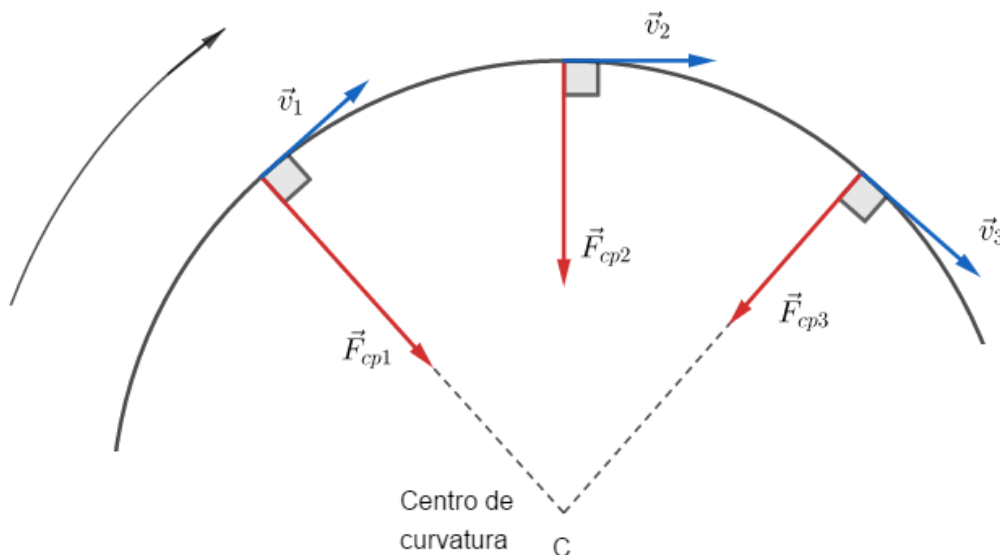


Figura 14: Representação dos vetores velocidade e força centrípeta.

TOME
NOTA!





2.4. As componentes tangencial e centrípeta nos principais movimentos

2.4.1. Movimento retilíneo e uniforme

Pelo fato de o movimento ser retilíneo, temos que:

$$\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$$

Dado que o movimento é uniforme, temos que:

$$|\vec{v}| = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$$

Portanto, a resultante será nula:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp} = \vec{0} + \vec{0}$$

$$\vec{F}_R = \vec{0}$$

2.4.2. Movimento retilíneo e variado

Pelo fato de o movimento ser retilíneo, temos que:

$$\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$$

Dado que o movimento é variado, temos que:

$$|\vec{v}| \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}$$

Portanto, a resultante será a componente tangencial:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp} = \vec{F}_t + \vec{0}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t$$

2.4.3. Movimento circular e uniforme

Pelo fato de o movimento ser circular, temos que:

$$\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}$$

Dado que o movimento é uniforme, temos que:

$$|\vec{v}| = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$$



Portanto, a resultante será a componente centrípeta:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp} = \vec{0} + \vec{F}_{cp}$$

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_{cp}}$$

2.4.4. Movimento curvilíneo e variado

Pelo fato de o movimento ser curvilíneo, temos que:

$$\boxed{\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}}$$

Dado que o movimento é variado, temos que:

$$\boxed{|\vec{v}| \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}}$$

Portanto, a resultante será a soma vetorial das componentes tangencial e centrípeta:

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp}}$$

ESCLARECENDO!



5) Partícula em movimento circular uniformemente variado

Uma partícula de massa $m = 1,0 \text{ kg}$, realiza um MCUV de raio $R = 1,0 \text{ m}$, segundo a equação horária do espaço $s = 1,0 - 4,0 \cdot t + 1,5 \cdot t^2$ (SI). No instante $t = 2 \text{ s}$, determine os módulos das componentes tangencial e centrípeta, bem como da resultante na partícula.

Comentários:

De acordo com a equação horária do espaço, podemos escrever a equação horária da velocidade e aceleração da partícula da seguinte forma:

$$s = 1,0 - 4,0 \cdot t + 1,5 \cdot t^2 \text{ (SI)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -4,0 + 3 \cdot t \text{ (SI)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3,0 \text{ m/s}^2$$

Logo, a força tangencial é dada por:

$$F_t = m \cdot a_t$$

$$F_t = 1 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{F_t = 3,0 \text{ N}}$$



Para acharmos a componente centrípeta, é necessário conhecer o módulo da velocidade da partícula. Por isso, vamos calcular a intensidade de \vec{v} para $t = 2$ s:

$$v(2) = -4 + 3 \cdot (2) \Rightarrow v(2) = 2,0 \text{ m/s}$$

Assim, substituindo na fórmula da força centrípeta, temos que:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

$$F_{cp} = \frac{1 \cdot 2^2}{1} \Rightarrow F_{cp} = 4,0 \text{ N}$$

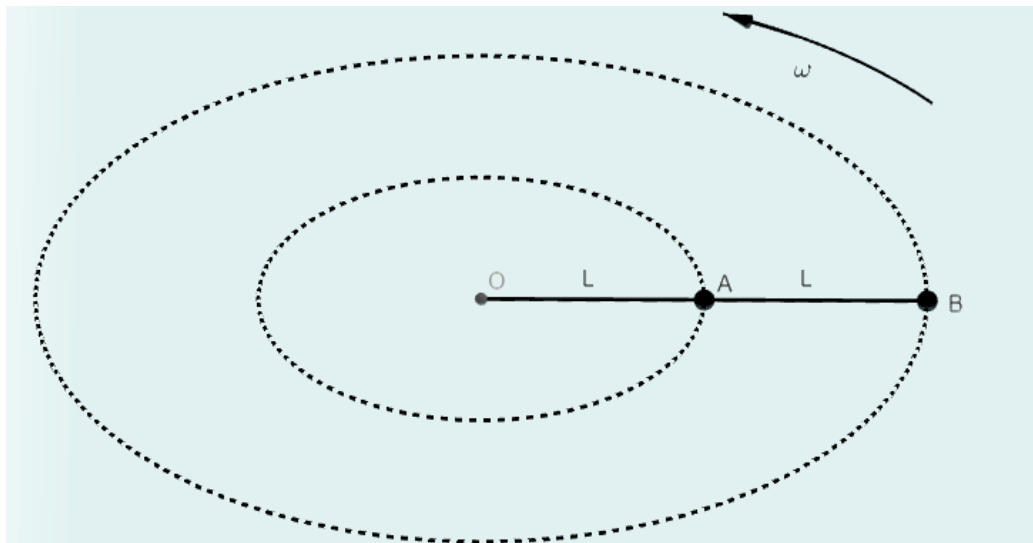
A resultante das forças que agem na partícula pode ser dada por:

$$F_R^2 = F_t^2 + F_{cp}^2$$

$$F_R^2 = (3,0)^2 + (4,0)^2 \therefore \boxed{F_R = 5,0 \text{ N}}$$

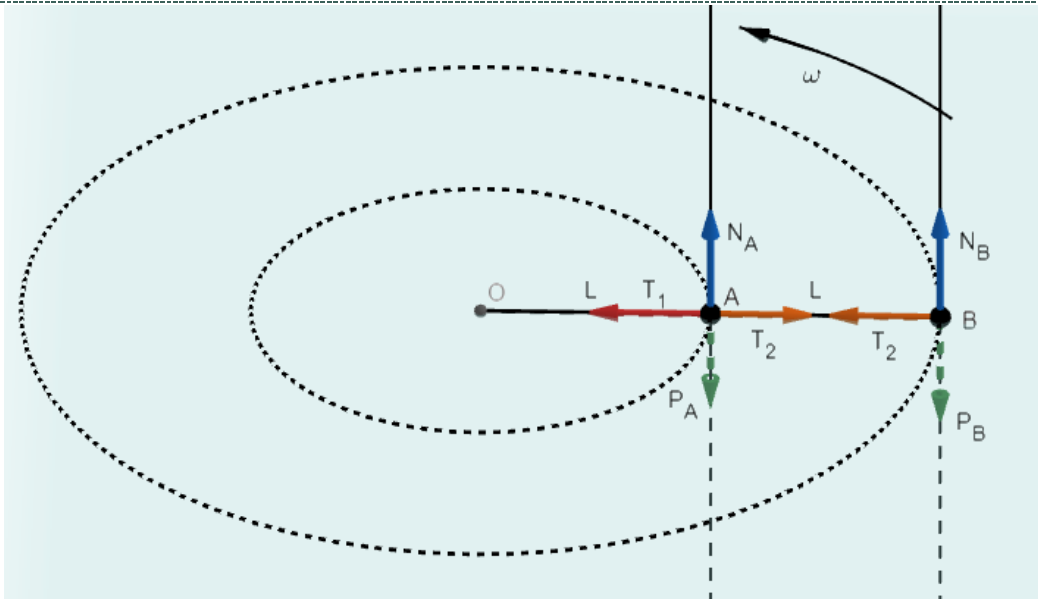
6) Partículas em movimento circular uniforme de um móvel sobre um plano de apoio horizontal.

Considere dois corpos de massas iguais a m ligados por fios ideais de comprimento L . Despreze os atritos na mesa. Se ambas as partículas giram com velocidade angular constante ω em torno do ponto fixo C , determine as intensidades das trações nos fios.



Comentários:

Inicialmente, vamos escrever as forças que atuam nas duas partículas:



Observe que para a trajetória desejada, devemos ter que $T_1 > T_2$.

Assim, escrevemos a 2ª Lei na direção radial para cada massa:

$$\begin{cases} T_1 - T_2 = F_{cpA} \\ T_2 = F_{cpB} \end{cases}$$

Inicialmente calculamos T_2 , pois já conhecemos a força centrípeta em B:

$$T_2 = F_{cpB} = m \cdot \omega^2 \cdot R_B$$

$$T_2 = m \cdot \omega^2 \cdot (2L)$$

$$\boxed{T_2 = 2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot L}$$

Portanto, T_1 é dado por:

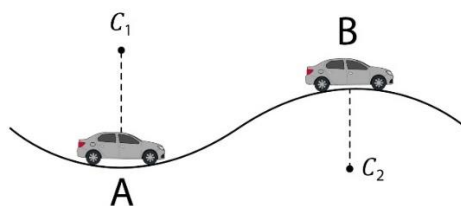
$$T_1 = 2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot L + m \cdot \omega^2 \cdot R_A$$

$$T_1 = 2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot L + m \cdot \omega^2 \cdot L$$

$$\boxed{T_1 = 3 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot L}$$

7) Estrada com lombada e com depressão

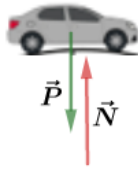
Um móvel de 300 kg viaja em uma estrada que apresenta uma região de depressão e uma região de lombada cujos raios de curvaturas são iguais a 100 m. Determine as forças normais que a pista exerce sobre o automóvel nos pontos A e B se o móvel viaja com velocidade de módulo constante igual a 10 m/s. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$



Comentários:



Temos o seguinte diagrama de forças para o carro:



Note que a resultante centrípeta tem sentido de \vec{N}_A , devido a curvatura da estrada. Pela 2ª Lei na posição na posição A:

$$\boxed{N_A - P = F_{cpA}}$$

$$N_A - P = m \cdot a_{cpA}$$

$$N_A = 300 \cdot 10 + 300 \cdot \frac{10^2}{100} \Rightarrow \boxed{N_A = 3300 \text{ N}}$$

Note que agora a resultante centrípeta tem sentido de \vec{P} , devido a curvatura da estrada. Para a posição B, temos que:

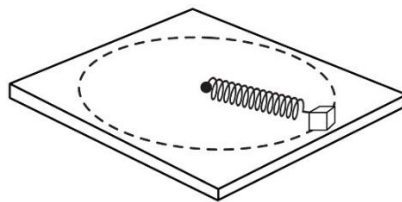
$$\boxed{P - N_B = F_{cpB}}$$

$$P - N_B = m \cdot a_{cpB}$$

$$N_B = 300 \cdot 10 - 300 \cdot \frac{10^2}{100} \Rightarrow \boxed{N_B = 2700 \text{ N}}$$

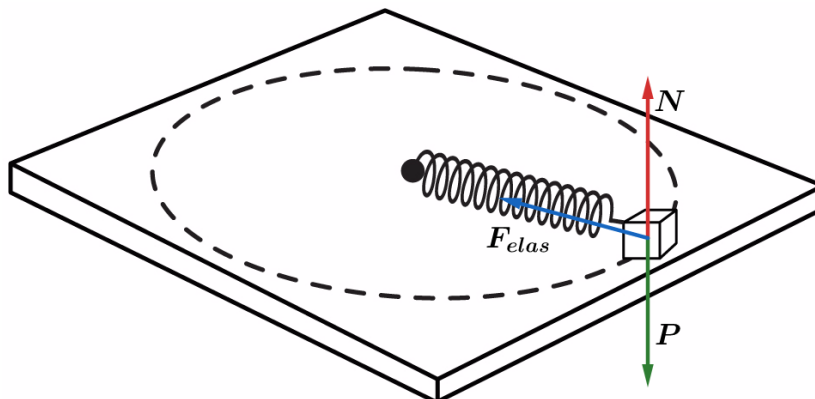
8)

Uma caixa de massa 1,0 kg descreve um movimento circular em uma mesa horizontal perfeitamente lisa, está presa a uma mola de constante elástica $k = 1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. Sabe-se que o comprimento natural da mola é de 0,75 m. Determine a deformação da mola, se a o bloco gira com velocidade de módulo 5,0 m/s.



Comentários:

Para essa situação, temos o seguinte diagrama de forças:





Note que a força peso e a normal da superfície na caixa se equilibram. Dessa forma, a resultante das forças é a força elástica e ela é a centrípeta:

$$\boxed{F_{el} = F_{cp}}$$

Lembrando que a força elástica é dada pela Lei de Hooke $F_{el} = k \cdot x$, onde x é a deformação da mola. Então, teremos que o raio de curvatura será o comprimento natural mais a deformação que a mola sofre:

$$F_{el} = k \cdot x \text{ e } F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{l_0 + x}$$

$$F_{el} = F_{cp}$$

$$\Rightarrow k \cdot x = \frac{m \cdot v^2}{l_0 + x}$$

Substituindo valores, temos que:

$$100x = \frac{1 \cdot 5^2}{0,75 + x}$$

$$\Rightarrow 100x^2 + 75x = 25$$

$$\Rightarrow \boxed{4x^2 + 3x - 1 = 0}$$

As raízes dessa equação são $x_1 = 0,25 \text{ m}$ e $x_2 = -1,0 \text{ m}$. Para a situação que estamos estudando, não convém deformação igual a $-1,0 \text{ m}$. Portanto, a deformação da mola será de $0,25 \text{ m}$.

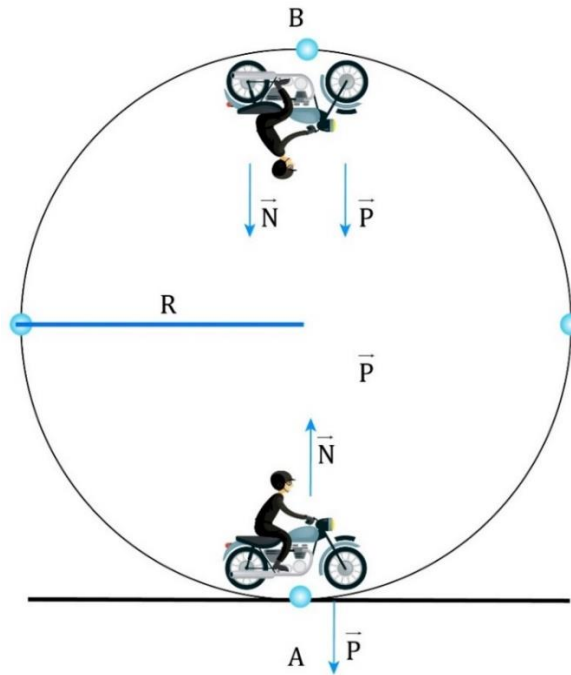
9) Globo da morte



Considere um motociclista realizando um movimento circular, num plano vertical, dentro de um “globo da morte” de raio R . A massa do conjunto homem mais moto é M . Calcule a intensidade da força normal que o globo aplica na moto na posição mais elevada do globo, se a velocidade do móvel é v . Adote gravidade igual a g . Qual é a mínima velocidade no ponto mais alto para o motociclista conseguir efetuar a curva completa?

Comentários:

No ponto mais alto da trajetória, a moto está de ponta cabeça, de tal forma que a força peso e força normal tem a mesma orientação. Portanto, a soma da força peso e da força normal é a resultante das forças e está é a centrípeta.



Vetorialmente, temos:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{N} + \vec{P}$$

Em módulo, podemos escrever que:

$$F_{cp} = N + P$$

$$N = F_{cp} - P$$

$$N = \frac{m \cdot v^2}{R} - mg$$

Para o caso da velocidade mínima no ponto mais alto, devemos ter que a normal seja praticamente nula. O motociclista está quase perdendo contato com o globo. Dessa forma, temos que:

$$N \cong 0$$

$$\Rightarrow F_{cp} = P$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g}$$

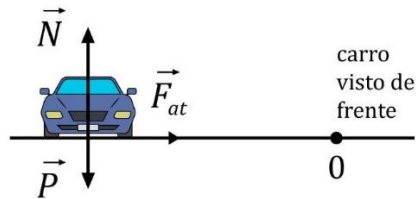
10) Carro executando uma curva num plano horizontal

Um automóvel entra em uma curva circular de raio R , em movimento uniforme, num plano horizontal. O coeficiente de atrito estático vale μ_s . Sendo g a gravidade local, determine a máxima velocidade do carro para fazer a curva sem derrapar.

Comentários:



Notamos que a força peso e força normal se equilibram e que a força de atrito é a resultante centrípeta. A tendência do movimento é o móvel derrapar para fora da curva no caso da velocidade máxima. Assim, a força de atrito é direcionada para dentro da curva:



$$F_{cp} = F_{at}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = F_{at}$$

Para não derrapar para fora da curva, devemos ter que:

$$F_{at} \leq \mu_s \cdot N$$

Portanto:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} \leq \mu_s \cdot m \cdot g$$

Então:

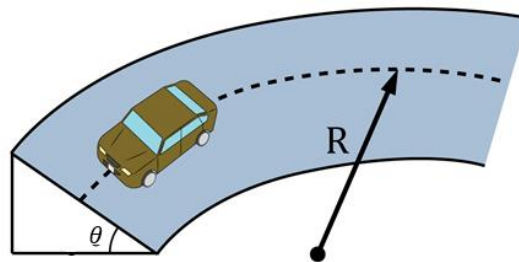
$$v \leq \sqrt{\mu_s \cdot R \cdot g}$$

Logo, a velocidade máxima terá módulo igual a:

$$v = \sqrt{\mu_s \cdot R \cdot g}$$

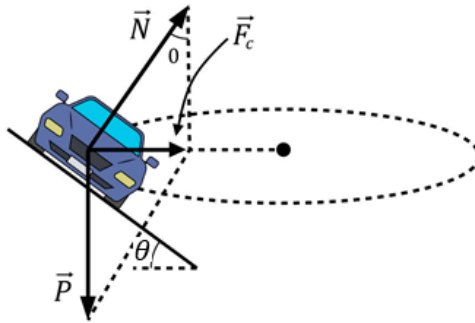
11) Carro executando curva numa pista sobrelevada

Um carro de massa m percorre uma pista circular de raio R , contida num plano horizontal. O módulo da velocidade do móvel é constante e igual a v . A parte exterior da pista é mais elevada que a parte inferior. Qual deve ser o ângulo θ para que o móvel consiga efetuar a curva **independente** da força de atrito.



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças no automóvel, temos que:



Dado que o móvel realiza um MCU, a resultante das forças é a centrípeta. Assim, temos que:

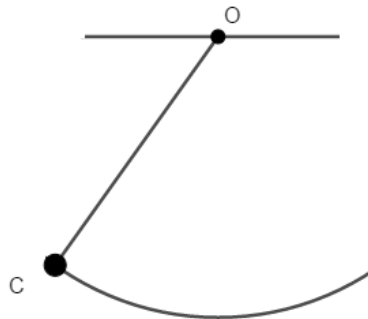
$$tg\theta = \frac{F_{cp}}{P}$$

$$tg\theta = \frac{\frac{m \cdot v^2}{R}}{m \cdot g} \Rightarrow tg\theta = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

$$\therefore \theta = \arctg\left(\frac{v^2}{R \cdot g}\right)$$

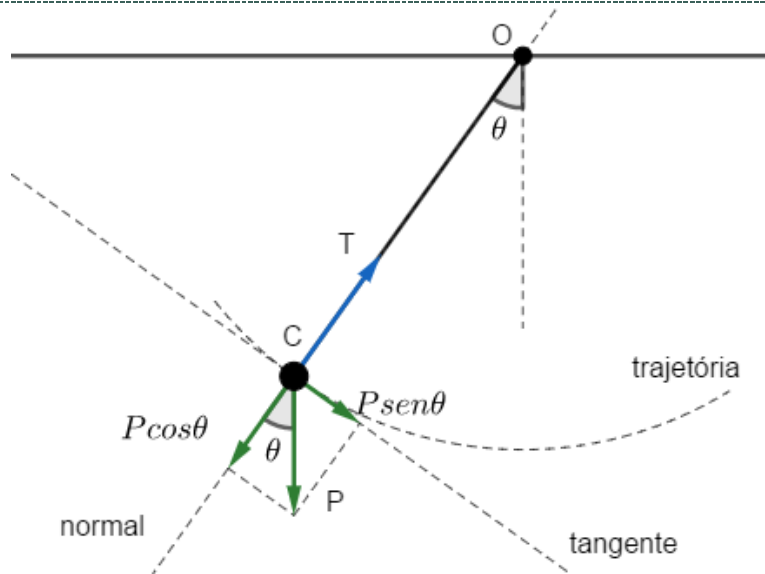
12) Pêndulo simples

Seja um pêndulo simples de comprimento L , com uma esfera de massa m . A velocidade escalar no ponto A vale v . Determine a força de tração no fio no ponto A e a aceleração tangencial. Despreze a resistência do ar e a massa do fio.



Comentários:

Inicialmente, vamos fazer o diagrama de força no ponto C:



Note que a tração tem direção normal à trajetória e o peso precisa ser decomposto nas direções da normal e da tangencial à trajetória.

A resultante centrípeta é dada por:

$$T - P \cos \theta = F_{cp}$$

$$T = m \cdot g \cdot \cos \theta + \frac{m \cdot v^2}{R}$$

$$T = m \left(g \cdot \cos \theta + \frac{v^2}{R} \right)$$

Por outro lado, a resultante tangencial é $P \cdot \sin \theta$. Então:

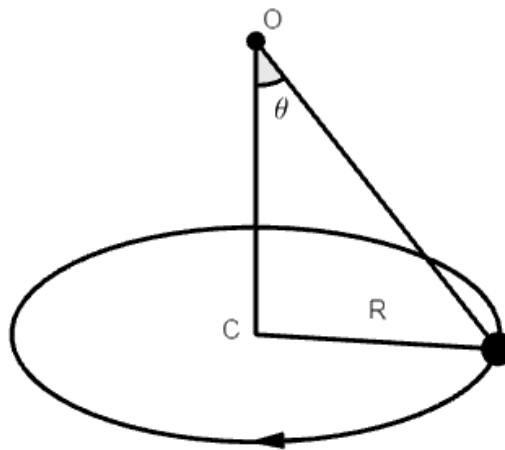
$$F_t = P \cdot \sin \theta$$

$$m \cdot a_t = m \cdot g \cdot \sin \theta$$

$$a_t = g \cdot \sin \theta$$

13) Pêndulo cônico

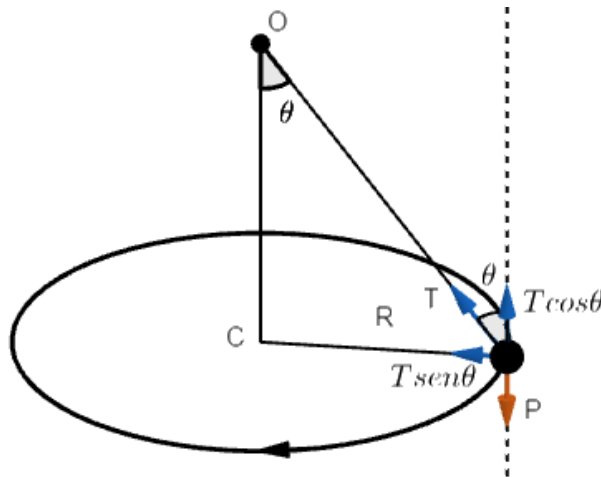
Uma esfera de massa m está presa em um fio de massa desprezível conforme a figura abaixo. A partícula descreve um MCU em torno de C, em um plano horizontal, constituindo o pêndulo cônico. Determine a tração no fio e a velocidade escalar da esfera.



Comentários:



Fazendo inicialmente o diagrama de forças, temos:



Note que o peso se equilibra com a componente da tração $T \cdot \cos\theta$, então:

$$m \cdot g = T \cdot \cos\theta$$

$$\boxed{T = \frac{m \cdot g}{\cos\theta}}$$

Por outro lado, a componente da tração $T \cdot \sin\theta$ é a resultante centrípeta do MCU. Logo:

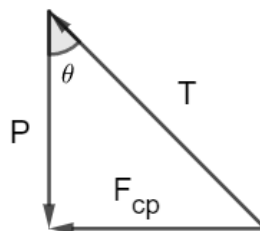
$$T \cdot \sin\theta = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Substituindo a tração, temos que:

$$\frac{m \cdot g}{\cos\theta} \cdot \sin\theta = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

$$\therefore \boxed{v = \sqrt{R \cdot g \cdot \operatorname{tg}\theta}}$$

Outra forma de chegar nesse resultado é ver que a partícula realiza um MCU, então a força tangencial é nula. Logo, a resultante do movimento é a centrípeta. Então, construí o seguinte triângulo de forças:



$$\vec{F}_{cp} = \vec{P} + \vec{T}$$

Então, podemos relacionar a força peso com a tração e com a resultante centrípeta:

$$\cos\theta = \frac{P}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{m \cdot g}{\cos\theta}}$$

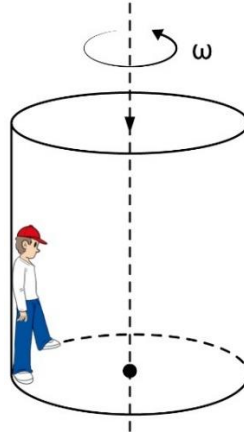
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_{cp}}{P} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{m \cdot v^2}{R}}{m \cdot g}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{R \cdot g \cdot \operatorname{tg}\theta}}$$



14) Rotor

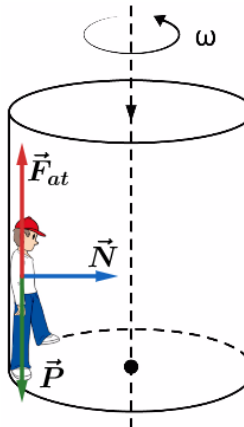
Este brinquedo existe em parques de diversões e funciona basicamente assim: a pessoa entra dentro do cilindro e fica em pé encostada na parede interna. O cilindro começa a girar em torno do seu eixo vertical e a partir de uma velocidade angular mínima, o assoalho do cilindro é retirado e a pessoa fica presa à parede do brinquedo. Se o raio do cilindro é R , a gravidade é g e o coeficiente de atrito estático entre a pessoa e a parede é μ_s , qual deve ser a mínima velocidade angular que o cilindro deve ter para que a pessoa não escorregue?



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças na pessoa, temos a força peso na vertical e para baixo, a força normal perpendicular à parede do cilindro e orientando para o eixo vertical e a força de atrito contrária a tendência do movimento.

No nosso caso, queremos saber a mínima velocidade, então a tendência da pessoa é descer na vertical, logo, a força de atrito está na vertical para cima, como mostra a figura:



De acordo com esse diagrama de forças, notamos que a normal é a nossa resultante centrípeta:

$$N = F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Para não haver escorregamento na vertical, devemos ter que:

$$F_{at} = P = m \cdot g$$

E a força de atrito não deve passar a força de atrito estático máxima. Isto é:

$$F_{at} \leq \mu_s \cdot N$$

Logo, temos que:

$$F_{at} \leq \mu_s \cdot N$$



$$m \cdot g \leq \mu_s \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\omega \cdot R}}$$

Logo a velocidade angular mínima é de:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\omega \cdot R}}$$



2.5. Força centrífuga

Para estudarmos o que é a força centrípeta, vamos utilizar o exemplo de um motociclista realizando uma trajetória curva circular em movimento uniforme. Para um referencial inercial, isto é, um referencial ligado ao solo, a resultante das forças no piloto é radial e orientada para o centro da curva. Sabemos que essa força é a resultante centrípeta \vec{F}_{cp} .

Além disso, se o conjunto tem massa m , a velocidade é v e o raio de curvatura da trajetória é R , então:

$$|\vec{F}_{cp}| = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Entretanto, e tomarmos um referencial ligado à moto, ou seja, referencial acelerado, o piloto está em repouso e, assim, a resultante das forças no piloto deve ser nula. Portanto, deve ser considerada uma força fictícia que possa equilibrar a força centrípeta.

Dessa forma, tal força deve ser **radial** também, de **mesmo módulo** que \vec{F}_{cp} e orientada **para fora** da trajetória. Chamamos essa força de **centrífuga** (\vec{F}_{cf}).

$$|\vec{F}_{cf}| = |\vec{F}_{cp}|$$

$$\therefore |\vec{F}_{cf}| = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

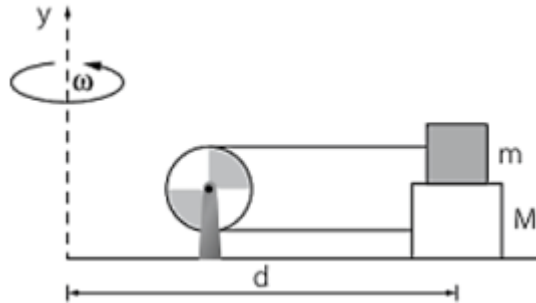
Assim, fica claro que a força centrífuga é uma força de inércia que está presente apenas em referenciais não inerciais onde exista aceleração centrípeta, ou seja, referenciais em rotação.

Exemplo:

(IME 1996) Uma mesa giratória tem velocidade angular constante ω , em torno do eixo y . Sobre esta mesa encontram-se dois blocos, de massa m e M , ligados por uma corda inelástica que passa por uma roldana



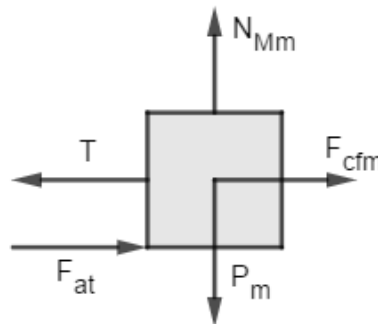
fixa à mesa, conforme a figura a seguir. Considerando que não existe atrito entre a mesa e o bloco M, determine o coeficiente de atrito mínimo entre os dois blocos para que não haja movimento relativo entre eles. Considere d a distância dos blocos ao eixo de rotação e despreze as massas da roldana e da corda. Dado: $M > m$.



Comentários:

Se tomarmos o referencial da mesa girante, os blocos estão em equilíbrio estático relativo. Utilizando o conceito de força centrífuga, dizemos que existe uma força $F_{cfM} = M \cdot \omega^2 \cdot d$ na massa maior e uma força $F_{cfm} = m \cdot \omega^2 \cdot d$ na massa menor na direção radial para fora.

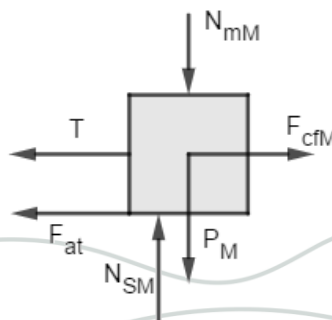
Como $M > m$, então $M \cdot \omega^2 \cdot d > m \cdot \omega^2 \cdot d$, ou seja, $F_{cfM} > F_{cfm}$. Logo, o bloco de massa maior tende a puxar o bloco de massa menor para próximo da polia. Assim, temos o seguinte diagrama de forças para o bloco menor:



Logo, pela 2ª Lei podemos escrever que:

$$\begin{cases} m \cdot g = N_{Mm} \\ F_{cfm} + F_{at} = T \end{cases} \Rightarrow m \cdot \omega^2 \cdot d + \mu \cdot m \cdot g = T \text{ (eq. 1)}$$

Para o bloco de massa maior, temos o seguinte diagrama de forças:





Logo, pela 2ª Lei podemos escrever que:

$$\begin{cases} N_{SM} = P_M + N_{mM} \\ F_{cfM} = F_{at} + T \end{cases} \Rightarrow M \cdot \omega^2 \cdot d = \mu \cdot m \cdot g + T \text{ (eq.2)}$$

Substituindo a tração T de eq. 1 em eq. 2, temos que:

$$M \cdot \omega^2 \cdot d = \mu \cdot m \cdot g + m \cdot \omega^2 \cdot d + \mu \cdot m \cdot g$$

$$\mu = \frac{(M - m) \cdot \omega^2 \cdot d}{2 \cdot m \cdot g}$$

Essa questão aparecerá novamente na sua lista, tente resolvê-la dos dois modos: referencial inercial e referencial não-inercial.

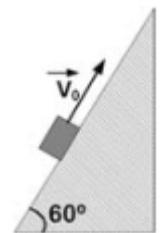


3. Lista de questões nível 1

1. (EEAR – 2016)

Um plano inclinado forma um ângulo de 60° com a horizontal. Ao longo deste plano é lançado um bloco de massa 2 kg com velocidade inicial v_0 , como indicado na figura. Qual a força de atrito, em N , que atua sobre o bloco para fazê-lo parar? (Considere o coeficiente de atrito dinâmico igual a $0,2$)

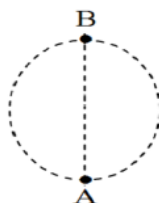
- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5



2. (EEAR – 2015)

Uma partícula de massa igual a 500 g está ligada por um fio de massa desprezível ao centro da trajetória e executa M.C.U. em um plano vertical, ou seja, perpendicular ao solo, descrevendo uma circunferência de raio igual a 10 m . Sabe-se que, a partícula ao passar pelo ponto A apresenta uma velocidade angular de 1 rad/s . Determine a tração no fio, em N , quando a partícula estiver exatamente no ponto B , considerando o fio ideal, o módulo da aceleração da gravidade no local igual a 10 m/s^2 e o ponto B exatamente no ponto mais alto da trajetória. Todo movimento foi observado por um observador fixo no solo.

- a) 0,0
b) 0,8
c) 6,4
d) 11,0



3. (EEAR – 2008)



Um veículo percorre uma pista de trajetória circular, horizontal, com velocidade constante em módulo. O raio da circunferência é de 160 m e o móvel completa uma volta a cada π segundos, calcule em m/s^2 , o módulo da aceleração centrípeta que o veículo está submetido.

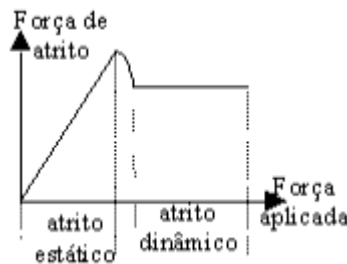
- a) 160 b) 320 c) 640 d) 960

4. (EEAR – 2008)

No gráfico que relaciona, a força aplicada em um corpo e a força de atrito entre este e uma superfície perfeitamente horizontal, a região que descreve a força de atrito _____ pode ser explicada pela _____ Lei de Newton enquanto a que mostra a força de atrito _____ pela _____ Lei de Newton.

Assinale a alternativa que completa corretamente a afirmação acima.

- a) dinâmico; 1ª; estático; 1ª
b) estático; 2ª; dinâmico; 1ª
c) estático; 1ª; dinâmico; 2ª
d) dinâmico; 2ª; estático; 2ª



5. (EsPCEx – 2005)

Um bloco parte da posição 1 e desloca-se _____ em movimento retilíneo uniformemente variado sobre uma superfície horizontal com atrito até parar na posição 3, conforme a figura abaixo.

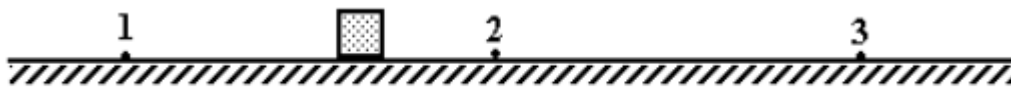


Figura ilustrativa

Desprezando a resistência do ar, o diagrama que melhor representa todas as forças que atuam sobre o bloco, quando ele está passando pelo ponto 2, é:

Obs.: Todas as forças estão representadas no centro de massa do bloco.

- A) B) C) D) E)

6. (EsPCEx – 2004)

Um bloco retangular M de massa 18 kg é puxado com uma força F de 126 N ao longo de um piso segundo uma trajetória retilínea e plana. Sabendo que o bloco se desloca com uma velocidade constante, o valor do coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é:

Dados: Considere a intensidade da aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 e despreze a resistência do ar.

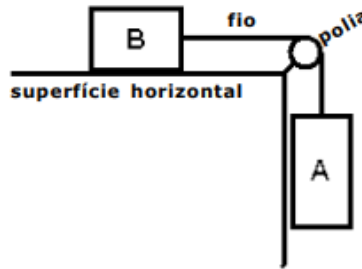
- a) 1,2 b) 1,1 c) 0,9 d) 0,7 e) 0,4



7. (EsPCEEx – 2008)

Dois blocos A e B , de massas $M_A = 5 \text{ kg}$ e $M_B = 3 \text{ kg}$ estão dispostos conforme o desenho abaixo em um local onde a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 e a resistência do ar é desprezível. Sabendo que o bloco A está descendo com uma velocidade constante e que o fio e a polia são ideais, podemos afirmar que a intensidade da força de atrito entre o bloco B e a superfície horizontal é de

- a) 0 N
- b) 30 N
- c) 40 N
- d) 50 N
- e) 80 N

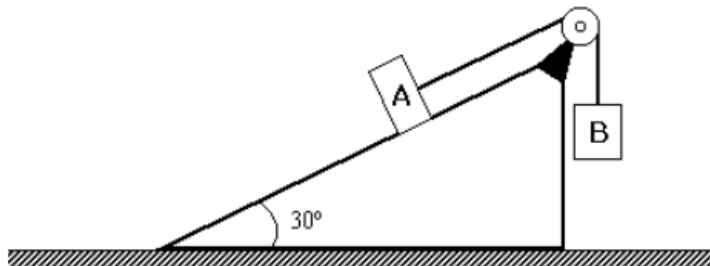


8. (EsPCEEx – 2004)

Na figura abaixo, um bloco A de massa 3 kg está ligado a um bloco B de massa 2 kg através de um fio e polia ideais e a resistência do ar é desprezível. Sabendo que o conjunto se encontra em equilíbrio estático, podemos afirmar que o módulo da força de atrito entre o bloco A e o plano inclinado, em N , vale:

Dados: Considere a intensidade da aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , $\cos 30^\circ = 0,9$ e $\sin 30^\circ = 0,5$.

- a) 2
- b) 4
- c) 5
- d) 7
- e) 8



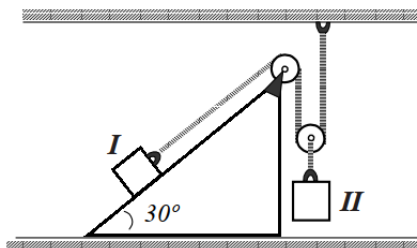
9. (EsPCEEx – 2003)

No sistema representado na figura abaixo, em equilíbrio estático, as polias e os fios são ideais e a resistência do ar é desprezível. A aceleração da gravidade local é igual a g , a massa do bloco I vale M e é o triplo da massa do bloco II.

Dados: $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ e $\sin 30^\circ = 1/2$.

Neste sistema, a força de atrito entre o bloco I e a superfície do plano inclinado vale

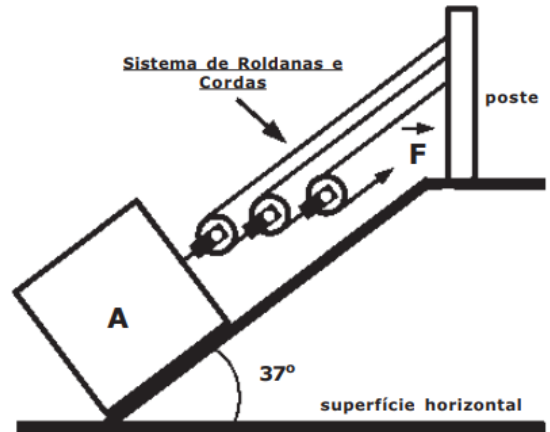
- a) $4Mg$
- b) $7Mg/3$
- c) $7Mg$
- d) $Mg/3$
- e) Mg



10. (EsPCEEx – 2017)



Um bloco A de massa 100 kg sobe, em movimento retilíneo uniforme, um plano inclinado que forma um ângulo de 37° com a superfície horizontal. O bloco é puxado por um sistema de roldanas móveis e cordas, todas ideais, e coplanares. O sistema mantém as cordas paralelas ao plano inclinado enquanto é aplicada a força de intensidade F na extremidade livre da corda, conforme o desenho abaixo. Todas as cordas possuem uma de suas extremidades fixadas em um poste que permanece imóvel quando as cordas são tracionadas. Sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco A e o plano inclinado é de $0,50$, a intensidade da força F é



Dados: $\text{sen } 37^\circ = 0,60$ e $\text{cos } 37^\circ = 0,80$

Considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 .

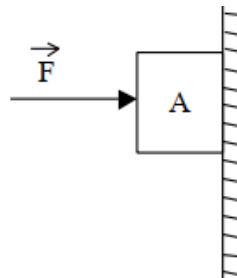
- a) 125 N b) 200 N c) 225 N d) 300 N e) 400 N

11. (EsPCEX – 2001)

A figura mostra um corpo A de massa $m = 3\text{ kg}$, apoiado em uma parede vertical onde o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede vale $\mu_e = 0,2$. Então o valor mínimo de $|\vec{F}|$ para mantê-lo em equilíbrio é:

Dado: $g = 10\text{ m/s}^2$

- a) 40 N
b) 150 N
c) 120 N
d) 80 N
e) 30 N





GABARITO



4. Gabarito sem Comentários nível 1

1. A
2. A
3. C
4. C
5. C
6. D
7. D
8. C
9. D
10. A
11. B



ESCLARECENDO!

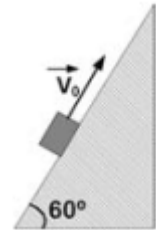


5. Lista de questões nível 1 comentada

1. (EEAR – 2016)

Um plano inclinado forma um ângulo de 60° com a horizontal. Ao longo deste plano é lançado um bloco de massa 2 kg com velocidade inicial v_0 , como indicado na figura. Qual a força de atrito, em N , que atua sobre o bloco para fazê-lo parar? (Considere o coeficiente de atrito dinâmico igual a $0,2$)

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5



Comentários:

A força de atrito cinético é dada por:

$$f_{at} = \mu \cdot N$$

Em que $N = m \cdot g \cdot \cos 60^\circ$, então:

$$f_{at} = 0,2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

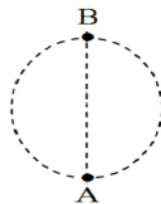
$$\boxed{f_{at} = 2 \text{ N}}$$

Gabarito: A

2. (EEAR – 2015)

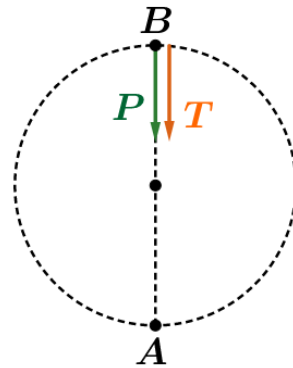
Uma partícula de massa igual a 500 g está ligada por um fio de massa desprezível ao centro da trajetória e executa M.C.U. em um plano vertical, ou seja, perpendicular ao solo, descrevendo uma circunferência de raio igual a 10 m . Sabe-se que, a partícula ao passar pelo ponto A apresenta uma velocidade angular de 1 rad/s . Determine a tração no fio, em N , quando a partícula estiver exatamente no ponto B , considerando o fio ideal, o módulo da aceleração da gravidade no local igual a 10 m/s^2 e o ponto B exatamente no ponto mais alto da trajetória. Todo movimento foi observado por um observador fixo no solo.

- a) 0,0
b) 0,8
c) 6,4
d) 11,0



Comentários:

O bloco executa um MCU com velocidade angular constante de módulo 1 rad/s e raio igual a 10 . No ponto B , temos o seguinte diagrama de forças:



A resultante na direção do centro da trajetória circular no ponto B é:

$$P + T = R_{cp}$$

Se conhecemos a velocidade e o raio, então a resultante centrípeta pode ser calculada como:

$$P + T = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Substituindo valores, temos:

$$\frac{500}{1000} \cdot 10 + T = \frac{500}{1000} \cdot 1^2 \cdot 10$$

$$\boxed{T = 0,0 \text{ N}}$$

Gabarito: A

3. (EEAR – 2008)

Um veículo percorre uma pista de trajetória circular, horizontal, com velocidade constante em módulo. O raio da circunferência é de 160 m e o móvel completa uma volta a cada π segundos, calcule em m/s^2 , o módulo da aceleração centrípeta que o veículo está submetido.

- a) 160 b) 320 c) 640 d) 960

Comentários:

A aceleração centrípeta de um corpo pode ser calculada pela expressão:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

A partir do período podemos encontrar a velocidade angular do corpo, pois ele realiza um movimento circular, com velocidade constante em módulo, ou seja, ele realiza um MCU. Portanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ rad/s}$$

Logo:



$$a_{cp} = \omega^2 \cdot R$$

$$a_{cp} = 2^2 \cdot 160$$

$$a_{cp} = 4 \cdot 160$$

$$a_{cp} = 640 \text{ m/s}^2$$

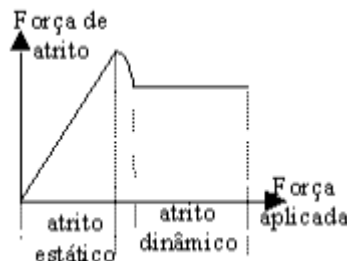
Gabarito: C

4. (EEAR – 2008)

No gráfico que relaciona, a força aplicada em um corpo e a força de atrito entre este e uma superfície perfeitamente horizontal, a região que descreve a força de atrito _____ pode ser explicada pela _____ Lei de Newton enquanto a que mostra a força de atrito _____ pela _____ Lei de Newton.

Assinale a alternativa que completa corretamente a afirmação acima.

- a) dinâmico; 1ª; estático; 1ª
- b) estático; 2ª; dinâmico; 1ª
- c) estático; 1ª; dinâmico; 2ª
- d) dinâmico; 2ª; estático; 2ª



Comentários:

Conforme visto o gráfico em teoria, enquanto aplicamos uma força na direção tangente à superfície onde o objeto está apoiado e ele não se movimenta, a força de atrito é igual ao módulo da força aplicada e o atrito é do tipo estático, e o bloco permanece em repouso, conforme a primeira lei de Newton.

Por outro lado, quando o bloco entra em movimento, temos o atrito dinâmico entre o bloco e a superfície, e o movimento do bloco é analisado utilizando a 2ª lei de Newton.

Gabarito: C

5. (EsPCEEx – 2005)

Um bloco parte da posição 1 e desloca-se em movimento retilíneo uniformemente variado sobre uma superfície horizontal com atrito até parar na posição 3, conforme a figura abaixo.

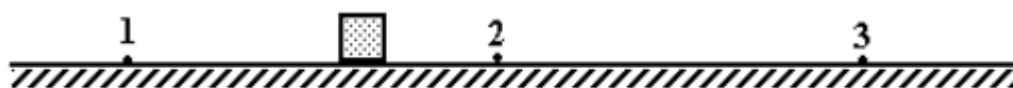
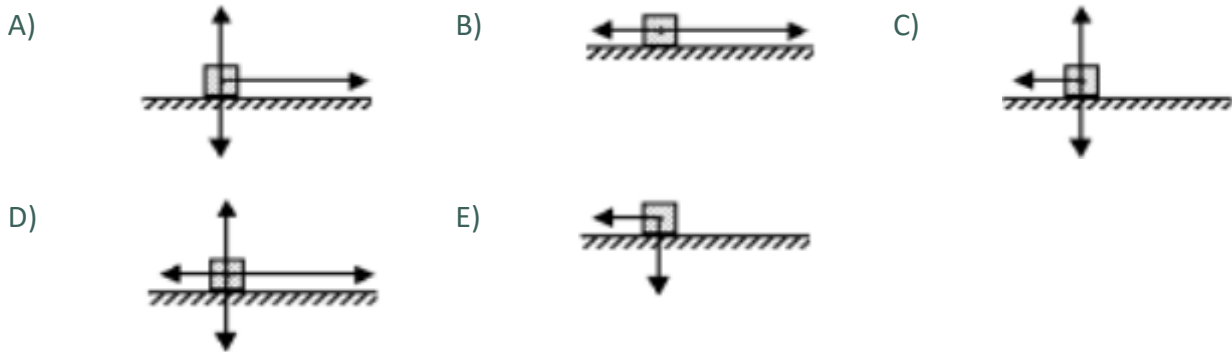


Figura ilustrativa

Desprezando a resistência do ar, o diagrama que melhor representa todas as forças que atuam sobre o bloco, quando ele está passando pelo ponto 2, é:

Obs.: Todas as forças estão representadas no centro de massa do bloco.



Comentários:

Se o bloco está realizando um MRUV e para no ponto 3, ele precisa realizar um movimento retardado, isto é, velocidade contrária a aceleração. Se ele está se movendo de 1 para 3, então a aceleração deve estar no sentido oposto, na direção horizontal. Portanto, já descartamos as alternativas a), b) e d), que possuem força resultante para a direita, ou seja, aceleração para a direita.

A diferença entre as letras c) e e) é justamente a força de contato entre a superfície e o bloco que não está escrita na letra e). Portanto, a alternativa correta é a letra c).

Gabarito: C

6. (EsPCEX – 2004)

Um bloco retangular M de massa 18 kg é puxado com uma força F de 126 N ao longo de um piso segundo uma trajetória retilínea e plana. Sabendo que o bloco se desloca com uma velocidade constante, o valor do coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é:

Dados: Considere a intensidade da aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 e despreze a resistência do ar.

- a) 1,2 b) 1,1 c) 0,9 d) 0,7 e) 0,4

Comentários:

Se o bloco é puxado com uma força F ao longo de uma superfície plana e horizontal, e ele possui velocidade constante, ou seja, aceleração nula, temos que:

$$F - f_{at} = 0$$

$$F = f_{at}$$

Na direção perpendicular ao plano horizontal, temos que:

$$N = P$$

Portanto, o atrito cinético entre o plano e o bloco é de:

$$F = \mu \cdot N$$

$$F = \mu \cdot P$$



$$126 = \mu \cdot 18 \cdot 10$$

$$\boxed{\mu = 0,7}$$

Observação: a questão não menciona se o plano é horizontal ou inclinado. Aqui consideramos que ele é horizontal, isto é, a aceleração da gravidade é perpendicular ao plano. Se ele fosse inclinado, o bloco poderia ser puxado com uma força F paralela ao plano, o bloco poderia desenvolver um MRU ao longo do plano, mas a análise do exercício seria completamente diferente.

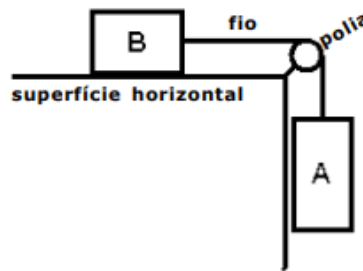
Nesse novo caso, teríamos que decompor a força peso nas direções normal e tangente ao plano, e fazer mesma análise das forças, sabendo que o corpo está descrevendo um MRUV ao longo do plano.

Gabarito: D

7. (EsPCEX – 2008)

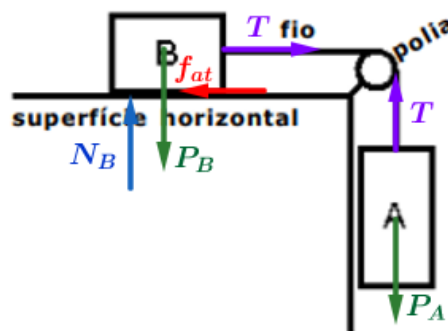
Dois blocos A e B , de massas $M_A = 5 \text{ kg}$ e $M_B = 3 \text{ kg}$ estão dispostos conforme o desenho abaixo em um local onde a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 e a resistência do ar é desprezível. Sabendo que o bloco A está descendo com uma velocidade constante e que o fio e a polia são ideais, podemos afirmar que a intensidade da força de atrito entre o bloco B e a superfície horizontal é de

- a) 0 N
- b) 30 N
- c) 40 N
- d) 50 N
- e) 80 N



Comentários:

Se o bloco A está descendo com velocidade constante e o fio é inextensível, então o bloco B está se movendo para a direita, também com velocidade constante (aceleração na direção do movimento é nula) e o atrito entre o bloco e a superfície horizontal é contrária ao movimento. Portanto, o diagrama de forças em cada bloco é dado por:



Portanto:

$$T - P_A = 0$$

$$T - f_{at} = 0$$



Logo:

$$f_{at} = P_A$$

$$f_{at} = m_A \cdot g$$

$$f_{at} = 5 \cdot 10$$

$$\boxed{f_{at} = 50 \text{ N}}$$

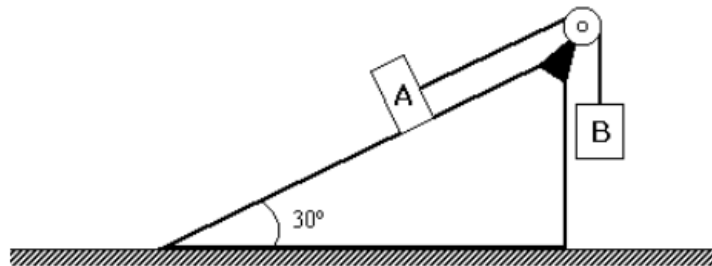
Gabarito: D

8. (EsPCEX – 2004)

Na figura abaixo, um bloco A de massa 3kg está ligado a um bloco B de massa 2kg através de um fio e polia ideais e a resistência do ar é desprezível. Sabendo que o conjunto se encontra em equilíbrio estático, podemos afirmar que o módulo da força de atrito entre o bloco A e o plano inclinado, em N, vale:

Dados: Considere a intensidade da aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , $\cos 30^\circ = 0,9$ e $\sin 30^\circ = 0,5$.

- a) 2
- b) 4
- c) 5
- d) 7
- e) 8



Comentários:

Inicialmente, vamos calcular a força de tração no fio, dado que B está em repouso e o valor da componente da força peso de A na direção do plano inclinado:

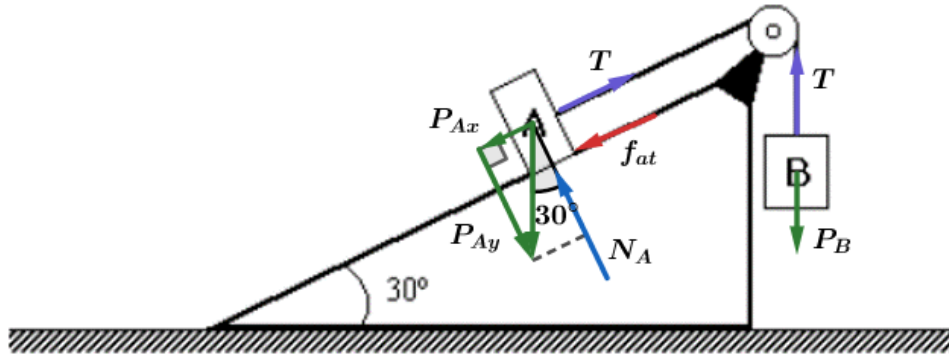
$$T = P_B = 2 \cdot 10 = 20 \text{ N}$$

$$P_{Ax} = P_A \cdot \sin 30^\circ$$

$$P_{Ax} = 3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P_{Ax} = 15 \text{ N}}$$

Note que no bloco A, a tração está para cima no plano inclinado e vale 20 N, enquanto P_{Ax} está para baixo, com valor de 15 N. Assim, a tendência do bloco A é subir o plano inclinado. Portanto, a força de atrito entre A e o plano é para baixo, contrária a tendência de movimento e vale:



$$f_{at} + P_{Ax} = T$$

$$f_{at} + 15 = 20$$

$$\boxed{f_{at} = 5 \text{ N}}$$

Gabarito: C

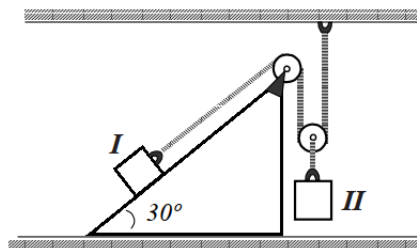
9. (EspCEEx – 2003)

No sistema representado na figura abaixo, em equilíbrio estático, as polias e os fios são ideais e a resistência do ar é desprezível. A aceleração da gravidade local é igual a g , a massa do bloco I vale M e é o triplo da massa do bloco II.

Dados: $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ e $\sin 30^\circ = 1/2$.

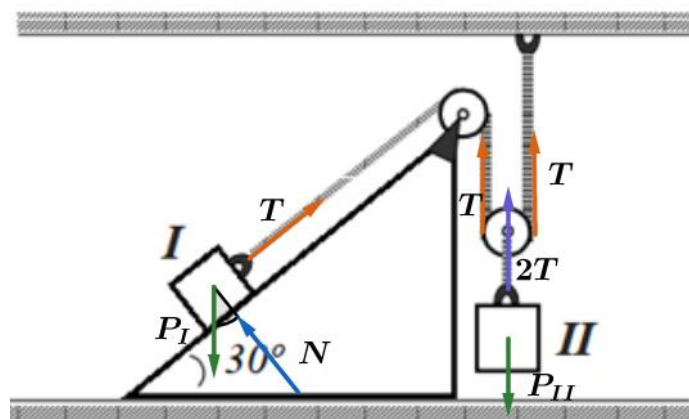
Neste sistema, a força de atrito entre o bloco I e a superfície do plano inclinado vale

- a) $4Mg$
- b) $7Mg/3$
- c) $7Mg$
- d) $Mg/3$
- e) Mg



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças sem o atrito, para analisarmos a tendência do movimento, temos:





Assim, como o sistema está em equilíbrio estático, sem colocarmos ainda o atrito, pois vamos analisar a tendência do movimento, temos:

$$2T = P_{II}$$

$$2T = \frac{M}{3} \cdot g$$

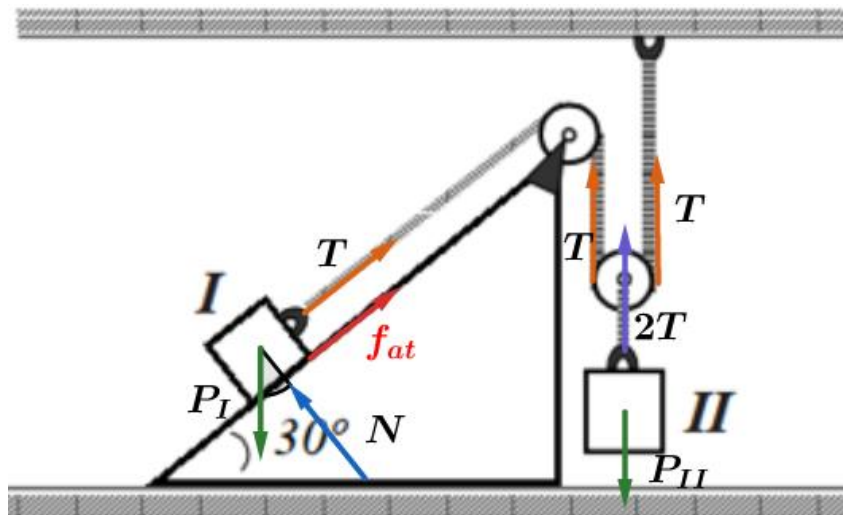
Lembrando que $M_I = M = 3 \cdot M_{II}$. Logo:

$$T = \frac{M \cdot g}{6}$$

No bloco I, temos:

$$P_{Ix} = M \cdot g \cdot \text{sen } 30^\circ = \frac{M \cdot g}{2}$$

Logo, o peso de I é maior que a tração no fio, ou seja, a tendência do movimento é de descer o plano. Então, temos o seguinte diagrama de forças:



Logo:

$$T + f_{at} = P_I \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$\frac{M \cdot g}{6} + f_{at} = \frac{M \cdot g}{2}$$

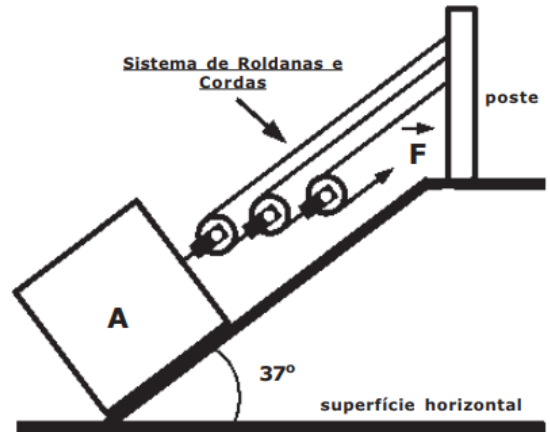
$$f_{at} = \frac{M \cdot g}{3}$$

Gabarito: D

10. (EsPCEX – 2017)



Um bloco A de massa 100 kg sobe, em movimento retilíneo uniforme, um plano inclinado que forma um ângulo de 37° com a superfície horizontal. O bloco é puxado por um sistema de roldanas móveis e cordas, todas ideais, e coplanares. O sistema mantém as cordas paralelas ao plano inclinado enquanto é aplicada a força de intensidade F na extremidade livre da corda, conforme o desenho abaixo. Todas as cordas possuem uma de suas extremidades fixadas em um poste que permanece imóvel quando as cordas são tracionadas. Sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco A e o plano inclinado é de $0,50$, a intensidade da força F é



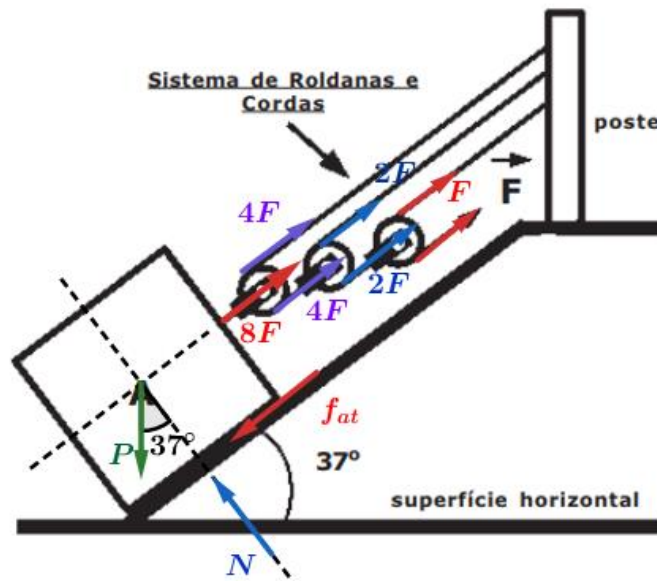
Dados: $\text{sen } 37^\circ = 0,60$ e $\text{cos } 37^\circ = 0,80$

Considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 .

- a) 125 N b) 200 N c) 225 N d) 300 N e) 400 N

Comentários:

Como o bloco sobe o plano inclinado em um MRU, então:



Portanto:

$$P \cdot \text{sen } 37^\circ + f_{at} = 8F$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen } 37^\circ + \mu \cdot N = 8F$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen } 37^\circ + \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } 37^\circ = 8F$$

$$100 \cdot 10 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 0,8 = 8F$$

$$\boxed{F = 125\text{ N}}$$

Gabarito: A

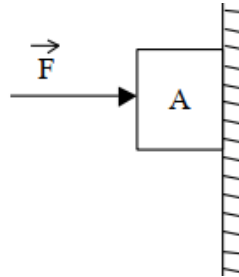


11. (EsPCEx – 2001)

A figura mostra um corpo A de massa $m = 3 \text{ kg}$, apoiado em uma parede vertical onde o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede vale $\mu_e = 0,2$. Então o valor mínimo de $|\vec{F}|$ para mantê-lo em equilíbrio é:

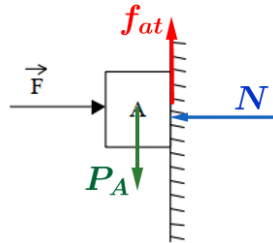
Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$

- a) 40 N
- b) 150 N
- c) 120 N
- d) 80 N
- e) 30 N



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças no bloco A , temos:



Para que o bloco permaneça em equilíbrio, devemos ter que:

$$F = N$$

$$P_A = f_{at}$$

Mas, da teoria sabemos que:

$$f_{at} \leq \mu_e \cdot N$$

Portanto:

$$f_{at} \leq \mu_e \cdot F$$

Entretanto, $P_A = f_{at}$, então:

$$P_A \leq \mu_e \cdot F$$

Ou:

$$\mu_e \cdot F \geq P_A$$

$$F \geq \frac{P_A}{\mu_e}$$

Portanto, o menor valor de F é dado por:



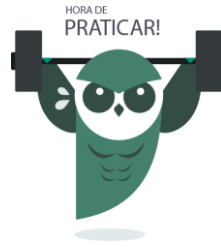
$$F = \frac{P_A}{\mu_e}$$

Substituindo valores, temos:

$$F = \frac{3 \cdot 10}{0,2}$$

$$\boxed{F = 150 \text{ N}}$$

Gabarito: B



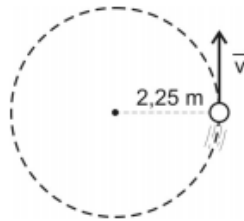
6. Lista de questões nível 2

1. (AFA – 2019)

Uma partícula, de massa 1 kg , descreve um movimento circular uniformemente variado, de raio $2,25 \text{ m}$, iniciando-o a partir do repouso no instante $t_0 = 0$. Em $t = 2 \text{ s}$, o módulo de sua velocidade vetorial (\vec{v}) é de 6 m/s , conforme figura abaixo.

A intensidade da força resultante sobre a partícula, no instante $t = 1 \text{ s}$, em N , vale

- a) 1
- b) 5
- c) 9
- d) 12



2. (AFA – 2019)

Uma esfera, de dimensões desprezíveis, sob ação de um campo gravitacional constante, está inicialmente equilibrada na vertical por uma mola. A mola é ideal e se encontra com uma deformação x , conforme ilustrado na figura 1.

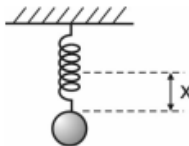


Figura 1

O sistema esfera-mola é posto, em seguida, a deslizar sobre uma superfície horizontal, com velocidade constante, conforme indicado na figura 2. Nessa situação, quando o ângulo de inclinação da mola é θ , em relação à horizontal, sua deformação é y .

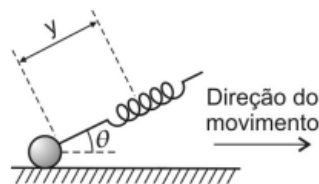


Figura 2

Nessas condições, o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e a superfície horizontal vale

- a) $\frac{\cos \theta}{\frac{x}{y} - \text{sen } \theta}$
- b) $\frac{x}{y}$
- c) $\frac{x \cdot \text{sen } \theta}{x + y \cdot \cos \theta}$
- d) $\frac{y \cdot \cos \theta}{x \cdot \text{sen } \theta}$

3. (AFA – 2018)

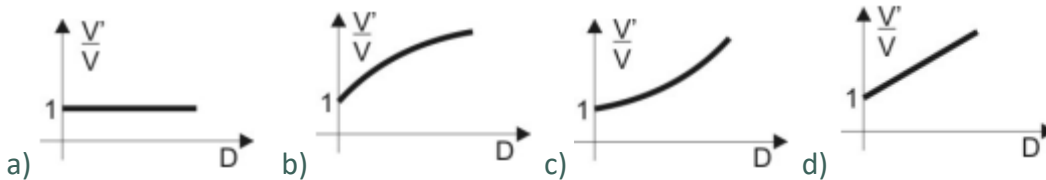
Em muitos problemas de física desprezam-se as forças de resistência ao movimento. Entretanto, sabe-se que, na prática, essas forças são significativas e muitas vezes desempenham um papel determinante. Por exemplo, “no automobilismo, os veículos comumente possuem dispositivos



aerodinâmicos implementados, os quais têm a função de contribuir para o aumento da “Downforce”, uma força vertical, inversa à sustentação, que busca incrementar a aderência dos pneus ao asfalto através de um acréscimo na carga normal, permitindo que o veículo possa realizar as curvas com uma velocidade maior do que o faria sem estes dispositivos”.

(Trecho remado da monografia intitulada "Sistema ativo de redução de arrasto aerodinâmico por amador aplicado a um protótipo de fórmula S.4E", de autoria de Danilo Barbo: a Porto, apresentada na Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, em 2016).

Para avaliar o papel da “Downforce”, considere um carro de Fórmula 1, de massa M , realizando uma curva em determinada pista plana. Ao se desprezar completamente os efeitos produzidos pelo seu movimento em relação ao ar, mas considerando o atrito entre pneus e o asfalto, o carro consegue fazer a curva, sem derrapar, a uma velocidade máxima V . Porém, ao levar em conta, especificamente, a atuação da “Downforce” D (desconsiderando a força de arrasto) a velocidade máxima V' do carro, nessa mesma curva, muda em função de D . Nessas condições, o gráfico que melhor representa a relação V'/V em função de D é

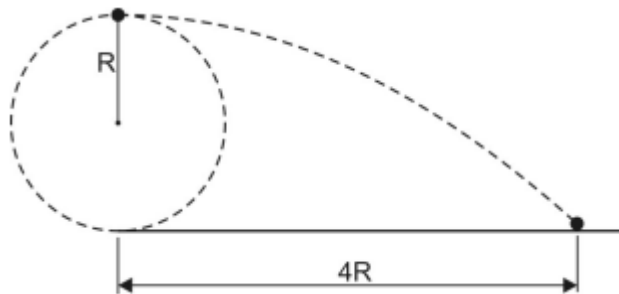


4. (AFA – 2017)

Uma partícula de massa m , presa na extremidade de uma corda ideal, descreve um movimento circular acelerado, de raio R , contido em um plano vertical, conforme figura a seguir.

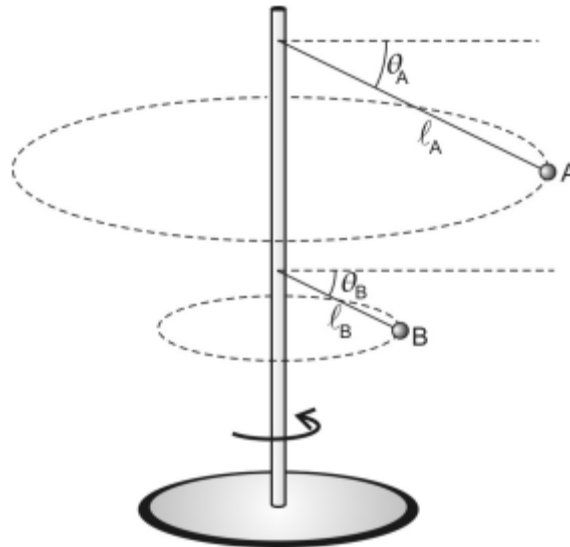
Quando essa partícula atinge determinado valor de velocidade, a corda também atinge um valor máximo de tensão e se rompe. Nesse momento, a partícula é lançada horizontalmente, de uma altura $2R$, indo atingir uma distância horizontal igual a $4R$. Considerando a aceleração da gravidade no local igual a g , a tensão máxima experimentada pela corda foi de

- a) mg
- b) $2mg$
- c) $3mg$
- d) $4mg$



5. (AFA – 2017)

Dois pequenos corpos A e B são ligados a uma haste rígida através de fios ideais de comprimentos l_A e l_B , respectivamente, conforme figura a seguir.



A e B giram em sincronia com a haste, com velocidades escalares constantes v_A e v_B , e fazem com a direção horizontal ângulos θ_A e θ_B , respectivamente. Considerando $l_A = 4l_B$, a razão v_A/v_B , em função de θ_A e θ_B , é igual a

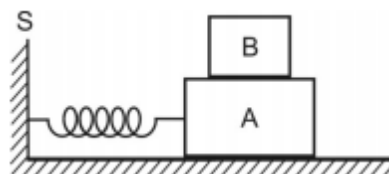
- a) $2 \cdot \frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B} \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_A}}$ b) $\frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B} \cdot \frac{\sin \theta_A}{\sin \theta_B}$
 c) $\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_A} \cdot \sqrt{\frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B}}$ d) $4 \cdot \frac{\cos \theta_A}{\sin \theta_A} \cdot \frac{\cos \theta_B}{\sin \theta_B}$

6. (AFA – 2017)

Na situação da figura a seguir, os blocos A e B têm massas $m_A = 3,0 \text{ kg}$ e $m_B = 1,0 \text{ kg}$. O atrito entre o bloco A e o plano horizontal de apoio é desprezível, e o coeficiente de atrito estático entre B e A vale $\mu_e = 0,4$. O bloco A está preso numa mola ideal, inicialmente não deformada, de constante elástica $K = 160 \text{ N/m}$ que, por sua vez, está presa ao suporte S .

O conjunto formado pelos dois blocos pode ser movimentado produzindo uma deformação na mola e, quando solto, a mola produzirá uma certa aceleração nesse conjunto. Desconsiderando a resistência do ar, para que B não escorregue sobre A , a deformação máxima que a mola pode experimentar, em cm, vale

- a) 3,0
 b) 4,0
 c) 10
 d) 16



7. (AFA – 2015)

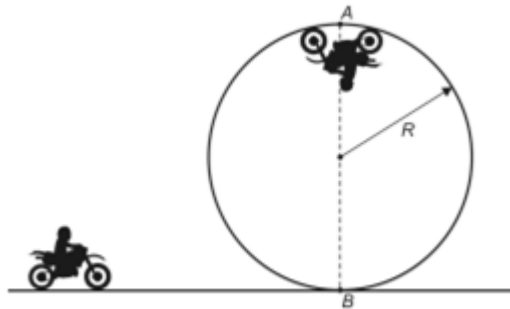
Uma determinada caixa é transportada em um caminhão que percorre, com velocidade escalar constante, uma estrada plana e horizontal. Em um determinado instante, o caminhão entra em uma curva circular de raio igual a 51,2 m, mantendo a mesma velocidade escalar. Sabendo-se que os coeficientes de atrito cinético e estático entre a caixa e o assoalho horizontal são, respectivamente, 0,4 e 0,5 e considerando que as dimensões do caminhão, em relação ao raio da curva, são desprezíveis e que a caixa esteja apoiada apenas no assoalho da carroceria, pode-se afirmar que a máxima velocidade, em m/s, que o caminhão poderá desenvolver, sem que a caixa escorregue é

- a) 14,3 b) 16,0 c) 18,0 d) 21,5



8. (AFA – 2014)

Um motociclista, pilotando sua motocicleta, move-se com velocidade constante, durante a realização do looping da figura abaixo.



Quando está passando pelo ponto mais alto dessa trajetória circular, o motociclista lança, para trás, um objeto de massa desprezível, comparada à massa de todo o conjunto motocicleta-motociclista. Dessa forma, o objeto cai, em relação à superfície da Terra, como se tivesse sido abandonado em A, percorrendo uma trajetória retilínea até B. Ao passar, após esse lançamento, em B, o motociclista consegue recuperar o objeto imediatamente antes dele tocar o solo.

Desprezando a resistência do ar e as dimensões do conjunto motocicleta-motociclista, e considerando $\pi^2 = 10$, a razão entre a normal (N), que age sobre a motocicleta no instante em que passa no ponto A, e o peso (P) do conjunto motocicleta-motociclista, (N/P), será igual a

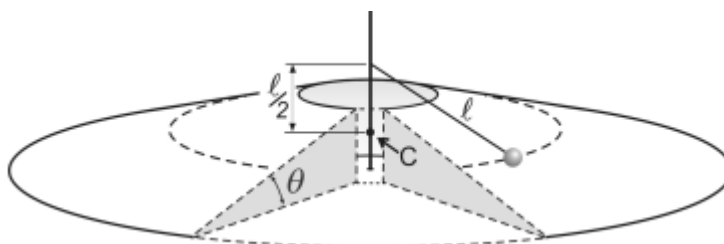
- a) 0,5 b) 1,0 c) 1,5 d) 3,5

9. (AFA – 2013)

Em um local onde a aceleração da gravidade vale g , uma partícula move-se sem atrito sobre uma pista circular que, por sua vez, possui uma inclinação θ . Essa partícula está presa a um poste central, por meio de um fio ideal de comprimento l (que, através de uma articulação, pode girar livremente em torno do poste). O fio é mantido paralelo à superfície da pista, conforme figura abaixo.

Ao girar com uma determinada velocidade constante, a partícula fica "flutuando" sobre a superfície inclinada da pista, ou seja, a partícula fica na iminência de perder o contato com a pista e, além disso, descreve uma trajetória circular com centro em C, também indicado na figura. Nessas condições, a velocidade linear da partícula deve ser igual a

- a) $\sqrt{\frac{3}{2}gl}$
b) \sqrt{gl}
c) $\sqrt{3gl}$
d) $\sqrt[4]{2\sqrt{gl}}$



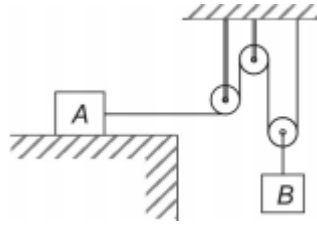
10. (AFA – 2009)

Na situação de equilíbrio abaixo, os fios e as polias são ideais e a aceleração da gravidade é g . Considere μ_e o coeficiente de atrito estático entre o bloco A, de massa m_A , e o plano horizontal em que se apóia.

A maior massa que o bloco B pode ter, de modo que o equilíbrio se mantenha, é

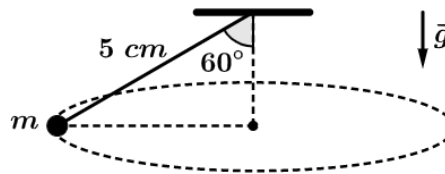


- a) $\mu_e m_A$
- b) $3\mu_e m_A$
- c) $2\mu_e m_A$
- d) $4\mu_e m_A$



11. (Simulado AFA)

Uma partícula de massa m descreve um MCU em um plano horizontal, conforme figura abaixo.



Sabendo que a aceleração da gravidade local é igual a 10 m/s^2 , a frequência de oscilação em Hz é dada por:

- a) $\pi/10$
- b) $10/\pi$
- c) $20/\pi$
- d) $\pi/20$

12. (Simulado AFA)

Uma moeda repousa a 15 cm do centro de um disco horizontal que gira a 60 rpm. Qual o menor coeficiente de atrito entre a moeda e o disco para que a moeda não se movimente em relação ao disco? Caso necessário, utilize $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\pi^2 = 10$.

- a) 0,5
- b) 0,6
- c) 0,7
- d) não é possível determinar, pois não foi informado o valor da massa da moeda.

13. (EFOMM – 2021)

Um objeto de massa m é preso ao teto por um fio inextensível, sem massa e com comprimento L . De forma adequada, a massa é posta a girar com velocidade de módulo constante, descrevendo uma velocidade de módulo constante, descrevendo uma trajetória circular de raio $L/3$ no plano horizontal. Se g é o módulo da aceleração da gravidade, o período de rotação do pêndulo é:

- (A) $\left(\frac{8\sqrt{2}\pi^2 L}{3g}\right)^{\frac{1}{2}}$
- (B) $\left(\frac{2\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$
- (C) $\left(\frac{3\sqrt{2}\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$
- (D) $\left(\frac{4\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$
- (E) $\left(\frac{\sqrt{3}\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$

14. (EFOMM – 2017)

Na situação apresentada no esquema abaixo, o bloco B cai a partir do repouso de uma altura y , e o bloco A percorre uma distância total $y + d$. Considere a polia ideal e que existe atrito entre o corpo A e a superfície de contato. Sendo as massas dos corpos A e B iguais a m . determine o coeficiente de atrito cinético μ .



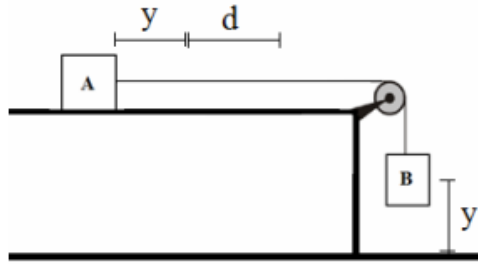
a) $\mu = \frac{y}{y+2d}$

b) $\mu = \frac{2d}{y+2d}$

c) $\mu = \frac{2d+y}{y}$

d) $\mu = \frac{y}{2d}$

e) $\mu = \frac{d}{2d+y}$



15. (EFOMM – 2016)

Os blocos *A* e *B* da figura pesam $1,00 \text{ kN}$, e estão ligados por um fio ideal que passa por uma polia sem massa e sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os blocos e os planos é $0,60$. Os dois blocos estão inicialmente em repouso. Se o bloco *B* está na iminência de movimento, o valor da força de atrito, em newtons, entre o bloco *A* e o plano, é

Dado: $\cos 30^\circ \cong 0,87$.

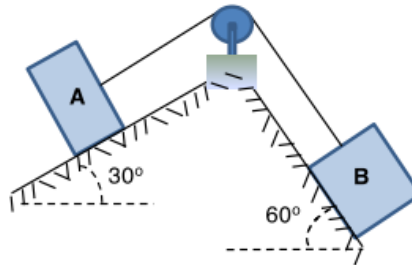
a) 60

b) 70

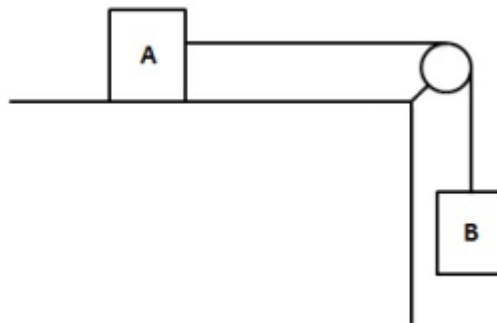
c) 80

d) 85

e) 90



16. (EFOMM – 2014)



Na figura dada, a polia e o fio são ideais, e a aceleração da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. O bloco *B* possui massa $m_B = 20 \text{ kg}$, e o coeficiente de atrito estático entre o bloco *A* e a superfície de apoio é de $\mu_e = 0,4$. Considerando que o sistema é abandonado em repouso, qual é o menor valor da massa do bloco *A* que consegue equilibrar o bloco *B*?

a) 20 kg.

b) 30 kg.

c) 50 kg.

d) 75 kg.

e) 100 kg.

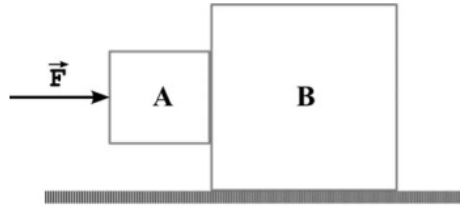
17. (EFOMM – 2013)

Os blocos *A* e *B* devem ser movimentados conforme mostrado na figura abaixo, sem que o bloco menor deslize para baixo (os blocos não estão presos um ao outro). Há atrito entre o bloco *A*, de massa $8,00 \text{ kg}$, e o bloco *B*, de massa $40,0 \text{ kg}$, sendo o coeficiente de atrito estático $0,200$. Não havendo atrito entre o bloco *B* e o solo, a intensidade mínima da força externa \vec{F} , em newtons, deve ser igual a

Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

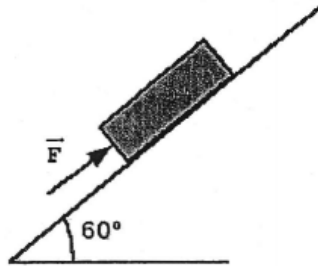


- a) 480
- b) 360
- c) 240
- d) 150
- e) 100



18. (EFOMM – 2010)

Analise a figura a seguir.



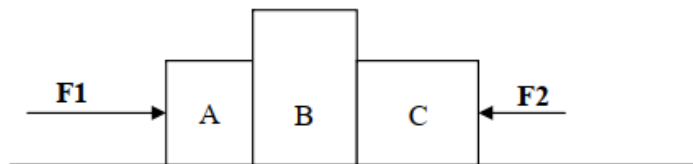
No convés de um navio, um marinheiro apoia uma caixa de massa 20 kg sobre um plano inclinado de 60° , aplicando uma força F de módulo igual a 100 N paralela à superfície inclinada do plano, conforme indica a figura acima. Nestas condições, ele observa que a caixa está na iminência de descer o plano inclinado. Para que a caixa fique na iminência de subir o plano inclinado, ele deve alterar o módulo da força \vec{F} para

Dados: $g = 10\text{ m/s}^2$; $\text{sen } 60^\circ = 0,85$.

- a) 100 N
- b) 140 N
- c) 180 N
- d) 200 N
- e) 240 N

19. (EFOMM – 2009)

Três blocos A , B e C encontram-se agrupados e sob a ação das forças $F_1 = 100\text{ N}$ e $F_2 = 50\text{ N}$, conforme desenho abaixo, deslizando em superfície na qual o coeficiente de atrito é $\mu = 0,1$. Sabendo que as massas desses blocos são, respectivamente, 5 , 10 e 5 kg , a aceleração do sistema é de (dado: $g = 10\text{ m/s}^2$)



- a) zero (não há deslocamento).
- b) $1,5\text{ m/s}^2$, para a direita.
- c) $1,5\text{ m/s}^2$, para a esquerda.
- d) $3,0\text{ m/s}^2$, para a direita.
- e) $3,0\text{ m/s}^2$, para a esquerda.

20. (EFOMM – 2006)

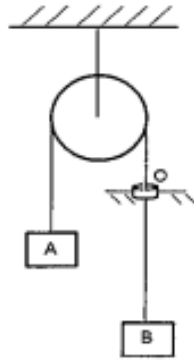
Aplica-se força de 200 N a um corpo de massa 25 kg , em plano horizontal com atrito; verifica-se, em laboratório, que sua velocidade aumenta de 18 km/h para 27 km/h em $0,4\text{ s}$. O coeficiente de atrito dinâmico entre o corpo e a superfície do plano horizontal é

- a) 0,125
- b) 0,175
- c) 0,225
- d) 0,275
- e) 0,325



21. (EN – 2019)

Analise a figura abaixo.

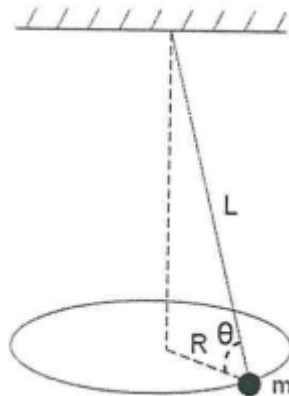


A figura acima mostra dois blocos *A* e *B* de massas *m* e *3m*, respectivamente, ligados por uma corda inextensível e de massa desprezível passando por uma polia ideal sem atrito e através de um orifício *O*. No movimento da corda, considere que o orifício atua com uma força de atrito constante, *F*. Sabendo-se que a aceleração do sistema é $g/3$, onde *g* é a aceleração da gravidade, qual o módulo da força de atrito *F*?

- a) $\frac{mg}{3}$ b) $\frac{2mg}{3}$ c) $\frac{mg}{2}$ d) *mg* e) *2mg*

22. (EN – 2018)

Analise a figura abaixo.

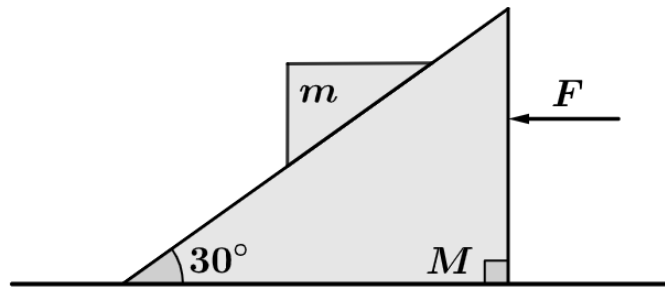


A figura mostra um pêndulo cônico no qual um pequeno objeto de massa *m*, preso à extremidade inferior de um fio, move-se em uma circunferência horizontal de raio *R*, com o módulo da velocidade constante. O fio tem comprimento *L* e massa desprezível. Sendo *g* a aceleração da gravidade e sabendo que a relação entre a tração *T* e o peso *P* do objeto é $T = 4P$, qual o período do movimento?

- a) $\sqrt{\frac{\pi^2}{8g}} L$ b) $\left(\frac{\pi^2}{4g} L\right)^{1/2}$ c) $\sqrt{\frac{\pi^2}{2g}} L$ d) $\left(\frac{\pi^2}{g} L\right)^{1/2}$ e) $\frac{2\pi^2}{g} L$

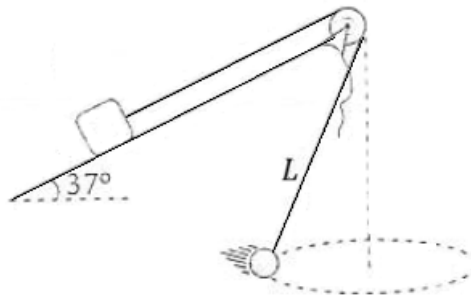
23. (Simulado EFOMM)

A figura abaixo representa uma cunha de massa $M = 10 \text{ kg}$ e sobre ela apoia outra cunha de massa $m = 2 \text{ kg}$. Sabe-se que não há atrito entre a cunha e a superfície horizontal. Aplica-se uma força $F = 24\sqrt{3} \text{ N}$ horizontal, paralela à superfície, e nota-se que não há movimento relativo entre as cunhas. Sendo a aceleração da gravidade local igual a 10 m/s^2 , a intensidade da força de atrito entre as cunhas é de:



- a) 2,67 N b) 4,51 N c) 5,33 N d) 7,57 N e) 10,6 N

24. (Simulado EFOMM)



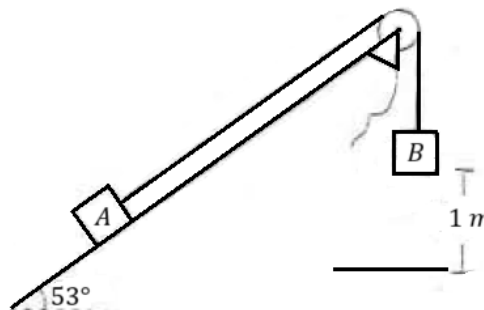
A figura acima representada um sistema mecânico formado por uma esfera de massa igual a 3,2 kg, girando com velocidade angular ω . A velocidade angular mínima ω_{\min} que a esfera precisa ter para que o bloco de 20 kg apoiado sobre o plano inclinado não deslize é igual a:

Considere que:

- coeficiente de atrito estático entre o plano e o bloco: 0,5.
- coeficiente de atrito dinâmico entre o plano e o bloco: 0,3.
- comprimento L do fio: 50 cm.
- aceleração da gravidade local: 10 m/s^2 .
- $\text{sen}(37^\circ) = 0,6$.

- a) 1 rad/s b) 2 rad/s c) 3 rad/s d) 4 rad/s e) 5 rad/s

25. (Simulado EFOMM)



Dois blocos iguais de mesma massa m estão ligados por uma corda ideal, como na figura acima. Após o sistema ser abandonado do repouso, a distância percorrida por A até que ele pare pela primeira vez é de:

Considere que:

- $g = 10 \text{ m/s}^2$.



$-\cos(53^\circ) = 0,6.$

- a) 1 m b) 1,125 m c) 1,25 m d) 1,5 m e) 1,75 m

26. (Simulado EFOMM)

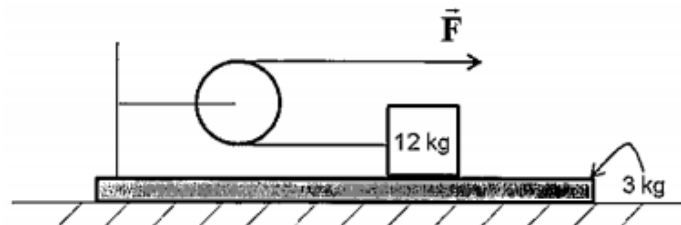
Um jogador de futebol A lança uma bola para outro jogador B que está correndo a uma velocidade de 5 m/s no mesmo sentido da bola. Em um certo ponto, a velocidade da bola é mínima e vale 30 m/s. Chamando de ρ_A o raio de curvatura da trajetória da bola nesse ponto em relação ao jogador A e de ρ_B o raio de curvatura da trajetória da bola nesse ponto em relação ao jogador B, podemos dizer que ρ_A/ρ_B é igual a:

Despreze a resistência do ar:

- a) $\frac{16}{25}$ b) $\frac{24}{25}$ c) 1 d) $\frac{36}{25}$ e) $\frac{42}{25}$

27. (EN – 2017)

Analise a figura abaixo.



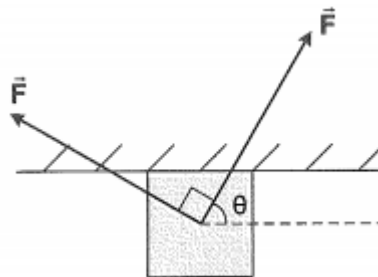
A figura acima exibe um bloco de 12 kg que se encontra na horizontal sobre uma plataforma de 3,0 kg. O bloco está preso a uma corda de massa desprezível que passa por uma roldana de massa e atrito desprezíveis fixada na própria plataforma. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre as superfícies de contato (bloco e plataforma) são, respectivamente, 0,3 e 0,2. A plataforma, por sua vez, encontra-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Considere que em um dado instante uma força horizontal \vec{F} passa a atuar sobre a extremidade livre da corda, conforme indicado na figura. Para que não haja escorregamento entre o bloco e plataforma, o maior valor do módulo da força \vec{F} aplicada, em newtons, é

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 4/9 b) 15/9 c) 10 d) 20 e) 30

28. (EN – 2017)

Analise a figura abaixo.



A figura acima mostra um bloco de massa 7,0 kg sob uma superfície horizontal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a superfície são, respectivamente, 0,5 e 0,4. O bloco está submetido a ação de duas forças de mesmo módulo, $F = 80 \text{ N}$, mutuamente ortogonais. Se o ângulo θ vale 60° , então, pode-se afirmar que o bloco

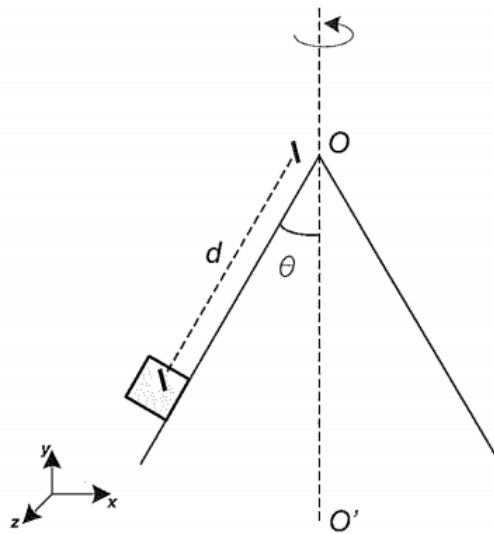


Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$

- a) descola-se da superfície, caindo verticalmente.
- b) desliza sob a superfície com aceleração constante para a direita.
- c) não se move em relação à superfície.
- d) desliza sob a superfície com velocidade constante para a direita.
- e) desliza sob a superfície com aceleração constante para a esquerda.

29. (EN – 2015)

Analise a figura abaixo.

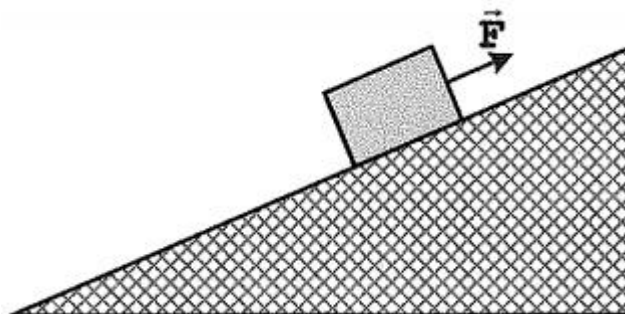


A figura acima mostra um bloco de massa $0,3 \text{ kg}$ que está preso à superfície de um cone que forma um ângulo $\theta = 30^\circ$ com seu eixo central OO' , fixo em relação ao sistema de eixos xyz . O cone gira com velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$ em relação ao eixo OO' . Sabendo que o bloco está a uma distância $d = 20 \text{ cm}$ do vértice do cone, o módulo da força resultante sobre o bloco, medido pelo referencial fixo xyz , em newtons, é

- a) 2,0
- b) 3,0
- c) 3,5
- d) 6,0
- e) 10

30. (EN – 2014)

Observe a figura a seguir.



Um caixote pesando 50 N , no instante $t = 0$, se encontra em repouso sobre um plano muito longo e inclinado de 30° em relação à horizontal. Entre o caixote e o plano inclinado, o coeficiente de atrito estático é $0,20$ e o cinético é $0,10$. Sabe-se que a força F , paralela ao plano inclinado, conforme indica a figura acima, tem intensidade igual a 36 N . No instante $t = 9 \text{ s}$, qual o módulo, em



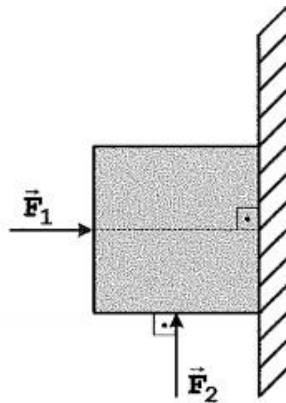
newtons, da força de atrito entre o caixote e o plano? Nesse mesmo instante, o bloco estará subindo, descendo ou permanece em repouso sobre o plano inclinado?

Dados: $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ e $\text{cos } 30^\circ = 0,9$

- a) 14 e descendo. b) 11 e permanece em repouso. c) 9,0 e subindo.
d) 8,5 e permanece em repouso. e) 4,5 e subindo.

31. (EN – 2014)

Observe a figura a seguir.



Na figura acima, o bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ que está encostado na parede é mantido em repouso devido à ação de duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , cujos módulos variam no tempo segundo as respectivas equações $F_1 = F_0 + 2,0t$ e $F_2 = F_0 + 3,0t$, onde a força é dada em newtons e o tempo, em segundos. Em $t = 0$, o bloco está na iminência de entrar em movimento de descida, sendo o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede igual a 0,6. Em $t = 3,0 \text{ s}$, qual o módulo, em newtons, a direção e o sentido da força de atrito?

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

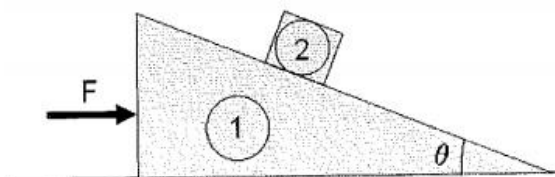
- a) 7,5 e vertical para cima. b) 7,5 e vertical para baixo. c) 4,5 e vertical para cima.
d) 1,5 e vertical para cima. e) 1,5 e vertical para baixo.

32. (EN – 2013)

Considere uma força horizontal F aplicada sobre a cunha 1, de massa $m_1 = 8,50 \text{ kg}$, conforme mostra a figura abaixo. Não há atrito entre a cunha e o chão, e o coeficiente de atrito estático entre a cunha e o bloco 2, de massa $m_2 = 8,50 \text{ kg}$, vale 0,200. O maior valor de F , em newtons, que pode ser aplicado à cunha, sem que o bloco comece a subir a rampa é

Dados: $|\vec{g}| = 10,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\text{sen } \theta = 0,600$; $\text{cos } \theta = 0,800$.

- a) 85,0
b) 145
c) 170
d) 190
e) 340



33. (EN – 2012)

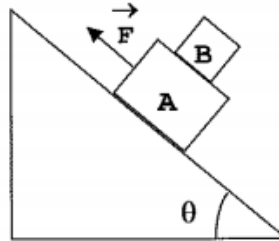
O bloco B, de massa $10,0 \text{ kg}$, está sobre o bloco A, de massa $40,0 \text{ kg}$, ambos em repouso sobre um plano inclinado que faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal, conforme a figura. Há atrito, com



coeficiente estático $0,600$, entre o bloco B e o bloco A , não havendo atrito entre o bloco A e o plano inclinado. A intensidade mínima da força F , em newtons, aplicada ao bloco A e paralela ao plano inclinado, para que o sistema permaneça em repouso, é

Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

- a) 250
- b) 225
- c) 200
- d) 175
- e) 150

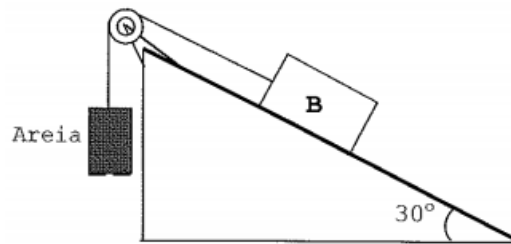


34. (EN – 2011)

Na figura abaixo, temos o bloco B de massa igual a $4,0 \text{ kg}$ e um recipiente (massa desprezível) cheio de areia, interligados por um fio (inextensível e de massa desprezível) que passa por uma polia ideal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco B e a reta de maior declive do plano inclinado valem, respectivamente, $0,050 \cdot \sqrt{3}$ e $0,040 \cdot \sqrt{3}$. O recipiente possui um pequeno orifício no fundo, por onde a areia pode sair. No instante $t = 0$, a massa da areia no recipiente é de $1,7 \text{ kg}$. A partir do instante $t = 0$, com a areia saindo do orifício, o módulo da maior aceleração (em m/s^2) adquirida pelo bloco B é

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

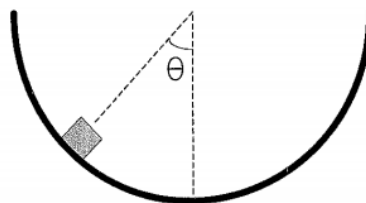
- a) 4,2
- b) 4,4
- c) 5,0
- d) 5,5
- e) 5,8



35. (EN – 2009)

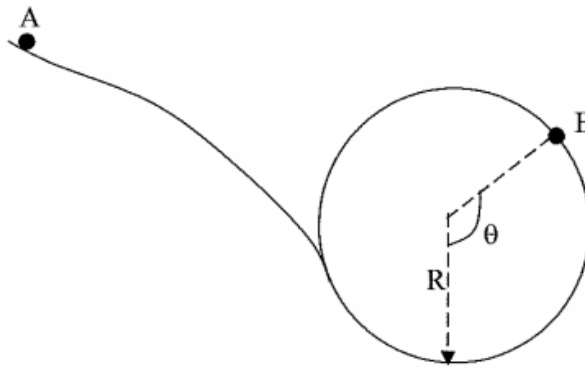
Um pequeno bloco de massa m está, devido ao atrito, em repouso sobre uma superfície cilíndrica numa posição que forma um ângulo θ com a vertical, conforme indica a figura. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a superfície são, respectivamente, iguais a μ_e e μ_c . Considerando o bloco como uma partícula, quanto vale o módulo da força de atrito entre o bloco e a superfície?

- a) $m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$
- b) $m \cdot g \cdot \text{cos } \theta$
- c) $\mu_e \cdot m \cdot g$
- d) $\mu_e \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$
- e) $\mu_c \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } \theta$



36. (EN – 2008)

Uma pequena esfera (partícula) de massa M desliza, a partir do repouso (posição A), por uma trajetória (no plano vertical), passando pela posição B , da circunferência de raio R , com velocidade de módulo V , como indica a figura abaixo.

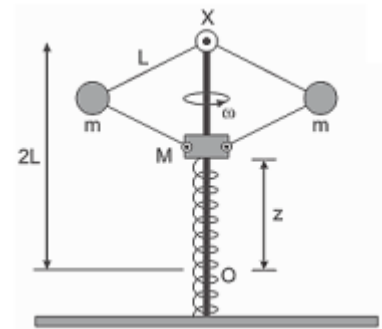


Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre a partícula e trajetória vale μ_c . O módulo da força de atrito que atua na esfera no instante em que passa pela posição B, é igual a

- a) $\mu_c \cdot M \cdot g$ b) $\mu_c \cdot M \cdot g \cdot \text{sen } \theta$ c) $\mu_c \cdot M \cdot g \cdot \text{cos } \theta$
 d) $\frac{\mu_c \cdot M \cdot (V^2 + R \cdot g \cdot \text{cos } \theta)}{R}$ e) $\frac{\mu_c \cdot V^2 \cdot g \cdot \text{sen } \theta}{R}$

37. (ITA 2015)

Na figura, o eixo vertical giratório imprime uma velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ao sistema composto por quatro barras iguais, de comprimento $L = 1 \text{ m}$ e massa desprezível, graças a uma dupla articulação na posição fixa X. Por sua vez, as barras de baixo são articuladas na massa M de 2 kg que, através de um furo central, pode deslizar sem atrito ao longo do eixo e esticar uma mola de constante elástica $k = 100 \text{ N/m}$ a partir da posição O da extremidade superior da mola em repouso, a dois metros abaixo de X. O sistema completa-se com duas massas iguais de $m = 1 \text{ kg}$ cada uma, articuladas às barras. Sendo desprezíveis as dimensões das massas, então, a mola distender-se-á de uma altura z acima de O dada por:



- a) 0,2m b) 0,5m c) 0,6m d) 0,7m e) 0,9m

38. (ITA 2012)

Considere uma rampa plana, inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, no início da qual encontra-se um carrinho. Ele então recebe uma pancada que o faz subir até uma certa distância, durante o tempo t_s , descendo em seguida até sua posição inicial. A “viagem” completa dura um tempo total t. Sendo μ o coeficiente de atrito cinético entre o carrinho e a rampa, a relação t/t_s é igual a:

- a) 2 b) $1 + \sqrt{\text{tg } \theta + \mu / |\text{tg } \theta - \mu|}$
 c) $1 + \sqrt{\text{cos } \theta + \mu / |\text{cos } \theta - \mu|}$ d) $1 + \sqrt{\text{sen } \theta + \mu / |\text{cos } \theta - \mu|}$
 e) $1 - \sqrt{\text{tg } \theta + \mu / |\text{tg } \theta - \mu|}$

39. (IME-2012)

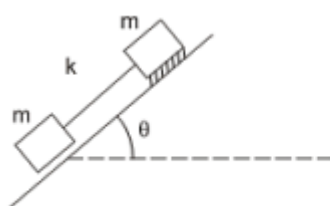


Figura 1

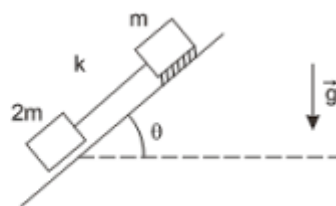


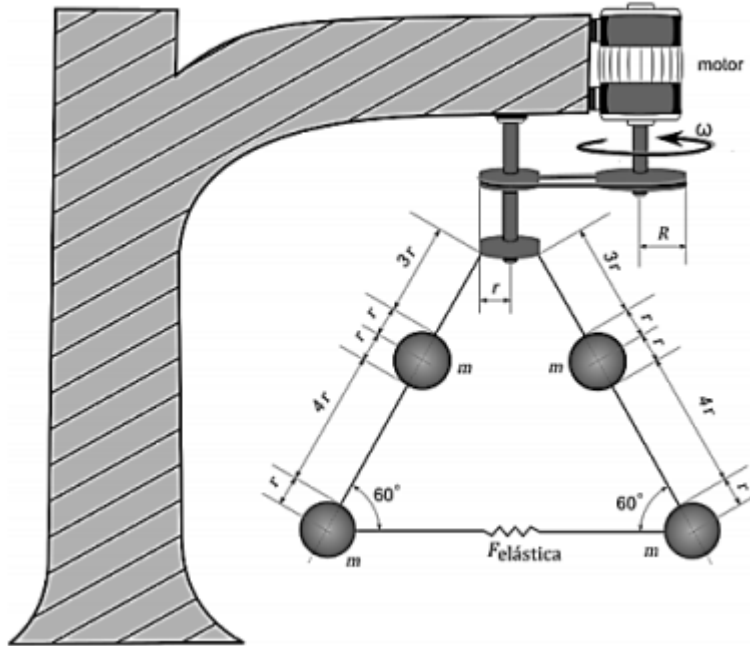
Figura 2



A figura 1 mostra dois corpos de massas iguais a m presos por uma haste rígida de massa desprezível, na iminência do movimento sobre um plano inclinado, de ângulo θ com a horizontal. Na figura 2, o corpo inferior é substituído por outro com massa $2m$. Para as duas situações, o coeficiente de atrito estático é μ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu/2$ para a massa superior, e não há atrito para a massa inferior. A aceleração do conjunto ao longo do plano inclinado, na situação da figura 2 é:

- a) $(2g\text{sen}\theta)/3$ b) $(3g\text{sen}\theta)/2$ c) $(g\text{sen}\theta)/2$
 d) $g(2\text{sen}\theta - \text{cos}\theta)$ e) $g(2\text{sen}\theta + \text{cos}\theta)$

40. (IME-2018)



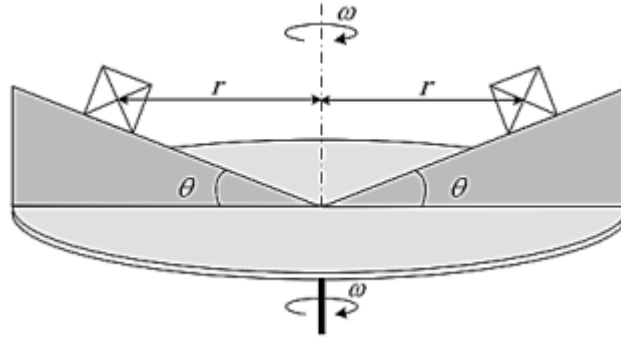
A figura acima mostra um dispositivo composto por um motor elétrico, cujo eixo se encontra ligado a uma polia ideal de raio R , solidária a uma segunda polia de raio r , sem deslizamento. Solidário ao segundo eixo há um disco rígido metálico de raio r . Em duas extremidades opostas deste disco, foram fixados dois pêndulos compostos idênticos, com fios ideais e esferas homogêneas, de massa m . Existe um fio extensível ligando as esferas inferiores, provendo uma força elástica $F_{\text{elástica}}$ que as mantém na configuração mostrada na figura. Determine, em função de g, m, r e R :

- a) a velocidade angular ω do motor elétrico;
 b) a força elástica $F_{\text{elástica}}$ do fio extensível.

Dado: aceleração da gravidade: g .

41. (IME 2018)

O sistema mostrado na figura gira em torno de um eixo central em velocidade angular constante ω . Dois cubos idênticos, de massa uniformemente distribuída, estão dispostos simetricamente a uma distância r do centro ao eixo, apoiados em superfícies inclinadas de ângulo θ . Admitindo que não existe movimento relativo dos cubos em relação às superfícies, a menor velocidade angular ω para que o sistema se mantenha nessas condições é:



Dados:

- Aceleração da gravidade: g ;
- Massa de cada cubo: m ;
- Aresta de cada cubo: a ; e
- Coeficiente de atrito entre os cubos e as superfícies inclinadas: μ

a) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

b) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

c) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

d) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

e) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

42. (ITA - 2022)

Um bloco de massa m_A encontra-se sobre uma superfície de uma cunha de massa m_B , que desliza sem atrito em uma superfície plana devido à ação de uma força horizontal. O ângulo de inclinação da cunha é dado por θ . Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco e a cunha é μ , calcule em função de m_A , m_B , θ , μ e g :

- a) a aceleração mínima à qual a cunha deve ser submetida para que o bloco inicie um movimento de subida;
- b) a intensidade da força de contato entre o bloco e a cunha.



GABARITO



7. Gabarito sem Comentários nível 2

1. B

2. A

3. B

4. C

5. A

6. C

7. B

8. C

9. A

10. C

11. B

12. B

13. A

14. A

15. B

16. C

17. A

18. E

19. A

20. B

21. B

22. D

23. C

24. E

25. B

26. D

27. D

28. E

29. B

30. E

31. E

32. D

33. A

34. B

35. A

36. D

37. B

38. B

39. A

40. a) $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{rg}{3\sqrt{3}}}$ b) $F_{elástica} = \frac{\sqrt{3}mg}{3}$



41. D

42. a) $\frac{g(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$ b) $\frac{m_A g \sqrt{1 + \mu^2}}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$

ESCLARECENDO!



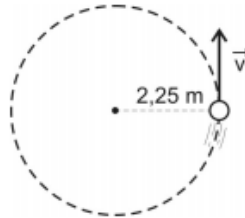
8. Lista de questões nível 2 comentada

1. (AFA – 2019)

Uma partícula, de massa 1 kg , descreve um movimento circular uniformemente variado, de raio $2,25\text{ m}$, iniciando-o a partir do repouso no instante $t_0 = 0$. Em $t = 2\text{ s}$, o módulo de sua velocidade vetorial (\vec{v}) é de 6 m/s , conforme figura abaixo.

A intensidade da força resultante sobre a partícula, no instante $t = 1\text{ s}$, em N , vale

- a) 1
- b) 5
- c) 9
- d) 12



Comentários:

A partícula realiza um movimento uniformemente variável, portanto sua velocidade linear é dada por:

$$v = v_0 + a_{tg} \cdot t$$

$$6 = 0 + a_{tg} \cdot 2 \therefore a_{tg} = 3\text{ m/s}^2$$

Logo, a função horária da velocidade é dada por:

$$v(t) = 3t$$

Para $t = 1\text{ s}$, temos:

$$v(1) = 3 \cdot 1 \therefore v(1) = 3\text{ m/s}$$

Portanto, neste instante de tempo, a aceleração centrípeta é dada por:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_{cp} = \frac{3^2}{2,25} \therefore a_{cp} = 4\text{ m/s}^2$$

Assim, a aceleração total sofrida pela partícula é dada por:

$$a_R^2 = a_{tg}^2 + a_{cp}^2$$



$$a_R^2 = 3^2 + 4^2 \therefore a_R = 5 \text{ m/s}^2$$

De acordo com a segunda lei de Newton, vem:

$$F_R = m \cdot a_R \Rightarrow F_R = 1 \cdot 5 \therefore F_R = 5 \text{ N}$$

Gabarito: B

2. (AFA – 2019)

Uma esfera, de dimensões desprezíveis, sob ação de um campo gravitacional constante, está inicialmente equilibrada na vertical por uma mola. A mola é ideal e se encontra com uma deformação x , conforme ilustrado na figura 1.

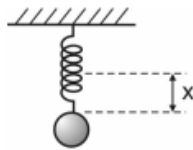


Figura 1

O sistema esfera-mola é posto, em seguida, a deslizar sobre uma superfície horizontal, com velocidade constante, conforme indicado na figura 2. Nessa situação, quando o ângulo de inclinação da mola é θ , em relação à horizontal, sua deformação é y .

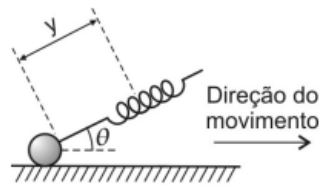


Figura 2

Nessas condições, o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e a superfície horizontal vale

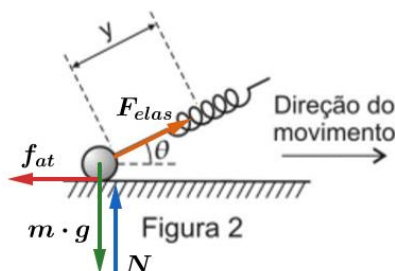
- a) $\frac{\cos \theta}{x - y \cdot \sin \theta}$ b) $\frac{x}{y}$ c) $\frac{x \cdot \sin \theta}{x + y \cdot \cos \theta}$ d) $\frac{y \cdot \cos \theta}{x \cdot \sin \theta}$

Comentários:

Na primeira situação, quando o sistema atinge o equilíbrio, temos:

$$m \cdot g = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x} \text{ (eq. 1)}$$

Na segunda situação, temos a seguinte disposição das forças:



Assim, podemos fazer o equilíbrio nas duas direções:



Na direção horizontal:

$$f = F_{elas} \cdot \cos \theta$$

$$\mu \cdot N = k \cdot y \cdot \cos \theta \text{ (eq. 2)}$$

Na direção vertical:

$$N + k \cdot y \cdot \text{sen } \theta = m \cdot g \text{ (eq. 3)}$$

Isolando a normal em 3 e substituindo em 2, temos:

$$\mu \cdot (m \cdot g - k \cdot y \cdot \text{sen } \theta) = k \cdot y \cdot \cos \theta \text{ (eq. 4)}$$

Colocando k da equação 1 em 4, temos:

$$\mu \cdot \left(m \cdot g - \frac{m \cdot g}{x} \cdot y \cdot \text{sen } \theta \right) = \frac{m \cdot g}{x} \cdot y \cdot \cos \theta$$

$$\mu = \frac{\frac{m \cdot g}{x} \cdot y \cdot \cos \theta}{m \cdot g - \frac{m \cdot g}{x} \cdot y \cdot \text{sen } \theta} \Rightarrow \mu = \frac{\frac{m \cdot g}{x} \cdot y \cdot \cos \theta}{m \cdot g \left(1 - \frac{y}{x} \cdot \text{sen } \theta \right)} \Rightarrow \mu = \frac{\frac{y}{x} \cdot \cos \theta}{1 - \frac{y}{x} \cdot \text{sen } \theta}$$

Multiplicando numerador e denominador por $\frac{x}{y}$, vem:

$$\mu = \frac{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \cdot \cos \theta}{\frac{x}{y} \cdot \left(1 - \frac{y}{x} \cdot \text{sen } \theta \right)} \therefore \mu = \frac{\cos \theta}{\frac{x}{y} - \text{sen } \theta}$$

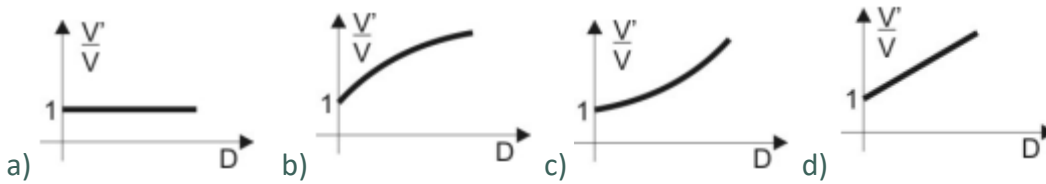
Gabarito: A

3. (AFA – 2018)

Em muitos problemas de física desprezam-se as forças de resistência ao movimento. Entretanto, sabe-se que, na prática, essas forças são significativas e muitas vezes desempenham um papel determinante. Por exemplo, “no automobilismo, os veículos comumente possuem dispositivos aerodinâmicos implementados, os quais têm a função de contribuir para o aumento da “Downforce”, uma força vertical, inversa à sustentação, que busca incrementar a aderência dos pneus ao asfalto através de um acréscimo na carga normal, permitindo que o veículo possa realizar as curvas com uma velocidade maior do que o faria sem estes dispositivos”.

(Trecho remado da monografia intitulada "Sistema ativo de redução de arrasto aerodinâmico por amador aplicado a um protótipo de fórmula S.4E", de autoria de Danilo Barbo: a Porto, apresentada na Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, em 2016).

Para avaliar o papel da “Downforce”, considere um carro de Fórmula 1, de massa M , realizando uma curva em determinada pista plana. Ao se desprezar completamente os efeitos produzidos pelo seu movimento em relação ao ar, mas considerando o atrito entre pneus e o asfalto, o carro consegue fazer a curva, sem derrapar, a uma velocidade máxima V . Porém, ao levar em conta, especificamente, a atuação da “Downforce” D (desconsiderando a força de arrasto) a velocidade máxima V' do carro, nessa mesma curva, muda em função de D . Nessas condições, o gráfico que melhor representa a relação V'/V em função de D é



Comentários:

Para o carro descrevendo a curva, a força de atrito será a resultante centrípeta na curva de raio R (relembre o caso visto em teoria). Então:

$$F_{cp} = \mu \cdot N = \frac{m \cdot v^2}{R} \text{ (eq. 1)}$$

Após o acréscimo da “Downforce”, a normal é acrescida de D e a nova velocidade será v' :

$$F_{cp} = \mu \cdot (N + D) = \frac{m \cdot v'^2}{R} \text{ (eq. 2)}$$

Dividindo 2 por 1, temos:

$$\frac{\mu \cdot (N + D)}{\mu \cdot N} = \frac{\frac{m \cdot v'^2}{R}}{\frac{m \cdot v^2}{R}} \Rightarrow 1 + \frac{D}{N} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \Rightarrow \frac{v'}{v} = f(D) = \sqrt{1 + \frac{D}{N}}$$

O gráfico que melhor explicita a função encontrada é apresentado na letra B.

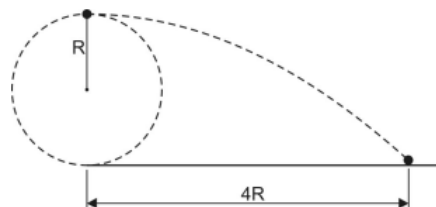
Gabarito: B

4. (AFA – 2017)

Uma partícula de massa m , presa na extremidade de uma corda ideal, descreve um movimento circular acelerado, de raio R , contido em um plano vertical, conforme figura a seguir.

Quando essa partícula atinge determinado valor de velocidade, a corda também atinge um valor máximo de tensão e se rompe. Nesse momento, a partícula é lançada horizontalmente, de uma altura $2R$, indo atingir uma distância horizontal igual a $4R$. Considerando a aceleração da gravidade no local igual a g , a tensão máxima experimentada pela corda foi de

- a) mg
- b) $2mg$
- c) $3mg$
- d) $4mg$



Comentários:

Quando a partícula é lançada horizontalmente da altura de $2R$, o tempo de queda da partícula é dado por:



$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2R}{g}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Se a partícula desloca $4R$ na direção horizontal, a velocidade é dada por:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{4R}{\sqrt{\frac{4R}{g}}} \therefore \boxed{v = \sqrt{4Rg}}$$

Quando há o rompimento do cabo, temos:

$$R_{cp} = m \cdot g + T$$

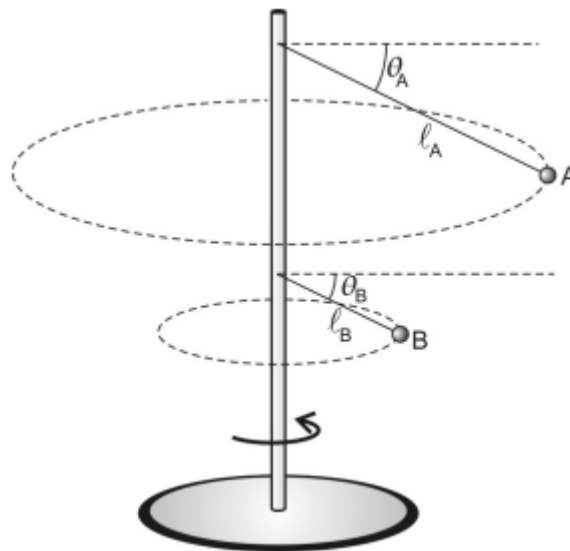
$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g + T \Rightarrow \frac{m \cdot (4 \cdot R \cdot g)}{R} = m \cdot g + T$$

$$\boxed{T = 3 \cdot m \cdot g}$$

Gabarito: C

5. (AFA – 2017)

Dois pequenos corpos A e B são ligados a uma haste rígida através de fios ideais de comprimentos l_A e l_B , respectivamente, conforme figura a seguir.



A e B giram em sincronia com a haste, com velocidades escalares constantes v_A e v_B , e fazem com a direção horizontal ângulos θ_A e θ_B , respectivamente. Considerando $l_A = 4l_B$, a razão v_A/v_B , em função de θ_A e θ_B , é igual a

a) $2 \cdot \frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B} \cdot \sqrt{\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_A}}$

b) $\frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B} \cdot \frac{\sin \theta_A}{\sin \theta_B}$

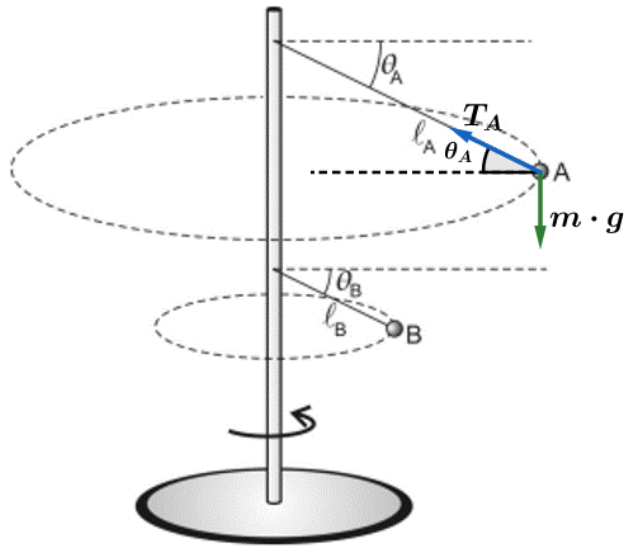
c) $\frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_A} \cdot \sqrt{\frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B}}$

d) $4 \cdot \frac{\cos \theta_A}{\sin \theta_A} \cdot \frac{\cos \theta_B}{\sin \theta_B}$

Comentários:



Vamos analisar para A e, por analogia, teremos a velocidade de B . Pelo diagrama de forças em A , temos:



Na horizontal, temos:

$$T_A \cdot \cos \theta_A = R_{cpA}$$

$$T_A \cdot \cos \theta_A = \frac{m_A \cdot v_A^2}{R_A}$$

$$T_A \cdot \cos \theta_A = \frac{m_A \cdot v_A^2}{l_A \cdot \cos \theta_A} \quad (eq. 1)$$

Na vertical, temos:

$$T_A \cdot \sin \theta_A = P_A = m_A \cdot g \quad (eq. 2)$$

Dividindo 1 por 2, vem:

$$\frac{T_A \cdot \cos \theta_A}{T_A \cdot \sin \theta_A} = \frac{\frac{m_A \cdot v_A^2}{l_A \cdot \cos \theta_A}}{m_A \cdot g} \Rightarrow v_A^2 = \frac{l_A \cdot \cos^2 \theta_A \cdot g}{\sin \theta_A} \quad (eq. 3)$$

Lembrando que $l_A = 4l_B$. Devido a simetria do movimento, a velocidade ao quadrado de B deve ser dada por:

$$v_B^2 = \frac{l_B \cdot \cos^2 \theta_B \cdot g}{\sin \theta_B} \quad (eq. 4)$$

Dividindo 3 por 4, temos:

$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{\frac{l_A \cdot \cos^2 \theta_A \cdot g}{\sin \theta_A}}{\frac{l_B \cdot \cos^2 \theta_B \cdot g}{\sin \theta_B}}$$



$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{l_A}{l_B} \cdot \frac{\cos^2 \theta_A}{\cos^2 \theta_B} \cdot \frac{\text{sen } \theta_B}{\text{sen } \theta_A} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{4 \cdot \frac{\cos^2 \theta_A}{\cos^2 \theta_B} \cdot \frac{\text{sen } \theta_B}{\text{sen } \theta_A}}$$

$$\frac{v_A}{v_B} = 2 \cdot \frac{\cos \theta_A}{\cos \theta_B} \sqrt{\frac{\text{sen } \theta_B}{\text{sen } \theta_A}}$$

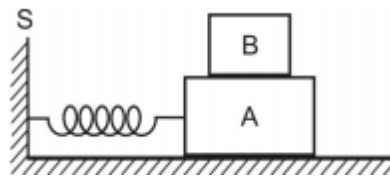
Gabarito: A

6. (AFA – 2017)

Na situação da figura a seguir, os blocos A e B têm massas $m_A = 3,0 \text{ kg}$ e $m_B = 1,0 \text{ kg}$. O atrito entre o bloco A e o plano horizontal de apoio é desprezível, e o coeficiente de atrito estático entre B e A vale $\mu_e = 0,4$. O bloco A está preso numa mola ideal, inicialmente não deformada, de constante elástica $K = 160 \text{ N/m}$ que, por sua vez, está presa ao suporte S .

O conjunto formado pelos dois blocos pode ser movimentado produzindo uma deformação na mola e, quando solto, a mola produzirá uma certa aceleração nesse conjunto. Desconsiderando a resistência do ar, para que B não escorregue sobre A , a deformação máxima que a mola pode experimentar, em cm, vale

- a) 3,0
- b) 4,0
- c) 10
- d) 16



Comentários:

Para que B não escorregue sobre o bloco A , ambos devem ter a mesma aceleração. Pela segunda lei de Newton, vem:

- Bloco A:

$$k \cdot x - f_{at} = m_A \cdot a \text{ (eq.1)}$$

- Bloco B:

$$f_{at} = m_B \cdot a \text{ (eq.2)}$$

Dividindo 1 por 2, temos:

$$\frac{k \cdot x - f_{at}}{f_{at}} = \frac{m_A}{m_B} \Rightarrow f_{at} = \frac{k \cdot x \cdot m_B}{m_A + m_B}$$

Mas:

$$f_{at} \leq \mu_e \cdot N_B$$

$$f_{at} \leq \mu_e \cdot m_B \cdot g$$



$$\frac{k \cdot x \cdot m_B}{m_A + m_B} \leq \mu_e \cdot m_B \cdot g \Rightarrow x \leq \frac{\mu_e \cdot (m_A + m_B) \cdot g}{k}$$

Substituindo valores, temos:

$$x \leq \frac{0,4 \cdot (3 + 1) \cdot 10}{160} \Rightarrow x \leq 0,1 \text{ m}$$

$$x_{\text{máx}} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Gabarito: C

7. (AFA – 2015)

Uma determinada caixa é transportada em um caminhão que percorre, com velocidade escalar constante, uma estrada plana e horizontal. Em um determinado instante, o caminhão entra em uma curva circular de raio igual a 51,2 m, mantendo a mesma velocidade escalar. Sabendo-se que os coeficientes de atrito cinético e estático entre a caixa e o assoalho horizontal são, respectivamente, 0,4 e 0,5 e considerando que as dimensões do caminhão, em relação ao raio da curva, são desprezíveis e que a caixa esteja apoiada apenas no assoalho da carroceria, pode-se afirmar que a máxima velocidade, em m/s, que o caminhão poderá desenvolver, sem que a caixa escorregue é

- a) 14,3 b) 16,0 c) 18,0 d) 21,5

Comentários:

Quando a caixa está na iminência de escorregar, a resultante centrípeta é justamente a força de atrito estática máxima. Portanto:

$$R_{cp} = f_{at}^{\text{máx}}_e$$

$$\frac{m \cdot v_{\text{máx}}^2}{R} = \mu_e \cdot N \Rightarrow \frac{m \cdot v_{\text{máx}}^2}{R} = \mu_e \cdot m \cdot g$$

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_e \cdot R \cdot g}$$

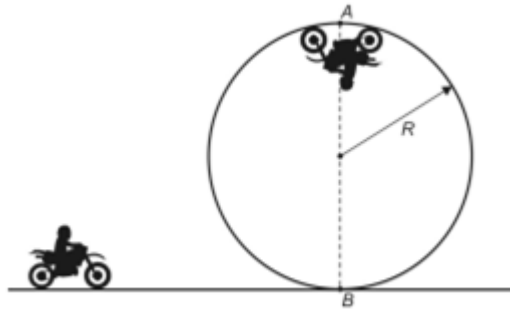
Substituindo valores, temos:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{0,5 \cdot 51,2 \cdot 10} \therefore \boxed{v_{\text{máx}} = 16 \text{ m/s}}$$

Gabarito: B

8. (AFA – 2014)

Um motociclista, pilotando sua motocicleta, move-se com velocidade constante, durante a realização do looping da figura abaixo.



Quando está passando pelo ponto mais alto dessa trajetória circular, o motociclista lança, para trás, um objeto de massa desprezível, comparada à massa de todo o conjunto motocicleta-motociclista. Dessa forma, o objeto cai, em relação à superfície da Terra, como se tivesse sido abandonado em A , percorrendo uma trajetória retilínea até B . Ao passar, após esse lançamento, em B , o motociclista consegue recuperar o objeto imediatamente antes dele tocar o solo.

Desprezando a resistência do ar e as dimensões do conjunto motocicleta-motociclista, e considerando $\pi^2 = 10$, a razão entre a normal (N), que age sobre a motocicleta no instante em que passa no ponto A , e o peso (P) do conjunto motocicleta-motociclista, (N/P), será igual a

- a) 0,5 b) 1,0 c) 1,5 d) 3,5

Comentários:

Quando o motociclista lança o objeto, pelo princípio da conservação da quantidade de movimento, deveríamos analisar a nova velocidade da moto. Entretanto, como ele menciona que a massa do objeto é desprezível perto da massa do conjunto moto e motociclista, então a velocidade dele permanece a mesma depois dele lançar o corpo.

O tempo queda do objeto é dado por:

$$t_q = \sqrt{\frac{2AB}{g}} \Rightarrow t_q = \sqrt{\frac{2 \cdot 2R}{g}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

Entretanto, durante o tempo de queda, a moto percorre meia circunferência. Logo:

$$v = \frac{\pi R}{t_q}$$

Elevando a velocidade ao quadrado, vem:

$$v^2 = \frac{(\pi R)^2}{t_q^2} \Rightarrow v^2 = \frac{\pi^2 R^2}{\frac{4R}{g}} = \frac{\pi^2 \cdot R \cdot g}{4}$$

No ponto A , temos:

$$N + P = R_{cp} \Rightarrow N + P = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow N + m \cdot g = \frac{m}{R} \cdot \frac{\pi^2 \cdot R \cdot g}{4}$$

Considerando $\pi^2 = 10$, vem:



$$N = 2,5 \cdot m \cdot g - m \cdot g$$

$$N = 1,5 \cdot m \cdot g \therefore \boxed{\frac{N}{m \cdot g} = 1,5}$$

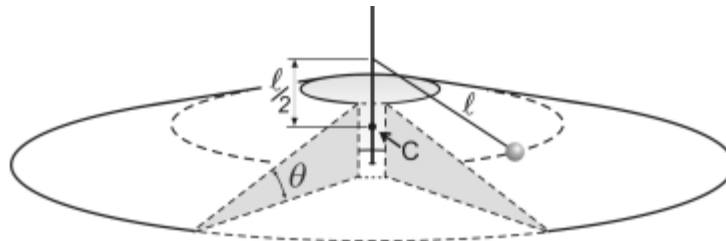
Gabarito: C

9. (AFA – 2013)

Em um local onde a aceleração da gravidade vale g , uma partícula move-se sem atrito sobre uma pista circular que, por sua vez, possui uma inclinação θ . Essa partícula está presa a um poste central, por meio de um fio ideal de comprimento l (que, através de uma articulação, pode girar livremente em torno do poste). O fio é mantido paralelo à superfície da pista, conforme figura abaixo.

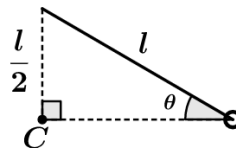
Ao girar com uma determinada velocidade constante, a partícula fica "flutuando" sobre a superfície inclinada da pista, ou seja, a partícula fica na iminência de perder o contato com a pista e, além disso, descreve uma trajetória circular com centro em C , também indicado na figura. Nessas condições, a velocidade linear da partícula deve ser igual a

- a) $\sqrt{\frac{3}{2}gl}$
- b) \sqrt{gl}
- c) $\sqrt{3gl}$
- d) $\sqrt[4]{2\sqrt{gl}}$



Comentários:

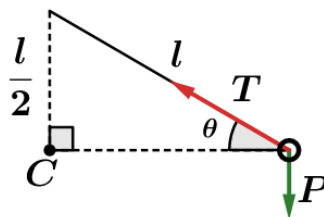
Pela geometria do problema, temos:



Logo:

$$\text{sen } \theta = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \therefore \theta = 30^\circ$$

Fazendo o diagrama de forças na partícula, temos:



Portanto:



$$\begin{cases} T \cdot \text{sen } \theta = m \cdot g \\ T \cdot \text{cos } \theta = \frac{m \cdot v^2}{R} \end{cases}$$

Dividindo as duas equações, temos:

$$\text{tg } \theta = \frac{g \cdot R}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot R}{\text{tg } \theta}}$$

Em que $R = l \cdot \text{cos } \theta$. Portanto:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot l \cdot \text{cos } \theta}{\text{tg } \theta}}$$

Substituindo o ângulo θ , vem:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot l \cdot \text{cos } 30^\circ}{\text{tg } 30^\circ}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}} \therefore v = \sqrt{\frac{3 \cdot g \cdot l}{2}}$$

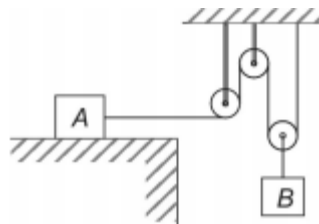
Gabarito: A

10. (AFA – 2009)

Na situação de equilíbrio abaixo, os fios e as polias são ideais e a aceleração da gravidade é g . Considere μ_e o coeficiente de atrito estático entre o bloco A , de massa m_A , e o plano horizontal em que se apóia.

A maior massa que o bloco B pode ter, de modo que o equilíbrio se mantenha, é

- a) $\mu_e m_A$
- b) $3\mu_e m_A$
- c) $2\mu_e m_A$
- d) $4\mu_e m_A$



Comentários:

Para que o corpo A fique em equilíbrio, devemos ter que a tração seja igual a força de atrito, na direção horizontal:

$$f_{at} = T$$

Por outro lado, para o equilíbrio do corpo B , a força peso deverá ser igual a tração na corda que liga a polia ao corpo B . Esta tração é exatamente igual a 2 vezes a tração na corda que liga A ou teto do sistema. Portanto:

$$T_B = 2T$$



Portanto:

$$T_B = P_B$$

$$2T = m_B \cdot g \Rightarrow 2f_{at} = m_B \cdot g$$

$$m_B = \frac{2f_{at}}{g}$$

Logo, a massa de B é máxima quando a força de atrito for máxima. Em outras palavras, posso colocar uma massa m_B até que o corpo A esteja na iminência do movimento. Portanto:

$$f_{at} \leq \mu_e \cdot N_A$$

$$\frac{m_B \cdot g}{2} \leq \mu_e \cdot m_A \cdot g \Rightarrow m_B \leq 2\mu_e \cdot m_A$$

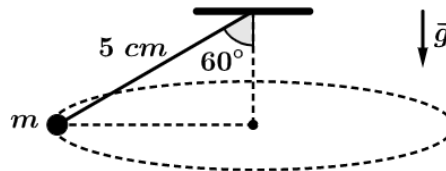
Logo, o maior valor de m_B é de:

$$m_B = 2\mu_e \cdot m_A$$

Gabarito: C

11. (Simulado AFA)

Uma partícula de massa m descreve um MCU em um plano horizontal, conforme figura abaixo.

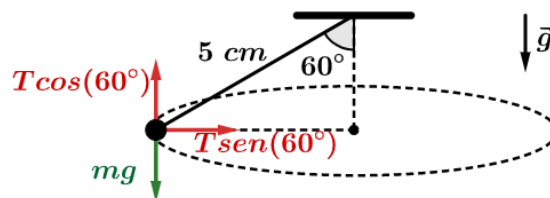


Sabendo que a aceleração da gravidade local é igual a 10 m/s^2 , a frequência de oscilação em Hz é dada por:

- a) $\pi/10$ b) $10/\pi$ c) $20/\pi$ d) $\pi/20$

Comentários:

Decompondo as forças na esfera, temos:



Pelo equilíbrio no movimento vertical, já que a partícula se move no plano horizontal, temos:

$$T \cos(60^\circ) = mg$$

Mas, na direção do centro de curvatura da trajetória circular, temos:



$$R_{cp} = T \cdot \text{sen}(60^\circ)$$

$$m\omega^2 R = \frac{mg}{\cos(60^\circ)} \cdot \text{sen}(60^\circ)$$

$$(2\pi f)^2 \cdot L \cdot \text{sen}(60^\circ) = \frac{g}{\cos(60^\circ)} \cdot \text{sen}(60^\circ)$$

$$(2\pi f)^2 = \frac{g}{L \cdot \cos(60^\circ)} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L \cdot \cos(60^\circ)}}$$

Substituindo valores, temos:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{2}}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 \cdot 10^2} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot 10$$

$$f = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

Gabarito: B

12. (Simulado AFA)

Uma moeda repousa a 15 cm do centro de um disco horizontal que gira a 60 rpm. Qual o menor coeficiente de atrito entre a moeda e o disco para que a moeda não se movimente em relação ao disco? Caso necessário, utilize $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $\pi^2 = 10$.

- a) 0,5
- b) 0,6
- c) 0,7
- d) não é possível determinar, pois não foi informado o valor da massa da moeda.

Comentários:

Inicialmente, devemos transformar a velocidade angular informada em rpm para rad/s:

$$\omega = 60 \cdot \frac{2\pi}{60}$$

$$\omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

Pela segunda lei de Newton para a moeda girando, temos que:

$$f_{at} = R_{cp} \Rightarrow f_{at} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Mas, sabemos que:

$$f_{at} \leq \mu \cdot N \Rightarrow f_{at} \leq \mu \cdot m \cdot g$$



Portanto:

$$m \cdot \omega^2 \cdot R \leq \mu \cdot m \cdot g \therefore \mu \geq \frac{\omega^2 R}{g}$$

O menor valor do coeficiente de atrito é dado por:

$$\mu = \frac{\omega^2 R}{g}$$

$$\mu = \frac{(2\pi)^2 \cdot 0,15}{10} \therefore \mu = 0,6$$

Gabarito: B

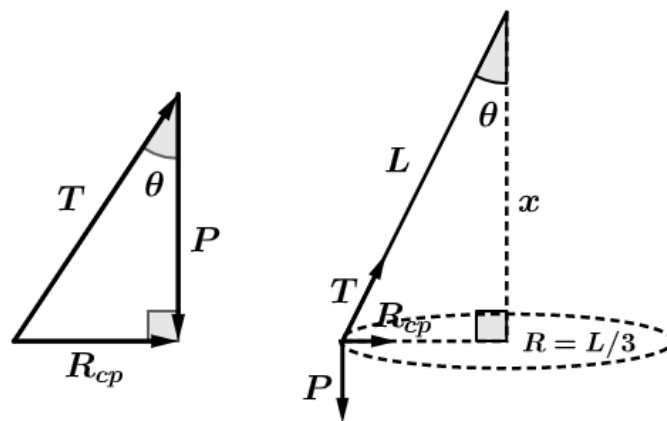
13. (EFOMM – 2021)

Um objeto de massa m é preso ao teto por um fio inextensível, sem massa e com comprimento L . De forma adequada, a massa é posta a girar com velocidade de módulo constante, descrevendo uma trajetória circular de raio $L/3$ no plano horizontal. Se g é o módulo da aceleração da gravidade, o período de rotação do pêndulo é:

- (A) $\left(\frac{8\sqrt{2}\pi^2 L}{3g}\right)^{\frac{1}{2}}$ (B) $\left(\frac{2\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ (C) $\left(\frac{3\sqrt{2}\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$
 (D) $\left(\frac{4\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ (E) $\left(\frac{\sqrt{3}\pi^2 L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$

Comentários:

Pelo enunciado, temos a seguinte situação:



Da figura, temos:

$$L^2 = x^2 + R^2 = x^2 + \left(\frac{L}{3}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3} L$$

Pelo triângulo das forças, temos:



$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{R_{cp}}{P}$$

$$\frac{R}{x} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R}{m \cdot g} \Rightarrow \frac{\frac{L}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{L}{3g}$$

$$T = \left(\frac{8\sqrt{2}\pi^2 L}{3g}\right)^{1/2}$$

Gabarito: A

14. (EFOMM – 2017)

Na situação apresentada no esquema abaixo, o bloco *B* cai a partir do repouso de uma altura *y*, e o bloco *A* percorre uma distância total *y + d*. Considere a polia ideal e que existe atrito entre o corpo *A* e a superfície de contato. Sendo as massas dos corpos *A* e *B* iguais a *m*. determine o coeficiente de atrito cinético μ .

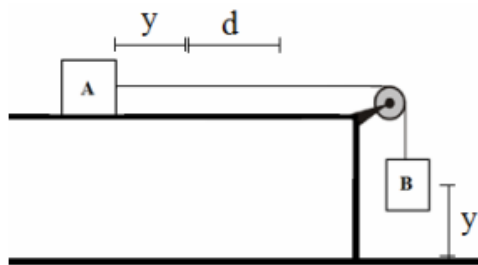
a) $\mu = \frac{y}{y+2d}$

b) $\mu = \frac{2d}{y+2d}$

c) $\mu = \frac{2d+y}{y}$

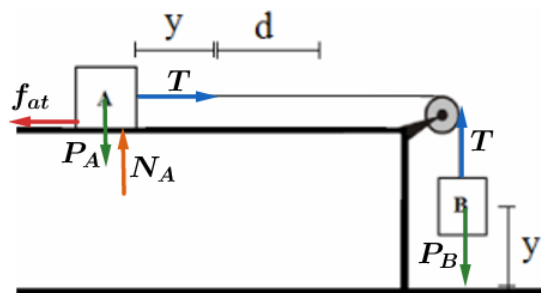
d) $\mu = \frac{y}{2d}$

e) $\mu = \frac{d}{2d+y}$



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças, temos:



Para o bloco A, temos:

$$\begin{cases} P_A = N_A \\ T - f_{at} = m_A \cdot a_A \end{cases}$$

Em que $f_{at} = \mu_c \cdot N_A$. Para o bloco B, temos:

$$P_B - T = m_B \cdot a_B$$



Como o fio é inextensível, o deslocamento de A deve ser o mesmo deslocamento de B. Logo, a aceleração de A é igual a aceleração de B, isto é, $a_A = a_B = a$.

A velocidade do bloco A quando B atinge o solo é dada por:

$$\begin{cases} P_B - T = m_B \cdot a \\ T - f_{at} = m_A \cdot a \end{cases}$$

$$P_B - f_{at} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$m \cdot g - \mu \cdot m \cdot g = 2 \cdot m \cdot a \therefore a = g \cdot \frac{1 - \mu}{2}$$

Por Torricelli, encontramos a velocidade após percorrer a distância y com a aceleração a :

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot \frac{1 - \mu}{2} \cdot y \text{ (eq. 1)}$$

Quando o corpo B atinge o solo, a tração no fio vai a zero e nessa segunda parte do movimento de A, temos apenas a força de atrito cinético atuando no bloco A. Portanto:

$$F_R = f_{at}$$

$$m \cdot a' = \mu \cdot N_A$$

$$m \cdot a' = \mu \cdot m \cdot g \therefore a' = \mu \cdot g$$

Por Torricelli, temos:

$$v_f^2 = v^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

$$0 = v^2 + 2 \cdot (-\mu \cdot g) \cdot d$$

$$v^2 = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot d \text{ (eq. 2)}$$

Igualando 1 e 2, vem:

$$2 \cdot g \cdot \frac{1 - \mu}{2} \cdot y = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot d$$

$$y - y \cdot \mu = 2 \cdot \mu \cdot d \therefore \mu = \frac{y}{y + 2d}$$

Gabarito: A

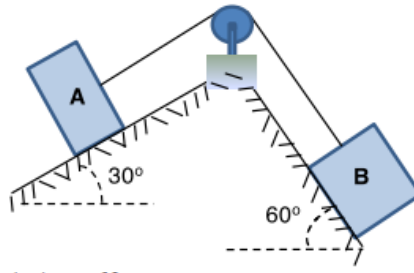
15. (EFOMM – 2016)

Os blocos A e B da figura pesam 1,00 kN, e estão ligados por um fio ideal que passa por uma polia sem massa e sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os blocos e os planos é 0,60. Os dois blocos estão inicialmente em repouso. Se o bloco B está na iminência de movimento, o valor da força de atrito, em newtons, entre o bloco A e o plano, é



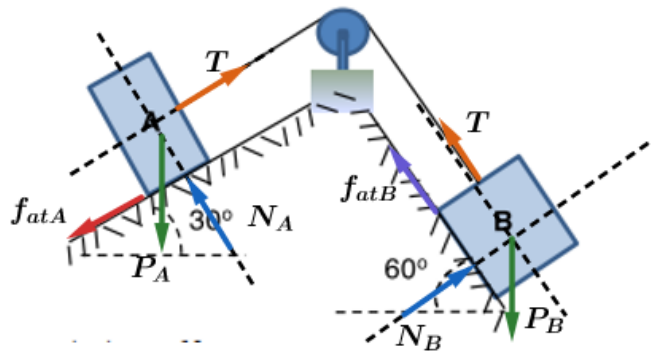
Dado: $\cos 30^\circ \cong 0,87$.

- a) 60
- b) 70
- c) 80
- d) 85
- e) 90



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças, temos:



Como o bloco B está na iminência do movimento, então:

$$\begin{cases} m_B \cdot g \cdot \text{sen } 60^\circ = f_{atB} + T \\ m_B \cdot g \cdot \text{cos } 60^\circ = N_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_B \cdot g \cdot \text{sen } 60^\circ = \mu \cdot N_B + T \\ m_B \cdot g \cdot \text{cos } 60^\circ = N_B \end{cases}$$

Logo:

$$T = m_B \cdot g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \mu \cdot m_B \cdot g \cdot \frac{1}{2}$$

$$T = m_B \cdot g \cdot \left(\frac{\sqrt{3} - \mu}{2} \right)$$

Substituindo valores, temos:

$$T = 1000 \cdot \left(0,87 - \frac{0,6}{2} \right) \therefore \boxed{T = 570 \text{ N}}$$

Se o bloco B está na iminência do movimento, então ele ainda está em repouso. Assim, o bloco A também está em repouso. Portanto, na direção do plano inclinado, a força peso possui componente igual a:

$$P_{Ax} = m_A \cdot g \cdot \text{sen } 30^\circ$$



$$P_{Ax} = 1000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P_{Ax} = 500 \text{ N}$$

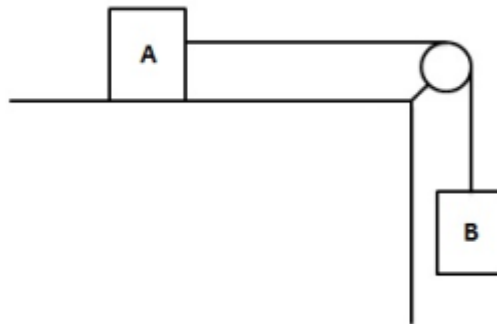
Então, a tendência do movimento seria A subir, logo a força de atrito em A está contrária a essa tendência de movimento e vale:

$$f_{atA} = T - P_{Ax}$$

$$f_{atA} = 570 - 500 \therefore \boxed{f_{atA} = 70 \text{ N}}$$

Gabarito: B

16. (EFOMM – 2014)

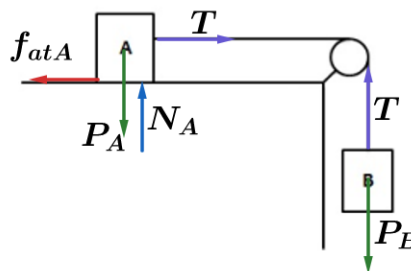


Na figura dada, a polia e o fio são ideais, e a aceleração da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. O bloco B possui massa $m_B = 20 \text{ kg}$, e o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície de apoio é de $\mu_e = 0,4$. Considerando que o sistema é abandonado em repouso, qual é o menor valor da massa do bloco A que consegue equilibrar o bloco B?

- a) 20 kg. b) 30 kg. c) 50 kg. d) 75 kg. e) 100 kg.

Comentários:

Fazendo o diagrama de forças no sistema, temos:



Como o fio que liga os blocos é inextensível (ideal), então os blocos devem ter a mesma aceleração:

$$P_B - T = m_B \cdot a$$

$$T - f_{atA} = m_A \cdot a$$

Logo:

$$f_{atA} = P_B - (m_A + m_B) \cdot a$$



Em que:

$$f_{atA} \leq \mu_e \cdot N_A$$

Portanto:

$$m_B \cdot g - (m_A + m_B) \cdot a \leq \mu_e \cdot m_A \cdot g$$

Como o sistema está em equilíbrio, temos:

$$m_B \cdot g \leq \mu_e \cdot m_A \cdot g \therefore m_A \geq \frac{m_B}{\mu_E}$$

Substituindo valores, temos:

$$m_A \geq \frac{20}{0,4} \therefore m_A \geq 50 \text{ kg}$$

Portanto, a menor massa para A é de 50 kg.

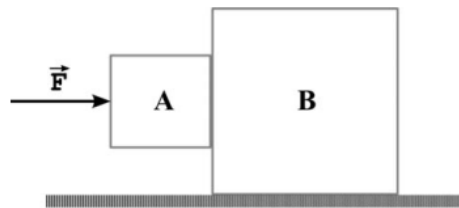
Gabarito: C

17. (EFOMM – 2013)

Os blocos A e B devem ser movimentados conforme mostrado na figura abaixo, sem que o bloco menor deslize para baixo (os blocos não estão presos um ao outro). Há atrito entre o bloco A, de massa 8,00 kg, e o bloco B, de massa 40,0 kg, sendo o coeficiente de atrito estático 0,200. Não havendo atrito entre o bloco B e o solo, a intensidade mínima da força externa \vec{F} , em newtons, deve ser igual a

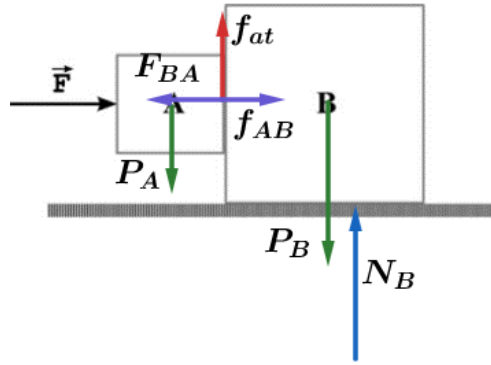
Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

- a) 480
- b) 360
- c) 240
- d) 150
- e) 100



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças no sistema, temos:



Para o bloco A na direção horizontal, temos:

$$F - F_{BA} = m_A \cdot a_x$$

Na direção vertical, temos:

$$P_A - f_{at} = m_A \cdot a_y$$

Para o bloco B na direção vertical, temos:

$$P_B = N_B$$

E na direção horizontal:

$$F_{AB} = m_B \cdot a_x$$

Com $F_{AB} = F_{BA}$, em módulo. Entretanto, sabemos que:

$$f_{at} \leq \mu \cdot F_{BA}$$

$$P_A - m_A \cdot a_y \leq \mu \cdot (F - m_A \cdot a_x)$$

$$\frac{P_A - m_A \cdot a_y}{\mu} \leq F - m_A \cdot a_x$$

$$F \geq \frac{P_A - m_A \cdot a_y}{\mu} + m_A \cdot a_x \text{ (eq. 1)}$$

Guardamos a equação 1. Vamos determinar a aceleração a_x em função de F :

$$\begin{cases} F - F_{BA} = m_A \cdot a_x \\ F_{AB} = m_B \cdot a_x \end{cases}$$

Portanto:

$$F = (m_A + m_B) \cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{F}{m_A + m_B}$$

Substituindo a_x em 1, temos:



$$F \geq \frac{P_A - m_A \cdot a_y}{\mu} + m_A \cdot \frac{F}{m_A + m_B}$$

$$F \left(1 - \frac{m_A}{m_A + m_B} \right) \geq \frac{P_A - m_A \cdot a_y}{\mu}$$

$$F \cdot \left(\frac{m_B}{m_A + m_B} \right) \geq \frac{P_A - m_A \cdot a_y}{\mu}$$

$$F \geq \left(\frac{m_A + m_B}{m_B} \right) \cdot \left(\frac{P_A - m_A \cdot a_y}{\mu} \right)$$

Vamos analisar agora a inequação acima. Desejamos que A não escorre sobre B, isto é:

$$a_y = 0$$

Portanto:

$$F \geq \left(\frac{m_A + m_B}{m_B} \right) \cdot \left(\frac{P_A}{\mu} \right)$$

O menor valor de F é dado por:

$$F = \left(\frac{m_A + m_B}{m_B} \right) \cdot \left(\frac{P_A}{\mu} \right)$$

$$F = \left(\frac{m_A + m_B}{m_B} \right) \cdot \left(\frac{m_A \cdot g}{\mu} \right)$$

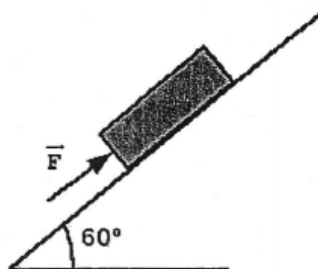
Substituindo valores, vem:

$$F = \frac{(8 + 40) \cdot 8 \cdot 10}{40 \cdot 0,2} \therefore \boxed{F = 480 \text{ N}}$$

Gabarito: A

18. (EFOMM – 2010)

Analise a figura a seguir.



No convés de um navio, um marinheiro apoia uma caixa de massa 20 kg sobre um plano inclinado de 60° , aplicando uma força F de módulo igual a 100 N paralela à superfície inclinada do plano, conforme indica a figura acima. Nestas condições, ele observa que a caixa está na iminência de



descer o plano inclinado. Para que a caixa fique na iminência de subir o plano inclinado, ele deve alterar o módulo da força \vec{F} para

Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\text{sen } 60^\circ = 0,85$.

- a) 100 N b) 140 N c) 180 N d) 200 N e) 240 N

Comentários:

Quando o corpo está na iminência de descer o plano inclinado, temos que:

$$f_{at} + F = m \cdot g \cdot \text{sen } 60^\circ$$

$$f_{at} = 20 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 100 \Rightarrow f_{at} = 200 \cdot 0,85 - 100$$

$$f_{at} = 70 \text{ N}$$

Como ele está na iminência de descer, temos:

$$f_{at} = \mu_e \cdot N$$

Mas, como já sabemos, $N = m \cdot g \cdot \cos 60^\circ$. Portanto:

$$70 = \mu_e \cdot m \cdot g \cdot \cos 60^\circ$$

$$70 = \mu_e \cdot 20 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \therefore \boxed{\mu_e = \frac{7}{10}}$$

Quando o bloco está na iminência de subir o plano inclinado, temos que:

$$F' = f_{at} + m \cdot g \cdot \text{sen } 60^\circ$$

$$F' = \mu_e \cdot N + m \cdot g \cdot \text{sen } 60^\circ$$

$$F' = \mu_e \cdot m \cdot g \cdot \cos 60^\circ + m \cdot g \cdot \text{sen } 60^\circ$$

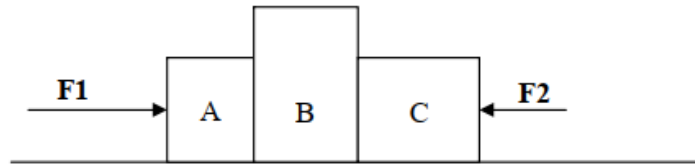
$$F' = \frac{7}{10} \cdot 20 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot 10 \cdot 0,85$$

$$\boxed{F' = 240 \text{ N}}$$

Gabarito: E

19. (EFOMM – 2009)

Três blocos A , B e C encontram-se agrupados e sob a ação das forças $F_1 = 100 \text{ N}$ e $F_2 = 50 \text{ N}$, conforme desenho abaixo, deslizando em superfície na qual o coeficiente de atrito é $\mu = 0,1$. Sabendo que as massas desses blocos são, respectivamente, 5, 10 e 5 kg, a aceleração do sistema é de (dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$)



- a) zero (não há deslocamento).
- b) $1,5 \text{ m/s}^2$, para a direita.
- c) $1,5 \text{ m/s}^2$, para a esquerda.
- d) $3,0 \text{ m/s}^2$, para a direita.
- e) $3,0 \text{ m/s}^2$, para a esquerda.

Comentários:

A diferença entre as forças F_1 e F_2 é de:

$$F_1 - F_2 = 100 - 50 = 50 \text{ N}$$

Portanto, o sistema tenderia a se mover para a direita. Agora, precisamos analisar a força de atrito.

Se pensarmos os três blocos como um só, já que o atrito entre eles é o mesmo, podemos determinar a força de atrito estática máxima por:

$$f_{at} = \mu \cdot N_{conjunto}$$

$$f_{at} = \mu \cdot (m_A + m_B + m_C) \cdot g$$

Substituindo valores:

$$f_{at} = 0,1 \cdot (5 + 10 + 5) \cdot 10$$

$$f_{at} = 0,1 \cdot 20 \cdot 10$$

$$f_{at} = 20 \text{ N}$$

Logo, a força resultante sobre esse conjunto pode ser expressa por:

$$(F_1 - F_2) - f_{at} = (m_A + m_B + m_C) \cdot a$$

$$50 - 20 = 20 \cdot a$$

$$a = 1,5 \text{ m/s}^2$$

Gabarito: A

20. (EFOMM – 2006)

Aplica-se força de 200 N a um corpo de massa 25 kg , em plano horizontal com atrito; verifica-se, em laboratório, que sua velocidade aumenta de 18 km/h para 27 km/h em $0,4 \text{ s}$. O coeficiente de atrito dinâmico entre o corpo e a superfície do plano horizontal é

- a) 0,125
- b) 0,175
- c) 0,225
- d) 0,275
- e) 0,325



Comentários:

Para o movimento na horizontal, devemos ter que:

$$F - f_{at} = m \cdot a$$

Como ele varia a velocidade em 0,4 s, temos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{\left(\frac{27}{3,6} - \frac{18}{3,6}\right)}{0,4} \Rightarrow a = \frac{9}{3,6 \cdot 0,4}$$

$$a = 6,25 \text{ m/s}^2$$

Portanto:

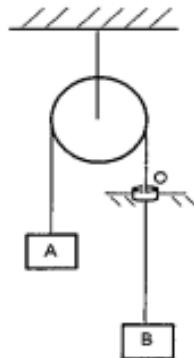
$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a$$

$$200 - \mu \cdot 25 \cdot 10 = 25 \cdot 6,25 \therefore \boxed{\mu = 0,175}$$

Gabarito: B

21. (EN – 2019)

Analise a figura abaixo.



A figura acima mostra dois blocos *A* e *B* de massas *m* e *3m*, respectivamente, ligados por uma corda inextensível e de massa desprezível passando por uma polia ideal sem atrito e através de um orifício *O*. No movimento da corda, considere que o orifício atua com uma força de atrito constante, *F*. Sabendo-se que a aceleração do sistema é *g/3*, onde *g* é a aceleração da gravidade, qual o módulo da força de atrito *F*?

- a) $\frac{mg}{3}$ b) $\frac{2mg}{3}$ c) $\frac{mg}{2}$ d) *mg* e) *2mg*

Comentários:

No bloco *B*, temos apenas a força peso e a tração atuando no corpo. Portanto:

$$m_B \cdot g - T_B = m_B \cdot a$$



Para o fio passando pelo orifício, temos:

$$T_B - F - T_A = m_{fio} \cdot a$$

No bloco A, vem:

$$T_A - m_A \cdot g = m_A \cdot a$$

Somando as três equações e considerando nula a massa do fio, temos:

$$m_B \cdot g - T_B + T_B - F - T_A + T_A - m_A \cdot g = m_B \cdot a + m_{fio} \cdot a + m_A \cdot a$$

$$m_B \cdot g - F - m_A \cdot g = m_B \cdot a + \underbrace{m_{fio}}_{\cong 0} \cdot a + m_A \cdot a$$

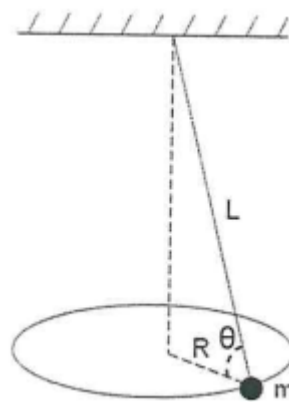
Substituindo os valores das massas e da aceleração, vem:

$$3m \cdot g - F - m \cdot g = 3m \cdot \frac{g}{3} + m \cdot \frac{g}{3} \therefore \boxed{F = \frac{2}{3}mg}$$

Gabarito: B

22. (EN – 2018)

Analise a figura abaixo.

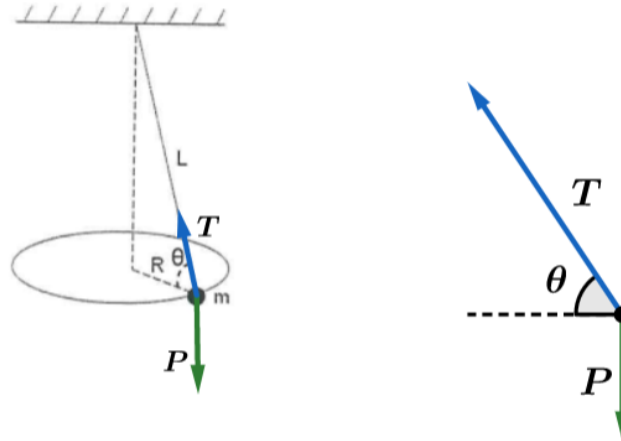


A figura mostra um pêndulo cônico no qual um pequeno objeto de massa m , preso à extremidade inferior de um fio, move-se em uma circunferência horizontal de raio R , com o módulo da velocidade constante. O fio tem comprimento L e massa desprezível. Sendo g a aceleração da gravidade e sabendo que a relação entre a tração T e o peso P do objeto é $T = 4P$, qual o período do movimento?

- a) $\sqrt{\frac{\pi^2}{8g}}L$ b) $\left(\frac{\pi^2}{4g}L\right)^{1/2}$ c) $\sqrt{\frac{\pi^2}{2g}}L$ d) $\left(\frac{\pi^2}{g}L\right)^{1/2}$ e) $\frac{2\pi^2}{g}L$

Comentários:

Pelo diagrama de forças na partícula, temos que:



Logo:

$$\text{sen } \theta = \frac{P}{T}$$

Como $T = 4P$, então:

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{4}$$

A resultante centrípeta é dada pela componente da tração na direção central:

$$T \cdot \cos \theta = R_{cp}$$

$$4P \cdot \cos \theta = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$4P \cdot \cos \theta = m \cdot \omega^2 \cdot L \cdot \cos \theta \Rightarrow 4 \cdot m \cdot g = m \cdot \omega^2 \cdot L$$

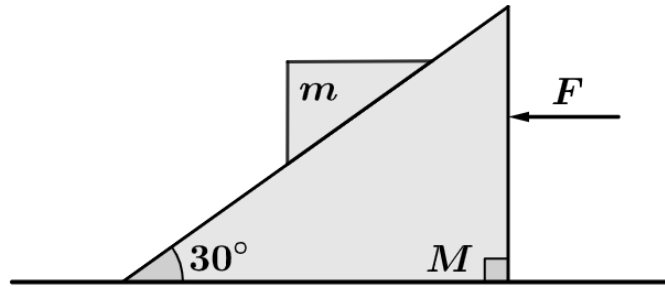
$$\frac{4g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{4g}} L$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2}{g}} L$$

Gabarito: D

23. (Simulado EFOMM)

A figura abaixo representa uma cunha de massa $M = 10 \text{ kg}$ e sobre ela apoia outra cunha de massa $m = 2 \text{ kg}$. Sabe-se que não há atrito entre a cunha e a superfície horizontal. Aplica-se uma força $F = 24\sqrt{3} \text{ N}$ horizontal, paralela à superfície, e nota-se que não há movimento relativo entre as cunhas. Sendo a aceleração da gravidade local igual a 10 m/s^2 , a intensidade da força de atrito entre as cunhas é de:



- a) 2,67 N b) 4,51 N c) 5,33 N d) 7,57 N e) 10,6 N

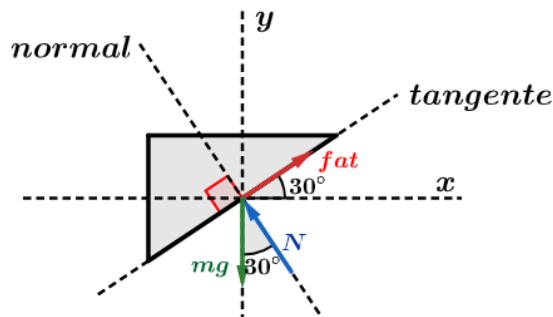
Comentários:

Se todo o conjunto se move junto na horizontal, devido à aplicação da força F , então a aceleração do conjunto é dada por:

$$F = F_r = (m + M) \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m + M} \Rightarrow a = \frac{24\sqrt{3}}{2 + 10} \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \text{ m/s}^2 \text{ (eq. 1)}$$

Analisando as forças que atuam na cunha m , temos:



Como o movimento do sistema é na horizontal, temos:

- em x:

$$N \cdot \text{sen}(30^\circ) - fat \cdot \text{cos}(30^\circ) = m \cdot a \text{ (eq. 2)}$$

- em y:

$$N \cdot \text{cos}(30^\circ) = mg$$

Portanto:

$$N = \frac{mg}{\text{cos}(30^\circ)} \text{ (eq. 3)}$$

Substituindo 3 em 2, temos:

$$\frac{mg}{\text{cos}(30^\circ)} \cdot \text{sen}(30^\circ) - fat \cdot \text{cos}(30^\circ) = m \cdot a$$

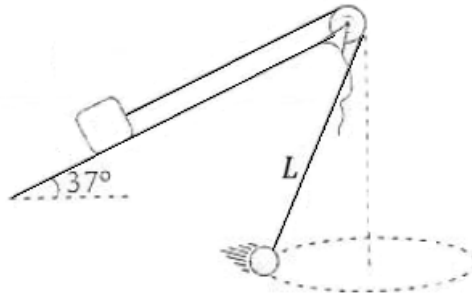


$$fat = \frac{mg \cdot tg(30^\circ) - m \cdot a}{\cos(30^\circ)} \Rightarrow fat = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot 2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$fat = 5,33 \text{ N}$$

Gabarito: C

24. (Simulado EFOMM)



A figura acima representada um sistema mecânico formado por uma esfera de massa igual a 3,2 kg, girando com velocidade angular ω . A velocidade angular mínima ω_{min} que a esfera precisa ter para que o bloco de 20 kg apoiado sobre o plano inclinado não deslize é igual a:

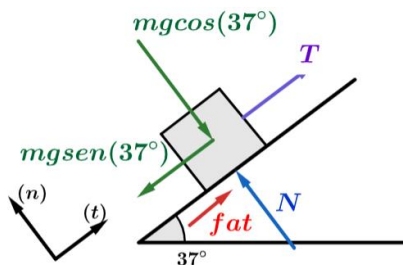
Considere que:

- coeficiente de atrito estático entre o plano e o bloco: 0,5.
- coeficiente de atrito dinâmico entre o plano e o bloco: 0,3.
- comprimento L do fio: 50 cm.
- aceleração da gravidade local: 10 m/s².
- $sen(37^\circ) = 0,6$.

- a) 1 rad/s b) 2 rad/s c) 3 rad/s d) 4 rad/s e) 5 rad/s

Comentários:

Decompondo as forças que atuam no bloco, temos:



Note que a força de atrito deve estar contrária a tendência do movimento. Para a condição de velocidade mínima, a tendência do bloco é descer o plano inclinado, logo, a força de atrito é para cima, contrária a essa tendência.

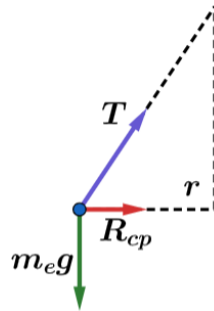
Se o sistema permanece em equilíbrio, temos que:



$$\begin{cases} N = m_b \cdot g \cdot \cos 37^\circ \\ T + fat = m_b \cdot g \cdot \text{sen}37^\circ \end{cases}$$

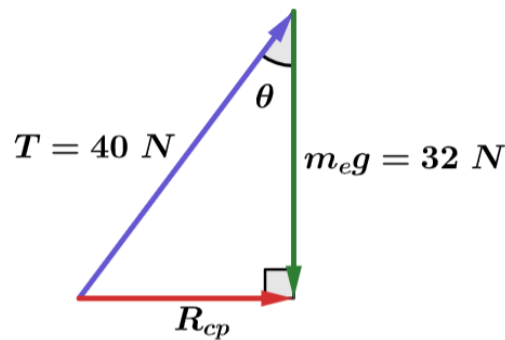
$$\begin{cases} N = 20 \cdot 10 \cdot \frac{8}{10} \\ T + \mu \cdot N = 20 \cdot 10 \cdot 6/10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 160 \text{ N} \\ T + 0,5 \cdot 160 = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 160 \text{ N} \\ T = 40 \text{ N} \end{cases}$$

Para a esfera girando, temos que:



Ou seja:

$$\vec{R}_{cp} = \vec{T} + m_e \vec{g}$$



$$T^2 = (m_e g)^2 + R_{cp}^2 \Rightarrow 40^2 = 32^2 + R_{cp}^2 \Rightarrow \boxed{R_{cp} = 24 \text{ N}}$$

Notamos que o ângulo θ é tal que:

$$\text{sen } \theta = \frac{24}{40} = \frac{r}{L} \Rightarrow \boxed{r = \frac{3}{5} L}$$

Portanto:

$$R_{cp} = m \cdot \omega_{\text{mín}}^2 \cdot r$$

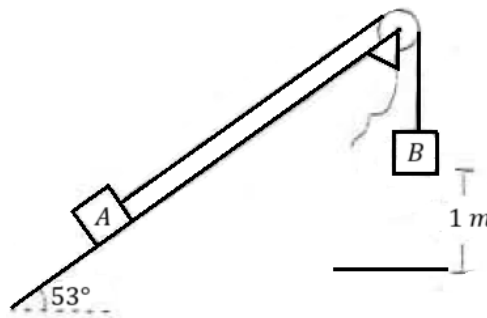
$$24 = 3,2 \cdot \omega_{\text{mín}}^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 0,5$$

$$\boxed{\omega_{\text{mín}} = 5 \text{ rad/s}}$$

Gabarito: E



25. (Simulado EFOMM)



Dois blocos iguais de mesma massa m estão ligados por uma corda ideal, como na figura acima. Após o sistema ser abandonado do repouso, a distância percorrida por A até que ele pare pela primeira vez é de:

Considere que:

- $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- $\cos(53^\circ) = 0,6$.

- a) 1 m b) $1,125 \text{ m}$ c) $1,25 \text{ m}$ d) $1,5 \text{ m}$ e) $1,75 \text{ m}$

Comentários:

Para o sistema em questão, sabendo que a força peso do bloco no plano inclinado, na direção do plano é $mg\text{sen}(53^\circ)$, podemos escrever que:

$$T - m \cdot g \cdot \text{sen}(53^\circ) = m \cdot a \text{ (eq. 1)}$$

Como o fio é inextensível, o deslocamento de A tem que ser igual ao deslocamento de B, em outras palavras, a aceleração de A é igual a aceleração de B. Logo, para o bloco B temos:

$$m \cdot g - T = m \cdot a \text{ (eq. 2)}$$

Somando as duas equações, temos:

$$m \cdot g - m \cdot g \cdot 0,8 = 2m \cdot a$$

$$a = 0,1g = 1 \text{ m/s}^2$$

Assim, a velocidade dos blocos após B chegar ao chão (percorrer a distância de 1 m) é de:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot d$$

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \therefore v = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Após o bloco B chegar ao solo, o fio fica frouxo e o bloco A começa a subir o plano sem a ação da tração no fio. Portanto, a única força que atua em A é a componente da força peso para baixo do plano inclinado. Assim, o bloco A descreverá um movimento retardado, cuja aceleração é dada por:

$$F_R = P \cdot \text{sen}(53^\circ)$$

$$m \cdot a' = m \cdot g \cdot 0,8 \therefore a' = 8 \text{ m/s}^2$$



Portanto, a distância percorrida por A nessa nova fase de movimento é de:

$$v_f^2 = v^2 + 2 \cdot a' \cdot d'$$

$$0 = \sqrt{2}^2 + 2 \cdot \underbrace{(-8)}_{\text{mov.retardado}} \cdot d' \therefore d' = 0,125 \text{ m}$$

Logo, a distância total percorrida por A é de:

$$\Delta S_A = 1 + 0,125 = 1,125 \text{ m}$$

Gabarito: B

26. (Simulado EFOMM)

Um jogador de futebol A lança uma bola para outro jogador B que está correndo a uma velocidade de 5 m/s no mesmo sentido da bola. Em um certo ponto, a velocidade da bola é mínima e vale 30 m/s. Chamando de ρ_A o raio de curvatura da trajetória da bola nesse ponto em relação ao jogador A e de ρ_B o raio de curvatura da trajetória da bola nesse ponto em relação ao jogador B, podemos dizer que ρ_A/ρ_B é igual a:

Despreze a resistência do ar:

- a) $\frac{16}{25}$ b) $\frac{24}{25}$ c) 1 d) $\frac{36}{25}$ e) $\frac{42}{25}$

Comentários:

Sabemos que no lançamento oblíquo a velocidade é mínima no ponto mais alto da trajetória e nesse ponto temos apenas a velocidade na horizontal e a força peso atuando na vertical. Então, a força peso desempenhará o papel de resultante centrípeta e a aceleração da gravidade corresponderá o papel de aceleração centrípeta.

Para o primeiro jogador A que chuta a bola, ele permanece em repouso após o chute e, portanto, o raio de curvatura é dado por:

$$\rho_A = \frac{v_{Bola/A}^2}{g} \Rightarrow \rho_A = \frac{(30 - 0)^2}{g} = \frac{30^2}{g} \text{ (eq. 1)}$$

Para o jogador B que está movendo na mesma direção que a bola, temos:

$$\rho_B = \frac{v_{Bola/B}^2}{g} \Rightarrow \rho_B = \frac{(30 - 5)^2}{g} = \frac{25^2}{g} \text{ (eq. 2)}$$

Dessa forma:

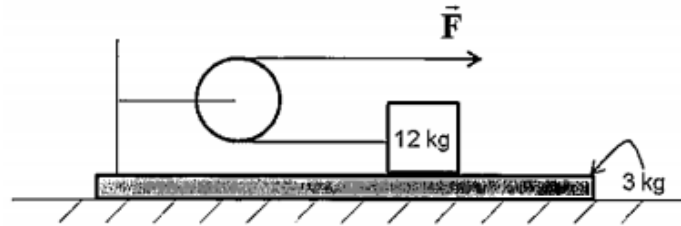
$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{\frac{30^2}{g}}{\frac{25^2}{g}} = \frac{36}{25}$$

Gabarito: D



27. (EN – 2017)

Analise a figura abaixo.



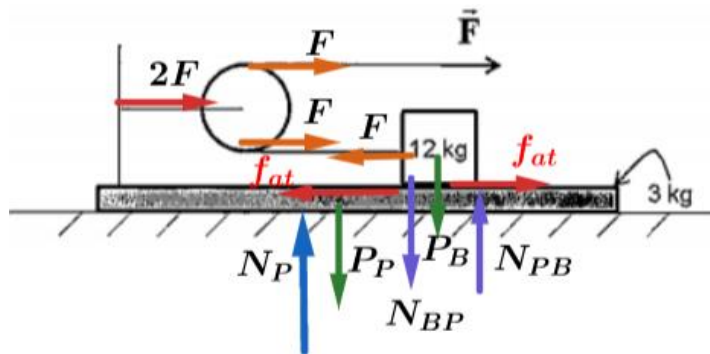
A figura acima exibe um bloco de 12 kg que se encontra na horizontal sobre uma plataforma de $3,0\text{ kg}$. O bloco está preso a uma corda de massa desprezível que passa por uma roldana de massa e atrito desprezíveis fixada na própria plataforma. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre as superfícies de contato (bloco e plataforma) são, respectivamente, $0,3$ e $0,2$. A plataforma, por sua vez, encontra-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Considere que em um dado instante uma força horizontal \vec{F} passa a atuar sobre a extremidade livre da corda, conforme indicado na figura. Para que não haja escorregamento entre o bloco e plataforma, o maior valor do módulo da força \vec{F} aplicada, em newtons, é

Dado: $g = 10\text{ m/s}^2$.

- a) $4/9$ b) $15/9$ c) 10 d) 20 e) 30

Comentários:

Fazendo o diagrama de forças no teu sistema, temos:



Para o bloco, temos:

$$P_B = N_{BP}$$

$$f_{at} - F = m_B \cdot a_B \quad (eq.1)$$

Note que o sistema deve caminhar para a direita, quando puxado pela força F e os dois blocos devem possuir a mesma aceleração.

Para a plataforma, temos:

$$N_P = P_P + N_{BP}$$

$$2F - f_{at} = m_P \cdot a_P \quad (eq.2)$$



Dividindo 1 por 2, temos:

$$\frac{f_{at} - F}{2F - f_{at}} = \frac{m_B \cdot a}{m_P \cdot a} = \frac{12}{3}$$

$$f_{at} - F = 8F - 4f_{at} \Rightarrow f_{at} = \frac{9F}{5}$$

Além disso, temos que:

$$f_{at} \leq \mu \cdot N_{PB}$$

$$\frac{9F}{5} \leq \mu_e \cdot m_B \cdot g \Rightarrow F \leq \frac{5 \cdot \mu_e \cdot m_B \cdot g}{9}$$

O valor possível de F é dado por:

$$F = \frac{5 \cdot \mu_e \cdot m_B \cdot g}{9}$$

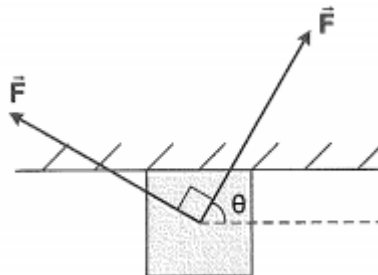
Substituindo valores, temos:

$$F = \frac{5 \cdot 0,3 \cdot 12 \cdot 10}{9} \therefore \boxed{F = 20 \text{ N}}$$

Gabarito: D

28. (EN – 2017)

Analise a figura abaixo.



A figura acima mostra um bloco de massa $7,0 \text{ kg}$ sob uma superfície horizontal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a superfície são, respectivamente, $0,5$ e $0,4$. O bloco está submetido a ação de duas forças de mesmo módulo, $F = 80 \text{ N}$, mutuamente ortogonais. Se o ângulo θ vale 60° , então, pode-se afirmar que o bloco

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$

- descola-se da superfície, caindo verticalmente.
- desliza sob a superfície com aceleração constante para a direita.
- não se move em relação à superfície.
- desliza sob a superfície com velocidade constante para a direita.
- desliza sob a superfície com aceleração constante para a esquerda.



Comentários:

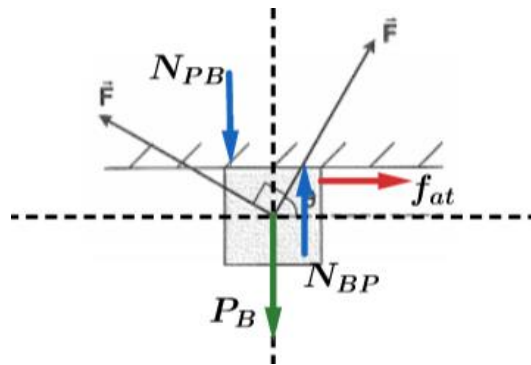
Note que ao decompor as forças na direção horizontal, temos:

$$F_{direita} - F_{esquerda} = F \cdot \cos 60^\circ - F \cdot \cos(180^\circ - (90^\circ + 60^\circ))$$

$$F_{direita} - F_{esquerda} = F \cdot \frac{1}{2} - F \cdot \cos 30^\circ$$

$$F_{direita} - F_{esquerda} = F \cdot \frac{1}{2} - F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) = -29,8 \text{ N}$$

Como $\sqrt{3} > 1$, então $F_{direita} - F_{esquerda} < 0$. Assim, a componente das forças na horizontal é maior para a esquerda. Logo, o corpo tenderia a ir para a esquerda, caso não houvesse atrito. Portanto, o diagrama de forças é melhor representado por:



Na direção vertical no bloco, temos:

$$F \cdot \sin \theta + F \cdot \sin(180^\circ - (90^\circ + \theta)) = P_B + N_{PB}$$

Em que N_{PB} é a normal da parede no bloco e N_{BP} é a normal do bloco na parede. Melhorando a equação logo acima, temos:

$$F \cdot \sin \theta + F \cdot \cos \theta = P_B + N_{PB}$$

$$N_{PB} = F(\sin \theta + \cos \theta) - P_B \text{ (eq. 1)}$$

Substituindo valores, temos:

$$N_{PB} = 80 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) - 70$$

$$\boxed{N_{PB} = 39,3 \text{ N}}$$

Assim, a força de atrito estática máxima é igual a:

$$f_{at} = \mu_e \cdot N_{PB}$$

$$f_{at} = 0,5 \cdot 39,3 \Rightarrow f_{at} = 19,7 \text{ N}$$



Como o módulo da força de atrito estática máxima (19,7 N) é menor que o módulo da diferença das forças na horizontal (29,8 N), portanto, o corpo não fica em repouso na horizontal e se desloca para a esquerda com aceleração constante dada por:

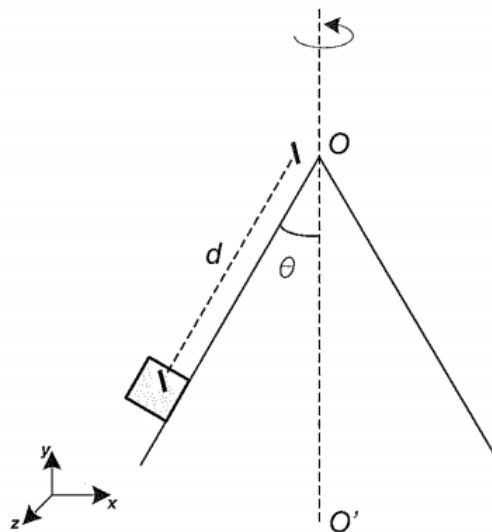
$$F_{\text{esquerda}} - F_{\text{direita}} - f_{\text{at}_{\text{cinético}}} = m \cdot a$$

$$29,8 - 0,4 \cdot 39,3 = 7 \cdot a \Rightarrow a \cong 2,0 \text{ m/s}^2$$

Gabarito: E

29. (EN – 2015)

Analise a figura abaixo.

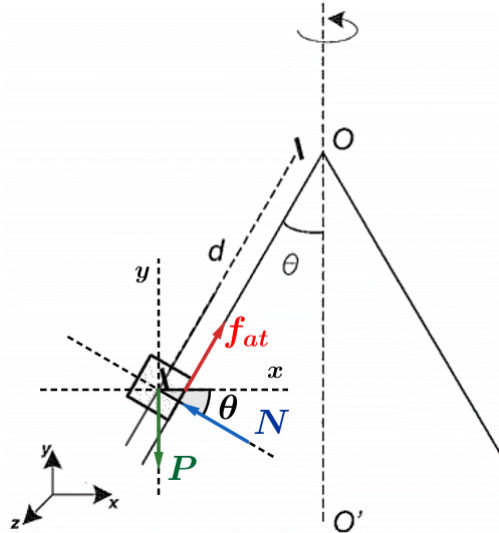


A figura acima mostra um bloco de massa $0,3 \text{ kg}$ que está preso à superfície de um cone que forma um ângulo $\theta = 30^\circ$ com seu eixo central OO' , fixo em relação ao sistema de eixos xyz . O cone gira com velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$ em relação ao eixo OO' . Sabendo que o bloco está a uma distância $d = 20 \text{ cm}$ do vértice do cone, o módulo da força resultante sobre o bloco, medido pelo referencial fixo xyz , em newtons, é

- a) 2,0 b) 3,0 c) 3,5 d) 6,0 e) 10

Comentários:

Fazendo o diagrama de forças no bloco, temos:



Note que para o bloco girar em relação ao eixo OO' , é necessário existir uma força de atrito na direção do plano. Assim, o bloco não se movimento em y e na direção x a resultante apontará na direção do eixo de rotação:

$$\begin{cases} m \cdot g = f_{at} \cdot \cos \theta + N \cdot \text{sen } \theta \\ f_{at} \cdot \text{sen } \theta - N \cdot \cos \theta = R_{cp} \end{cases}$$

Logo, a resultante sobre o corpo é a resultante perpendicular ao eixo de rotação, isto é, nossa resultante centrípeta. Portanto:

$$f_{at} \cdot \text{sen } \theta - N \cdot \cos \theta = R_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$f_{at} \cdot \text{sen } \theta - N \cdot \cos \theta = R_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot d \cdot \text{sen } \theta$$

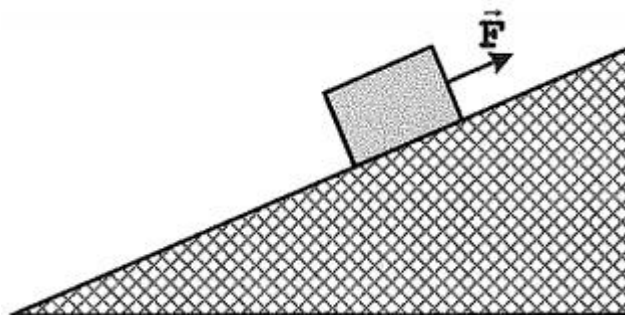
$$R_{cp} = 0,3 \cdot 10^2 \cdot 0,2 \cdot \underbrace{\text{sen } 30^\circ}_{\frac{1}{2}}$$

$$R_{cp} = 3 \text{ N}$$

Gabarito: B

30. (EN – 2014)

Observe a figura a seguir.



Um caixote pesando 50 N , no instante $t = 0$, se encontra em repouso sobre um plano muito longo e inclinado de 30° em relação à horizontal. Entre o caixote e o plano inclinado, o coeficiente de atrito



estático é 0,20 e o cinético é 0,10. Sabe-se que a força F , paralela ao plano inclinado, conforme indica a figura acima, tem intensidade igual a 36 N . No instante $t = 9\text{ s}$, qual o módulo, em newtons, da força de atrito entre o caixote e o plano? Nesse mesmo instante, o bloco estará subindo, descendo ou permanece em repouso sobre o plano inclinado?

Dados: $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ e $\text{cos } 30^\circ = 0,9$

- a) 14 e descendo. b) 11 e permanece em repouso. c) 9,0 e subindo.
d) 8,5 e permanece em repouso. e) 4,5 e subindo.

Comentários:

Como já vimos em teoria, a componente da força peso que é normal ao plano inclinado é dada por:

$$P_y = m \cdot g \cdot \cos \theta$$

Como na direção normal ao plano inclinado não há movimento, então a força de contato do plano normal com o bloco é igual a essa componente do peso:

$$N = P_y = m \cdot g \cdot \cos \theta$$

Por outro lado, a componente da força peso na direção do plano é dada por:

$$P_x = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

$$P_x = 50 \cdot \text{sen } 30^\circ \therefore \boxed{P_x = 25\text{ N}}$$

Conforme visto em teoria. Portanto, a resultante das forças F e P_x é de:

$$F - P_x = 36 - 25 = 11\text{ N}$$

Agora, vamos calcular qual seria o atrito estático máximo entre o plano e o bloco:

$$f_{ate}^{m\acute{a}x} = \mu_e \cdot N$$

$$f_{ate}^{m\acute{a}x} = \mu_e \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$f_{ate}^{m\acute{a}x} = 0,2 \cdot 50 \cdot 0,9 \therefore \boxed{f_{ate}^{m\acute{a}x} = 9\text{ N}}$$

Logo, o corpo está subindo, portanto, o atrito entre o plano e o corpo é cinético e dada por:

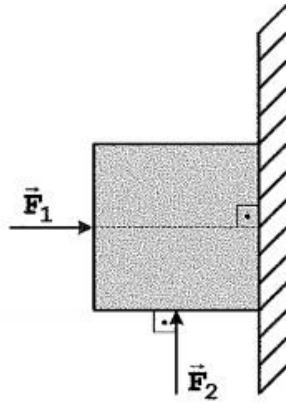
$$f_{at_d} = \mu_d \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$f_{at_d} = 0,1 \cdot 50 \cdot 0,9 \therefore f_{at_d} = 4,5\text{ N}$$

Gabarito: E

31. (EN – 2014)

Observe a figura a seguir.



Na figura acima, o bloco de massa $m = 2,0 \text{ kg}$ que está encostado na parede é mantido em repouso devido à ação de duas forças, \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , cujos módulos variam no tempo segundo as respectivas equações $F_1 = F_0 + 2,0t$ e $F_2 = F_0 + 3,0t$, onde a força é dada em newtons e o tempo, em segundos. Em $t = 0$, o bloco está na iminência de entrar em movimento de descida, sendo o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede igual a 0,6. Em $t = 3,0 \text{ s}$, qual o módulo, em newtons, a direção e o sentido da força de atrito?

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 7,5 e vertical para cima. b) 7,5 e vertical para baixo. c) 4,5 e vertical para cima.
d) 1,5 e vertical para cima. e) 1,5 e vertical para baixo.

Comentários:

Quando o bloco está na iminência de descer em $t = 0$, então podemos determinar o valor de F_0 :

$$F_1 = N$$

$$f_{\text{at}_e}^{\text{máx}} + F_2 = P$$

$$\mu_e \cdot F_1 + F_2 = P$$

Em $t = 0$:

$$\mu_e \cdot (F_0 + 2,0 \cdot 0) + F_0 + 3,0 \cdot 0 = m \cdot g$$

Substituindo valores:

$$0,6 \cdot F_0 + F_0 = 2 \cdot 10$$

$$F_0 = \frac{20}{1,6} \therefore \boxed{F_0 = 12,5 \text{ N}}$$

Portanto, em $t = 3 \text{ s}$, as forças F_1 e F_2 são iguais a:

$$\begin{cases} F_1 = 12,5 + 2,0 \cdot 3,0 = 18,5 \text{ N} \\ F_2 = 12,5 + 3,0 \cdot 3,0 = 21,5 \text{ N} \end{cases}$$

Logo, a força de atrito estática máxima nessa nova situação é de:

$$N = F_1$$



$$f_{at_e}^{máx} = \mu_e \cdot F_1 \Rightarrow f_{at_e}^{máx} = 0,6 \cdot 18,5 = 11,1 \text{ N}$$

Assim, a força de atrito é dada por:

$$f_{at} = F_2 - P$$

$$f_{at} = 21,5 - 20 - 1,5 \text{ N}$$

Portanto, o corpo está se deslocando para cima e a força de atrito é igual a 1,5 N para baixo, menor que a força de atrito estática máxima que é de 11,1 N.

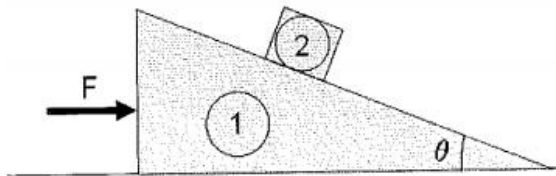
Gabarito: E

32. (EN – 2013)

Considere uma força horizontal F aplicada sobre a cunha 1, de massa $m_1 = 8,50 \text{ kg}$, conforme mostra a figura abaixo. Não há atrito entre a cunha e o chão, e o coeficiente de atrito estático entre a cunha e o bloco 2, de massa $m_2 = 8,50 \text{ kg}$, vale 0,200. O maior valor de F , em newtons, que pode ser aplicado à cunha, sem que o bloco comece a subir a rampa é

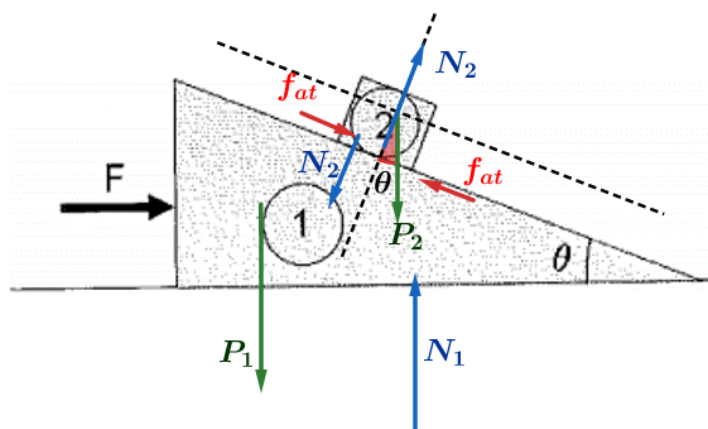
Dados: $|\vec{g}| = 10,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\text{sen } \theta = 0,600$; $\text{cos } \theta = 0,800$.

- a) 85,0
- b) 145
- c) 170
- d) 190
- e) 340



Comentários:

Pelo diagrama de forças, temos:



Decompondo as forças no bloco 1 na direção horizontal, temos:

$$F - N_2 \cdot \text{sen } \theta - f_{at} \cdot \text{cos } \theta = m_1 \cdot a \text{ (eq. 1)}$$

Como não há movimento relativo entre 1 e 2, podemos pensar na aceleração do sistema como se os blocos estivessem unidos:



$$F = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \text{ (eq. 2)}$$

Para o bloco 2 se movendo com aceleração a na horizontal, temos:

$$N_2 \cdot \text{sen } \theta + f_{at} \cdot \text{cos } \theta = m_2 \cdot a$$

Na direção vertical:

$$-f_{at} \cdot \text{sen } \theta + N_2 \cdot \text{cos } \theta = m_1 \cdot g \text{ (eq. 3)}$$

Mas, sabemos que:

$$f_{at} \leq \mu_e \cdot N_2 \text{ (eq. 4)}$$

Substituindo 3 em 4, vem:

$$f_{at} \leq \mu_e \cdot \frac{m_1 \cdot g + f_{at} \cdot \text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

Como $\text{cos } \theta > 0$, então:

$$f_{at} \cdot \text{cos } \theta \leq \mu_e \cdot m_1 \cdot g + \mu_e \cdot f_{at} \cdot \text{sen } \theta$$

$$f_{at} \leq \frac{\mu_e \cdot m_1 \cdot g}{\text{cos } \theta - \mu_e \cdot \text{sen } \theta} \text{ (eq. 5)}$$

Substituindo 2 e 3 em 1, vem:

$$F - \left(\frac{m_1 \cdot g + f_{at} \cdot \text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \right) \cdot \text{sen } \theta - f_{at} \cdot \text{cos } \theta = m_1 \cdot \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$F \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) = \left(\frac{m_1 \cdot g + f_{at} \cdot \text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \right) \cdot \text{sen } \theta + f_{at} \cdot \text{cos } \theta$$

Isolando f_{at} , vem:

$$F \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot \text{cos } \theta = m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta + f_{at} \cdot \text{sen}^2 \theta + f_{at} \cdot \text{cos}^2 \theta$$

$$f_{at} = \frac{F \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot \text{cos } \theta - m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta}{\underbrace{\text{cos}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta}_{=1}}$$

$$f_{at} = F \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot \text{cos } \theta - m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

Substituindo a f_{at} em 5, temos:



$$F \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot \cos \theta - m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta \leq \frac{\mu_e \cdot m_1 \cdot g}{\cos \theta - \mu_e \cdot \text{sen } \theta}$$

Portanto:

$$F \leq \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 \cdot \cos \theta} \right) \left(\frac{\mu_e \cdot m_1 \cdot g}{\cos \theta - \mu_e \cdot \text{sen } \theta} + m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta \right)$$

Logo, o F máximo ocorre para:

$$F = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 \cdot \cos \theta} \right) \left(\frac{\mu_e \cdot m_1 \cdot g}{\cos \theta - \mu_e \cdot \text{sen } \theta} + m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta \right)$$

Substituindo valores, temos:

$$F = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 \cdot \cos \theta} \right) \left(\frac{\mu_e \cdot m_1 \cdot g}{\cos \theta - \mu_e \cdot \text{sen } \theta} + m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \theta \right)$$

$$F = \frac{2}{0,8} \cdot \left(\frac{0,2 \cdot 8,5 \cdot 10}{0,8 - 0,2 \cdot 0,6} + 8,5 \cdot 10 \cdot 0,6 \right)$$

$$\boxed{F = 190 \text{ N}}$$

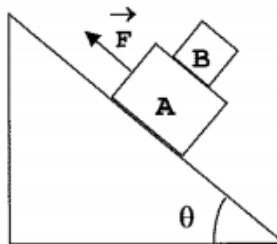
Gabarito: D

33. (EN – 2012)

O bloco B , de massa $10,0 \text{ kg}$, está sobre o bloco A , de massa $40,0 \text{ kg}$, ambos em repouso sobre um plano inclinado que faz um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal, conforme a figura. Há atrito, com coeficiente estático $0,600$, entre o bloco B e o bloco A , não havendo atrito entre o bloco A e o plano inclinado. A intensidade mínima da força F , em newtons, aplicada ao bloco A e paralela ao plano inclinado, para que o sistema permaneça em repouso, é

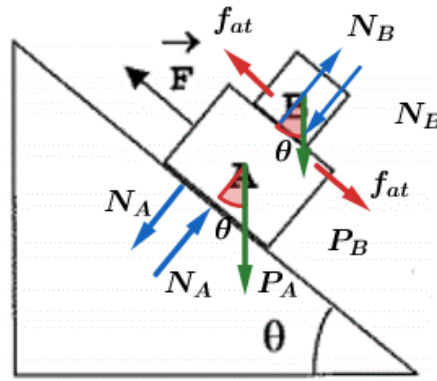
Dado: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

- a) 250
- b) 225
- c) 200
- d) 175
- e) 150



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças, temos:



Para o bloco B, podemos calcular a força de atrito estática máxima e compararmos com o peso de B na direção do plano inclinado:

$$f_{at_e}^{máx} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$f_{at_e}^{máx} = 0,6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_{at_e}^{máx} \cong 52 \text{ N}$$

Por outro lado:

$$P_x = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

$$P_x = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_x = 50 \text{ N}$$

Notamos que a força peso é menor que a força de atrito estática máxima entre A e B.

Por outro lado, para a bloco A, na direção do plano inclinado, temos que:

$$F - f_{at} - m_A \cdot g \cdot \text{sen } \theta = 0$$

$$F = f_{at} + m_A \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

Logo, o menor valor de F é quando f_{at} é igual a componente de peso de B na direção do plano inclinado. Portanto:

$$F = 50 + 40 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \therefore \boxed{F = 250 \text{ N}}$$

Gabarito: A

34. (EN – 2011)

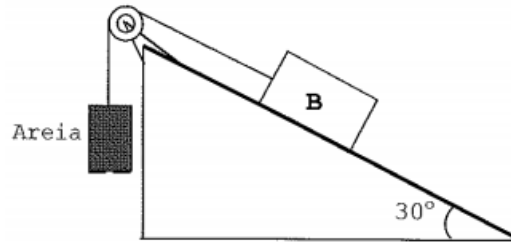
Na figura abaixo, temos o bloco B de massa igual a $4,0 \text{ kg}$ e um recipiente (massa desprezível) cheio de areia, interligados por um fio (inextensível e de massa desprezível) que passa por uma polia ideal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco B e a reta de maior declive do plano inclinado valem, respectivamente, $0,050 \cdot \sqrt{3}$ e $0,040 \cdot \sqrt{3}$. O recipiente possui um pequeno orifício



no fundo, por onde a areia pode sair. No instante $t = 0$, a massa da areia no recipiente é de $1,7 \text{ kg}$. A partir do instante $t = 0$, com a areia saindo do orifício, o módulo da maior aceleração (em m/s^2) adquirida pelo bloco B é

Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 4,2
- b) 4,4
- c) 5,0
- d) 5,5
- e) 5,8



Comentários:

A força de atrito estática máxima para o bloco é dada por:

$$f_{at_e}^{m\acute{a}x} = \mu_e \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$f_{at_e}^{m\acute{a}x} = 0,05 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f_{at_e}^{m\acute{a}x} = 3 \text{ N}$$

A força peso do bloco na direção do plano inclinado é de:

$$P_x = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

$$P_x = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P_x = 20 \text{ N}$$

A força peso da caixa de areia em $t = 0$:

$$P_{areia} = m \cdot g$$

$$P_{areia} = 1,7 \cdot 10 = 17 \text{ N}$$

Portanto, inicialmente, o sistema está em repouso, pois a tração é igual ao peso da caixa de areia e a tração mais o atrito estático máximo é igual ao peso do bloco na direção do plano. À medida que a caixa de areia vai perdendo areia, seu peso diminui. Conseqüentemente, o sistema começa a descer o plano inclinado e vai adquirindo uma aceleração cada vez maior. A aceleração será máxima quando não tiver mais areia na caixa.

Quando não há mais areia no recipiente, e admitindo que ele tenha massa desprezível comparada à do bloco, então a força resultante será dada pela diferença da força peso na direção do plano com o atrito cinético:

$$F_R = P_x - f_{at_c}$$

$$m \cdot a = 20 - \mu_c \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ$$

$$4 \cdot a = 20 - 0,04 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



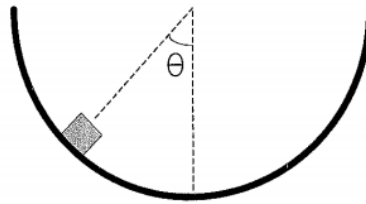
$$a = 4,4 \text{ m/s}^2$$

Gabarito: B

35. (EN – 2009)

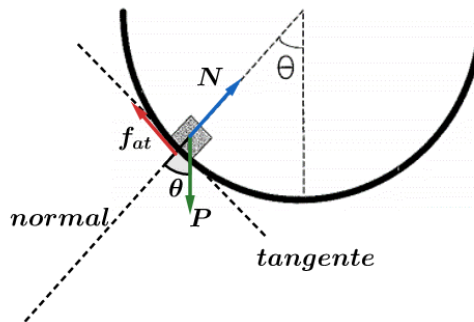
Um pequeno bloco de massa m está, devido ao atrito, em repouso sobre uma superfície cilíndrica numa posição que forma um ângulo θ com a vertical, conforme indica a figura. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a superfície são, respectivamente, iguais a μ_e e μ_c . Considerando o bloco como uma partícula, quanto vale o módulo da força de atrito entre o bloco e a superfície?

- a) $m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$
- b) $m \cdot g \cdot \text{cos } \theta$
- c) $\mu_e \cdot m \cdot g$
- d) $\mu_e \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$
- e) $\mu_c \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } \theta$



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças, temos:



Se o bloco está em repouso, na direção tangente, temos:

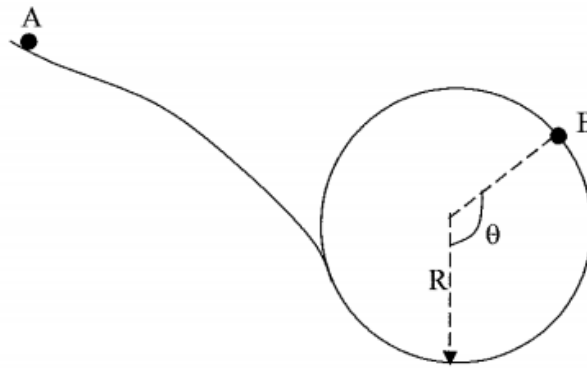
$$f_{at} = P \cdot \text{sen } \theta$$

$$f_{at} = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

Gabarito: A

36. (EN – 2008)

Uma pequena esfera (partícula) de massa M desliza, a partir do repouso (posição A), por uma trajetória (no plano vertical), passando pela posição B , da circunferência de raio R , com velocidade de módulo V , como indica a figura abaixo.

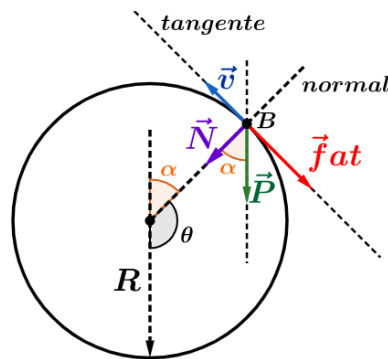


Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre a partícula e trajetória vale μ_c . O módulo da força de atrito que atua na esfera no instante em que passa pela posição B, é igual a

- a) $\mu_c \cdot M \cdot g$ b) $\mu_c \cdot M \cdot g \cdot \text{sen } \theta$ c) $\mu_c \cdot M \cdot g \cdot \text{cos } \theta$
 d) $\frac{\mu_c \cdot M \cdot (V^2 + R \cdot g \cdot \text{cos } \theta)}{R}$ e) $\frac{\mu_c \cdot V^2 \cdot g \cdot \text{sen } \theta}{R}$

Comentários:

Analisando as forças que atuam no corpo no ponto B, temos:



Portanto:

$$R_{cp} = P \cdot \text{cos}(\alpha) + N$$

$$R_{cp} = P \cdot \text{cos}(180^\circ - \theta) + N$$

$$M \cdot \frac{V^2}{R} = -M \cdot g \cdot \text{cos } \theta + N$$

$$N = M \cdot \left(\frac{V^2 + R \cdot g \cdot \text{cos } \theta}{R} \right)$$

Logo, a força de atrito cinético é dada por:

$$f_{at} = \mu_c \cdot N$$

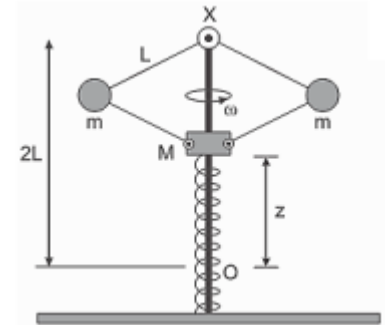
$$f_{at} = \mu_c \cdot M \cdot \left(\frac{V^2 + R \cdot g \cdot \text{cos } \theta}{R} \right)$$



Gabarito: D

37. (ITA 2015)

Na figura, o eixo vertical giratório imprime uma velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ao sistema composto por quatro barras iguais, de comprimento $L = 1 \text{ m}$ e massa desprezível, graças a uma dupla articulação na posição fixa X . Por sua vez, as barras de baixo são articuladas na massa M de 2 kg que, através de um furo central, pode deslizar sem atrito ao longo do eixo e esticar uma mola de constante elástica $k = 100 \text{ N/m}$ a partir da posição O da extremidade superior da mola em repouso, a dois metros abaixo de X . O sistema completa-se com duas massas iguais de $m = 1 \text{ kg}$ cada uma, articuladas às barras. Sendo desprezíveis as dimensões das massas, então, a mola distender-se-á de uma altura z acima de O dada por:



- a) 0,2m b) 0,5m c) 0,6m d) 0,7m e) 0,9m

Comentários:

Sejam T_1 e T_2 as tensões nas barras de baixo e de cima, respectivamente. Aplicando a Segunda Lei à massa m , temos:

Vertical –

$$T_2 \cdot \text{sen } \theta = T_1 \cdot \text{sen } \theta + m \cdot g \quad (\text{eq.1})$$

Horizontal –

$$R_{cent} = (T_2 + T_1) \cdot \text{cos } \theta = m \cdot \omega^2 \cdot (L \cdot \text{cos } \theta)$$

$$T_2 + T_1 = m \cdot \omega^2 \cdot L \quad (\text{eq.2})$$

Em que θ é metade do ângulo com vértice na massa m do triângulo formado pelas barras + haste. Assim, podemos escrever:

$$\text{sen } \theta = \frac{L - \frac{z}{2}}{L} = 1 - \frac{z}{2}$$

Eliminando T_2 de (1) e (2), obtemos:

$$2T_1 = m \cdot \omega^2 \cdot L - \frac{m \cdot g}{\text{sen } \theta}$$

$$2T_1 = 100 - \frac{10}{1 - \frac{z}{2}}$$

$$2T_1 = \frac{10(9 - 5z)}{1 - \frac{z}{2}}$$

Aplicando a Segunda Lei à massa M , temos:



$$M \cdot g + k \cdot z = 2T_1 \cdot \text{sen } \theta$$

$$20 + 100z = \frac{10(9 - 5z)}{1 - \frac{z}{2}} \cdot 1 - \frac{z}{2}$$

$$2 + 10z = 9 - 5z$$

$$15z = 7 \therefore z \approx 0,47 \text{ m}$$

Gabarito: B

38. (ITA 2012)

Considere uma rampa plana, inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, no início da qual encontra-se um carrinho. Ele então recebe uma pancada que o faz subir até uma certa distância, durante o tempo t_s , descendo em seguida até sua posição inicial. A “viagem” completa dura um tempo total t . Sendo μ o coeficiente de atrito cinético entre o carrinho e a rampa, a relação t/t_s é igual a:

- a) 2
 b) $1 + \sqrt{\text{tg}\theta + \mu/|\text{tg}\theta - \mu|}$
 c) $1 + \sqrt{\cos\theta + \mu/|\cos\theta - \mu|}$
 d) $1 + \sqrt{\text{sen}\theta + \mu/|\cos\theta - \mu|}$
 e) $1 - \sqrt{\text{tg}\theta + \mu/|\text{tg}\theta - \mu|}$

Comentários:

Todos os movimentos apresentam aceleração constante. Na subida o atrito tem o mesmo sentido da aceleração causado pela força peso e na descida, o sentido oposto:

$$a_{subida} = -g(\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)$$

$$a_{descida} = g(\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta)$$

Usando as equações de deslocamento para movimento uniformemente variado:

$$d = \frac{g(\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta) \cdot t_s^2}{2}$$

$$d = \frac{g(\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta) \cdot t_d^2}{2}$$

Dividindo as duas equações acima, obtemos:

$$\frac{t_d}{t_s} = \sqrt{\frac{(\text{sen } \theta + \mu \cos \theta)}{(\text{sen } \theta - \mu \cos \theta)}}$$

Logo, a razão pedida pelo enunciado é:

$$\frac{t}{t_s} = \frac{t_s + t_d}{t_s} = 1 + \frac{t_d}{t_s} = 1 + \sqrt{\frac{\text{sen } \theta + \mu \cos \theta}{\text{sen } \theta - \mu \cos \theta}}$$

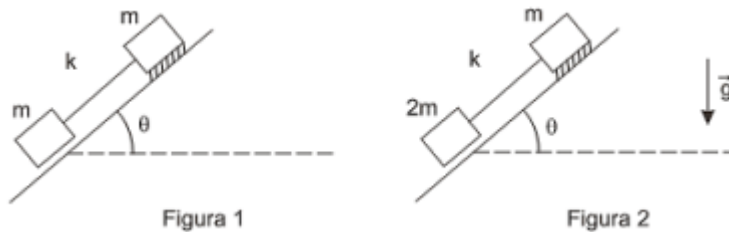


Colocando $\text{sen } \theta$ em evidência dentro da raiz:

$$\frac{t}{t_s} = 1 + \sqrt{\frac{\tan \theta + \mu}{\tan \theta - \mu}}$$

Gabarito: B

39. (IME-2012)



A figura 1 mostra dois corpos de massas iguais a m presos por uma haste rígida de massa desprezível, na iminência do movimento sobre um plano inclinado, de ângulo θ com a horizontal. Na figura 2, o corpo inferior é substituído por outro com massa $2m$. Para as duas situações, o coeficiente de atrito estático é μ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu/2$ para a massa superior, e não há atrito para a massa inferior. A aceleração do conjunto ao longo do plano inclinado, na situação da figura 2 é:

- a) $(2g \text{sen} \theta)/3$ b) $(3g \text{sen} \theta)/2$ c) $(g \text{sen} \theta)/2$
 d) $g(2 \text{sen} \theta - \text{cos} \theta)$ e) $g(2 \text{sen} \theta + \text{cos} \theta)$

Comentários:

Considere primeiramente a situação na figura 1. Aplicando a Segunda Lei no sistema composto pelas duas massas:

$$2 \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \theta = f_{at_{max}} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } \theta$$

$$\mu = 2 \tan \theta$$

Aplicando a Segunda Lei no sistema, na configuração mostrada na figura 2, obtemos:

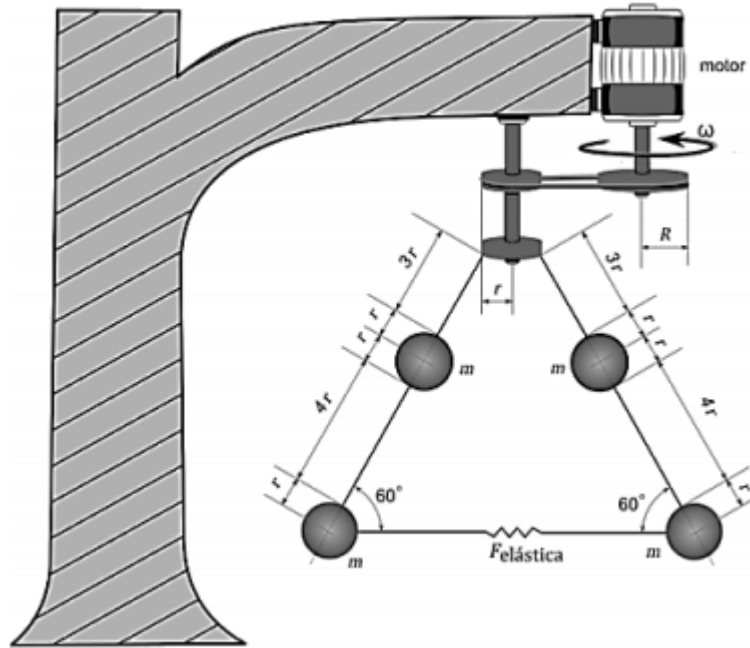
$$3 \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \theta - f_{at_{cin}} = 3 \cdot m \cdot a$$

$$3a = 3g \cdot \text{sen } \theta - \left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot g \cdot \text{cos } \theta$$

$$a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

Gabarito: A

40. (IME-2018)



A figura acima mostra um dispositivo composto por um motor elétrico, cujo eixo se encontra ligado a uma polia ideal de raio R , solidária a uma segunda polia de raio r , sem deslizamento. Solidário ao segundo eixo há um disco rígido metálico de raio r . Em duas extremidades opostas deste disco, foram fixados dois pêndulos compostos idênticos, com fios ideais e esferas homogêneas, de massa m . Existe um fio extensível ligando as esferas inferiores, provendo uma força elástica $F_{elástica}$ que as mantém na configuração mostrada na figura. Determine, em função de g, m, r e R :

- a) a velocidade angular ω do motor elétrico;
- b) a força elástica $F_{elástica}$ do fio extensível.

Dado: aceleração da gravidade: g .

Comentários:

Considere o movimento de uma das esferas superiores (já que o sistema é simétrico precisamos analisar somente um lado). Teremos a ação do peso, uma tensão do fio de cima T_1 e uma tensão do fio de baixo T_2 . Lembre-se que a circunferência da trajetória do centro de massa dos corpos tem centro no eixo do disco metálico.

- a) Aplicando a Segunda Lei a essa esfera, temos:

Vertical –

$$T_1 \cdot \sin 60^\circ = T_2 \cdot \sin 60^\circ + m \cdot g$$

Horizontal –

$$R_{cent} = T_1 \cdot \cos 60^\circ - T_2 \cdot \cos 60^\circ = m \cdot \omega_{fio}^2 \cdot (3r)$$

Colocando $T_1 - T_2$ em evidência e dividindo as equações acima, obtemos:



$$m \cdot \omega_{fio}^2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot r = m \cdot g$$

$$\omega_{fio} = \sqrt{\frac{g}{3\sqrt{3} \cdot r}}$$

Essa velocidade angular é a mesma da polia menor e, por sua vez, a polia menor está ligada pela sua borda com o motor, logo a velocidade linear da sua borda deve ser igual à do motor:

$$\omega_{fio} \cdot r = \omega \cdot R$$

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{r \cdot g}{3\sqrt{3}}}$$

b) Aplicando a Segunda Lei em uma das esferas inferiores:

Vertical –

$$T_2 \cdot \text{sen } 60^\circ = m \cdot g$$

$$T_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} m \cdot g$$

Horizontal –

$$R_{cent} = T_2 \cdot \cos 60^\circ + F_{elástica} = m \cdot \omega_{fio}^2 \cdot (6r)$$

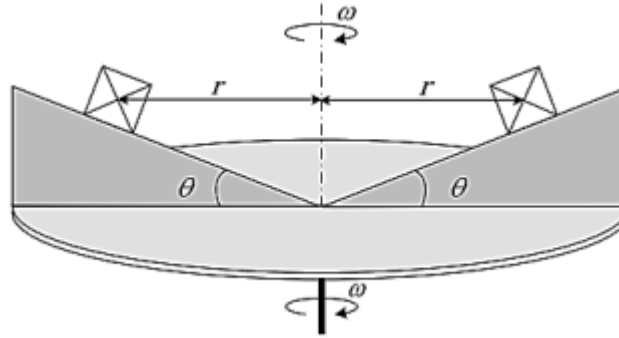
Substituindo os valores de T_2 e ω_{fio} na última equação, obtemos:

$$F_{elástica} = \frac{m \cdot g \cdot (6r)}{3\sqrt{3}r} - \frac{m \cdot g}{\sqrt{3}} = \frac{m \cdot g}{\sqrt{3}}$$

Gabarito: a) $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{rg}{3\sqrt{3}}}$ b) $F_{elástica} = \frac{\sqrt{3}mg}{3}$

41. (IME 2018)

O sistema mostrado na figura gira em torno de um eixo central em velocidade angular constante ω . Dois cubos idênticos, de massa uniformemente distribuída, estão dispostos simetricamente a uma distância r do centro ao eixo, apoiados em superfícies inclinadas de ângulo θ . Admitindo que não existe movimento relativo dos cubos em relação às superfícies, a menor velocidade angular ω para que o sistema se mantenha nessas condições é:



Dados:

- Aceleração da gravidade: g ;
- Massa de cada cubo: m ;
- Aresta de cada cubo: a ; e
- Coeficiente de atrito entre os cubos e as superfícies inclinadas: μ

a) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

b) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

c) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

d) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

e) $\left[\frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}}$

Comentários:

Para a menor velocidade os cubos estarão na iminência de escaparem para o interior da trajetória circular, assim o atrito tem sentido para cima na superfície inclinada. Aplicando a Segunda Lei em um dos blocos: (sistema simétrico)

Vertical –

$$m \cdot g = N \cdot \cos \theta + fat_{max} \cdot \sin \theta$$

O atrito é máximo pois o corpo está na iminência de escorregar.

$$m \cdot g = N \cdot (\cos \theta + \mu \cdot \sin \theta) \quad (eq.1)$$

Horizontal –

$$R_{cent} = N \cdot \sin \theta - fat_{max} \cdot \cos \theta$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = N \cdot (\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta) \quad (eq.2)$$

Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \theta - \mu \cos \theta}{r \cos \theta + \mu \sin \theta}}$$

Gabarito: D



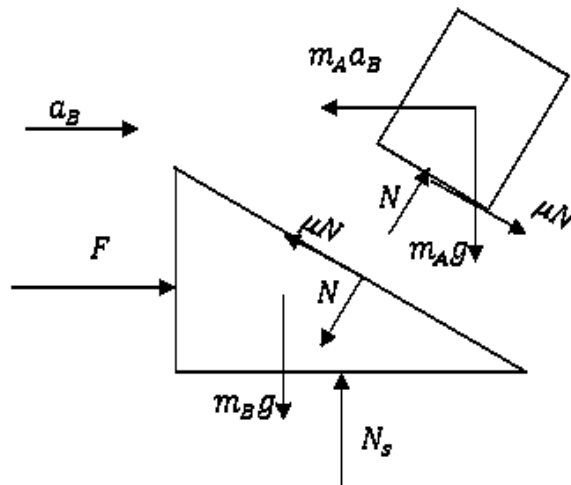
42. (ITA - 2022)

Um bloco de massa m_A encontra-se sobre uma superfície de uma cunha de massa m_B , que desliza sem atrito em uma superfície plana devido à ação de uma força horizontal. O ângulo de inclinação da cunha é dado por θ . Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco e a cunha é μ , calcule em função de m_A , m_B , θ , μ e g :

- a) a aceleração mínima à qual a cunha deve ser submetida para que o bloco inicie um movimento de subida;
- b) a intensidade da força de contato entre o bloco e a cunha.

Comentários:

Trabalharemos a análise do bloco no referencial da cunha, enquanto que a da cunha no referencial da Terra.



Cunha:

$$F - N \sin \theta - \mu N \cos \theta = m_B a_B \quad (I)$$

Bloco:

$$N \cos \theta = \mu N \sin \theta + m_A g \rightarrow N = \frac{m_A g}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \quad (II)$$

$$m_A a_B = \mu N \cos \theta + N \sin \theta \quad (III)$$

Aplicando II em III, vem:

$$a_B = \frac{g(\mu \cos \theta + \sin \theta)}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$

Além disso, a força de contato é tal que:

$$F_c = \sqrt{N^2 + (\mu N)^2} = N \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{m_A g \sqrt{1 + \mu^2}}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$



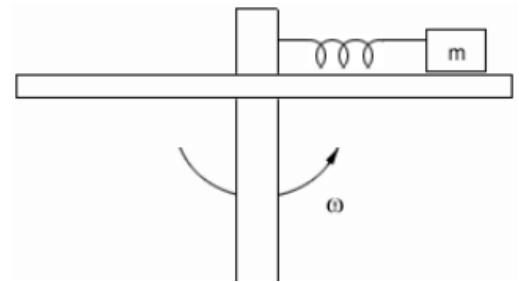
Gabarito: a) $\frac{g(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$ b) $\frac{m_A g \sqrt{1 + \mu^2}}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$



9. Lista de questões nível 3

1. (ITA - 1981)

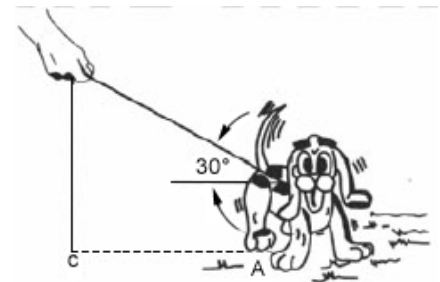
A figura abaixo representa uma mesa horizontal muito lisa que gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular ω constante. Um objeto de massa m apoiado sobre a mesa gira com a mesma velocidade angular, graças apenas à ação de uma mola de constante elástica k , de massa desprezível, e cujo comprimento é l , quando não solicitada. Podemos afirmar que:



- a) a força elástica é certamente maior que $(km)^{\frac{1}{2}}$
- b) se l for desprezível e $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ o raio de equilíbrio pode assumir qualquer valor.
- c) a elongação da mola é $x = k(m\omega^2)^{-1}$.
- d) a elongação da mola é proporcional a ω .
- e) a aceleração tangencial do objeto é igual a km^{-1}

2. (ITA - 1985)

O cachorrinho da figura tem massa 10 kg e move-se num terreno horizontal numa trajetória de raio de curvatura $1,0\text{ m}$. Num dado instante, sua velocidade é de $0,36\text{ km/h}$ e ele exerce contra o solo forças de $0,10\text{ N}$ (dirigida de A para o centro de curvatura C) e de $0,050\text{ N}$ (tangencial). Sabendo que a mão do dono está na vertical erguida do centro de curvatura, podemos afirmar que a tensão na guia e aceleração tangencial do cachorrinho valem respectivamente:



- a) zero e $5,0 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- b) $0,23\text{ N}$ e $5,0 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- c) 196 N e $5,0 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- d) $0,11\text{ N}$ e $0,01\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- e) $0,23\text{ N}$ e $0,01\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

3. (ITA - 1994)

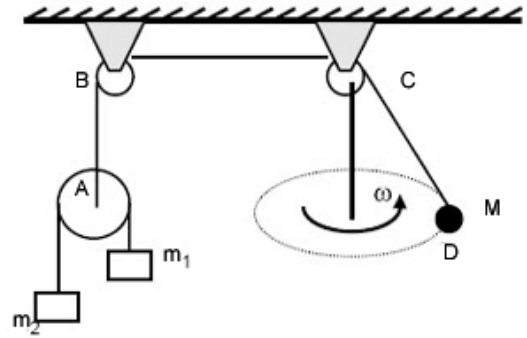
Um motociclista trafega em uma estrada reta e nivelada atrás de um caminhão de $4,00\text{ m}$ de largura, perpendicularmente à carroceria. Ambos estão trafegando a velocidade constante de 72 km/h quando o caminhão se detém instantaneamente, devido a uma colisão. Se o tempo de reação do motociclista for $0,50\text{ s}$, a que distância mínima ele deverá estar trafegando para evitar o choque apenas com mudança de trajetória? Considere os coeficientes de atrito entre o pneumático e o solo $\mu = 0,80$, aceleração gravitacional $g = 10,0\text{ m/s}^2$ e que a trajetória original o levaria a colidir-se no meio da carroceria.



- a) 19,6 m b) 79,3 m c) 69,3 m d) 24,0 m e) 14,0 m

4. (ITA - 1994)

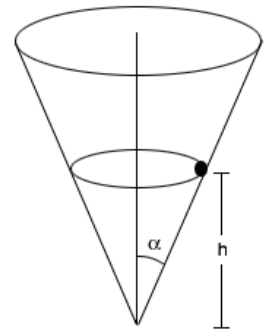
Um fio tem presa uma massa M em uma das extremidades e na outra, uma polia que suporta duas massas; $m_1 = 3,00 \text{ kg}$ e em $m_2 = 1,00 \text{ kg}$ unidas por um outro fio como mostra a figura. Os fios têm massas desprezíveis e as polias são ideais. Se $\overline{CD} = 0,80 \text{ m}$ e a massa M gira com velocidade angular constante $\omega = 5,00 \text{ rad/s}$ numa trajetória circular em torno do eixo vertical passando por C , observa-se que o trecho ABC do fio permanece imóvel. Considerando a aceleração gravitacional $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, a massa M deverá ser:



- a) 3,00 kg b) 4,00 kg c) 0,75 kg d) 1,50 kg e) 2,50 kg

5. (ITA - 1997)

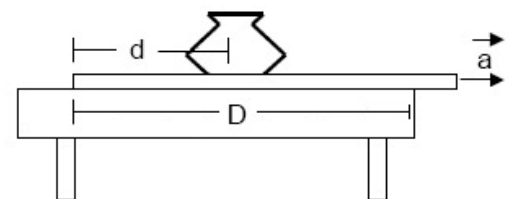
Uma massa pontual se move, sob a influência da gravidade e sem atrito, com velocidade angular em um círculo a uma altura h na superfície interna de um cone que forma um ângulo α com seu eixo central, como mostrado na figura. A altura h da massa em relação ao vértice do cone é:



- a) $\frac{g}{\omega^2}$
 b) $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\text{sen}\alpha}$
 c) $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\text{cotg}\alpha}{\text{sen}\alpha}$
 d) $\frac{g}{\omega^2} \cdot \text{cotg}^2\alpha$
 e) Inexistente, pois a única posição de equilíbrio é $h = 0$.

6. (ITA - 1997)

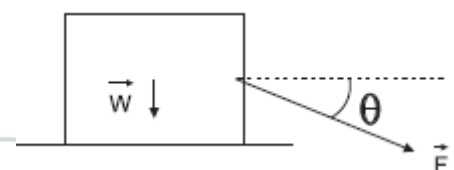
Um antigo vaso chinês está a uma distância d da extremidade de um forro sobre uma mesa. Essa extremidade, por sua vez, se encontra a uma distância D de uma das bordas da mesa, como mostrado na figura. Inicialmente tudo está em repouso. Você apostou que consegue puxar o forro com uma aceleração constante a (veja figura) de tal forma que o vaso não caia da mesa. Considere que ambos os coeficientes de atrito, estático e cinético, entre o vaso e o forro tenham o valor μ que o vaso pare no momento que toca na mesa. Você ganhará a aposta se a magnitude da aceleração estiver dentro da faixa:



- a) $a < \frac{d}{D}\mu g$ b) $a > \frac{d}{D}\mu g$ c) $a > \mu g$ d) $a > \frac{D}{d}\mu g$ e) $a > \frac{D}{D-d}\mu g$

7. (ITA - 1998)

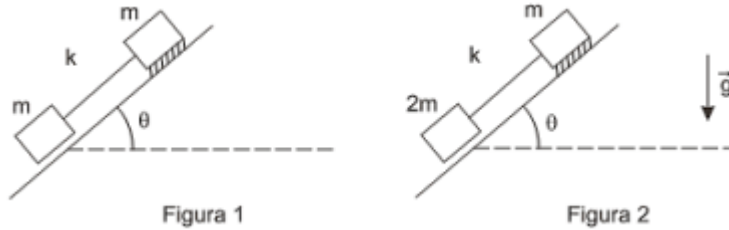
Um caixote de peso W é puxado sobre um trilho horizontal por uma força de magnitude F que forma um ângulo θ em relação à horizontal, como mostra a figura. Dado que o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o trilho é μ , o valor mínimo de F , a partir de qual seria possível mover o caixote, é:





- a) $\frac{2W}{1-\mu}$ b) $\frac{W \operatorname{sen} \theta}{1-\mu \operatorname{tg} \theta}$ c) $\frac{W \operatorname{sen} \theta}{\mu - \operatorname{tg} \theta}$
 d) $\frac{\mu W \operatorname{sec} \theta}{1-\mu \operatorname{tg} \theta}$ e) $(1 - \mu \operatorname{tg} \theta)W$

8. (IME-2012)



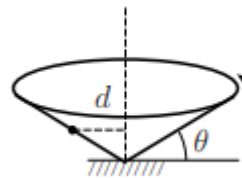
A figura 1 mostra dois corpos de massas iguais a m presos por uma haste rígida de massa desprezível, na iminência do movimento sobre um plano inclinado, de ângulo θ com a horizontal. Na figura 2, o corpo inferior é substituído por outro com massa $2m$. Para as duas situações, o coeficiente de atrito estático é μ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu/2$ para a massa superior, e não há atrito para a massa inferior. A aceleração do conjunto ao longo do plano inclinado, na situação da figura 2 é:

- a) $(2g \operatorname{sen} \theta)/3$ b) $(3g \operatorname{sen} \theta)/2$ c) $(g \operatorname{sen} \theta)/2$
 d) $g(2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{cos} \theta)$ e) $g(2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta)$

9. (ITA-2012)

Um funil que gira com velocidade angular uniforme em torno do seu eixo vertical de simetria apresenta uma superfície cônica que forma um ângulo θ com a horizontal, conforme a figura. Sobre esta superfície, uma pequena esfera gira com a mesma velocidade angular mantendo-se a uma distância d do eixo de rotação. Nestas condições, o período de rotação do funil é dado por:

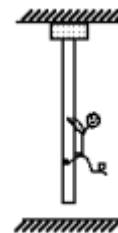
- a) $2\pi \sqrt{d/g \cdot \operatorname{sen} \theta}$
 b) $2\pi \sqrt{d/g \cdot \operatorname{cos} \theta}$
 c) $2\pi \sqrt{d/g \cdot \operatorname{tg} \theta}$
 d) $2\pi \sqrt{d/g \cdot \operatorname{sen} 2\theta}$
 e) $2\pi \sqrt{d \operatorname{cos} \theta / g \operatorname{tg} \theta}$



10. (Fuvest 1989)

Uma tira elástica de borracha está presa no teto de uma sala. Um macaco dependurado na tira sobe em direção ao teto com velocidade praticamente constante. Podemos afirmar que, à medida que o macaco sobe;

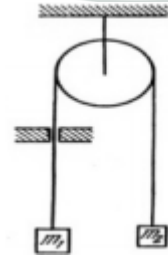
- a) a força que a tira exerce no teto aumenta.
 b) a força que a tira exerce no teto diminui.
 c) a distância da extremidade inferior da tira ao chão aumenta.
 d) a distância da extremidade inferior da tira ao chão diminui.
 e) a distância da extremidade inferior da tira ao chão não se altera.



11.



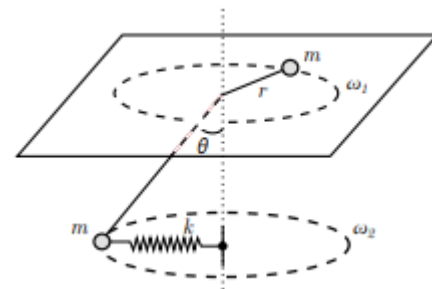
Uma corda, cujo peso é desprezado, foi colocada numa roldana de eixo fixo e passa através de um orifício. No movimento da corda o orifício atua com uma força de fricção constante F . Nos extremos da corda são colocados pesos, cujas massas são m_1 e m_2 . Determinar a aceleração dos pesos.



12. (ITA – 2019)

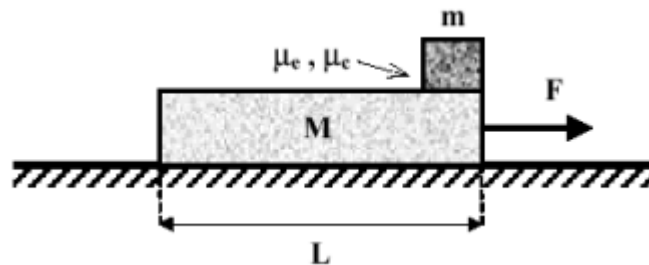
Considere duas partículas de massa m , cada qual presa numa das pontas de uma corda, de comprimento l e massa desprezível, que atravessa um orifício de uma mesa horizontal lisa. Conforme mostra a figura, a partícula sobre a mesa descreve um movimento circular uniforme de raio r e velocidade angular ω_1 . A partícula suspensa também descreve esse mesmo tipo de movimento, mas com velocidade angular ω_2 , estando presa a uma mola de constante elástica k e comprimento natural desprezível, mantida na horizontal. Sendo g o módulo da aceleração da gravidade e θ o ângulo do trecho suspenso da corda com a vertical, a razão $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2$ é dada por:

- a) $\frac{r(mg+k(l-r)\cos\theta)}{mg(l-r)}$
- b) $\frac{(l-r)(mg+krcos\theta)}{mgrsen\theta}$
- c) $\frac{(l-r)(mg+krtg\theta)}{mgr^2}$
- d) $\frac{k(l-r)\cos\theta}{mg+kr}$
- e) $\frac{(l-r)(k\cos\theta)}{mg+k(l-r)\cos\theta}$



13. (OBF 2001)

Na figura a seguir, um bloco de massa M e comprimento L encontra-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Sobre tal bloco, é colocado um outro de massa m , cujo comprimento é muito menor que L , de modo que este possa ser considerado uma partícula material. Sabe-se que existe atrito entre os blocos, com coeficientes estático e cinético respectivamente denotados por μ_e e μ_c . Considere que sobre o bloco de massa M atua uma força constante e horizontal de módulo F . A força horizontal máxima que pode ser aplicada sobre o bloco de massa M de modo que os blocos não deslizem um sobre o outro é denotada por $F_{m\acute{a}x}$.



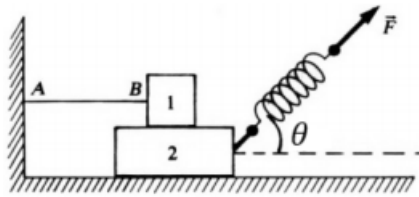
- a) Calcule o módulo da força máxima $F_{m\acute{a}x}$ em função de μ_e , M , m e g .
- b) Suponha que $F > F_{m\acute{a}x}$. Para tal situação, calcule o tempo que o bloco de massa m leva para perder contato com o bloco de massa M . Expresse o seu resultado em função de L , M , μ_e , μ_c , F e $F_{m\acute{a}x}$.

14. (Inédita Prof. Toni Burgatto)

Na figura abaixo temos: um fio ideal AB na horizontal, que liga o corpo 1 de massa m_1 a parede vertical. O corpo 1 repouso sobre um corpo 2. O corpo 2 é puxado por uma força constante F . Sabe-

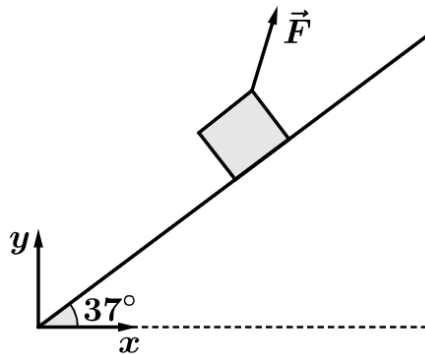


se que o coeficiente de atrito entre 1 e 2, e entre o corpo 2 e o solo horizontal é $\sqrt{3}$. Para que o bloco 2 adquira a maior aceleração possível, o ângulo θ deve ser igual a:



- a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) depende dos valores das massas.

15. (Inédita Prof. Toni Burgatto)



Um bloco de 5 kg está subindo um plano inclinado áspero, de tal forma que a força \vec{F} tem módulo igual a 60 N. A máxima aceleração do bloco, sabendo que ele não perde contato com o plano, é de: Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\text{sen}(37^\circ) = 3/5$ e o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano igual a 0,75.

- a) 1 m/s^2 b) 2 m/s^2 c) 3 m/s^2 d) 4 m/s^2 e) 5 m/s^2

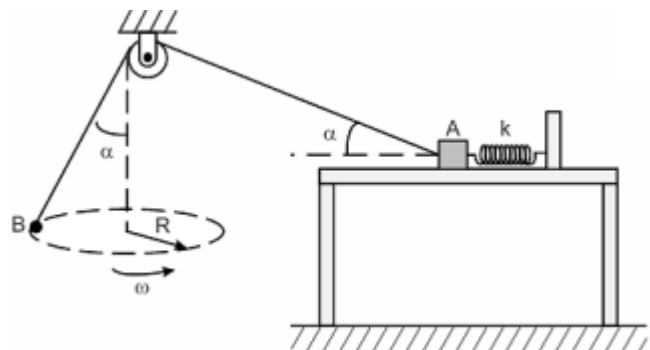
16. (IME 2016)

Uma mola presa ao corpo A está distendida. Um fio passa por uma roldana e tem suas extremidades presas ao corpo A e ao corpo B, que realiza um movimento circular uniforme horizontal com raio R e velocidade angular ω . O corpo A encontra-se sobre uma mesa com coeficiente de atrito estático μ e na iminência do movimento no sentido de reduzir a deformação da mola. Determine o valor da deformação da mola.

Dados:

- massa do corpo A: m_A ; A
- massa do corpo B: m_B ; B
- constante elástica da mola: k;
- aceleração da gravidade: g

Consideração: A massa m_A é suficiente para garantir que o corpo A permaneça no plano horizontal da mesa.

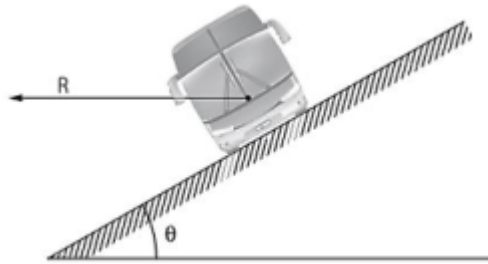


17. (IME 1993)

Considere o veículo de massa M percorrendo uma curva inclinada, de ângulo θ , com raio R constante, a uma velocidade v . Supondo que o coeficiente de atrito dos pneus com o solo seja μ ,



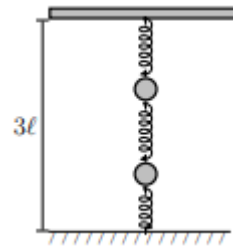
calcule as velocidades mínima e máxima com que este veículo pode percorrer esta curva, sem deslizamento.



18. (ITA – 2018)

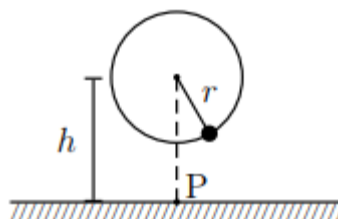
Três molas idênticas, de massas desprezíveis e comprimentos naturais ℓ , são dispostas verticalmente entre o solo e o teto a 3ℓ de altura. Conforme a figura, entre tais molas são fixadas duas massas pontuais iguais. Na situação inicial de equilíbrio, retira-se a mola inferior (ligada ao solo) resultando no deslocamento da massa superior de uma distância d_1 para baixo, e da inferior, de uma distância d_2 também para baixo, alcançando-se nova posição de equilíbrio. Assinale a razão d_2/d_1 .

- a) 2
- b) 3/2
- c) 5/3
- d) 4/3
- e) 5/4



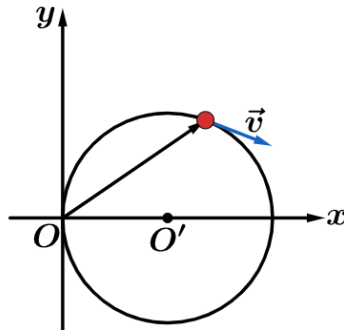
19. (ITA – 2018)

Na figura, presa a um fio de comprimento de 1,0 m, uma massa de 1,0 kg gira com uma certa velocidade angular num plano vertical sob a ação da gravidade, com eixo de rotação a $h = 6,0$ m do piso. Determine a velocidade angular mínima dessa massa para a ruptura do fio que suporta no máximo a tração de 46 N, bem como a distância ao ponto P do ponto em que, nesse caso, a massa tocará o solo.



20. (Inédita Prof. Toni Burgatto)

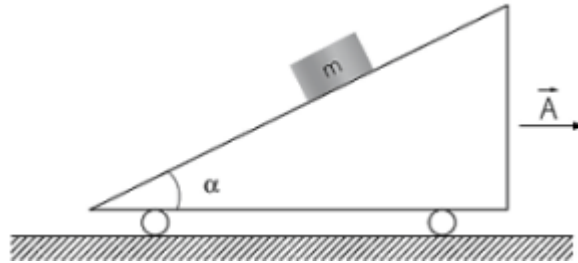
Uma partícula descreve um MCU sobre uma circunferência de raio R . Se o vetor posição gira com uma velocidade angular ω_0 , qual deve ser o módulo da aceleração centrípeta desta partícula?



- a) $\omega_0^2 R$ b) $2\omega_0^2 R$ c) $3\omega_0^2 R$ d) $4\omega_0^2 R$ e) $5\omega_0^2 R$

21. (ITA 2003)

Na figura, o carrinho com rampa movimentar-se com aceleração constante \vec{A} . Sobre a rampa, repousa um bloco de massa m . Se μ é o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a rampa, determine o intervalo para o módulo de \vec{A} no qual o bloco permanecerá em repouso sobre a rampa.



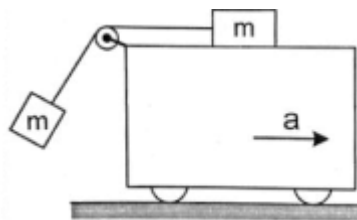
22.

Sobre um plano inclinado que forma um ângulo α com a horizontal, por um fio ideal, um bloco de massa m é arrastado com uma velocidade constante, plano acima. O coeficiente de atrito entre o plano e o bloco vale μ (com $\mu < 1$). Para um certo ângulo β (que o fio forma com o plano inclinado) a tração será mínima. Qual o valor da tração mínima?

- a) $\frac{mg(\text{sen}\alpha + \mu \text{cos}\theta)}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ b) $mg(\text{sen}\alpha + \mu \text{cos}\alpha)$ c) $\frac{mg(\text{cos}\alpha + \mu \text{sen}\theta)}{\sqrt{1 + \mu^2}}$
 d) $\frac{mg(\text{sen}\alpha + \mu \text{cos}\theta)}{\mu}$ e) $\frac{mg(\text{cos}\alpha + \mu \text{sen}\theta)}{\mu}$

23.

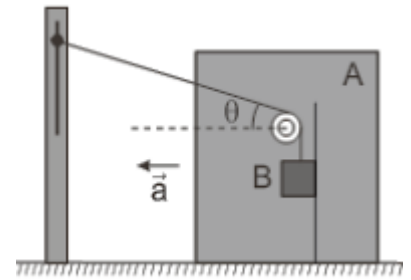
Na figura a seguir, dois blocos idênticos de massa m são conectados entre si por meio de um fio ideal que passa por uma polia também ideal fixa ao carrinho. O carrinho acelera para a direita com aceleração de intensidade a . Sabendo-se que o coeficiente de atrito entre o bloco e o carrinho vale $\mu > 1$, determine o maior valor de a para que o bloco não escorregue sobre o carrinho.



24. (ITA 2012)

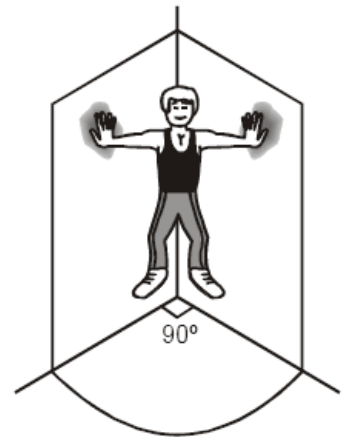


A figura mostra um sistema formado por dois blocos, A e B , cada um com massa m . O bloco A pode deslocar-se sobre a superfície plana e horizontal onde se encontra. O bloco B está conectado a um fio inextensível fixado à parede, e que passa por uma polia ideal com eixo preso ao bloco A . Um suporte vertical sem atrito mantém o bloco B descendo sempre paralelo a ele, conforme mostra a figura. Sendo μ o coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e a superfície, g a aceleração da gravidade, e $\theta = 30^\circ$ mantido constante, determine a tração no fio após o sistema ser abandonado do repouso.



25. (ITA - 2004)

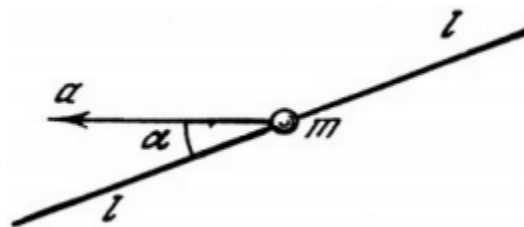
Um atleta mantém-se suspenso em equilíbrio, forçando as mãos contra duas paredes verticais, perpendiculares entre si, dispondo seu corpo simetricamente em relação ao canto e mantendo seus braços horizontalmente alinhados, como mostra a figura. Sendo m a massa do corpo do atleta e μ o coeficiente de atrito estático interveniente, assinale a opção correta que indica o módulo mínimo da força exercida pelo atleta em cada parede.



- a) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^{1/2}$
- b) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)^{1/2}$
- c) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)$
- d) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)$
- e) n.d.a.

26.

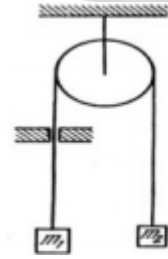
Sobre uma barra, de comprimento $2l$, colocada uma conta de massa igual a m . O coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a k . No momento inicial a conta encontrava-se no meio da barra. A barra desloca-se progressivamente em um plano horizontal com aceleração a em uma direção, que forma um ângulo α com a barra. Determinar a aceleração da conta relativamente à barra, a força de reação por parte da barra sobre a conta e o tempo depois do qual a conta se liberta da barra. Não é necessário considerar a força de gravidade.



27.

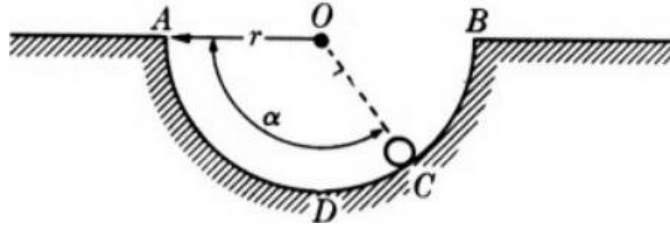


Uma corda, cujo peso é desprezado, foi colocada numa roldana de eixo fixo e passa através de um orifício. No movimento da corda o orifício atua com uma força de fricção constante F . Nos extremos da corda são colocados pesos, cujas massas são m_1 e m_2 . Determinar a aceleração dos pesos.



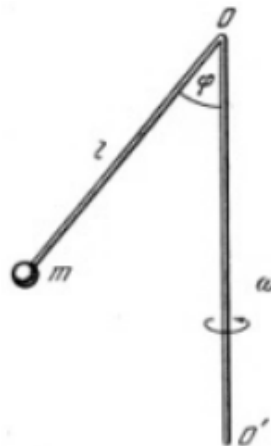
28. (Alonso & Finn)

Uma pequena bola de massa m , inicialmente em A, desliza sobre uma superfície circular ADB sem atrito. Demonstre que, quando a bola está no ponto C, a velocidade angular e a força exercida pela superfície são $\omega = \sqrt{\frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{r}}$ e $F = mg(3 \operatorname{sen} \alpha)$.



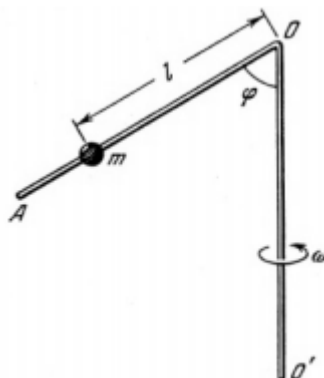
29. (Saraeva)

Uma barra de peso desprezível, dobrada como mostra a figura abaixo, gira com velocidade angular ω relativamente ao eixo OO' . No extremo da barra fixou-se um peso de massa m . Determinar a força, com que a barra atua sobre a massa m .



30. (Saraeva)

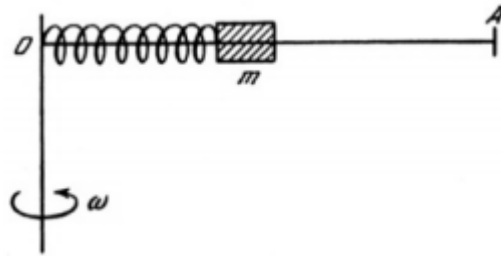
Uma barra de peso desprezível AOO' , dobrada como mostra a figura abaixo, gira com velocidade angular ω relativamente ao eixo OO' . Na barra foi colocada uma conta de massa m . Determinar a que distância A do ponto O , a conta ficará em equilíbrio, se o coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a k .





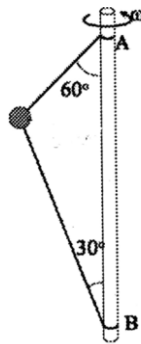
31. (Saraeva)

Uma barra horizontal reta gira com velocidade angular constante em redor de um eixo vertical. Um corpo pode deslizar pela barra sem fricção. Inicialmente, o corpo é mantido na posição de equilíbrio, através de uma mola. O que ocorrerá com o corpo, se transmitirmos ao mesmo, uma velocidade inicial em redor da barra? O comprimento da mola solta pode ser desprezado.



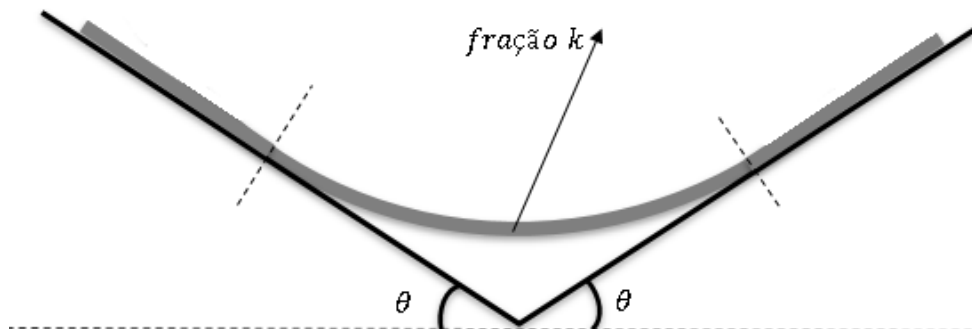
32. (Moyses)

No sistema da figura, a bolinha de massa m , está amarrada por fios de massa desprezível ao eixo vertical AB e gira com velocidade angular ω em torno do seu eixo. A distância AB é igual a L . Calcule as tensões nos fios superior e inferior. Para que valor de ω o fio inferior ficaria frouxo?



33. (Simulado ITA)

Uma corda está em repouso sobre dois planos inclinados de um mesmo ângulo θ . A corda é homogênea e seu coeficiente de atrito com a superfície dos planos vale 1. A corda é simetricamente disposta sobre os planos, de tal maneira que há mesma quantidade de massa sobre os planos direito e esquerdo. Uma parte da corda não toca os planos inclinados. Essa parte que não toca os planos é uma fração k do comprimento total L da corda. Qual é o intervalo de valores de k para quais o problema tem solução?

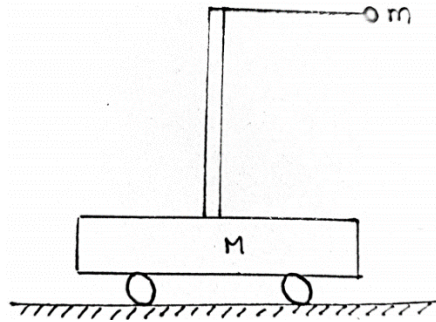


34. (Simulado ITA)

Um bloco de massa M está livre para se deslocar sobre um plano horizontal sem atrito. Sobre o carrinho está presa uma haste de massa desprezível de comprimento l , que tem em sua extremidade uma corda. No extremo da corda há uma massa m . No instante inicial a corda está na

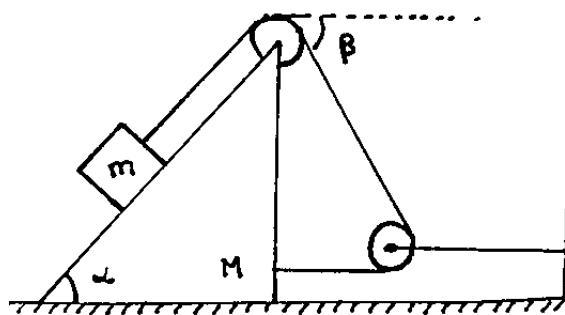


posição horizontal em repouso. Determine a tração no fio quando ele estiver fazendo um ângulo α com a vertical. Despreze quaisquer atritos.



35. (Simulado IME)

O sistema a seguir é abandonado da posição mostrada na figura abaixo. Qual será a aceleração inicial da cunha?



Dados:

A massa do bloco vale m .

A massa da cunha vale M .

Todas as polias e cabos são ideais.

Todas as superfícies são lisas.

A) $A = \frac{mgsen\alpha}{msen^2\alpha + m(1 + cos\beta)}$

B) $A = \frac{mgsen\alpha(1 + cos\beta)}{M + m(cos\alpha)}$

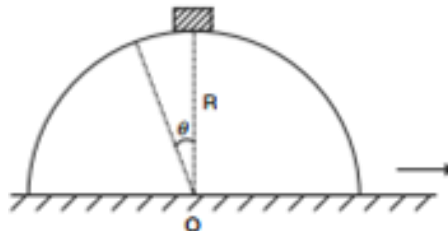
C) $A = \frac{mg(1 + cos\beta)}{M(1 + cos\beta - cos\alpha)}$

D) $A = \frac{mgsen\alpha(1 + cos\beta)}{m(1 + cos\beta - cos\alpha)}$

E) $A = \frac{mgsen\alpha(1 + cos\beta)}{M + msen^2\alpha + m(1 + cos\beta - cos\alpha)}$

36. (Sprint ITA/IME)

Um pequeno bloco é colocado no topo de uma superfície lisa de um hemisférico de raio R .



Ao hemisférico é dada uma aceleração constante a horizontal. O máximo valor de a para que o bloco não perca contato com o hemisférico, quando ele tem uma variação angular θ é bem pequena em relação ao hemisférico, é de:

a) $\frac{g}{5\theta}$

b) $\frac{g}{4\theta}$

c) $\frac{g}{3\theta}$

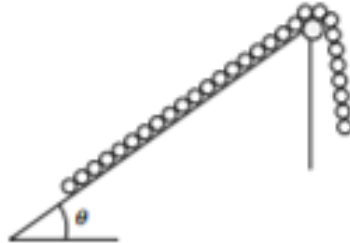
d) $\frac{g}{2\theta}$

e) $\frac{g}{6\theta}$

37. (Sprint ITA/IME)



Uma corrente uniforme de massa m_0 e comprimento L repousa sobre um plano inclinado rugoso com parte na vertical. A corrente começa a deslizar para cima do plano inclinado, com a parte pendurada correspondendo a η parte do comprimento da corrente. Desconsiderando a dimensão da polia e assumindo o movimento pela polia ser suave, o trabalho da força de atrito até que a corrente saia completamente do plano inclinado é de:



a) $-\frac{l(1+\eta)[\eta-(1-\eta)\cos(\theta)]m_0g}{2}$

b) $-\frac{l(1-\eta)[\eta+(1-\eta)\sin(\theta)]m_0g}{2}$

c) $-\frac{l(1-\eta)[\eta-(1-\eta)\sin(\theta)]m_0g}{2}$

d) $-\frac{l(1+\eta)[\eta-(1+\eta)\cos(\theta)]m_0g}{2}$

e) $-\frac{l(1-\eta)[\eta+(1-\eta)\tan(\theta)]m_0g}{2}$



GABARITO



10. Gabarito sem Comentários nível 3

1. B

2. B

3. D

4. D

5. D

6. E

7. D

8. A

9. C

10. C

11. $\frac{(m_1 - m_2) \cdot g - F}{m_1 + m_2}$

12. A

13. a) $F_{max} = (m + M) \cdot \mu_e \cdot g$ b) $t = \left(\frac{2LM}{F - \left(\frac{\mu_e}{\mu_c} \right) \cdot F_{max}} \right)^{\frac{1}{2}}$

14. C

15. C

16. $\frac{\mu \cdot (m_A \cdot g - m_B \cdot \omega^2 \cdot R) + m_B \cdot g}{k}$

17. $v_{max} = \sqrt{\frac{Rg(\text{sen}\theta + \mu\text{cos}\theta)}{\text{cos}\theta - \mu\text{sen}\theta}}$ e $v_{min} = \sqrt{\frac{Rg(\text{sen}\theta - \mu\text{cos}\theta)}{\text{cos}\theta + \mu\text{sen}\theta}}$

18. A

19. $\omega = 6 \text{ rad/s}$ e $A = 6 \text{ m}$



20. D

$$21. 0 \leq A \leq \frac{g(\mu \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha} \text{ e } \mu > \operatorname{tg} \alpha$$

22. A

$$23. a = g \cdot \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}$$

$$24. \frac{2(\sqrt{3} + \mu)}{3\sqrt{3} - \mu} \cdot m \cdot g$$

25. B

26. Ver comentários

$$27. a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g - F}{m_1 + m_2}$$

$$28. \omega = \sqrt{\frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{r}} \text{ e } F = 3 \cdot m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$29. m \cdot \sqrt{g^2 + \omega^4 \cdot l^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$30. l \leq \frac{g \cdot (k \cdot \operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi)}{\omega^2 \cdot \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \varphi + k \cdot \cos \varphi)}$$

31. Ver comentários

$$32. T_A = \frac{mg}{2} + \frac{3}{8} m \omega^2 L, T_B = \frac{\sqrt{3}}{8} m \omega^2 L - \frac{\sqrt{3}}{2} mg, \omega^* = 2 \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$33. \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \leq k \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$34. T = m \cdot g \cdot \cos \alpha \left(\frac{2 + \frac{m}{M}(3 - \cos^2 \alpha)}{\left(1 + \frac{m}{M} \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^2} \right)$$

35. E

36. C

37. C



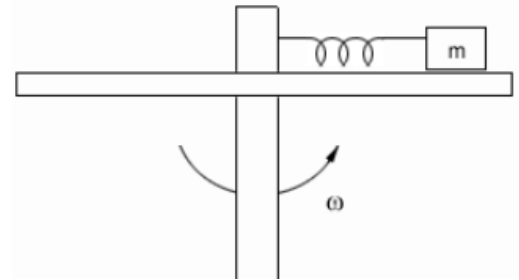
ESCLARECENDO!



11. Lista de questões nível 3 comentada

1. (ITA - 1981)

A figura abaixo representa uma mesa horizontal muito lisa que gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular ω constante. Um objeto de massa m apoiado sobre a mesa gira com a mesma velocidade angular, graças apenas à ação de uma mola de constante elástica k , de massa desprezível, e cujo comprimento é l , quando não solicitada. Podemos afirmar que:



- a) a força elástica é certamente maior que $(km)^{\frac{1}{2}}$
- b) se l for desprezível e $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ o raio de equilíbrio pode assumir qualquer valor.
- c) a elongação da mola é $x = k(m\omega^2)^{-1}$.
- d) a elongação da mola é proporcional a ω .
- e) a aceleração tangencial do objeto é igual a km^{-1}

Comentários:

Seja l' o raio da trajetória quando o corpo entrar em equilíbrio no seu movimento circular, permanecendo no mesmo raio. Nessa situação a força elástica será igual a resultante centrípeta:

$$R_{cent} = k(l' - l)$$

$$m\omega^2 l' = k(l' - l) \therefore l' = \frac{l}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$$

a) Incorreto. A resultante centrípeta é dada por:

$$R_{cent} = \frac{m\omega^2 l}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} > m\omega^2 l$$

Esse valor é dependente de l , que por sua vez é independente de ω e m , assim não podemos determinar seu limite omitindo essa grandeza.



b) Correto. Na expressão em que encontramos l' perceba que o denominador só pode aparecer naquele lugar se for diferente de zero, usando a equação um passo antes do fim:

$$l' \left(1 - \frac{m\omega^2}{k} \right) = l$$

Com $l = 0$ e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, temos:

$$l' \cdot 0 = 0$$

Assim, qualquer l' será solução dessa equação e, portanto, a raio de equilíbrio da trajetória poderá assumir qualquer valor.

c) Incorreto.

$$x = l' - l$$

$$x = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2}$$

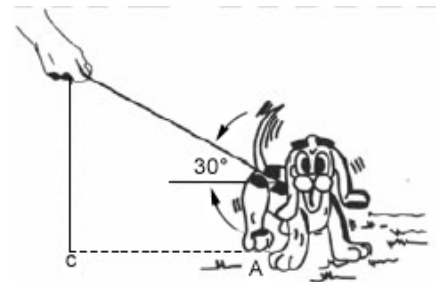
d) Incorreto. Veja c).

e) Incorreto. Como a velocidade angular do corpo é constante podemos assumir que se move em uma trajetória circular perfeita, de modo que a única força agindo sobre ele, a força elástica, é direcionada perpendicularmente à sua trajetória, restando aceleração tangencial nula.

Gabarito: B

2. (ITA - 1985)

O cachorrinho da figura tem massa 10 kg e move-se num terreno horizontal numa trajetória de raio de curvatura $1,0 \text{ m}$. Num dado instante, sua velocidade é de $0,36 \text{ km/h}$ e ele exerce contra o solo forças de $0,10 \text{ N}$ (dirigida de A para o centro de curvatura C) e de $0,050 \text{ N}$ (tangencial). Sabendo que a mão do dono está na vertical erguida do centro de curvatura, podemos afirmar que a tensão na guia e aceleração tangencial do cachorrinho valem respectivamente:



a) zero e $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

b) $0,23 \text{ N}$ e $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

c) 196 N e $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

d) $0,11 \text{ N}$ e $0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

e) $0,23 \text{ N}$ e $0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Comentários:

A força imprimida pela guia é perpendicular à trajetória do cachorro, logo a única força nessa direção é a força que ele sente do solo:



$$a_{tan} = \frac{F_{tan}}{m} = \frac{0,050}{10} = 5 \times 10^{-3} \text{ m/s}^{-2}$$

Pela sua resultante centrípeta, temos:

$$R_{cent} = T \cos 30^\circ - F_{rad}$$

A força radial que o cachorro exerce no solo é direcionada para dentro e, portanto, ele sofre uma força de reação direcionada para fora.

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{T\sqrt{3}}{2} - F_{rad}$$

$$10 \cdot \frac{(0,1)^2}{1} = \frac{T\sqrt{3}}{2} - 0,1$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{3}} 0,2 = \frac{0,4}{\sqrt{3}} \approx 0,23 \text{ N}$$

Gabarito: B

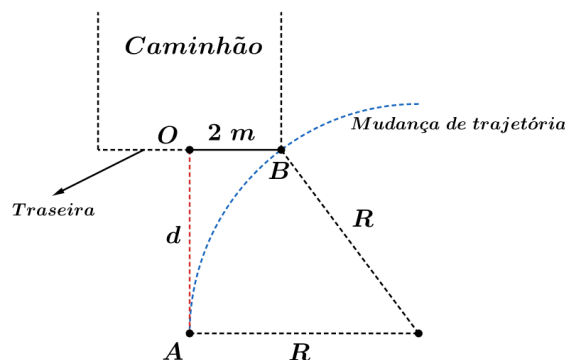
3. (ITA - 1994)

Um motociclista trafega em uma estrada reta e nivelada atrás de um caminhão de 4,00 m de largura, perpendicularmente à carroceria. Ambos estão trafegando a velocidade constante de 72 km/h quando o caminhão se detém instantaneamente, devido a uma colisão. Se o tempo de reação do motociclista for 0,50 s, a que distância mínima ele deverá estar trafegando para evitar o choque apenas com mudança de trajetória? Considere os coeficientes de atrito entre o pneumático e o solo $\mu = 0,80$, aceleração gravitacional $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e que a trajetória original o levaria a colidir-se no meio da carroceria.

- a) 19,6 m b) 79,3 m c) 69,3 m d) 24,0 m e) 14,0 m

Comentários:

Veja a representação do movimento abaixo:



Aplicando a Segunda Lei no motociclista:

$$R_{cent} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = \mu \cdot m \cdot g$$



$$R = \frac{v^2}{\mu \cdot g} = \frac{400}{8} = 50 \text{ m}$$

Seja θ o ângulo coberto pelo arco acima, temos:

$$R - R \cdot \cos \theta = 2 \Rightarrow 1 - \cos \theta = \frac{1}{25} \Rightarrow \cos \theta = \frac{24}{25}$$

Por fim, temos:

$$d = R \cdot \sin \theta = 50 \cdot \frac{7}{25} = 14 \text{ m}$$

Lembrando de somar a distância que ele percorreu antes de reagir ao caminhão:

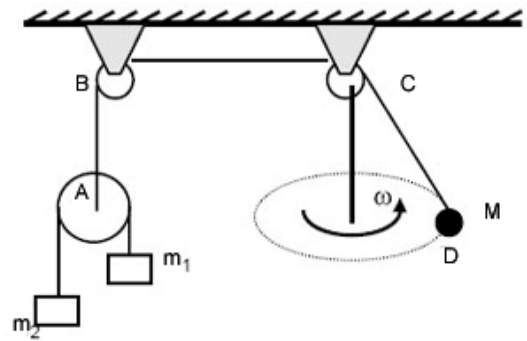
$$d_{pre} = v \cdot t_{reação} = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ m}$$

$$d_{total} = 10 + 14 = 24 \text{ m}$$

Gabarito: D

4. (ITA - 1994)

Um fio tem presa uma massa M em uma das extremidades e na outra, uma polia que suporta duas massas; $m_1 = 3,00 \text{ kg}$ e em $m_2 = 1,00 \text{ kg}$ unidas por um outro fio como mostra a figura. Os fios têm massas desprezíveis e as polias são ideais. Se $\overline{CD} = 0,80 \text{ m}$ e a massa M gira com velocidade angular constante $\omega = 5,00 \text{ rad/s}$ numa trajetória circular em torno do eixo vertical passando por C , observa-se que o trecho ABC do fio permanece imóvel. Considerando a aceleração gravitacional $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, a massa M deverá ser:



- a) 3,00 kg b) 4,00 kg c) 0,75 kg d) 1,50 kg e) 2,50 kg

Comentários:

Aplicando a Segunda Lei ao sistema de massas m_1 e m_2 , temos:

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Substituindo a aceleração na equação de uma das massas:

$$m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow T = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}$$

A Polia A está sobre ação da força $2T$, a qual é transmitida para M já que a corda está estática.

Seja θ o ângulo que o segmento de fio CD faz com a vertical. Aplicando a Segunda Lei à massa M , na horizontal, temos:



$$R_{cent} = 2 \cdot T \cdot \text{sen } \theta$$

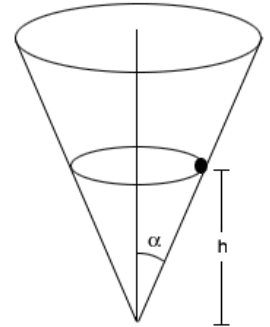
$$M \cdot \omega^2 \cdot (CD \cdot \text{sen } \theta) = 2 \cdot T \cdot \text{sen } \theta$$

$$M = \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot g}{\omega^2 \cdot CD \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 10}{25 \cdot 0,8 \cdot 4} = 1,5 \text{ kg}$$

Gabarito: D

5. (ITA - 1997)

Uma massa pontual se move, sob a influência da gravidade e sem atrito, com velocidade angular em um círculo a uma altura h na superfície interna de um cone que forma um ângulo α com seu eixo central, como mostrado na figura. A altura h da massa em relação ao vértice do cone é:



- a) $\frac{g}{\omega^2}$
- b) $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\text{sen } \alpha}$
- c) $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\text{cotg } \alpha}{\text{sen } \alpha}$
- d) $\frac{g}{\omega^2} \cdot \text{cotg}^2 \alpha$

e) Inexistente, pois a única posição de equilíbrio é $h = 0$.

Comentários:

Aplicando a Segunda Lei na massa:

Horizontal –

$$N \cdot \cos \alpha = R_{cent}$$

Vertical –

$$N \cdot \text{sen } \alpha = m \cdot g$$

Dividindo as equações acima:

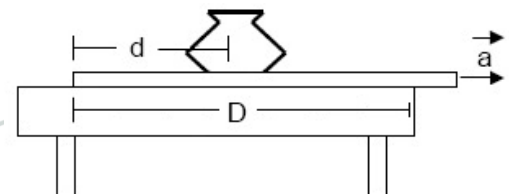
$$R_{cent} = m \cdot g \cdot \text{cotan } \alpha \Rightarrow m \cdot \omega^2 (h \cdot \tan \alpha) = m \cdot g \cdot \text{cotan } \alpha$$

$$h = \frac{g}{\omega^2} \text{cotan } \alpha$$

Gabarito: D

6. (ITA - 1997)

Um antigo vaso chinês está a uma distância d da extremidade de um forro sobre uma mesa. Essa extremidade, por sua vez, se encontra a uma distância D de uma das bordas da mesa, como mostrado na figura. Inicialmente tudo está em repouso. Você apostou que consegue puxar o forro com uma





aceleração constante a (veja figura) de tal forma que o vaso não caia da mesa. Considere que ambos os coeficientes de atrito, estático e cinético, entre o vaso e o forro tenham o valor μ que o vaso pare no momento que toca na mesa. Você ganhará a aposta se a magnitude da aceleração estiver dentro da faixa:

- a) $a < \frac{d}{D} \mu g$ b) $a > \frac{d}{D} \mu g$ c) $a > \mu g$ d) $a > \frac{D}{d} \mu g$ e) $a > \frac{D}{D-d} \mu g$

Comentários:

A condição para que o vaso não caia da mesa é o seu deslocamento escalar ser menor que sua distância até a beira da mesa:

$$\Delta S_{\text{vaso}} < D - d$$

Aplicando a Segunda Lei ao vaso, temos:

$$f_{at} = m \cdot a_{\text{vaso}} \Rightarrow a_{\text{vaso}} = \mu \cdot g$$

O deslocamento do vaso e do forro ocorrem simultaneamente, e suas funções horárias são dadas por:

$$\Delta S_{\text{vaso}} = \frac{\mu \cdot g \cdot t^2}{2}$$

$$\Delta S_{\text{forro}} = D = \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} = \frac{D}{a} \Rightarrow \Delta S_{\text{vaso}} = \frac{\mu \cdot g \cdot D}{a}$$

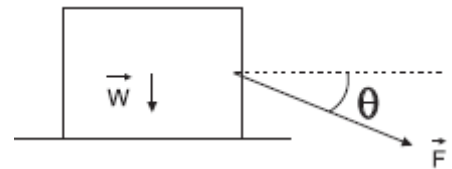
Da condição do problema, temos:

$$\frac{\mu \cdot g \cdot D}{a} < D - d \therefore \boxed{a > \frac{\mu \cdot g \cdot D}{D - d}}$$

Gabarito: E

7. (ITA - 1998)

Um caixote de peso W é puxado sobre um trilho horizontal por uma força de magnitude F que forma um ângulo θ em relação à horizontal, como mostra a figura. Dado que o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o trilho é μ , o valor mínimo de F , a partir de qual seria possível mover o caixote, é:



- a) $\frac{2W}{1-\mu}$ b) $\frac{W \text{sen} \theta}{1-\mu \text{tg} \theta}$ c) $\frac{W \text{sen} \theta}{\mu - \text{tg} \theta}$
 d) $\frac{\mu W \text{sec} \theta}{1-\mu \text{tg} \theta}$ e) $(1 - \mu \text{tg} \theta)W$

Comentários:

Aplicando a Segunda Lei na vertical:

$$N = F \cdot \text{sen} \theta + W \quad (\text{eq. 1})$$



Aplicando a Segunda lei na horizontal:

$$F \cdot \cos \theta - fat = m \cdot a$$

Na iminência de movimento teremos $a \approx 0$:

$$F \cdot \cos \theta = \mu \cdot N$$

$$N = \frac{F}{\mu} \cdot \cos \theta$$

Substituindo a normal em (1), obtemos:

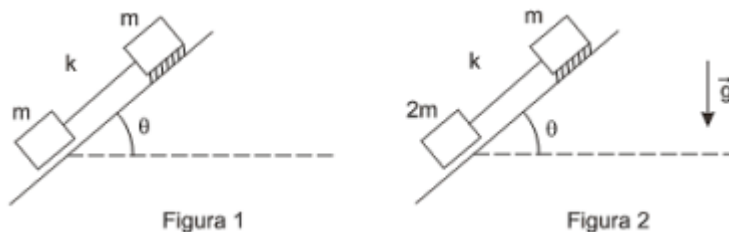
$$\frac{F}{\mu} \cdot \cos \theta = F \cdot \sin \theta + W \Rightarrow F = \frac{\mu \cdot W}{\cos \theta - \mu \cdot \sin \theta}$$

Colocando $\cos \theta$ em evidência:

$$F = \frac{\mu \cdot W}{1 - \mu \cdot \tan \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\mu \cdot W \cdot \sec \theta}{1 - \mu \cdot \tan \theta}$$

Gabarito: D

8. (IME-2012)



A figura 1 mostra dois corpos de massas iguais a m presos por uma haste rígida de massa desprezível, na iminência do movimento sobre um plano inclinado, de ângulo θ com a horizontal. Na figura 2, o corpo inferior é substituído por outro com massa $2m$. Para as duas situações, o coeficiente de atrito estático é μ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu/2$ para a massa superior, e não há atrito para a massa inferior. A aceleração do conjunto ao longo do plano inclinado, na situação da figura 2 é:

- a) $(2g \sin \theta)/3$
- b) $(3g \sin \theta)/2$
- c) $(g \sin \theta)/2$
- d) $g(2 \sin \theta - \cos \theta)$
- e) $g(2 \sin \theta + \cos \theta)$

Comentários:

Considere primeiramente a situação na figura 1. Aplicando a Segunda Lei no sistema composto pelas duas massas:

$$2 \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta = fat_{max} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$\mu = 2 \tan \theta$$

Aplicando a Segunda Lei no sistema, na configuração mostrada na figura 2, obtemos:



$$3 \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \theta - f_{at_{cin}} = 3 \cdot m \cdot a$$

$$3a = 3g \cdot \text{sen } \theta - \left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot g \cdot \text{cos } \theta$$

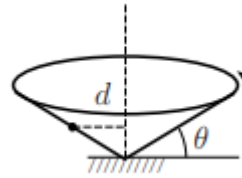
$$a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \text{sen } \theta$$

Gabarito: A

9. (ITA-2012)

Um funil que gira com velocidade angular uniforme em torno do seu eixo vertical de simetria apresenta uma superfície cônica que forma um ângulo θ com a horizontal, conforme a figura. Sobre esta superfície, uma pequena esfera gira com a mesma velocidade angular mantendo-se a uma distância d do eixo de rotação. Nestas condições, o período de rotação do funil é dado por:

- a) $2\pi\sqrt{d/g \cdot \text{sen}\theta}$
- b) $2\pi\sqrt{d/g \cdot \text{cos}\theta}$
- c) $2\pi\sqrt{d/g \cdot \text{tg}\theta}$
- d) $2\pi\sqrt{d/g \cdot \text{sen}2\theta}$
- e) $2\pi\sqrt{d\text{cos}\theta/g\text{tg}\theta}$



Comentários:

Aplicando a Segunda Lei à esfera, temos:

Horizontal –

$$R_{cent} = N \cdot \text{sen } \theta = m \cdot \omega^2 \cdot d \quad (\text{eq. 1})$$

Vertical –

$$N \cdot \text{cos } \theta = m \cdot g \quad (\text{eq. 2})$$

Dividindo (1) por (2), obtemos:

$$\omega^2 \cdot d = \text{tan } \theta \cdot g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \text{tan } \theta}{d}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g \cdot \text{tan } \theta}}$$

Gabarito: C

10. (Fuvest 1989)

Uma tira elástica de borracha está presa no teto de uma sala. Um macaco dependurado na tira sobe em direção ao teto com velocidade praticamente constante. Podemos afirmar que, à medida que o macaco sobe;

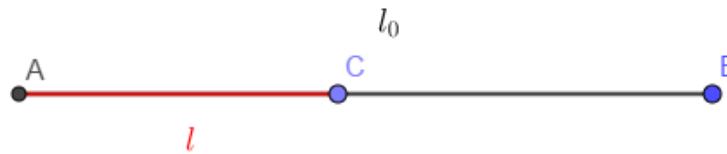


- a) a força que a tira exerce no teto aumenta.
- b) a força que a tira exerce no teto diminui.
- c) a distância da extremidade inferior da tira ao chão aumenta.
- d) a distância da extremidade inferior da tira ao chão diminui.
- e) a distância da extremidade inferior da tira ao chão não se altera.

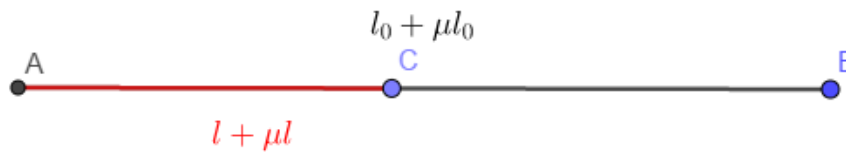


Comentários:

Considere o seguinte elástico partido em duas partes: (é uma partição teórica, o elástico está inteiro)



Seu comprimento natural é l_0 . Ao sofrer uma deformação μl_0 , temos a seguinte configuração: (μ é uma constante arbitrária)



O elástico se expande proporcionalmente. A força em todo o elástico deve ser a mesma, logo:

$$k_{AC} \cdot (\mu \cdot l) = k \cdot (\mu \cdot l_0)$$

$$\frac{k_{AC}}{k} = \frac{l_0}{l}$$

Assim, temos que a constante elástica é inversamente proporcional ao comprimento do elástico. Conforme o macaco sobe, a constante do elástico efetivo que o segura aumenta:

$$k_{ef} \cdot x = m \cdot g$$

Logo, teremos uma distensão menor no elástico e, além disso, uma porção menor dele está sofrendo distensão, nos permitindo afirmar que o tamanho do elástico diminuirá gradativamente: alternativa C.

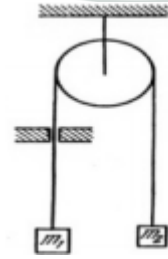
Note que a força que a tira exerce no teto é a mesma que ela exerce no macaco, a qual é constante e igual peso do dele, durante todo o percurso.

Gabarito: C

11.



Uma corda, cujo peso é desprezado, foi colocada numa roldana de eixo fixo e passa através de um orifício. No movimento da corda o orifício atua com uma força de fricção constante F . Nos extremos da corda são colocados pesos, cujas massas são m_1 e m_2 . Determinar a aceleração dos pesos.



Comentários:

Considere a seguinte partição da corda em 3 segmentos. O segmento 3 está dentro do orifício e é ligado a m_1 e m_2 pelos segmentos 1 e 2, respectivamente. Aplicando a Segunda Lei ao segmento 3:

$$T_1 = T_2 + F \quad (m_3 = 0)$$

$$T_2 - T_1 = -F \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa 2, temos:

$$T_1 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot g \quad (eq. 2)$$

Aplicando a Segunda lei à massa 1, temos:

$$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a \quad (eq. 3)$$

Somando (2) a (3), obtemos:

$$(m_1 - m_2) \cdot g + (T_2 - T_1) = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

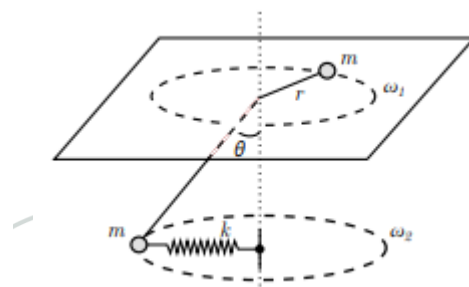
$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g - F}{m_1 + m_2}$$

Gabarito: $a = \frac{(m_1 - m_2)g - F}{m_1 + m_2}$

12. (ITA – 2019)

Considere duas partículas de massa m , cada qual presa numa das pontas de uma corda, de comprimento l e massa desprezível, que atravessa um orifício de uma mesa horizontal lisa. Conforme mostra a figura, a partícula sobre a mesa descreve um movimento circular uniforme de raio r e velocidade angular ω_1 . A partícula suspensa também descreve esse mesmo tipo de movimento, mas com velocidade angular ω_2 , estando presa a uma mola de constante elástica k e comprimento natural desprezível, mantida na horizontal. Sendo g o módulo da aceleração da gravidade e θ o ângulo do trecho suspenso da corda com a vertical, a razão $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2$ é dada por:

- a) $\frac{r(mg + k(l-r)\cos\theta)}{mg(l-r)}$
- b) $\frac{(l-r)(mg + kr\cos\theta)}{mgr\sin\theta}$
- c) $\frac{(l-r)(mg + krtg\theta)}{mgr^2}$
- d) $\frac{k(l-r)\cos\theta}{mg + kr}$





$$e) \frac{(l-r)(k \cos \theta)}{mg + k(l-r) \cos \theta}$$

Comentários:

Aplicando a Segunda Lei à massa sobre a mesa na direção radial:

$$R_{cent} = T = m \cdot \omega_1^2 \cdot r \quad (eq.1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa suspensa:

Horizontal –

$$R_{cent} = k \cdot (l - r) \cdot \sin \theta + T \cdot \sin \theta = m \cdot \omega_2^2 \cdot (l - r) \cdot \sin \theta$$

$$k \cdot (l - r) + T = m \cdot \omega_2^2 \cdot (l - r) \quad (eq.2)$$

Vertical –

$$T \cdot \cos \theta = m \cdot g$$

$$T = \frac{m \cdot g}{\cos \theta} \quad (eq.3)$$

Substituindo (3) em (1) e (2), obtemos:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{r \cdot \cos \theta} \quad (eq.4)$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{(l - r) \cdot \cos \theta} + \frac{k}{m} \quad (eq.5)$$

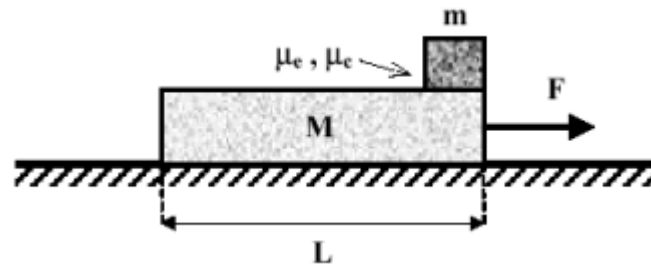
Dividindo (5) por (4), temos:

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{r \cdot (m \cdot g + k \cdot \cos \theta \cdot (l - r))}{m \cdot g \cdot (l - r)}$$

Gabarito: A

13. (OBF 2001)

Na figura a seguir, um bloco de massa M e comprimento L encontra-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Sobre tal bloco, é colocado um outro de massa m , cujo comprimento é muito menor que L , de modo que este possa ser considerado uma partícula material. Sabe-se que existe atrito entre os blocos, com coeficientes estático e cinético respectivamente denotados por μ_e e μ_c . Considere que sobre o bloco de massa M atua uma força constante e horizontal de módulo F . A força horizontal máxima que pode ser aplicada sobre o bloco de massa M de modo que os blocos não deslizem um sobre o outro é denotada por $F_{m\acute{a}x}$.



a) Calcule o módulo da força máxima $F_{m\acute{a}x}$ em função de μ_e , M , m e g .

b) Suponha que $F > F_{m\acute{a}x}$. Para tal situação, calcule o tempo que o bloco de massa m leva para perder contato com o bloco de massa M . Expresse o seu resultado em função de L , M , μ_e , μ_c , F e $F_{m\acute{a}x}$.

Comentários:

a) Na situação onde não há deslizamento a aceleração dos blocos é a mesma. Aplicando a Segunda Lei ao sistema, temos:

$$F = (M + m) \cdot a$$

$$a = \frac{F}{M + m}$$

Aplicando a Segunda Lei ao bloco m , temos:

$$fat = m \cdot a = \frac{m \cdot F}{M + m} \leq fat_{max} = \mu_e \cdot m \cdot g$$

$$F \leq \mu_e \cdot g \cdot (m + M)$$

$$F_{max} = \mu_e \cdot g \cdot (m + M)$$

b) Aplicando a Segunda Lei à massa m , temos:

$$fat_{cin} = m \cdot a_m$$

$$a_m = \mu_c \cdot g$$

Aplicando a Segunda Lei à massa M , temos:

$$F - fat_{cin} = M \cdot a_M$$

$$a_M = \frac{F - \mu_c \cdot m \cdot g}{M}$$

A aceleração de m no referencial de M é dada por:

$$a_{m/M} = a_m - a_M$$

$$a_{m/M} = \mu_c \cdot g - \frac{F - \mu_c \cdot m \cdot g}{M}$$



$$a_{m/M} = - \frac{F - \mu_c(M + m) \cdot g}{M}$$

A quantidade em parênteses é o módulo, o sinal negativo apenas indica que essa aceleração é direcionada para a esquerda. Usando a equação horária de deslocamento para MRUV, obtemos:

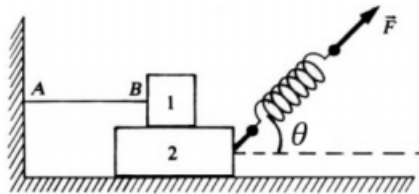
$$L = \frac{\left[\frac{F - \mu_c \cdot (M + m) \cdot g}{M} \right] \cdot t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot M}{F - \left(\frac{\mu_e}{\mu_c}\right) \cdot F_{max}}}$$

Gabarito: a) $F_{max} = (m + M) \cdot \mu_e \cdot g$ b) $t = \left(\frac{2LM}{F - \left(\frac{\mu_e}{\mu_c}\right) \cdot F_{max}} \right)^{\frac{1}{2}}$

14. (Inédita Prof. Toni Burgatto)

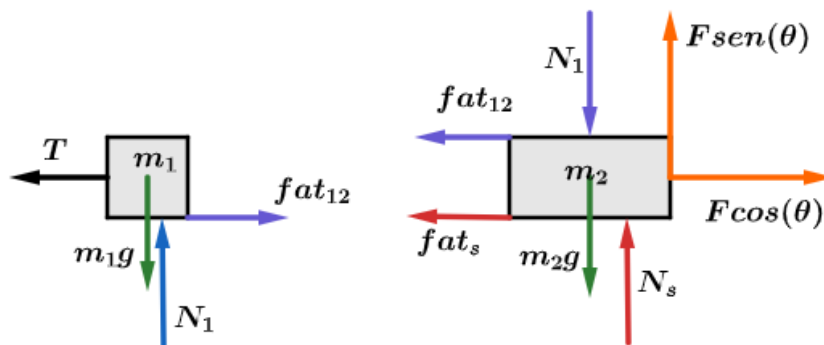
Na figura abaixo temos: um fio ideal AB na horizontal, que liga o corpo 1 de massa m_1 a parede vertical. O corpo 1 repousa sobre um corpo 2. O corpo 2 é puxado por uma força constante F . Sabe-se que o coeficiente de atrito entre 1 e 2, e entre o corpo 2 e o solo horizontal é $\sqrt{3}$. Para que o bloco 2 adquira a maior aceleração possível, o ângulo θ deve ser igual a:



- a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) depende dos valores das massas.

Comentários:

Para os blocos, temos:



Para o bloco 1, temos:

$$T = fat_1$$

$$N_1 = m_1g$$



Para o bloco 2 na vertical, temos:

$$F \text{sen}(\theta) + N_s = N_1 + m_2 g$$

$$N_s = (m_1 + m_2)g - F \text{sen}(\theta)$$

Para o movimento do bloco 2 na horizontal, vem:

$$F \text{cos}(\theta) - f_{at_s} - f_{at_{12}} = m_2 a$$

$$F \text{cos}(\theta) - \mu \cdot N_s - \mu \cdot N_1 = m_2 a$$

$$F \text{cos}(\theta) - \mu[(m_1 + m_2)g - F \text{sen}(\theta)] - \mu \cdot m_1 g = m_2 a$$

$$F(\text{cos}(\theta) + \mu \text{sen}(\theta)) - (2\mu m_1 g + \mu m_2 g) = m_2 a$$

Como F é constante e o termo $2\mu m_1 g + \mu m_2 g$ também é constante, então a aceleração é máxima quando $\text{cos}(\theta) + \mu \text{sen}(\theta)$. Lembrando que $\mu = \sqrt{3}$, vamos determinar quando esse termo é máximo. Portanto:

$$E(\theta) = \text{cos}(\theta) + \sqrt{3} \text{sen}(\theta)$$

$$E(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2} \text{cos}(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(\theta) \right)$$

$$E(\theta) = 2 \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{sen}(30^\circ)} \text{cos}(\theta) + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{cos}(30^\circ)} \text{sen}(\theta) \right)$$

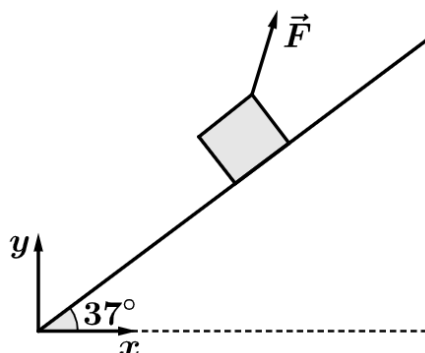
$$E(\theta) = 2(\text{sen}(30^\circ) \text{cos}(\theta) + \text{cos}(30^\circ) \text{sen}(\theta))$$

$$E(\theta) = 2 \text{sen}(\theta + 30^\circ)$$

Essa função possui valor de máximo quando $\theta + 30^\circ = 90^\circ$. Portanto: $\theta = 60^\circ$.

Gabarito: C

15. (Inédita Prof. Toni Burgatto)





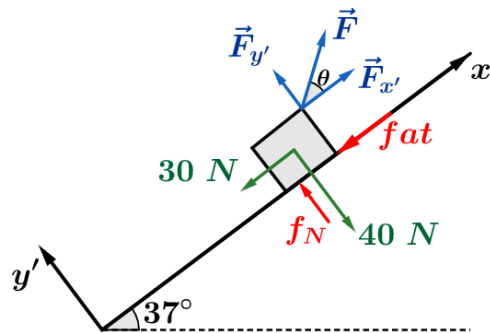
Um bloco de 5 kg está subindo um plano inclinado áspero, de tal forma que a força \vec{F} tem módulo igual a 60 N. A máxima aceleração do bloco, sabendo que ele não perde contato com o plano, é de: Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\text{sen}(37^\circ) = 3/5$ e o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano igual a 0,75.

- a) 1 m/s^2 b) 2 m/s^2 c) 3 m/s^2 d) 4 m/s^2 e) 5 m/s^2

Comentários:

Devemos decompor as forças na direção tangencial e perpendicular ao plano inclinado. Dado o ângulo do plano inclinado, podemos decompor a força peso na direção tangente ($P_{x'} = m \cdot g \cdot \text{sen}(37^\circ)$) e na direção perpendicular ($P_{y'} = m \cdot g \cdot \text{cos}(37^\circ)$).

Como a força de atrito é contrário ao movimento e a força \vec{F} possui uma direção em relação ao plano desconhecida, mas de tal forma que produzirá aceleração máxima, temos:



Na direção y' , temos:

$$40 = f_N + F_{y'}$$

$$40 = f_N + F \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$f_N = 40 - F \cdot \text{sen}(\theta) \text{ (eq. 1)}$$

Na direção x' , vem:

$$F_{x'} - fat - 30 = m \cdot a$$

$$F \cdot \text{cos}(\theta) - \mu_d \cdot f_N - 30 = m \cdot a$$

$$F \cdot \text{cos}(\theta) - \mu_d \cdot (40 - F \cdot \text{sen}(\theta)) - 30 = m \cdot a$$

$$F(\text{cos}(\theta) + \mu_d \cdot \text{sen}(\theta)) - (\mu_d \cdot 40 + 30) = m \cdot a$$

$$60 \cdot (\text{cos}(\theta) + 0,75 \cdot \text{sen}(\theta)) - (0,75 \cdot 40 + 30) = 5 \cdot a$$

$$60 \cdot \left(\text{cos}(\theta) + \frac{3}{4} \text{sen}(\theta) \right) - 60 = 5 \cdot a$$



$$15 \cdot \left(\underbrace{\frac{4}{5}}_{=\text{sen}(\alpha)} \cdot \cos(\theta) + \underbrace{\frac{3}{5}}_{=\text{cos}(\alpha)} \cdot \text{sen}(\theta) \right) - 12 = a$$

$$15 \cdot \left(\underbrace{\text{sen}(\alpha) + \cos(\theta) + \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\theta)}_{=\text{sen}(\alpha+\theta)} \right) - 12 = a$$

$$a = 15 \cdot \underbrace{\text{sen}(\alpha + \theta)}_{\text{máx}=1} - 12$$

Portanto:

$$a_{\text{máx}} = 15 \cdot 1 - 12$$

$$a_{\text{máx}} = 3 \text{ m/s}^2$$

Gabarito: C

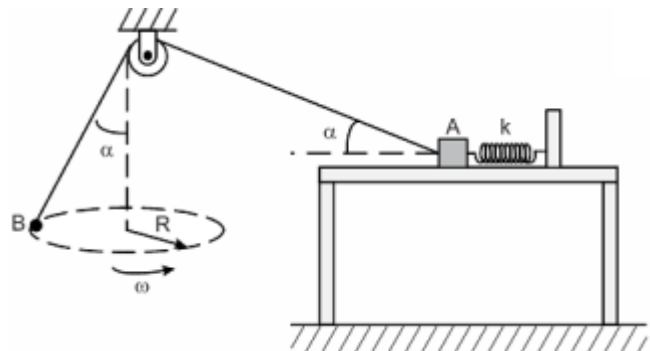
16. (IME 2016)

Uma mola presa ao corpo A está distendida. Um fio passa por uma roldana e tem suas extremidades presas ao corpo A e ao corpo B, que realiza um movimento circular uniforme horizontal com raio R e velocidade angular ω . O corpo A encontra-se sobre uma mesa com coeficiente de atrito estático μ e na iminência do movimento no sentido de reduzir a deformação da mola. Determine o valor da deformação da mola.

Dados:

- massa do corpo A: m_A ; A
- massa do corpo B: m_B ; B
- constante elástica da mola: k;
- aceleração da gravidade: g

Consideração: A massa m_A é suficiente para garantir que o corpo A permaneça no plano horizontal da mesa.



Comentários:

Note que o atrito deve estar direcionado para esquerda, já que o corpo está na iminência de movimento para a direita.

Aplicando a Segunda Lei ao corpo A, temos:

Vertical –

$$N = m_A \cdot g - T \cdot \text{sen} \alpha \quad (\text{eq. 1})$$

Horizontal –



$$T \cdot \cos \alpha = k \cdot x - \mu \cdot N \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$T \cdot \cos \alpha = k \cdot x - \mu \cdot (m_A \cdot g - T \cdot \sin \alpha) \quad (\text{eq. 3})$$

Aplicando a Segunda Lei ao corpo B, temos:

Vertical –

$$T \cdot \sin \alpha = m_B \cdot \omega^2 \cdot R \quad (\text{eq. 4})$$

Horizontal –

$$T \cdot \cos \alpha = m_B \cdot g \quad (\text{eq. 5})$$

Substituindo (4) e (5) em (3), obtemos:

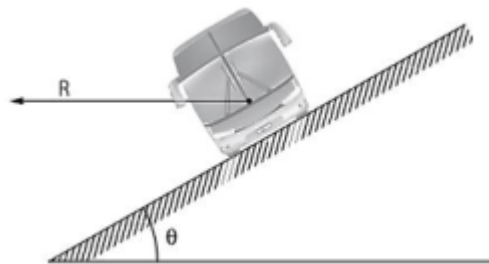
$$m_B \cdot g = k \cdot x - \mu \cdot (m_A \cdot g - m_B \cdot \omega^2 \cdot R)$$

$$x = \frac{\mu \cdot (m_A \cdot g - m_B \cdot \omega^2 \cdot R) + m_B \cdot g}{k}$$

Gabarito: $x = \frac{\mu(m_A g - m_B \omega^2 R) + m_B \cdot g}{k}$

17. (IME 1993)

Considere o veículo de massa M percorrendo uma curva inclinada, de ângulo θ , com raio R constante, a uma velocidade v . Supondo que o coeficiente de atrito dos pneus com o solo seja μ , calcule as velocidades mínima e máxima com que este veículo pode percorrer esta curva, sem deslizamento.



Comentários:

Na situação de máxima velocidade a tendência é escapar para o exterior da curva, assim o atrito estará direcionado para baixo. Aplicando a Segunda Lei ao veículo na vertical:

$$f_{at} \cdot \sin \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$

Na situação limite teremos o atrito máximo:

$$\mu \cdot N \cdot \sin \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$



$$N = \frac{m \cdot g}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta} \quad (\text{eq. 1})$$

Aplicando a Segunda Lei ao veículo na horizontal:

$$R_{cent} = fat \cdot \cos \theta + N \cdot \text{sen } \theta = N \cdot (\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)$$

Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

$$\frac{m \cdot v_{max}^2}{R} = \frac{m \cdot g \cdot (\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot (\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}}$$

Na situação de mínima velocidade a tendência é escapar para o interior da curva, assim o atrito estará direcionado para cima. Aplicando a Segunda Lei ao veículo na vertical:

$$-fat \cdot \text{sen } \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$

Na situação limite teremos o atrito máximo:

$$-\mu \cdot N \cdot \text{sen } \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$

$$N = \frac{m \cdot g}{\cos \theta + \mu \cdot \text{sen } \theta} \quad (\text{eq. 2})$$

Aplicando a Segunda Lei ao veículo na horizontal:

$$R_{cent} = -fat \cdot \cos \theta + N \cdot \text{sen } \theta = N \cdot (\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta)$$

Substituindo (2) na equação acima, obtemos:

$$\frac{m \cdot v_{min}^2}{R} = \frac{m \cdot g \cdot (\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta)}{\cos \theta + \mu \cdot \text{sen } \theta}$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot (\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta)}{\cos \theta + \mu \cdot \text{sen } \theta}}$$

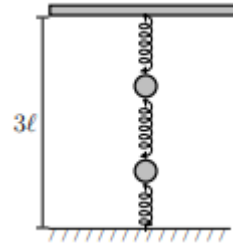
Gabarito: $v_{max} = \sqrt{\frac{Rg(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\text{sen}\theta}}$ e $v_{min} = \sqrt{\frac{Rg(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\text{sen}\theta}}$

18. (ITA – 2018)

Três molas idênticas, de massas desprezíveis e comprimentos naturais ℓ , são dispostas verticalmente entre o solo e o teto a 3ℓ de altura. Conforme a figura, entre tais molas são fixadas duas massas pontuais iguais. Na situação inicial de equilíbrio, retira-se a mola inferior (ligada ao solo) resultando no deslocamento da massa superior de uma distância d_1 para baixo, e da inferior, de uma distância d_2 também para baixo, alcançando-se nova posição de equilíbrio. Assinale a razão d_2/d_1 .



- a) 2
- b) 3/2
- c) 5/3
- d) 4/3
- e) 5/4



Comentários:

Assumiremos uma distensão inicial de x_1 na mola de cima e x_2 na mola de meio. Em decorrência das distensões acima, a mola de baixo está contraída de $x_1 + x_2$. Aplicando a Segunda Lei à massa de cima:

$$k \cdot x_1 - k \cdot x_2 = m \cdot g \quad (eq.1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa de baixo, temos:

$$k \cdot x_2 + k \cdot (x_1 + x_2) = m \cdot g \quad (eq.2)$$

Resolvendo o sistema de equações composto por (1) e (2), obtemos:

$$x_1 = \frac{m \cdot g}{k}$$

$$x_2 = 0$$

Repetiremos o mesmo processo feito acima, agora na ausência da mola de baixo.

Aplicando a Segunda Lei à massa de cima:

$$k \cdot x'_1 - k \cdot x'_2 = m \cdot g \quad (eq.1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa de baixo, temos:

$$k \cdot x'_2 = m \cdot g \quad (eq.2)$$

Resolvendo o sistema de equações composto por (1) e (2), obtemos:

$$x_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k}$$

$$x_2 = \frac{m \cdot g}{k}$$

Lembre-se que a massa de baixo sofre um deslocamento composto pela distensão das duas molas:

$$d_1 = x'_1 - x_1 = \frac{m \cdot g}{k}$$



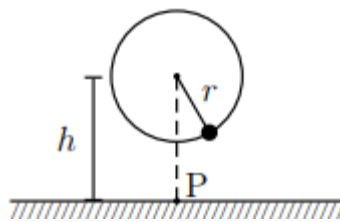
$$d_2 = (x'_2 + x'_1) - (x_2 + x_1) = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k}$$

$$\frac{d_2}{d_1} = 2$$

Gabarito: A

19. (ITA – 2018)

Na figura, presa a um fio de comprimento de 1,0 m, uma massa de 1,0 kg gira com uma certa velocidade angular num plano vertical sob a ação da gravidade, com eixo de rotação a $h = 6,0$ m do piso. Determine a velocidade angular mínima dessa massa para a ruptura do fio que suporta no máximo a tração de 46 N, bem como a distância ao ponto P do ponto em que, nesse caso, a massa tocará o solo.



Comentários:

Seja θ o ângulo que o fio faz com a vertical. Aplicando a Segunda Lei à massa na direção radial:

$$R_{cent} = T - m \cdot g \cdot \cos \theta = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Queremos a velocidade angular mínima capaz de romper o fio:

$$T_{rup} - mg \cdot 1 = m \cdot \omega_{min}^2 \cdot r$$

O fio somente precisa atingir a tensão de ruptura onde a tensão é máxima na trajetória e isso ocorre em $\theta = 0$, quando a massa está o mais próximo do solo.

$$\omega_{min}^2 = \frac{46 - 10}{1 \cdot 1} = 36$$

$$\omega_{min} = 6 \text{ rad/s}$$

O movimento após a ruptura é um lançamento horizontal de velocidade inicial $\omega_{min}r$:

$$h - r = \frac{g \cdot t_{voo}^2}{2}$$

$$t_{voo} = 1 \text{ s}$$

O movimento na horizontal é uniforme, assim:

$$A = (\omega_{min} \cdot r) \cdot t_{voo}$$

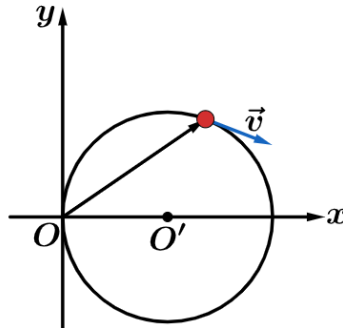
$$A = 6 \text{ m}$$



Gabarito: $\omega = 6 \text{ rad/s}$ e $A = 6 \text{ m}$

20. (Inédita Prof. Toni Burgatto)

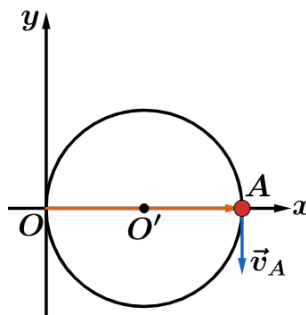
Uma partícula descreve um MCU sobre uma circunferência de raio R . Se o vetor posição gira com uma velocidade angular ω_0 , qual deve ser o módulo da aceleração centrípeta desta partícula?



- a) $\omega_0^2 R$ b) $2\omega_0^2 R$ c) $3\omega_0^2 R$ d) $4\omega_0^2 R$ e) $5\omega_0^2 R$

Comentários:

Quando a partícula está no ponto A, sua velocidade linear é igual a velocidade linear do raio vetor. Portanto:



$$v_t = v_A$$

$$v_t = \omega_0 \cdot (2R)$$

Pela equação do módulo da aceleração centrípeta, temos:

$$a_{cp} = \frac{v_t^2}{R}$$

$$a_{cp} = \frac{(\omega_0 \cdot 2R)^2}{R} \therefore \boxed{a_{cp} = 4\omega_0^2 R}$$

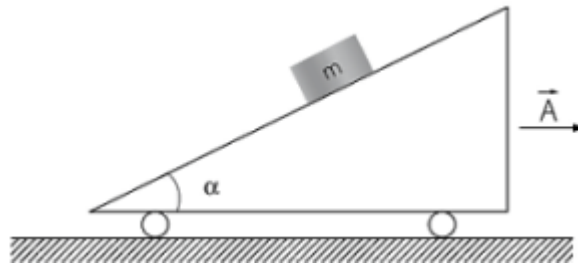
Embora pegamos o ponto A que é bizurado, pois verificamos facilmente que a velocidade do extremo do raio vetor vai ser igual a velocidade tangencial da partícula, o mesmo resultado seria obtido se tivéssemos tomado um ponto qualquer e tivéssemos feito para o caso geral. O bizu é enxergar que basta pegar o ponto A para facilitar as contas.

Gabarito: D

21. (ITA 2003)



Na figura, o carrinho com rampa movimentar-se com aceleração constante \vec{A} . Sobre a rampa, repousa um bloco de massa m . Se μ é o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a rampa, determine o intervalo para o módulo de \vec{A} no qual o bloco permanecerá em repouso sobre a rampa.



Comentários:

Considere a situação no referencial do carrinho, onde haverá uma força de Einstein horizontal com sentido para a esquerda. Na situação de máxima aceleração o bloco estará na iminência de descer o plano, assim o atrito será direcionado para cima na superfície do carrinho.

Aplicando a Segunda Lei ao bloco, temos:

Horizontal –

$$m \cdot A_{max} + N \cdot \sin \theta = fat_{max} \cdot \cos \theta$$

$$m \cdot A_{max} = N \cdot (\mu \cos \theta - \sin \theta) \quad (eq. 1)$$

Vertical –

$$m \cdot g = N \cdot \cos \theta + fat_{max} \cdot \sin \theta$$

$$m \cdot g = N \cdot (\cos \theta + \mu \sin \theta) \quad (eq. 2)$$

Dividindo (1) por (2), obtemos:

$$A_{max} = \frac{g \cdot (\mu \cdot \cos \theta - \sin \theta)}{\cos \theta + \mu \cdot \sin \theta}$$

Note que para acelerações abaixo dessa o carrinho não descerá no plano e, como força de atrito não gera movimento, o carrinho também nunca subirá no plano, assim $a \leq a_{max}$ assegura que o bloco permanecerá em repouso. Como a é um módulo, naturalmente teremos $a \geq 0$, o que exige $\mu \geq \tan \theta$.

Gabarito: $0 \leq A \leq \frac{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \mu > \text{tg} \alpha$

22.

Sobre um plano inclinado que forma um ângulo α com a horizontal, por um fio ideal, um bloco de massa m é arrastado com uma velocidade constante, plano acima. O coeficiente de atrito entre o plano e o bloco vale μ (com $\mu < 1$). Para um certo ângulo β (que o fio forma com o plano inclinado) a tração será mínima. Qual o valor da tração mínima?



a) $\frac{mg(\text{sen}\alpha + \mu\text{cos}\theta)}{\sqrt{1+\mu^2}}$

b) $mg(\text{sen}\alpha + \mu\text{cos}\alpha)$

c) $\frac{mg(\text{cos}\alpha + \mu\text{sen}\theta)}{\sqrt{1+\mu^2}}$

d) $\frac{mg(\text{sen}\alpha + \mu\text{cos}\theta)}{\mu}$

e) $\frac{mg(\text{cos}\alpha + \mu\text{sen}\theta)}{\mu}$

Comentários:

Como o bloco tem velocidade constante, a resultante das forças sobre ele deve ser nula:

Vertical –

$$F \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = m \cdot g - N \cdot \text{cos} \alpha + f_{at_{cin}} \cdot \text{sen} \alpha$$

$$F \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) - m \cdot g = N \cdot (\mu \text{sen} \alpha - \text{cos} \alpha) \quad (eq. 1)$$

Horizontal –

$$F \cdot \text{cos}(\alpha + \beta) = N \cdot \text{sen} \alpha + f_{at_{cin}} \cdot \text{cos} \alpha$$

$$F \cdot \text{cos}(\alpha + \beta) = N \cdot (\text{sen} \alpha + \mu \cdot \text{cos} \alpha) \quad (eq. 2)$$

Dividindo (1) por (2), temos:

$$\frac{F \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) - m \cdot g}{F \cdot \text{cos}(\alpha + \beta)} = \frac{\mu \cdot \text{sen} \alpha - \text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha + \mu \cdot \text{cos} \alpha} = c$$

Em que c é uma constante definida na equação acima.

$$F = \frac{m \cdot g}{\text{sen}(\alpha + \beta) + c \cdot \text{cos}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \frac{m \cdot g}{\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \text{cos}(\alpha + \beta)}$$

Já que $\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq 1$ e $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq 1$ e a soma do quadrado dessas expressões é 1, podemos definir θ tal que:

$$\text{sen} \theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \text{ e } \text{cos} \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

Com as definições acima, F é dada por:

$$F = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \frac{m \cdot g}{\text{sen}(\alpha + \beta + \theta)}$$

Quando o seno for máximo F será mínimo, assim:

$$F_{min} = \frac{m \cdot g}{\sqrt{1+c^2}}$$

Calculando $\sqrt{1+c^2}$, obtemos:



$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mu \cdot \text{sen } \alpha - \text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha + \mu \cdot \text{cos } \alpha}\right)^2} = \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\text{sen } \alpha + \mu \cdot \text{cos } \alpha}$$

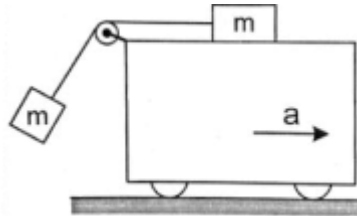
Logo:

$$F_{\min} = \frac{m \cdot g \cdot (\text{sen } \alpha + \mu \cdot \text{cos } \alpha)}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Gabarito: A

23.

Na figura a seguir, dois blocos idênticos de massa m são conectados entre si por meio de um fio ideal que passa por uma polia também ideal fixa ao carrinho. O carrinho acelera para a direita com aceleração de intensidade a . Sabendo-se que o coeficiente de atrito entre o bloco e o carrinho vale $\mu > 1$, determine o maior valor de a para que o bloco não escorregue sobre o carrinho.



Comentários:

Aplicando a Segunda Lei no bloco sobre o carrinho:

$$fat - T = m \cdot a \quad (eq.1)$$

Seja θ o ângulo que o fio faz com a vertical. Aplicando a Segunda Lei ao bloco pendurado:

Horizontal –

$$T \cdot \text{cos } \theta = m \cdot a \quad (eq.2)$$

Vertical –

$$T \cdot \text{sen } \theta = m \cdot g \quad (eq.3)$$

Somando os quadrados de (2) e (3), obtemos:

$$T = m \cdot \sqrt{a^2 + g^2} \quad (eq.4)$$

Substituindo (4) em (1), temos:

$$fat = m \cdot \left(a + \sqrt{a^2 + g^2}\right) \leq fat_{\max} = \mu \cdot m \cdot g$$

$$\sqrt{a^2 + g^2} \leq \mu \cdot g - a$$

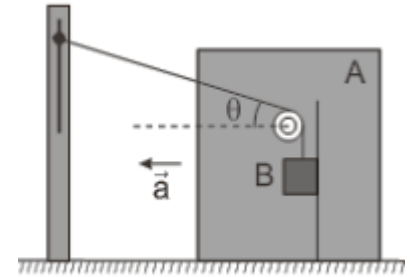


$$a \leq g \cdot \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}$$

Gabarito: $a = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu} \cdot g$

24. (ITA 2012)

A figura mostra um sistema formado por dois blocos, *A* e *B*, cada um com massa *m*. O bloco *A* pode deslocar-se sobre a superfície plana e horizontal onde se encontra. O bloco *B* está conectado a um fio inextensível fixado à parede, e que passa por uma polia ideal com eixo preso ao bloco *A*. Um suporte vertical sem atrito mantém o bloco *B* descendo sempre paralelo a ele, conforme mostra a figura. Sendo μ o coeficiente de atrito cinético entre o bloco *A* e a superfície, *g* a aceleração da gravidade, e $\theta = 30^\circ$ mantido constante, determine a tração no fio após o sistema ser abandonado do repouso.



Comentários:

Seja *N* a normal horizontal entre *A* e *B*. Como o ângulo θ se mantém constante, temos:

$$x = l \cdot \cos\theta$$

Em que *l* é o comprimento da polia à parede e *x* é a distância horizontal. Variando essa equação no tempo, obtemos:

$$a_A = a_{B,y} \cdot \cos\theta$$

Aplicando a Segunda Lei no Bloco *B*, temos:

Vertical –

$$m \cdot g - T = m \cdot a_{B,y}$$

$$a_{B,y} = g - \frac{T}{m} \quad (eq. 2)$$

Horizontal –

$$N = m \cdot a_A \quad (eq. 3)$$

Aplicando a Segunda Lei no Bloco *A*, temos:

Vertical –

$$-T \cdot \sin 30^\circ + T + m \cdot g = N_{solo}$$

$$N_{solo} = m \cdot g + \frac{T}{2}$$

Horizontal –



$$T \cos 30^\circ - N - \mu \cdot N_{\text{solo}} = m \cdot a_A$$

$$\frac{T}{2}(\sqrt{3} - \mu) - N - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a_A \quad (\text{eq.4})$$

Substituindo (3) em (4), obtemos:

$$a_A = \frac{T(\sqrt{3} - \mu)}{4m} - \frac{\mu \cdot g}{2} \quad (\text{eq.5})$$

Substituindo (2) e (5) em (1), temos:

$$\sqrt{3}g - \sqrt{3} \frac{T}{m} = \frac{T(\sqrt{3} - \mu)}{2m} - \mu \cdot g$$

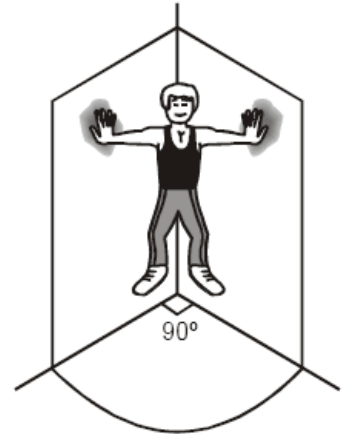
$$T(3\sqrt{3} - \mu) = 2 \cdot m \cdot g(\sqrt{3} + \mu)$$

$$T = \frac{2(\sqrt{3} + \mu)}{3\sqrt{3} - \mu} \cdot m \cdot g$$

Gabarito: $T = \frac{2(\sqrt{3} + \mu)}{3\sqrt{3} - \mu} \cdot mg$

25. (ITA - 2004)

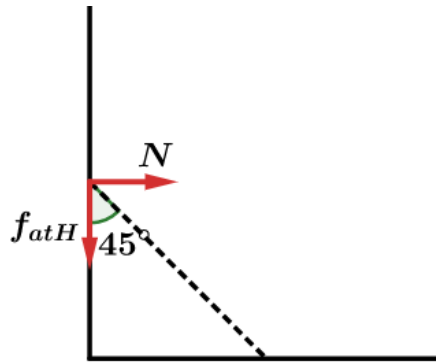
Um atleta mantém-se suspenso em equilíbrio, forçando as mãos contra duas paredes verticais, perpendiculares entre si, dispondo seu corpo simetricamente em relação ao canto e mantendo seus braços horizontalmente alinhados, como mostra a figura. Sendo m a massa do corpo do atleta e μ o coeficiente de atrito estático interveniente, assinale a opção correta que indica o módulo mínimo da força exercida pelo atleta em cada parede.



- a) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}\right)^{1/2}$
- b) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}\right)^{1/2}$
- c) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}\right)$
- d) $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}\right)$
- e) n.d.a.

Comentários:

Além das forças de reação das paredes a única força externa agindo no atleta é o peso, na vertical. Assim a reação da parede na horizontal deve apontar na direção dos braços do atleta, já que qualquer outra configuração renderia uma força resultante na horizontal. A figura abaixo representa uma vista de cima da situação descrita:



Em que N é a normal da parede e fat_H é a força de atrito na horizontal. Pela figura temos que: (lembre-se que a reação horizontal da parede deve ter a direção da linha tracejada)

$$fat_H = N$$

Além disso, pelo equilíbrio do atleta na direção vertical, temos:

$$fat_v = \frac{m \cdot g}{2}$$

Logo:

$$fat^2 = fat_H^2 + fat_v^2 \leq fat_{max}^2 = \mu^2 \cdot N^2 \quad (eq.1)$$

$$\mu^2 \cdot N^2 \geq N^2 + \frac{m^2 \cdot g^2}{4}$$

$$N \geq \frac{m \cdot g}{2} \sqrt{\frac{1}{\mu^2 - 1}} \quad (eq.2)$$

A questão pede a força F exercida pelo atleta na parede, a qual é igual à reação da parede, assim, por (1), temos:

$$F^2 = fat^2 + N^2 = fat_H^2 + fat_v^2 + N^2$$

$$F^2 = 2N^2 + \frac{m^2 \cdot g^2}{4}$$

Substituindo (2) na equação acima, temos:

$$F \leq \frac{m \cdot g}{2} \sqrt{\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}}$$

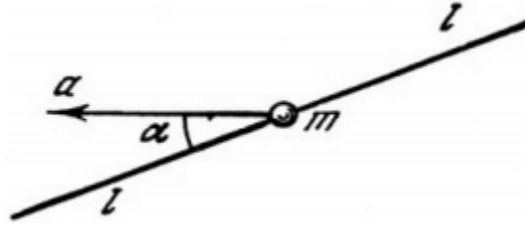
Gabarito: B

26.

Sobre uma barra, de comprimento $2l$, colocada uma conta de massa igual a m . O coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a k . No momento inicial a conta encontrava-se no meio da barra. A barra desloca-se progressivamente em um plano horizontal com aceleração



α em uma direção, que forma um ângulo α com a barra. Determinar a aceleração da conta relativamente à barra, a força de reação por parte da barra sobre a conta e o tempo depois do qual a conta se liberta da barra. Não é necessário considerar a força de gravidade.



Comentários:

Considere a situação no referencial acelerado da barra. Aplicando a Segunda Lei à massa m :

Direção barra –

$$F_{\text{einstein}} \cdot \cos \alpha - fat = m \cdot a_m \quad (\text{eq.1})$$

Perpendicular –

$$m \cdot a \cdot \sin \alpha = N \quad (\text{eq.2})$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$m \cdot a \cdot (\cos \alpha - k \sin \alpha) = m \cdot a_m$$

$$a_m = a \cdot (\cos \alpha - k \sin \alpha)$$

A conta se move com aceleração constante, logo:

$$\Delta S = \frac{a_m \cdot t^2}{2}$$

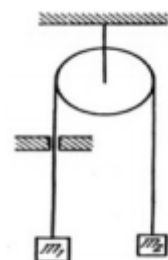
$$l = \frac{a \cdot (\cos \alpha - k \sin \alpha) \cdot T^2}{2}$$

$$T = \sqrt{\frac{2l}{a \cdot (\cos \alpha - k \cdot \sin \alpha)}}$$

Gabarito: $a_1 = a(\cos \alpha - k \cdot \sin \alpha)$, $N = m \cdot a \cdot \sin \alpha$, $T = \sqrt{\frac{2l}{a(\cos \alpha - k \cdot \sin \alpha)}}$

27.

Uma corda, cujo peso é desprezado, foi colocada numa roldana de eixo fixo e passa através de um orifício. No movimento da corda o orifício atua com uma força de fricção constante F . Nos extremos da corda são colocados pesos, cujas massas são m_1 e m_2 . Determinar a aceleração dos pesos.



Comentários:



Considere a seguinte partição da corda em 3 segmentos. O segmento 3 está dentro do orifício e é ligado a m_1 e m_2 pelos segmentos 1 e 2, respectivamente. Aplicando a Segunda Lei ao segmento 3:

$$T_1 = T_2 + F \quad (m_3 = 0)$$

$$T_2 - T_1 = -F \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa 2, temos:

$$T_1 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot g \quad (eq. 2)$$

Aplicando a Segunda lei à massa 1, temos:

$$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a \quad (eq. 3)$$

Somando (2) a (3), obtemos:

$$(m_1 - m_2) \cdot g + (T_2 - T_1) = (m_1 + m_2) \cdot a$$

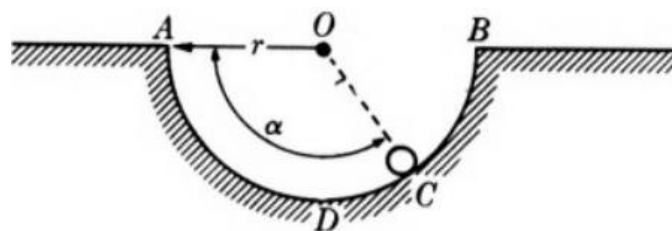
Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g - F}{m_1 + m_2}$$

Gabarito: $a = \frac{(m_1 - m_2)g - F}{m_1 + m_2}$

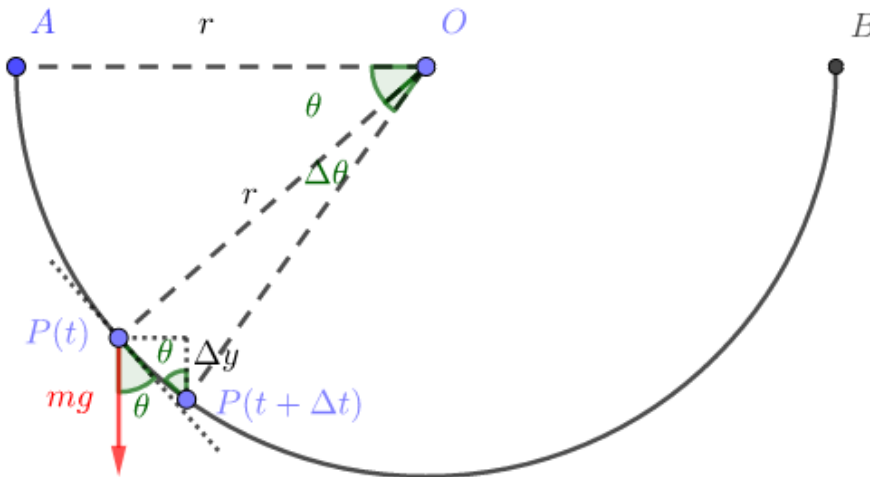
28. (Alonso & Finn)

Uma pequena bola de massa m , inicialmente em A, desliza sobre uma superfície circular ADB sem atrito. Demonstre que, quando a bola está no ponto C, a velocidade angular e a força exercida pela superfície são $\omega = \sqrt{\frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{r}}$ e $F = mg(3 \operatorname{sen} \alpha)$.



Comentários:

Considere o deslocamento da bola após um instante Δt quando esta se encontra em um ponto $P(t)$:



Podemos considerar a aceleração da bola como constante se Δt for pequeno o suficiente. Usando a equação de Torricelli para o deslocamento mostrado na figura:

$$v^2 \cdot (\theta + \Delta\theta) - v^2(\theta) = 2 \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot (r \cdot \Delta\theta)$$

$$v^2 \cdot (\theta + \Delta\theta) - v^2(\theta) = 2 \cdot g \cdot \Delta y \text{ (figura)}$$

Somando a equação acima para todos os ângulos de 0 a α , obtemos:

$$v_C^2 - 0 = 2 \cdot g \cdot (y_A - y_C) = 2 \cdot g \cdot r \cdot \cos(\alpha - 90^\circ)$$

$$v_C = \sqrt{2 \cdot g \cdot r \cdot \text{sen } \alpha}$$

A bola rotacional em torno do ponto O , com velocidade linear mostrada acima, logo:

$$\omega = \frac{v_C}{r} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha}{r}}$$

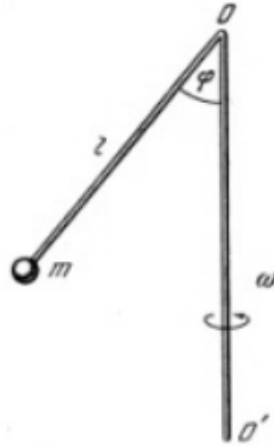
Aplicando a Segunda Lei à massa m no ponto C , na direção radial, temos:

$$R_{cent} = F - m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha = \frac{m \cdot v_C^2}{r} \therefore F = 3 \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$$

Gabarito: $\omega = \sqrt{\frac{2g \text{sen } \alpha}{r}}$ e $F = mg(3 \text{sen } \alpha)$

29. (Saraeva)

Uma barra de peso desprezível, dobrada como mostra a figura abaixo, gira com velocidade angular ω relativamente ao eixo OO' . No extremo da barra fixou-se um peso de massa m . Determinar a força, com que a barra atua sobre a massa m .



Comentários:

A diferença da barra para uma corda é que a barra também exerce uma força perpendicular ao seu comprimento em m , a qual chamaremos de N (direcionada para baixo). Aplicando a Segunda Lei na massa m , temos:

Vertical –

$$N \cdot \sin \varphi + m \cdot g = T \cdot \cos \varphi$$

$$T \cdot \cos \varphi - N \cdot \sin \varphi = m \cdot g \quad (eq. 1)$$

Horizontal –

$$R_{cent} = N \cdot \cos \varphi + T \cdot \sin \varphi = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \quad (eq. 2)$$

Somando os quadrados de (1) e (2), obtemos:

$$N^2 + T^2 = m^2 \cdot (g^2 + \omega^4 \cdot l^2 \cdot \sin^2 \varphi)$$

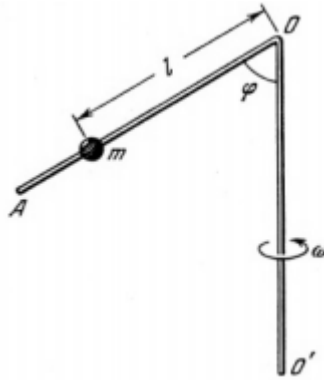
A força exercida na conta, pela barra, é o módulo da soma vetorial das componentes na direção da barra e na direção perpendicular:

$$R^2 = N^2 + T^2 \therefore R = m \cdot \sqrt{g^2 + \omega^4 \cdot l^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Gabarito: $m \sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2 \varphi}$

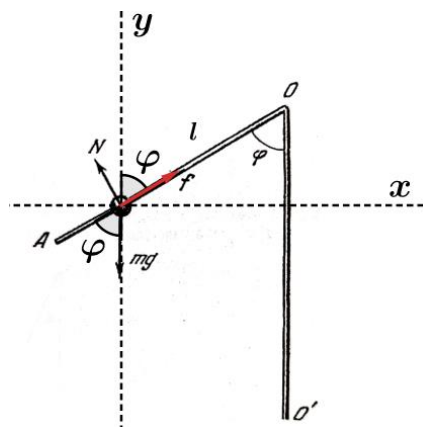
30. (Saraeva)

Uma barra de peso desprezível AOO' , dobrada como mostra a figura abaixo, gira com velocidade angular ω relativamente ao eixo OO' . Na barra foi colocada uma conta de massa m . Determinar a que distância A do ponto O , a conta ficará em equilíbrio, se o coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a k .



Comentários:

De acordo com o diagrama de forças, temos:



Decompondo das forças na direção y , temos:

$$f \cdot \cos \varphi + N \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = m \cdot g$$

$$f \cdot \cos \varphi + N \cdot \sin \varphi = m \cdot g \text{ (eq. 1)}$$

Na direção x , temos:

$$f \cdot \sin \varphi - N \cdot \sin(90^\circ - \varphi) = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$f \cdot \sin \varphi - N \cdot \cos \varphi = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \text{ (eq. 2)}$$

Para determinar f basta fazer $\cos \varphi \cdot$ (eq. 1) + $\sin \varphi \cdot$ (eq. 2):

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot f \cdot \cos \varphi + N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ f \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi - N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \cdot \cos^2 \varphi + N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ f \cdot \sin^2 \varphi - N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi \end{cases}$$

$$f \cdot \cos^2 \varphi + f \cdot \sin^2 \varphi = m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi$$

$$f \cdot \left(\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_{=1} \right) = m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi$$



$$f = m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen}^2 \varphi$$

Agora, fazendo $\text{sen } \varphi \cdot (\text{eq. 1}) - \cos \varphi \cdot (\text{eq. 2})$, temos:

$$\begin{cases} f \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } \varphi + N \cdot \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \varphi = m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi \\ f \cdot \text{sen } \varphi \cdot (-\cos \varphi) - N \cdot \cos \varphi \cdot (-\cos \varphi) = m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen } \varphi \cdot (-\cos \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen } \varphi + N \cdot \text{sen}^2 \varphi = m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi \\ f \cdot \text{sen } \varphi \cdot (-\cos \varphi) + N \cdot \cos^2 \varphi = -m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

$$N \left(\underbrace{\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi}_{=1} \right) = m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi - m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$N = m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi - m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi$$

Para o caso de equilíbrio, devemos ter que:

$$f \leq k \cdot N$$

$$m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen}^2 \varphi \leq k \cdot (m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi - m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi)$$

$$m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen}^2 \varphi \leq k \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi - k \cdot m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen}^2 \varphi + k \cdot m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi \leq k \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi - m \cdot g \cdot \cos \varphi$$

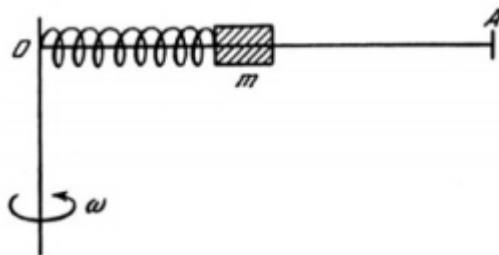
$$l \leq \frac{k \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \varphi - m \cdot g \cdot \cos \varphi}{m \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi + k \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \text{sen } \varphi \cdot \cos \varphi}$$

$$l \leq \frac{g \cdot (k \cdot \text{sen } \varphi - \cos \varphi)}{\omega^2 \cdot \text{sen } \varphi (\text{sen } \varphi + k \cdot \cos \varphi)}$$

Gabarito: $l \leq \frac{g \cdot (k \cdot \text{sen } \varphi - \cos \varphi)}{\omega^2 \cdot \text{sen } \varphi (\text{sen } \varphi + k \cdot \cos \varphi)}$

31. (Saraeva)

Uma barra horizontal reta gira com velocidade angular constante em redor de um eixo vertical. Um corpo pode deslizar pela barra sem fricção. Inicialmente, o corpo é mantido na posição de equilíbrio, através de uma mola. O que ocorrerá com o corpo, se transmitirmos ao mesmo, uma velocidade inicial em redor da barra? O comprimento da mola solta pode ser desprezado.



Comentários:



Aplicando a Segunda Lei a m na situação de equilíbrio:

$$R_{cent} = k \cdot l = m \cdot \omega^2 \cdot l$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Em que l é a distância de equilíbrio de O a m . Considere a situação em que imprimimos velocidade a m no referencial da barra. Aplicando a Segunda Lei na direção radial:

$$F_{centrifuga} - k \cdot x = m \cdot a$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot x - k \cdot x = m \cdot a$$

Em equilíbrio, $a = 0$:

$$(m \cdot \omega^2 - k) \cdot x = 0$$

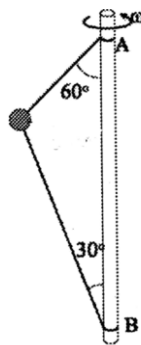
Em que x é a distância de m a O em um momento arbitrário após o impulso.

Logo, vemos que a partícula mantém seu movimento com velocidade constante durante toda sua trajetória até o ponto A (lembre-se que estamos no referencial da barra), desde que possamos assegurar a validade da Lei de $F_{el} = k \cdot x$ (para deformações muito grandes a Lei de Hooke se torna imprecisa).

Gabarito: A partícula mantém seu movimento com velocidade constante durante toda sua trajetória até o ponto A (lembre-se que estamos no referencial da barra), desde que possamos assegurar a validade da Lei de $F_{el} = kx$ (para deformações muito grandes a Lei de Hooke se torna imprecisa).

32. (Moyses)

No sistema da figura, a bolinha de massa m , está amarrada por fios de massa desprezível ao eixo vertical AB e gira com velocidade angular ω em torno do seu eixo. A distância AB é igual a L . Calcule as tensões nos fios superior e inferior. Para que valor de ω o fio inferior ficaria frouxo?



Comentários:

Seja T_A e T_B as tensões nos fios ligados às extremidades A e B, respectivamente. Aplicando a Segunda Lei na bolinha, temos:

Vertical –

$$T_A \cdot \cos 60^\circ = T_B \cdot \cos 30^\circ + m \cdot g$$



$$T_A - \sqrt{3}T_B = 2 \cdot m \cdot g \quad (eq.1)$$

Horizontal –

$$R_{cent} = T_A \cdot \text{sen } 60^\circ + T_B \cdot \text{sen } 30^\circ = m \cdot \omega^2 \cdot h \quad (eq.2)$$

Em que h é a altura do triângulo mostrado na figura.

Note que o triângulo da figura é retângulo no vértice da massa. Usando relações trigonométricas, encontramos:

$$h = L \cdot \cos 30^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \quad (eq.3)$$

Substituindo (3) em (2), temos:

$$\sqrt{3}T_A + T_B = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot L\sqrt{3}}{2} \quad (eq.4)$$

Resolvendo o sistema de equações composto por (1) e (4), obtemos:

$$T_A = \frac{m \cdot g}{2} + \frac{3}{8}m \cdot \omega^2 \cdot L$$

$$T_B = \frac{\sqrt{3}}{8}m \cdot \omega^2 \cdot L - \frac{\sqrt{3}}{2}m \cdot g$$

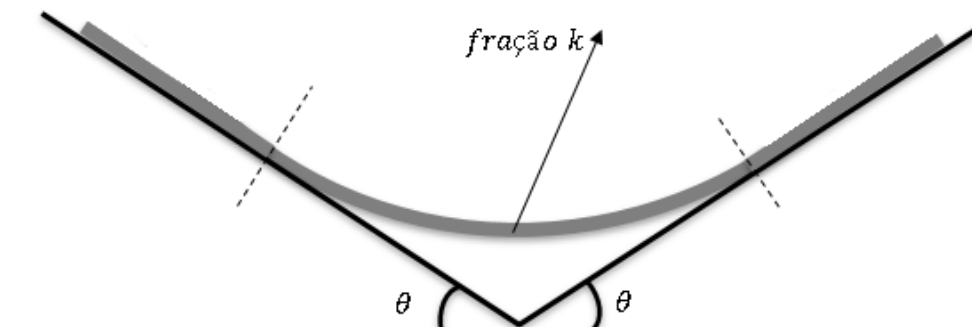
Na configuração onde o fio de baixo está frouxo, devemos ter:

$$T_B = 0 \Rightarrow \omega^* = 2\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Gabarito: $T_A = \frac{mg}{2} + \frac{3}{8}m\omega^2L$, $T_B = \frac{\sqrt{3}}{8}m\omega^2L - \frac{\sqrt{3}}{2}mg$, $\omega^* = 2\sqrt{\frac{g}{L}}$

33. (Simulado ITA)

Uma corda está em repouso sobre dois planos inclinados de um mesmo ângulo θ . A corda é homogênea e seu coeficiente de atrito com a superfície dos planos vale 1. A corda é simetricamente disposta sobre os planos, de tal maneira que há mesma quantidade de massa sobre os planos direito e esquerdo. Uma parte da corda não toca os planos inclinados. Essa parte que não toca os planos é uma fração k do comprimento total L da corda. Qual é o intervalo de valores de k para quais o problema tem solução?



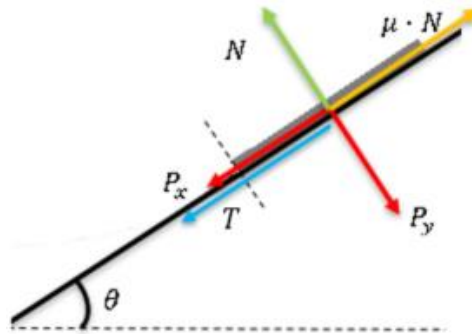


Comentários:

A parte da corda que está com cada plana inclinado é dada por:

$$f = \frac{1 - k}{2}$$

Podemos fazer o equilíbrio de forças sobre a porção que está no plano inclinado.



$$P_x + T = \mu \cdot N = \mu \cdot P_y$$

$$T = \left(\frac{1 - k}{2} \cdot M \right) \cdot g \cdot (\cos\theta - \text{sen}\theta) \quad (I)$$

Sobre a parte suspensa da corda podemos fazer o equilíbrio vertical

$$2 \cdot T \cdot \text{sen}\theta = k \cdot M \cdot g \quad (II)$$

Das equações (1) e (2), vem:

$$\frac{1 - k}{2} \cdot M \cdot g \cdot (\cos\theta - \text{sen}\theta) = \frac{k \cdot M \cdot g}{2 \cdot \text{sen}\theta}$$

$$k = \frac{\text{sen}2\theta - 2\text{sen}^2\theta}{\text{sen}2\theta + 2\cos^2\theta}$$

$$k = \frac{\text{sen}2\theta + \cos2\theta - 1}{\text{sen}2\theta + \cos2\theta + 1} \Rightarrow k = \frac{\text{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\text{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Como a função seno está pertence ao intervalo $[-1,1]$:

$$-1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + k}{1 - k} \leq 1$$

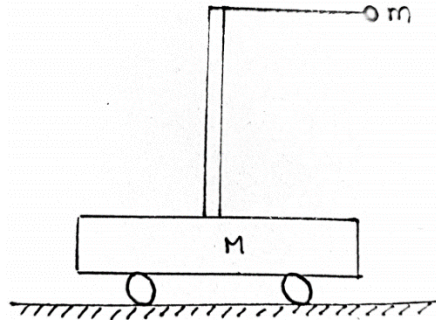
$$\boxed{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \leq k \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$$

Gabarito: $\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \leq k \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$

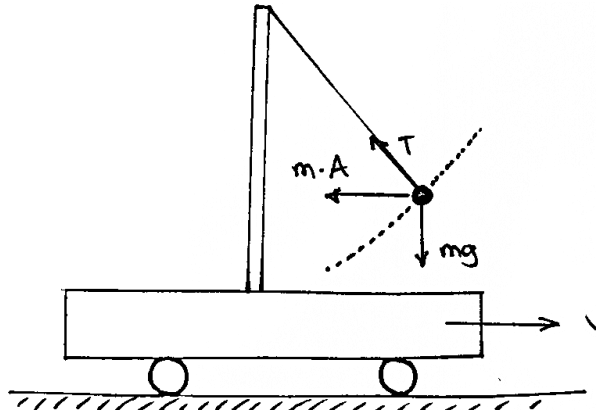


34. (Simulado ITA)

Um bloco de massa M está livre para se deslocar sobre um plano horizontal sem atrito. Sobre o carrinho está presa uma haste de massa desprezível de comprimento l , que tem em sua extremidade uma corda. No extremo da corda há uma massa m . No instante inicial a corda está na posição horizontal em repouso. Determine a tração no fio quando ele estiver fazendo um ângulo α com a vertical. Despreze quaisquer atritos.



Comentários:



No referencial não inercial do carrinho, temos:

$$T \cdot \text{sen} \alpha = M \cdot A \quad (I)$$

No dado referencial, a massa realiza um movimento circular de raio l . A resultante centrípeta é dada por:

$$\frac{mv^2}{l} = T - m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha + m \cdot A \cdot \text{sen} \alpha \quad (II)$$

De (I) com (II), temos:

$$\frac{m \cdot v^2}{l} = T - m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha + m \cdot \frac{(T \cdot \text{sen} \alpha)}{M} \cdot \text{sen} \alpha$$

$$T = \frac{m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha + \frac{m \cdot v^2}{l}}{1 + \frac{m}{M} \cdot \text{sen}^2 \alpha} \quad (III)$$

Há conservação do momento linear na direção horizontal do sistema (velocidades relativas):



$$m \cdot (v \cdot \cos \alpha - V) = M \cdot V \quad (IV)$$

Há conservação da energia mecânica do sistema:

$$m \cdot g \cdot l \cdot \cos \alpha = \frac{MV^2}{2} + \frac{m}{2} [(v \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2 + (v \cdot \cos \alpha - V)^2] \quad (V)$$

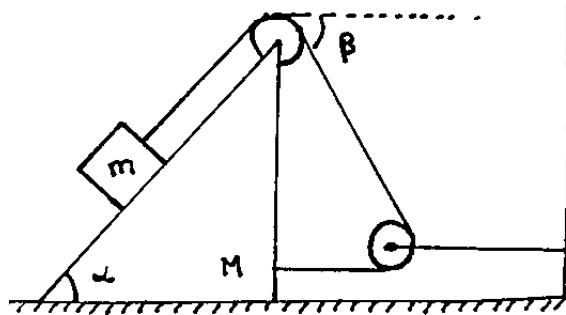
Realizando as manipulações algébricas convenientes:

$$T = m \cdot g \cdot \cos \alpha \left(\frac{2 + \frac{m}{M} (3 - \cos^2 \alpha)}{\left(1 + \frac{m}{M} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^2} \right)$$

Gabarito: $T = m \cdot g \cdot \cos \alpha \left(\frac{2 + \frac{m}{M} (3 - \cos^2 \alpha)}{\left(1 + \frac{m}{M} \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^2} \right)$

35. (Simulado IME)

O sistema a seguir é abandonado da posição mostrada na figura abaixo. Qual será a aceleração inicial da cunha?



Dados:

A massa do bloco vale m .

A massa da cunha vale M .

Todas as polias e cabos são ideais.

Todas as superfícies são lisas.

A) $A = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{m \operatorname{sen}^2 \alpha + m(1 + \cos \beta)}$

B) $A = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \beta)}{M + m \cos \alpha}$

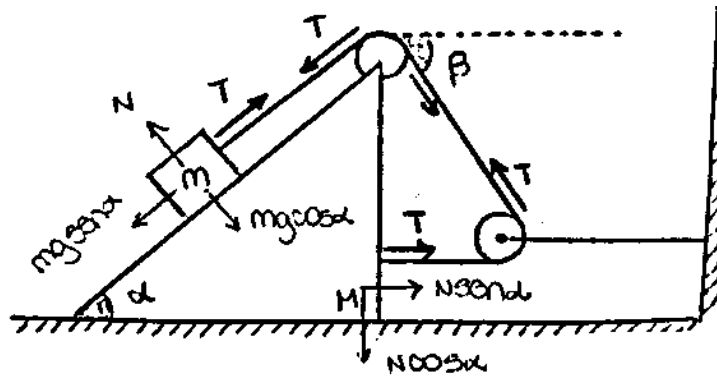
C) $A = \frac{mg(1 + \cos \beta)}{M(1 + \cos \beta - \cos \alpha)}$

D) $A = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \beta)}{m(1 + \cos \beta - \cos \alpha)}$

E) $A = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \beta)}{M + m \operatorname{sen}^2 \alpha + m(1 + \cos \beta - \cos \alpha)}$

Comentários:

Considerando o diagrama de forças a seguir temos:



Para o bloco:

$$mg \cdot \text{sen} \alpha - T = m \cdot a \quad (I)$$

$$mg \cos \alpha - N = m \cdot b \quad (II)$$

Em que:

- a – aceleração do bloco na direção tangencial a cunha
- b – aceleração do bloco na direção normal a cunha

Para a cunha:

$$T(1 + \cos \beta - \cos \alpha) + N \cdot \text{sen} \alpha = M \cdot A \quad (III)$$

Em que:

- A – aceleração da cunha

Como todas as forças são internas ao sistema, podemos dizer que a somatória de todos os trabalhos envolvidos por uma mesma força é nula. Para a cunha e o bloco, as forças são pares ação e reação e, portanto, os deslocamentos se cancelam:

1) Força Normal “ N ”

$$-b \cdot + A \text{sen} \alpha = 0 \quad (IV)$$

2) Força Tração “ T ”

$$-a + A(1 + \cos \beta - \cos \alpha) = 0 \quad (V)$$

Resolvendo o conjunto acima de equações temos:

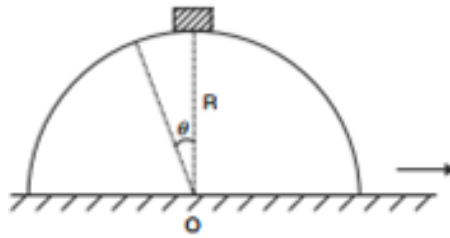
$$A = \frac{mg \text{sen} \alpha (1 + \cos \beta)}{M + m \text{sen}^2 \alpha + m(1 + \cos \beta - \cos \alpha)}$$

Gabarito: E



36. (Sprint ITA/IME)

Um pequeno bloco é colocado no topo de uma superfície lisa de um hemisférico de raio R .

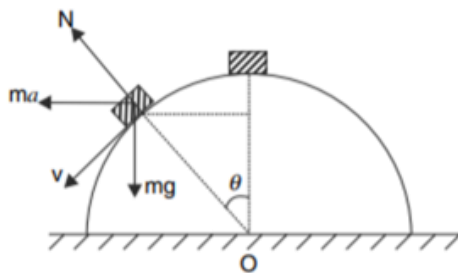


Ao hemisférico é dada uma aceleração constante a horizontal. O máximo valor de a para que o bloco não perca contato com o hemisférico, quando ele tem uma variação angular θ é bem pequena em relação ao hemisférico, é de:

- a) $\frac{g}{5\theta}$ b) $\frac{g}{4\theta}$ c) $\frac{g}{3\theta}$ d) $\frac{g}{2\theta}$ e) $\frac{g}{6\theta}$

Comentários:

Tomando o referencial acelerado do hemisférico, temos o seguinte diagrama de forças:



Pela conservação de energia, temos:

$$\frac{1}{2}mV^2 = maR\text{sen}(\theta) + mgR(1 - \cos(\theta))$$

Como θ é pequeno, então $\text{sen}(\theta) = \theta$ e $\cos(\theta) = 1$. Logo:

$$\frac{mV^2}{R} = 2ma\theta \text{ (eq. 1)}$$

Pela análise da dinâmica no momento de perda de contato, temos:

$$\frac{mV^2}{R} = mg\cos(\theta) - masen(\theta) - N$$

$$\frac{mV^2}{R} = mg - ma\theta - N$$

$$N = mg - ma\theta - 2ma\theta$$

$$N = mg - 3ma\theta$$

Como $N \geq 0$, temos:



$$mg \geq 3ma\theta$$

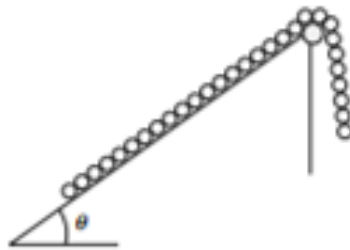
$$a \leq \frac{g}{3\theta}$$

$$a_{\text{máx}} = \frac{g}{3\theta}$$

Gabarito: C

37. (Sprint ITA/IME)

Uma corrente uniforme de massa m_0 e comprimento L repousa sobre um plano inclinado rugoso com parte na vertical. A corrente começa a deslizar para cima do plano inclinado, com a parte pendurada correspondendo a η parte do comprimento da corrente. Desconsiderando a dimensão da polia e assumindo o movimento pela polia ser suave, o trabalho da força de atrito até que a corrente saia completamente do plano inclinado é de:



a) $-\frac{l(1+\eta)[\eta-(1-\eta)\cos(\theta)]m_0g}{2}$

b) $-\frac{l(1-\eta)[\eta+(1-\eta)\sin(\theta)]m_0g}{2}$

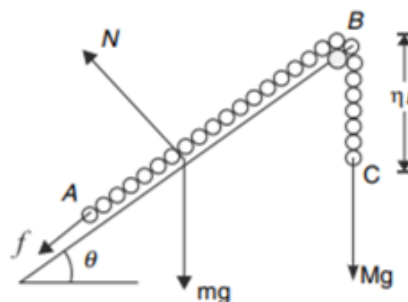
c) $-\frac{l(1-\eta)[\eta-(1-\eta)\sin(\theta)]m_0g}{2}$

d) $-\frac{l(1+\eta)[\eta-(1+\eta)\cos(\theta)]m_0g}{2}$

e) $-\frac{l(1-\eta)[\eta+(1-\eta)\tan(\theta)]m_0g}{2}$

Comentários:

Esquemáticamente:



A parte suspensa BC tem comprimento dado por:

$$BC = \eta l$$

Assim, a parte que ainda está no plano tem comprimento:

$$AB = (1 - \eta)l$$

Se a massa é uniforme, então:



$$M_{BC} = \eta l \cdot \frac{m_0}{l} = \eta m_0$$

$$M_{AB} = (1 - \eta)l \cdot \frac{m_0}{l} = (1 - \eta)m_0$$

Se a corrente estiver na iminência de se mover, temos:

$$f = \mu N$$

$$f = \mu \cdot M_{AB} g \cos(\theta)$$

$$f = \mu \cdot (1 - \eta)m_0 g \cos(\theta)$$

Quando a corrente começa a deslizar bem vagarosamente, então:

$$M_{BC} g = M_{AB} g \sin(\theta) + f$$

$$\eta m_0 g = (1 - \eta)m_0 g \sin(\theta) + \mu(1 - \eta)m_0 g \cos(\theta)$$

$$\mu = \frac{\eta - (1 - \eta)\sin(\theta)}{(1 - \eta)\cos(\theta)}$$

Quando a corrente começa a se mover, então a normal começa a mudar. Considerando a situação em que $BC = x$ e $AB = l - x$, então:

$$M_{AB} = \frac{(l - x)}{l} m_0$$

Assim:

$$f = \mu N$$

$$f = \mu \left(\frac{l - x}{l} \right) m_0 g \cos(\theta)$$

Assim, quando a corrente mover de dx , então:

$$d\tau_{fat} = -f dx$$

$$d\tau_{fat} = -\frac{\mu(l - x)}{l} m_0 g \cos(\theta) dx$$

$$\tau_{fat} = -\frac{\mu m_0 g \cos(\theta)}{l} \int_{\eta l}^l (l - x) dx$$

$$\tau_{fat} = -\frac{\mu m_0 g \cos(\theta)}{l} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)_{\eta l}^l$$

$$\tau_{fat} = -\frac{\mu m_0 g \cos(\theta)}{l} \cdot \frac{l^2}{2} (1 - \eta)^2$$

Substituindo o μ , temos:



$$\tau_{fat} = - \frac{\frac{\eta - (1 - \eta)\text{sen}(\theta)}{(1 - \eta)\text{cos}(\theta)} m_0 g \text{cos}(\theta)}{l} \cdot \frac{l^2}{2} (1 - \eta)^2$$

$$\tau_{fat} = - \frac{l(1 - \eta)[\eta - (1 - \eta)\text{sen}(\theta)]m_0 g}{2}$$

Gabarito: C

12. Referências Bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 1. ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishhev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.
- [4] Departamento de Física do ITA. Algarismos significativos. Disponível em: <<http://www.fis.ita.br/labfis45/erros/errostextos/erros1.htm>>
- [5] IM-UFRJ. Aula 8 Produto Escalar. Disponível em <<http://www.im.ufrj.br/nuno/aula8.pdf>>
- [6] Camargo, Ivan de. Boulos, Paulo. Geometria analítica: Um tratamento vetorial. 3. Ed. Person Education, 2004, 560p.

13. Considerações Finais

Chegamos ao final da nossa aula. Encerramos aqui todo o conteúdo da dinâmica. Vamos começar a estudar outras frentes da física como eletricidade, termometria, óptica e ondas. Claro que ainda faltam assuntos da mecânica que serão retomados futuramente.

Ainda veremos questões clássicas de loop, por exemplo, onde teremos análise da dinâmica com energia mecânica, mas serão trabalhadas nas aulas de energia mecânica e de dinâmica impulsiva (impulso e quantidade de movimento).

Tudo para você ter a melhor preparação, pensando na sua orientação pedagógica e aprendizado.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto