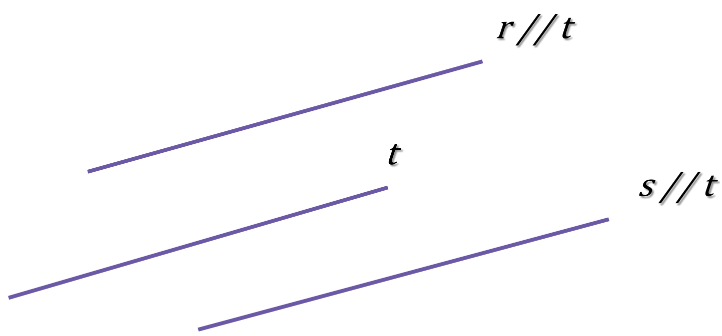
PARALELISMO E PERPENDICULARISMO

Você já deve saber que duas retas distintas são ditas paralelas quando elas pertencem a um mesmo plano e não possuem interseção entre si. Vamos aprender um pouco mais sobre paralelismo, começando por adicionar uma terceira reta de comparação às outras duas. Se temos duas retas que são paralelas distintas e temos uma terceira reta, então todas elas são paralelas distintas entre si:

$$\begin{cases} r \ // \ t \\ s \ // \ t \end{cases} \Rightarrow \ r \ // \ s$$

O desenho abaixo representa esse paralelismo entre três retas.



Três retas paralelas entre si.

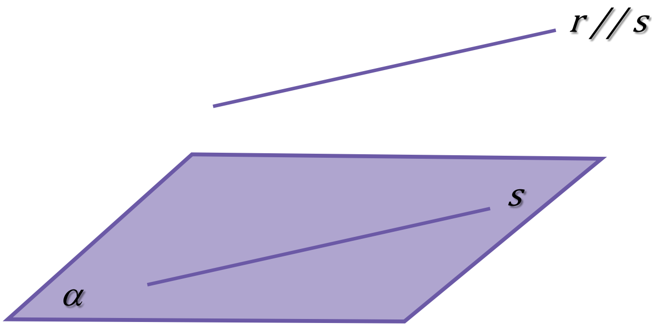
Obs.: Todas as vezes que citarmos retas paralelas, vamos estar considerando retas paralelas **distintas**, salvo dito contrário.

O Teorema Fundamental do Paralelismo diz respeito à uma condição necessária para definir que **um plano** e **uma reta** são paralelos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO PARALELISMO

Dizemos que uma reta é paralela a um plano se ela não está contida nele e é paralela à uma reta contida nesse plano.

A figura a seguir mostra a representação desse teorema (consideremos α um plano genérico).

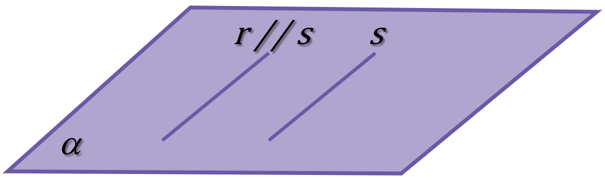


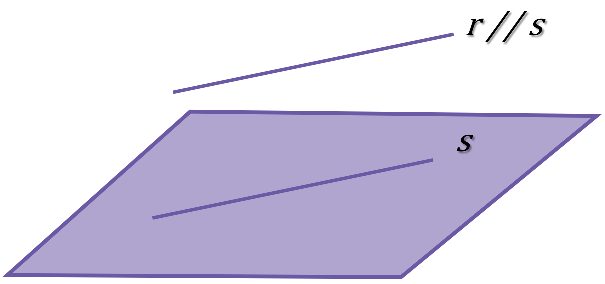
Teorema Fundamental do Paralelismo.

Agora, representamos o que o teorema nos diz da seguinte maneira:

$$\begin{cases} r \;//\; s \\ s \subset \alpha \\ r \not\subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \; r \;//\; \alpha$$

O teorema nos traz algumas consequências, que vamos analisar agora. A primeira delas é que, dadas duas retas paralelas distintas, todo plano que contém uma delas contém a outra **ou** é paralelo à outra, conforme imagem a seguir.



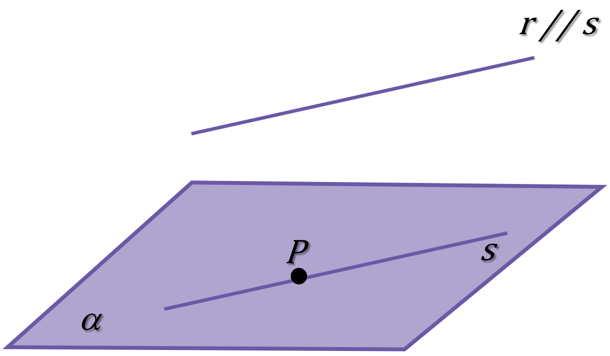


Primeira consequência do Teorema Fundamental do Paralelismo.

Esta consequência se traduz no seguinte:

$$\begin{cases} r \;//\; s \\ s \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \; r \subset \alpha \;\; ou \;\; r \;//\; \alpha$$

A segunda consequência do teorema diz que, se uma reta é paralela a um plano, toda reta que for paralela a ela e que tenha um ponto de intersecção com o plano estará contida nele.

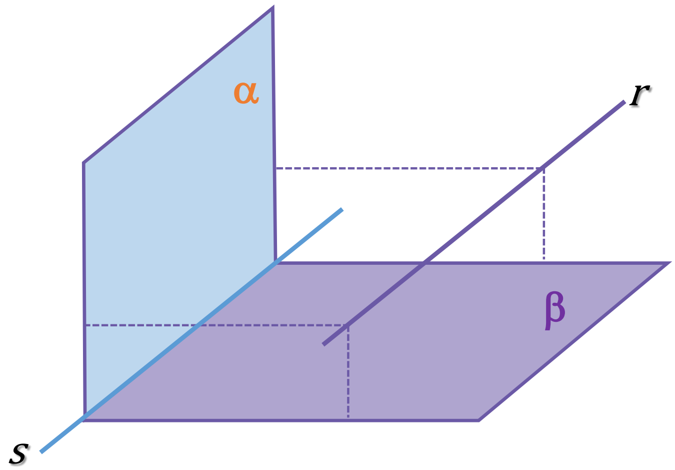


Segunda consequência do Teorema Fundamental do Paralelismo.

Resumimos esta consequência assim:

$$\begin{cases} r\ //\ \alpha \\ s\ //\ r \\ \exists P \in s \mid P \in \alpha \end{cases} \Rightarrow \quad s \subset \alpha$$

Por fim, a terceira consequência é que se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela também é paralela à reta de intersecção destes dois planos.



Terceira consequência do Teorema Fundamental do Paralelismo.

Como representação matemática, temos:

$$\begin{cases} r\ //\ \alpha \\ r\ //\ \beta \\ \alpha \cap \beta = s \end{cases} \Rightarrow \quad r//\ s$$

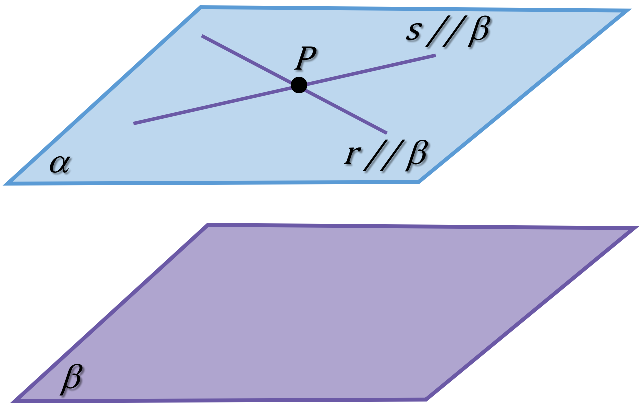
Obs.: a recíproca não é verdade. Se uma reta é paralela à intersecção de dois planos secantes, ela **não** necessariamente é paralela aos dois planos, visto que pode estar contida em um deles.

Uma vez visto o Teorema Fundamental do Paralelismo aplicado à uma reta e um plano, vamos falar agora do Teorema Fundamental do Paralelismo de Planos. Este teorema agora traz a abordagem similar aplicada à dois planos, retirando de cena a comparação com a reta.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO PARALELISMO DE PLANOS

Dizemos que dois planos são paralelos se um deles conter duas retas concorrentes entre si e paralelas ao outro plano.

A figura a seguir mostra a representação desse segundo teorema.



Teorema Fundamental do Paralelismo de Planos.

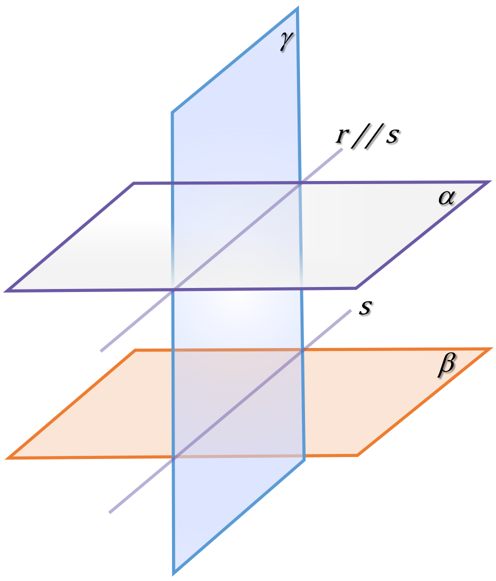
Também é possível representar o que esse teorema nos diz de forma matemática:

$$\begin{cases} r \subset \alpha \ e \ r \ // \ \beta \\ s \subset \alpha \ e \ s \ // \ \beta \\ r \cap s = \{P\} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha // \ \beta$$

PROPRIEDADES

Acabamos de ver o que define dois planos serem paralelos, vamos agora examinar algumas das propriedades que regem esse paralelismo. Começamos a explicação destas propriedades abaixo:

a. Dois planos paralelos que sejam interceptados por um terceiro plano têm interseções paralelas.

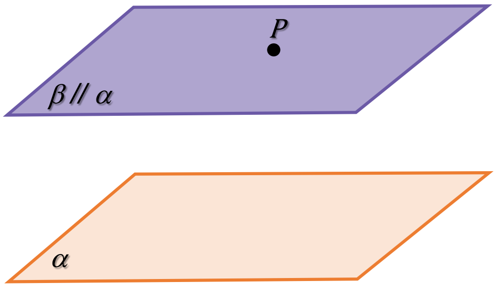


Primeira propriedade do paralelismo de planos.

Esta propriedade é representada da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha \ // \ \beta \\ \gamma \cap \alpha = r \\ \gamma \cap \beta = s \end{cases} \Leftrightarrow \quad r // \ s$$

b. Considerando um ponto que não pertence a um plano, por ele existe e é único o plano paralelo ao plano anterior.



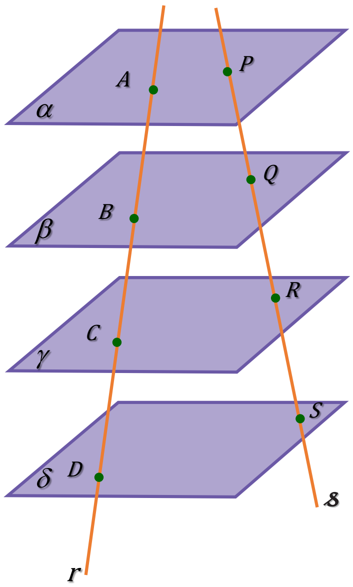
Segunda propriedade do paralelismo de planos.

Conforme dito acima, temos que:

$$\text{Existe um único plano } \beta \text{ tal que: } \begin{cases} P \in \beta \\ P \notin \alpha \\ \beta \;//\; \alpha \end{cases}$$

Você se lembra do Teorema de Tales? Ele nos diz que duas transversais que passam por um feixe de retas paralelas dividem-se em segmentos correspondentes proporcionais. Para a terceira propriedade do paralelismo, vamos ver como esse teorema pode ser aplicado no caso de planos paralelos.

c. Se temos dois feixes de planos paralelos os quais passam duas retas transversais, elas dividem segmentos correspondentes respectivamente proporcionais.



Terceira propriedade do paralelismo de planos.

Vamos relembrar como escrevemos o Teorema de Tales, desta vez aplicado aos planos paralelos:

$$\alpha \;//\; \beta \;//\; \gamma \;//\; \delta \Leftrightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{AD}{PS}$$

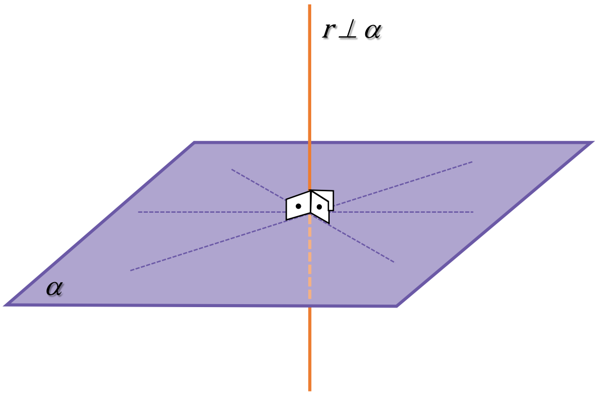
Agora que vimos todas as propriedades relacionadas ao paralelismo, podemos falar sobre o perpendicularismo.

PERPENDICULARISMO

Assim, como iniciamos o paralelismo falando de uma reta paralela a um plano, vamos iniciar o estudo do perpendicularismo falando de uma **reta perpendicular a um plano**.

> Dizemos que uma reta é perpendicular à um plano se, e somente se, ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de intersecção dela com o plano. Este ponto é chamado de "pé da perpendicular".

A figura abaixo mostra uma reta perpendicular a um plano.



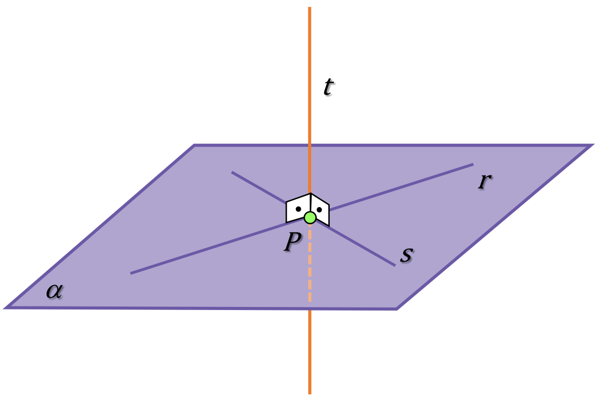
Reta perpendicular à um plano.

A seguir, vamos falar do Teorema Fundamental do Perpendicularismo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO PERPENDICULARISMO

Se temos uma reta que forma ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

1° Caso: Temos três situações possíveis para exemplificar o que este teorema traz. O primeiro caso acontece quando a reta é perpendicular às duas retas concorrentes do plano, conforme mostrado abaixo.

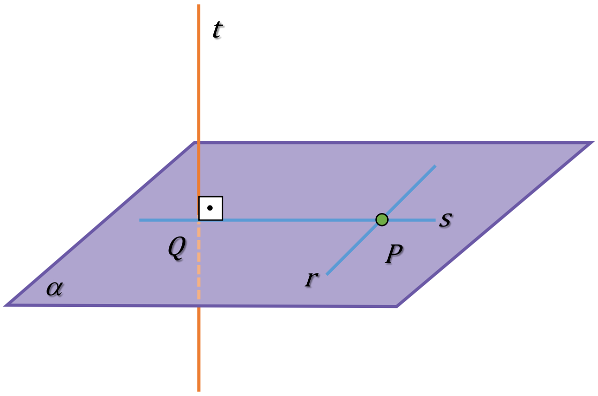


Primeiro caso do Teorema Fundamental do Paralelismo.

Matematicamente, temos:

$$\begin{cases} t \perp r, r \subset \alpha \\ t \perp s, s \subset \alpha \\ r \cap s = \{P\} \end{cases} \Leftrightarrow \quad t \perp \alpha$$

2° Caso: O segundo caso do teorema acontece quando a reta é ortogonal à uma das retas concorrentes e perpendicular à outra. Observe a figura abaixo.

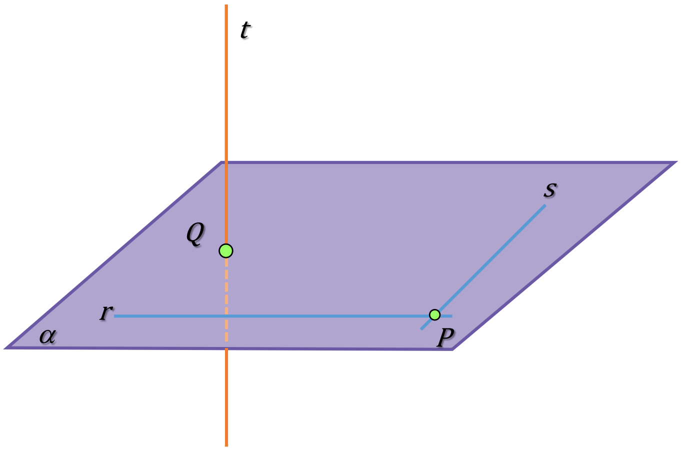


Segundo caso do Teorema Fundamental do Paralelismo.

A imagem é traduzida pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} r \subset \alpha, s \subset \alpha \\ t \perp s \\ t \perp r \\ r \cap s = \{P\} \end{cases} \Leftrightarrow \quad t \perp \alpha$$

3° Caso: E, por fim, o terceiro caso do teorema acontece quando a reta é ortogonal às duas retas concorrentes do plano.



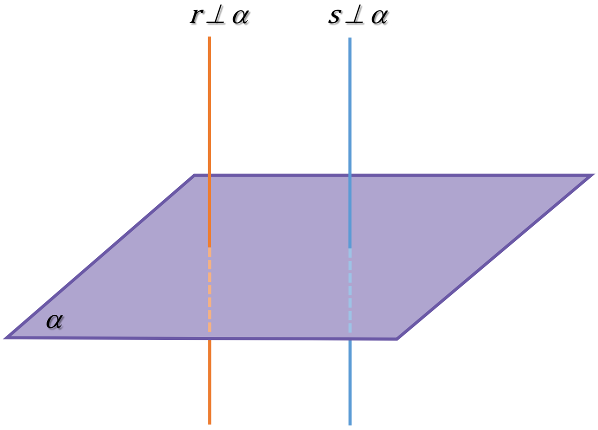
Terceiro caso do Teorema Fundamental do Paralelismo.

Este terceiro caso estabelece a seguinte conclusão:

$$\begin{cases} r \subset \alpha, s \subset \alpha \\ t \perp r \\ t \perp s \\ r \cap s = \{P\} \end{cases} \Leftrightarrow \quad t \perp \alpha$$

Acabamos de estudar as condições que definem se um plano e uma reta são ou não perpendiculares. Novamente, assim como no paralelismo, vamos examinar algumas das propriedades que regem o perpendicularismo citado:

a. Duas retas que forem perpendiculares a um mesmo plano também são paralelas entre si.



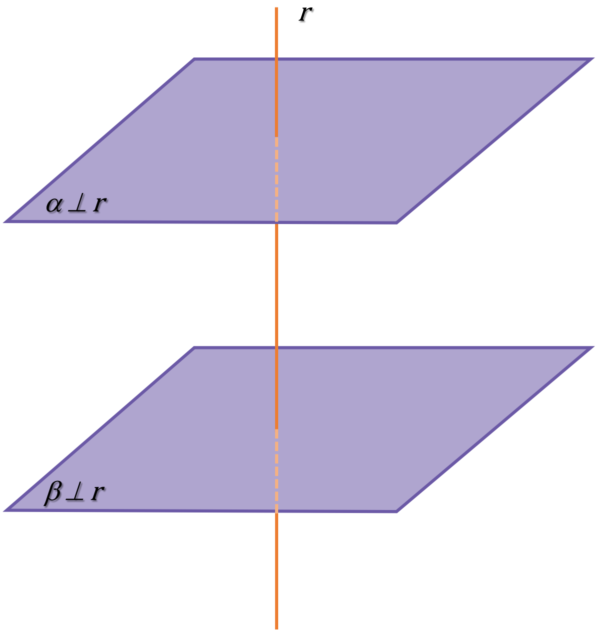
Primeira propriedade do perpendicularismo entre reta e plano.

Conforme a imagem acima, temos que:

$$\begin{cases} r \perp \alpha \\ s \perp \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \quad r \; // \; s$$

Continuando as propriedades, examinemos a segunda:

b. Dois planos que forem perpendiculares a uma mesma reta também são paralelos.



Segunda propriedade do perpendicularismo entre reta e plano.

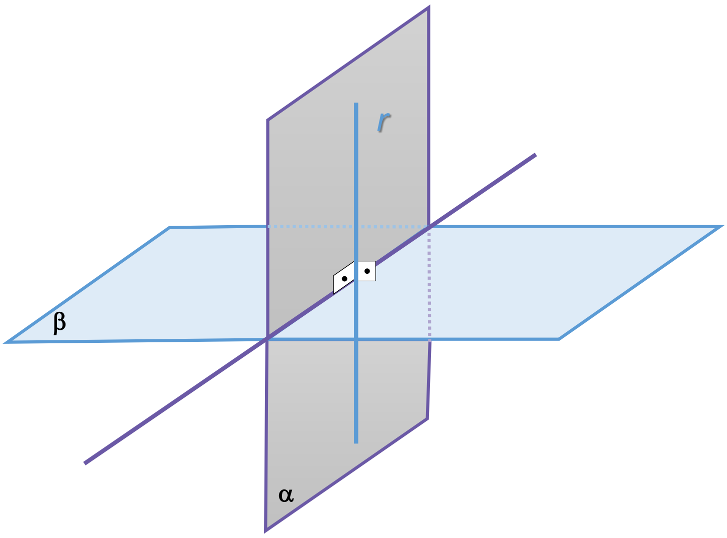
Explicamos esta propriedade da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha \perp r \\ \beta \perp r \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha \; // \; \beta$$

Chegou a hora de analisarmos o perpendicularismo **entre dois planos distintos**.

Define-se primeiro que dois planos são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular que seja ao outro plano.

Observe a figura abaixo.



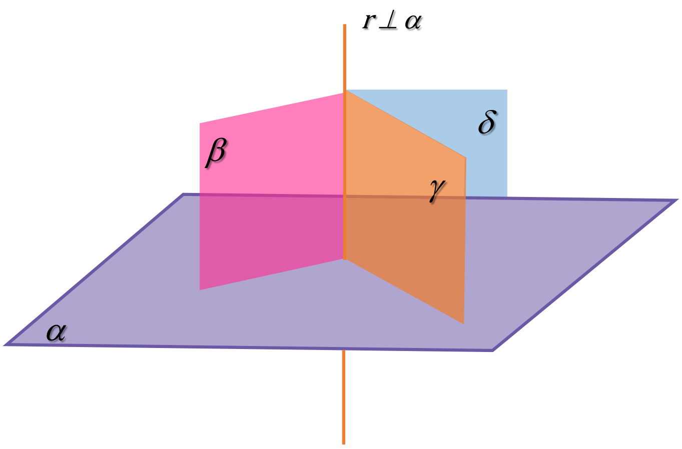
Dois planos perpendiculares.

A definição acima nos diz que:

$$\begin{cases} r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha \perp \beta$$

Podemos, assim como nos casos anteriores, analisar algumas propriedades decorrentes dessa definição:

a. Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer plano que contenha essa reta é perpendicular ao primeiro.



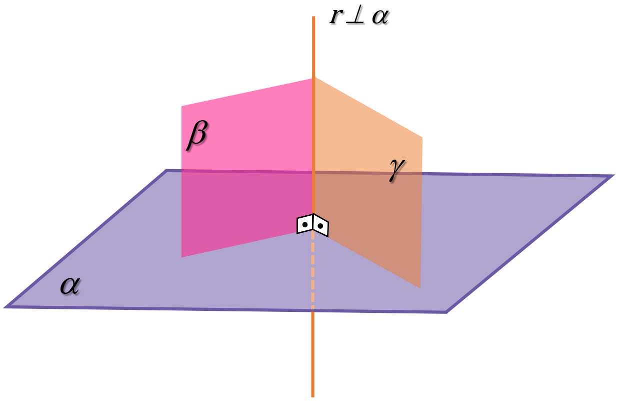
Primeira propriedade do perpendicularismo entre planos.

Esta propriedade nos diz que:

$$\begin{cases} r \perp \alpha \\ r \subset \beta \\ r \subset \gamma \\ r \subset \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \perp \alpha \\ \gamma \perp \alpha \\ \delta \perp \alpha \end{cases}$$

Como segunda propriedade, temos:

b. Se dois planos secantes são perpendiculares a um terceiro plano, a reta de intersecção entre eles também será perpendicular ao terceiro plano.



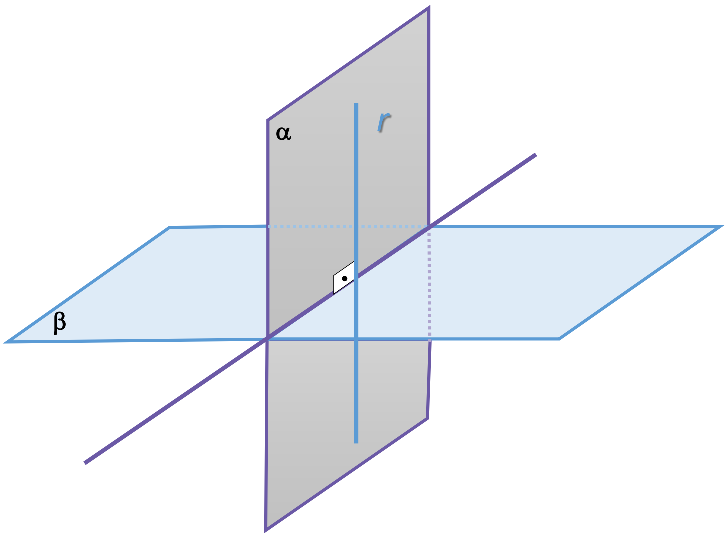
Segunda propriedade do perpendicularismo entre planos.

A segunda propriedade pode ser equacionada da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \beta \perp \alpha \\ \gamma \perp \alpha \\ \beta \cap \gamma = r \end{cases} \Rightarrow \quad r \perp \alpha$$

Por fim, temos a terceira propriedade do perpendicularismo entre dois planos:

c. Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção também é perpendicular ao outro plano.



Terceira propriedade do perpendicularismo entre planos.

Que, finalmente, nos traduz às seguintes equações:

$$\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = s \\ r \subset \alpha \\ r \perp s \end{cases} \Leftrightarrow \quad r \perp \beta$$