Estudo Analítico da Circunferência

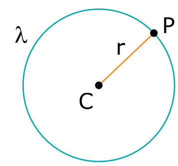
INTRODUÇÃO

Uma circunferência λ é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a um ponto fixo **C** é uma constante positiva **r**.

C: Centro da circunferência;

r: Raio da circunferência.

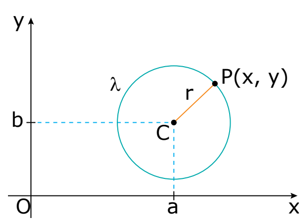
Em símbolos: $P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$



EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos uma circunferência λ de centro C(a, b) e raio **r**.

Obter uma equação da circunferência λ é encontrar uma relação entre as coordenadas **x** e **y** dos pontos do plano que pertencem a λ.



Seja P(x, y) um ponto genérico da circunferência. Temos:

$P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$

$P \in \lambda \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$

$P \in \lambda \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Esta última igualdade é chamada de equação reduzida da circunferência de centro (a, b) e raio **r**.

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Exemplos:

1º) Dar a equação reduzida da circunferência de centro **C** e raio **r** nos seguintes casos:

A) C(1, 2) e r = 4
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

B) C(−1, 2) e r = 5
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

C) C(0, −3) e $r = \sqrt{3}$
$x^2 + (y + 3)^2 = 3$

D) C(0, 0) e r = 1
$x^2 + y^2 = 1$

2º) Dar o centro **C** e o raio **r** da circunferência nos seguintes casos:

A) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$
C(3, 4) e r = 10

B) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$
C(−3, 1) e r = 4

C) $(x + 4)^2 + y^2 = 9$
C(−4, 0) e r = 3

D) $x^2 + y^2 = 7$
C(0, 0) e $r = \sqrt{7}$

OBSERVAÇÃO

Considerando-se a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, temos:

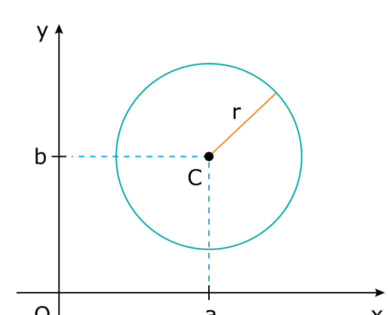
i) Se $k > 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa uma circunferência de centro C = (a, b) e raio $= \sqrt{k}$.

ii) Se $k = 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o ponto P = (a, b), pois $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \Rightarrow x - a = 0$ e $y - b = 0$.

iii) Se $k < 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o conjunto vazio, pois a soma dos quadrados de dois números reais não pode ser negativa.

EQUAÇÃO NORMAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Seja a circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.



Sua equação reduzida é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Desenvolvendo-se a equação reduzida, temos:

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

Logo, obtemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Essa é a equação normal da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.

Se uma circunferência é dada pela sua equação normal, pode-se determinar seu centro e raio por comparação ou completando-se a soma dos quadrados para obtermos a equação reduzida, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo:

Obter o centro e o raio da circunferência:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

Reagrupando:

$x^2 - 2x + ... + y^2 + 4y + ... = 11$

$(x^2 - 2x + ...) + (y^2 + 4y + ...) = 11$

Adicionando 1 e 4 aos dois lados da equação para que a 1ª e a 2ª parcelas sejam quadrados perfeitos, temos:

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 11 + 1 + 4$

Fatorando:

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Essa é a equação reduzida da circunferência.

Portanto, a circunferência tem centro C(1, –2) e raio 4.

OBSERVAÇÃO

Na equação normal da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**, tem-se:

i) Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais a 1.

ii) Os coeficientes de **x** e de **y** são, respectivamente, o dobro com os sinais trocados, das coordenadas **a** e **b** do centro.

iii) Não existe termo da forma kxy, $k \neq 0$.

iv) $a^2 + b^2 - r^2$ é chamado termo independente.

Exemplo:

Para que a equação $mx^2 + y^2 + 4x - 6y + nxy - p = 0$ represente uma circunferência, devemos ter:

$m = 1$ e $n = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y = p \Rightarrow$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = p + 4 + 9 \Rightarrow$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = p + 13$

$p + 13 > 0 \Rightarrow p > -13$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (ESPM-SP) As coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de equação $x^2 - 4x + (y + 1)^2 = 0$ são, respectivamente,

A) (–2, 1) e 4.
B) (2, –1) e 2.
C) (4, –1) e 2.
D) (–1, 2) e $\sqrt{2}$.
E) (2, 2) e $\sqrt{2}$.

02. (UECE–2019) Em um plano munido com o sistema de coordenadas cartesianas usual, fixada uma unidade de comprimento (u.c), a equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ representa uma circunferência com centro no ponto P(p, q) cuja medida do raio é **r** u.c. Assim, é correto afirmar que o valor da soma p + q + r é igual a

A) 0.
B) 3.
C) 1.
D) 2.

03. (FEI-SP) Num sistema cartesiano ortogonal Oxy, tem-se uma circunferência centrada em C(3, –4) e de raio 5. Os valores de **m** para que o ponto M(3m, –4m) pertença à circunferência dada são

A) 0 e 2.
B) 1 e 3.
C) –1 e 3.
D) 2 e 5.
E) –3 e 4.

04. (FMU/FIAM-SP) O centro da circunferência $x^2 + y^2 + 5x + 4y - 25 = 0$ é:

A) $C\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$
B) $C\left(\frac{5}{2}, 2\right)$
C) $C\left(\frac{5}{2}, -2\right)$
D) $C\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$
E) $C\left(2, \frac{5}{2}\right)$

05. (UFRGS-RS–2015) Considere as circunferências definidas por $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ e $(x - 10)^2 + (y - 2)^2 = 9$, representadas no mesmo plano cartesiano.

As coordenadas dos pontos de interseção entre as circunferências são:

A) (7, 2)
B) (2, 7)
C) (10, 3)
D) (16, 9)
E) (4, 3)

06. (Fatec-SP) A circunferência de centro (2, 1) e raio 3 intercepta o eixo das abscissas nos pontos de abscissas:

A) $-2 + 2\sqrt{2}$ e $-2 - 2\sqrt{2}$
B) $2 + 2\sqrt{2}$ e $2 - 2\sqrt{2}$
C) $2 + \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$
D) $-1 - \sqrt{5}$ e $-1 + \sqrt{5}$
E) $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$

07. (UEL-PR) Sejam A(–2, 1) e B(0, –3) as extremidades de um diâmetro de uma circunferência λ. A equação de λ é:

A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$
B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$
C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$
D) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$
E) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

08. (Umesp) Sobre a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ é correto afirmar que

A) o seu centro é o ponto (–2, –2).
B) o seu raio é igual a 4.
C) todos os seus pontos estão no quarto quadrante.
D) ela passa pela origem O(0, 0) do sistema cartesiano.
E) ela tangencia os eixos coordenados.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FUVEST-SP) No plano cartesiano Oxy, a circunferência **C** é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa 5 e contém o ponto (1, 2). Nessas condições, o raio de **C** vale:

A) $\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{5}$
C) 5
D) $3\sqrt{5}$
E) 10

02. (UFU-MG) Inúmeras pinturas e desenhos em tela fazem uso de sobreposição de formas circulares, conforme ilustra a figura a seguir:

DELAUNAY, Robert. *Pinturas Circulares*. Disponível em: <http://www.google.com.br>. Acesso em: 01 jul. 2012.

Para a representação gráfica desses trabalhos artísticos, faz-se necessária a determinação de elementos geométricos associados. Suponha que, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas xOy, duas circunferências, presentes no desenho, sejam dadas pelas equações $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -6$. Assim sendo, a reta que passa pelos centros dessas circunferências pode ser representada pela equação:

A) 2x + 3y = 9
B) 2x + 3y = –9
C) x + 2y = 4
D) x + 2y = –4

03. (UFTM-MG) Sabe-se que **M**, ponto médio do segmento AB, é centro de uma circunferência que passa pela origem (0, 0). Sendo A(–1, 4) e B(5, 2), conclui-se que o raio dessa circunferência é igual a:

A) $4\sqrt{5}$
B) $3\sqrt{5}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{17}$
E) $\sqrt{13}$

04. (FGV-SP) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ mais próximo do ponto (5, 5) tem coordenadas cuja soma vale:

A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
E) $3\sqrt{2}$

05. (ULBRA-RS–2016) As retas $2x - y - 4 = 0$ e $2x + 3y - 12 = 0$ interceptam-se no centro de uma circunferência de raio igual a 3. Então podemos dizer que

A) a circunferência possui centro no ponto (2, 3).
B) a circunferência corta o eixo y em dois pontos.
C) a circunferência corta o eixo x em um ponto.
D) a circunferência é tangente ao eixo x.
E) a circunferência é tangente ao eixo y.

06. (Unicamp-SP–2017) Considere a circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = x - y$. Qual das equações a seguir representa uma reta que divide essa circunferência em duas partes iguais?

A) x + y = –1
B) x – y = –1
C) x – y = 1
D) x + y = 1

07. (EN-RJ) A equação da circunferência tangente às retas y = x e y = –x nos pontos (3, 3) e (–3, 3) é:

A) $x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 16x + 20 = 0$

08. (EsPCEx-SP) Considere a circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(1, \sqrt{3})$. Se a reta **t** é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de **t** com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é:

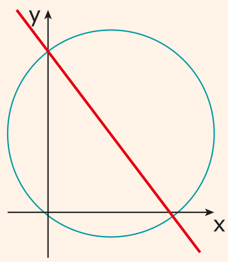
A) –2
B) $2 + \sqrt{3}$
C) 3
D) $3 + \sqrt{3}$
E) $3 + 3\sqrt{3}$

09. (EsPCEx-SP–2016) Seja **C** a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$. Considere em **C** a corda MN cujo ponto médio é P(–1, –1). O comprimento de MN (em unidade de comprimento) é igual a:

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$
E) 2

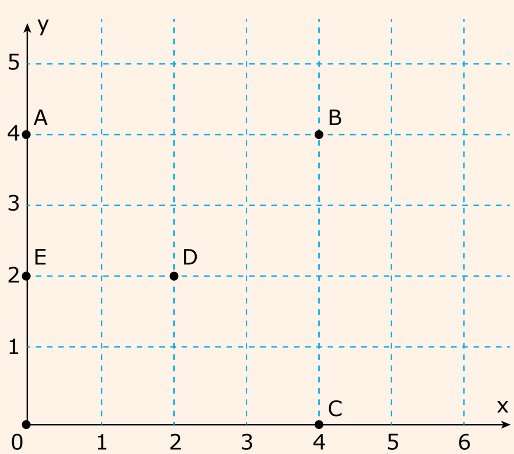
MATEMÁTICA

10. (UFPE) Uma circunferência está circunscrita ao triângulo com lados sobre as retas com equações $x = 0$, $y = 0$ e $4x + 3y = 24$, conforme a ilustração abaixo. Encontre a equação da circunferência e indique a soma das coordenadas de seu centro e de seu raio.



SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0, 4), B(4, 4), C(4, 0), D(2, 2) e E(0, 2).



Passando pelo ponto A, qual a equação forneceria a maior pontuação?

A) $x = 0$

B) $y = 0$

C) $x^2 + y^2 = 16$

D) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

E) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

02. (Enem–2018) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

A) 30.

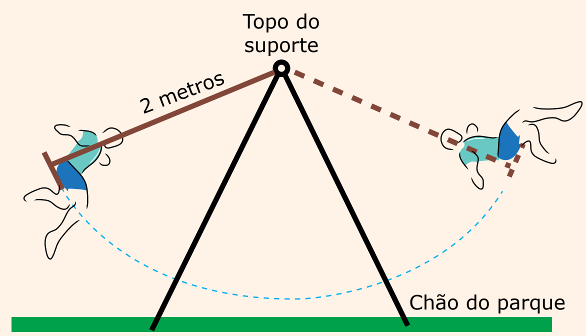
B) 40.

C) 45.

D) 60.

E) 68.

03. (Enem) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço; o eixo x, paralelo ao chão do parque, e o eixo y têm orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função:

A) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

B) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

C) $f(x) = x^2 - 2$

D) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

E) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. C
- 03. A
- 04. A
- 05. A
- 06. B
- 07. A
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. E
- 04. B
- 05. E
- 06. C
- 07. B
- 08. A
- 09. C
- 10. $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ e Soma = 12

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %