

# Lançamentos Horizontal e Balístico

CIÊNCIAS DA NATUREZA

Competência(s):  
5 e 6

Habilidade(s):  
17 e 20

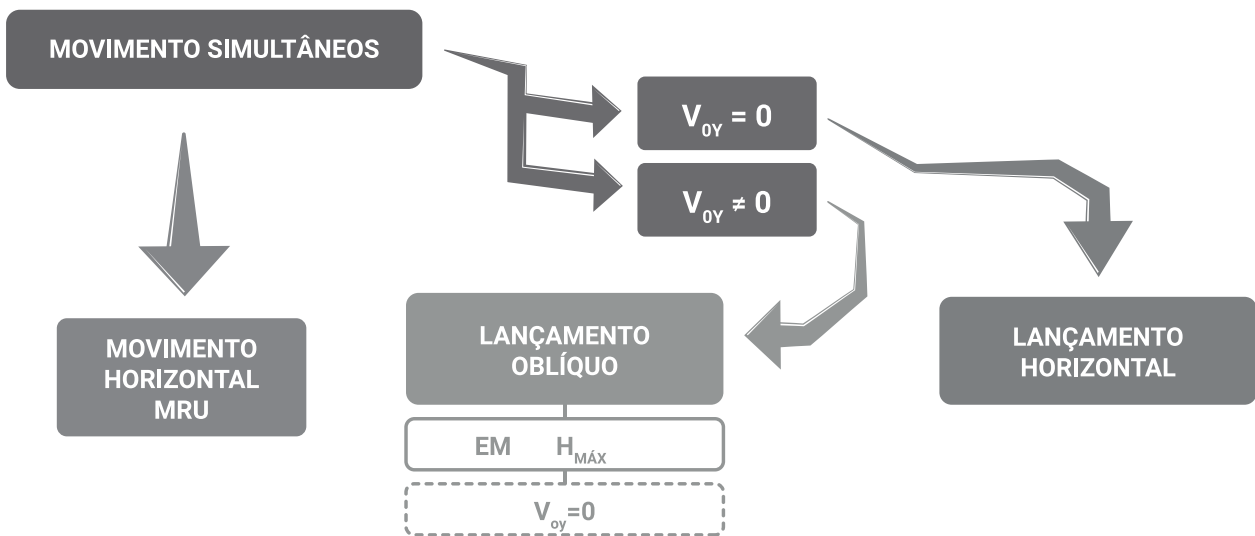
**AULAS  
9 E 10**

## VOCÊ DEVE SABER!

- Lançamento horizontal
- Lançamento oblíquo

## MAPEANDO O SABER

# LANÇAMENTOS

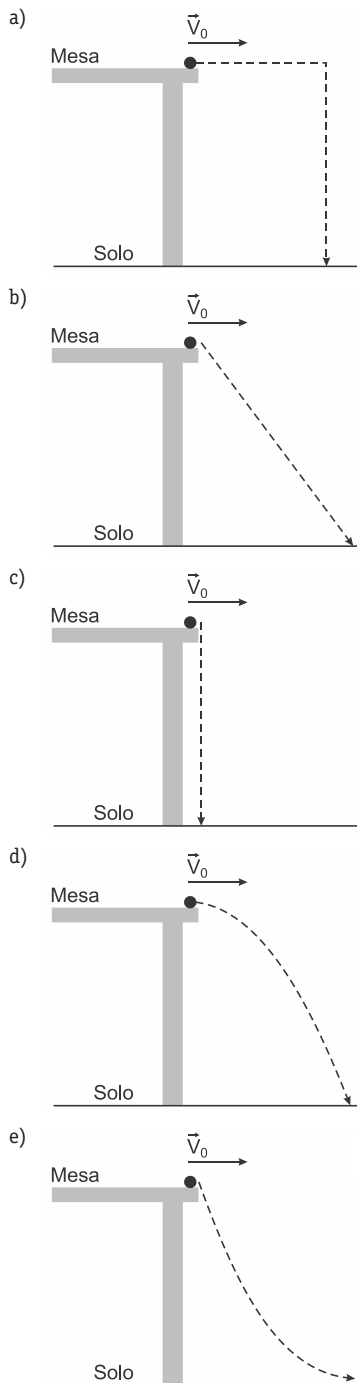


# ANOTAÇÕES

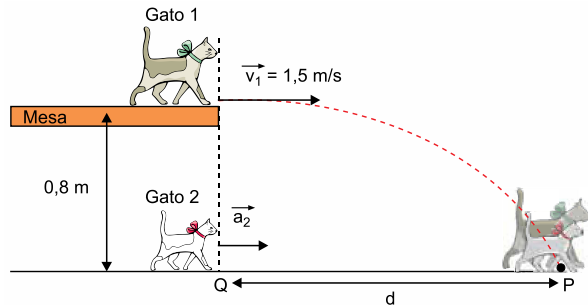


## EXERCÍCIOS DE SALA

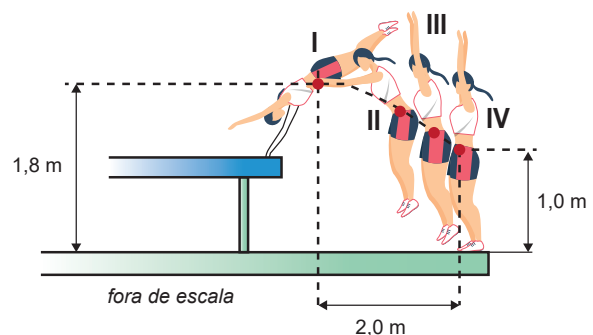
1. (ENEM 2020) Nos desenhos animados, com frequência se vê um personagem correndo na direção de um abismo, mas, ao invés de cair, ele continua andando no vazio e só quando percebe que não há nada sob seus pés é que ele para de andar e cai verticalmente. No entanto, para observar uma trajetória de queda num experimento real, pode-se lançar uma bolinha, com velocidade constante ( $V_0$ ), sobre a superfície de uma mesa e verificar o seu movimento de queda até o chão. Qual figura melhor representa a trajetória de queda da bolinha?



2. (FAMERP 2022) Dois gatos estão brincando num local onde  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , conforme representado na imagem. O gato 1 se encontra sobre o tampo de uma mesa, a  $0,8 \text{ m}$  do chão. O gato 2, que está no chão, na mesma vertical Q que passa pelo gato 1, inicia uma corrida, a partir do repouso, com aceleração  $a_2$  constante. No mesmo instante, o gato 1 salta horizontalmente para frente, com velocidade horizontal  $v_1 = 1,5 \text{ m/s}$ , levando  $0,40 \text{ s}$  para atingir o chão. Por fim, os dois gatos chegam ao ponto P no mesmo instante. Para a resolução da questão, despreze as dimensões dos gatos.



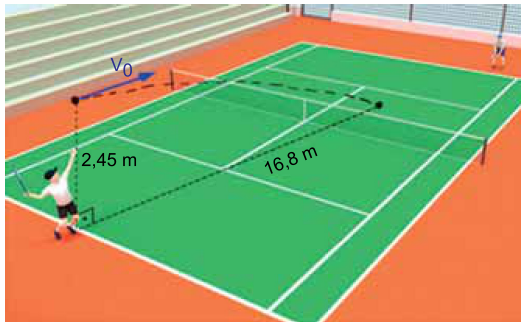
- a) Após saltar, qual era o módulo da aceleração do gato 1, em  $\text{m/s}^2$ ? Qual era o módulo da componente vertical de sua velocidade, em  $\text{m/s}$ , quando atingiu o chão?
- b) Quanto vale a distância  $d$ , em metros, entre a linha vertical Q, de onde os dois gatos partiram, e o ponto P, onde se encontraram? Qual era a aceleração do gato 2, em  $\text{m/s}^2$ , para que ambos chegassem a esse ponto P no mesmo instante?
3. (UNESP 2022) Em treinamento para uma prova de trave olímpica, uma atleta faz uma saída do aparelho, representada em quatro imagens numeradas de I a IV, em que o ponto vermelho representa o centro de massa do corpo da atleta. A imagem I representa o instante em que a atleta perde contato com a trave, quando seu centro de massa apresenta velocidade horizontal  $v_0$ . A imagem IV representa o instante em que ela toca o solo.



Considerando que nesse movimento somente a força peso atua sobre a atleta e adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , o valor de  $v_0$  é

- a)  $6,0 \text{ m/s}$ .                      b)  $3,0 \text{ m/s}$ .  
 c)  $5,0 \text{ m/s}$ .                      d)  $2,0 \text{ m/s}$ .  
 e)  $4,0 \text{ m/s}$ .

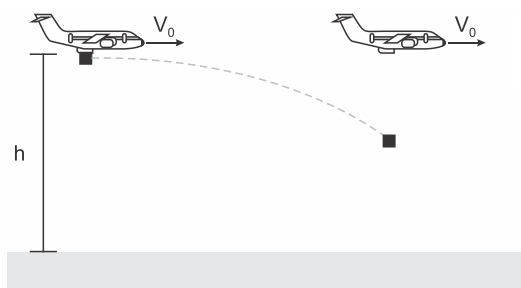
4. **(ALBERT EINSTEIN - MEDICINA 2021)** Em uma aula de tênis, um aprendiz, quando foi sacar, lançou a bola verticalmente para cima e a golpeou com a raquete exatamente no instante em que ela parou no ponto mais alto, a 2,45 m de altura em relação ao piso da quadra. Imediatamente após esse movimento, a bola partiu com uma velocidade inicial horizontal  $V_0$  e tocou o solo a 16,8 m de distância da vertical que passava pelo ponto de partida.



(<https://free3d.com>. Adaptado.)

Adotando-se  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , desprezando-se a resistência do ar e a rotação da bola ao longo de seu trajeto, o módulo de  $V_0$  quando a bola perdeu contato com a raquete foi de

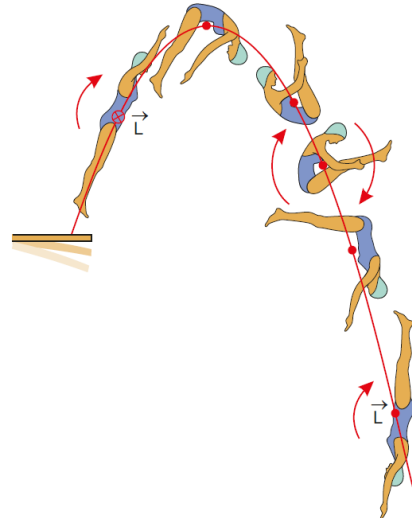
- a) 20 m/s.  
 b) 24 m/s.  
 c) 22 m/s.  
 d) 28 m/s.  
 e) 26 m/s.
5. **(UFRGS 2022)** Um avião, viajando paralelamente ao solo com velocidade constante de módulo  $V_0$ , solta uma carga desde uma altitude  $h$ , conforme representa o painel esquerdo da figura abaixo.



Sendo  $V_0 = 80 \text{ m/s}$  o módulo da velocidade do avião e  $h = 300 \text{ m}$ , qual será, depois de 5 s, o módulo da velocidade da carga em relação ao avião, desprezando-se a resistência do ar?  
 Considere o módulo da aceleração da gravidade igual a  $10 \text{ m/s}^2$ .

- a) 0 m/s.  
 b) 30 m/s.  
 c) 50 m/s.  
 d) 90 m/s.  
 e) 130 m/s.

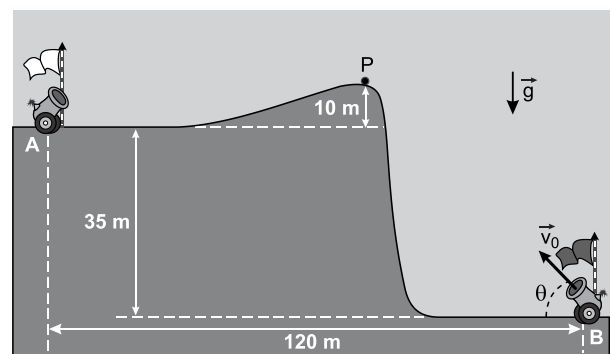
6. **(FCMSCSP 2022)** Como mostra a imagem, em uma competição de saltos ornamentais, uma atleta salta de uma plataforma e realiza movimentos de rotação. Porém, seu centro de massa, sob ação exclusiva da gravidade, descreve uma trajetória parabólica, após ter sido lançado obliquamente da plataforma.



(<https://sites.google.com>. Adaptado.)

Considere que a aceleração gravitacional seja igual a  $10 \text{ m/s}^2$ , que no momento em que a atleta saltou para cima seu centro de massa estava a 11 m da superfície da água e que o centro de massa da saltadora chegou à água 2,0 s após o salto. A componente vertical da velocidade do centro de massa dessa atleta no momento em que ela deixou a plataforma era

- a) 4,5 m/s.  
 b) 1,5 m/s.  
 c) 0,5 m/s.  
 d) 2,5 m/s.  
 e) 8,5 m/s.
7. **(ENEM 2021)** A figura foi extraída de um antigo jogo para computadores, chamado **Bang! Bang!**



No jogo, dois competidores controlam os canhões A e B, disparando balas alternadamente com o objetivo de atingir o canhão do adversário; para isso, atribuem valores estimados para o módulo da velocidade inicial de disparo ( $|\vec{v}_0|$ ) e para o ângulo de disparo ( $\theta$ ).

Em determinado momento de uma partida, o competidor B deve disparar; ele sabe que a bala disparada anteriormente,  $\theta = 53^\circ$ , passou tangenciando o ponto P. No jogo,  $|\vec{g}|$  é igual a  $10 \text{ m/s}^2$ . Considere  $\sin 53^\circ = 0,8$ ,  $\cos 53^\circ = 0,6$  e desprezível a ação de forças dissipativas.

Disponível em: <http://mebdownloads.butzke.net.br>. Acesso em: 18 abr. 2015 (adaptado).

Com base nas distâncias dadas e mantendo o último ângulo de disparo, qual deveria ser, aproximadamente, o menor valor de  $|\vec{v}_0|$  que permitiria ao disparo efetuado pelo canhão B atingir o canhão A?

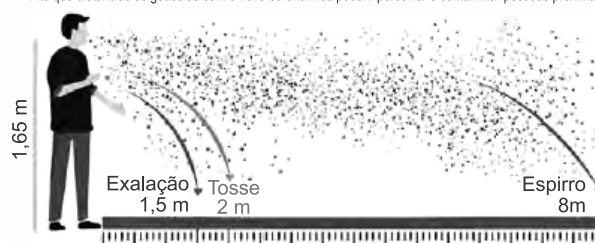
- a) 30 m/s.
- b) 35 m/s.
- c) 40 m/s.
- d) 45 m/s.
- e) 50 m/s.

## ESTUDO INDIVIDUALIZADO (E.I.)

- (Uel 2021)** Durante a pandemia da Covid-19, cientistas têm apresentado estudos confiáveis sobre as condutas seguras que podem evitar a transmissão do novo coronavírus. O uso obrigatório de máscaras em áreas de convivência pública é uma das medidas eficazes e validadas pela ciência. Porém, o espaçamento entre os indivíduos é a fronteira mais segura para evitar o possível contágio. Tais recomendações são baseadas em resultados experimentais do alcance de fluidos corporais na forma de gotículas expelidas pela boca e pelo nariz de uma pessoa, conforme a figura a seguir.

### Distanciamento social

Até que distâncias as gotículas com o novo coronavírus podem percorrer e contaminar pessoas próximas



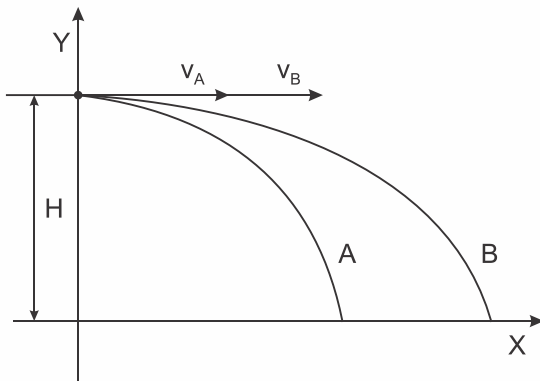
Adaptado: Alcance das gotículas de água de uma pessoa. //diariodonordeste.verdesmares.com.br

Com base nos conhecimentos sobre mecânica e conservação de energia e considerando que, na figura, as gotículas saem pela boca e pelo nariz (despreze a diferença de altura entre a boca e nariz) com velocidade constante, a aceleração da gravidade no local é  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e a resistência do ar é desprezada, assinale a alternativa correta.

- a) Uma gotícula lançada durante a tosse e outra durante o espirro, simultaneamente, atingem o chão ao mesmo tempo.
  - b) A energia potencial gravitacional de uma gotícula expelida durante o espirro é maior que a de uma gotícula expelida durante a tosse.
  - c) A energia potencial gravitacional de uma gotícula expelida durante a exalação é menor que a de uma gotícula expelida durante a tosse.
  - d) Uma gotícula lançada durante a tosse, simultaneamente com uma gotícula da exalação, atinge o chão antes que a gotícula da exalação.
  - e) Uma gotícula lançada durante o espirro, simultaneamente com uma gotícula da tosse, atinge o chão depois da gotícula da tosse.
- (Uem-pas 2021)** No instante  $t = 0 \text{ s}$ , uma partícula de massa  $M$  é lançada de uma superfície plana, horizontal e infinita, a uma velocidade  $\vec{v}$  que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Desprezando os atritos e considerando  $\theta$  menor que  $90^\circ$ , assinale o que for correto.
    - 01) A equação que descreve a velocidade da partícula na vertical é uma função quadrática.
    - 02) Na altura máxima alcançada pela partícula, sua velocidade é nula.

- 04) A trajetória da partícula é uma parábola.  
 08) As velocidades horizontais da partícula no ponto de lançamento e no ponto que ela voltar a tocar a superfície são iguais.  
 16) No instante  $t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$  a partícula está em sua altura máxima.

3. (Unisinos 2017) Anita (A) e Bianca (B) estão no alto de um edifício de altura  $H$ . Ambas arremessam bolinhas de gude, horizontalmente, conforme mostrado no esquema da figura abaixo. Bianca arremessa sua bolinha com o dobro da velocidade com que Anita arremessa a sua.



A respeito do esquema, leia as seguintes afirmações.

- I. O tempo que a bolinha arremessada por Bianca leva para atingir o solo é o dobro do tempo que a bolinha arremessada por Anita leva.  
 II. A distância do edifício até o ponto em que a bolinha arremessada por Bianca atinge o solo é o dobro da distância alcançada pela bolinha arremessada por Anita.  
 III. A velocidade com que a bolinha arremessada por Bianca atinge o solo é o dobro da velocidade com que a bolinha arremessada por Anita atinge o solo.

Sobre as proposições acima, pode-se afirmar que

- a) apenas I está correta.  
 b) apenas II está correta.  
 c) apenas III está correta.  
 d) apenas I e II estão corretas.  
 e) I, II e III estão corretas.
4. (Esc. Naval 2021) Considere um projétil arremessado de uma posição a 1,0 metro de altura do solo, com um ângulo de  $37^\circ$  em relação à horizontal. Existe um alvo a 8,0 m de distância, na horizontal, da posição de lançamento do projétil, e a 2,0 metros de altura do solo. Calcule o módulo da velocidade inicial do projétil para que ele acerte o alvo e assinale a opção correta.

Dados:

$$\operatorname{sen} 37^\circ = 0,60; \operatorname{cos} 37^\circ = 0,80; g = 10 \text{ m/s}^2$$

- a) 2,0 m/s  
 b) 4,0 m/s  
 c) 6,0 m/s  
 d) 8,0 m/s  
 e) 10 m/s

5. (Ufjf-pism 1 2019) Ao localizar refugiados em um local plano no deserto, o governo de um país do Oriente Médio resolve utilizar um avião para lançar alimentos e outros itens de primeira necessidade, dada a impossibilidade de outros meios de transporte chegar rapidamente ao local. Um equipamento do avião permite ao piloto registrar o gráfico da variação da altura com o tempo de queda do pacote que contém o material de ajuda humanitária.

Observe o gráfico mostrado na Figura, e considere que em  $t = 0$  s o pacote se desprende do avião. Para o pacote poder cair o mais próximo possível dos refugiados, é razoável afirmar que (despreze a resistência do ar e considere a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ):

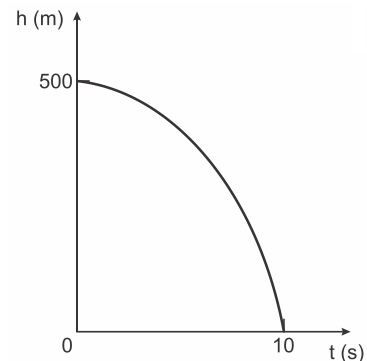


Figura - Gráfico da altura (h) do pacote em função do tempo de queda (t)

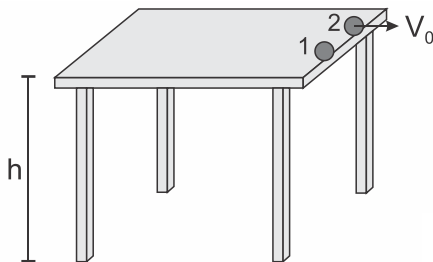
- a) O piloto lançou o pacote a 500 metros de altura, exatamente acima do local onde se encontravam os refugiados.  
 b) O piloto lançou o pacote a 500 metros de altura, um pouco antes do local onde se encontravam os refugiados.  
 c) O piloto lançou o pacote a 500 metros de altura, um pouco depois do local onde se encontravam os refugiados.  
 d) O piloto lançou o pacote um pouco antes do local onde se encontravam os refugiados, e este chega ao solo com velocidade de 50 m/s.  
 e) O piloto lançou o pacote exatamente acima do local onde se encontravam os refugiados, e este chega ao solo com velocidade de 50 m/s.

6. (Udesc 2017) Um projétil é lançado, com velocidade horizontal  $V_0$ , do topo de uma mesa que possui altura  $h$ .

Desconsiderando a resistência do ar, assinale a alternativa que corresponde ao deslocamento horizontal e ao módulo da aceleração deste projétil, respectivamente, quando ele está na metade da altura da mesa.

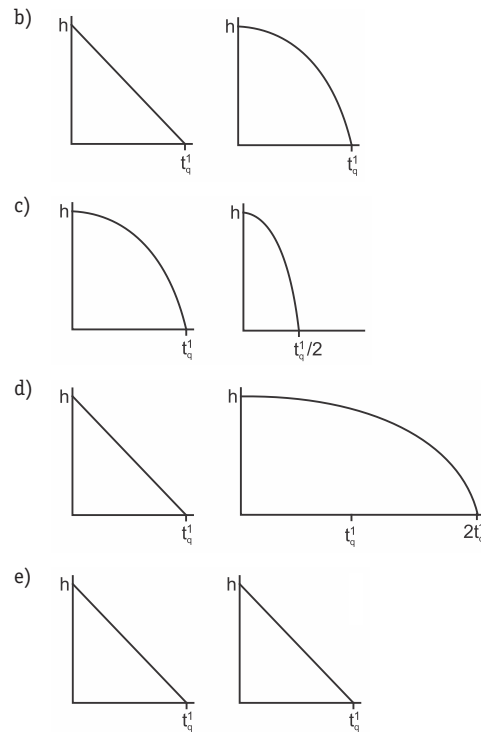
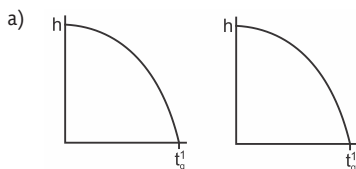
- a)  $V_0\sqrt{\frac{h}{g}}$ ;  $g$   
 b)  $\ddot{u}_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$   
 c)  $\frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$ ;  $g/2$   
 d)  $V_0\sqrt{\frac{h}{g}}$ ;  $0$   
 e)  $V_0\sqrt{\frac{h}{2g}}$ ;  $g$

7. (Ufrgs 2018) Dois objetos de massas  $m_1$  e  $m_2 (= 2m_1)$  encontram-se na borda de uma mesa de altura  $h$  em relação ao solo, conforme representa a figura abaixo.



O objeto 1 é lentamente deslocado até começar a cair verticalmente. No instante em que o objeto 1 começa a cair, o objeto 2 é lançado horizontalmente com velocidade  $V_0$ . A resistência do ar é desprezível.

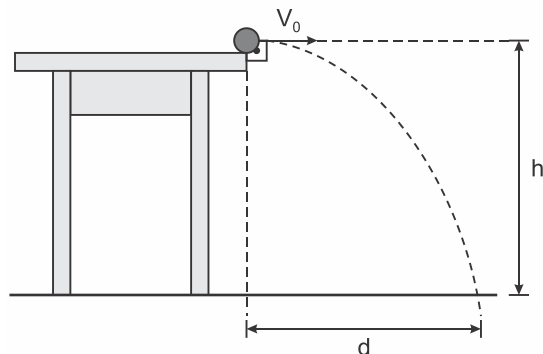
Assinale a alternativa que melhor representa os gráficos de posição vertical dos objetos 1 e 2, em função do tempo. Nos gráficos,  $t_q^1$  representa o tempo de queda do objeto 1. Em cada alternativa, o gráfico da esquerda representa o objeto 1 e o da direita representa o objeto 2.



8. (Pucrj 2018) Uma bola é lançada horizontalmente com uma velocidade  $v_0$  a partir de uma calha que se encontra a uma altura  $h_0$  do solo. A bola atinge o solo à distância horizontal  $L_0$  a partir do ponto de lançamento.

Se a altura da calha for quadruplicada, a nova distância horizontal a partir do ponto de lançamento será

- a)  $4L_0$   
 b)  $2L_0$   
 c)  $L_0$   
 d)  $L_0/2$   
 e)  $L_0/4$
9. (Uefs 2018) Da borda de uma mesa, uma esfera é lançada horizontalmente de uma altura  $h$ , com velocidade inicial  $v_0$ . Após cair livre de resistência do ar, a esfera toca o solo horizontal em um ponto que está a uma distância  $d$  da vertical que passa pelo ponto de partida, como representado na figura.



Considerando que a aceleração da gravidade local tem módulo  $g$ , o valor de  $v_0$  é

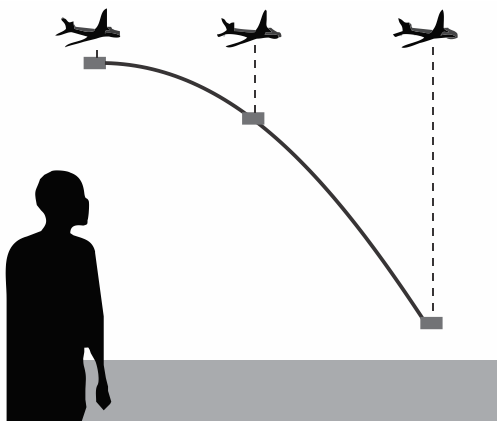
- a)  $d \cdot \sqrt{\frac{h}{2 \cdot g}}$
- b)  $h \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot d}}$
- c)  $d \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$
- d)  $h \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{d}}$
- e)  $d \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot h}}$

10. (Puccamp 2018) Um objeto foi lançado obliquamente a partir de uma superfície plana e horizontal de modo que o valor da componente vertical de sua velocidade inicial era  $v_{0y} = 30 \text{ m/s}$  e o da componente horizontal era  $v_{0x} = 8,0 \text{ m/s}$ .

Considerando a aceleração gravitacional igual a  $10 \text{ m/s}^2$  e desprezando a resistência do ar, o alcance horizontal do objeto foi

- a) 12 m.
- b) 24 m.
- c) 48 m.
- d) 78 m.
- e) 240 m.

11. (G1 - cps 2018) Um avião, com a finalidade de abastecer uma região que se encontra isolada, voa em linha reta horizontalmente, com velocidade constante em relação ao solo, quando abandona uma caixa com alimentos, conforme a imagem.



<<https://tinyurl.com/y8cvpjzm>> Acesso em: 15.11.2017. Original colorido.

Desprezando a resistência do ar, a trajetória descrita pela caixa de alimentos terá a forma de uma

- a) parábola, do ponto de vista de um observador que estiver no avião.
- b) linha reta vertical, do ponto de vista de um observador que estiver no avião.
- c) linha reta vertical, do ponto de vista de um observador que estiver na Terra.
- d) linha reta horizontal, do ponto de vista de um observador que estiver no avião.
- e) mesma figura para qualquer observador, pois a trajetória independe do referencial.

12. (Unifor - Medicina 2021) Em uma madrugada de julho de 2020, um acidente em uma indústria de refrigerantes em Fortaleza fez com que um cilindro contendo gás carbônico com massa de seis toneladas fosse arremessado a partir de um ângulo de  $30$  graus com a horizontal, passando por cima de um prédio de quatro andares atingindo uma altura máxima de aproximadamente  $14,8$  metros. Considerando apenas o movimento do centro de massa como no esquema a seguir e desprezando todas as forças dissipativas, é correto afirmar que o alcance máximo atingido pelo cilindro e a fração da energia total do sistema empregada para elevá-lo até a altura máxima, são respectivamente:

Disponível em: <https://g1.globo.com/ce/ceara/noticia/2020/07/17/cilindro-de-gas-explode-em-empresa-derefrigerantes-atinge-carro-e-casas-e-assusta-moradores-emfortaleza.ghtml>. Acesso em: 19 nov 2020.

Dados:

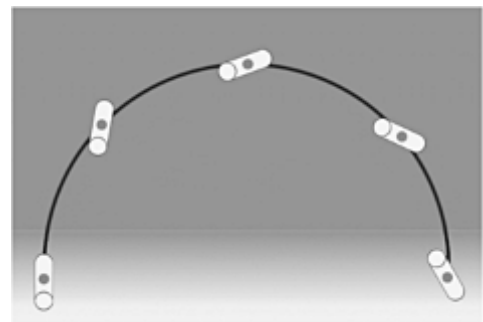
$$\text{sen}(30^\circ) = 0,50$$

$$\text{cos}(30^\circ) = 0,87$$

$$\text{sen}(60^\circ) = 0,87$$

$$\text{cos}(60^\circ) = 0,50$$

Gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$



- a) 59 m e 1,00
- b) 116 m e 0,25
- c) 59 m e 4,00
- d) 148 m e 0,25
- e) 103 m e 0,75



13. (Ufsc 2019) O Circo da Física apresenta um *show* de acrobacias com bicicletas no qual o ciclista, de massa  $m$ , mostra toda a sua agilidade, equilíbrio e destreza. Para o grande final, ocorre o salto de bicicleta entre rampas, quando o piloto salta em duas situações. Primeiramente, o salto ocorre da rampa A até a rampa B, quando a bicicleta está com velocidade  $V_0$ , como mostra a Figura 1. Em seguida, para radicalizar ainda mais, o salto ocorre da rampa A até a rampa C, quando a bicicleta está com velocidade  $V_0$ , como mostra a Figura 2.

