Dados os polinômios $A(x) = x^4 + x^2 + 1$, $B(x) = x^3 - 1$ e $C(x) = x^2 - x - 2$, calcule:

1. $A + B$

$$\begin{array}{rl} & A(x) = x^4 + x^2 + \cancel{1}x^0 \\ + & B(x) = x^3 - \cancel{1}x^0 \\ \hline & \boxed{x^4 + x^3 + x^2} \end{array}$$

2. $A \cdot B$

$$(x^4 + x^2 + 1) \cdot (x^3 - 1)$$

$$x^4 \cdot x^3 + x^2 \cdot x^3 + x^3 + x^4 \cdot (-1) + x^2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)$$

$$\boxed{x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 1}$$

3. B^2

$$B = x^3 - 1$$

$$B^2 = (x^3 - 1) \cdot (x^3 - 1)$$

$$B^2 = x^3 \cdot x^3 + x^3 \cdot (-1) + (-1) \cdot x^3 + (-1) \cdot (-1)$$

$$B^2 = x^6 + 2 \cdot x^3 \cdot (-1) + 1$$

$$\boxed{B^2 = x^6 - 2x^3 + 1}$$

4. $A - B - C$

$$\begin{array}{rl} & (x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x + 1x^0) \rightsquigarrow A(x) \\ - & (0x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x - 1x^0) \rightsquigarrow B(x) \\ - & (0x^4 + 0x^3 + x^2 - x - 2x^0) \rightsquigarrow C(x) \\ \hline & x^4 - x^3 + 0x^2 + x - 4x^0 \end{array}$$

$$\boxed{x^4 - x^3 + x + 4}$$

5. Dados os polinômios $A(x) = x + i$, $B(x) = ix + 1$ e $C(x) = x^2 + 1$, calcule $A \cdot B + C$.

$$A.B + C$$

$$(x + i) \cdot (ix + 1) + (x^2 + 1)$$

$$x^2 \cdot i + i^2 \cdot x + x + i + x^2 + 1$$

$$x^2 . i - 1x + x + i + x^2 + 1$$

$$x^2 \cdot i + x^2 + i + 1$$

$$\boxed{x^2(i+1) + (1+i)}$$

6. Dados os polinômios $A(x) = 2x + 1$, $B(x) = x + 2$ e $C(x) = 12x + 15$, calcule os números a e b, de modo que se verifique a identidade $aA + bB \equiv C$.

$$a(2x+1) + b(x+2) = 12x + 15$$

$$2ax + a + bx + 2b = 12x + 15$$

$$\begin{cases} 2a\cancel{x} + b\cancel{x} = 12\cancel{x} \\ a + 2b = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 12 \quad .(-2) \\ a + 2b = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a - \cancel{2b} = -24 \\ + \\ a + \cancel{2b} = 15 \end{cases}$$

$$-3a = -9$$

$$-a = -9/3 \quad .(-1) \rightsquigarrow \boxed{a = 3}$$

$$a + 2b = 15 \longrightarrow 3 + 2b = 15$$

$$2b = 15 - 3 \longrightarrow b = \frac{12}{2} \rightsquigarrow \boxed{b = 6}$$

7. Dados os polinômios $P(x) = x^2 + 1$, $Q(x) = x + i$ e $R(x) = x^2 + 2ix + 1$, calcule os números a, b e c de modo que $S(x) = aP(x) + bQ(x) + cR(x)$ seja identicamente nulo.

$$a(x^2 + 1) + b(x + i) + c(x^2 + 2ix + 1)$$

$$ax^2 + a + bx + bi + cx^2 + 2ixc + c = 0$$

Organizando em ordem decrescente do expoente de x:

$$ax^2 + cx^2 + bx + 2ixc + ax^0 + cx^0 + b.i\,x^0 = 0x^2 + 0x^1 + 0x^0 + 0.i$$

$$ax^2 + cx^2 = 0.x^2 \rightsquigarrow a + c = 0 \rightsquigarrow a = -c$$

$$bx + 2ixc = 0.x^1 \rightsquigarrow b + 2ic = 0 \rightsquigarrow b = -2.i.c$$

$$ax^0 + cx^0 = 0x^0 \rightsquigarrow a + c = 0 \rightsquigarrow a = -c$$

$$b.i.x^0 = 0.i \rightsquigarrow \boxed{b = 0}$$

$$b = -2.i.c \rightsquigarrow -2.i.c = 0 \rightsquigarrow \boxed{c = 0}$$

$$a = -c \rightsquigarrow \boxed{a = 0}$$