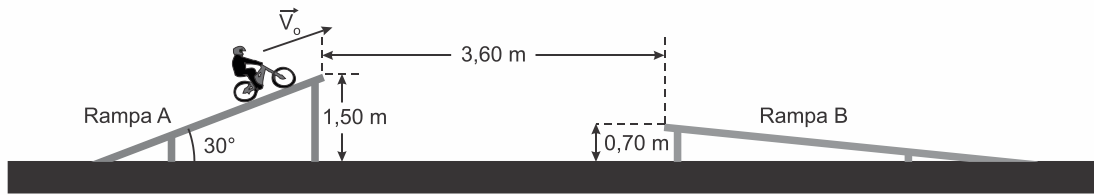


Figura 1

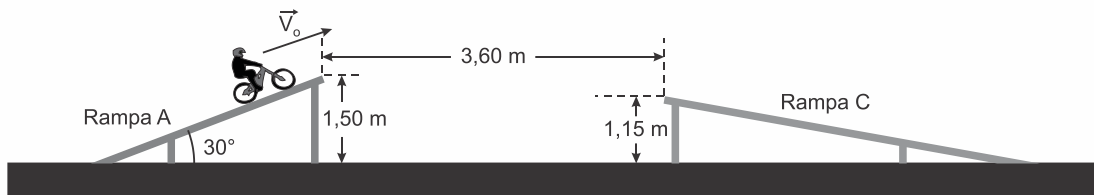
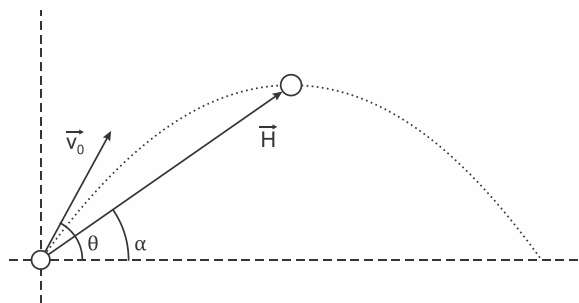


Figura 2

Dados:  $\begin{cases} \text{sen } 30^\circ = 0,5 \\ \text{cos } 30^\circ = 0,8 \end{cases}$

Desconsiderando a resistência do ar e com base no exposto, é correto afirmar que:

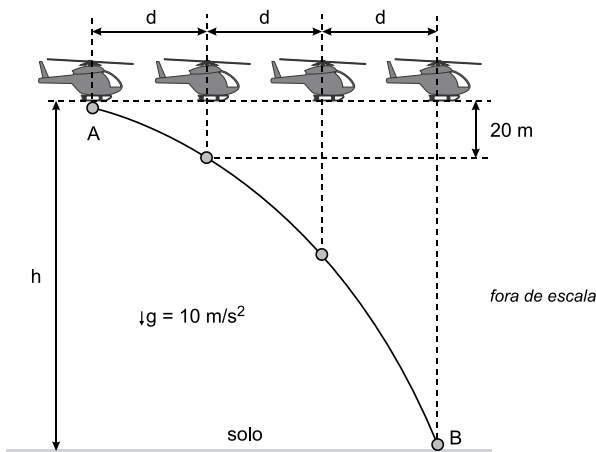
- 01) com a velocidade  $V_0 = 6,00 \text{ m/s}$ , o ciclista consegue fazer o salto até as rampas de pouso nas duas situações.
  - 02) se o ciclista conseguir fazer o salto até as rampas de pouso nas duas situações com a mesma velocidade  $V_0$ , então a energia cinética ao tocar as rampas será a mesma nas duas situações.
  - 04) se o ciclista, na situação da Figura 2, alcançar a altura máxima de 2,30 m, então conseguirá fazer o salto até a rampa C.
  - 08) para fazer o salto corretamente, o conjunto ciclista+bicicleta deverá possuir uma velocidade  $V_0$  mínima, que depende da massa do conjunto.
  - 16) com a velocidade  $V_0 = 6,00 \text{ m/s}$ , o tempo necessário para o ciclista percorrer a distância horizontal de 3,60 m é de 0,75 segundos nas duas situações.
14. (Epcar (Afa) 2023) Uma partícula é lançada obliquamente e descreve um movimento parabólico, sem resistência do ar. No momento do lançamento dessa partícula, o vetor velocidade ( $\vec{v}_0$ ) faz o ângulo  $\theta$  com a horizontal e, ao atingir a altura máxima de sua trajetória, o vetor posição ( $\vec{H}$ ) da partícula faz um ângulo  $\alpha$  com essa mesma horizontal, conforme ilustra figura a seguir:



Nessas condições, a razão entre as tangentes de  $\theta$  e  $\alpha$ ,  $\frac{\text{tg } \theta}{\text{tg } \alpha}$  vale.

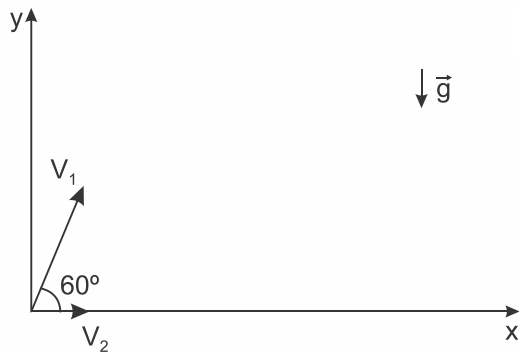
- a) 1,5
- b) 2,0
- c) 2,5
- d) 3,0

15. (Famema 2017) Um helicóptero sobrevoa horizontalmente o solo com velocidade constante e, no ponto A, abandona um objeto de dimensões desprezíveis que, a partir desse instante, cai sob ação exclusiva da força peso e toca o solo plano e horizontal no ponto B. Na figura, o helicóptero e o objeto são representados em quatro instantes diferentes.



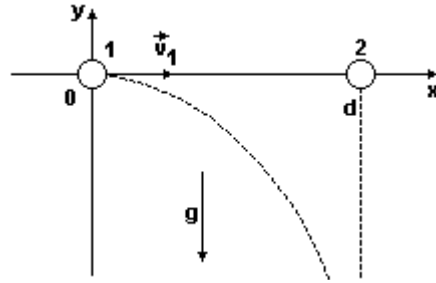
Considerando as informações fornecidas, é correto afirmar que a altura  $h$  de sobrevoos desse helicóptero é igual a

- 200 m.
  - 220 m.
  - 240 m.
  - 160 m.
  - 180 m.
16. (Ufpe 2008) Em um dado instante, duas partículas de massas iguais são lançadas a partir da origem do sistema de coordenadas. A partícula 1 é lançada obliquamente, com velocidade de módulo  $V_1 = 20$  m/s, segundo um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal (eixo  $x$ ). A partícula 2 é lançada horizontalmente, sobre uma superfície sem atrito, com velocidade de módulo  $V_2 = 10$  m/s.



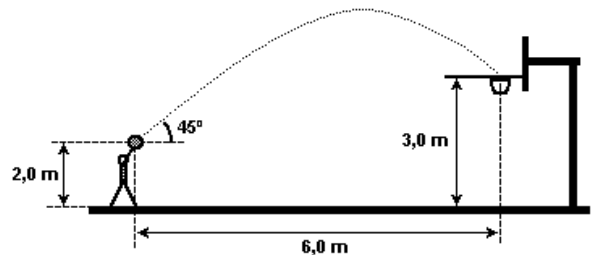
Determine o módulo da velocidade do centro de massa do sistema das duas partículas, no instante em que a partícula 1 atinge o ponto mais alto de sua trajetória, em m/s.

17. (Ufu 2007) Na figura a seguir, o objeto 1 parte da origem do sistema de coordenadas com velocidade  $V_1$  na direção  $x$  e, no mesmo instante, o objeto 2 parte do repouso da posição  $x = d$ , realizando um movimento de queda livre. Ambos estão sob a ação da aceleração da gravidade, cujo módulo é  $g$ .



Desprezando a resistência do ar, determine as coordenadas  $x$  e  $y$  da posição (em função de  $d$ ,  $v_1$  e  $g$ ) onde os objetos 1 e 2 encontrar-se-ão.

18. (Ufpr 2007) A figura a seguir ilustra um jogador de basquete no momento em que ele faz um arremesso bem sucedido. A bola, ao ser arremessada, está a uma distância horizontal de 6,0 m da cesta e a uma altura de 2,0 m em relação ao piso. Ela sai das mãos do jogador com uma velocidade de módulo  $6\sqrt{2}$  m/s fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal. A cesta está fixada a uma altura de 3,0 m em relação ao piso. Desprezando a resistência do ar, determine:



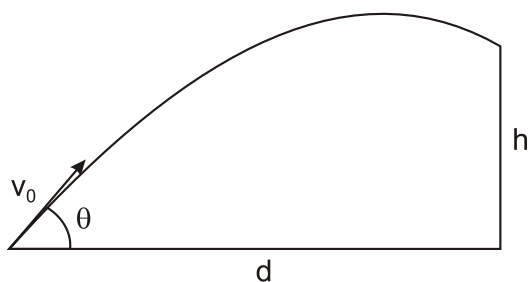
- a altura máxima atingida pela bola em relação ao piso.
  - o intervalo de tempo entre o instante em que a bola sai da mão do jogador e o instante em que ela atinge a cesta.
19. (Ufg 2009) O Comitê Olímpico se preocupa com alguns fatores aparentemente "irrelevantes" na realização das provas, como a velocidade do vento, o tempo chuvoso, a altitude etc., os quais podem influenciar os resultados e recordes mundiais. Por exemplo, na prova de salto em distância, a atleta brasileira Maurren Maggi ganhou a medalha de ouro em Pequim com a marca de 7,04 m, enquanto a medalha de prata foi obtida com a marca de 7,03 m. Tipicamente, o ângulo de projeção para este tipo de prova varia entre  $15^\circ$  e  $25^\circ$ . Considerando que em Pequim o salto de Maurren Maggi foi realizado com um ângulo de  $22,5^\circ$ ,
- qual o módulo da velocidade da atleta no momento do salto?
  - Se este salto fosse realizado em outro local, cuja aceleração da gravidade fosse 1% menor, qual seria a marca atingida por Maurren Maggi?

**Dados:**

Considere a  $\sqrt{2} \approx 1,408$   
 Aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$

20. (Fuvest 2011) Os modelos permitem-nos fazer previsões sobre situações reais, sendo, em geral, simplificações, válidas em certas condições, de questões complexas. Por exemplo, num jogo de futebol, a trajetória da bola após o chute e o débito cardíaco dos jogadores podem ser descritos por modelos.

- Trajetória da bola: quando se despreza a resistência do ar, a trajetória da bola chutada, sob a ação da gravidade ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ), é dada por  $h = d \tan \theta - 5(d_2/v_0^2)(1 + \tan^2 \theta)$ , em que  $v_0$  é a velocidade escalar inicial (em m/s),  $\theta$  é o ângulo de elevação (em radianos) e  $h$  é a altura (em m) da bola a uma distância  $d$  (em m), do local do chute, conforme figura abaixo.



- Débito cardíaco (DC): está relacionado ao volume sistólico VS (volume de sangue bombeado a cada batimento) e à frequência cardíaca FC pela fórmula  $DC = VS \times FC$ .

Utilize esses modelos para responder às seguintes questões:

- a) Durante uma partida, um jogador de futebol quer fazer um passe para um companheiro a 32 m de distância. Seu chute produz uma velocidade inicial na bola de 72 km/h. Calcule os valores de  $\tan \theta$  necessários para que o passe caia exatamente nos pés do companheiro.
- b) Dois jogadores, A e B, correndo moderadamente pelo campo, têm frequência cardíaca de 120 batimentos por minuto. O jogador A tem o volume sistólico igual a 4/5 do volume sistólico do jogador B. Os dois passam a correr mais rapidamente. A frequência cardíaca do jogador B eleva-se para 150 batimentos por minuto. Para quanto subirá a frequência cardíaca do jogador A se a variação no débito cardíaco ( $DC_{\text{final}} - DC_{\text{inicial}}$ ) de ambos for a mesma?

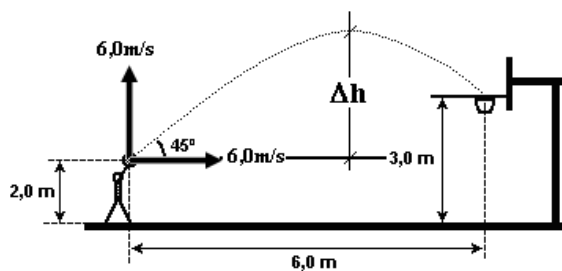
**GABARITO**

- |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. 28 | 3. B  | 4. E  | 5. B  |
| 6. A  | 7. A  | 8. B  | 9. E  | 10. C |
| 11. B | 12. B | 13. 0 | 14. B | 15. E |

16. 10 m/s.

17. O encontro ocorre nas coordenadas  $(x,y)$  onde  $x = d$  e  $y = -g \cdot d^2 / (2v_1^2)$

18. a) A figura mostra as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial



O movimento na vertical é MUV, portanto:

$$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S \rightarrow 0 = 6^2 - 20\Delta h \rightarrow \Delta h = 1,8 \text{ m}$$

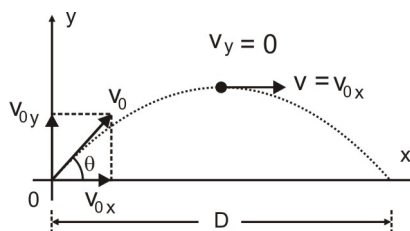
Portanto:  $H_{\text{max}} = 2 + 1,8 = 3,8 \text{ m}$

b) O movimento na horizontal é UM, portanto:

$$\Delta S = V \cdot t \rightarrow 6 = 6t \rightarrow t = 1,0 \text{ s}$$

19. a) Dados:  $\sqrt{2} = 1,408$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\theta = 22,5^\circ$ ;  $D = 7,04 \text{ m}$ .

Caso o estudante não se lembre da expressão do alcance horizontal (D) para o lançamento oblíquo, vamos deduzi-la.



Da figura:  $v_{ox} = v_0 \cos \theta$  e  $v_{oy} = v_0 \sin \theta$ . Calculemos o tempo de subida ( $t_s$ ), lembrando que no ponto mais alto a componente vertical da velocidade é nula ( $v_y = 0$ ).

Da função horária da velocidade:  $v_y = v_{oy} - g t$ , vem:  
 $0 = v_0 \sin \theta - g t_s \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$

Como o tempo de descida ( $t_d$ ) é igual ao de subida, o tempo total ( $t_T$ ) é a soma dos tempos. Assim:

$$t_T = 2 t_s \Rightarrow t_T = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

A componente horizontal da velocidade se mantém constante ( $v_x = v_{0x}$ ). Assim, no eixo x o movimento é uniforme:

$\Delta x = v_{0x} t$ . Quando  $\Delta x = D$ , o tempo é o tempo total. Então:

$D = v_{0x} t_T \Rightarrow D = v_0 \cos \theta \left( 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g} \right) \Rightarrow D = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \theta \cos \theta$ . (Não vem ao caso aqui, mas essa expressão permite concluir que, para ângulos complementares, o alcance horizontal é o mesmo, pois eles têm senos e cossenos trocados).

Continuando nossa dedução, lembremos que:  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$ . Finalmente:

$D = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$ . Colocando os valores dados, vem:

$$7,04 = \frac{v_0^2}{10} \sin(2 \times 22,5) \Rightarrow v_0^2 = \frac{7,04 \times 10}{\sin 45^\circ} = \frac{70,4}{\frac{1,408}{2}} = \frac{70,4}{0,704} = 100 \Rightarrow v_0 = \sqrt{100} \Rightarrow$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s.}$$

b) A nova aceleração da gravidade ( $g'$ ) é 1% menor, ou seja, 99% de  $g$ . Assim:

$$g' = 0,99 g = 0,99(10) = 9,9 \text{ m/s}^2.$$

Aplicando novamente a expressão deduzida, o novo alcance horizontal ( $D'$ ) será:

$$D' = \frac{v_0^2}{g'} \sin(2\theta) \Rightarrow D' = \frac{10^2}{9,9} (0,704) = \frac{70,4}{9,9} \Rightarrow D' = 7,11 \text{ m.}$$

20.

a) Dados:  $d = 32 \text{ m}$ ;  $v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ ;  $[h = d \operatorname{tg} \theta - 5(d^2/v_0^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)]$ .

Como a bola cai exatamente no pé do companheiro,  $h = 0$ .

Substituindo esses valores na expressão dada:

$$0 = 32 \operatorname{tg} \theta - 5 \left( \frac{32^2}{20^2} \right) (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \Rightarrow 0 = 32 \operatorname{tg} \theta - 12,8(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \Rightarrow$$

$$12,8 \operatorname{tg}^2 \theta - 32 \operatorname{tg} \theta + 12,8 = 0.$$

Dividindo por 12,8, vem:

$$\operatorname{tg}^2 \theta - 2,5 \operatorname{tg} \theta + 1 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4(1)(1)}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{2,5 \pm 1,5}{2} \begin{cases} \operatorname{tg} \theta_1 = 2. \\ \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b) Dados:  $FC_{\text{inicial}}^A = FC_{\text{inicial}}^B = 150 \text{ bpm}$ ;  $FC^B = 150 \text{ bpm}$ ;  
 $VS^A = \frac{4}{5} VS^B$ .

Calculando a variação do débito cardíaco de B:

$$(DC_{\text{final}}^B - DC_{\text{inicial}}^B) = VS^B (FC_{\text{final}}^B - FC_{\text{inicial}}^B) = VS^B (150 - 120) \Rightarrow$$

$$(DC_{\text{final}}^B - DC_{\text{inicial}}^B) = 30 VS^B$$

A variação do débito cardíaco de A é:

$$(DC_{\text{final}}^A - DC_{\text{inicial}}^A) = VS^A (FC_{\text{final}}^A - FC_{\text{inicial}}^A) = VS^A (FC_{\text{final}}^A - 120).$$

Como as variações são iguais e  $VS^A = \frac{4}{5} VS^B$ , temos:

$$\frac{4}{5} VS^B (FC_{\text{final}}^A - 120) = 30 VS^B \Rightarrow FC_{\text{final}}^A = 30 \frac{5}{4} + 120 \Rightarrow$$

$$FC_{\text{final}}^A = 157,5 \text{ batimentos/minuto.}$$