## 1. Conceitos

### 1.1 Elemento e conjunto

São conceitos primitivos, isto é, não são definidos.

Se um elemento $x$ pertence ao conjunto $A$, diz-se que $x \in A$. Caso contrário, diz-se que $x \notin A$.

Usam-se geralmente letras maiúsculas para representar conjuntos e letras minúsculas para representar elementos.

### 1.2 Conjunto vazio

O conjunto vazio é aquele que não possui elementos. Representa-se por $\varnothing$ ou { }.

**Ex.:** $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

### 1.3 Conjunto unitário

O conjunto unitário é aquele que possui apenas um elemento.

**Ex.:** $A = \{2012\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 3\}$

### 1.4 Subconjunto

Um conjunto $A$ é um subconjunto de um conjunto $B$ quando todos os elementos de $A$ pertencem a $B$. Representamos a inclusão de conjuntos por $A \subset B$ (lê-se $A$ está contido em $B$) ou $B \supset A$ (lê-se $B$ contém $A$). Se não ocorre a inclusão, usamos $\not\subset$ (não está contido) ou $\not\supset$ (não contém).

**Ex.:** $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ ; $\{1, 3\} \not\subset \{2, 3, 4\}$

**Obs.:** $\varnothing \subset A$ (o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto)

De fato, dizemos que $A \not\subset B$ se existe $a \in A$ tal que $a \notin B$. Dizer, portanto, que $\varnothing \not\subset A$ significa dizer que existe elemento $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$. Isso não é possível, já que o conjunto vazio não possui elemento.

### 1.5 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos $A$ e $B$ são ditos iguais quando todos os elementos de $A$ pertencem a $B$ e vice-versa, isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$.

### 1.6 Conjunto das partes (conjunto potência)

É o conjunto formado por todos os subconjuntos de um certo conjunto.

O conjunto das partes é representado por $P(A)$ ou $2^A$ (esta última não é tão usual.)

**Ex.:** Se $S$ é o conjunto de três elementos $\{1, 2, 3\}$, a lista de subconjuntos de $S$ é:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

Assim, o conjunto das partes de $S$ é $P(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Repare que $P(S)$ tem $8 = 2^3$ elementos e que S tem 3 elementos.

Teorema 1 (número de subconjuntos):

Um conjunto $A$ de $n$ elementos possui $2^n$ subconjuntos.

**Dem.**: Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para formar um subconjunto $X$ de $A$, devemos decidir, para cada elemento de $A$, se ele pertencerá ou não a $X$. Como temos $n$ elementos e para cada elemento, temos duas possibilidades (ou ele está no subconjunto ou não está), o número de subconjuntos de $A$ é $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$.

### 1.7 Conjunto universo

É um conjunto que contém todos os elementos do contexto envolvido e também todos os conjuntos desse contexto. Por exemplo, se estivermos em um problema envolvendo conjuntos de números inteiros, um possível conjunto universo é $Z$. Poderíamos escolher também para conjunto universo $Q$. Em geral, usa-se a letra $U$ para representar o conjunto universo.

### 1.8 Diagramas de Venn

Os diagramas de Venn são diagramas que mostram todas as possíveis relações lógicas entre uma coleção finita de conjuntos. É mais frequente o uso de diagramas de Venn para representar dois ou três conjuntos. Nesse caso, usamos círculos para representá-los.

**Obs.:** os diagramas de Venn são muito úteis para resolver problemas de conjuntos, pois ajudam a organizar os dados do problema de forma bastante clara, como veremos nos exercícios resolvidos.

## 2. Operações envolvendo conjuntos

### 2.1 União

A união de dois conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertençam a $A$ ou $B$ (para que um elemento esteja na união, basta que ele pertença a **pelo menos** um dos conjuntos).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

**Ex.:**

$\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ; $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ ; $\{1\} \cup \varnothing = \{1\}$

### 2.2 Interseção

A interseção de dois conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertençam a $A$ e a $B$ (para que um elemento esteja na interseção, ele deve pertencer **aos dois** conjuntos).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

**Ex.:**

$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$ ; $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{1, 4\}$ ; $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \varnothing$

**Obs.:** Dois conjuntos $A$ e $B$ são ditos disjuntos quando $A \cap B = \varnothing$

### 2.3 Diferença de conjuntos

Dados dois conjuntos $A$ e $B$, definimos $A - B = \{x$ tal que $x \in A$ e $x \notin B\}$ (elementos que **pertencem** a $A$, mas **não pertencem** a $B$).

**Ex.:** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 6\}$. Temos que $A - B = \{4, 5\}$.

**Obs.:** Também representamos a diferença entre os conjuntos $A$ e $B$ por $A \setminus B$.

> **Complementar**
>
> Dados dois conjuntos $A$ e $B$ com $A \subset B$, o complementar de A em relação a B é o conjunto cujos elementos estão em $B$ e não estão em $A$. O complementar de $A$ em relação a $B$ é denotado por $C_B^A = B - A$. O complementar de um conjunto $A$ em relação ao conjunto universo $U$, representado por $A^c$ (ou $\bar{A}$), é o conjunto formado pelos elementos do universo $U$ que **não pertencem** ao conjunto A.
>
> **Ex.:** $A = \{1, 2, 3, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; $C_B^A = B - A = \{4, 5\}$
> $U = \mathbb{N}^*$ e $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x > 4\}$. Temos que $A^c = \{1, 2, 3\}$.

### 2.4 Diferença simétrica

A diferença simétrica de dois conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto dos elementos que pertencem à união dos dois conjuntos, mas não pertencem à interseção dos dois conjuntos.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

**Ex.:** $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Temos que $A \Delta B = \{1, 4, 5\}$.

## 3. Propriedades

### 3.1 Distributiva (da união em relação à interseção)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

**Dem.:**

A demonstração consiste em duas partes (este passo é **padrão** em demonstrações de igualdades de conjuntos):

**Parte 1:** $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Seja $x \in A \cup (B \cap C)$. Queremos provar que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Temos que, $x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$. Dividiremos então em dois casos:

**Caso 1:** $x \in A$

Aqui, como $x \in A$, segue que $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ e então $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**Caso 2:** $x \in (B \cap C)$

Aqui, $x \in B$ e $x \in C$ e então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, o que nos dá $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**Parte 2:** $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Análogo à parte 1 (mas em uma prova, você deve escrever).

### 3.2 Distributiva(da interseção em relação à união)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

### 3.3 1ª Lei de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

**Dem.:**

**Parte 1:** $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$

Seja $x \in (A \cup B)^c$. Queremos provar que $x \in A^c \cap B^c$. Como $x \notin (A \cup B)$, então $x \notin A$ e $x \notin B$. Com isso, segue que $x \in A^c$ e $x \in B^c$, o que nos dá $x \in A^c \cap B^c$.

**Parte 2:** $(A \cup B)^c \supset A^c \cap B^c$:

Análogo à parte 1.

### 3.4 2ª Lei de De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

### 3.5 $A - B = A \cap B^C$

## 4. Princípio da inclusão-exclusão:

Para calcular o número de elementos de uma união, usamos as seguintes fórmulas (válidas apenas para conjuntos finitos):

**Obs.:** $n(X)$ representará a quantidade de elementos de $X$.

### 4.1 Para dois conjuntos

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Essa fórmula expressa que para calcular o número de elementos de uma união, não basta somar as quantidades de elementos dos dois conjuntos, pois alguns elementos podem ser contados duas vezes. Esses elementos que são contados duas vezes são justamente os elementos da interseção e, por isso, devemos retirar $n(A \cap B)$. Essa ideia se estende de maneira análoga para mais conjuntos.

### 4.2 Para três conjuntos

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

### 4.3 Para $n$ conjuntos

$$n\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i n(A_i) - \sum_{i<j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n\left(\bigcap_i A_i\right)$$

Teorema 2 (estimativa do número de elementos da união):

Dados $m$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_m$, temos que $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \leq n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m)$, com igualdade se, e somente se, os conjuntos são disjuntos dois a dois.

**Dem.:**

Cada elemento de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ é contado exatamente uma única vez no lado esquerdo, enquanto no lado direito cada elemento é contado pelo menos uma vez. Caso um elemento esteja em mais de um conjunto, será contado mais de uma vez no lado direito e então a desigualdade será estrita. Assim, o caso de igualdade ocorre se cada elemento é contado exatamente uma vez do lado direito, ou seja, quando os conjuntos não possuem elementos em comum e, portanto, são disjuntos dois a dois.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** **(EN)** Sendo A = {{1}, {2}, {1, 2}} pode-se afirmar que:

(A) $\{1\} \notin A$
(B) $\{1\} \subset A$
(C) $\{1\} \cap \{2\} \not\subset A$
(D) $2 \in A$
(E) $\{1\} \cup \{2\} \in A$

**Solução**
(A) F, pois {1} é elemento de A (é verdade que $\{1\} \in A$)
(B) F, pois 1 não é elemento de A
(C) F, pois $\{1\} \cap \{2\} = \varnothing$ e sabemos que $\varnothing \subset A$ para qualquer conjunto A
(D) F, pois 2 não é elemento de A
(E) V, pois $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ e {1, 2} é elemento de A.

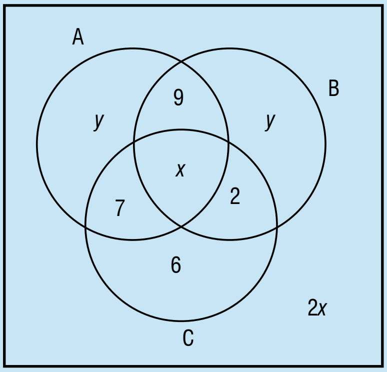
**Obs.:** Usa-se que $a \in A$ se existe uma cópia de $a$ dentro do conjunto A. Além disso, usa-se $\{a\} \subset A$ se $a \in A$. Lembre, também, que não há nenhum problema em um conjunto ser elemento de outro conjunto (e neste caso, usamos o símbolo de pertence).

**02** **(UNESP)** Considere os pacientes da AIDS classificados em três grupos de risco: hemofílicos, homossexuais e toxicômanos. Em um certo país, de 75 pacientes, verificou-se que:

I. 41 são homossexuais;
II. 9 são homossexuais e hemofílicos, e não são toxicômanos;
III. 7 são homossexuais e toxicômanos, e não são hemofílicos;
IV. 2 são hemofílicos e toxicômanos, e não são homossexuais;
V. 6 pertencem apenas ao grupo de risco dos toxicômanos;
VI. o número de pacientes que são apenas hemofílicos é igual ao número de pacientes que são apenas homossexuais;
VII. o número de pacientes que pertencem simultaneamente aos três grupos de risco é a metade do número de pacientes que não pertencem a nenhum dos grupos de risco.

Quantos pacientes pertencem simultaneamente aos três grupos de risco?

**Solução**
Esse é um problema clássico de conjuntos e a principal ideia é montar o diagrama de Venn com os três conjuntos: A é o conjunto dos homossexuais, B o dos hemofílicos e C o dos toxicômanos. Sejam $x$ o número de pacientes que estão nos 3 grupos e $y$ o número de pacientes que são apenas homossexuais. Utilizando as informações de (II) a (VII), temos o seguinte diagrama:




Usando a informação (I) e o total de pacientes, temos que

$$\begin{cases} x + y + 16 = 41 \\ 3x + 2y + 24 = 75 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $x = 1$ (e $y = 24$).

**03** **(UFC)** Sejam $M$ e $N$ conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de $M$ é igual ao dobro do número de subconjuntos de $N$, o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é:

(A) o triplo do número de elementos de $M$.
(B) o triplo do número de elementos de $N$.
(C) o quádruplo do número de elementos de $M$.
(D) o dobro do número de elementos de $M$.
(E) o dobro do número de elementos de $N$.

**Solução: Letra E.**
Sejam $m$ e $n$ as quantidades de elementos dos conjuntos $M$ e $N$. O número de subconjuntos de $M$ é $2^m$ e o número de subconjuntos de $N$ é $2^n$. Do enunciado, temos que $2^m = 2 \cdot 2^n \Leftrightarrow m = n + 1$. O número de elementos da união $M \cup N$ é dado por $n(M) + n(N) - n(M \cap N) = n + 1 + n - 1 = 2n$, que é o dobro do número de elementos de $N$.

**04** Prove que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. (2ª Lei de de Morgan)
Sejam $X = (A \cap B)^c$ e $Y = A^c \cup B^c$.

**1ª parte:** $X \subset Y$

Seja $u \in X$. Como $X = (A \cap B)^c$, temos que $u \notin A \cap B$, o que nos dá que $u$ não pode ser elemento de $A$ e $B$ simultaneamente. Em outras palavras, temos que $u \notin A$ ou $u \notin B$ e, por isso, temos que $u \in A^c$ ou $u \in B^c$. Portanto, $u \in A^c \cup B^c = Y$. Como provamos que um elemento genérico de $X = (A \cap B)^c$ é elemento de $Y = A^c \cup B^c$, segue que $X \subset Y$.

**2ª parte:**

Seja $v \in Y$. Como $Y = A^C \cup B^C$, temos que $v \in A^C$ ou $v \in B^C$, o que nos dá que $v \notin A$ ou $v \notin B$. Em outras palavras, temos que $v$ não pode estar simultaneamente em $A$ e $B$, logo, $v \notin A \cap B$, então $v \in (A \cap B)^C = X$. Com o mesmo argumento da 1ª parte, chegamos a $Y \subset X$.
$\therefore X = Y$

**05** **(Princípio da inclusão-exclusão para três conjuntos)** Sendo $A$, $B$ e $C$ conjuntos, prove que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

**Solução**
Vamos usar o mesmo princípio para dois conjuntos:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$

Temos que: $\begin{cases} n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{cases}$ (*)

Usando a distributiva da interseção em relação à união, temos que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Usando mais uma vez o princípio da inclusão-exclusão com dois conjuntos, temos que $n((A \cap C) \cup (B \cap C)) = n(A \cap C) + (B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \quad (**)$ (aqui, usamos que $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Somando as equações de (*) e substituindo (**), temos o resultado.

**Obs. 1:** O princípio é bastante intuitivo e pode ser entendido de maneira informal através de um diagrama de Venn.

**Obs. 2:** Para demonstrar o caso geral (com *n* conjuntos), podemos usar o princípio da indução finita ou um argumento de combinatória.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

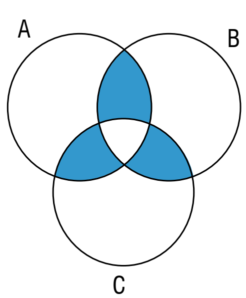
**01** Dado um conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e três subconjuntos de $E$, a saber $A$, $B$ e $C$, tais que:

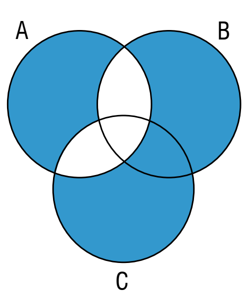
$A \cap B = \{2, 4\}$; $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$; $A \cap C = \{2, 3\}$; $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$, determine $C \cap (B \cup A)$ e $A \cap (B \cap C)$.

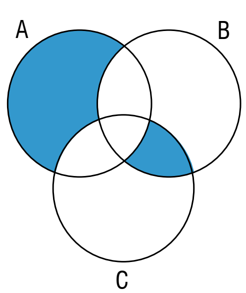
**02** **(CMRJ)** São dados os conjuntos A, B e C, tais que $n(B \cup C) = 18$, $n(A \cap B) = 6$, $n(A \cap C) = 5$, $n(A \cap B \cap C) = 2$ e $n(A \cup B \cup C) = 21$. O valor de $n[A - (B \cap C)]$ é:

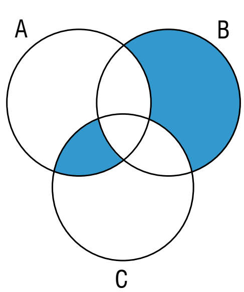
(A) 6.
(B) 7.
(C) 8.
(D) 9.
(E) 10.

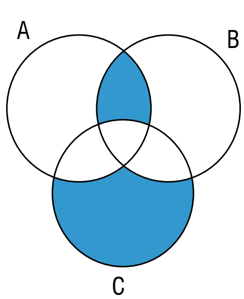
**03** **(CN)** Sejam $U$ o conjunto das brasileiras, $A$ o conjunto das cariocas, $B$ o conjunto das morenas e $C$ o conjunto das mulheres de olhos azuis. O diagrama que representa o conjunto de mulheres morenas ou de olhos azuis, e não cariocas; ou mulheres cariocas e não morenas e nem de olhos azuis é:

(A)



(B)



(C)



(D)



(E)



**04** **(CN)** Em um grupo de 142 pessoas foi feita uma pesquisa sobre três programas de televisão A, B e C e constatou-se que:

I. 40 não assistem a nenhum dos três programas;
II. 103 não assistem ao programa C;
III. 25 só assistem ao programa B;
IV. 13 assistem aos programas A e B;
V. O número de pessoas que assistem somente aos programas B e C é a metade dos que assistem somente a A e B;
VI. 25 só assistem a dois programas; e
VII. 72 só assistem a um dos programas.

Pode-se concluir que o número de pessoas que assistem

(A) ao programa A é 30.
(B) ao programa C é 39.
(C) aos três programas é 6.
(D) aos programas A e C é 13.
(E) aos programas A ou B é 63.

**05** **(EPCAR)** Para uma turma de 80 alunos do CPCAr, foi aplicada uma prova de matemática valendo 9,0 pontos distribuídos igualmente em 3 questões sobre:

I. Função;
II. Geometria;
III. Polinômios.

Sabe-se que:

- apesar de 70% dos alunos terem acertado a questão sobre FUNÇÃO, apenas 1/10 da turma conseguiu nota 9,0;
- 20 alunos acertaram as questões sobre FUNÇÃO e GEOMETRIA;
- 22 acertaram as questões sobre GEOMETRIA e POLINÔMIOS;
- 18 acertaram as questões sobre FUNÇÃO e POLINÔMIOS.

A turma estava completa nessa avaliação, ninguém tirou nota zero, no critério de correção não houve questões com acertos parciais e o número de acertos apenas em GEOMETRIA é o mesmo que o número de acertos apenas em POLINÔMIOS.
Nessas condições, é correto afirmar que:

(A) o número de alunos que só acertaram a segunda questão é o dobro do número de alunos que acertaram todas as questões.
(B) metade da turma só acertou uma questão.
(C) mais de 50% da turma errou a terceira questão.
(D) apenas 3/4 da turma atingiu a média maior ou igual a 5,0.

**06** **(PUC)** Numa comunidade constituída por 1800 pessoas há três tipos favoritos de programas de TV: Esporte (E), Novela (N) e Humorismo (H). A tabela seguinte indica quantas pessoas assistem a estes programas.

| Programas | Número de espectadores |
|---|---|
| E | 400 |
| N | 1220 |
| H | 1080 |
| E e N | 220 |
| N e H | 800 |
| E e H | 180 |
| E, N e H | 100 |

Através desses dados, calcule o número de pessoas da comunidade que não assiste a qualquer dos três tipos de programa.

**07** **(FUVEST)** Depois de *n* dias de férias, um estudante observa que:

I. Choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde.
II. Quando chove de manhã não chove à tarde.
III. Houve 5 tardes sem chuva.
IV. Houve 6 manhãs sem chuva.

Então *n* é igual a:

**08** **(UDESC)** O Festival de Dança de Joinville é considerado o maior do mundo pelo *Guinness Book of Records* de 2005. Desde 1998, este festival é realizado no Centreventos Cau Hansen, que tem capacidade para 4.200 pessoas por noite.
Suponha que no 28º Festival de Dança, realizado em julho de 2010, houve uma noite exclusiva para cada uma das seguintes modalidades: ballet, dança de rua e jazz. A noite da dança de rua teve seus ingressos esgotados; na noite do jazz restaram 5% dos ingressos; e a noite do ballet teve 90% dos ingressos disponíveis vendidos. Sabe-se que algumas pessoas costumam prestigiar mais de uma noite do Festival. Neste ano, 700 pessoas assistiram à dança de rua e ao jazz; 1.610 assistiram ao ballet e à dança de rua; 380 assistiram ao ballet e ao jazz e 105 prestigiaram as três modalidades de dança. Se todas as pessoas que adquiriram os ingressos do Festival assistiram à(s) apresentação(ões), então o número total de pessoas distintas que assistiu a pelo menos uma das três modalidades anteriormente mencionadas foi:

(A) 9385.
(B) 9070.
(C) 9595.
(D) 6275.
(E) 6905.

**09** **(UFF)** Considere *T* o conjunto de todas as pessoas do mundo; *M* o conjunto de todas aquelas que são muçulmanas e *A* o conjunto de todas aquelas que são árabes. Sabendo que nem toda pessoa que é muçulmana é árabe, pode-se representar o conjunto de pessoas do mundo que não são muçulmanas nem árabes por:

(A) $T - (A \cup M)$.
(B) $T - A$.
(C) $T - (A \cap M)$.
(D) $(A - M) \cup (M - A)$.
(E) $M - A$.

**10** **(UFRJ)** Um clube oferece a seus associados aulas de três modalidades de esporte: natação, tênis e futebol. Nenhum associado pôde se inscrever simultaneamente em tênis e futebol, pois, por problemas administrativos, as aulas destes dois esportes serão dadas no mesmo horário. Encerradas as inscrições, verificou-se que: dos 85 inscritos em natação, 50 só farão natação; o total de inscritos para as aulas de tênis foi de 17 e, para futebol, de 38; o número de inscritos só para as aulas de futebol excede em 10 o número de inscritos só para as de tênis. Quantos associados se inscreveram simultaneamente para aulas de futebol e natação?

**11** **(UFRJ)** Uma amostra de 100 caixas de pílulas anticoncepcionais fabricadas pela Nascebem S.A. foi enviada para a fiscalização sanitária. No teste de qualidade, 60 foram aprovadas e 40 reprovadas, por conterem pílulas de farinha. No teste de quantidade, 74 foram aprovadas e 26 reprovadas, por conterem um número menor de pílulas que o especificado. O resultado dos dois testes mostrou que 14 caixas foram reprovadas em ambos os testes. Quantas caixas foram aprovadas em ambos os testes?

**12** **(UFRJ)** Os 87 alunos do 3º ano do ensino médio de uma certa escola prestaram vestibular para três universidades: A, B e C. Todos os alunos dessa escola foram aprovados em pelo menos uma das universidades, mas somente um terço do total obteve aprovação em todas elas. As provas da universidade A foram mais difíceis e todos os alunos aprovados nesta foram também aprovados em pelo menos uma das outras duas.
Os totais de alunos aprovados nas universidades A e B foram, respectivamente, 51 e 65. Sabe-se que, dos alunos aprovados em B, 50 foram também aprovados em C. Sabe-se também que o número de aprovados em A e em B é igual ao de aprovados em A e em C.
Quantos alunos foram aprovados em apenas um dos três vestibulares prestados? Justifique.

**13** **(ITA)** Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \setminus A) \cup P(\varnothing)$ é igual a:

(A) 8.
(B) 16.
(C) 20.
(D) 17.
(E) 9.

**14** **(UDESC)** Considere em um conjunto universo, com 7 elementos, os subconjuntos A, B e C, com 3, 5 e 7 elementos, respectivamente. É correto afirmar que:

(A) $(A \cap B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos.
(B) $(A \cap B) \cap C$ tem no mínimo 1 elemento.
(C) $C \cap B$ tem 3 elementos.
(D) $A \cap C$ tem 2 elementos.
(E) $A \cap B$ pode ser vazio.

**15** **(AFA)** Em um grupo de *n* cadetes da Aeronáutica, 17 nadam, 19 jogam basquetebol, 21 jogam voleibol, 5 nadam e jogam basquetebol, 2 nadam e jogam voleibol, 5 jogam basquetebol e voleibol e 2 fazem os três esportes. Qual o valor de *n*, sabendo-se que todos os cadetes desse grupo praticam pelo menos um desses esportes?

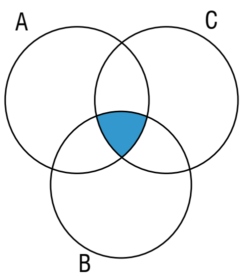
(A) 31.
(B) 37.
(C) 47.
(D) 51.

**16** **(AFA)** Entrevistando 100 oficiais da AFA, descobriu-se que 20 deles pilotam a aeronave TUCANO, 40 pilotam o helicóptero ESQUILO e 50 não são pilotos. Dos oficiais entrevistados, quantos pilotam o TUCANO e o ESQUILO?

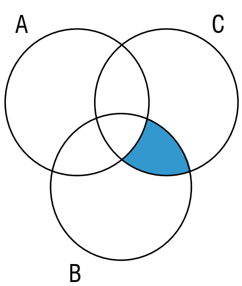
(A) 5.
(B) 10.
(C) 15.
(D) 20.

**17** **(EFOMM)** Representando graficamente o conjunto $C^{A}_{B \cap C}$, temos:

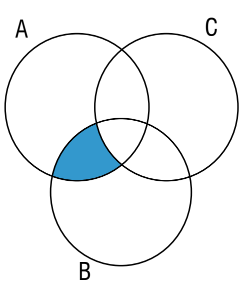
(A)



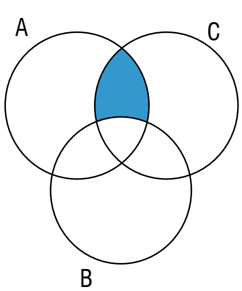

(B)



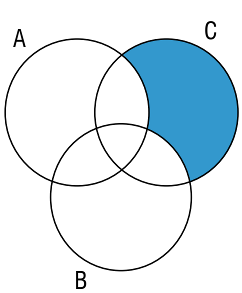

(C)




(D)




(E)




**18** **(EFOMM)** Foi feita uma pesquisa entre 50 alunos de uma turma sobre suas preferências em relação a dois professores A e B. O resultado foi o seguinte:

I. Vinte alunos preferiram o professor A.
II. Trinta e cinco alunos preferiram o professor B.
III. Cinco alunos não tiveram preferência.

Baseado nesse resultado, pode-se afirmar que o número de alunos que preferiu os dois professores foi:

(A) 5.
(B) 10.
(C) 15.
(D) 20.
(E) 25.

**19** **(EFOMM)** Dados os conjuntos:

A $= \{x \in R \mid -2 < x \leq 4\}$
B $= \{x \in R \mid -1 \leq x < 3\}$
C $= \{x \in R \mid -3 \leq x < 5\}$
B $= \{x \in R \mid x \geq 0\}$

O resultado de $(A \cap C_C^B) \cup (D \cap C_A^B)$ é:

(A) [3,4]
(B) ]–2, –1[ ∪ [3, 4]
(C) [–2, –1] ∪ [3,5]
(D) ]–2, 4] ∪ [5, + ∞]
(E) ]–3, –1]

**20** **(AFA – Adaptada)** Considere um subconjunto A contido em $\mathbb{N}^*$ e constituído por *y* elementos dos quais 13 são múltiplos de 4; 7 são múltiplos de 10; 5 são múltiplos de 20 e 9 são números ímpares. É correto dizer que *y* é um número.

(A) par menor que 19.
(B) De 24 a 29.
(C) ímpar entre 10 e 20.
(D) primo maior que 21.

**21** **(CN)** Considere os conjuntos $A = \{1, \{1\}, 2\}$ e $B = \{1, 2, \{2\}\}$ e as cinco afirmações:

I. $A - B = \{1\}$
II. $\{2\} \subset B \cap A^C$
III. $\{1\} \subset A$
IV. $A \cap B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
V. $B - A = \{\{2\}\}$

Logo,

(A) todas as afirmações estão erradas.
(B) se existe apenas uma afirmação correta.
(C) as afirmações ímpares estão corretas.
(D) as afirmações III e V estão corretas.
(E) as afirmações I e IV são as únicas incorretas.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** **(CMRJ)** Considere o conjunto C = {1, 2, 3}. Para $n \in C$, sejam: $A_n = \{x \in R \mid 2n - 2 < x < 2n\}$ e $B_n = \{x \in R \mid 2n - 1 < x < 2n + 1\}$. Podemos afirmar que:

(A) a interseção da união dos conjuntos $A_n$ com a união dos conjuntos $B_n$ é o intervalo ]0, 7].
(B) a união de todos os conjuntos da forma $A_n \cap B_n$ é o intervalo ]1, 6[.
(C) a interseção de todos os conjuntos da forma $A_n \cup B_n$ é vazia.
(D) a união da interseção dos conjuntos $A_n$ com a interseção dos conjuntos $B_n$ é o intervalo ]2, 4[.
(E) a interseção da interseção dos conjuntos $A_n$ com a interseção dos conjuntos $B_n$ é o intervalo ]1, 7[.

**02** Seja *P* o conjunto das pessoas em uma festa. Para cada pessoa $x \in P$, vamos definir o subconjunto $A_x \subset P$ como o conjunto dos amigos de *x*, isto é, $A_x = \{y \in P;\ y \text{ amigo de } x\}$. Estamos considerando aqui que, se *x* é amigo de *y*, então *y* também é amigo de *x* e também que $x \in A_x$ (*x* é amigo de si próprio). Assinale a alternativa **incorreta**.

(A) Se *x* e *y* tem um amigo em comum, então $A_x \cap A_y \neq \varnothing$.
(B) Se a interseção de todos os subconjuntos $A_x$ é não vazia $\left(\bigcap_{x \in P} A_x \neq \varnothing\right)$, então existe alguém que é amigo de todas as pessoas da festa.
(C) Se $\bigcap_{x \in P} A_x \neq \varnothing$, então existe uma pessoa *z*, tal que $A_z = P$.
(D) Se $x \in A_y$ e $y \in A_z$ então, necessariamente, $x \in A_z$.
(E) $\bigcup_{x \in P} (A_x - \{x\})$ pode ser diferente de *P*, pois pode ocorrer que alguém não possua amigos na festa (além de si próprio).

**03** **(ITA)** Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito *X*. Sejam *A*, *B* e *C* conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a:

(A) 11.
(B) 14.
(C) 15.
(D) 18.
(E) 25.

**04** **(UERJ)** Considere um grupo de 50 pessoas que foram identificadas em relação a duas categorias: quanto à cor dos cabelos, louras ou morenas; quanto à cor dos olhos, azuis ou castanhos. De acordo com essa identificação, sabe-se que 14 pessoas no grupo são louras com olhos azuis, que 31 pessoas são morenas e que 18 têm olhos castanhos. Calcule, no grupo, o número de pessoas morenas com olhos castanhos.

**05** **(UFU)** Sejam *A*, *B* e *C* conjuntos de números inteiros, tais que *A* tem 8 elementos, B tem 4 elementos, C tem 7 elementos e $A \cup B \cup C$ tem 16 elementos. Então, o número máximo de elementos que o conjunto $D = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ pode ter é igual a:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.

**06** **(UFSJ)** Assinale a alternativa que indica quantos são os números inteiros de 1 a 21.000, que **não** são divisíveis por 2, por 3 e nem por 5.

(A) 6.300.
(B) 5.600.
(C) 7.000.
(D) 700.

**07** **(EN)** Considere os conjuntos $A = \{x\}$ e $B = \{x, \{A\}\}$ e as proposições:

I. $\{A\} \in B$;
II. $\{x\} \in A$;
III. $A \in B$;
IV. $B \subset A$
V. $\{x, A\} \subset B$

As proposições falsas são:

(A) I, III e V.
(B) II, IV e V.
(C) II, III, IV e V.
(D) I, III, IV e V.
(E) I, III e IV.

**08** **(EN)** Se $A_h$ é o intervalo $\left[0, \frac{1}{h}\right]$, $h \in \mathbb{N}$ então $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \ldots$ é:

(A) {};
(B) $\left[0, \frac{1}{h}\right]$;
(C) é um conjunto unitário;
(D) $\left[0, \frac{1}{h}\right)$;
(E) n.r.a.

**09** Seja $\wp(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A. Sobre as afirmativas:

I. $A \in \wp(A)$;
II. Se $A \subset B$, então $A \in \wp(B)$;
III. Se $A \in \wp(B)$ e $B \in \wp(A)$, então $A = B$;
IV. Se $A \in \wp(B)$ e $B \in \wp(C)$, então $A \subset C$.

Podemos concluir que o número de sentenças verdadeiras é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

**10** **(CN)** Numa cidade, 28% das pessoas têm cabelos pretos e 24% possuem olhos azuis. Sabendo que 65% da população de cabelos pretos têm olhos castanhos e que a população de olhos verdes que tem cabelos pretos é 10% do total de pessoas de olhos castanhos e cabelos pretos, qual a porcentagem do total de pessoas de olhos azuis, que tem os cabelos pretos?

**Obs.:** Nesta cidade só existem pessoas de olhos azuis, verdes ou castanhos.

(A) 30,25%.
(B) 31,25%.
(C) 32,25%.
(D) 33,25%.
(E) 34,25%.

**11** Sejam $A$, $B$ e $C$ subconjuntos de um conjunto universo $U$. Das afirmações:

I. Se $A \cap B = A \cap C$, então $B = C$.
II. $((A \cup B) \cap C) \cap ((A \cup B^c) \cap C) = A \cap C$
III. $(A \cup B \cup C)^c = (A \cup C)^c \cap (A \cup B)^c$

é (são) verdadeira(s):

(A) apenas II.
(B) apenas III.
(C) apenas I e II.
(D) apenas II e III.
(E) todas.

**12** Prove que se $A \Delta B = A \Delta C$, então $B = C$.

**13** Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ subconjuntos de um conjunto universo $U$. Das afirmações:

I. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$
II. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
III. Se $(A \setminus B) \cup B = A$, então $B = A$.

é (são) verdadeira(s):

(A) apenas I.
(B) apenas II.
(C) apenas I e II.
(D) apenas II e III.
(E) todas.

**14** Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ subconjuntos de um conjunto universo $U$. Das afirmações:

I. Se $A \in B$ e $B \in C$, então $A \in C$
II. Se $A \in B$ e $B \subset C$, então $A \in C$
III. $P(\{A \cap [(B^c \setminus C^c) \cup D]\} \cap [(D^c \setminus A) \cap (C \setminus B)]$ é unitário
IV. $P(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 \mid A_1 \in P(A) \text{ e } B_1 \in P(B)\}$

o número de afirmações verdadeiras é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** Dados os conjuntos $A$ e $B$, seja $X$ um conjunto com as seguintes propriedades:

I. $A$ e $B$ estão contidos em $X$.
II. Se $A$ está contido em $Y$ e $B$ está contido em $Y$, então $X$ está contido em $Y$.

Prove que $X = A \cup B$.

**02** **(EN)** Se 70% da população gostam de samba, 75% de choro, 80% de bolero e 85% de rock, quantos por cento da população, no mínimo, gostam de samba, choro, bolero e rock?

**03** Em Porto Alegre foi feita uma pesquisa com a população sobre suas bebidas prediletas e o resultado foi:
– 60% tomam refrigerante (A) 70% tomam vinho (B)
– 80% tomam café (C) 90% tomam chimarrão (D)

Verifica-se ainda que nenhuma pessoa consome as quatro bebidas. Qual a percentagem das pessoas que consomem refrigerante ou vinho?

**04** Em um concurso, 3 problemas $A$, $B$ e $C$ foram propostos. Dos concorrentes, 25 resolveram pelo menos 1 problema. Dos concorrentes que não resolveram o problema $A$, o número dos que resolveram $B$ foi o dobro do número dos que resolveram $C$. O número de estudantes que resolveram apenas o problema $A$ foi uma unidade maior do que o número dos que resolveram $A$ e pelo menos um outro problema. Dos que resolveram apenas 1 problema, metade não resolveu $A$. Calcule o número de estudantes que resolveram apenas o problema $B$.

**05** Sejam $A$, $B$, $C$ conjuntos tais que $B \subset A \subset C$. Seja $X$ tal que $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$. Prove que $X = (C \setminus A) \cup B$.

**06** Sejam $A$, $B$, $C$ conjuntos tais que $B \subset A$ e $A$ e $C$ são disjuntos. Seja $X$ tal que $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$. Prove que $X = (A \setminus B) \cup C$.

**07** **(AIME)** Dados conjuntos $A$, $B$ e $C$, sejam $|A|, |B|, |C|$ suas quantidades de elementos, respectivamente, e sejam $s(A)$, $s(B)$, $s(C)$ suas quantidades de subconjuntos, respectivamente. Sabendo que $|A| = |B| = 100$ e $s(A) + s(B) + s(C) = s(A \cup B \cup C)$, determine:

a. $|C|$
b. $|A \cup B \cup C|$
c. o valor mínimo de $|A \cap B \cap C|$

# 1. Conceitos

## 1.1 Proposição

É toda oração declarativa que exprime uma (proposição simples) ou mais (proposição composta) informações. Uma proposição sempre é verdadeira ou falsa, nunca ambas simultaneamente (Princípio da não contradição) e também não admite uma terceira hipótese (Princípio do terceiro excluído).

**Ex.:** A lua é um satélite da Terra (verdadeira); Vasco da Gama descobriu o Brasil (falsa)

## 1.2 Proposição funcional

*p(x)* é uma proposição funcional num dado conjunto *U* quando ela assumir valores verdadeiros ou falsos a partir dos elementos de *U*. O conjunto dos valores para os quais uma proposição funcional é definida denomina-se seu **conjunto-universo** e o conjunto de valores para os quais a proposição é verdadeira denomina-se seu **conjunto-verdade ou solução**.

**Ex.:** *p(x)*: o número natural *x* é par.

## 1.3 Conectivos

Chamam-se conectivos palavras usadas para formar novas proposições a partir de outras. Os conectivos usuais são: “e”, “ou”, “não”, “se ... então ...”, “ ... se e somente se ...”.

**Ex.:** O triângulo ABC é equilátero **se e somente se** é equiângulo.

## 1.4 Tabela verdade

É o dispositivo que permite a determinação dos valores lógicos de uma proposição composta, isto é, que possui mais de uma informação, a partir dos valores lógicos das proposições simples que a compõem. O número de linhas de uma tabela verdade é $2^n$, em que $n$ é o número de proposições simples (cada proposição simples admite 2 valores).

**Obs.:** Quando uma proposição composta só admite valores verdadeiros na última coluna, dizemos que ela é uma **tautologia**, quando só admite valores falsos, dizemos que é uma **contradição** e quando admite ambos os valores lógicos, dizemos que é uma **contingência**.

# 2. Operações Lógicas

## 2.1. Negação ($\sim$) / Complementar ($A^C$)

Chama-se negação de uma proposição $p$ a proposição representada por “não $p$”, cujo valor lógico é verdade (V) quando $p$ é falsa (F) e é falso (F) quando $p$ é verdadeira. Assim, “não $p$” tem o valor lógico oposto ao de $p$. Representamos a negação de $p$ por $\sim p$. Podemos resumir as informações em uma tabela verdade:

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

**Ex.:**

**I.** $p$: João é irmão de Roberto.
$\sim p$: João não é irmão de Roberto.

**II.** $p$: Todos os homens são elegantes.
$\sim p$: Nem todos os homens são elegantes.

No exemplo 1, em termos de conjuntos, sendo $A = \{x \mid x \text{ é irmão de Roberto}\}$, $p$ significa $x \in A$. Sua negação é $x \notin A$.

## 2.2 Disjunção ($\vee$) / União ($\cup$)

Chama-se disjunção de duas proposições $p$ e $q$ a proposição representada por “$p$ ou $q$”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições é verdadeira e é a falsidade quando as proposições são ambas falsas. Representamos a disjunção de $p$ e $q$ por $p \vee q$. Podemos resumir as informações em uma tabela verdade:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

**Ex.:** $p$: João é irmão de Roberto.
$q$: Maria não é mãe de João.
$p \vee q$: João é irmão de Roberto ou Maria não é mãe de João.

Considerando as proposições: $p$: $x \in A$, $q$: $x \in B$, veja que $p \vee q$ significa $x \in A \cup B$

**Obs.:** Disjunção Exclusiva($\underline{\vee}$)

O valor lógico da disjunção exclusiva é a verdade somente quando $p$ é verdadeira ou $q$ é verdadeira, mas não quando $p$ e $q$ são ambas verdadeiras.

| $p$ | $q$ | $p \underline{\vee} q$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

**Ex.:** $p$: João viajou de ônibus.
$q$: João viajou de avião.
$p \underline{\vee} q$: João viajou de ônibus ou de avião.

## 2.3 Conjunção ($\wedge$) / Interseção ($\cap$)

Chama-se conjunção de duas proposições $p$ e $q$ a proposição representada por “$p$ e $q$”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos. Representamos a conjunção de $p$ e $q$ por $p \wedge q$. Podemos resumir as informações em uma tabela verdade:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

**Ex.:** $p$: Maria comprou bala.
$q$: Maria comprou chiclete.
$p \wedge q$: Maria comprou bala e chiclete.
Considerando as proposições: $p$: $x \in A$, $q$: $x \in B$, veja que $p \wedge q$ significa $x \in A \cap B$.

## 2.4 Condicional ($\rightarrow$) / Inclusão ($\subset$)

Chama-se condicional uma proposição representada por "se $p$ então $q$", cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que $p$ é verdadeira e $q$ é falsa e é a verdade (V) nos demais casos. Representamos a condicional por $p \rightarrow q$. Podemos resumir as informações em uma tabela verdade:

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

**Ex.:** $p$: Roberto ingressará no IME.
$q$: Roberto ganhará um carro.
$p \rightarrow q$: Se Roberto ingressar no IME, então Roberto ganhará um carro.

**Obs. 1:** Atenção! Um erro comum é achar que se Roberto ganhou um carro, ele passou no IME. Não podemos concluir isso a partir da frase: "Se Roberto ingressar no IME, então Roberto ganhará um carro."

**Obs. 2:** Para demonstrar um teorema do tipo $p \rightarrow q$, o que se faz é supor que $p$ é verdadeira e a partir daí concluir que $q$ também é.

## 2.5 Bicondicional ($\leftrightarrow$) / Igualdade ($=$)

Chama-se bicondicional uma proposição representada por "$p$ se e somente se $q$", cujo valor lógico é a verdade (V) quando ambas são verdadeiras ou ambas são falsas e é a falsidade (F) nos demais casos. Representamos a bicondicional por $p \leftrightarrow q$. Podemos resumir as informações em uma tabela verdade:

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

**Ex.:** $p$: ABCD é um paralelogramo
$q$: As diagonais de ABCD se cortam ao meio.
$p \leftrightarrow q$: ABCD é um paralelogramo se e somente se as suas diagonais se cortam ao meio.

**Obs.:** Um teorema do tipo $p \leftrightarrow q$ tem duas partes a serem demonstradas: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.

# 3. Construção de tabelas verdade

Analisaremos as duas proposições a seguir:

## 3.1 P: $\sim((\sim p) \wedge (\sim q))$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \wedge (\sim q)$ | $\sim((\sim p) \wedge (\sim q))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V |
| V | F | F | V | F | V |
| F | V | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V | F |

## 3.2 $P(p, q, r)$: $(p \rightarrow ((\sim q) \vee r)) \wedge \sim(q \vee (p \leftrightarrow (\sim r)))$

| $p$ | $q$ | $r$ | $\sim q$ | $\sim q \vee r$ | $p \rightarrow (\sim q \vee r)$ | $\sim r$ | $p \leftrightarrow \sim r$ | $q \vee (p \leftrightarrow \sim r)$ | $\sim(q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$ | $\wedge$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V | V | F | F | V | F | F |
| V | V | F | F | F | F | V | V | V | F | F |
| V | F | V | V | V | V | F | F | F | V | V |
| V | F | F | V | V | V | V | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V | F | V | V | F | F |
| F | V | F | F | F | V | V | F | V | F | F |
| F | F | V | V | V | V | F | V | V | F | F |
| F | F | F | V | V | V | V | F | F | V | V |

**Obs.:** Podemos usar tabelas verdade para demonstrar igualdades entre conjuntos (esta é uma saída mecânica, que é bastante eficiente principalmente para igualdades envolvendo apenas 2 conjuntos, pois só temos 4 possibilidades a testar). Veremos como este método pode ser empregado nos exercícios resolvidos.

# 4. Quantificadores

## 4.1 Quantificador universal

$(\forall x)$ $(p(x))$. Lê-se: Para todo $x$, vale a proposição $p(x)$.

**Ex.:** $(\forall x > 0)$ ; $(2x > x)$ (Para todo $x > 0$, tem-se $2x > x$)

## 4.2 Quantificador existencial

$(\exists x)$ $(p(x))$. Lê-se: Existe $x$, tal que vale a proposição $p(x)$.

**Ex.:** $(\exists k \in \mathbb{N})$ ; ($8k + 1$ é primo). (Existe $k$ natural tal que $8k + 1$ é primo.)

# 5. Negação das operações lógicas

I. $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$
II. $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
III. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
IV. $\sim(p \to q) \leftrightarrow p \wedge (\sim q)$
V. $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p) \wedge q)$
VI. A negação do quantificador universal é o quantificador existencial, isto é, $(\sim\forall) \Leftrightarrow \exists$
VII. A negação do quantificador existencial é o quantificador universal, isto é, $(\sim\exists) \Leftrightarrow \forall$

**Ex.:**

I. $\sim p$: Nem todos os homens são elegantes.
Negação: Todos os homens são elegantes.

II. $p \vee q$: $2 > \sqrt{5}$ ou Santos é a capital de São Paulo.
$p$: $2 > \sqrt{5}$; $q$: Santos é a capital de São Paulo.
$\sim p$: 2 ″ $\sqrt{5}$; $\sim q$: Santos não é a capital de São Paulo.
Negação de $p \vee q$: 2 ″ $\sqrt{5}$ e Santos não é a capital de São Paulo.

III. $p \wedge q$: Brasília é a capital do Brasil e ($2^0 = 0$ ou $3^0 = 1$).
$p$: Brasília é a capital do Brasil; $q$: $2^0 = 0$ ou $3^0 = 1$.
$\sim p$: Brasília não é a capital do Brasil; $\sim q$: $2^0 \neq 0$ e $3^0 \neq 1$.
Negação de $p \wedge q$: Brasília não é a capital do Brasil ou ($2^0 \neq 0$ e $3^0 \neq 1$).

IV. $p \to q$: Se $3 + 2 = 6$, então $4 + 4 = 9$.
$p$: $3 + 2 = 6$; $q$: $4 + 4 = 9$.
$\sim q$: $4 + 4 \neq 9$
Negação de $p \to q$: $3 + 2 = 6$ e $4 + 4 \neq 9$

V. $p \leftrightarrow q$: $\tan\pi = 0$ se, e somente se, $\text{sen}\ \pi = 0$.
$p$: $\tan \pi = 0$; $q$: $\text{sen}\ \pi = 0$
$\sim p$: $\tan \pi \neq 0$; $q$: $\text{sen}\ \pi \neq 0$
Negação de $p \leftrightarrow q$: ($\tan \pi = 0$) e $\text{sen}\ \pi \neq 0$ ou ($\tan \pi \neq 0$ e $\text{sen}\ \pi = 0$).

VI. $p$: Todo brasileiro é magro.
$\sim p$: Existe brasileiro que não é magro.

VII. $p$: $(\exists x)$ $(|x| < 0)$
$\sim p$: $(\forall x)$ $(|x| \geq 0)$

# 6. Técnicas de demonstração

## 6.1 Redução ao absurdo

O argumento do absurdo é bastante simples. Consiste em negar a proposição do problema (por isso a importância de saber negar proposições!) e então chegar a uma contradição.

**Ex.:** Prove que $\sqrt{2}$ não é racional.

**Solução:**

Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional. Nesse caso, existiriam $a$ e $b$ inteiros tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ e $a$ e $b$ não têm fatores comuns (podemos pegar a fração irredutível). Daí, elevando ao quadrado, temos que $a^2 = 2b^2$. Daí, temos:

$$a^2 \text{ par} \Rightarrow a \text{ par} \Rightarrow a = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2 \text{ par} \Rightarrow b \text{ par}.$$

Veja então que $a$ e $b$ são pares, o que é uma contradição a '$a$ e $b$ não têm fatores comuns'.
Portanto, devemos ter que $\sqrt{2}$ não é racional.

## 6.2 Contrapositiva

Podemos mostrar, através de uma tabela verdade, que provar um teorema do tipo $p \to q$ é equivalente a demonstrar $\sim q \to \sim p$.

**Ex.:** Se o produto de dois números reais positivos é maior que 100, então pelo menos um dos números é maior que 10.

Temos $p$: $xy > 100$ e $q$: $x > 10$ ou $y > 10$. O teorema que queremos provar é $p \to q$. Para isso, provaremos a contrapositiva $\sim q \to \sim p$.
Como $\sim p$: $xy \leq 100$ e $\sim q$: $x \leq 10$ e $y \leq 10$, basta provarmos que se $x \leq 10$ e $y \leq 10$, então $xy \leq 100$, o que segue multiplicando-se as duas desigualdades.

## 6.3 Princípio da indução finita

O princípio da indução finita (PIF) é muito útil para se provar propriedades referentes aos números naturais. A ideia do princípio consiste no seguinte: se sabemos que uma propriedade vale para determinado natural $n_0$ e, além disso, também sabemos que se a propriedade é válida para um natural $n \geq n_0$, então ela é válida para $n + 1$, podemos concluir que tal propriedade é válida para todos os naturais maiores ou iguais a $n_0$ (o funcionamento da indução é como um efeito dominó, em que uma pecinha empurra a outra, derrubando todas).

Podemos enunciar o princípio como a seguir:

Primeiro princípio da indução finita:

I. (Base da indução) Inicialmente, mostra-se que a proposição é válida para $n = n_0$.

II. (Hipótese de indução) Supõe-se que a proposição vale para $n \geq n_0$;

III. (Passo indutivo) A partir da hipótese, conclui-se que a proposição vale para $n + 1$.

**Obs.:** O PIF é um dos axiomas de Peano, que são os axiomas que dão base aos números naturais.

**Obs. 2:** Temos uma segunda versão do PIF, que é a seguinte:

(Segundo princípio da indução finita / Indução forte):

I. (Base da indução) Inicialmente, mostra-se que a proposição é válida para $n = n_0$.
II. (Hipótese de indução) Supõe-se que a proposição vale para todo $n_0 \leq k \leq n$.

III. (Passo indutivo) A partir da hipótese, conclui-se que a proposição vale para $n + 1$.

**Ex.:** Prove, por indução, que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Solução:**

Usaremos o 1º PIF:

I. Base: $n = 1 : 1^2 = \dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ (OK!)

II. Hipótese de indução: suponha que $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

III. Passo indutivo: Como $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, somando $(k+1)^2$ aos dois lados, temos que:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Isso conclui a indução.

**Obs.:** É muito importante saber esta fórmula de antemão.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01 (OBM)** Há três cartas viradas sobre uma mesa. Sabe-se que em cada uma delas está escrito um número inteiro positivo. São dadas a Carlos, Samuel e Tomás as seguintes informações:

I. todos os números escritos nas cartas são diferentes;
II. a soma dos números é 13;
III. os números estão em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Primeiro, Carlos olha o número na carta da esquerda e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Em seguida, Tomás olha o número na carta da direita e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Por fim, Samuel olha o número na carta do meio e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Sabendo que cada um deles sabe que os outros dois são inteligentes e escuta os comentários dos outros, qual é o número da carta do meio?

**Solução:**

Sejam $x$, $y$ e $z$ os números das cartas da esquerda, do meio e da direita, respectivamente. Temos que $x < y < z$ e $x + y + z = 13$. Assim, $x + x + x < x + y + z \Rightarrow x \leq 4$. Observemos que $x \neq 4$ (se $x = 4$, teríamos $y = x$). Se $x = 3$, Carlos concluiria que $y = 4$ e $z = 6$, portanto, $x \neq 3$. Assim, $x = 1$ ou $x = 2$ e; portanto, $y + z \geq 11$. Como $2 < y < z$, conclui-se que $6 \leq z \leq 9$. Se $z = 6$, Tomás concluiria que $y = 5$ e $x = 2$, portanto $z \neq 6$. Se $z = 9$, Tomás concluiria que $x = 1$ e $y = 3$. Assim, $z = 7$ ou $z = 8$.
Neste momento, Samuel poderia achar todas as possíveis soluções. Se $x = 1$ e $z = 7$, teríamos $y = 5$; se $x = 1$ e $z = 8$, teríamos $y = 4$; se $x = 2$ e $z = 7$, teríamos $y = 4$; se $x = 2$ e $z = 8$, teríamos $y = 3$. Assim, Samuel saberia que os possíveis valores de $y$ são 3, 4 e 5. Ora, se $y = 3$ ou $y = 5$, Samuel descobriria os números (se $y = 3$, Samuel concluiria que $x = 2$ e $z = 8$; se $y = 5$, Samuel concluiria que $x = 1$ e $z = 7$). Logo, o número da carta do meio é 4.

**02** Propriedade distributiva – Prove que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

**Solução:**

Sejam $p$: $x \in A$, $q$: $x \in B$ e $r$: $x \in C$. Queremos provar que $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Como temos 3 proposições, devemos construir uma tabela verdade com $2^3 = 8$ linhas:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \vee r$ | $p \wedge q$ | $p \wedge r$ | $p \wedge (q \vee r)$ | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $\leftrightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | F | V | V | V |
| V | F | V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | F | F | F | F | V |
| F | V | F | V | F | F | F | F | V |
| F | F | V | V | F | F | F | F | V |
| F | F | F | F | F | F | F | F | V |

Como obtemos uma tautologia, a igualdade segue.

**03** Para $n$ inteiro, prove que se $n^2$ é par, então, $n$ é par.

**Solução:**

Temos uma implicação $p \to q$ e, neste caso, é mais fácil demonstrar a sua contrapositiva $\sim q \to \sim p$ que é ‘se $n$ é ímpar, então $n^2$ é ímpar’. Veja que se $n$ é ímpar, temos que $n = 2k + 1$, com $k \in Z$. Daí, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$ e podemos concluir que $n^2$ é ímpar.

**04** Prove, por indução, que $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n$ natural.

**Solução:**

Seja $P(n)$ a afirmativa $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Inicialmente, veja que $P(1) : 1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$ é verdadeira. O princípio da indução finita consiste em trocar a dificuldade de provar que $P(n)$ é verdadeira por provar que $\begin{cases} P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ P(1) \text{ é verdade} \end{cases}$. Ou seja, agora que já sabemos que $P(1)$ é verdade, precisamos provar que sempre que $P(n)$ for verdadeira, teremos $P(n + 1)$ verdadeira.
Então, suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para um certo valor natural de $n$. Então, temos que $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Somando $n + 1$ nos dois lados da equação, teremos que:

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

que é exatamente a sentença $P(n + 1)$. Portanto, pelo princípio da indução finita, temos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n$ natural.

**Obs. 1:** É muito importante verificar o caso inicial $P(1)$, pois, sem ele, a indução 'não começa'.

**Obs. 2:**

Veja a simplicidade do princípio da indução finita. Ao sabermos que $\begin{cases} P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ P(1) \text{ é verdade} \end{cases}$, temos que $P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow ... \Rightarrow P(n) \Rightarrow ...$

**05** Considere a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... definida por $\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \end{cases}$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n$ natural maior ou igual a 3. Prove que, para $n \geq 6$, tem-se $F_n > n$.

**Solução:**

Nesse caso, cada termo da sequência depende dos dois anteriores. Por isso, não é possível aplicar o princípio da indução finita em seu formato tradicional. Neste caso, precisamos usar o que chamamos de 'indução forte' ou '2º princípio de indução finita'.

Inicialmente, vejamos os dois casos iniciais: $F_6 = 8 > 6$ e $F_7 = 13 > 7$. Agora, suponha que já provamos que $F_n > n$ para n = 6, 7, 8, ..., $n$. Vamos provar agora que a propriedade também vale para $n + 1$:

$$\begin{cases} F_n > n \\ F_{n-1} > n-1 \end{cases} \Rightarrow F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > n + n - 1 = 2n - 1 > n + 1$$

(a última passagem precisa de $n > 2$ e já sabemos que $n \geq 6$).

Portanto, pelo 2º princípio da indução finita, temos que $F_n > n$ para todo $n \geq 6$.

**Obs.:** Na verdade, nem utilizamos todos os valores menores que $n$ para fazer o passo de indução. Sendo $P(n)$: $F_n > n$, provamos que $\begin{cases} P(n-1), P(n) \Rightarrow P(n+1) \\ P(6), P(7) \text{ são verdadeiras} \end{cases}$ e isso fecha o problema. Repare a importância de exibirmos os dois casos iniciais, já que a indução precisa exatamente desses dois casos para 'começar'.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** Julgue como (verdadeiros ou falsos) os itens a seguir:

a. $x^2 - 18x + 81 = 49 \Leftrightarrow x = 16$
b. $x^2 - x - 12 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ ou $x \neq 4$
c. $x^2 - x - 12 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ e $x \neq 4$

**02** Determine a contrapositiva das proposições abaixo:

a. Se um quadrilátero é um quadrado, então ele é um retângulo.
b. Se um número é ímpar, então seu quadrado é ímpar.
c. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (aqui, $f(x)$ representa um objeto qualquer associado a $x$).

**03** Um aluno concluiu que $1 = 0$ com a seguinte sequência de argumentos

$$x = 1 \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = x - 1 \Leftrightarrow$$
$$x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Determine quais conectivos foram empregados de forma errada pelo aluno.

**04** Prove, usando uma tabela verdade, as leis de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

**05** **(EN)** A negativa da proposição $(\forall x)\ (\forall y)\ (x + y < 2 \rightarrow (x \geq 0 \vee y < 0))$ é:

(A) $(\exists x)\ (\forall y)\ (x + y \geq 2 \rightarrow (x < 0 \vee y \geq 0))$.
(B) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x + y < 2 \rightarrow (x < 0 \wedge y \geq 0))$.
(C) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x + y < 2 \wedge (x < 0 \wedge y \geq 0))$.
(D) $(\forall x)\ (\exists y)\ (x + y \geq 2 \rightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0))$.
(E) $(\exists x)\ (\exists y)\ (x + y \geq 2 \wedge (x < 0 \vee y \geq 0))$.

**06** **(EN)** Dada a proposição $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, podemos afirmar que é:

(A) logicamente falsa.
(B) uma tautologia.
(C) equivalente a $(p \vee q) \Leftrightarrow r$.
(D) equivalente a $(p \Leftrightarrow q) \vee r$.
(E) equivalente a $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow r$.

**07** **(EN)** A negação da proposição "$x \neq 3$ e $y < 2$" é:

(A) "$x = 3$ e $y \geq 2$".
(B) "$x = 3$ e $y > 2$".
(C) "$x = 3$ ou $y \geq 2$".
(D) "$x \neq 2$ e $y < 3$".
(E) "$x \neq 3$ ou $y < 2$".

**08** **(EN)** Considere a proposição: "Se $x > 5$ então $y = 6$". A proposição equivalente é:

(A) "Se $x < 5$ então $y \neq 6$".
(B) "Se $y \neq 6$ então $x < 5$".
(C) "Se $y > 5$ então $x = 5$".
(D) "Se $y \neq 6$ então $x \leq 5$".
(E) "Se $x \leq 5$ então $y \neq 6$".

**09** **(OBM)** O programa "Quem não quer o bode?" ficou muito famoso nos Estados Unidos. O programa era como a seguir: o participante deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas, há um carro e atrás de cada uma das outras duas, há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta escolhida. Entretanto, os organizadores do programa perceberam, com o passar do tempo, que aproximadamente dois em cada três participantes ganhavam o carro e, com isso, decidiram mudar o programa. Agora, cada uma das três portas teria um números de 1 a 3 e haveria um porteiro identificado com o número da porta. Cada porteiro faz uma afirmação que pode ser verdade ou mentira. Em seguida, o participante escolhe a porta na qual acredita que o carro está. Em um dos programas, foram ditas as seguintes afirmações pelos porteiros:

- Porteiro 1: O carro não está atrás da porta 3.
- Porteiro 2: O carro está atrás da minha porta.
- Porteiro 3: O carro não está atrás da minha porta.

Sabe-se que pelo menos uma das afirmações é verdade e que pelo menos uma é mentira. Atrás de qual porta está o carro?

(A) Porta 1.
(B) Porta 2.
(C) Porta 3.
(D) Não é possível identificar.
(E) Não é possível que esteja em nenhuma delas.

**10** **(OBM)** Qual é o produto da quantidade de vogais pela quantidade de consoantes na alternativa correta? (Não considere as letras A, B, C, D, E das alternativas na contagem.)

(A) Vinte e quatro.
(B) Trinta e seis.
(C) Quarenta e dois.
(D) Quarenta e oito.
(E) Cinquenta e seis.

**11** **(OBM)** No Planeta Nérdia, existem três espécies de nerds: ET-nerds, UFO-nerds e OVNI-nerds. A primeira mente quando chove e diz a verdade quando não chove; a segunda sempre mente; a terceira sempre diz a verdade. Certo dia, Bruberson, um nerd muito camarada, se encontra com quatro nerds. E eles falam:

*X*: "Hoje está chovendo."
*Y*: "O nerd que acabou de falar está mentindo."
*Z*: "Hoje não está chovendo."
*W*: "O primeiro nerd mentiu ou eu sou um ET-nerd."

Com quantos ET-nerds Bruberson falou no máximo?

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

**12** **(OBM)** Quatro amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo estão jogando cartas. São 20 cartas diferentes, cada carta tem uma entre 4 cores (azul, amarelo, verde, vermelho) e um número de 1 a 5. Cada amigo recebe cinco cartas, de modo que todas as cartas são distribuídas. Eles fazem as seguintes afirmações:

Arnaldo: "Eu tenho quatro cartas com o mesmo número."
Bernaldo: "Eu tenho as cinco cartas vermelhas."
Cernaldo: "As minhas cinco cartas são de cores que começam com a letra V."
Dernaldo: "Eu tenho três cartas de um número e duas cartas de outro número."

Sabe-se que somente uma das afirmações é falsa. Quem fez essa afirmação?

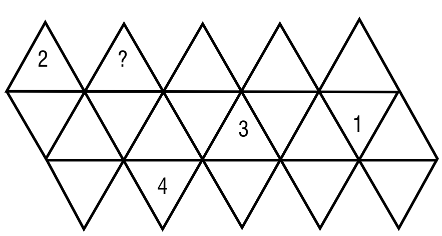
(A) Arnaldo.
(B) Bernaldo.
(C) Cernaldo.
(D) Dernaldo.
(E) Não é possível definir.

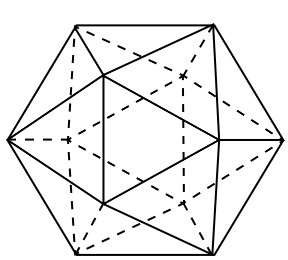
**13** **(OBM)** Sempre que Agilulfo volta para casa depois da escola com uma advertência, se sua mãe está em casa, ela o coloca de castigo. Sabendo-se que ontem à tarde Agilulfo não foi colocado de castigo, qual das seguintes afirmações é certamente verdadeira?

(A) Agilulfo recebeu advertência ontem.
(B) Agilulfo não recebeu advertência ontem.
(C) Ontem à tarde a sua mãe estava em casa.
(D) Ontem à tarde a sua mãe não estava em casa.
(E) Nenhuma das afirmações acima é certamente verdadeira.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** **(OBM)** A figura a seguir foi recortada em cartolina e depois dobrada para formar um icosaedro. As faces em branco foram numeradas de modo que ao redor de cada vértice (pontas do sólido) apareçam os números de 1 a 5. Qual número está na face com a interrogação?

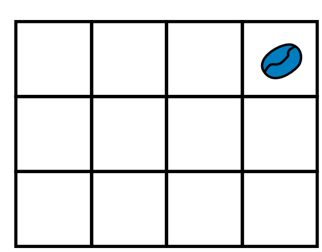


Icosaedro

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

**02** **(OBM)** A figura representa uma barra de chocolate que tem um amendoim apenas num pedaço. Elias e Fábio querem repartir o chocolate, mas nenhum deles gosta de amendoim. Eles combinam de dividir o chocolate quebrando-o ao longo das linhas verticais ou horizontais da barra, um depois do outro e retirando o pedaço escolhido, até que alguém tenha que ficar com o pedaço do amendoim. Por sorteio, coube a Elias começar a divisão, sendo proibido ficar com mais da metade do chocolate logo no começo. Qual deve ser a primeira divisão de Elias para garantir que Fábio fique com o amendoim ao final?



(A) Escolher a primeira coluna à esquerda.
(B) Escolher as duas primeiras colunas à esquerda.
(C) Escolher a terceira linha, de cima para baixo.
(D) Escolher as duas últimas linhas, de cima para baixo.
(E) Qualquer uma, já que Fábio forçosamente ficará com o amendoim.

**03** Prove, usando indução finita, as proposições abaixo:

a. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

b. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

c. $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ ,em que $x\neq 1$

d. $(1+x)^n\geq 1+nx,\ \forall x\in[-1,+\infty[$ (desigualdade de Bernoulli)

**04** Demonstre, usando indução, que o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2n.

**05** Prove que se um segmento de comprimento unitário é dado, é sempre possível construir um segmento de comprimento $\sqrt{n}$ .

**06**

a. Mostre, usando indução, que para todo natural *n*,
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$$

b. Mostre que para todo natural *n*, $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\geq\dfrac{1}{2}$ (tente fazer por indução para ver o que ocorre).

**07** Mostre que $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ para todo natural *n*.

**08** Prove que $2^{2n}$ + 24n – 10 é múltiplo de 18 para todo *n* natural.

**09** Considere a sequência $(S_n)$ dada por $S_{n+1}=S_n^2-2\ \ \forall n, S_0=4$. Mostre que $S_n=(2+\sqrt{3})^{2^n}+(2-\sqrt{3})^{2^n}$ para todo natural *n*.

**10** Quadrado Mágico – Desejamos preencher um tabuleiro 3 *x* 3 colocando em cada casa um número entre 1 e 9 (inclusive) de modo que seja respeitada a condição de que a soma dos números de uma linha, coluna ou diagonal qualquer, seja constante. Qual o valor obtido para a soma constante e qual o número que deve ocupar o centro do tabuleiro?

**11** **(OBM)** Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** O plano euclidiano é dividido em regiões traçando-se *n* retas. Mostre que o número de regiões desenhadas é sempre menor do que $2^n$.

**02** Duzentos alunos de alturas diferentes são posicionados em 10 linhas, cada uma com 20 alunos. De cada uma das 20 colunas assim formadas, o menor aluno é escolhido e então, dentre esses 20, marcamos o maior como sendo o aluno *A*. Em seguida, voltando-se a configuração inicial, escolhe-se o maior aluno de cada linha, e desses 10 alunos escolhidos, marcamos o menor aluno como sendo *B*. Qual dos dois alunos marcados é o maior?

**03** **(IME)** No produto abaixo, o $\underline{*}$ substitui algarismos diferentes de 3 e não necessariamente iguais. Determine o multiplicando e o multiplicador.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & * & * & 3 & * \\
 & & \times & & * & * & 3 \\
\hline
 & & & 3 & * & * & * \\
 & * & * & * & 3 & 3 & \\
 & * & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

**04** Na Inglaterra um garoto escreve ao pai a seguinte carta:

$$\begin{array}{l}
\text{SEND} \\
\text{MORE}\ + \\
\hline
\text{MONEY}
\end{array}$$

Quanto dinheiro (money) ele pediu ao pai? (substitua cada letra por um algarismo, letras diferentes por algarismos diferentes)

**05** *N* caixas menores são colocadas em uma caixa vazia. A seguir, em cada uma destas caixas menores, ou são colocadas *N* caixas menores ainda ou não é colocada caixa alguma. O processo se repete um certo número *K* de vezes. Determine o número de caixas vazias, sabendo que ao final há *M* caixas cheias.

**06** Prove que: $(\forall n)(n\in\mathbb{N}\rightarrow 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}>\dfrac{n}{2})$.

**07** Prove que $\dfrac{2^{3^n}+1}{3^{n+1}}$ é inteiro para todo *n* natural.

**08** Prove que todo inteiro maior que 1 é primo ou produto de primos. (Teorema Fundamental da Aritmética)

**09** **(Torre de Hanói)** Dispõe-se de 3 pinos e *n* discos de vidro, com um furo no meio, sendo que os discos têm pesos distintos dois a dois. Sabe--se que se um disco de peso maior é colocado sobre um disco de peso menor, então este se quebra. É proposto então o seguinte jogo: "Todos os *n* discos estão encaixados no primeiro pino, de maneira que olhando de baixo para cima estão em ordem decrescente de peso. O movimento permitido é passar o disco que está na posição superior de um pino para outro pino." Qual é o menor número de movimentos necessários para se passar todos os discos para o terceiro pino, podendo usar o segundo pino (sem quebrar nenhum disco)?

**10** É comum utilizarmos um diagrama com 3 circunferências para resolver problemas envolvendo três conjuntos. Mostre que é impossível fazer um diagrama desse tipo, com circunferências, para o caso de 4 conjuntos.

**11** Em uma festa, toda mulher dança com algum homem e nenhum homem dança com todas as mulheres. Demonstre que existem homens $H_0$ e $H_1$ e mulheres $M_0$ e $M_1$ tais que $H_0$ dança com $M_0$, $H_1$ dança com $M_1$, $H_1$ não dança com $M_0$, $H_0$ não dança com $M_1$.

**12** Prove que todo número da forma $\left(\sqrt{2}-1\right)^k$, *k* natural, pode ser colocado na forma $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$.

**13** Há uma moeda falsa entre doze moedas dadas. Sabe-se que a moeda falsa difere das demais apenas no peso, porém, não se sabe se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as demais. Todas as moedas genuínas têm o mesmo peso. Identifique a moeda falsa e se ela é mais leve ou mais pesada que as demais, fazendo apenas três pesagens em numa balança de braços.

**14** Considere 2*n* pontos no plano. Prove que o número máximo de segmentos que podem ser traçados ligando pares desses pontos sem que se forme um triângulo é $n^2$.

# 1. Par ordenado

## 1.1 Conceito

Admitiremos o par ordenado $(a, b)$ como conceito primitivo, levando-se em consideração que a ordem em que os números aparecem é relevante: se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

**Obs. 1:** Kuratowski, um matemático polonês, definiu $(a, b)$: $=\{\{a\}, \{a, b\}\}$, mas não há necessidade de se preocupar com esta definição.

**Obs. 2:** A igualdade entre dois pares ordenados $(a, b) = (c, d)$ ocorre se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

# 2. Produto cartesiano

## 2.1 Definição

Sendo A e B conjuntos, definimos $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$ (é o conjunto dos pares ordenados em que a primeira entrada pertence ao conjunto $A$ e a segunda entrada pertence ao conjunto $B$).

**Ex.:**

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

**Teorema 1 (Número de elementos do produto cartesiano)**: Se $A$ e $B$ são conjuntos finitos, segue que $A \times B$ é finito e $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

**Obs. 1:** $A \times B$ lê-se como "$A$ cartesiano $B$".
**Obs. 2:** Em geral, $A \times B \neq B \times A$ (de fato, a igualdade só ocorre quando $A = B$).

# 3. Relação

## 3.1 Definição

Dados os conjuntos $A$ e $B$, chama-se relação de $A$ em $B$ qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é:

$R$ é relação de $A$ em $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$.

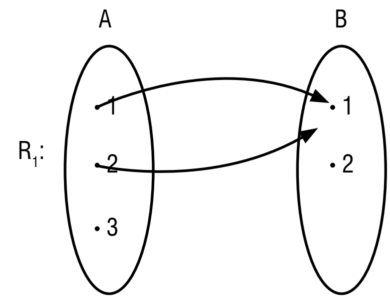
**Ex.:** $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$

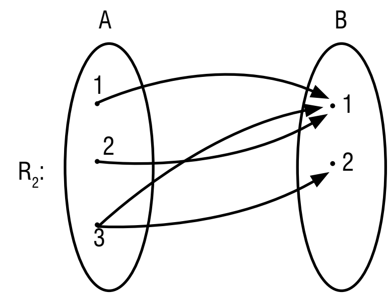
$R_1 = \{(1, 1), (2, 1)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

**Obs. 1:** $(a, b) \in R$ pode ser representado por $aRb$.

**Obs. 2:** Podemos pensar em uma relação como um diagrama de flechas, no qual representamos de um lado o conjunto $A$ e do outro o conjunto $B$. Para representar a relação, ligamos $a$ a $b$ com uma flecha se $aRb$. Essa intuição ajudará a entender os conceitos futuros.




## 3.2 Domínio

O domínio (Dom) de uma relação $R$ de $A$ em $B$ é o conjunto formado pelos elementos de $A$ que, de fato, se relacionam com alguém de $B$. Ou seja, $\text{Dom}(R) = \{a \in A \,|\, \exists b \in B \text{ com } aRb\}$. Em termos de flechas, o domínio é composto pelos elementos de $A$ que mandam flechas para $B$.

**Ex.:**

$R$: $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$

$\text{Dom}(R) = \{1, 3\}$

## 3.3 Contradomínio

O contradomínio (Cd) de uma relação $R$ de $A$ em $B$ é o próprio $B$ (é o conjunto dos elementos que podem se relacionar com elementos de $A$). Em termos de flechas, o contradomínio é formado pelos elementos que podem receber flechas (no caso, todo o conjunto $B$).

**Ex.:** $R$: $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$

$\text{Cd}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$

## 3.4 Imagem

A imagem (Im) de uma relação $R$ de $A$ em $B$ é o conjunto formado pelos elementos de $B$ que de fato se relacionam com alguém de $A$. Ou seja, $\text{Im}(R) = \{b \in B \,|\, \exists a \in A \text{ com } aRb\}$. Em termos de flechas, a imagem é composta pelos elementos de B que efetivamente recebem flechas.

**Ex.:** $R$: $\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$

$\text{Im}(R) = \{1, 2\}$

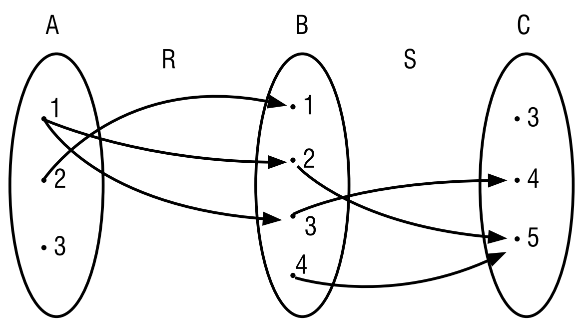
## 3.5. Relação composta

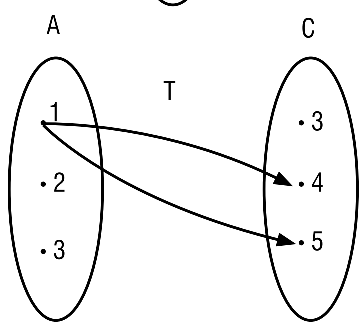
Seja $R$ uma relação de $A$ em $B$ e $S$ uma relação de $B$ em $C$. Definimos a relação composta $T$ da seguinte forma: $T = S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid b \in B \text{ com } aRb \wedge bRc\}$ Intuitivamente, olhamos para a relação $R$ e buscamos os elementos da imagem de $R$ que estão no domínio de $S$ (o conjunto $B$ funciona como uma "ponte").

**Ex.:** $R$: $\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1)\}$
$S$: $\{1, 2, 3, 4\} \to \{3, 4, 5\}$, $S = \{(2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$
$S \circ R$: $\{1, 2, 3\} \to \{3, 4, 5\}$, $SoR = \{(1, 5), (1, 4)\}$

Os elementos da imagem de $R$ que estão no domínio de $S$ são 2 e 3 (esses elementos farão a "ponte" da relação composta).

Vejamos um diagrama de flechas ilustrando o que ocorre:




$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{S} 5 \\ 1 \xrightarrow{R} 3 \xrightarrow{S} 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{T} 5 \\ 1 \xrightarrow{T} 4 \end{array}$$

**Obs.:** A operação de composição é associativa, mas não é comutativa.

## 3.6 Relação inversa

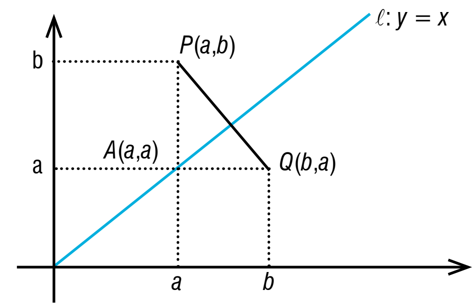
Seja $R$ uma relação de $A$ em $B$. Definimos a relação inversa por $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$. Em termos de um diagrama de flechas, basta "inverter" as flechas.

**Ex.:**

$R$: $\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$
$R^{-1}$: $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$, $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 3)\}$

**Teorema 2 (Simetria do gráfico da relação inversa)**: Se $R$ é relação em $\mathbb{R}$ e $R^{-1}$ é sua inversa, então os gráficos dessas relações no plano cartesiano são simétricos em relação à reta $y = x$.

Demonstração:




Suponha $P = (a, b) \in G(R)$ (gráfico de $R$). Então, $Q = (b, a) \in G(R^{-1})$.
Seja $A = (a, a)$.

I. $\overline{AP} = \overline{AQ} \to \Delta PAQ$ isósceles
II. $45^\circ = \text{ang} < \ell, \overrightarrow{AQ} > = \text{ang} < \overrightarrow{AP}, \ell > \to \ell$ é bissetriz.

De I e II, $\ell$ é mediatriz de $\overline{PQ}$, donde $P$ e $Q$ equidistam de $\ell$.

Como o ponto $P$ é um ponto qualquer de $G(R)$, tem-se $G(R)$ e $G(R^{-1})$ simétricos em relação à reta $\ell$.

## 3.7 Relação em um conjunto

### 3.7.1 Conceito

Seja $U$ um conjunto. Chama-se relação em $U$ toda relação de $U$ em $U$.

**Ex.:**

$R$: $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

### 3.7.2 Propriedades

Seja $R$ uma relação de $U$ em $U$:

I. Reflexiva: $R$ é reflexiva $\Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in U \to xRx)$

**Ex.:**

$R = \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$

II. Simétrica: $R$ é simétrica $\Leftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ (x \in U \wedge y \in U \wedge xRy \to yRx)$

**Ex.:**

$R = \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$
$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

III. Antissimétrica: $R$ é antissimétrica $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in U \wedge y \in U \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

**Ex.:**

$R = \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$
$R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$

IV. Transitiva: $R$ é transitiva $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in U \wedge y \in U \wedge z \in U \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$

**Ex.:**

$R = \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

### 3.7.3 Relação de equivalência

Seja $R$ uma relação em $U$:

$R$ é relação de equivalência quando ($R$ é reflexiva) $\wedge$ ($R$ é simétrica) $\wedge$ ($R$ é transitiva).

**Ex.:**

$U = \{x \,|\, x$ é uma reta$\}$

$R: U \to U$

$R = \{(x, y) \in U^2 \mid x \,//\, y\}$

I. $R$ é reflexiva: com efeito, $(\forall x \in U)\ (xRx)$
II. $R$ é simétrica: com efeito, $(\forall x, y \in U)\ (xRy \to yRx)$
III. $R$ é transitiva: com efeito, $(\forall x, y, z \in U)\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$ de I, II e III: $R$ é relação de equivalência

### 3.7.4 Relação de ordem

Seja $R$ uma relação de $U$ em $U$:

$R$ é relação de ordem quando ($R$ é reflexiva) $\wedge$ ($R$ é antissimétrica) $\wedge$ ($R$ é transitiva).

**Ex.:**

$U = \{x \,|\, x$ é um conjunto$\}$

$R: U \to U$

$R = \{(x, y) \in U^2 \,|\, x \subset y\}$

I. $R$ é reflexiva: com efeito, $(\forall x \in U)\ (xRx)$
II. $R$ é antissimétrica: com efeito, $(\forall x, y \in U)\ (xRy \wedge yRx \to x = y)$
III. $R$ é transitiva: com efeito, $(\forall x, y, z \in U)\ (xRy \wedge yRz \to xRz)$ de I, II e III: $R$ é relação de ordem

### 3.7.5 Classe de equivalência

Sejam $U$ um conjunto e $R$ uma relação de equivalência de $U$ em $U$. Chama-se classe de equivalência por $R$ um subconjunto de $U$ constituído por um elemento $x$ de $U$ e por todos os elementos $y$ de $U$ tais que $yRx$.

**Ex.:**

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$R: U \to U,\ R = \{(x, y) \mid x \equiv y (\text{mod } 3)\}$

$A = \{x \,|\, x \equiv 1 (\text{mod } 3)\}$; $B = \{x \,|\, x$ é da forma $3k + 2$, $k$ natural$\}$; ...

$A, B, \ldots$ são classes de equivalência por $R$ em $U$

**Obs.:** O conjunto das classes de equivalência por $R$ em um conjunto $U$ é denominado conjunto-quociente $U/R$. No exemplo acima, $U/R = \{A, B, \ldots\}$.

# 4. Funções

## 4.1 Definição

Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma função $f$ de $A$ em $B$ (representamos por $f: A \to B$) é um tipo especial de relação em que duas condições são satisfeitas:

I. Todo elemento de $A$ está relacionado com um elemento de $B$: $(\forall x \in A)(\exists y \in B)((x, y) \in f)$.
II. Todo elemento de $A$ está relacionado com um **único** elemento de $B$ $(\forall x \in A)(\exists\, y, y' \in B)((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \to y = y')$.

Em termos de flechas, todo elemento de $A$ manda **uma e apenas uma** flecha para $B$.

Nesse caso, em vez de escrevermos $x\, f\, y$, escrevemos $y = f(x)$ sem ambiguidade.

**Ex.:**

$f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

$G(f) = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$

($G(f)$, denominado gráfico de $f$, é o conjunto dos pares $(x, y)$ tais que $y = f(x)$).

**Obs.:** O domínio de uma função $f: A \to B$ é o conjunto $A$ e o contradomínio é o conjunto $B$. A imagem é definida como em relações (intuitivamente, são os elementos de $B$ que recebem efetivamente flechas).

**Obs. 2:** Em concursos como a AFA, quando nada for dito sobre o domínio, devemos supor que o domínio é o mais amplo possível nos reais, isto é, o domínio é o conjunto dos valores para os quais a função está bem definida (portanto, devemos fazer restrições como denominadores diferentes de 0, expressões dentro de radicais de índices pares devem ser não negativas, condições de existência de logaritmos).

## 4.2 Função identidade

Seja A um conjunto não vazio. A função identidade $\text{Id}_A: A \to A$ é dada por $\text{Id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$.

## 4.3 Função constante

Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma função $f: A \to B$ é constante se $f(a) = b$ para todo elemento $a \in A$ (ou seja, a função assume um único valor: todas as flechas chegam a um mesmo elemento).

## 4.4 Função injetora (injetiva)

Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma função $f: A \to B$ é injetora se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (ou seja, a função não "repete valor"). Em termos de flechas, cada elemento da imagem recebe uma **única** flecha.

**Obs. 1:** No gráfico de uma função injetora, ao traçarmos uma reta horizontal, esta reta corta o gráfico em **no máximo um** ponto (pode não cortar em ponto algum).

Como verificar que uma função é injetora? Um método prático e eficiente é supormos $f(x) = f(y)$ e, através de manipulações algébricas, chegar a $x = y$.

**Ex.:** A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é injetora. De fato, $f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$. Logo, $x = y$ ou $x^2 + xy + y^2 \Rightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 0 \Rightarrow x = y = 0$. Em ambos os casos, segue que $x = y$ e, portanto, a função é injetora.

**Obs. 2:** O conceito de função injetora depende fortemente do domínio. Por exemplo, a função $f: [-1, 1] \to [-1, 1]$ dada por $f(x) = x^2$ não é injetora, já que $f(-1) = f(1) = 1$. Entretanto, a função $g: [0,1] \to [0,1]$ dada pela mesma lei de formação $g(x) = x^2$ é injetora. De fato, se $g(x) = g(y)$, segue que $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \vee x = -y$. Como $x, y \geq 0$, a última possibilidade nos dá $x = y = 0$. Em ambos os casos, então, segue que $x = y$ e $g$ é injetora. Isto ressalta a importância de que o domínio e o contradomínio de uma função são partes cruciais de sua definição!

**Obs. 3:** No caso de domínio e contradomínio finitos, se $f: A \to B$ é injetora, segue que $n(A) \leq n(B)$.

## 4.5 Função sobrejetora (sobrejetiva)

Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora se $\forall y \in B$, $\exists x \in A$, tal que $f(x) = y$ (ou seja, $\text{Im } f = \text{Cd } f = B$). Em termos de flechas, todo elemento de B recebe pelo menos uma flecha.

**Obs. 1:** No gráfico de uma função sobrejetora, ao traçarmos uma reta horizontal, esta reta corta o gráfico em **pelo menos um** ponto.

Como verificar se uma função é sobrejetora? Basicamente, o que devemos fazer é considerar um elemento $y$ do contradomínio de $f$ e tentar resolver a equação $f(x) = y$. Se para cada $y$ essa equação possuir ao menos uma solução $x$ pertencente ao domínio de $f$, a função é sobrejetora.

**Ex.:** A função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ dada por $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$ é sobrejetora. Para verificarmos isso, devemos considerar um real $y \neq 3$ e tentar resolver $\dfrac{3x-5}{x-2} = y \Rightarrow 3x - 5 = xy - 2y \Rightarrow x(y-3) = 2y - 5 \cdot$ Como $y \neq 3$, segue que $x = \dfrac{2y-5}{y-3}$. Para a demonstração ficar completa, devemos ainda verificar que essa expressão encontrada para $x$ nunca pode ser 2 (pois o domínio da função exclui o número 2), o que é evidente, pois $x = 2 \Rightarrow 2y - 5 = 2y - 6$, contradição.

**Obs. 2:** O conceito de função sobrejetora depende fortemente do contradomínio. Por exemplo, a função $f: [-1, 1] \to [-1, 1]$ dada por $f(x) = x^2$ é sobrejetora. Entretanto, a função $g: [-1, 1] \to [-1, 1] \cup \{4\}$ dada pela mesma lei de formação $g(x) = x^2$ não é sobrejetora. De fato, se $g(x) = 4$, segue que $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Como 2 e $-2$ não estão no domínio da função, não existe $x \in \text{Dom } f$ tal que $f(x) = 4$.

**Obs. 3:** No caso de domínio e contradomínio finitos, se $f: A \to B$ é sobrejetora, segue que $n(A) \geq n(B)$.

## 4.6 Função bijetora (bijetiva)

Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma função $f: A \to B$ é bijetora se é injetora e sobrejetora simultaneamente.

**Obs. 1:** No gráfico de uma função bijetora, ao traçarmos uma reta horizontal, esta reta corta o gráfico em **exatamente** um ponto.

Para verificar que uma função é bijetora, basta seguir os passos de 4.4 e 4.5 para verificação da injetividade e da sobrejetividade.

**Ex.:** A função $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora.

**Obs. 2:** Assim como em 4.4 e 4.5, o conceito de função bijetora depende fortemente do domínio e do contradomínio!

**Obs. 3:** No caso de domínio e contradomínio finitos, se $f: A \to B$ é bijetora, segue que $n(A) = n(B)$.

## 4.7 Função composta

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ duas funções. Definiremos a composição da função $g$ com a função $f$ ($h = g \circ f$ – lê-se "$g$ de $f$" ou "$g$ bola $f$") da seguinte maneira:

I. O domínio de $h$ é o conjunto $A$.
II. O contradomínio de $h$ é o conjunto $C$.
III. $h(x) = g(f(x))$ (aqui funciona exatamente da mesma forma que na composição de relações)

**Ex.:** Sendo $g(x) = x^2$ e $f(x) = 2x + 1$, temos que $g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

**Obs. 1:** Para existir $h = g \circ f$, o contradomínio de $f$ deve ser igual ao domínio de $g$.

**Obs. 2:** A composição de funções não é comutativa. Além disso, pode acontecer que $g \circ f$ esteja definida, mas $f \circ g$ não.

**Teorema 3 (Critério para garantir injetividade e sobrejetividade):**

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ duas funções. Se $g \circ f: A \to C$ é injetora, então $f$ é injetora. Se $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora, então $g$ é sobrejetora.

**Demonstração:**

**Parte 1:** $g \circ f: A \to C$ é injetora

Suponha que $f(x) = f(x')$. Logo, $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ e, como $g \circ f$ é injetora, segue que $x = x'$. Logo, $f$ é injetora.

**Parte 2:** $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora

Queremos provar que para qualquer $z \in C$, existe $y \in B$, tal que $g(y) = z$. Como $g \circ f: A \to C$ é sobrejetora, existe $x \in A$, tal que $g(f(x)) = z$. Finalmente, como $f(x) \in B$, basta tomarmos $y = f(x)$ e assim $g$ é sobrejetora.

## 4.8 Função inversa

Dada uma função $f: A \to B$, queremos definir uma função $g: B \to A$ (a inversa de $f$) de forma que se $f(x) = y$, então $g(y) = x$. Note que para que $g$ seja de fato uma função, é necessário que:

I. cada elemento de $B$ só mande uma flecha de volta (para isso, a função $f$ não pode repetir valores e, portanto, $f$ deve ser injetora);
II. todo elemento de $B$ precise mandar flechas (para isso, todo elemento de $B$ deve receber flechas da função $f$ e, portanto, $f$ deve ser sobrejetora).

**Teorema 4 (Condição de existência da inversa):**

Uma função $f: A \to B$ admite inversa se, e somente se, é bijetora.

Denotamos a inversa de $f$ por $f^{-1}: B \to A$. Veja que segue da definição que $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$.

**Teorema 5 (Método prático para calcular a inversa):**

Dada a função bijetora $f: A \to B$ definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a expressão de $f^{-1}$, procedemos como a seguir:

I. Na sentença $y = f(x)$, trocamos as variáveis $x \leftrightarrow y$, escrevendo $x = f(y)$.
II. Transforma-se a expressão $x = f(y)$, expressando $y$ em função de $x$, chegando a $y = f^{-1}(x)$.

Formalmente, usamos que $f(f^{-1}(x)) = x$ e, a partir disso, encontra-se a expressão $f^{-1}(x)$.

**Exs.:**

I. Determine a inversa da função $f(x) = y = 5x + 3$.
Trocando $x \leftrightarrow y$, temos $x = 5y + 3$. Resolvendo em $y$, segue que $y = \frac{x-3}{5}$ e, portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$.

II. Determine a inversa da função $f: \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty]$ dada por $f(x) = y = x^2 + 1$.
Trocando $x \leftrightarrow y$, temos $x = y^2 + 1$. Resolvendo em $y$, segue que $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1$.

**Obs.:** Se o domínio da função fosse o conjunto dos reais não positivos, seguiria que a inversa é $-\sqrt{x-1}$, pois o contradomínio da inversa seria o conjunto dos reais não positivos! Tenha atenção com isso!

### 4.9 Operações entre funções

Sejam $A$ e $B$ conjuntos e $f: A \to B$, $g: A \to B$ funções. Definimos as seguintes operações:

I. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
II. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
III. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
IV. $f^g(x) = f(x)^{g(x)}$

## 5. Funções reais de variável real

### 5.1 Conceito

São funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

### 5.2 Paridade

I. Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Graficamente, isso significa que a função $f$ é simétrica com relação ao eixo $y$.

**Ex.:** $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$

II. Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Graficamente, isso significa que a função $f$ é simétrica com relação à origem.

**Ex.:** $u(x) = x^3$, $v(x) = \text{sen } x$

### 5.3 Monotonismo

- **Função estritamente crescente**
Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

**Ex.:** $f(x) = 2x + 1$

- **Função estritamente decrescente**
Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente decrescente se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

**Ex.:** $f(x) = -2x + 1$

### 5.4 Periodicidade

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe $T > 0$ (dito um período de $f$) tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x$ real. O menor real positivo $T$ com essa propriedade é chamado de período de $f$ (às vezes chamado de período fundamental).

**Ex.:**
A função $f(x) = \text{sen } x$ é periódica de período $2\pi$, pois $f(x + 2\pi) = f(x)$.

## 6. Gráficos

### 6.1 Deslocando o gráfico de uma função

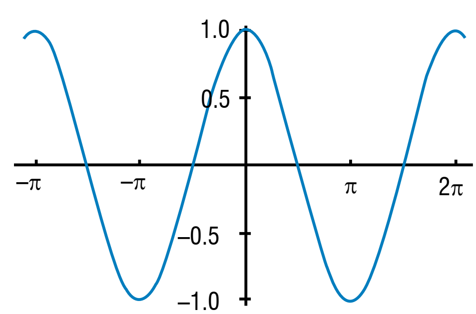
I. $f(x) + k \begin{cases} k > 0 \text{ desloca a função } k \text{ unidades pra cima} \\ k < 0 \text{ desloca a função } k \text{ unidades pra baixo} \end{cases}$

II. $f(x+k) \begin{cases} k > 0 \text{ desloca o gráfico para esquerda} \\ k < 0 \text{ desloca o gráfico para direita} \end{cases}$

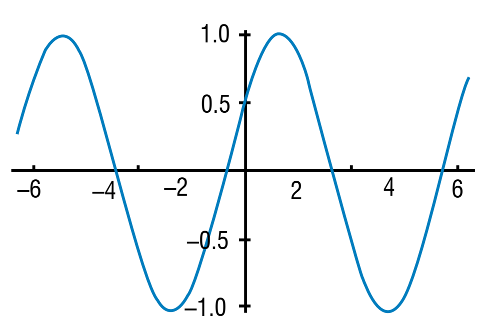
**Ex.:**

Vejamos o gráfico da função $y = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

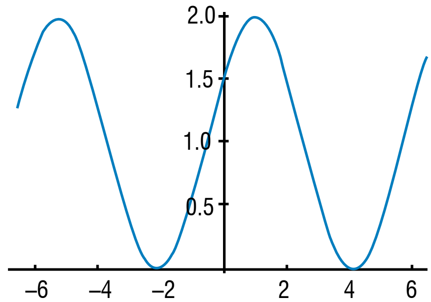
**1º Passo:** Primeiro devemos desenhar o gráfico da função $y = \cos x$.




**2º Passo:** Depois desenhamos o gráfico da função $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, deslocando a função anterior $\frac{\pi}{3}$ para a direita.



**3º Passo:** Finalmente desenhamos a função desejada $y = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, deslocando a anterior uma unidade para cima.



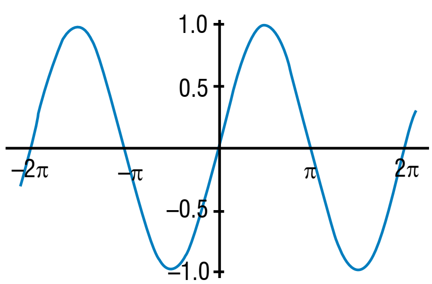

## 6.2 Esticando e contraindo uma função

III. $k\,f(x)\begin{cases} k > 1 \text{ estica a função em } y \\ 0 < k < 1 \text{ contrai a função em } y \end{cases}$

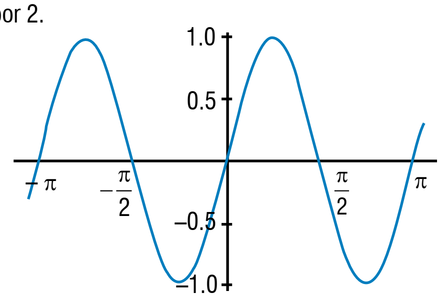
IV. $f(kx)\begin{cases} k > 1 \text{ contrai o gráfico em } x \\ 0 < k < 1 \text{ estica a gráfico em } x \end{cases}$

**Ex.:** Monte o gráfico da função $y = 3\text{sen}(2x)$

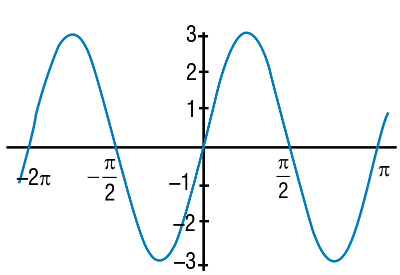
**1º Passo:** Montamos o gráfico da função $y = \text{sen}\, x$.




**2º Passo:** Desenhamos o gráfico da função $y = \text{sen}\,(2x)$, lembrando que se estamos multiplicando $x$ por dois, estamos dividindo o período da função por 2.




**3º Passo:** Finalmente desenhamos o gráfico da função $y = 3\text{sen}(2x)$, lembrando que estamos esticando a função no eixo $y$.




### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Seja $n$ um inteiro fixo. Prove que a relação '$aRb \Leftrightarrow a - b$ é múltiplo de $n$' é de equivalência.

**Solução**

Para provar que a relação é de equivalência, precisamos verificar reflexividade, simetria e transitividade.

I. *reflexividade*: temos que $aRa$, pois $a - a = 0$ é sempre múltiplo de $n$.

II. *simetria*: veja que se $a - b$ é múltiplo de $n$, então $b - a = -(a - b)$ é múltiplo de $n$, então, $aRb \Leftrightarrow bRa$.

III. *transitividade*: $\begin{cases} aRb \Rightarrow a - b \text{ é múltiplo de } n \\ bRc \Rightarrow b - c \text{ é múltiplo de } n \end{cases}$. Daí, veja que $a - c = (a - b) + (b - c)$ é uma soma de dois múltiplos de $n$; logo, $a - c$ é múltiplo de $n$; portanto, $aRc$.

**02** Considere uma turma de 30 alunos (Abílio e Deuclécio são dois deles). Seja $A$ o conjunto dos alunos dessa turma e $f: A \to N$ a função que associa cada aluno à sua quantidade de amigos dentro da turma. Considere que a relação de amizade é recíproca (ou seja, se $X$ é amigo de $Y$, então $Y$ é amigo de $X$) e que ninguém é amigo de si mesmo. É possível que tenhamos simultaneamente $f$(Abílio) = 0 e $f$(Declécio) = 29?

**Solução**

Se $f$(Deuclécio) = 29, teríamos que Deuclécio é amigo de todos da turma (pois ele não é amigo de si mesmo). Daí, veja que Abílio deveria ter pelo menos um amigo (Deuclécio) e então não é possível termos $f$(Abílio) = 0.

**03** Sabendo que $h$ é uma função tal que $h(2x + 1) = x^2 - x$, para todo $x$ real, determine a lei de formação de $h$.

**1ª Solução:** Como $h(2x + 1) = x^2 - x$ para todo $x$ real, podemos substituir $x$ por qualquer número ou expressão. Então, é conveniente trocar $x \to \frac{x}{2}$ chegando a $h(x+1) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$. Agora, basta trocar $x \to x - 1$, chegando a $h(x) = \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)}{2}$.

**Obs.:** É claro que poderíamos fazer uma única substituição $x \to \frac{x-1}{2}$. Apresentamos a solução em 2 passos para ficar um pouco mais natural.

**2ª solução:** Fazendo $2x + 1 = y$, temos que $x = \frac{y-1}{2}$. Substituindo na expressão dada, temos que $h(y) = \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{2}\right)$, para todo $y$ real. Veja que isso define $h$, pois, já que esta relação vale para todo $y$, podemos dizer que $h(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)$.

**Obs.:** Veja que o fato de a relação valer para todo $y$, nos permite substituir o $y$ por qualquer coisa, inclusive por $x$.

**04** Sejam $f$ e $g$ funções reais tais que $f(x) = 4x - 1$ e $f \circ g(x) = 3x^2 + 7x + 1$. Determine a lei de formação da função $g$.

**Solução**
De $f(x) = 4x - 1$, tiramos que $f(g(x)) = 4g(x) - 1$, portanto, $4g(x) - 1 = 3x^2 + 7x + 1$.
Então, a função $g$ tem $g(x) = \dfrac{3x^2 + 7x + 2}{4}$ como lei de formação.

**05** Seja $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{b\}$ uma função tal que $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

Determine o valor de $b$ para que a função $f$ seja bijetora e determine sua inversa.

**Solução:**
Antes de tudo, vamos determinar a lei de formação da inversa de $f$. Para a inversa, temos que $x = \dfrac{3y+1}{y-2}$ e, isolando o $y$, temos que $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ (*). Veja, então, que 3 não pertence ao domínio da inversa; portanto, precisamos excluir 3 do contradomínio de $f$ (para que $f$ seja sobrejetora). Então, $b = 3$. É fácil ver que a função dada é injetora, pois na inversa, cada $y$ está definido unicamente a partir de um $x$, pela equação (*).

Então, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ e $b = 3$.

**06** **(OMERJ)** Determine todas as funções $f$: $R^* \to R$ tais que

$2x \cdot f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$ para todo $x$ real não nulo.

**Solução**
Como a relação dada vale para todo $x$ não nulo, podemos substituir o $x$ por qualquer número ou expressão não nula. Nesse problema, a substituição vantajosa é trocar $x$ por $\dfrac{1}{x}$ (em todos os lugares): $\dfrac{2}{x} \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (*). Juntando esta última relação com a que foi dada, temos um sistema de variáveis $f(x)$ e $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e é fácil determinar $f(x)$.

Da 1ª equação, vem que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 - 2x \cdot f(x)$. Substituindo em (*), temos que $\dfrac{2}{x} \cdot \left(x^2 - 2x \cdot f(x)\right) + f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, e segue que $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

**Obs.:** Normalmente, em problemas de 'equações funcionais', é necessário substituir a função encontrada na relação dada para ver se ela realmente é solução do problema (já que após algumas substituições no $x$ não usamos todos os dados contidos numa equação que vale para todo $x$). No entanto, neste problema isso não é necessário, pois como resolvemos um sistema de 2 equações e 2 incógnitas para encontrar $f(x)$, obviamente a solução encontrada satisfaz a relação dada (que é uma das equações do sistema).

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja $R$ a relação sobre $A$ definida por "$x + 2y = 8$", isto é, $R = \{(x, y) \in A^2 | x + 2y = 8\}$.

a. Determine o gráfico de $R$.
b. Determine o gráfico de $R^{-1}$.

**02** Dado o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considere os pares $(x, y)$ e a relação $R$, tais que: $x \in A$, $y \in A$, $xRy \Leftrightarrow 1 \le x + y \le 3$. Escreva os pares $(x, y)$ que pertencem ao produto cartesiano $A \times A$ e que satisfazem a relação $R$.

**03** Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, verifique, dentre as relações abaixo, quais são de equivalência e quais são de ordem em $A$:

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$;
$R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$;
$R_4 = \{(1,3), (2,4)\}$.

**04** Considere a relação $R = \left\{(x,y) \in Z \, x \, Z \mid \cos\dfrac{\pi x}{2} = \cos\dfrac{\pi y}{2}\right\}$. Determine a classe de equivalência do 0.

**05** Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $a, b \in \mathbb{N}$. Mostre que a relação $R = \{(a, b) \mid \text{m.d.c. } [a, b] = a\}$ é uma relação de ordem.

**06** Seja $A = \{1, 2, 3\}$:

a. Determine uma relação de equivalência $R$ em $A$ com cinco elementos.
b. Determine $[1]_R$, $[2]_R$, $[3]_R$ para essa relação.
c. Determine o conjunto quociente $A|R$ para essa relações.

**07** Sejam as relações $F$ e $G$ abaixo, definidas em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$F = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 3), (5, 4)\}$
$G = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 5), (3, 4)\}$

a. Quais das relações acima são funções?
b. Defina, pelo conjunto de pares ordenados, a relação composta de $F$ com $G$.

**08** Suponha que exista $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(2n + f(n)) = n$. Prove que $f$ é sobrejetiva.

**09** **(OBM)** Seja $f$ uma função definida para todo $x$ real, satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} f(3) = 2 \\ f(x+3) = f(x) \cdot f(3) \end{cases}$$

Então, $f(-3)$ vale:

(A) –6.
(B) 0.
(C) 1/2.
(D) 2.
(E) –1.

**10** Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e considere uma função bijetora de $S$ em $S$, tal que:

I. Se $x \in S$, a imagem de $x$ não pode ser igual a $x - 1$, nem igual a $x$, nem igual a $x + 1$.
II. Se $x \in S$ e a imagem de $x$ é $y$, então a imagem de $y$ não pode ser nem $x$, nem $x + 1$.

Nessas condições, a imagem do número 3 é igual a:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

**11** **(AFA)** As funções $f$ e $g$ são dadas por $f(x) = a^x + b^x$ e $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x-2)}$. Então, $g(3)$ é igual a:

(A) $a^2 + b^2$.
(B) $(a + b)^2$.
(C) $(a - b)^2$.
(D) $a^2 - ab + b^2$.

**12** **(AFA)** A função $f$ satisfaz a relação: $f(x + 1) = x \cdot f(x)$, $x > 0$. Se $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, o valor de $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ é:

(A) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(B) $2\sqrt{\pi}$.

(C) $\dfrac{3\pi}{2}$.

(D) $\sqrt{\pi}$.

**13** **(AFA)** A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n+1}{2} \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ é:

(A) bijetora.
(B) somente injetora.
(C) somente sobrejetora.
(D) não injetora e não sobrejetora.

**14** **(AFA)** Se $f$ for uma função real, tal que $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = x + 3$, então $f(x)$ é definida por:

(A) $\dfrac{4-2x}{1-x}$.

(B) $\dfrac{4x-2}{1+x}$.

(C) $\dfrac{2x+1}{x-1}$.

(D) $\dfrac{2x-1}{1-x}$.

**15** **(AFA)** Seja $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f: D \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = (x - 2)(x - 4)$. Então, pode-se afirmar que $f$:

(A) é bijetora.
(B) é somente injetora.
(C) é somente sobrejetora.
(D) possui conjunto-imagem com 3 elementos.

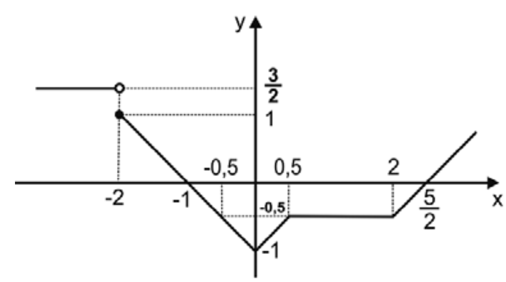
**16** **(AFA)** A imagem da função real $f$ definida por $f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$ é:

(A) $\mathbb{R} - \{1\}$.
(B) $\mathbb{R} - \{2\}$.
(C) $\mathbb{R} - \{-1\}$.
(D) $\mathbb{R} - \{-2\}$.

**17** **(EsPCEx)** A função $f$, de domínio real mais amplo possível, é tal que $f(x) = \dfrac{ax+b-5}{ax+3b}$. Sabendo que $f(3)$ não existe e $f(-1) = 1$, o valor de $a^2 + b^2$ é:

(A) 50/16.
(B) 25/3.
(C) 25/2.
(D) 50/8.
(E) 50/9.

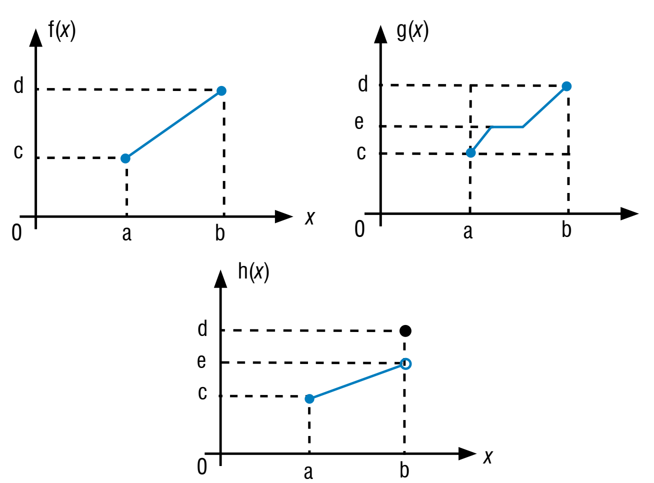
**18** **(AFA)** Seja $f$ a função real cujo gráfico se apresenta a seguir:




Analisando o gráfico, é **incorreto** afirmar que:

(A) $f(f(1)) = f(0,5)$.
(B) $f(x) + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(C) $f(0) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(D) se $g(x) = f(x) - 1$, então $g(-2) = f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

**19** **(AFA)** Considere as funções $f$, $g$ e $h$, todas de domínio $[a, b]$ e contradomínio $[c, d]$, representadas através dos gráficos abaixo.



Com base nos gráficos, é correto afirmar que:

(A) $f$ é uma sobrejeção, $g$ não é uma injeção, $h$ é uma sobrejeção.
(B) $f$ é uma sobrejeção, $g$ é uma injeção, $h$ não é uma sobrejeção.
(C) $f$ é uma injeção, $g$ não é uma sobrejeção, $h$ é uma bijeção.
(D) $f$ é uma bijeção, $g$ não é uma injeção, $h$ não é uma sobrejeção.

**20** **(EN)** É dada uma função tal que:

I. $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
II. $f(1) = 2$ e $f(\sqrt{2}) = 4$

Podemos concluir, então, que $f(3 + \sqrt{2})$ é igual a:

(A) $(3 + \sqrt{2})^2$.
(B) 16.
(C) 24.
(D) 32.
(E) 64.

**21** **(EN)** Determine o conjunto-imagem da função ($fog$) para:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 2x, \text{ se } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ se } x > 1 \end{cases} \text{ e } g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ \frac{x}{2}, \text{ se } 0 \le x \le 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

(A) $|0, 1| \cup \{2\}$.
(B) $(-\infty, +\infty)$.
(C) $|0, 1|$.
(D) $|0, +\infty)$.
(E) $\{1\}$.

**22** **(EsPCEx)** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $-2 \le f(x) < 5$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1 - f(x)$. Então o conjunto-imagem da função $g(x)$ é:

(A) ]–4, 3].
(B) [–4, 3].
(C) ]–4,3[.
(D) [–3, 4[.
(E) ]–3, 4].

**23** **(ITA)** Sejam $f$, $g$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que: $g(x) = 1 - x$ e $f(x) + 2f(2 - x) = (x - 1)^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f[g(x)]$ é igual a:

(A) $(x - 1)^3$.
(B) $(1 - x)^3$.
(C) $x^3$.
(D) $x$.
(E) $2 - x$.

**24** **(ITA)** Qual das funções definidas abaixo é bijetora?

**Obs.:** $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos reais não negativos.

(A) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^2$.
(B) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$.
(C) $f: [1, 3] \to [2, 4]$ tal que $f(x) = x+1$.
(D) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x$.
(E) n.d.a.

**25** **(EN)** Seja $f$ uma função e $x$ um ponto do seu domínio. Diz-se que é um ponto fixo de $f$ se $f(x) = x$. Considere a função $g$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(2x + 1) = \frac{x}{x^2 + 1}$. É correto afirmar que:

(A) $g$ não possui ponto fixo em [0, 1].
(B) $g$ possui um ponto fixo em [0, 1].
(C) $g$ possui dois pontos fixos em [0, 1].
(D) $g$ possui três pontos fixos em [0, 1].
(E) $g$ possui quatro pontos fixos em [0, 1].

**26** **(OBM)** A função $f$ é dada pela tabela a seguir.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 1 | 3 | 5 | 2 |

Por exemplo, $f(2) = 1$. Quanto vale $\underbrace{f(f(...(f(f}_{2004 \text{ vezes}}(4))...))$?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

**27** Sejam as funções reais de variável real $f$ e $g$, definidas por $f(x) = \frac{5x - 3}{4x + 1}$ e $g(x) = \frac{3}{x}$. Pede-se:

a. obter as leis que definem $g \circ f$ e $f \circ g$;
b. calcular $g \circ f(2)$ e $f \circ g(2)$.

**28** Dada a função real de variável real $f(x) = ax^2 + bx + c$, pede-se:

a. obter $f(x + 1)$;
b. obter $f(-x)$;
c. determinar $a$, $b$ e $c$ de modo que se tenha $f(x + 1) = f(-x)$.

**29** Se $f(2x + 1) = \frac{x}{x^2 + 1}$, determine $f(x - 1)$.

**30** Se $f(x) = 4x + 1$ e $f(g(x)) = x^2 + 1$, determine a função $g(x)$.

**31** **(AFA)** Sejam as funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Então, $f(g(-1))$ é igual a:

(A) –1.
(B) 0.
(C) 1.
(D) 2.

**32** **(AFA)** Sejam $A = \{0,1,2,3\}$ e $f: A \to A$ uma função definida por $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ e $f(3) = 0$. Calculando $f \circ f \circ f \circ f \circ f(1)$, encontra-se:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.

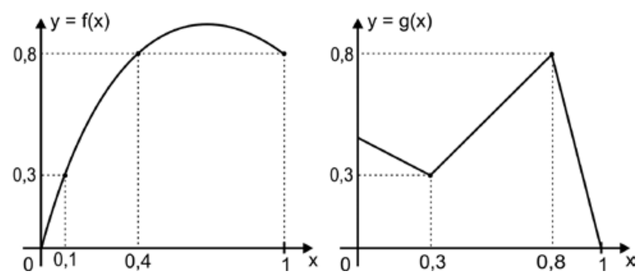
**33** **(AFA)** Se $f$ e $g$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(3x+2)=\dfrac{3x-2}{2}$ e $g(x-3) = 5x - 2$, então $f(g(x))$ é:

(A) $\dfrac{x-4}{5}$.
(B) $\dfrac{2x+9}{5}$.
(C) $5x + 13$.
(D) $\dfrac{5x+11}{5}$.

**34** **(EsPCEx)** Sendo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}1/x, \text{ se } x \in Z^* \\ 2, \text{se } x \in \Re\text{-}Z^*\end{cases}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x)=\begin{cases}-1, \text{ se } x \in Q \\ 1/2, \text{ se } x \in \Re-Q\end{cases}$, então $(f \circ g \circ f \circ g)$ $(2+\sqrt{2})$ é igual a:

(A) $-1$.
(B) $1/2$.
(C) $2$.
(D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(E) $-2$.

**35** **(AFA)** Observe os gráficos abaixo, das funções $f$ e $g$, definidas no intervalo $[0,1]$.




Com base nos gráficos, assinale a alternativa **falsa**:

(A) $g(f(0{,}4)) \geq g(f(x)),\ \forall x \in [0{,}1]$
(B) $g(f(0{,}05)) > g(f(0{,}1))$
(C) $g(g(x)) = x,\ \forall x \in [0{,}3;\ 0{,}8]$
(D) $g(f(0{,}6)) > g(f(1))$

**36** Determine a função inversa de $f(x) = x^5 + 1$.

**37** Sendo $f(x)=\sqrt[3]{2x+3}-1$ e $g(x)=\dfrac{3x-1}{2x+5}$, ache $f^{-1}$, $g^{-1}$ e $g \circ g$.

**38** Seja a função $f\colon [2, \infty) \to I$, $f(x) = x^2 - x + 1$, determine qual deve ser o intervalo $I$ para que $f$ admita uma função inversa.

**39** **(AFA)** Determine a função inversa de $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

(A) $\dfrac{1}{1-x}$.
(B) $\dfrac{1}{1+x}$.
(D) $\dfrac{1+x}{1-x}$.
(C) $\dfrac{1-x}{1+x}$.

**40** **(AMAN)** Sejam $f$ e $g$ funções de $A$ em $A$ com gráficos $f^* = \{(1, 2), (2, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 2)\}$ e $g^* = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$. Logo, $f^{-1}(4) \cdot g^{-1}(5)$ vale:

(A) 0.
(B) 2.
(C) 25.
(D) 6.
(E) 12.

**41** **(ITA)** Seja a função $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}+1$. Sobre sua inversa podemos garantir que:

(A) não está definida pois $f$ é não injetora.
(B) não está definida pois $f$ não é sobrejetora.
(C) está definida por $f^{-1}(y)=\dfrac{y-2}{y-3}$, $y \neq 3$.
(D) está definida por $f^{-1}(y)=\dfrac{y+5}{y-3}-1$, $y \neq 3$.
(E) está definida por $f^{-1}(y)=\dfrac{2y-5}{y-3}$, $y \neq 3$.

**42** Se $f(x)$ é periódica de período $T$, determine o período de $g(x) = f(ax + b)$, sendo $a \neq 0$.

**43** **(AFA)** Indique a alternativa correta:

(A) Se $f$ é uma função par, então é bijetora.
(B) Se $f(x) - f(-x) = 0$, então $f$ pode ser relação, mas não função.
(C) Se $f$ é uma função par e $x \in \mathbb{N}^*$, então $f^*$ é par só quando $x$ for primo.
(D) Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real qualquer, então $f$ pode ser escrita como soma de duas funções reais $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $g$ é par e $h$ é impar.

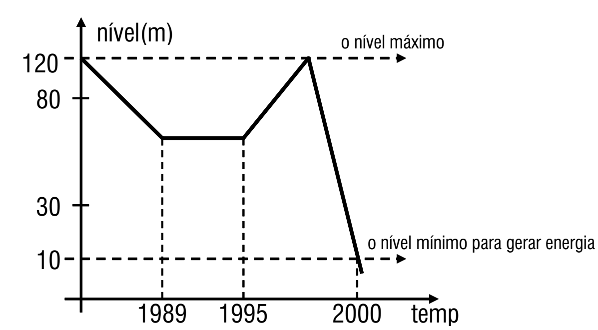
**44** **(AFA)**

"O Brasil tem um encontro marcado com o caos. No dia 1º de junho começa o plano de racionamento de energia".

"O modelo energético brasileiro é baseado quase que exclusivamente em hidrelétricas, que produzem 97% da energia consumida no País. Sem chuva, entra em colapso".

(Revista *Veja* – 16/5/2001.)

No gráfico, tem-se o nível da água armazenada em uma barragem ao longo dos últimos anos, que foi construída para represar água a fim de mover as turbinas de uma usina hidrelétrica.




Analise as alternativas e marque a opção correta:

(A) O nível da água permaneceu constante num período de 8 anos.
(B) O nível de 80 metros foi atingido exatamente duas vezes até o ano 2000.
(C) Após o ano de 2000, o nível da água da barragem foi insuficiente para gerar energia.
(D) No período de 1995 a 2000, o nível da água só diminuiu.

**45** **(AFA)** Considere as funções reais $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 4x + 3 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = 2x - 3$. Com base nessas funções, classifique cada afirmativa abaixo como verdadeira ou falsa.

I. $f(x)$ é par;
II. $f(x)$ admite inversa em todo o seu domínio;
III. $f(x)$ é crescente em $\{x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ ou } x \geq 1\}$;
IV. se $x < -6$, então $f(x) > -3$.

A sequência correta é:

(A) V – V – F – V.
(B) F – F – V – F.
(C) F – F – V – V.
(D) F – V – V – F.

**46** **(EN)** Sabendo que *f*, *g* e *h* são funções reais de variável real e que *f* e *g* não se anulam, considere as afirmações abaixo:

I. $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$;

II. $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$;

III. $\dfrac{1}{f \circ g} = \left(\dfrac{1}{f}\right) \circ g$;

IV. $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$

Podemos afirmar que:

(A) todas as afirmativas acima são verdadeiras.
(B) somente I e II são verdadeiras.
(C) somente IV é falsa.
(D) somente II e III são verdadeiras.
(E) somente I é falsa.

**47** **(ITA)** Consideremos as seguintes afirmações sobre uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I. Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq f(-x)$, então *f* não é par.
II. Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(-x) = -f(x)$, então *f* é ímpar.
III. Se *f* é par e ímpar, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$.
IV. Se *f* é ímpar, então $f \circ f$ (*f* composta com *f*) é ímpar.

Podemos afirmar que estão corretas as afirmações de números:

(A) I e IV.
(B) I, II e IV.
(C) I e III.
(D) III e IV.
(E) I, II e III.

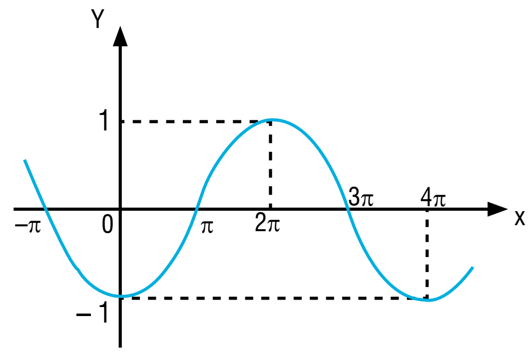
**48** **(ITA)** Considere a função $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, para cada *x* real. Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) $y = f(x)$ é uma função par.
(B) $y = f(x)$ é uma função ímpar.
(C) $f(x) \geq 0$ para todo real *x*.
(D) $f(x) \leq 0$ para todo real *x*.
(E) $f(x)$ tem o mesmo sinal de *x*, para todo real $x \neq 0$.

**49** Esboce no plano cartesiano os gráficos das seguintes funções:

(A) $f: \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$
$x \to y = signx$, função sinal, $signx = \{1 \text{ se } x \geq 0 \text{ e } -1 \text{ se } x < 0\}$
(B) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
$x \to y = \lfloor x \rfloor = (n \in \mathbb{Z} / n \leq x < n + 1)$, função parte inteira.
(C) $f: \mathbb{R} \to [0,1[$
$x \to \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, função parte fracionária.

**50** A figura abaixo representa o gráfico da função definida por $f(x) = a\cos(bx)$. Os valores de *a* e *b* são, respectivamente:




(A) 1 e 2.

(B) 1 e $\frac{1}{2}$.

(C) –1 e $\frac{1}{2}$.

(D) –1 e 1.
(E) –1 e 2.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** Determine o conjunto-imagem das funções abaixo:

(A) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, x \to y = \dfrac{|x|}{x}$

(B) $f: [4, +\infty[ \to \mathbb{R}, x \to y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$

(C) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(D) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

**02** **(IME)** Sejam *q* e *r* funções cujo domínio são os inteiros maiores que zero. Sabe-se que $q(1) = 1$, $r(1) = 0$ e:

se $r(n) < 2q(n) + 1$, então $\begin{cases} r(n+1) = r(n) + 1 \\ q(n+1) = q(n) \end{cases}$

se $r(n) = 2q(n) + 1$, então $\begin{cases} r(n+1) = 0 \\ q(n+1) = q(n) + 1 \end{cases}$

Determine $q(5)$ e $r(5)$.

**03** Mostre que se $f$: A $\rightarrow$ B é injetiva e $\#A = \#B$, então $f$ é uma bijeção.

**04** Classifique a função $f$: $N \times N \rightarrow N$, $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ quanto a injetividade e sobrejetividade.

**05** Determine o valor da expressão

$$f\left(\frac{1}{2000}\right)+f\left(\frac{2}{1999}\right)+f\left(\frac{3}{1998}\right)+\ldots+f\left(\frac{1998}{3}\right)+f\left(\frac{1999}{2}\right)+f\left(\frac{2000}{1}\right),$$

em que $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

**06** **(OBM)** Seja $f$ uma função real de variável real que satisfaz a condição

$f(x)+2f\left(\dfrac{2002}{x}\right)=3x$ para x > 0. O valor de $f(2)$ é igual a:

(A) 1.000.
(B) 2.000.
(C) 3.000.
(D) 4.000.
(E) 6.000.

**07** **(OBM)** A função real $f$, definida nos inteiros, satisfaz
$f(n) - (n + 1)\, f(2 - n) = (n + 3)^2$, para todo $n$ inteiro . Quanto vale $f(0)$?

(A) –17.
(B) 0.
(C) 1.
(D) 2.
(E) 9.

**08** **(OBM)** Seja $f$: $Z \rightarrow Z$ uma função tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(x + 12) = f(x + 21) = f(x)$ para todo $x \in Z$. Então $f(2009)$ é:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 2009.

**09** **(OBM)** Para todo $n$ natural definimos a função $f$ por: $f(n)=\dfrac{n}{2}$ se $n$ é par, $f(n) = 3n + 1$ se $n$ é ímpar.

O número de soluções da equação $f(f(f(n))) = 16$ é:

(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 5.
(E) 6.

**10** **(OBM)** Seja $f$ uma função real que tem as seguintes propriedades:

I. Para todos $x$, $y$ reais, $f(x + y) = x + f(y)$;
II. $f(0) = 2$.

Quanto vale $f(2000)$?

(A) 0.
(B) 2.
(C) 1998.
(D) 2000.
(E) 2002.

**11** **(OBM)** A função $f$ é definida para todos os pares ordenados $(x; y)$ de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:
$f(x; x) = x$; $f(x; y) = f(y; x)$; $(x + y)f(x; y) = (2x + y)f(x; x + y)$. Qual o valor de $f(21; 12)$?

(A) $\frac{7}{4}$.

(B) $\frac{4}{7}$.

(C) $\frac{11}{6}$.

(D) $\frac{6}{11}$.

(E) $\frac{1}{2003}$.

**12** **(OBM)** Seja $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Quantas soluções reais tem a equação $f(f(f(\ldots f(x)))) = 2$ (em que $f$ é aplicada 2001 vezes)?

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 2001.
(E) $2^{2001}$.

**13** **(OBM)** Seja $f$ uma função de $Z$ em $Z$ definida como $f(x) = x/10$ se $x$ é divisível por 10 e $f(x) = x + 1$ caso contrário. Se $a_0 = 2001$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, qual o menor valor de $n$ para o qual $a_n = 1$?

(A) 20.
(B) 38.
(C) 93.
(D) 2000.
(E) $a_n$ nunca é igual a 1.

**14** Seja $f$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que: $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2))$:

(A) Prove que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
(B) Calcule $f(0)$;
(C) Prove que $(f(x) \equiv 0 \leftrightarrow f(0) = 0)$;
(D) Se $f(1) = \sqrt{2}$, calcule $f(2)$, $f(4)$, $f(-2)$ e a relação entre $f(-x)$ e $f(x)$.

**15** Seja $f$: $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+)\ (f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2))$

a. Calcule $f(1)$;

b. Determine a relação entre $f(x^{-1})$ e $f(x)$;

c. Prove que $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$.

**16** **(EN)** O conjunto-imagem da função $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}$ é:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$.
(B) $\{x \in \mathbb{R} \,/ -2 < x < 2\}$.
(C) $\{0\}$.
(D) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$.
(E) $\mathbb{R}_+$.

**17** **(EN)** Considere a função real $f$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 \text{ se } x<-2 \\ \dfrac{3}{x^2-1} \text{ se } -2\le x<-1 \\ \dfrac{3}{x^2-1} \text{ se } -1<x<1 \\ \dfrac{3}{x^2-1} \text{ se } 1<x<2 \\ x^3 \text{ se } x\ge 2 \\ 2 \text{ se } x=1 \\ 2 \text{ se } x=-1 \end{cases}$$

A imagem da função $f$ é o conjunto:

(A) $]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.
(B) $]-\infty, -1[ \cup [2, +\infty[$.
(C) $]-\infty, -3[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$.
(D) $]-\infty, -2[ \cup ]-2, -1[ \cup ]-1, +\infty[$.
(E) $R - \{-1, 1\}$

**18** **(ITA)** Sejam três funções $f$, $u$, $v$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ para todo $x$ não nulo e $(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1$ para todo $x$ real. Sabendo-se que $x_0$ é um número real tal que $u(x_0)\cdot v(x_0) \neq 0$ e $f\left(\dfrac{1}{u(x_0)}\cdot\dfrac{1}{v(x_0)}\right) = 2$, o valor de $f\left(\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)$ é:

(A) $-1$.

(B) $1$.

(C) $2$.

(D) $\dfrac{1}{2}$.

(E) $-2$.

**19** **(ITA)** Dadas as sentenças:

I. Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ duas funções satisfazendo $(gof)(x) = x$, para todo $x \in X$. Então $f$ é injetiva, mas $g$ não é necessariamente sobrejetiva.
II. Seja $f: X \to Y$ uma função injetiva. Então, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$, em que A e B são dois subconjuntos de X.
III. Seja $f: X \to Y$ uma função injetiva. Então, para cada subconjunto $A$ de X, $f(A^C) \subset (f(A))^C$ onde $A^C = \{x \in X / x \notin A\}$ e $(f(A))^C = \{x \in Y / x \notin f(A)\}$.

Podemos afirmar que está (ao) correta(s):

(A) as sentenças nº I e nº II;
(B) as sentenças nº II e nº III;
(C) apenas a sentença nº I;
(D) as sentenças nº I e nº III;
(E) todas as sentenças.

**20** **(ITA)** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x\le -1 \\ x^2, \text{ se } -1<x\le 1 \\ 4, \text{ se } x>1 \end{cases}$

Lembrando que se $A \subset \mathbb{R}$ então $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in A\}$ considere as afirmações:

I. $f$ não é injetora e $f^{-1}([3, 5]) = \{4\}$
II. $f$ não é sobrejetora e $f^{-1}([3, 5]) = f^{-1}([2, 6])$
III. $f$ é injetora e $f^{-1}([0, 4]) = [-2, +\infty[$

Então podemos garantir que:

(A) Apenas as afirmações II e III são falsas.
(B) As afirmações I e III são verdadeiras.
(C) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(D) Apenas a afirmação III é verdadeira.
(E) Todas as afirmações são falsas.

**21** **(OBM)** A função real $f$, definida nos inteiros, satisfaz $f(n) - (n + 1) f(2 - n) = (n + 3)^2$, para todo $n$ inteiro. Determine $f(n)$?

**22** **(ITA)** Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $f$ uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $B \subset \mathbb{R}$ e o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in B\}$, então:

(A) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

(B) $f(f^{-1}(B)) = B$, se $f$ é injetora.

(C) $f(f^{-1}(B)) = B$

(D) $f^{-1}(f(B)) = B$, se $f$ é injetora.

(E) n.d.a

**23** **(ITA)** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos não vazios dos números reais e $f: A \to B$, $g: B \to A$ duas funções tais que $f \circ g = Id_B$. Então podemos afirmar que:

(A) $f$ é sobrejetora.
(B) $f$ é injetora.
(C) $f$ é bijetora.
(D) $g$ é injetora e par.
(E) $g$ é bijetora e ímpar.

**24** **(ITA)** Seja $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$ para todos a, $x$, $y$ reais. Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ é uma progressão de razão $d$, então podemos dizer que $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n)$

(A) é uma progressão aritmética de razão $d$.
(B) é uma progressão aritmética de razão $f(d)$ cujo primeiro termo é $a1$.
(C) é uma progressão geométrica de razão $f(d)$.
(D) é uma progressão aritmética de razão $f(d)$.
(E) nada se pode afirmar.

**25** **(EN)** Seja $x \notin \{-1, 0, 1\}$. Se $f_1(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ e $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ para todo $n$ natural, então $f_{1988}(x)$ igual a:

(A) $\frac{x-3}{x+1}$.

(B) $x$.

(C) $\frac{x+3}{1-x}$.

(D) $\frac{3-x}{x+1}$.

(E) $\frac{x+3}{x-1}$.

**26** **(EN)** Determine o conjunto-imagem da função (fog) para:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ 2x & \text{se } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{se } x>1\end{cases} \text{ e } g(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x<0\\ \frac{x}{2} & \text{se } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{se } x>1\end{cases}$$

(A) $]0,1] \cup \{2\}$.

(B) $(-\infty, +\infty)$.

(C) $]0, 1]$.

(D) $]0, +\infty)$.

(E) $\{1\}$.

**27** **(ITA)** Sejam $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que: $g(x) = 1 - x$ e $f(x) + 2f(2-x) = (x-1)^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f[g(x)]$ é igual a:

(A) $(x-1)^3$.

(B) $(1-x)^3$.

(C) $x^3$.

(D) $x$.

(E) $2-x$.

**28** Determine a inversa da função $u$: $(-\infty, -1) \to (2, +\infty)$ definida por $u(x)=x^2 + 2x + 3$.

**29** **(ITA)** Considere $x = g(y)$ a função inversa da seguinte função: "$y = f(x) = x^2 - x + 1$, para cada número real $x \geq \frac{1}{2}$". Nestas condições, a função $g$ é assim definida:

(A) $g(y)=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.

(B) $g(y)=\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.

(C) $g(y)=\sqrt{y-\frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.

(D) $g(y)=\sqrt{y-\frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.

(E) $g(y)=\frac{3}{4}+\sqrt{y-\frac{1}{2}}$, para cada $y \geq \frac{1}{2}$.

**30** **(ITA)** Seja $f$ uma função real definida para todo $x$ real tal que: $f$ é ímpar; $f(x-y) = f(x) - f(y)$; e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 0$. Definindo $g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x}$, se $x \neq 0$, e sendo $n$ um número inteiro positivo, podemos afirmar que:

(A) $f$ é não decrescente e $g$ é uma função ímpar.

(B) $f$ é não decrescente e $g$ é uma função par.

(C) $g$ é uma função par e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

(D) $g$ é uma função ímpar e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

(E) $f$ é não decrescente e $0 \leq g(n) \leq f(1)$

**31** Seja $a$ um real fixo positivo e $f$ uma função tal que $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ para todo $x$. Prove que $f$ é periódica determinando um período.

**32** Considere uma função $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, onde $ad \neq bc$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ (funções desse tipo recebem o nome de função homográfica ou função de Möbius). Prove que $f$ é bijetiva e determine sua inversa $f^{-1}$.

**33** **(EsPCEx)** Seja a função $f$: $\mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Podemos afirmar que essa função é:

(A) bijetora e não par nem ímpar.

(B) par e injetora.

(C) ímpar e injetora.

(D) par e sobrejetora.

(E) ímpar e sobrejetora.

**34** Seja $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente decrescente, isto é, quaisquer $x$ e $y$ reais com $x < y$ tem-se $f(x) > f(y)$. Dadas as afirmações:

I. $f$ é injetora;

II. $f$ pode ser uma função par;

III. se $f$ possui inversa então sua inversa também é estritamente decrescente.

Podemos assegurar que:

(A) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

(B) Apenas as afirmações II e III são falsas.

(C) Apenas as afirmações I é falsa.

(D) Todas as afirmações são verdadeiras

(E) Apenas a afirmação II é verdadeira.

**35** **(ITA)** Considere as afirmações:

I. Se $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $g$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, então a composição $g \circ f$ é uma função par.

II. Se $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $g$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, então a composição $f \circ g$ é uma função par.

III. Se $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar e inversível, então $f^{-1}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar.

Então:

(A) Apenas a afirmação I é falsa.

(B) Apenas as afirmações I e II são falsas.

(C) Apenas a afirmação III é verdadeira.

(D) Todas as afirmações são falsas.

(E) n.d.a.

**36** **(ITA)** Dadas as funções $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere $h = f \circ g$. Então podemos afirmar que:

(A) $h$ é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.

(B) $h$ é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.

(C) $h$ é estritamente crescente, mas não necessariamente inversível.

(D) $h$ é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente.

(E) n.d.a.

**37** **(ITA)** Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não constante e tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Das afirmações:

I. $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
II. $f(nx) = [f(x)]^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in N^*$.
III. $f$ é par.

é (são) verdadeira(s):

(A) apenas I e II.
(B) apenas II e III.
(C) apenas I e III.
(D) todas.
(E) nenhuma.

**38** Seja $f(x)$ uma função real, definida em $\mathbb{R}$ e satisfazendo a equação funcional $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$. A expressão de $f(x)$ é:

(A) $\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$.
(B) $\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)}$.
(C) $\frac{x^3-x^2+1}{x(x-1)}$.
(D) $\frac{x^3+x^2-1}{x(x-1)}$.
(E) $\frac{x^3+x^2-1}{x(x+1)}$.

**39** A função real definida por $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ pode ser decomposta, de maneira única, como uma soma da forma $P(x)+I(x)$, onde $P(x)$ é uma função par e $I(x)$ é uma função ímpar. A expressão de $I(x)$ é:

(A) $\frac{x}{1-x^2}$.
(B) $\frac{2x}{1-x^2}$.
(C) $\frac{3x}{1-x^2}$.
(D) $\frac{4x}{1-x^2}$.
(E) $\frac{5x}{1-x^2}$.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** **(OBM)** Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que, para todo $x$ real, $f(x) \cdot (f(x) - x) = 0$, então:

(A) $f$ é a função nula.
(B) $f$ é a função identidade, ou seja, $f(x) = x$ para todo $x$ real.
(C) $f$ é a função nula ou a função identidade.
(D) Há 4 possíveis funções $f$.
(E) Há infinitas funções $f$.

**02** **(OBM)** Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f$ função par, satisfazendo $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$ para todos os reais $x$ e $y$.

**03** Mostre que toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita com uma soma $P(x) + I(x)$, em que $P$ é uma função par e $I$ é ímpar.

**04** A função $f$ é tal que, para cada número real $x$, vale a relação $f(x) + f(x - 1) = x^2$. Se $f(19) = 94$, então $f(94)$ vale:

(A) 3227.
(B) 3572.
(C) 3763.
(D) 4245.
(E) 4561.

**05** **(OBM)** A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(x + f(y)) = x + f(f(y))$ para todos os números reais $x$ e $y$. Sabendo que $f(2) = 8$, calcule $f(2005)$.

**06** **(IBERO)** A cada inteiro positivo $n$ se associa um inteiro não negativo $f(n)$ de tal maneira que se satisfazem as seguintes condições:

I. $f(r.s) = f(r) + f(s)$;
II. $f(n) = 0$, sempre que o algarismo da unidade de $n$ seja 3;
III. $f(10) = 0$.

Determine $f(1985)$.

**07** Resolva a equação $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$

**08** Encontre as raízes reais da equação

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}} \qquad \left(0<a<\frac{1}{4}\right)$$

**09** **(OBM)** Seja $f: N \to R$ uma função tal que $f(1) = 999$ e $f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2 f(n)$. Determine f(1998).

**10** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 1$ e para todo $x$ e $y \in \mathbb{R}$, $f(xy + 1) = f(x) \cdot f(y) - f(y) - x + 2$. Determine $f$.

**11** Existe função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, tal que $xf(x)+x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-x}{x}$?

**12** Determine a função que satisfaz $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ para todos $x \notin \{0,1\}$

**13** **(OBM)** Seja $f$ uma função dos reais não nulos nos reais não nulos tal que:

- $(f(x) + f(y) + f(z))^2 = f(x))^2 + (f(y))^2 + (f(z))^2$ para todos $x, y, z$ reais não nulos tais que $x + y + z = 0$;
- $f(-x) = -f(x)$para todo $x$ real não nulo;
- $f(2011) = 1$.

Encontre o inteiro mais próximo de $f(33)$.

**14** **(OBM)** Para cada inteiro positivo $n$, seja $A_n=\{x\in R_+; x\cdot\lfloor x\rfloor=n\}$, em que $R_+$ é o conjunto dos reais positivos e $\lfloor x\rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $x$. Determine a quantidade de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_{2009}$.

Neste material, estudaremos os princípios básicos da álgebra. No decorrer das seguintes semanas, ficarão claras sua importância e suas aplicações em todas os outros assuntos da matemática. Podemos dizer que o aluno que não alcançar um domínio mínimo neste assunto certamente terá dificuldades com as outras áreas.

## 1. Axiomas e conceitos básicos dos números reais ($\mathbb{R}$)

No conjunto dos reais, são definidas duas operações: a soma e o produto. Essas operações possuem propriedades básicas que não podem ser demonstradas e, por isso, as chamamos de axiomas.

I. **Comutativa**
$x + y = y + x$
$x \cdot y = y \cdot x$

II. **Associativa**
$(x + y) + z = x + (y + z)$
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

III. **Elemento Neutro**
$x + 0 = x$
$x \cdot 1 = x$

IV. **Elemento Simétrico / Inverso**
$x + (-x) = 0$ (simétrico)
$x \cdot x^{-1} = 1$, para $x \neq 0$ (inverso)

V. **Distributiva**
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
$(y + z) \cdot x = x \cdot y + x \cdot z$

Assim, definimos também:

Diferença: $x - y = x + (-y)$

Divisão: $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, para $y \neq 0$

Axiomaticamente, podemos, em uma igualdade, somar uma mesma quantidade dos dois lados, como também podemos multiplicar os dois lados por uma mesma quantidade. Com isso e as regras iniciais, já é possível demonstrar alguns teoremas.

### Teorema 1 (Lei do corte – soma)

Se $x$, $y$ e $z$ são números reais tais que $x + y = x + z$, então $y = z$.

**Demonstração:** Na equação $x + y = x + z$, podemos somar $(-x)$ dos dois lados: $(-x) + (x + y) = (-x) + (x + z)$. Utilizando a propriedade associativa, podemos somar antes o $x$ ao seu simétrico: $(-x + x) + y = (-x + x) + z$. Daí, $0 + y = 0 + z$, o que nos dá $y = z$.

### Teorema 2 (Multiplicação por zero)

Para todo $x$ real, tem-se que $x \cdot 0 = 0$.

**Demonstração:** A ideia é utilizar que $x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$. Fazendo distributiva do lado esquerdo, temos $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$. Pela lei do corte, segue que $x \cdot 0 = 0$.

**Comentário:** Por isso não se define a divisão por 0. Se por um momento aceitássemos $\frac{1}{0} = x$, teríamos que $1 = 0 \cdot x$, o que não é possível.

### Teorema 3 (Produto igual a zero)

Se $x$ e $y$ são reais tais que $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

**Demonstração:** Pelo teorema 2, é fácil ver que se $x = 0$, a equação $x \cdot y = 0$ é satisfeita. Caso $x \neq 0$, sabemos que existe o seu inverso $x^{-1}$. Multiplicando os dois lados de $x \cdot y = 0$ por $x^{-1}$, temos $x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$. Utilizando a associativa do lado esquerdo e o teorema 2 do lado direito, temos que $y = 0$. Portanto, ou $x = 0$ ou $y = 0$.

Essa é uma das principais propriedades da álgebra e é uma das grandes motivações para se aprender a fatorar. Em algum problema em que uma expressão é igual a zero, se conseguirmos fatorar essa expressão, podemos transformar o problema em dois geralmente mais simples.

### Teorema 4 (Regra dos sinais):

I. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

II. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Esse é o famoso "menos com menos dá mais e menos com mais dá menos".

**Demonstração:** Para (1), a ideia é usar que $(x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0$ Fazendo a distributiva do lado esquerdo, temos $x \cdot y + (-x) \cdot y = 0$. Daí, basta somar $-(x \cdot y)$ dos dois lados e ficamos com $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. A outra parte de (1) é análoga.

Para (2), usaremos que $(-x) \cdot ((-y) + y) = (-x) \cdot 0 = 0$. Fazendo a distributiva, temos que $(-x) \cdot (-y) + (-x) \cdot y = 0$. Usando (1), temos $(-x) \cdot (-y) + (-(x \cdot y)) = 0$. Agora, basta somar $(x \cdot y)$ e ficamos com $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

### Teorema 5 (Lei do corte – produto)

Se $ax = ay$, então $\begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ x = y \end{cases}$.

**Demonstração:** Em $ax = ay$, somamos $-ay$ dos dois lados, ou seja, se "passarmos o $ay$ para o outro lado", temos $ax - ay = 0$, ou seja, $a(x - y) = 0$. Como já vimos, temos que $a = 0$ ou $x - y = 0$ (ou seja, $x = y$).

É importante observar que você não deverá fazer o passo a passo de nenhum desses teoremas durante os exercícios. Fazemos essas demonstrações apenas para a teoria ficar completa e para que você aumente sua capacidade de abstrair e de utilizar conceitos já dados para chegar a novos resultados.

### Teorema 6 (Tirando raiz quadrada em uma equação)

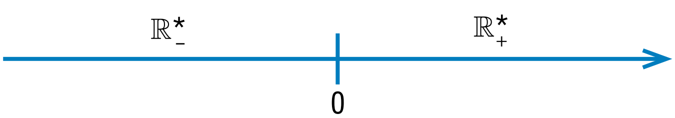
Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$. (e mque $x^2 = x \cdot x$)

**Demonstração:** Aqui utilizaremos um 'produto notável' que será visto mais à frente: usaremos que $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ (*). Então, em $x^2 = y^2$, somemos $-y^2$ dos dois lados: $x^2 - y^2 = 0$. Daí, por (*), temos $(x - y) \cdot (x + y) = 0$. Pelo teorema 3, segue que $x = y$ ou $x = -y$.

## 2. Inequações

O conjunto dos números reais pode ser dividido em 3 partes:

- reais positivos ($\mathbb{R}^*_+$);
- zero (0);
- reais negativos ($\mathbb{R}^*_-$).




Axiomaticamente, temos que se $x$ e $y$ são reais positivos, então $x + y$ e $x \cdot y$ também são. Além disso, temos também que se $x$ é real positivo, então $-x$ é real negativo. Daí, pela regra de sinais, podemos ver que o produto de dois negativos é um positivo e o produto de um positivo por um negativo é negativo.

### 2.1 Relação de Ordem

Dizemos que:

$x > y$ se $x - y \in \mathbb{R}^*_+$ ; $x < y$ se $x - y \in \mathbb{R}^*_-$

Além disso, $x \geq y$ se $x > y$ ou $x = y$; $x \leq y$ se $x < y$ ou $x = y$.

- **Propriedades**

I. (somar dos dois lados / lei do corte) $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z$;

II. (somar inequações) $\begin{cases} x > y \\ z > w \end{cases} \Rightarrow x + z > y + w$;

III. (transitividade) $\begin{cases} x > y \\ y > z \end{cases} \Rightarrow x > z$;

IV. (lei do corte – produto) $xz > yz \Leftrightarrow \begin{cases} x > y, \text{ se } z > 0 \\ x < y, \text{ se } z < 0 \end{cases}$

V. (multiplicar inequações) $\begin{cases} x > y > 0 \\ z > w > 0 \end{cases} \Rightarrow xz > yw$

VI. (inversão) $x > y > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$

**Demonstrações:**

I. Como $(x + z) - (y + z) = x - y$, a ordenação não se altera;
II. $(x + z) - (y + w) = (x - y) + (z - w)$ é a soma de dois positivos, então é positivo;
III. Basta somar as duas inequações e cancelar o $y$;
IV. $xz - yz = (x - y)z$ é positivo quando $x - y$ e $z$ têm o mesmo sinal;
V. $\begin{cases} x > y \Rightarrow xz > yz \\ z > w \Rightarrow yz > yw \end{cases}$ e termina pela transitividade;
VI. $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - y}{xy}$ é o quociente entre dois positivos

### 2.2 Teorema 7 (Quadrado maior ou igual a zero)

Para todo $x$ real, tem-se que $x^2 \geq 0$.

**Demonstração:** Caso $x$ seja positivo, $x^2 = x \cdot x$ é o produto de dois positivos, portanto positivo. Caso $x$ seja negativo, $x^2 = x \cdot x$ é o produto de dois negativos, portanto positivo. Caso $x$ seja nulo, $x^2 = x \cdot x$ é nulo. Portanto, $x^2 = x \cdot x$ é sempre maior ou igual a zero.

Muitas desigualdades famosas decorrem dessa propriedade e isso será cobrado ao longo do material.

- **Erros comuns em inequações**

I. Não é permitido subtrair inequações

Por exemplo, $\begin{cases} 8 > 6 \\ 7 > 3 \end{cases}$ é verdade, mas $8 - 7 > 6 - 3$ $(1 > 3)$ não é!

II. Só se pode elevar ao quadrado se os 2 lados são positivos

Por exemplo, $1 > -2$ é verdade, mas $1^2 > (-2)^2$ $(1 > 4)$ não é!

III. Não se pode passar variável multiplicando para o outro lado

Considere as inequações $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$ (*) e $1 > \dfrac{x}{2}$ (**).

Veja que de (*) para (**), a inequação foi multiplicada por $x$. No entanto, caso $x$ fosse negativo, o sinal da inequação deveria ser modificado (propriedade 4).

**Esse é o erro mais comum neste assunto, tome muito cuidado!**

## 3. Potências e Raízes

### 3.1 Potência

Para $a$ real não nulo (base) e $n$ inteiro positivo (expoente) definimos $a^n = a \cdot a^{n-1}$ e $a^0 = 1$. Para expoentes negativos, definimos $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Propriedades:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

III. $a^n b^n = (ab)^n$

IV. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

V. $(a^m)^n = a^{mn}$

Todas as propriedades podem ser rapidamente demonstradas.

### 3.2 Raízes

Para $a$ real e $n$ inteiro positivo, definimos $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Essa definição é bastante natural, já que, de forma habitual, definimos como $x = \sqrt[n]{a}$ um número tal que $x^n = a$ e $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

**Observação:** Caso $n$ seja par, pelo teorema 6, a equação $x^n = a$ nos dá que $a \geq 0$. Além disso, para não haver duplo sentido, acrescentamos à definição que $\sqrt[n]{a} \geq 0$ para $n$ par.

Por exemplo, $\sqrt{9} = 3$.

Imagine, por um momento, que aceitássemos que radicais de índice par pudessem ter 2 valores (no exemplo anterior, +3 e –3). Neste caso, que valor assumiria a expressão $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$? Vários valores seriam possíveis: 2 + 3 + 4, 2 – 3 +4, 2 – 3 –4... Com isso, uma expressão simples geraria uma grande confusão! Para isso não acontecer, aceitamos apenas o sinal de +.

- **Propriedades**

Para $a$ e $b$ positivos, temos:

I. $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$

II. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

III. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

IV. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Dessa forma, pela propriedade (1), definimos potências para expoentes racionais (fracionários).

- **Expoentes irracionais**

Vamos entender este conceito através de um exemplo.

Qual seria o valor de $3^{\sqrt{2}}$?

Este é um problema computacional. Para chegar a este valor, precisamos fazer aproximações (pelo truncamento da representação decimal do expoente) por cima e por baixo

| | |
|---|---|
| $3^1 = 3$ | $3^2 = 9$ |
| $3^{1,4} = 4{,}65554...$ | $3^{1,5} = 5{,}19615...$ |
| $3^{1,41} = 4{,}70697...$ | $3^{1,42} = 4{,}75896...$ |
| $3^{1,414} = 4{,}72770...$ | $3^{1,415} = 4{,}73289...$ |
| $3^{1,4142} = 4{,}72873...$ | $3^{1,4143} = 4{,}72925...$ |

Assim, fazendo essas aproximações cada vez mais precisas, temos o valor de $3^{\sqrt{2}} = 4{,}72880...$

Com essa expansão da definição de potência, carregamos todas as propriedades vistas inicialmente para expoentes inteiros.

## 4. Produtos notáveis e fatorações iniciais

Determinadas expressões aparecem muitas vezes em matemática. As primeiras desse tipo são os chamados produtos notáveis:

(0) (distributiva/colocar em evidência) $(a + b)\,x = ax + bx$
(1) (distributiva/agrupamento) $(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$
(2) (produto de Stevin) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
(3) (quadrado da soma) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(4) (quadrado da soma de 2 termos) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
(5) (diferença de quadrados) $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$
(6) (cubo da soma) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(7) (soma de cubos) $(a + b)\,(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
(8) (cubo da soma de 3 termos) $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)\,(b + c)\,(c + a)$

Não é difícil fazer a distributiva no lado esquerdo de cada uma das equações acima e chegar ao lado direito. Caso a necessidade fosse sempre essa, você poderia refazer isso a cada problema. No entanto, a maior utilidade desse ponto é já conhecer de antemão essas expressões para que, rapidamente, se possa substituí-las pela sua forma fatorada.

Como essas propriedades valem para todos $a$, $b$, $c$ e $x$, podemos substituir essas letras como quisermos. Em particular, trocando $b$ por $-b$ em (1), (4) e (5), obtemos:

(3') (quadrado da diferença) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(6') (cubo da diferença) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
(7') (diferença de cubos) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Todas essas expressões devem ser memorizadas e, para que se tenha mais facilidade nisso, sugere-se que muitos exercícios sejam feitos.

**Comentários:** Como já vimos, não é difícil partir de cada lado esquerdo até chegar ao lado direito correspondente. No entanto, em alguns momentos isso pode parecer artificial. Um bom exemplo é (5), já que será muito mais comum aparecer $a^3 + b^3$. Caso não soubéssemos que $a^3 + b^3$ pode ser escrito como $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, como poderíamos chegar a esse resultado? Em álgebra, assim como em toda matemática, a maneira mais eficiente de se resolver um problema é associá-lo a alguma situação já vista anteriormente. Podemos ver que $a^3 + b^3$ está no desenvolvimento de $(a + b)^3$, que é uma expressão muito comum.

Daí, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ implica $a^3 + b^3 =$
$= (a + b)^3 - (3a^2b + 3ab^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b) =$

$$\left(\underbrace{(a+b)^2}_{a^2+2ab+b^2} - 3ab\right) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

É possível abordar de forma similar outros produtos notáveis.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**01** Simplifique a expressão $A = \dfrac{a^2 + ab + ac + bc}{b^2 + ab + ac + bc}$.

**Solução:**
Antes de fazer qualquer tipo de cancelamento, precisamos fatorar o numerador e o denominador. E, para fatorar essas expressões com 4 parcelas, normalmente usamos o que é chamado de 'agrupamento':

$$\begin{cases} a^2 + ab + ac + bc = a(a + b) + c(a + b) = (a + c)(a + b) \\ b^2 + ab + ac + bc = b(a + b) + c(a + b) = (b + c)(a + b) \end{cases}$$

Substituindo, temos que $A = \dfrac{(a + c)(a + b)}{(b + c)(a + b)} = \dfrac{a + c}{b + c}$.

**02** Para $a \neq \pm 1$, prove que a expressão $E = \dfrac{a^2 - 1}{a - 1} - \dfrac{a^2 - 1}{a + 1}$ não depende de $a$.

**Solução:**
Primeiramente, vejamos que a expressão $a^2 - 1$ pode ser vista como uma diferença de quadrados e, por isso, pode ser fatorada: $a^2 - 1^2 = (a + 1)(a - 1)$.

Daí, temos que: $E = \dfrac{(a + 1)(a - 1)}{a - 1} - \dfrac{(a + 1)(a - 1)}{a + 1} = (a + 1) - (a - 1) = 2$, que não depende de $a$.

**03** **(Desigualdade das médias para 2 termos)** Prove que $\dfrac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$ para todo $x$ e $y$ positivos.

**Solução:**
Para provar uma desigualdade, uma das ideias é olhar para a diferença entre os dois lados:

$$\frac{x + y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}{2}.$$

Como todo quadrado de número real é $\geq 0$, então, segue que $\dfrac{x + y}{2} - \sqrt{xy} \geq 0$, o que finaliza o problema.

# 5. Técnicas de fatoração

## 5.1 Completando o quadrado

Em algumas situações, não é possível fatorar a expressão dada apenas agrupando as parcelas. Uma das saídas pode ser se aproveitar da semelhança entre a expressão e algum quadrado perfeito.

**Ex.:** Fatorar a expressão $a^4 + 4$.

**Solução:**
Já que temos uma expressão com apenas 2 parcelas, não é possível apenas colocarmos fatores em evidência.
Então, percebemos que a expressão se assemelha a $(a^2 + 2)^2$ e, por isso, fazemos $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2$ o que nos leva a uma diferença de quadrados.
Por isso, $a^4 + 4 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$. Por uma questão de organização, é comum colocarmos as potências em ordem decrescente de expoente: $a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$.

## 5.2 Teorema 8 (fórmula de Bhaskara)

Para $a \neq 0$, se $ax^2 + bx + c = 0$, então $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Demonstração:** A ideia é completar o quadrado na equação para que a variável $x$ apareça apenas um vez e não duas, como na situação inicial.

Primeiramente, dividimos tudo por $a$: $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$.

Para completar o quadrado, somando $\dfrac{b^2}{4a^2}$, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Daí, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ e $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ e está finalizado.

## 5.3 Distributiva inteligente

É comum o vício de fazer a distributiva termo a termo quando duas expressões estão sendo multiplicadas. No entanto, em alguns momentos é interessante agrupar alguns termos antes disso.

**Ex.:** Fatorar $E = (a^2 + 3a + 3)(a^2 + 3a + 5) - 15$

**Solução:**
Aqui, não vale a pena fazer toda a distributiva termo a termo, porque ficaríamos com uma expressão com muitas parcelas e perderíamos a repetição de parcelas que acontece na expressão dada. Por isso, fazemos $E = ((a^2 + 3a) + 3)((a^2 + 3a) + 5) - 15$ e temos uma distributiva de apenas 4 parcelas em vez de 9. Daí:

$$E = (a^2 + 3a)^2 + 3(a^2 + 3a) + 5(a^2 + 3a) + 15 - 15$$
$$E = (a^2 + 3a)^2 + 8(a^2 + 3a)$$

e podemos colocar $a^2 + 3a$ em evidência, ficando com $E = (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 8)$. Além disso, ainda podemos fatorar o 1º fator e $E = a(a + 3)(a^2 + 3a + 8)$.

## 5.4 Quebrando parcelas

O popular 'agrupamento' precisa de 4 parcelas para ser feito. Em algumas ocasiões, temos apenas 3 parcelas e podemos quebrar uma delas em duas.

**Ex.:** Fatorar $U = 3x^2 + 10xy + 3y^2$.

**Solução:**
Aqui, a ideia será quebrar o coeficiente 10 em duas partes. De nada seria útil escrevê-lo como 8 + 2, 7 + 3, 6 + 4 ou 5 + 5, pois 8, 7, 6 e 5 não têm fator comum com 3 e, por isso, não conseguiríamos colocar nada em evidência em $U$. A boa ideia é quebrar 10 = 9 + 1. Assim:

$$U = 3x^2 + 9xy + xy + 3y^2$$
$$U = 3x(x + 3y) + y(x + 3y)$$
$$U = (3x + y)(x + 3y)$$

### 5.5 Teorema 9 (soma de 3 números igual a 0, soma dos cubos fatora)

Se $a + b + c = 0$, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

**Demonstração:** Dado que $a + b + c = 0$, temos $a + b = -c$. Elevando ao cubo, ficamos com $(a + b)^3 = (-c)^3$. Desenvolvendo: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$. Daí, segue que $a^3 + b^3 + c^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b)$. Como $a + b = -c$, temos $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**01** Sendo $x_n = 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$, prove que $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ é inteiro para todo $n$ natural.

**Solução:**
Inicialmente, faça $2^{2^n} = a$. Veja, então, que $2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = (2^{2^n})^2 = a^2$ e $2^{2^{n+2}} = 2^{2^n \cdot 2^2} = (2^{2^n})^4 = a^4$. Com isso, temos que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{2^{n+2}} + 2^{2^{n+1}} + 1}{2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2 + a + 1}\ (*)$.

Para concluir o problema, precisamos fatorar o numerador e, para isso, vamos 'completar o quadrado'.

Temos $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)$. Substituindo em (*), temos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2 + a + 1} = \frac{(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 + a + 1} = a^2 - a + 1,$$ que é inteiro.

**02** Prove que não existem $a$, $b$ e $c$ distintos tais que $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} = 0$.

**Solução:**
Teríamos a soma de 3 números sendo igual a zero, portanto, a soma de seus cubos é igual a 3 vezes o seu produto:

$$(a - b) + (b - c) + (c - a) = 3\sqrt[3]{a-b}\,\sqrt[3]{b-c}\,\sqrt[3]{c-a}$$

Como o lado esquerdo é nulo e o lado direito é o produto de 3 fatores não nulos (já que $a$, $b$ e $c$ são distintos), temos uma impossibilidade.

## 6. Radicais

Uma situação muito comum é encontrarmos uma expressão que contenha radicais no denominador. Veja que efetuar uma divisão por um número irracional pode nos levar a erros de aproximação, dependendo da precisão com que se tenha o denominador.

Por exemplo, considere o cálculo do número $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Caso utilizemos a aproximação $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, encontraremos $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{1}{1{,}7} \approx 0{,}5888$. Caso refinemos a aproximação com $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, obteremos $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{1}{1{,}73} \approx 0{,}5780$.

Por isso, como na prática não temos todas as casas de $\sqrt{3}$, a divisão $\frac{1}{\sqrt{3}}$ não deve ser feita dessa maneira.

Por outro lado, se multiplicarmos o numerador e o denominador de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ por $\sqrt{3}$, teremos $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1{,}73205}{3} \approx 0{,}5773$.

A esse processo de eliminação de radicais em denominadores, damos o nome de 'racionalização'.

**Ex.:** Racionalizar $\frac{1}{4+\sqrt{3}}$.

**Solução:**
Aqui, faremos uso do produto notável $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ e multiplicaremos o numerador e o denominador por $4 - \sqrt{3}$:

$$\frac{1}{4+\sqrt{3}} = \frac{4-\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \frac{4-\sqrt{3}}{16-3} = \frac{4-\sqrt{3}}{13}$$

**Comentário:** Uma outra forma de tratar o problema é encontrar uma equação que tenha a expressão do denominador como raiz. No exemplo, fazendo $4 + \sqrt{3} = x$, temos $x - 4 = \sqrt{3}$ e, elevando ao quadrado, $x^2 - 8x + 16 = 3$, o que nos dá a equação $x^2 - 8x + 13 = 0$, que era o nosso objetivo.

Agora, podemos isolar $\frac{1}{x}$:

$$(x-8)x = -13 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{8-x}{13}$$

Veja que, fazendo isso, eliminamos o radical do denominador. Substituindo o valor de $x$, temos $\frac{1}{x} = \frac{8-x}{13} = \frac{8-\left(4+\sqrt{3}\right)}{13} = \frac{4-\sqrt{3}}{13}$.

### 6.1 Teorema 10 (radicais duplos):

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}},\ \text{em que } C = \sqrt{A^2 - B}$$

**Demonstração:** Basta comparar os quadrados dos dois lados. (Para uma motivação de como chegar a essa expressão, faça $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ e escolha $x$ e $y$ convenientes.)

Em geral, é conveniente usar essa fórmula quando $A^2 - B$ for quadrado perfeito, para que transformemos um radical duplo em uma soma de radicais simples.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**01** Prove que o número $x = \sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}$ é inteiro e negativo.

**Solução**
É óbvio que $x$ é negativo, pois $\sqrt{3-\sqrt{8}} < \sqrt{3+\sqrt{8}}$. Para provar que $x$ é inteiro, elevamos ao quadrado:

$$x^2 = \left(\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2 =$$

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2 - 2\sqrt{3-\sqrt{8}}\,\sqrt{3+\sqrt{8}} + \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 3 - \sqrt{8} - 2\sqrt{3^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2} + 3 + \sqrt{8} \Rightarrow x^2 = 4.$$

Como $x$ é negativo, temos que $x = -2$, que é inteiro.

Também é possível utilizar a fórmula do radical duplo.

**02** Qual é o valor de $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$, com infinitos radicais?

**Solução**

Elevando ao quadrado, temos que $x^2 = 6 + \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$. Como há uma quantidade infinita de radicais, ficamos com $x^2 = 6 + x$, ou seja, $x^2 - x - 6 = 0$. As raízes dessa equação são $x = 3$ e $x = -2$. Como $x$ é um radical, $x$ é positivo.
Por isso, $x = 3$.

**Observação:** A rigor, antes de darmos os argumentos acima deveríamos provar que $x$ é um número real. Como $x$ é o limite de uma sequência, neste caso, poderia ser que $x$ tendesse ao infinito. Aqui, para formalizar, basta provar (por indução no número de raízes) que $x$ é menor que 3.

Agora, vereos outras técnicas de fatoração.

## 7. Diferença e soma de potências

Dois produtos notáveis que também podem ser muito úteis são:

(1) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})$, para $n$ natural
(2) $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-1})$, para $n$ natural ímpar

Para demonstrar as duas relações, basta fazer a distributiva nos lados direitos.

## 8. Raízes × Fatores

### 8.1 Teorema 11 (raiz implica fator)

Se $x = a$ anula uma expressão polinomial em $x$, então $(x - a)$ é um fator dessa expressão.

**Demonstração:** Considere a expressão $E = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0$. Se $x = a$ anula a expressão $E$, então $b_ma^m + b_{m-1}a^{m-1} + \ldots + b_1a + b_0 = 0$. Subtraindo uma equação da outra, ficamos com $E = b_m(x^m - a^m) + b_{m-1}(x^{m-1} - a^{m-1}) + \ldots + b_1(x - a)$.

Agora, veja que pelo produto notável da diferença de raízes, cada parênteses tem $(x - a)$ como fator e, assim, $E$ possui $(x - a)$ como fator.

### 8.2 Teorema 12 (teste das raízes racionais)

Considere uma equação polinomial em $x$ de coeficientes inteiros

$$E = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0$$

Se $x = \frac{p}{q}$ anula a expressão $E$ (fração irredutível, ou seja, $p$ e q inteiros e primos entre si), então $\begin{cases} p \text{ é divisor de } b_0 \\ q \text{ é divisor de } b_m \end{cases}$.

A demonstração deste teorema será vista em outro assunto mais à frente.

Esse teste é muito útil pois nos dá uma lista de frações que podem anular a expressão em questão. Daí, usando o teorema 11, podemos encontrar uma fatoração diretamente.

**Ex.:** Fatorar $K = 2x^3 + 5x^2 - x - 1$ .

**Solução:**

Pelo teste das raízes racionais, as possíveis raízes racionais de $K$ são $+1, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Testando uma a uma, vemos que $x = \frac{1}{2}$ anula a expressão $K$. Por isso, sabemos que $x - \frac{1}{2}$ é um fator de $K$, o que é equivalente a $2x - 1$ ser fator $K$.

Agora, basta forçar o surgimento desse fator somando e subtraindo os termos corretamente:

$$K = 2x^3 + 5x^2 - x - 1 = \underbrace{2x^3 - x^2}_{} + \underbrace{6x^2 - 3x}_{} + \underbrace{2x - 1}_{}$$

$$x^2 \cdot (2x - 1) + 3x \cdot (2x - 1) + 1 \cdot (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 + 3x + 1).$$

## 9. Expressões homogêneas

Em uma expressão algébrica, definimos o conceito de grau de uma parcela como a soma dos expoentes nas suas variáveis. Por exemplo, o grau de $x^3y^5z^2$ é 10.

Dizemos que uma expressão é homogênea quando todas as suas parcelas têm o mesmo grau. Por exemplo, $x^3 + 3x^2y + 7xy^2 - 4y^3$ é homogênea pois todas as suas parcelas têm grau 3.

Caso haja uma expressão homogênea, há um artifício, muitas vezes com vantagens até mais psicológicas, que pode ser muito útil.

**Ex.:** Considere a equação $x^3 + 3x^2y + 7xy^2 - 11y^3 = 0$. Veja que $x = y = 0$ é solução. Para $y \neq 0$, divida tudo por $y^3$: $\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 7\left(\frac{x}{y}\right) - 11 = 0$

Fazendo $\frac{x}{y} = t$, reduzimos a equação original de duas variáveis a equação de apenas uma variável $t^3 + 3t^2 + 7t - 11 = 0$. Agora, poderíamos seguir utilizando as técnicas de fatoração já vistas.

## 10. Mudança de variáveis

Em muitos problemas, é interessante fazer uma mudança de variáveis para simplificar a solução.

**Ex.:** Determinar as raízes reais de $x^2 + 3x + 1 = \frac{12}{x^2 + 3x + 2}$.

**Solução:**

Inicialmente, repare que se multiplicarmos, chegaremos a uma equação do 4ª grau, o que não seria bom. Ao perceber a semelhança entre as expressões, façamos $x^2 + 3x + 2 = a$. Daí, a equação é $a - 1 = \frac{12}{a}$, que equivale a $a^2 - a - 12 = 0$, que tem soluções $a = 4$ e $a = -3$. Substituindo de volta, ficamos com as equações $x^2 + 3x - 2 = 0$ e $x^2 + 3x + 5 = 0$. Resolvendo-as, temos que $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

## 11. Lema de Gauss (método dos coeficientes a determinar)

Em geral, ao tentar fatorar uma expressão algébrica, tentamos usar as ferramentas estudadas na seguinte ordem:

– colocar em evidência/agrupamento;
– quebrar parcelas/completar quadrado;
– “chutar” uma raiz racional para obter um fator de grau 1;
– fazer alguma mudança de variáveis.

Caso nenhuma dessas tentativas dê certo, podemos utilizar o método deste tópico.

Formalmente, o Lema de Gauss diz o seguinte: "se um polinômio de coeficientes inteiros pode ser fatorado como produto de polinômios de coeficientes racionais, então ele também pode ser fatorado como produto de polinômios com coeficientes inteiros".

Na prática, isso significa que, no seu rascunho, você deve supor que os coeficientes dos fatores são inteiros, porque se não forem, serão irracionais e será difícil encontrá-los.

**Ex.:** Fatorar $U = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2$ .

**Solução**

Primeiramente, veja que os candidatos a raízes racionais de $U$ são $+1, -1, +2, -2$. Testando, veja que nenhuma delas funciona. Com isso, não temos raízes racionais e, por isso, não há fatores de grau 1 em $U$. Então, devemos escrever $U$ como um produto de dois fatores de grau 2:

$$U = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f)$$

A ideia é fazer a distributiva e igualar os coeficientes aos da expressão original. No coeficiente de $x^4$, temos $ad = 1$. Agora é que temos a vantagem de considerar que os coeficientes são inteiros. Veja que temos $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Podemos considerar que $a = d = 1$, pois no 2º caso bastaria multiplicar os 2 fatores de $U$ por $-1$. Então, ficamos com:

$$U = (x^2 + bx + c)(x^2 + ex + f)$$

Agora, analisando o termo independente de $x$, temos que $cf = -2$. Para $c$ e $f$ inteiros, temos 2 casos: $c = 1, f = -2$ ou $c = -1, f = 2$.

**1º caso:** $c = 1, f = -2$

$U = (x^2 + bx + 1)(x^2 + ex - 2) = x^4 + (b + e)x^3 + (-1 + be)x^2 + (e - 2b)\,x - 2$

Igualando os coeficientes, temos o sistema $\begin{cases} b + e = 3 \\ e - 2b = 0 \\ -1 + be = 3 \end{cases}$.

As duas primeiras equações nos dão $b = 1$, $e = 2$ que não funcionam na terceira equação.

**2º caso:** $c = -1, f = 2$

$U = (x^2 + bx - 1)(x^2 + ex + 2) = x^4 + (b + e)x^3 + (1 + be)x^2 + (2b - e)\,x - 2$.

Igualando os coeficientes, temos o sistema $\begin{cases} b + e = 3 \\ 2b - e = 0 \\ 1 + be = 3 \end{cases}$

As duas primeiras equações nos dão $b = 1$, $e = 2$, que funcionam na terceira equação.

Portanto, temos que $U = (x^2 + x - 1)(x^2 + 2x + 2)$.

Veja que este processo pode ser muito trabalhoso caso o coeficiente independente de $x$ possua muitos divisores.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Resolva a equação $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ nos reais.

**Solução:**

Essa equação polinomial é chamada de recíproca (isso acontece quando os coeficientes equidistantes do centro são iguais). Nesse caso, temos uma solução padrão. Dividindo tudo por $x^2$ temos que $x^2 + 3x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, que pode ser escrita como $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$. Agora, fazendo $x + \frac{1}{x} = t$, temos $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$, o que nos dá $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Substituindo na equação, temos $(t^2 - 2) + 3t - 2 = 0$, que dá $t^2 + 3t - 4 = 0$. Essa equação tem raízes $t = -4$ e $t = 1$. Colocando em $x + \frac{1}{x} = t$, temos as equações do 2º grau $x^2 + 4x + 1 = 0$ e $x^2 - x + 1 = 0$. A primeira dá as raízes $x = -2 \pm \sqrt{3}$ e a segunda não tem raízes reais.

Então, $S = \left\{-2 \pm \sqrt{3}\right\}$.

**02** Sejam $x$, $y$ e $z$ números reais tais que $1 \neq x \neq y \neq 1$ e $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$. Prove que essas duas frações são iguais a $x + y + z$.

**Solução:**

Para facilitar, utilizaremos uma propriedade de razões e proporções, que enunciaremos como 'lema':

Lema: Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ e $b \neq d$, então $\frac{a - c}{b - d} = k$.

Prova do lema: Como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, temos que $a = bk$ e $c = dk$. Daí,

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{bk - dk}{b - d} = \frac{(b - d)k}{b - d} = k\,.$$

Agora, a partir do lema, as frações dadas no problema são iguais a:

$$\frac{(yz - x^2) - (xz - y^2)}{(1 - x) - (1 - y)} = \frac{(y^2 - x^2) + (yz - xz)}{y - x} = \frac{(y - x)(y + x) + z(y - x)}{y - x} = y + x + z \quad 0$$

que encerra a demonstração.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** Quantas soluções tem a equação $\frac{x}{x - 3} = \frac{3}{x - 3}$?

**02** Resolva a equação $(x + 1)(x - 4)(x - 2)(x^2 + 3x + 2) = (x + 1)(x - 4)(x - 2)(x^2 + 8x + 3)$.

**03** Resolva $\dfrac{3}{1 + \dfrac{3}{1 + \dfrac{3}{1 - x}}} = 2$.

**04** Resolva $\dfrac{2}{5+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5-\dfrac{1}{x+2}}}}=\dfrac{2}{5}$.

**05** Determine as soluções de $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}=1$.

**06** A expressão $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{1-a}}$ é igual a:

(A) $a$, se $a \neq 0$.
(B) 1, para todo $a$.
(C) $-a$, se $a \neq 1$.
(D) $1-a$, para todo $a$.
(E) $a$, se $a \neq 1$.

**07** **(EN)** Seja $\left(\dfrac{a}{a+y}+\dfrac{y}{a-y}\right)\div\left(\dfrac{y}{a+y}-\dfrac{a}{a-y}\right)=-1,\ a \neq 0$.

A igualdade é válida:

(A) para todos, exceto dois, valores de $y$.
(B) só para dois valores de $y$.
(C) para todos os valores de $y$.
(D) só para um valor de $y$.
(E) para nenhum valor de $y$.

**08** Calcule $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$.

**09** **(UFF)** Qual é o valor simplificado da fração $\dfrac{10^{10}+10^{20}+10^{30}}{10^{20}+10^{30}+10^{40}}$?

**10** **(OCM)** Qual dos números é maior:

$$\frac{123456+10^{999}}{123457+10^{999}} \text{ ou } \frac{123457+10^{999}}{123458+10^{999}}\ ?$$

**11** **(ITA-2002)** Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s):

(A) apenas I.
(B) apenas I e II.
(C) apenas II e III.
(D) apenas I e III.
(E) todas.

**12** **(OBM 1ª fase 2008)** Sendo $x = 10^{-2008}$, assinale a alternativa que apresenta o maior valor.

(A) $\dfrac{1}{x}$.
(B) $\dfrac{1}{x(x+1)}$.
(C) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.
(D) $x$.
(E) $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x}}$.

**13** **(OBM 1ª fase 2011)** Sendo $a$ e $b$ reais tais que $0 < a \leq 1$ e $0 < b \leq 1$, o maior valor que $\dfrac{ab}{a+b}$ pode assumir é:

(A) 0.
(B) $\dfrac{1}{4}$.
(C) $\dfrac{1}{3}$.
(D) $\dfrac{1}{2}$.
(E) 1.

**14** **(OBM 1ª fase 2010)** Qual das seguintes frações é mais próxima de $\sqrt{7}$?

(A) $\dfrac{3}{1}$.
(B) $\dfrac{5}{2}$.
(C) $\dfrac{8}{3}$.
(D) $\dfrac{13}{5}$.
(E) $\dfrac{18}{7}$.

**15** Dados $n$ números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que $a_1 < a_2 < ... < a_n$, prove que $a_1 < \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} < a_n$.

**16** Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2 + y^2 = 0$, prove que $x = y = 0$.

**17** Prove que:

A. se $x$ é positivo, então $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$;

B. se $x$ é negativo, então $x + \dfrac{1}{x} \leq -2$ ;

C. conclua que $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geq 2$ para todo $x$ real.

**18** **(OBM 1ª fase 2011)** Qual é o valor da expressão $20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007$?

(A) $2 \times 20112007^2$.
(B) $2 \times 20112003^2$.
(C) $2 \times 20112007$.
(D) $2 \times 20112003$.
(E) $2 \times 20112011^2$.

**19** **(SPIA)** Fatore as expressões algébricas abaixo:

A. $a^4 - 1$;
B. $a^6 - 1$;
C. $a^6 + 1$;
D. $a^4 - 18a^2 + 81$;
E. $a^{12} - 2a^6 + 1$;
F. $a^5 + a^3 - a^2 - 1$;
G. $a^4 + 2a^3 - 2a - 1$;
H. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$;
I. $c^4 - (1 + ab)c^2 + ab$;
J. $2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2$;
K. $a^4 + 3a^3 + 4a^2 - 6a - 12$;

**20** Prove que se $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + d)^2 = 4(ab + bc + cd)$, então, $a = b = c = d$

**21** **(OBM 3ª fase 2003 nível 2)** Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$ quaisquer que sejam os reais $x$ e $y$.

**22** Se $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$, então, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é igual a:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

**23** Se $x$ e $y$ satisfazem $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$, mostre que, necessariamente, $x = y$ ou $x = \frac{1}{y}$.

**24** Determine $x$ real tal que:

A. $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$;

B. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

**25** Dado que $x^2 + y^2 = 6xy$ $(x > y > 0)$, determine o valor de $\frac{x+y}{x-y}$.

**26** Qual é a restrição em $a$ e $b$ reais para que $\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}$?

**27** Dados $a$ e $b$ de módulos diferentes tais que $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 6$, calcule $\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} + \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.

**28** **(SPIA)** Simplifique as expressões abaixo:

(A) $\frac{a}{a^2 - 1} + \frac{a^2 + a - 1}{a^3 - a^2 + a - 1} + \frac{a^2 - a - 1}{a^3 + a^2 + a + 1} - \frac{2a^3}{a^4 - 1}$;

(B) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$;

(C) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$;

(D) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$;

(E) $\frac{a-c}{a^2 + ac + c^2} \cdot \frac{a^3 - c^3}{a^2b - bc^2}\left(1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c}\right) \div \frac{c(1+c) - a}{bc}$;

**29** Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k$, prove que, dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n \neq 0$, tem-se: $\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n} = k$.

**30** **(OBM 1ª fase 2009)** Se $x^2 = x + 3$, então $x^3$ é igual a:

(A) $x^2 + 3$.
(B) $x + 4$.
(C) $2x + 2$.
(D) $4x + 3$.
(E) $x^2 - 2$.

**31** **(CN)** Sabe-se que $a^3 - 3a + 1 = 93$ e $K = a^4 - 6a + 1$. Logo, $K$ também pode ser expresso por:

(A) $3a^2 + 86a + 1$.
(B) $3a^2 + 84a + 1$.
(C) $6a^2 + 86a + 1$.
(D) $6a^2 + 84a + 1$.
(E) $9a^2 + 86a + 1$.

**32** **(EFOMM – 03)** Que termo se deve acrescentar ao binômio $\frac{x^2}{4} + \frac{b^3x}{3}$ de modo que se obtenha um trinômio que seja quadrado perfeito?

(A) $\frac{b^6}{3}$.
(B) $\frac{b^4}{9}$.
(C) $\frac{b^6}{2}$.
(D) $\frac{b^3}{3}$.
(E) $\frac{b^6}{9}$.

**33** **(OBM 1ª fase 2006)** Os dois números reais $a$ e $b$ são não nulos e satisfazem $ab = a - b$. Assinale a alternativa que exibe um dos possíveis valores de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

(A) $-2$.

(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

(E) 2.

**34** **(SPIA)** Fatore as expressões algébricas a seguir:

A. $a^4 + a^2b^2 + b^4$;
B. $a^4 + 4a^2 - 5$;
C. $4a^4 + 5a^2 + 1$;
D. $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$;
E. $a^4 + 324$;
F. $a^4 + a^2 + 1$;
G. $a^4 + 9$;
H. $a^4 + 4b^4$;
I. $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$;
J. $(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3$;
K. $(a^2 + b^2)^3 - (b^2 + c^2)^3 - (a^2 - c^2)^3$;
L. $(a + b)^5 - (a^5 + b^5)$.

**35** Simplifique $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$.

**36** Calcule $\sqrt{a^2}$.

**37** Calcule $\sqrt{a^4}$.

**38** Calcule $\sqrt{2}\,\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(1+\sqrt{3})$.

**39** Calcule $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})$.

**40** Racionalize as frações:

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

(B) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$.

(C) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$.

(D) $\dfrac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$.

**41** Sendo $a$, $b$ e $c$ positivos, simplifique $\sqrt{a^2+4ab+6ac+4b^2+12bc+9c^2}$.

**42** Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

**43** **(OBM 1ª fase 2006)** Sejam $x$ e $y$ números racionais. Sabendo que $\dfrac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}$ também é um número racional, quanto vale o produto $xy$?

(A) 20.
(B) Pode ser igual a 20, mas também pode assumir outros valores.
(C) 1.
(D) 6.
(E) Não se pode determinar.

**44** **(SPIA)** Simplifique as expressões abaixo:

(A) $\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}+1}-\dfrac{2a^{\frac{1}{3}}-2}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}\right)^{-1}-\dfrac{1}{4}a^{\frac{4}{3}}$;

(B) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{b}\,(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})+2\sqrt[4]{ab}}{(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a})^2}-\left(\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}+1\right)^{-1}+1\right)^{1/2}\cdot\sqrt[8]{ab}$;

(C) $\left(\dfrac{(a+b)\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}-(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2})\left(b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}}{(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})\left(\sqrt[3]{b}+\sqrt[6]{ab}-2\sqrt[3]{a}\right)}\right)^{-1}+2\sqrt[6]{a}$;

(D) $\dfrac{\sqrt[6]{b^5}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{a}}\left(\dfrac{\sqrt[6]{ab^9}+\sqrt[6]{a^{10}}}{a-\sqrt{ab}+b}\right)^{-1}+1$.

**45** **(OBM 1ª fase 2006)** Quantos ternos de números reais $x$, $y$, $z$ satisfazem o sistema abaixo?

$$\begin{cases} x(x+y+z)=2005 \\ y(x+y+z)=2006 \\ z(x+y+z)=2007 \end{cases}$$

(A) Nenhum.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 2006.

**46** **(OBM 1ª fase 2013)** Determine $x+y$, onde $x$ e $y$ são reais, sabendo que $x^3+y^3=9$ e $xy^2+x^2y=6$.

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

**47** **(OBM 2ª fase 2012)** Sendo $a$, $b$, $c$ reais tais que $ab(a+b+c)=1001$, $bc\,(a+b+c)=2002$ e $ca\,(a+b+c)=3003$, encontre $abc$.

**48** **(SPIA)** Simplifique as expressões a seguir:

(A) $\dfrac{5a^2-a-4}{a^3-1}$.

(B) $\dfrac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1}$.

(C) $\dfrac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$.

(D) $\dfrac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$.

(E) $\dfrac{2a^4+7a^2+6}{3a^4+3a^2-6}$.

(F) $\dfrac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2}$.

(G) $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6}$

**49** Prove que se $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$, então, $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=-2xyz$.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** **(OBM 1ª fase 2010)** Os números $x$ e $y$ são distintos e satisfazem $x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y}$. Então $xy$ é igual a:

(A) 4
(B) 1
(C) –1
(D) –4
(E) São necessários mais dados.

**02** Sendo $a$, $b$ e $c$ números distintos, simplifique a expressão:

$$\frac{2}{b-c}+\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}+\frac{2}{c-a}+\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}+\frac{2}{a-b}+\frac{a-b}{(b-c)(c-a)}$$

(A) $a+b+c$
(B) $a-b$
(C) $(a-b)(b-c)(c-a)$
(D) $2abc$.
(E) 0.

**03** Prove que

$$\frac{x}{p(y+z)} = \frac{y}{q(x+z)} = \frac{z}{r(x+y)} \Rightarrow \frac{x(y-z)}{p} + \frac{y(z-x)}{q} + \frac{z(x-y)}{r} = 0$$

.

**04** **(OBM 1ª fase 2012)** Se $x^2 = 2x + 4$, então $(x + 1)^{-1}$ é igual a:

(A) $x + 2$.
(B) $x - 3$.
(C) $x - 1$.
(D) $2x + 5$.
(E) $3x + 5$.

**05** Definindo $x + \frac{1}{x} = u$, calcule $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ em função de $u$ para $n = 2,3,4,5$.

**06** **(OBM 2ª fase 2005)** Determine todos os pares de inteiros $(x; y)$ tais que $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$.

**07** **(CN)** Sejam $A = \left[7^{2011}, 11^{2011}\right]$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / x = (1 - t) \cdot 7^{2011} + t \cdot 11^{2011}$, com $t \in [0,1]\}$, o conjunto $A - B$ é igual a:

(A) $A \cap B$.
(B) $B - \{11^{2011}\}$.
(C) $A - \{7^{2011}\}$.
(D) $A$.
(E) $\varnothing$.

**08** Os números reais $a$, $b$, $c$ e $d$ são tais que $a < b < c < d$ e $a + d = b + c$. Qual é maior: $ad$ ou $bc$?

**09** **(OBM 1ª fase 2010)** Os números $a$ e $b$ são reais não negativos tais que $a^3 + a < b - b^3$. Então:

(A) $b < a < 1$.
(B) $a = b = 1$.
(C) $a < 1 < b$.
(D) $a < b < 1$.
(E) $1 < a < b$.

**10** Se $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ pertencem ao intervalo $(\alpha, \beta)$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são positivos, prove que $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ também pertence a $(\alpha, \beta)$. Nas mesmas condições, se $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$, prove que $\frac{t_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n}{t_1b_1 + t_2b_2 + \ldots + t_nb_n}$ também pertence ao intervalo $(\alpha, \beta)$.

**11** Prove que, para todos $x$ e $y$ reais, tem-se que $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

**12** Para todos $x$, $y$ e $z$ reais, prove que $(x+y)z \leq \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2$.

**13** Para $a$, $b$ e $c$ reais, prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

**14** Prove que se $a$, $b$ e $c$ são positivos, então $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

**15** Prove que $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ para $a$, $b$, $c$, $d$ não negativos.

**16** Para quais valores reais de $a$ e $b$ vale $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt[3]{a^3 + b^3}$?

**17** **(AFA – 1997)** O produto das raízes da equação $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$ pertence ao conjunto dos números:

(A) naturais e é primo.
(B) inteiros e é múltiplo de 4.
(C) complexos e é imaginário puro.
(D) racionais positivos e é uma fração imprópria.

**18** **(OBM – 1ª fase)** Sendo $a$ e $b$ inteiros tais que $\left(1 + \sqrt{2}\right)^{2011} = a + b\sqrt{2}$, $\left(1 - \sqrt{2}\right)^{2010}$ é igual a:

(A) $a + 2b + (a - b)\sqrt{2}$.
(B) $a - 2b + (a - b)\sqrt{2}$.
(C) $a + 2b + (b - a)\sqrt{2}$.
(D) $2b - a + (b - a)\sqrt{2}$.
(E) $a + 2b - (a + b)\sqrt{2}$.

**19** Racionalize:

(A) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + 2}$

(B) $\dfrac{1 + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

(D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}$

(E) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}}$

**20** **(CN)** O número real $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é igual a:

(A) $5 - \sqrt{3}$.
(B) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.
(C) $3 - \sqrt{2}$.
(D) $13 - 3\sqrt{3}$.
(E) 2.

**21** **(CN)** O valor de $\frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(5\sqrt{2} + 7\right)^{1338}} + 3 - 2\sqrt{2}$ é um número

(A) múltiplo de 11.
(B) múltiplo de 7.
(C) múltiplo de 5.
(D) múltiplo de 3.
(E) primo.

**22** **(OBM 1ª fase 2005)** O número $(2 + \sqrt{2})^3 (3 - \sqrt{2})^4 + (2 - \sqrt{2})^3 (3 + \sqrt{2})^4$ é:

(A) inteiro ímpar.
(B) inteiro par.
(C) racional não inteiro.
(D) irracional positivo.
(E) irracional negativo.

**23 (OBM 1ª fase 2005)** Os inteiros positivos $x$ e $y$ satisfazem a equação

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}\sqrt{y}}-\sqrt{x-\frac{1}{2}\sqrt{y}}=1.$$

Qual das alternativas apresenta um possível valor de $y$?

(A) 5.
(B) 6.
(C) 7.
(D) 8.
(E) 9.

**24 (OBM 2ª fase 2004)** Cada um dos números $x_1, x_2, \ldots, x_{2004}$ pode ser igual a $\sqrt{2}-1$ ou a $\sqrt{2}+1$. Quantos valores inteiros distintos a soma $\sum_{k=1}^{2004} x_{2k-1}x_{2k} = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2003}x_{2004}$ pode assumir?

**25 (SPIA)** Fatore as expressões a seguir:

a. $a^8 + a^4 + 1$;
b. $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$;
c. $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$;
d. $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$;
e. $a(b - 2c)^2 + b(a - 2c)^2 - 2c(a + b)^2 + 8abc$;
f. $a^3(a^2 - 7)^2 - 36a$;
g. $a^2b^2(b - a) + b^2c^2(c - b) + a^2c^2(a - c)$;
h. $8a^3(b + c) - b^3(2a + c) - c^3(2a - b)$;
i. $a^3 + 5a^2 + 3a - 9$;
j. $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1$;
k. $(a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15$;
l. $2(a^2 + 2a - 1)^2 + 5(a^2 + 2a - 1)(a^2 + 1) + 2(a^2 + 1)^2$;
m. $(a - b)c^3 - (a - c)b^3 + (b - c)a^3$;
n. $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$;
o. $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$;
p. $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$;
q. $a^4 + 2a^3b - 3a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$.

**26** Determine as soluções reais de $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$.

**27** Resolva o sistema $\begin{cases} \dfrac{3xy}{x+y} = 2 \\ \dfrac{4xz}{x+z} = 3 \\ \dfrac{5yz}{y+z} = 6 \end{cases}$.

**28 (Hungria)** Prove que $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{cases} \Rightarrow xy - 12x + 15y = 0$.

**29 (SPIA)** Calcule as somas a seguir:

a. $\dfrac{1}{1-a} - \dfrac{1}{1+a} - \dfrac{2a}{1+a^2} - \dfrac{4a^3}{1+a^4} - \dfrac{8a^7}{1+a^8}$

b. $\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{2}{1+a^2} + \dfrac{4}{1+a^4} + \dfrac{8}{1+a^8} + \dfrac{16}{1+a^{16}}$

c. $\dfrac{1}{a(a+1)} + \dfrac{1}{(a+1)(a+2)} + \dfrac{1}{(a+2)(a+3)} + \dfrac{1}{(a+3)(a+4)} + \dfrac{1}{(a+4)(a+5)}$

**30 (Barbeau)** Prove que se $(x + a + b)(x^{-1} + a^{-1} + b^{-1}) = 1$, então $(x^n + a^n + b^n)(x^{-n} + a^{-n} + b^{-n})$ para todo $n$ inteiro ímpar.

**31 (SPIA)** Simplifique:

a. $\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a} + \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$;

b. $\dfrac{a^3b - ab^3 + b^3c - bc^3 + c^3a - ca^3}{a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2}$;

c. $\left(\dfrac{b}{a+b} + a\right)\left(\dfrac{a}{a-b} - b\right) - \left(\dfrac{a}{a+b} + b\right)\left(\dfrac{b}{a-b} - a\right)$.

**32 (CN)** Se $a$, $b$, $c$ e $d$ são números reais não nulos tais que $ad^2 + bc^2 = 0$, pode-se afirmar que:

(A) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$; $b + d \neq 0$.
(B) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a+b}{c+d}$; $c + d \neq 0$.
(C) $\dfrac{a}{d} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c+d}$; $c + d \neq 0$.
(D) $\dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{b+c}{a+d}$; $a + d \neq 0$.
(E) $\dfrac{c}{b} + \dfrac{d}{a} = \dfrac{c+d}{a+b}$; $a + b \neq 0$.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01 (CN)** Sejam $a$, $b$ e $c$ números reais não nulos tais que $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} = p$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} = q$ e $ab + ac + bc = r$. O valor de $q^2 + 6q$ é sempre igual a:

(A) $\dfrac{p^2r^2 + 9}{4}$.
(B) $\dfrac{p^2r^2 - 9p}{12}$.
(C) $p^2r^2 - 9$.
(D) $\dfrac{p^2r^2 - 10}{4r}$.
(E) $p^2r^2 - 12p$.

**02 (OBM 2ª fase 2010)** Calcule:

$$\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)\ldots(32^4+32^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)\ldots(31^4+31^2+1)}$$

**03** Sejam $x$, $y$ e $z$ reais do intervalo $[0,1]$. Prove que $xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq 1$.

**04** Este exercício tem como objetivo demonstrar a 'desigualdade das médias' para 3 termos.

a. Fatore $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
b. (Desigualdade das médias para 3 termos) Prove que $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$.

**05** **(CN)** Sejam $y$ e $z$ números reais distintos não nulos tais que $\frac{4}{yz}+\frac{y^2}{2z}+\frac{z^2}{2y}=3$. Qual é o valor de $y+z$?

(A) –2.
(B) –1.
(C) 0.
(D) 2.
(E) 3.

**06** **(OBM 1ª fase 2010)** Qual é o maior valor de $xy^2$ se $x$ e $y$ são reais positivos cuja soma é 3?

(A) 3.
(B) 4.
(C) 5.
(D) 6.
(E) 7.

**07** **(OBM 3ª fase 2012 nível 2)** Considere os números reais $a$ e $b$ tais que $(a + b)(a + 1)(b + 1) = 2$ e $a^3 + b^3 = 1$. Encontre o valor de $a + b$.

**08** Prove que se $a + b + c = 1$, então $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.

**09** Racionalize:

a. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}$;

b. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

**10** **(Yaglom)**

a. Prove que se $a, b, c$ e $d$ são racionais, então $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$.

b. Conclua que sob as mesmas condições, tem-se $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \Rightarrow a-b\sqrt{2}=c-d\sqrt{2}$.

c. Existem $x$, $y$, $z$ e $w$ racionais tais que $\left(x+y\sqrt{2}\right)^4+\left(z+w\sqrt{2}\right)^4=2+2\sqrt{2}$?

**11** Se $a$, $b$ e $c$ são racionais, prove que $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$ é o quadrado de um racional.

**12** Se $x + y + z = 0$, prove que

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9.$$

**13** Dado que $xyz = 1$ e $x, y, z > 0$, determine a diferença entre o máximo e o mínimo da expressão $\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}$.

**14** **(Yaglom)** O produto de três números positivos é igual a 1 e a soma desses números é maior que a soma dos seus inversos. Prove que, dentre esses três números, um deles é maior do que 1 e dois deles são menores do que 1.

**15** Sejam $a, b, c, x, y, z$ reais distintos tais que $ax + by + cz = 0$. Prove que a expressão $\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$ não depende nem de $x$, nem de $y$, nem de $z$.

**16** **(OBM 3ª fase 2010 nível 2)** Sejam $a$, $b$ e $c$ reais tais que $a \neq b$ e $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2010$. Calcule $c^2(a + b)$.

**17** **(OBM 1ª fase 2007)** Sejam $a$, $b$ e $c$ números tais que:

$$a^2 - ab = 1$$
$$b^2 - bc = 1$$
$$c^2 - ac = 1$$

O valor de $abc \cdot (a + b + c)$ é igual a:

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) –1.
(E) –3.

**18** **(OBM 2ª fase 2011)** Encontre todas as soluções reais $(x, y, z)$ do sistema.

$$\begin{cases} 2y = x+\dfrac{1}{x} \\ 2z = y+\dfrac{1}{y} \\ 2x = z+\dfrac{1}{z} \end{cases}$$

**19** **(OBM 3ª fase 2009 nível 2)** Resolva, nos números reais, o sistema:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x} \\ xyz=1 \end{cases}$$

**20** **(OBM 2ª fase 2010)** Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z=77 \\ xy+yz+zx+xyz=946 \end{cases}$ sendo $x \leq y \leq z$ inteiros não negativos.

**21** **(OBM 1ª fase 2013)** Para quantos inteiros positivos $k$ menores que 2013, existem inteiros $a$, $b$ e $c$, não necessariamente distintos, satisfazendo $a^2 + b + c = b^2 + c + a = c^2 + a + b = k$?

(A) 43.
(B) 44.
(C) 87.
(D) 88.
(E) 89.

**22** Fatore a expressão $a^4 - 2a^3b - 8a^2b^2 - 6ab^3 - b^4$.

**23** Fatore:

a. $x^4 + x^2 + 4x - 3$
b. $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 9x + 6$
c. $x^4 + x^2 + \sqrt{2}x + 2$

**24** Fatore:

a. $x^5 + x + 1$
b. $x^{10} + x^5 + 1$
c. $x^{11} + x^6 + x + 1$

**25** **(OBM 1ª fase 2010)** Para cada subconjunto $A$ de $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$, seja $p(A)$ o produto de seus elementos. Por exemplo, $p(\{1;2;4;5\}) = 40$ e $p(A) = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10$. Por convenção, adote $p(\varnothing) = 1$. A soma de todos os $2^{10}$ produtos $p(A)$ é igual a:

(A) $2^{11}$.
(B) $11!$.
(C) $11^{11}$.
(D) $2^{11!}$.
(E) $11^{2!}$.

**26** **(OBM 3ª fase 2005 nível 2)** Dado que $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{11}$, qual é o valor de $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$?

**27** **(OBM 1ª fase 2006)** Qual é o menor valor que a expressão $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(y-x)^2+4} + \sqrt{(z-y)^2+1} + \sqrt{(10-z)^2+9}$ pode assumir, sendo $x$, $y$ e $z$ reais?

(A) 7.

(B) 13.

(C) $4+\sqrt{109}$.

(D) $3+\sqrt{2}+\sqrt{90}$.

(E) $\sqrt{149}$.

RASCUNHO

## 1. Introdução

O presente assunto tem por objetivo definir o que é uma sequência, estudar os principais tipos (progressões aritméticas e geométricas), e determinar os seus termos, conhecendo-se os termos iniciais.

Além disso, estudaremos a soma de seus elementos, as propriedades da P.A. e da P.G. e aplicações em matemática financeira, como juros simples e compostos.

Finalmente veremos outros tipos de sequências, como defini-las de forma recursiva (em função de termos anteriores), e alguns métodos para obter um termo geral, como a soma telescópica e outros truques algébricos.

## 2. Sequências

De forma intuitiva, uma sequência é uma ordenação dos elementos de um conjunto, ou seja, devemos associar cada elemento a uma posição, de modo que exista um primeiro elemento ($a_1$), um segundo elemento ($a_2$), um terceiro ($a_3$) e assim por diante.

Chamaremos de $a_i$ o termo na posição $i$. Veja que associamos cada elemento a um número natural $i$ (sua posição).

**Ex.:**
- (1, 2, 3, 4, 5, ..., $n$) (sequência dos $n$ primeiros números naturais);
- (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) (*sequência de Fibonacci*: cada termo é a soma de dois anteriores);
- (–3, 2, 7, 12, 17, 22) (diferença entre termos consecutivos constante);
- (5, 10, 20, 40, 80) (razão entre termos consecutivos constante).

## 3. Progressão aritmética (P.A.)

Chamamos de progressão aritmética toda sequência ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n$) cuja diferença entre termos consecutivos é constante:

$$a_k - a_{k-1} = r = cte,\ k \in \{2, 3, ..., n\}$$

Neste caso, dizemos que r é a razão da P.A.

**Ex.:** (3, 7, 11, 14, ...) P.A. de razão 4.

Veja que a P.A. fica bem definida se dermos um termo e sua razão, uma vez que qualquer termo pode ser obtido através desses dois parâmetros.

Dizemos que a P.A. é crescente se $r > 0$ e decrescente se $r < 0$. No caso em que $r = 0$ dizemos que a P.A. é estacionária.

### 3.1. Termo geral

Como dito anteriormente, todo termo de uma P.A. pode ser obtido através de outro termo e da razão. Por exemplo, se tivermos o termo inicial $a_1$ e a razão r podemos determinar $a_n$ através da seguinte relação:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Para ver que essa relação é verdadeira, basta pensar que, cada vez que andamos para frente na sequência, somamos a razão uma vez. Como queremos chegar ao termo na posição $n$, partindo do primeiro termo, devemos "dar $n - 1$ passos" na sequência, somando então $n - 1$ vezes $r$.

De forma geral, vale a seguinte relação:

$$a_n = a_p + (n - p)r$$

### 3.2 Propriedades da P.A.

Uma das principais propriedades da P.A. é a **simetria em relação ao centro**. Assim, quando temos uma P.A. com um número pequeno de termos, podemos escrevê-la a partir do termo central para facilitar algumas contas.

– P.A.'s com um número ímpar de termos:

3 termos: $(x - r, x, x + r)$

5 termos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

E assim sucessivamente.

– P.A.'s com um número par de termos:

4 termos: $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$

6 termos: $(x - 5r, x - 3r, x - r, x + r, x + 3r, x + 5r)$

**Atenção: Repare que, ao escrever uma P.A. com um número par de termos nessa forma, a razão da P.A. é 2*r*.**

Escrevendo a P.A. com esse formato, conseguimos visualizar outra propriedade importante da P.A.: **a soma de termos equidistantes do centro (ou das pontas) é constante, ou seja**:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_p + a_{n-p+1}$$

Além disso, se a P.A. possuir um termo central então esse termo é a média aritmética das extremidades.

### 3.3 Soma da P.A.

Dada uma P.A. ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n$), definimos $S_n$ como a soma dos $n$ primeiros termos da P.A., ou seja,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Como podemos calcular essa soma?

**Ex.:**

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 100 \rightarrow$$
$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 1$$

Somando ambas as equações: $2S = \underbrace{101 + 101 + ... + 101}_{100 \text{ vezes}} = 101 \cdot 100 \rightarrow S = 101 \cdot 50 = 5050$

Repare que escrevendo a P.A. ao contrário juntamos os termos equidistantes das pontas, e como vimos anteriormente, a soma desses termos sempre é igual à soma das extremidades, assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$$

Somando e utilizando a propriedade anterior: $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \rightarrow S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

**Ex.:**

I. $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = (n(n + 1))/2$

II. $S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

# 4. Progressão geométrica

Chamamos de progressão geométrica toda sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ cuja razão entre termos consecutivos é constante:

$$a_k / a_{k-1} = q = cte,\ k \in \{2, 3, ..., n\}$$

Neste caso, dizemos que $q$ é a razão da P.G.

**Ex.:** (3, 6, 12, 24, ...) P.G. de razão 2

Veja que, como na P.A. a P.G. fica bem definida se tivermos um termo e sua razão; assim podemos achar o termo geral, utilizando a mesma ideia da P.A..

Dizemos que a P.G. é crescente se $\boldsymbol{a_k - a_{k-1} > 0}$.

Para que isso ocorra devemos ter: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ **e** $\boldsymbol{q > 1}$ **ou** $\boldsymbol{a_1 < 0}$ **e** $\boldsymbol{0 < q < 1}$.

Dizemos que a P.G. é decrescente se $\boldsymbol{a_k - a_{k-1} < 0}$.

Para que isso ocorra devemos ter: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ **e** $\boldsymbol{0 < q < 1}$ **ou** $\boldsymbol{a_1 < 0}$ **e** $\boldsymbol{q > 1}$.

Caso $q < 0$, dizemos que a P.G. é alternante e, se $q = 1$, dizemos que esta é estacionária.

## 4.1 Termo geral

Em função do primeiro termo e da razão: $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$

Em função de um termo qualquer e da razão: $\boxed{a_n = a_p q^{n-p}}$

## 4.2 Soma dos n primeiros termos da P.G.

Considere uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão $q \neq 1$, seja:

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$ (1)
Multiplicando por $q$: $qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n$ (2)

Subtraindo (2) – (1): $S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1) \rightarrow$

$$\boxed{S_n = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right), q \neq 1}$$

Mais importante que entender a demonstração da fórmula é lembrar da ideia por trás dela. Quando queremos calcular uma soma, podemos "perturbá-la", ou seja, podemos pensar em algum meio de achar uma expressão muito parecida com ela, para subtrair (ou fazer outra operação) de modo que a maioria dos termos cancele.

Veja que essa foi a motivação principal para multiplicar pela razão, uma vez que ao multiplicar os termos de uma P.G. por q, apenas "andamos" com a P.G. para frente.

Outro modo de enxergar a fórmula da soma da P.G. é usar a própria definição de P.G.:

$a_2 = a_1 q$
$a_3 = a_2 q$
$a_4 = a_3 q$
..............
$a_n = a_{n-1} q$

Somando tudo: $S_n - a_1 = q(S_n - a_n) \rightarrow qS_n - S_n = qa_n - a_1 = a_1 q^n - a_1 \rightarrow S_n = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right), q \neq 1$

**Obs.:** Se a razão for igual a 1, a P.G. é constante e sua soma é igual a $S_n = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = na_1$

## 4.3 Produto dos termos da P.G.

Sendo $P_n$ o produto dos $n$ primeiros termos de uma P.G., tem-se:

$$P_n = a_1 a_2 \ldots a_n = a_1(a_1 q)(a_1 q^2) \ldots (a_1 q^{n-1}) \rightarrow P_n = a_1^n q^{1+2+\ldots+(n-1)} \rightarrow$$

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Outra maneira de calcular o produto é usando uma propriedade antes citada em P.A., que continua valendo para P.G: **o produto dos termos equidistantes das pontas é igual ao produto dos extremos**.

$$\begin{cases} a_1 a_n = a_1 a_n \\ a_2 a_{n-1} = a_1 a_n \\ a_3 a_{n-2} = a_1 a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n a_1 = a_1 a_n \end{cases} \text{Multiplicando as equações: } P_n^2 = (a_1 a_n)^n$$

**Obs.:** Deve-se tomar cuidado ao extrair a raiz quadrada na relação, pois o produto dos termos pode ser negativo (dependendo da quantidade de termos negativos na sequência).

## 4.4 Progressão geométrica infinita

Chamamos de P.G. infinita toda P.G. com um número infinito de termos.

Dependendo da razão desta P.G., podemos calcular a soma de seus elementos, ou seja, existem alguns casos em que a soma infinita converge (resultando em um número finito).

Sabemos que numa P.G. finita vale a seguinte fórmula:

$$S_n = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right), q \neq 1;$$

em que $n$ representa o número de termos a serem somados. Queremos saber o que ocorre quando esse $n$ tende a infinito.

Vamos analisar, por exemplo, o caso $q = 1/2$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}; \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}; \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

Veja que quanto maior o expoente menor o valor de $q^n$; assim, se $n$ tende a infinito, podemos ver que $q^n$ tende a zero.

É fácil ver que isso ocorre para todo $q$, com $|q| < 1$. Nesse caso, iremos trocar $q^n$ na P.G. finita por zero, assim:

$$S_\infty = a_1\left(\frac{0 - 1}{q - 1}\right) \rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, |q| < 1$$

**Obs.:** Caso $q \geq 1$, temos: $S_\infty = \begin{cases} +\infty; a_1 > 0 \\ -\infty; a_1 < 0, \\ 0; a_1 = 0 \end{cases}$

basta pensar no que ocorre com $q^n$ na fórmula da P.G. finita. Se $q \leq -1$, a soma infinita não existe.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Calcule o valor da soma 2 + 5 + 8 + 11 + ... + 92.

**Solução:**

Esta é a soma de uma P.A. com $a_1 = 2$, $a_n = 92$ e $r = 3$. Antes de calcularmos a soma, precisamos saber quantos termos há. Usando que $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos $92 = 2 + (n - 1) \cdot 3$, que nos dá $n = 31$.
Portanto, segue que a soma é igual a: $\frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(2+92).31}{2} = 1457$.

**02** Prove que se $(a, b, c)$ é simultaneamente uma P.A. e uma P.G., então, $a = b = c$.

**Solução:**

Como é P.A., temos $b = \frac{a+c}{2}$. Como é P.G., temos $b^2 = ac$.
Substituindo a 1ª na 2ª, temos que:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac \Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = 4ac \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a-c)^2 = c \Rightarrow a = c$$

Como $b = \frac{a+c}{2}$, segue que $b = a = c$.

**03** O produto dos 15 primeiros termos da progressão geométrica, de primeiro termo 1 e razão 10, vale:

**Solução:**

Usando que $P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \to P_{15} = 10^{\frac{15 \cdot 14}{2}} = 10^{105}$

**04** Um atleta corre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67.500 metros, qual o número de metros percorridos no terceiro dia?

**Solução:**
Veja que, como o atleta sempre corre 500 m a mais que no dia anterior, a sequência formada pelas distâncias percorridas diariamente por ele é uma P.A. de razão 500.
A distância total percorrida por ele ao término de 15 dias representa uma soma de P.A., logo:

$$\frac{(a_1+a_{15}).15}{2} = 67500 \to a_1 + (a_1 + 14 \cdot 500) =$$

$$= \frac{2 \cdot 67500}{15} = 9000 \to a_1 = 2000$$

Desse modo: $a_3 = a_1 + 2r = 3000$ m

**05** A soma dos 11 primeiros termos da progressão aritmética ($a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, ...) é 176. Se $a_{11} = a_1 + 30$, então, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ temos:

(A) $a_n = 3n - 2$.
(B) $a_n = 2n - 3$.
(C) $a_n = n + 3$.
(D) $a_n = 2n + 3$.
(E) $a_n = 3n + 2$.

**Solução:** Letra A.

$S_{11} = \frac{(a_1+a_{11}).11}{2} = 176 \Rightarrow a_1 + a_{11} = 32$, porém, como $a_{11} = a_1 + 30$, temos: $a_1 = 1$ e $a_{11} = 31$. Usando que $a_{11} = a_1 + 10r$, têm-se: $r = 3$, logo: $a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 2$.

**06** A soma de três números em P.G. é 26 e o produto é 216. Então, os termos da P.G. valem:

**Solução:**

Três números em P.G. $(x/q, x, xq)$, multiplicando: $x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$.
Somando: $x(q + 1 + \frac{1}{q}) = 26 \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow q = 3$ ou $q = \frac{1}{3}$.
Logo: (2, 6, 18) ou (18, 6, 2).

**07** Em um certo jogo de azar, apostando-se uma quantia X, tem-se uma das duas possibilidades seguintes:

I. Perde-se a quantia X apostada;
II. Recebe-se a quantia 2X.

Uma pessoa jogou 21 vezes da seguinte maneira: na primeira vez, apostou 1 centavo; na segunda vez, apostou 2 centavos, na terceira vez, apostou 4 centavos e assim por diante, apostando em cada vez o dobro do que havia apostado na vez anterior.
Nas 20 primeiras vezes, ela perdeu. Na 21ª vez, ela ganhou. Sendo $T$ a quantidade total por ela desembolsada e $Q$ a quantidade recebida na 21ª jogada, determine uma relação entre $T$ e $Q$:

**Solução:**
Veja que as apostas dele crescem como P.G. de razão 2, assim, o total desembolsado é:
$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{20}$. Como $T$ é uma soma de P.G.:
$T = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{2^{21} - 1}{2 - 1} = 2^{21} - 1$. Na 21ª jogada ele recebe o dobro do que investiu: $Q = 2.2^{20} = 2^{21}$, logo: $Q = T + 1$.

**08** Em um paralelepípedo retângulo a soma das medidas de todas as arestas é 52 e a diagonal mede $\sqrt{91}$. Se as medidas das arestas estão em progressão geométrica, então o seu volume é:

**Solução:**
Sejam os lados $\left(\frac{a_1}{q}, a_1, a_1q\right)$ temos:

$$a_1\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = \frac{52}{4} = 13 \text{ e } a_1^2\left(\frac{1}{q^2} + 1 + q^2\right) = 91.$$

Fazendo $t = q + \frac{1}{q}$, têm-se: $t^2 = q^2 + \frac{1}{q^2} + 2 \to q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$.
substituindo:
$\begin{cases} a_1^2(t^2 - 1) = 91 \\ a_1(t + 1) = 13 \end{cases}$. Dividindo $a_1(t - 1) = 7 \to a_1t = a_1 + 7$, $a_1t = 13 - a_1$

$= = a_1 + 7 \to a_1 = 3$, logo: $V = a_1^3 = 27$ *u.v.*

**Solução:**

É fácil ver que a relação é válida caso a razão seja igual a 1. Supondo que a razão não seja igual a 1, temos que $S = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$. Agora, veja que $I$ é uma soma de P.G. de 1º termo igual a $\frac{1}{a_1}$ e razão igual a $\frac{1}{q}$:

$$I = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 q} + \frac{1}{a_1 q^2} + \dots + \frac{1}{a_1 q^{n-1}} = \frac{1}{a_1}\left(\frac{\frac{1}{q^n} - 1}{\frac{1}{q} - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a_1 q^{n-1}}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{1}{a_n}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

$\Rightarrow$ Portanto, temos que $\frac{S}{I} = a_1 a_n$, então, $\left(\frac{S}{I}\right)^n = (a_1 a_n)^n$.

Como é sabido que $P_n^2 = (a_1 a_n)^n$, segue que $P^2 = \left(\frac{S}{I}\right)^n$.

**10** Seja $Q$ um quadrado de lado 4. A partir dos pontos médios de $Q$, construímos o quadrado $Q_1$. Prosseguindo da mesma forma, a partir dos pontos médios dos lados do quadrado $Q_i$, construímos o quadrado $Q_{i+1}$. Determine a soma das áreas de todos os quadrados citados no enunciado.

**Solução:**

É fácil ver que a área de cada quadrado é a metade da área do quadrado anterior. Portanto, temos uma P.G. de razão igual a $\frac{1}{2}$. Como o 1º quadrado tem área 16, a soma das áreas é $\frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$.

# 5. Matemática financeira

## 5.1. Porcentagem

As frações (ou razões) que possuem denominadores iguais a 100 são conhecidas por **razões centesimais** e podem ser representadas pelo símbolo "%".

O símbolo "%" é lido como "por cento". "5%" lê-se "5 por cento". "25%" lê-se "25 por cento".

Para se calcular uma porcentagem de um dado valor, basta multiplicar a razão pelo valor desejado.

**Ex.:** 30% de 1500 $\rightarrow \frac{30}{100} \cdot 1500 = 450$

**Aumento Percentual (ou redução):** Dado um valor $x$ (o preço de uma camisa, por exemplo), para calcular o valor após um aumento de $i$%, basta multiplicarmos $x$ por $\left(1 + \frac{i}{100}\right)$. No caso de redução deve-se multiplicar por $1 - \frac{i}{100}$.

**Obs.:** Um aumento de $x$% seguido de uma redução de $x$% não traz o valor de volta ao inicial.
Isto ocorre porque a redução é feita sobre um valor maior que o inicial.

**Ex.:** Se aumentarmos o preço de uma camisa em 10% e depois reduzirmos em 10%, voltamos ao valor original? Vejamos:
Seja $x$ o preço da camisa, após o aumento de 10% ficamos com $1{,}1x$. Ao reduzirmos esse valor em 10% ficamos com $0{,}9 \cdot 1{,}1.\ x = 0{,}99x$, que corresponde a 99% do valor original.

## 5.2. Juros

**Juro** é a remuneração cobrada pelo empréstimo de dinheiro.

É expresso como um percentual sobre o valor emprestado (taxa de juro) e pode ser calculado de duas formas: juros simples ou juros compostos.

O juro pode ser compreendido como uma espécie de "aluguel sobre o dinheiro". A taxa seria uma compensação paga pelo tomador do empréstimo para ter o direito de usar o dinheiro até o dia do pagamento.

### 5.2.1. Juros simples

No regime de juros simples, a taxa de juros é sempre aplicada sobre o valor inicial, ou seja, não leva em consideração o capital acumulado.

Como a taxa de juros ocorre sempre sobre o mesmo valor, estamos sempre somando uma constante, ou seja, o montante acumulado cresce como P.A. Deste modo, para o cálculo do montante, podemos usar a seguinte fórmula:

$$M = C\left(1 + \frac{ni}{100}\right)$$

Em que $M$ é o montante, $C$ o capital inicial, $i$ a taxa de juros e $n$ o período de aplicação.

### 5.2.2 Juros compostos

No regime de juros compostos a taxa de juros é aplicada sempre sobre o montante atual, ou seja, temos juros sobre juros.

Como a taxa de juros é feita sobre o último valor, estamos sempre "pegando" o capital atual e multiplicando por $1 + \frac{i}{100}$ de modo que o montante acumulado cresce como P.G. de razão $1 + \frac{i}{100}$.

Logo, para calcularmos o montante, podemos usar a seguinte fórmula:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

**Obs.:** Na verdade, tanto nos juros simples como nos juros compostos, os juros ($J$) adquiridos (ou cobrados) é a diferença entre o montante ($M$) e o capital inicial ($C$)

$$J = M - C$$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Em uma turma de Ciência da Computação formada de 40 rapazes e 40 moças, tem-se a seguinte estatística: 20% dos rapazes são fumantes; 30% das moças são fumantes. Logo, a porcentagem dos que não fumam na turma é de:

**Solução:**

20% dos rapazes = 0,2.40 = 8 fumantes; 30% das moças = 0,3.40 = 12 fumantes.

Logo o total de fumantes é 20 e o de não fumantes é 60 que corresponde a 60/80 = 75%.

**02** Após se fazer uma promoção em um clube de dança, o número de frequentadores do sexo masculino aumentou de 60 para 84 e, apesar disso, o percentual da participação masculina passou de 30% para 24%. Considerando-se essas informações, é **correto** afirmar que o número de mulheres que frequentam esse clube, após a promoção, teve um aumento de:

**Solução:**

Seja $x$ o total de frequentadores do clube antes da promoção, têm-se:

$0,3x = 60$ donde $x = 200$. Assim, o número de frequentadores do sexo feminino era 140.

Sendo $y$ o número de frequentadores do clube após a promoção, têm-se $0,24y = 84$ donde $y = 350$. Assim, o número de frequentadores do sexo feminino passou a ser 266.

Como 266/140 = 1,9 o aumento foi de 90%.

**03** **(VUNESP)** Uma mercadoria teve seu preço acrescido de 10%. Tempos depois, esse novo preço sofreu um desconto de 10%. Denotando-se por $p_i$ o preço inicial e por $p_f$ o preço final da mercadoria, determine $\frac{p_f}{p_i}$:

**Solução:**

Basta lembrar que aumentos e reduções percentuais são feitos através de multiplicação (não soma). Para aumentar 10% devemos multiplicar por 1,10 e para reduzir 10% multiplicar por 0,90, deste modo:

$$p_f = 1,1 \times 0,9 \times p_i \rightarrow \frac{p_f}{p_i} = 0,99$$

**04** **(CN – 99)** As vendas de uma empresa foram, em 1998, 60% superiores às vendas de 1997. Em relação a 1998, as vendas de 1997 foram inferiores em:

(A) 62,5%.
(B) 60%.
(C) 57,5%.
(D) 44,5%.
(E) 37,5%.

**Solução:** Letra E.

Se $x$ representa as vendas de 1998 e $y$ as vendas de 1997, têm-se:

$x = 1,6y \rightarrow y = \frac{1}{1,6}x = 0,625x$, assim as vendas foram inferiores em

$1 - 0,625 = 37,5\%$

**05** **(UF-PI)** Uma quantia foi aplicada a juros simples de 6% ao mês, durante 5 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 4% ao mês. No final dos 10 meses, o novo montante foi de R\$ 234,00. Qual o valor da quantia aplicada inicialmente?

**Solução:**

Sendo $x$ a quantia inicial aplicada, após os cinco meses o montante era de:

$x(1 + 0,06 \cdot 5) = 1,3x$. Tendo aplicado esse montante com taxa de juros de 4% a.m. durante 10 meses, o montante foi de $1,3x(1 + 0,04 \cdot 10) = 1,3.1,4x = 234$ donde $x =$ R\$128,57 (aproximadamente).

**Obs.:** Usamos a fórmula dos juros simples: $M = C\left(1 + \frac{in}{100}\right)$

**06** **(AFA – 03)** Em julho de 2001, uma pessoa gastava 27,3% do seu salário com o pagamento da prestação da casa própria. Em 2002, houve dois reajustes no seu salário: 40% em janeiro e 30% em junho. Se, em julho de 2002, o aumento daquela prestação foi de 130%, que porcentagem de seu salário a pessoa passou a gastar?

**Solução:**

Sendo $x$ o valor inicial do salário e $y$ o valor da inicial da prestação, sabe-se que $y = 0,273x$.

Após os dois reajustes: $1,4 \cdot 1,3x = 1,82x$. Já a prestação:
$2,3y = 2,3 \cdot 0,273x = 0,6279x$.

Desse modo a prestação representa: $\frac{0,6279x}{1,82x} = 0,345 = 34,5\%$ do salário.

**07** **(FUVEST – 90)** Um país contraiu em 1829 um empréstimo de 1 milhão de dólares, para pagar em cem anos à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje, e a dívida foi sendo "rolada", com capitalização anual dos juros. Qual dos valores abaixo está mais próximo do valor da dívida em 1989? Adote $(1,09)^8 \cong 2$.

(A) 14 milhões de dólares.
(B) 500 milhões de dólares.
(C) 1 bilhão de dólares.
(D) 80 bilhões de dólares.
(E) 1 trilhão de dólares.

**Solução:** Letra E.

De 1829 até 1989 passaram-se 160 anos. Usando a fórmula de juros compostos:

$$M = C(1 + i)^n = 10^6(1 + 0,09)^{160} = 10^6 \cdot (1,09^8)^{20} = 10^6 \cdot 2^{20} = (1024)^2 \,.\, 10^6 > 10^{12}$$

Logo, a dívida passa de 1 trilhão de dólares.

## 6. Somatórios

O símbolo de somatório serve para representar uma soma de parcelas com mesma lei de formação, podendo ser uma soma finita ou infinita:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

### 6.1 Propriedades dos somatórios

Existem duas propriedades básicas de somatórios:

**I.** O somatório da soma é a soma dos somatórios:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Dem.:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

**II.** Podemos colocar uma constante multiplicando para fora do somatório

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Dem.: Basta pensar que colocamos $\lambda$ em evidência.

## 7. Soma telescópica

Dada uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definimos a diferença de consecutivos por: $\Delta_n = a_n - a_{n-1}$, $\forall n \in \{2, 3, \ldots, n\}$

Repare que ao somarmos todas as diferenças de consecutivos cada termo aparece ora com sinal "+", ora com sinal "–", o que faz com que a maioria se cancele sobrando apenas o primeiro termo e o último, chamamos essa soma de **soma telescópica**:

$$\sum_{i=2}^{n} \Delta a_i = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=2}^{n} \Delta a_i = a_n - a_1$$

A ideia então é tentar transformar uma soma em uma diferença de modo que as diferenças tenham termos em comum, cancelando a maioria desses termos.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\text{n}}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

## 8. Recorrências de 1ª ordem

Chamamos de recorrência qualquer sequência em que um termo pode ser obtido, através de alguma relação com os termos anteriores.

Quando numa recorrência, cada termo depende apenas do termo imediatamente anterior dizemos que essa recorrência é de 1ª ordem.

**Ex.:** P.A. e P.G.

Se $(x_n)$ é uma sequência tal que: $x_n = a \cdot x_{n-1} + b$, $a \neq 0$, dizemos que esta é uma recorrência de 1ª ordem com coeficientes constantes. Para resolvê-la podemos utilizar a seguinte ideia:

$x_n = a \cdot x_{n-1} + b$, dividindo por $a^n$: $\frac{x_n}{a^n} = \frac{x_{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{b}{a^n}$, seja $y_n = \frac{x_n}{a^n}$ têm -se $y_n = y_{n-1} + \frac{b}{a^n} \rightarrow y_n - y_{n-1} = \frac{b}{a^n}$ como temos uma diferença de consecutivos, vamos usar soma telescópica.

$$+\begin{cases} y_n - y_{n-1} = \dfrac{b}{a^n} \\ y_{n-1} - y_{n-2} = \dfrac{b}{a^{n-1}} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_2 - y_1 = \dfrac{b}{a^2} \end{cases} \qquad y_n - y_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{b}{a^k} = \frac{b}{a}\left[\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n - 1}{\frac{1}{a} - 1}\right] \text{(soma da P.G.)}$$

Voltando o problema para variável original:

$$\frac{x_n}{a^n} - \frac{x_1}{a} = \frac{b}{a}\left(\frac{1-a^n}{a^n}\right)\left(\frac{a}{1-a}\right) \Rightarrow x_n = x_1 \cdot a^{n-1} + b \cdot \left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right)$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Calcule a soma $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+2006}$

**Solução:**

Veja que

$$S = \sum_{k=2}^{2006} \frac{1}{1+2+\ldots+k} = \sum_{k=2}^{2006} \frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=2}^{2006}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2007}\right) = \frac{2005}{2007}$$

**02** Determine o valor da soma: $S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

**Solução:**

Perceba que:

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{2 \cdot 3}\right) \\ \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2 \cdot 3} - \dfrac{1}{3 \cdot 4}\right) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \dfrac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n \cdot (n+1)} - \dfrac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}\right) \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2 + 3n + 2 - 2}{2(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

**03** Resolva a seguinte recursão: $\begin{cases} x_0 = 2,\ x_1 = 5 \\ x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \end{cases}$

**Solução:**
Veja que podemos escrever essa recursão da seguinte forma:

$x_n - 2x_{n-1} = 3x_{n-1} - 6x_{n-2} = 3(x_{n-1} - 2x_{n-2})$
Seja $y_n := x_n - 2x_{n-1}$, têm-se: $y_n = 3y_{n-1}$ P.G., donde:

$y_n = 3^{n-1}\, y_1 = 3^{n-1}(x_1 - 2x_0) = 3^{n-1}(5 - 2.2) = 3^{n-1}$

Logo: $x_n - 2x_{n-1} = 3^{n-1}$, dividindo por $2^n$ (ideia conhecida para recorrências de 1ª ordem):

$\dfrac{x_n}{2^n} - \dfrac{x_{n-1}}{2^{n-1}} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Desse modo, seja $z_n = \dfrac{x_n}{2^n}$, têm-se:

$z_n - z_{n-1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ (diferença de consecutivos; soma telescópica) →

$$\to z_n - z_0 = \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\frac{x_n}{2^n} - \frac{x_0}{2^0} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right] \to \frac{x_n}{2^n} - 2 =$$

$$= \left(\frac{3^n - 2^n}{2^n}\right) \to x_n = 2.2^n + 3^n - 2^n \to x_n = 2^n + 3^n$$

## 9. $\sum_{k=1}^{n} k^p$ (somatório das p-ésimas potências dos N primeiros naturais)

Para determinar a soma das p-ésimas potências dos n primeiros naturais, vamos analisar alguns casos particulares $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$. A ideia é pensar em algum jeito de desenvolver esses somatórios, de modo que a solução também funcione em um caso geral.

**1º Caso:** $p = 1$

$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = ?$. Poderíamos usar a soma da P.A., mas isso não serviria para generalizar o problema. Temos que usar outra estratégia.

Pensando no que vimos na apostila, uma ideia para resolver somas é transformar cada termo numa soma de diferenças (soma telescópica). Como k é um termo do 1º grau, podemos pensar na diferença de dois termos do 2º grau: $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$

Definindo $a_k = k^2$, temos $a_{k+1} - a_k = 2k + 1$ (diferença de consecutivos), aplicando somatório dos dois lados

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) \Rightarrow (n+1)^2 - 1 = n + 2\sum_{k=1}^{n} k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n^2 + 2n + 1) - 1 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

**2º Caso:** $p = 2$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

Usando a mesma ideia, diminuir o grau usando uma diferença:
$(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ e aplicando somatório dos dois lados:

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \Rightarrow S_2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 2n - 3\frac{n(n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \to S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**3º Caso:** $p = 3$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = ?$$

Veja primeiro que $(k + 1)^4 = [(k + 1)^2]^2 = (k^2 + 2k + 1)^2 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$
Assim, $(k + 1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

Aplicando somatório dos dois lados:

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4S_3 = (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n) - (2n^3 + 3n^2 + n) - (2n^2 + 2n) - n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \Rightarrow S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

**Caso Geral:** $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$

É fácil ver que as ideias usadas anteriormente continuam valendo para todo p natural, ou seja, o cálculo de $S_p$ pode ser obtido da diferença $(k + 1)^{p+1} - k^p$ aplicando-se somatório na expressão, deste modo $S_p$ dependerá das somas anteriores e de $(n + 1)^{p+1} - 1$, onde **$S_p$ será um polinômio de grau $p + 1$ sem termo independente**.

## 10. P.A. de ordem superior

Dizemos que uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ forma uma P.A. de 2ª ordem se as diferenças $\Delta a_i$ formam uma P.A. não estacionária.

**Ex.:** (1, 3, 6, 10, 15, 21) é P.A. de 2ª ordem, pois suas diferenças são: (2, 3, 4, 5, 6) P.A. não estacionária.

De modo geral, uma P.A. de ordem $k$ ($k > 2$) é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma P.A. de ordem $k - 1$.

**Ex.:** (0, 0, 6, 24, 60, 120, 210, ...) é P.A. de 3ª Ordem, pois suas diferenças valem:
(0, 6, 18, 36, 60, 90, ...) P.A. de 2ª Ordem, uma vez que olhando para as diferenças temos:
(6, 12, 18, 24, 30, ...) P.A. não estacionária.

## 10.1 Teoremas importantes

**Teorema 1:**

Se $(a_n)$ é uma P.A. não estacionária então $a_n$ é um polinômio em $n$ de grau um e, reciprocamente, todo polinômio em $n$ de grau um é termo geral de alguma P.A. não estacionária.

Dem.:

($\Rightarrow$) **Ida**: Se $(a_n)$ é P.A. não estacionária, então:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = r \cdot n + a_1 - r$ $(r \neq 0)$ que é um polinômio do 1° grau em $n$.

($\Leftarrow$) **Volta**: Se $a_n = a \cdot n + b$, $a \neq 0$, então $a_n - a_{n-1} = (a \cdot n + b) - [a \cdot (n-1) + b] = a = \text{cte}$.

Assim $(a_n)$ é P.A. não estacionária de razão $a$ e $a_1 = a + b$.

**Teorema 2**:

Seja $S_n$ a soma dos n primeiros termos de uma sequência $(a_n)$. Se $(a_n)$ é uma P.A. não estacionária, então $S_n$ é um polinômio em $n$ de grau dois desprovido de termo independente e reciprocamente, todo polinômio de grau dois desprovido de termo independente, é o valor da soma dos $n$ primeiros termos de alguma P.A. não estacionária.

Dem.:

($\Rightarrow$) **Ida**: Se $(a_n)$ é P.A. não estacionária, então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)r)n}{2} = \frac{r}{2} \cdot n^2 + \frac{2a_1 - r}{2} \cdot n \, (r \neq 0)$$

Polinômio do 2º grau em $n$.

($\Leftarrow$) **Volta**: Se $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n$, $a \neq 0$, então $a_n = S_n - S_{n-1} = (a \cdot n^2 + b \cdot n) - [a \cdot (n-1)^2 + b \cdot (n-1)] = 2a \cdot n + b$ é polinômio do 1º grau em $n$ e pelo Teorema anterior forma P.A. não estacionária.

**Teorema 3:**

Se $(a_n)$ é uma P.A. de ordem $k$ então $a_n$ é um polinômio em n de grau $k$ e, reciprocamente, todo polinômio em $n$ de grau $k$ é termo geral de alguma P.A. de ordem $k$.

Dem.:

A demonstração desse resultado foge ao escopo do assunto.

Caso queira demonstrar a ideia é usar indução finita em $k$, o caso $k = 1$ é o teorema 1, e para provar a passagem $k \to k + 1$ deve usar que $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p + 1$.

**Teorema 4:**

A soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem $k$ é um polinômio em n de grau $k + 1$ e termo independente nulo, reciprocamente, se $S_n$ é a soma dos $n$ primeiros termos de uma sequência e $S_n$ é um polinômio de grau $k + 1$ em $n$, então a sequência forma uma P.A. de ordem $k$.

Dem.:

A demonstração foge ao escopo do assunto.

Caso queira demonstrar basta utilizar que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p + 1$ sem termo independente junto ao Teorema 3.

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Obter o termo geral da sequência (1, 3, 7, 13, 21, ...)

**Solução:**

Olhando para a sequência formada pelas diferenças de termos consecutivos (2, 4, 6, 8, ...) que é uma PA não estacionária, donde a sequência original é uma PA de 2ª ordem.

Como toda PA de 2ª ordem tem termo geral do 2º grau:

$a_n = an^2 + bn + c$. Fazendo $n = 1$, 2 e 3:

$$\begin{cases} a+b+c=1 & (1) \\ 4a+2b+c=3 & (2) \\ 9a+3b+c=7 & (3) \end{cases} \to \begin{matrix} (2)-(1): 3a+b=2 \\ (3)-(2): 5a+b=4 \end{matrix} \to a=1,\ b=-1,\ c=1$$

Assim, $a_n = n^2 - n + 1$.

**02** Determine a soma dos 20 primeiros termos da sequência (2, 4, 8, 14, 22 ...), que é uma PA de 2ª ordem.

**Solução:**

A diferença dos termos consecutivos forma a sequência 2, 4, 6, 8, (...), que é uma PA não estacionária, donde a sequência original é uma PA de 2ª ordem.

Assim, $S_n$ (soma dos $n$ primeiros termos) é um polinômio do 3º grau sem termo independente.

$S_n = an^3 + bn^2 + cn$. Fazendo $n = 1$, 2 e 3.

$$\begin{cases} a+b+c=2 & (1) \\ 8a+4b+2c=2+4=6 & (2) \\ 27a+9b+3c=2+4+8=14 & (3) \end{cases} \to \begin{matrix} (2)-2\cdot(1): 6a+2b=2 \\ (3)-3\cdot(1): 24a+6b=8 \end{matrix} \to$$

$\to a = 1/3$, $b = 0$, $c = 5/3$

$$\text{Assim, } S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{5}{3}n \to S_{20} = \frac{1}{3}\cdot 20^3 + \frac{5}{3}\cdot 20 = 2700$$

**03** Determine o valor da soma $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 99 \cdot 100$.

**Solução (1):**

Veja que estamos somando termos da forma $k(k+1) = k^2 + k$, polinômio do 2º grau. Assim, estamos somando termos de uma PA de ordem 2, donde a soma é um polinômio de grau 3 sem termo independente.

$S_n = an^3 + bn^2 + cn$. Fazendo $n = 1$, 2 e 3:

$$\begin{cases} a+b+c=2 & (1) \\ 8a+4b+2c=2+6=8 & (2) \\ 27a+9b+3c=2+6+12=20 & (3) \end{cases} \to \begin{matrix} (2)-2\cdot(1): 6a+2b=4 \\ (3)-3\cdot(1): 24a+6b=14 \end{matrix} \to$$

$$\to a = \frac{1}{3},\ b = 1,\ c = \frac{2}{3}$$

$$\text{Assim,} S_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n \to S_{99} = \frac{1}{3}\cdot 99^3 + 99^2 + \frac{2}{3}\cdot 99 = 333300.$$

**Solução (2):**

Podemos utilizar as conhecidas somas:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ e } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

junto às propriedades de somatório:

$$= \sum_{k=1}^{99} k(k+1) = \sum_{k=1}^{99} k^2 + \sum_{k=1}^{99} k = \frac{99\cdot 100\cdot 199}{6} + \frac{99\cdot 100}{2}$$

$328350 + 4950 = 333300$

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** **(AFA-90)** Quantos números **não** múltiplos de 11 há no conjunto $\{x \in N \mid 51 \le x \le 1.500\}$?

(A) 1210.
(B) 1318.
(C) 1406.
(D) 1412.
(E) n.r.a.

**02** **(AFA-94)** O número formado por 3 algarismos em progressão aritmética com soma 15 e que, adicionado a 396, dá como resultado ele mesmo escrito em ordem inversa é:

(A) par.
(B) primo.
(C) múltiplo de 7.
(D) divisível por 13.

**03** **(AFA-88)** A soma dos 15 primeiros termos da sequência (–2, 1, 4, 7,...) vale:

(A) 260.
(B) 285.
(C) 330.
(D) 345.

**04** **(AFA – 88)** O termo geral de uma progressão aritmética é $\frac{5n-4}{3}$. A soma dos $n$ primeiros termos da progressão vale:

(A) $\frac{n^2-5n}{3}$.
(B) $\frac{5n^2-3n}{6}$.
(C) $\frac{5n^2-16n}{3}$.
(D) $\frac{10n^2-8n}{6}$.

**05** **(ITA-96)** As dimensões $x$, $y$ e $z$ de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm², então o volume deste paralelepípedo, em cm³, é igual a:

(A) 1200.
(B) 936.
(C) 1155.
(D) 728.
(E) 834.

**06** **(ITA -88)** Suponha que os números 2, $x$, $y$ e 1.458 estão, nesta ordem, em progressão geométrica. Desse modo o valor de $x + y$ é:

(A) 90.
(B) 100.
(C) 180.
(D) 360.
(E) 1.460.

**07** **(FUVEST)** 500 moedas são distribuídas entre três pessoas, Antônio, Pedro e Cristian, sentadas em círculo, da seguinte maneira: Antônio recebe uma moeda, Pedro recebe duas, Cristian três, Antônio quatro, Pedro cinco, Cristian seis, Antônio sete, e assim por diante, até não haver mais moedas suficientes para continuar o processo.
Quantas moedas sobraram ao final do processo?

**08** **(ARGENTINA-88)** Dados os números 7 e 15 determine um terceiro número positivo tal que, ao se efetuar de todas as maneiras possíveis a soma de dois quaisquer deles multiplicada pelo restante se obtenham três números em progressão aritmética. Indique todas as soluções.

**09** Sabendo que $(a, b, c)$ e $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right)$ estão em progressão aritmética, demonstre que $2ad = c(a + c)$.

**10** Dada uma progressão aritmética na qual o primeiro termo é 12 e a razão é 4, qual o valor de $n$, se a média aritmética dos $n$ primeiros termos dessa progressão é 50?

**11** **(FUVEST)** Em uma P.A. de termos positivos, os três primeiros termos são: $(1-a, -a, \sqrt{11-a})$. Qual o quarto termo desta P.A?

(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 5.
(E) 6.

**12** Determine cinco números em progressão aritmética sabendo que sua soma é 40 e a soma dos inversos dos extremos, 1/3.

**13** **(FGV)** Quantos termos devemos tomar na P.A. –7, –3, ... a fim de que a soma valha 3.150?

**14** **(FFCL USP-65)** A soma de quatro termos consecutivos de uma P.A. é – 6 e o produto do primeiro deles pelo quarto é – 54 . Determine esses termos.

**15** **(OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DE NATAL – 95)** Os inteiros de 1 a 1.000 são escritos ordenadamente em torno de um círculo. Partindo de 1, cada décimo quinto número é riscado (isto é, são riscados 1, 16, 31,...). O processo continua até se atingir um número já previamente riscado. Quantos números sobrarão sem riscos?

(A) 800.
(B) 934.
(C) 933.
(D) 862.
(E) Nenhuma correta.

**16** **(EUA)** Se $f(x) = x^2 + 3x + 2$ e $A = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, 1993\}$, para quantos elementos $x$, pertencentes ao conjunto A, $f(x)$ é divisível por 6?

**17** Em uma progressão aritmética com um número par de termos, a soma dos termos de ordem ímpar é 70 e a soma dos termos de ordem par é 85. A soma dos extremos é 31. Forme a progressão.

**18** Mostre que o produto de quatro termos consecutivos de uma progressão aritmética de inteiros, aumentado da quarta potência da razão, é um quadrado perfeito.

**19** Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética crescente. Mostre que a razão da progressão é igual ao raio do círculo inscrito no triângulo e que os lados são diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 5.

**20** Devemos colocar 500 bolas formando um triângulo, com uma bola na primeira linha, duas na segunda linha, três na terceira etc.

(A) Quantas bolas sobrarão?
(B) Quantas linhas haverá?

**21** Em uma sequência $(a_n)$, a soma dos $n$ primeiros termos é, para todo $n$, $S_n = n^2 + 2n$. Determine $a_n$.

**22** Prove que se $(a, b, c, d)$ estão em P.G., então vale a relação: $(b - c)^2 = ac + bd - 2ad$.

**23** **(Fuvest-10)** Os números $a_1, a_2, a_3$ formam uma progressão aritmética de razão $r$ de modo que $a_1 + 3$, $a_2 - 3$, $a_3 - 3$, estejam em progressão geométrica. Dado ainda que $a_1 > 0$ e $a_2 = 2$, conclui-se que $r$ é igual a:

(A) $3+\sqrt{3}$.
(B) $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(C) $3+\frac{\sqrt{3}}{4}$.
(D) $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(E) $3-\sqrt{3}$.

**24** A espessura de uma folha de estanho é 0,1 mm. Forma-se uma pilha de folhas colocando-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha será, aproximadamente:

(A) a altura de um poste de luz.
(B) a altura de um prédio de 40 andares.
(C) o comprimento da praia de Copacabana.
(D) a distância Rio-São Paulo.

**25** Existe alguma progressão geométrica que admite 8, 12 e 27 como termos?

**26** Determine três números em progressão geométrica, sabendo que a sua soma é igual a 52 e que o maior deles excede em 20 unidades a soma dos outros dois.

**27** Determine as geratrizes das dízimas periódicas:

(A) 0,141414141...
(B) 0,345454545...
(C) 0,999999999...
(D) 1,030503050...
(E) 1,711111111...
(F) 1,488888888...

**28** **(IME)** Em uma P.G., tem-se $a_1 = \frac{25a^2}{4(a^2+1)}$ e $a_4 = \frac{2(a^2+1)^2}{5a}$, com $a > 0$.

(A) Quais os valores de a para os quais a P.G. é decrescente?

(B) Qual o limite da soma dos termos para $q = a - \frac{1}{5}$?

**29** Uma pessoa pagou 20% de uma dívida. Se R$ 4.368,00 correspondem a 35% do restante a ser pago, determine a dívida total.

**30** Os capitais de R$ 20.000,00, R$ 30.000,00 e R$ 50.000,00 foram aplicados à mesma taxa de juros simples mensal durante 4, 3 e 2 meses, respectivamente. Obtenha o prazo médio de aplicação desses capitais, ou seja, o tempo por que seria necessário aplicar o capital total (R$ 100.000,00) à mesma taxa anterior para obtermos o mesmo retorno.

**31** **(ENEM-2010)**

Em março de 2010, o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) reajustou os valores de bolsas de estudo concedidas a alunos de iniciação científica, que passaram a receber R$ 360,00 mensais, um aumento de 20% com relação ao que era pago até então. O órgão concedia 29 mil bolsas de iniciação científica até 2009, e esse número aumentou em 48% em 2010.

(*O Globo*. 11/3/2010.)

Caso o CNPq decidisse não aumentar o valor dos pagamentos aos bolsistas, utilizando o montante destinado a tal aumento para incrementar ainda mais o número de bolsas de iniciação científica no País, quantas bolsas a mais que em 2009, aproximadamente, poderiam ser oferecidas em 2010?

(A) 5,8 mil.
(B) 13,9 mil.
(C) 22,5 mil.
(D) 51,5 mil.
(E) 94,4 mil.

**32** **(UFPE)** Segundo pesquisa recente, 7% da população brasileira é analfabeta, e 64% da população de analfabetos é do sexo masculino. Qual percentual da população brasileira é formado por analfabetos do sexo feminino?

(A) 2,52%.
(B) 5,20%.
(C) 3,60%.
(D) 4,48%.
(E) 3,20%.

**33** **(PUC-CAMP)** Um trabalhador comprou uma bicicleta, conseguindo um abatimento de 10% sobre o preço marcado. Do valor a ser pago, 40% foi dado como entrada e o restante foi pago em 5 parcelas sem juros, no valor de R$ 41,04 cada. O valor do abatimento obtido foi:

(A) R$ 32,00.
(B) R$ 35,00.
(C) R$ 38,00.
(D) R$ 40,00.
(E) R$ 42,00.

**34** **(FUVEST)** Em certa população, 18% das pessoas são gordas, 30% dos homens são gordos e 10% das mulheres são gordas. Qual é a porcentagem de homens na população?

**35** **(ESPM)** Uma pessoa fez um investimento em ações. No primeiro semestre, ela perdeu 30% do capital aplicado e no segundo semestre ela recuperou 60% do que havia perdido. Em relação ao investimento inicial, seu prejuízo nesses dois semestres foi de:

(A) 22%.
(B) 24%.
(C) 12%.
(D) 16%.
(E) 18%.

**36** **(Enem-11)** Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3.800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de:

(A) R$ 4.222,22.
(B) R$ 4.523,80.
(C) R$ 5.000,00.
(D) R$ 13.300,00.
(E) R$ 17.100,00.

**37** **(UFCE)** José e João possuem uma empresa cujo capital é de R$ 150.000,00. José tem 40% de participação na sociedade e deseja aumentar a sua participação para 55%. Se João não deseja alterar o valor, em reais, de sua participação, o valor que José deve empregar na empresa é:

(A) R$ 110.000,00.
(B) R$ 90.000,00.
(C) R$ 170.000,00.
(D) R$ 50.000,00.
(E) R$ 82.500,00.

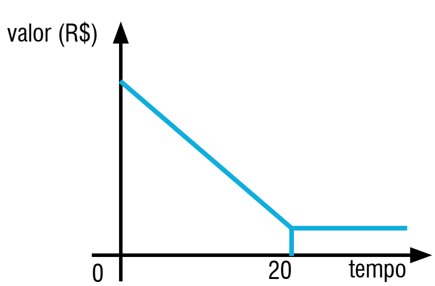
**38** **(UERJ-08)** João abriu uma caderneta de poupança e, em 10 de janeiro de 2006, depositou R$ 500,00 a uma taxa de juros, nesse ano, de 20%. Em 10 de janeiro de 2007, depositou mais R$ 1.000,00. Para que João tenha, nessa poupança, em 10 de janeiro de 2008, um montante de R$ 1.824,00, a taxa de juros do segundo ano deve corresponder a:

(A) 12%.
(B) 18%.
(C) 14%.
(D) 20%.
(E) 16%.

**39** **(UFMG -2010)** O preço de venda de determinado produto tem a seguinte composição: 60% referentes ao custo, 10% referentes ao lucro e 30% referentes a impostos. Em decorrência da crise econômica, houve um aumento de 10% no custo desse produto, porém, ao mesmo tempo, ocorreu uma redução de 20% no valor dos impostos. Para aumentar as vendas do produto, o fabricante decidiu, então, reduzir seu lucro à metade. É correto afirmar, portanto, que, depois de todas essas alterações, o preço do produto sofreu redução de:

(A) 5%.
(B) 19%.
(C) 10%.
(D) 25%.
(E) 11%.

**40** **(PUC-SP-97)** Um veículo de transporte de passageiros tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sofre desvalorização constante por ano. Veja a figura seguinte.




Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dono, após 5 anos de uso, por R$ 24.000,00. Sabendo-se que o valor comercial do veículo atinge seu valor mínimo após 20 anos de uso, e que esse valor mínimo corresponde a 20% do valor que tinha quando era novo, então esse valor mínimo é, em reais:

(A) menor que 4.500.
(B) maior que 4.500 e menor que 7.000.
(C) múltiplo de 7.500.
(D) um número que NÃO divide 12.000.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** **(IME)** Seja uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 \neq 0$ e último termo $a_{10} \neq a_1 \neq 0$. Seja a progressão aritmética de primeiro termo $b_1 = \dfrac{1}{a_1}$ e último termo $b_{10} = \dfrac{1}{a_{10}}$. É possível determinar $\dfrac{a_5}{b_6}$ em função de $a_1$ e $a_{10}$?

**02** **(Uerj-05)** O quadriculado abaixo deve ser preenchido por inteiros positivos de forma que cada linha e cada coluna formem uma progressão aritmética. Qual deve ser o número na posição *****?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | * | |
| | 74 | | | |
| | | | | 186 |
| | | 103 | | |
| 0 | | | | |

**03** Calcule a soma de todos os inteiros compreendidos entre 100 e 400 que **não** são divisíveis nem por 2, nem por 3, nem por 5.

**04** **(IME)** Calcule a soma dos $n$ primeiros termos de uma P.A. cujo primeiro termo é $a$, sabendo que o quociente da soma dos $n$ primeiros termos pela soma dos $n$ seguintes é independente de $n$.

**05** **(ITA-93)** Em uma progressão aritmética com $2n + 1$ termos, a soma dos $n$ primeiros é igual a 50 e a soma dos $n$ últimos é 140. Sabendo que a razão desta progressão é um número inteiro entre 2 e 13, qual o último número?

**06** Calcule o maior valor possível para a razão de uma P.A. que admita os números 32, 227 e 942 como termos da progressão.

**07** Podem os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ ser termos de uma mesma progressão aritmética?

**08** Prove que em qualquer P.G. vale a seguinte relação:
$(S(n))^2 + (S(2n))^2, = S(n)(S(2n)+S(3n))$, em que $S(n)$ é soma dos $n$ primeiros termos da P.G.

**09** **(FUVEST)** A soma dos cinco termos de uma P.G., de razão negativa, é $\dfrac{1}{2}$. Além disso, a diferença entre o sétimo termo e o segundo termo da P.G. é igual a 3. Nessas condições, determine:

(A) a razão da P.G.;
(B) a soma dos três primeiros termos da P.G.

**10** Sejam $a = 111...1$ ($n$ dígitos iguais a 1) e $b = 100...05$ ($n - 1$ dígitos iguais a 0). Prove que $ab + 1$ é um quadrado perfeito e determine sua raiz quadrada.

**11** **(IME-82)** Seja $N = 44...488...89$, em que há $n$ 4's e $(n - 1)$ 8's. Prove que $N$ é um quadrado perfeito.

**12** Larga-se uma bola de uma altura de 5 m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas 4/9 da altura anterior. Determine:

(A) a distância total percorrida pela bola.
(B) o tempo gasto pela bola até parar.

**13** **(AIME-89)** Um determinado dígito $d$ é tal que $0{,}d25d25d25d25... = \dfrac{n}{810}$, em que $n$ é um inteiro positivo. Determine $n$.

**14** Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

**15** **(UFMG)** No período de um ano, certa aplicação financeira obteve um rendimento de 26%. No mesmo período, porém, ocorreu uma inflação de 20%. Então, é correto afirmar que o rendimento efetivo da referida aplicação foi de:

(A) 3%.
(B) 6%.
(C) 5%.
(D) 4%.
(E) 5,2%.

**16** **(FGV)** Uma empresa desconta do salário anual de seus funcionários certa porcentagem para um plano de previdência privada. O desconto é de $p$% sobre R$ 28.000,00 de renda anual, mais $(p + 2)$% sobre o montante anual do salário que excede R$ 28.000,00. João teve desconto total de $(p + 0{,}25)$% do seu salário anual para o plano de previdência privada. O salário anual de João, em reais, sem o desconto do plano de previdência é:

(A) R$ 28.000,00.
(B) R$ 42.000,00.
(C) R$ 32.000,00.
(D) R$ 56.000,00.
(E) R$ 35.000,00.

**17** Se $(a_n)$ é uma progressão aritmética de termos não nulos, calcule, em função de $a_1$, $a_n$, e $n$, o valor de $\dfrac{1}{a_1.a_2} + \dfrac{1}{a_2.a_3} + ... + \dfrac{1}{a_{n-1}.a_n}$.

**18** Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.

**19** Qual a P.G. de cinco termos cuja soma é $\dfrac{121}{3}$ e o produto é 243?

**20** Calcule o valor da soma de $n$ parcelas $S_n = 1 + 11 + ... + 111...1$.

**21** As medidas dos lados de um triângulo são expressas por números inteiros em P.G. e seu produto é 1.728. Calcule as medidas dos lados:

**22** **(AIME)** As duas progressões geométricas distintas $a_1, a_2, a_3, ...$ e $b_1, b_2, b_3, ...$ são tais que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$. Dado que $a_3 = \dfrac{1}{8}$ e $a_2 = b_2 = x > 0$, determine $x$.

**23** Existe alguma progressão aritmética infinita de razão diferente de zero que pode ser formada apenas por números primos?

**24** Mostre que não existe uma progressão aritmética infinita cujos termos são todos quadrados perfeitos.

**25** Seja $M_n = \{0, a_1, a_2, ...a_n \mid a_i = 0 \text{ ou } 1, 1 \le i \le n-1 \text{ e } a_n = 1\}$ um conjunto de frações decimais, $T_n$ e $S_n$, respectivamente, o número de termos e a soma dos termos de $M_n$. Qual o valor da razão $\dfrac{S_n}{T_n}$, quando $n$ tende ao infinito?

**26** Suprimindo-se um dos elementos do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, a média aritmética dos elementos restantes é igual a 16,1. Determine:

(A) o valor de $n$;
(B) o elemento suprimido.

**27** **(IME -CG)** Uma sequência $a_0, a_1, a_2, ...$ é tal que $a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = K$ para todo $i \ge 1$. Determine $a_n$ em função de $a_0$, $a_1$, $n$ e $K$.

**28** A sequência $\{a_n\}$, satisfaz $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + a_n$, para todo $n$. Determine $a_{2010}$.

**29** Krushenko salta 1 metro no primeiro salto, 2 metros no segundo, 4 metros no terceiro, ..., $2^{n-1}$ metros no salto número $n$. Há alguma possibilidade de Krushenko escolher as direções dos seus saltos de modo a conseguir voltar ao ponto de partida?

**30** Calcule o valor da soma $S_n = 1·3 + 2·4 + 3·5 + ... + n(n+2)$.

**31** Os números (4, 6, 13, 27, 50, 84) estão em uma P.A. de ordem $k$. Determine o 30º termo.

**32** Seja $A = \{1, 2, ..., p\}$. Calcule o valor da soma dos produtos que se podem obter usando como fatores dois elementos distintos de $A$.

**33** Determine o valor da seguinte expressão: $1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + 3 \cdot 98 + \ldots + 100 \cdot 1$.

**34** Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma P.A. de 2ª ordem, com $b_i := a_{i+1} - a_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, e $r = b_2 - b_1$. Determine $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ em função de $a_1$, $b_1$, $r$ e $n$.

**35** **(IIT)** Calcule a soma $S = \dfrac{1+2}{1^3+2^3} + \dfrac{1+2+3}{1^3+2^3+3^3} + \dfrac{1+2+3+4}{1^3+2^3+3^3+4^3} + ...$

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** Seja $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ uma sequência de números satisfazendo $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ e $a_0 = 3$. Determine $S = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$

**02** **(YAGLOM)** Considere a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ de números reais tais que:

$$a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geq 0$$
$$a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geq 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{98} - 4a_{99} + 3a_{100} \geq 0$$
$$a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geq 0$$
$$a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geq 0$$

Considerando que $a_1 = 1$, determine os números $a_2, a_3, \ldots, a_{100}$.

**03** **(USAMO)** A sequência $x_n$ é definida por $x_1 = \frac{1}{2}, x_{k+1} = x_k^2 + x_k$.

Encontre a parte inteira da soma $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{100} + 1}$.

**04** Calcule a razão de uma P.G. de dez termos, sabendo que os seis primeiros termos possuem exatamente quatro dígitos e que o último termo possui cinco dígitos.

**05** **(PUTNAM)** Calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^k - 2^k)(3^{k+1} - 2^{k+1})}$.

**06** **(OBM-U)** Calcule $\sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{\min\{m,n\}}{3^{m+n}}$, em que $\min\{m, n\}$ é o menor número dentre $m$ e $n$. Por exemplo, $\min\{3, 4\} = 3$.

**07** **(IMC)** Seja $a_0 = \sqrt{2}, b_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}, b_{n+1} = \frac{2b_n}{2 + \sqrt{4 + b_n^2}}$.

Considere, então, a sequência $c_n = \frac{a_n}{b_n}$; determine o valor de $c_{11}$.

## RASCUNHO

## 1. Introdução

Talvez você já tenha se perguntado quantos são os resultados diferentes em uma loteria como a mega-sena ou quanto tempo seria necessário para acertar uma senha caso fosse tentar todas as possibilidades.

Com o intuito de determinar o número de maneiras de ocorrer um dado evento e resolver problemas desse tipo, criou-se um ramo na matemática conhecido como análise combinatória. Sua ideia principal é agrupar problemas com ideias comuns, determinando assim os conceitos principais necessários para resolução dos mesmos.

Neste assunto veremos os conceitos principais de combinatória, que são o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e o Princípio Aditivo, que basicamente são as ferramentas para o desenvolvimento de toda teoria. Além disso, veremos as ideias principais de combinatória, como as permutações, os arranjos e as combinações.

Encerrando este assunto, encontram-se tópicos menos tradicionais como a Inclusão-Exclusão, os Lemas de Kaplansky e a Permutação Caótica.

**Obs.:** Este assunto possui diversos exemplos diferentes, uma vez que boa parte do aprendizado em Combinatória está associado ao número de questões já vistas anteriormente.

## 2. Princípio fundamental da contagem (PFC)

Considere o seguinte problema: João decide sair de casa, abre então seu armário e percebe que possui três calças e cinco blusas. De quantos modos diferentes João pode se vestir?

Basta ver que para cada opção de calça João tem cinco opções de blusa. Como João pode escolher três calças diferentes, temos $3 \cdot 5 = 15$ possibilidades.

De modo geral, se podemos tomar uma decisão de m maneiras e, se uma vez tomada essa decisão, podemos tomar outra de n maneiras, então o número de maneiras de tomar ambas as decisões é mn.

**Ex.:**

**I.** Sérgio deve viajar de uma cidade A para uma cidade B. Para isso, ele possui oito opções distintas de estradas. Sabendo que ele deve ir de A para B em uma estrada e voltar por outra, de quantos modos diferentes Sérgio pode fazer o seu trajeto de ida e volta?

**Solução:**

Temos oito opções para ir e, uma vez escolhida essa opção, temos sete opções para voltar, logo: $8 \cdot 7 = 56$

**II.** Quantos números naturais de 4 algarismos existem no nosso sistema de numeração?

**Solução:**

Uma ideia muito comum em combinatória é representar cada decisão a ser tomada por um tracinho, colocando o número de possibilidades de realizá-la abaixo de cada traço.

$$\underset{9}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_} \Rightarrow 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000 \text{ possibilidades}$$

**III.** Caso no problema anterior os algarismos fossem todos distintos?

**Solução:**

$$\underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{7}{\_\_} \Rightarrow 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536 \text{ possibilidades}$$

Repare que começamos a escrever o número da esquerda para a direita, assim, na primeira casa temos nove possibilidade pois o zero não entra. Na casa seguinte continuamos com nove, uma vez que só não podemos utilizar o algarismo da primeira casa (o zero pode entrar) e depois vamos sempre perdendo um algarismo.

O que ocorreria se começássemos da direita para a esquerda no problema anterior?

$$\underset{?}{\_\_}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{10}{\_\_}$$

Veja que, nesse caso, o número de possibilidades para o algarismo das unidades de milhar não está definido, pois dependeria se o zero foi utilizado anteriormente ou não. Se o zero tiver sido utilizado teremos sete possibilidades, caso contrário, teremos seis.

Isso ocorre uma vez que esta é a casa com maior restrição (o zero não entra), logo é importante que toda decisão com maior restrição seja tomada primeiro.

## 3. Princípio aditivo

Para resolver o tipo de problema que ocorreu no último exemplo, quando começamos pelo algarismo das unidades, podemos usar o princípio aditivo:

Dados dois conjuntos disjuntos A e B, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, onde $n(X)$ denota o número de elementos de $X$.

Vejamos então o exemplo anterior!

Para determinar o número de possibilidades nas unidades de milhar, começando pelo algarismo mais a direita, devemos saber se o zero foi utilizado ou não anteriormente, assim temos dois casos:

**1º Caso** - se utilizarmos o zero antes.

- Primeiro, temos que definir aonde aparece o zero: 3 possibilidades,
- Segundo, completar o número:

$$\underset{7}{\_\_}\ \underset{1}{\underline{0}}\ \underset{8}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_} \Rightarrow 7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9 = 504 \text{ possibilidades.}$$

Logo nesse caso temos: $3 \cdot 504 = 1512$ números.

**2º Caso** – sem utilizar o zero.

- Basta escolher os algarismos do número.

$$\underset{6}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{9}{\underline{\quad}} \Rightarrow 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024 \text{ possibilidades.}$$

Como os casos são disjuntos: 1512 + 3024 = 4536 números, mesmo resultado achado anteriormente.

**Ex.:**

**I.** Quantos números pares de 5 algarismos distintos podem ser formados?

**Solução:**

Repare que como o número deve ser par, ele deve terminar com 0, 2, 4, 6 ou 8. Como o fato de usar ou não o zero influencia na primeira casa (da esquerda para a direita), devemos abrir em casos:

**1º Caso -** terminando em zero.

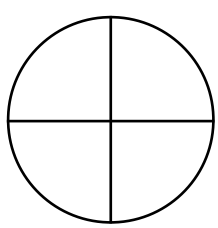
$$\underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}}\ \underset{6}{\underline{\quad}}\ \underset{1}{\underline{0}} \Rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024 \text{ possibilidades.}$$

**2º Caso -** não terminando em zero.

$$\underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}}\ \underset{6}{\underline{\quad}}\ \underset{4}{\underline{\quad}} \Rightarrow 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 10752 \text{ possibilidades.}$$

Somando: 3024 + 10752 = 13776 números.

**II.** **(Morgado)** A figura abaixo mostra um mapa com quatro países:



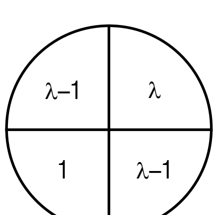
De quantos modos esse mapa pode ser colorido (cada país com uma cor, países com uma linha fronteira comum não podem ter a mesma cor) se dispomos de $\lambda$ cores diferentes?

**Solução**

Faremos menção a cada país como um quadrante do ciclo trigonométrico.

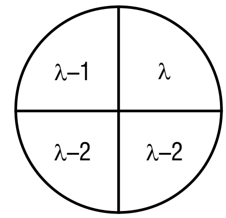
Se começarmos a pintar o 1ºQ, depois o 2ºQ e assim por diante, o número de possibilidades para o 4ºQ não fica definido, uma vez que o 1ºQ e o 3ºQ podem ser pintados da mesma cor ou não. Assim, devemos abrir em casos:

**1º Caso** – 1ºQ = 3ºQ




$$\Rightarrow \lambda\,(\lambda - 1)^2$$

**2º Caso** – 1ºQ ≠ 3ºQ




$$\Rightarrow \lambda\,(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Somando: $\lambda\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 2)^2 + \lambda\,(\lambda - 1)^2 = \lambda\,(\lambda - 1)(72 - 3\lambda + 3)$

## 4. Permutações simples

Muitos problemas de combinatória estão associados a determinar o número de ordenações que se podem fazer dados *n* objetos. Chamamos cada ordenação possível de uma permutação simples e representamos o número de permutações simples por $P_n$.

Veja que na verdade isso é uma aplicação direta do PFC, uma vez que basta determinar que elemento ocupa cada posição:

$$\underset{n}{\underline{\quad}}\ \underset{n-1}{\underline{\quad}} \cdots \underset{1}{\underline{\quad}} \to P_n = n.(n-1)\ldots.1 := n! \to \boxed{P_n = n!}$$

(chamado também de fatorial *n*)

**Obs.:** 0! = 1 por definição.

**Ex.:**

**I.** Dada uma palavra qualquer, chamamos de anagrama qualquer permutação simples de suas letras, mesmo que essa permutação não tenha significado.

Sabendo disso, determine o número de anagramas da palavra CADERNO?

**Solução:**

Basta permutar suas letras, como existem 7 letras distintas: $P_7 = 7! = 5040$.

**II.** Cinco casais desejam ocupar uma escada com cinco degraus para tirar uma foto. Sabendo que cada degrau deve ser ocupado por exatamente um casal, determine o número de maneiras desses casais se organizarem para essa foto:

**Solução:**

- Primeiro devemos permutar os casais nos degraus: $P_5 = 5! = 120$.
- Segundo devemos decidir em cada casal quem fica à direita: $2^5 = 32$.
- Pelo PFC: $120 \cdot 32 = 3840$ possibilidades.

**III.** Determine o número de anagramas da palavra HORTELÃ que possuem todas as vogais juntas?

**Solução:**

Sempre que um problema pedir para que alguns objetos fiquem juntos podemos tratá-los como um único objeto, já que podem ser vistos como uma única caixa **(bizu da caixinha)**.

Assim, podemos considerar que essa palavra possui apenas cinco letras, sendo estas, as quatro consoantes e a caixinha com as vogais.

- Primeiro: Permutando essas letras $P_5 = 5! = 120$.
- Segundo: Devemos permutar as vogais dentro da caixa: $P_3 = 3! = 6$.
- Pelo PFC: $120 \cdot 6 = 720$.

**IV.** Considerando a palavra do exemplo anterior, determine o número de anagramas que possuem *H* e *R* separados:

**Solução:**

Outra ideia importante em combinatória é olhar para o complementar de um conjunto em relação ao total, uma vez que em muitos problemas é mais fácil fazer o contrário do que é pedido na questão.

Neste problema, por exemplo, queremos saber o número de anagramas que possuem *H* e *R* separados, porém pelo exemplo anterior já sabemos resolver isso quando os objetos estão juntos, sendo assim:

- Total de anagramas: $P_7 = 7! = 5040$.
- Anagramas com *H* e *R* juntos: $P_6 \cdot P_2 = 6! \cdot 2! = 720 \cdot 2 = 1440$.
- Resposta: $5040 - 1440 = 3600$ anagramas.

**Obs.:** Essa ideia só foi rápida, porque ele queria apenas duas letras separadas, no caso em que o problema peça mais de duas letras não adjacentes existe outra maneira de resolver que será vista mais a frente.

## 5. Arranjos simples

Muitos problemas em combinatória estão associados a determinar o número de ordenações em que alguns objetos podem ser distribuídos.

Porém, nem sempre estamos interessados em utilizar todos os objetos disponíveis, por exemplo, considere que em um parque de diversões existem 20 pessoas querendo entrar em numa montanha russa. Essa montanha russa possui apenas quatro assentos, com disponibilidade para exatamente uma pessoa. De quantos modos essa montanha russa pode ser composta?

Repare que, na verdade, assim como nas permutações, esse é apenas mais um exemplo de aplicação direta do PFC:

$$\underset{20}{\underline{\quad}}\ \underset{19}{\underline{\quad}}\ \underset{18}{\underline{\quad}}\ \underset{17}{\underline{\quad}} \Rightarrow 20\cdot19\cdot18\cdot17 = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot\ldots\cdot1}{16\cdot15\cdot\ldots\cdot1} = \frac{20!}{16!}$$

Em um caso geral, se temos *n* objetos e queremos ordenar *p* desses objetos, chamamos de arranjo de *n* escolhe *p* ($A_{n,p}$) o número de maneiras de fazer essa ordenação:

$$\underset{n}{\underline{\quad}}\ \underset{n-1}{\underline{\quad\quad}}\cdots\underset{n-p+1}{\underline{\quad\quad\quad}} \to A_{n,p} = A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \to$$

$$\to A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

## 6. Outras permutações

Ao resolver muitos problemas de combinatória é comum contarmos elementos que inicialmente são iguais erroneamente como distintos. Nesses casos, devemos tentar agrupar as soluções iguais, vendo quantas vezes cada objeto está sendo contado repetidamente.

Os casos mais clássicos em que isso ocorre são nas permutações completas (com repetição) e nas circulares.

### 6.1 Permutações completas (com repetição)

O que ocorre quando queremos determinar o número de anagramas de uma palavra com letras repetidas? Por exemplo, quantos são os anagramas da palavra CASA?

Considerando os A's como letras distintas, temos $4! = 24$ permutações. Porém como os A's são iguais, cada permutação é contada duas vezes ($CA_1SA_2 = CA_2SA_1$), assim têm-se 12 anagramas.

De modo geral, se uma letra aparece *n* vezes, basta pegar o total de permutações e dividir por *n*!, uma vez que fixadas as demais letras temos *n*! maneiras de permutar essas letras iguais.

Chamamos de permutação completa cada ordenação de *n* objetos com elementos repetidos ou não, e representamos por $P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ o número de permutações completas de *n* objetos, sendo $\alpha_1$ o número de objetos do 1º tipo, $\alpha_2$ do 2º tipo e assim por diante. Como os $\alpha$'s representam a multiplicidade de cada objeto devemos ter $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$.

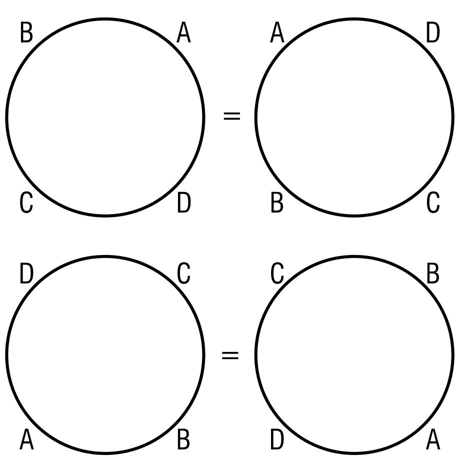
Assim, o número de permutações completas será dado por:

$$\boxed{P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}}$$

### 6.2 Permutações circulares

E no caso de determinar o número de maneiras de colocar *n* pessoas em um círculo com seus lugares equiespaçados, considerando iguais disposições obtidas através de rotação?

Fazendo o caso $n = 4$ (o caso geral é igual): Se a fila formada fosse em linha reta teríamos $4! = 24$ maneiras de ordená-los, porém repare que em um círculo temos configurações iguais (por rotação) como as representadas abaixo:




Nesse caso devemos dividir o total de permutações simples por 4, obtendo 6 permutações. No caso geral, com *n* objetos, teríamos *n* rotações no círculo de onde basta dividir o total por *n*.

Denotamos por $(PC)_n$ o número de permutações circulares que podem ser obtidos com *n* objetos, assim:

$$\boxed{(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

## 7. Combinações simples

Existem alguns casos em que estamos interessados apenas em escolher um subconjunto de objetos dentre um conjunto maior disponível, não importando a ordem com que isso é feito. Um exemplo disso, supondo que você possui um grupo de 10 amigos e deseja escolher três para fazer uma viagem com você, de quantos modos isso pode ser feito?

Se a ordem fosse importante, a resposta seria $A_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Porém, como nesse caso a ordem não importa às escolhas: $(A_1, A_2, A_3)$; $(A_1, A_3, A_2)$; $(A_2, A_1, A_3)$; $(A_2, A_3, A_1)$; $(A_3, A_1, A_2)$; $(A_3, A_2, A_1)$ são todas iguais, ou seja, cada escolha está sendo contada seis vezes, logo, basta dividir o total por 6, obtendo 120 escolhas possíveis.

Ou seja, de modo geral, basta considerar as escolhas com ordem, e depois dividir pelo fatorial da quantidade de termos escolhidos para consertar isso.

Sendo assim, se temos $n$ objetos e queremos escolher $p$ chamamos de combinações simples o números de escolhas distintas:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** **(UFRJ)** A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, cada um dos quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições:

- se o 1º algarismo é ímpar, então o último também é ímpar;
- se o 1º algarismo é par, então o último é igual ao 1º;
- a soma do 2º com o 3º é 5.

Quantas combinações diferentes atendem às condições estabelecidas pelo Dr. Z?

**Solução:**

Sejam ABCDE os dígitos (nessa ordem). Vamos dividir o problema em casos:

**1º caso** – A é ímpar.
- A: 5 opções (1, 3, 5, 7, 9)
- B: 6 opções (0, 1, 2, 3, 4, 5)
- C: 1 opção (fica determinado pela escolha de B)
- D: 10 opções
- E: 5 opções (também é ímpar nesse caso)

No 1º caso, temos o total de $5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 10 = 1500$ combinações.

**2º caso** – A é par.
- A: 5 opções (0, 2, 4, 6, 8)
- B: 6 opções
- C: 1 opção
- D: 10 opções
- E: 1 opção (E = A)

No 2º caso, temos o total de $5 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 10 = 300$.

Como dividimos em casos (disjuntos), devemos somar as respostas dos casos, obtendo assim $1500 + 300 = 1800$ como resposta.

**02** Dois irmãos gêmeos ganharam de aniversário 8 bolas de futebol iguais, 6 camisas iguais e 10 caixas de chocolate também idênticas. De quantos modos pode-se dividir esses presentes entre os dois de modo que cada um receba, pelo menos, 3 bolas de futebol, 2 camisas e 2 caixas de chocolate?

**Solução:**

Considere os irmãos A e B. Repare que, como os objetos do mesmo tipo são idênticos, não é importante quais vamos escolher, o importante é quantos vamos escolher. Então, temos:

- 1ª etapa: Divisão das bolas: 3 opções – (3,5); (4,4); (5,3)
- 2ª etapa: Divisão das camisas: 3 opções – (2,4); (3,3); (4,2)
- 3ª etapa: Divisão das caixas: 7 opções – (2,8); (3,7); (4,6);...; (8,2)
- Resposta: $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$ modos.

**03** **(UFRJ)** Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo 1cm para a esquerda ou para a direita a cada movimento. Calcule de quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 10 movimentos terminando na posição de partida.

**Solução:**

Representemos cada movimento para esquerda por E e cada movimento para a direita por D. Veja que para terminar no ponto de partida, é necessário ter 5Ds e 5Es. Além disso, veja que cada maneira de realizar os 10 movimentos pode ser vista como uma sequência desses 5Ds e 5Es. Então, o número de maneiras de se realizar esses movimentos é:

$$P_{10}^{5,5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

**04** Oito crianças vão se dividir em dois times de 4 para disputar uma partida de futebol. De quantas maneiras isso pode ser feito se:

a. um time joga com camisa e o outro joga sem?
b. os dois times jogam sem camisa?

**Solução:**

a. Dentro de cada time, não importa a ordem na qual é feita a escolha, portanto precisamos usar combinação. Para o time com camisa, temos $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$. Para o time sem camisa, colocamos as crianças restantes, o que só pode ser feito de $C_4^4 = \frac{4!}{0!4!} = 1$ maneira possível.

Então, são $70 \cdot 1 = 70$ maneiras.

b. O que muda aqui é que a divisão passa a ser feita em grupos indistinguíveis. Veja que se 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 são as crianças, as divisões 1234/5678 e 5678/1234 são iguais (só porque os dois times estão sem camisa – no item a, essas duas divisões são diferentes). Portanto, estamos contando duas vezes cada configuração. Logo, precisamos dividir por 2 para contar apenas uma vez, o que nos dá a resposta $\frac{70}{2} = 35$.

## 8. Soluções inteiras não negativas

Os conceitos iniciais de combinatória, como a permutação e a combinação, envolvem a ordenação ou a escolha de determinados objetos. E se quiséssemos distribuir objetos idênticos a um grupo de pessoas? Como isso deve ser feito?

Como os objetos são idênticos, estamos interessados apenas em determinar quantos objetos cada pessoa irá ganhar. Então, por exemplo, se temos cinco bombons e queremos distribuir a duas pessoas, basta ver o número de soluções inteiras não-negativas da equação: $x + y = 5$, onde $x$ e $y$ representam o número de bombons que cada um ganhou.

Nesse caso, temos as seguintes soluções: (5, 0); (4, 1); ...; (0, 5) (6 soluções).

Porém, como em muitos problemas de combinatória, se os números aumentarem um pouco fica impraticável listar todos os casos.

Então a pergunta é como determinar o número de soluções inteiras não-negativas da equação: $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$

Repare que basicamente o que se quer fazer é separar os $p$ objetos iguais em $n$ grupos. Podemos representar cada objeto por um ponto, e como eles devem ser separados em $n$ grupos, deve-se inserir $n - 1$ divisórias entre esses pontos. O número de soluções é o número de trocas possíveis entre as posições das divisórias (que iremos representar por barras) e dos pontos.

Para facilitar a visualização, considere o seguinte exemplo:

Quantas soluções existem para a equação: $x + y + z = 3$ vamos representar cada solução de acordo com o que foi exposto acima:

| | |
|---|---|
| (3, 0, 0) • • • \| \| | (0, 2, 1) \| • • \| • |
| (0, 3, 0) \| • • • \| | (1, 0, 2) • \| \| • • |
| (0, 0, 3) \| \| • • • | (1, 2, 0) • \| • • \| |
| (1, 1, 1) • \| • \| • | (2, 1, 0) • • \| • \| |
| (0, 1, 2) \| • \| • • | (2, 0, 1) • • \| \| • |

É fácil entender que existe uma bijeção entre as soluções e as representações por pontos e barras, ou seja, para determinar o número de soluções da equação basta determinar o número de permutações existentes.

No caso geral, temos $p$ pontos e $n - 1$ barras, logo temos $P_{n+p-1}^{n-1,p}$ soluções inteiras não-negativas.

**Ex.:**

**I.** (Limitando as variáveis por baixo) Qual o número de soluções inteiras não-negativas de $x + y + z = 5$, se $x \geq 2$?

**Solução:**

Podemos simplesmente substituir variáveis. Se $x \geq 2$, então existe $x' \geq 0$ inteiro tal que $x = x' + 2$, assim a equação fica:

$x' + y + z = 3$ que possui $P_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$ soluções.

Uma interpretação para esse problema é pensar que queremos distribuir cinco objetos idênticos entre três pessoas, porém uma delas deve receber pelo menos dois. Podemos então entregar primeiro dois objetos a essa pessoa e depois distribuir três objetos de qualquer maneira entre as três pessoas.

**II.** (Se a soma for menor ou igual a um número) Qual o número de soluções inteiras não-negativas de $x + y + z$ ″ 5?

**Solução:**

Podemos interpretar esse problema da seguinte forma: temos cinco objetos e devemos entregar esses objetos (não necessariamente todos) a três pessoas.

Nesse caso, os objetos que não estão sendo entregues ficarão com o dono, logo, na prática, estamos distribuindo esses objetos entre quatro pessoas, assim o problema é equivalente a:

$x + y + z + f = 5$ (onde $f$ é a folga da equação, ou seja, o quanto falta para a soma chegar a cinco).

Desse modo, temos: $P_8^{5,3} = \dfrac{8!}{5!3!} = 56$ soluções.

**III.** (Limitando uma variável por cima): Qual o número de soluções inteiras não-negativas de $x + y + z = 8$, se $x$ ″ 3 ?

**Solução:**

Nesse caso, como já se sabe limitar uma variável por baixo (ver ex. I), podemos calcular o total de soluções, sem restrições, e subtrair aquelas que possuem $x \geq 4$.

Total de soluções (sem restrição): $\dfrac{10!}{8!2!} = 45$ soluções.

Soluções com $x \geq 4$ Temos $x = x' + 4$, donde $x' + y + z = 4$ que possui $\dfrac{6!}{4!2!} = 15$ soluções.

Resposta: 45 – 15 = 30.

**Obs.:** No caso de termos mais de uma variável limitada por cima, o problema fica um pouco mais difícil. Esse tipo de problema será visto num tópico mais a frente chamado de inclusão-exclusão.

## 9. Combinações com repetição (ou completa)

Já vimos o número de maneiras de escolher $p$ objetos distintos dentre $n$ disponíveis. E se pudéssemos escolher um mesmo objeto mais de uma vez?

Nesse caso, a pergunta a ser respondida é quantas vezes cada objeto será escolhido, podendo alguns deles não serem escolhidos.

O problema pode ser visto basicamente como o número de soluções inteiras não-negativas de uma equação, assim se $x_i$ é o número de vezes que o objeto i é escolhido, e se chamarmos o número de escolhas possíveis de $(CR)_n^p$ (combinação com repetição de $n$ objetos tomados $p$ a $p$) têm-se:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p \Rightarrow (CR)_n^p = P_{n+p-1}^{n-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p \text{ soluções.}$$

**Ex.:** De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes?

**Solução:**

Devemos determinar quantas vezes cada refrigerante será escolhido, ou seja, devemos ver quantas soluções possui a equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$.

$n = (CR)_{5,3} = C_{7,3} = 35$

# 10. Lemas de Kaplansky

Existem diversos problemas de análise combinatória com restrições com relação a escolhas dos elementos. Um problema muito comum é determinar o número de maneiras de se escolher alguns objetos, não podendo escolher objetos consecutivos dentro de uma ordem dada. Para a resolução desse problema, veremos uma ideia bem esperta.

## 10.1 Primeiro Lema de Kaplansky

Quantos subconjuntos de $p$ elementos existem no conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ sem elementos consecutivos?

Vejamos, como exemplo, o caso $n = 8$ e $p = 3$.

Uma forma de enxergar a escolha de elementos dentro de um conjunto é pensar que, na verdade, devemos olhar para todos os elementos do conjunto e assim ir definindo quem entra e quem não entra no seu subconjunto.

Ou seja, para cada elemento pode-se atribuir um sinal "+" (ele entra no subconjunto) ou um sinal "–" (ele não entra no subconjunto).

Pensando assim, o que aconteceria se não existisse a restrição quanto à escolha de elementos consecutivos?

Vejamos alguns subconjuntos de três elementos que podem ser formados: $\{1,2,3\} \Rightarrow \begin{matrix}\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\ +++-----\end{matrix}$ $\quad \{2,5,7\} \Rightarrow \begin{matrix}\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \\ -+--+-+-\end{matrix}$

É fácil entender que existe uma bijeção entre os subconjuntos e a representação com os sinais, assim o total de subconjuntos (podendo existir elementos consecutivos) pode ser vista como o número de permutações com três sinais "+" e cinco "-", que seria: $P_8^{5,3} = \dfrac{8!}{5!3!} = C_8^3$ (em um certo sentido escolher é equivalente a permutar e depois descontar a ordem, ou seja, permutar com elementos iguais).

No 1º Lema de Kaplansky, o que muda é que na hora de permutar não podemos ter sinais "+" adjacentes. E aí caímos em outro problema, quantas permutações de cinco sinais "+" e três sinais "–" existem sem sinais "+" adjacentes?

**1ª Solução:** Fixando os sinais de "–"

Podemos simplesmente pensar que os sinais "–" estão fixos e que queremos espalhar os sinais "+", nesse caso, têm-se:

$$\smile^{-}\smile^{-}\smile^{-}\smile^{-}\smile^{-}\smile$$

Ou seja, temos seis lugares para três sinais "+", e como dois sinais "+" não ficam juntos, devemos escolher exatamente três espaços, um para cada sinal "+", ou seja, temos: $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$ escolhas.

No caso geral, têm-se p sinais de "+" e $n - p$ sinais "–".

Fixando os sinais "–" teríamos $n - p + 1$ espaços para p sinais "+", ou seja, $C_{n-p+1}^{p}$ escolhas.

Representa-se a resposta do 1° Lema por $f(n, p)$, assim:

$$f(n,p) = C_{(n-p+1)}^{p}$$

**2ª Solução:** Fixando os sinais de "+"

Deve-se distribuir os cinco sinais "–" nos espaços representados abaixo:

$$\smile^{+}\smile^{+}\smile^{+}\smile$$

Temos quatro espaços para cinco sinais "–", assim devemos determinar quantos sinais "–" entram em cada espaço e como não existem dois sinais "+" adjacentes, nos espaços do meio deve existir pelo menos um sinal de "–". Assim o problema é equivalente: $x + y + z + w = 5$; com $y \geq 1$ e $z \geq 1$

Fazendo $y = y' + 1$ e $z = z' + 1$, têm-se: $x + y' + z' + w = 3$ que possui: $P_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$ soluções.

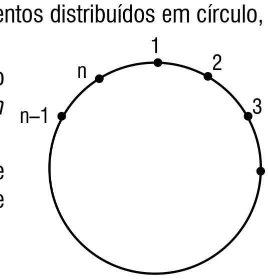
**Obs.:** Apesar dessa solução ser mais trabalhosa que a primeira, é importante conhecê-la, uma vez que essa ideia ajuda a resolver alguns problemas mais gerais que o 1º Lema.

## 10.2 Segundo Lema de Kaplansky

Veja o seguinte problema: de quantos modos um atleta pode escolher sua rotina de treino semanal, se ele deve treinar três vezes na semana, porém não pode treinar dias consecutivos para não ter fadiga muscular? (considere que uma vez escolhida sua rotina, esta não pode ser alterada na semana seguinte).

O problema apresentado acima é parecido com o 1º Lema de Kaplansky, pois temos sete dias na semana, e devemos escolher três sem dois consecutivos para treinar. O que muda nesse problema é que o início de uma semana é consecutivo ao final de outra, ou seja, existe uma situação circular no conjunto dado.

Mas geralmente, quer-se determinar o número de subconjuntos de $p$ elementos que se pode formar com $n$ elementos distribuídos em círculo, como na figura a seguir:




Desse modo, a única parte diferente do problema é que devemos considerar 1 e $n$ como elementos consecutivos.

Uma vez que a única mudança que ocorre é que ao entrar o elemento $n$ o 1 não pode mais ser escolhido, vamos abrir em casos:

**1º Caso** – O elemento $n$ entra no subconjunto.

Nesse caso, faltam escolher $p - 1$ elementos no conjunto $\{2, 3, 4, ..., n - 2\}$ sem dois consecutivos, onde as extremidades não são consecutivas. Pelo 1º lema isso pode ser feito de $f(n-3, p-1) = C_{(n-3)-(p-1)+1}^{p-1} = C_{n-p-1}^{p-1}$.

**2º Caso** – O elemento $n$ entra no subconjunto.

Agora ainda faltam escolher os p elementos no conjunto $\{1, 2, 3, ..., n - 1\}$ sem dois consecutivos, onde as extremidades não são consecutivas. Pelo 1º lema isso pode ser feito de $f(n-1, p) = C_{(n-1)-p+1}^{p} = C_{n-p}^{p}$.

Definindo g(n, p) como resposta desse problema, chamado de 2º Lema de Kaplansky, têm-se:

$$g(n,p) = C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^{p} = \frac{p}{n-p} C_{n-p}^{p} + C_{n-p}^{p} = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p} \Rightarrow$$

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^{p}$$

## 11. Permutação caótica

Outro tipo de permutação conhecida é a permutação que não permite elementos em sua posição original. Por exemplo, imagine que temos 10 livros em uma prateleira, e queremos reordená-los de modo que os livros não fiquem em sua posição inicial. De quantos modos podemos organizá-los?

No caso mais geral, considerando o conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, queremos determinar o número de permutações de seus elementos, de modo que nenhum elemento $i$ caia na posição $i$.

Uma ideia comum em combinatória é olhar para o problema contrário. Nesse caso, vamos determinar o total de permutações e subtrair daquelas que tem pelo menos um elemento na posição original.

- Total de permutações: $n!$
- Permutações com pelo menos um elemento na posição original:

Repare que temos que determinar o número de permutações que possuem o 1 na primeira posição, ou o 2 na segunda posição, ou o 3 na terceira, e assim por diante (ou não sendo no sentido excludente). Assim queremos achar uma união de conjuntos.

Chamando de $A_i$ os conjuntos que possuem o elemento $i$ em sua posição inicial, queremos determinar: $n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$.

Pelo Princípio da inclusão-exclusão:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \text{Soma}(1a1) - \text{Soma}(2a2) + ... + (-1)^n \text{Soma}(n\,a\,n)$$

Para determinar o número de elementos de uma interseção $k$ a $k$, basta notar que temos $k$ elementos fixos e os outros permutando de qualquer maneira, logo temos $(n - k)!$ possibilidades. Por exemplo:

**Ex.:**

$A_1 \cap A_2$ são as permutações em que o 1 e o 2 estão fixos e os demais permutando, logo possui $(n - 2)!$ Elementos.

Finalmente como toda interseção $k$ a $k$ tem $(n - k)!$ elementos a soma $k$ a $k$ é determinada pelo números de interseções $k$ a $k$ que podem ser formadas

$\left(C_n^k\right)$ vezes $(n - k)!$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} (n-k)! =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^{k+1} (n-k)! = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

Finalmente sendo $D_n$ o número de permutações caóticas, têm-se:

$$D_n = n! - n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = n! - n! \left( \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \right) \Rightarrow$$

$$D_n = n! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** **(UFPB)** Deseja-se pintar 6 esferas, recebendo cada uma, tinta de uma só cor escolhida entre 3 disponíveis. De quantas maneiras pode-se pintar o conjunto de esferas?

(A) 30.
(B) 27.
(C) 28.
(D) N.R.A.

**Solução:** Letra C.

Trata-se de uma combinação completa $(CR)_n^p = C_{n+p-1,p}$ com n = 3 e p = 6, assim: $(CR)_3^6 = C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = 28$ soluções.

**02** Quantas sãs as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w < 8$?

**Solução:**

Como estamos interessados nas soluções inteiras se $x + y + z + w < 8$, devemos ter: $x + y + z + w \leq 7$que é equivalente a $x + y + z + w + f = 7$.

Neste caso devemos permutar 7 pontos e 4 barras: $P_{11}^{7,4} = \frac{11!}{7!4!} = 330$ soluções.

**03** Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z = 8$?

**Solução:**

Como as soluções são positivas, devemos ter:

$x \geq 1;\ y \geq 1;\ z \geq 1$, em que $x = x'+1;\ y = y'+1;\ z = z'+1$ com $x'$, $y'$ e $z'$ inteiros não negativos, logo: $x' + y' + z' = 5$.

Permutando cinco pontos e duas barras: $P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21$ soluções.

**04** **(UFRJ)** Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro "Combinatória é fácil" e 5 exemplares de "Combinatória não é difícil". Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de "Combinatória não é difícil" nunca estejam juntos.

**Solução:**

Representemos por $F$ os livros 'Combinatória é fácil' e por $D$ os livros 'Combinatória não é difícil'. Normalmente, em combinatória, começamos pela restrição. Este aqui é um dos poucos casos em que a ordem de execução é contrária. Coloque os 11 $F$ lado a lado:

_F_F_F_F_F_F_F_F_F_F_F_

Dos 12 espaços determinados acima, precisamos escolher 5 para colocarmos os $D$. Isso garante que os $D$ não ficarão juntos, que é a restrição do problema. Veja que a ordem da escolha não é importante, portanto, usamos combinação e temos $C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = 792$.

**05** Dado um octógono, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não consecutivos do octógono?

**Solução:**

Claramente o problema é o 2º Lema de Kaplansky $\left( g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^p \right)$ com $n = 8$ e $p = 3$, logo: $g(8,3) = \frac{8}{5} C_5^3 = \frac{8}{5} \cdot 10 = 16$ soluções.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** **(IME)** Determine quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5.

**Obs.:** Considere os números iniciados com o algarismo 0 (por exemplo, 0123), número de 3 algarismos.

**02** **(UFRJ)** Quantos números de 4 algarismos podemos formar nos quais o algarismo 2 aparece ao menos uma vez?

**03** **(UFRJ)** Um construtor dispõe de quatro cores (verde, amarelo, cinza e bege) para pintar cinco casas dispostas em uma rua, lado a lado. Ele deseja que cada casa seja pintada com apenas uma cor e que duas casas consecutivas não possuam a menor cor. Determine o número de possibilidades diferentes de pintura.

**04** **(MORGADO)** De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição 3 cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

**05** **(EFOMM)** O código Morse usa “palavras” contendo de “1 a 4 letras”, as “letras” sendo ponto e traço. Quantas palavras existem no código Morse?

**06** **(MORGADO)** Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

a. que começam por consoante e terminam por vogal?
b. que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
c. que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
d. que tem as vogais e consoantes intercaladas?
e. que têm a letra C no 1º lugar e a letra A no 2º lugar?
f. que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar?
g. que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar ou a letra P no 3º lugar?

**07** **(OLIMPÍADA BELGA)** Um número inteiro não negativo é dito palíndromo se ele lido da esquerda para a direita é igual quando lido da direita para a esquerda. Por exemplo, 121, 0, 2002 e 4 são palíndromos. O número de palíndromos que são menores que 1.000.000 é:

(A) 900.
(B) 1991.
(C) 1993.
(D) 1999.
(E) 2220.

**08** **(ITA)** Se colocarmos em ordem crescente todos os números de 5 (cinco) algarismos, obtidos com 1, 3, 4, 6 e 7, a posição de número 61473 será:

(A) 76º
(B) 78º
(C) 80º
(D) 82º
(E) N.D.A.

**09** **(ITA)** Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

(A) 144.
(B) 180.
(C) 240.
(D) 288.
(E) 360.

**10** **(ITA – 83)** Um general possui $n$ soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com $r$ soldados e outro da retaguarda com $s$ soldados ($r + s = n$), ele poderá dispor seus homens de:

(A) $\dfrac{n!}{(r+s)!}$ maneiras
(B) $\dfrac{n!}{r!s!}$ maneiras
(C) $\dfrac{n!}{(rs)!}$ maneiras
(D) $\dfrac{2n!}{(r+s)!}$ maneiras
(E) $\dfrac{2n!}{r!s!}$ maneiras

**11** **(ITT JEE)** Uma classe tem $n$ alunos, temos que formar uma equipe com eles, incluindo pelo menos dois estudantes e excluindo também, pelo menos dois alunos. O número de maneiras de formar a equipe é:

(A) $2^n - 2n$
(B) $2^n - 2n - 2$
(C) $2^n - 2n - 4$

**12** **(ITA )** O número de arranjos de $n + 2$ objetos tomados cinco a cinco vale $180n$. Nestas condições, concluímos que:

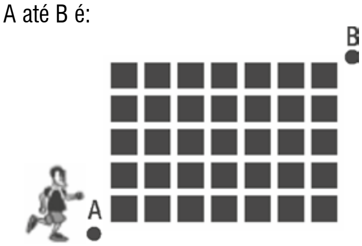
(A) $n$ é número par.
(B) $n$ é um número primo.
(C) $n$ está compreendido entre 100 e 200.
(D) $n$ é um número ímpar.
(E) $n$ é divisível por 5.

**13** **(ITA)** Quantos anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?

(A) 7.200.
(B) 7.000.
(C) 4.800.
(D) 3.600.
(E) 2.400.

**14** **(MORGADO)** Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes, e o dígito 8, exatamente 2 vezes?

**15** **(VUNESP)** A figura a seguir mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos “de baixo para cima” ou “da esquerda para a direita”. O número de percursos diferentes
que essa pessoa poderá fazer de A até B é:




(A) 95.040.
(B) 40.635.
(C) 924.
(D) 792.
(E) 35.

**16** **(UFRJ)** Um grupo constituído por 4 mulheres e 4 homens deve ocupar as 8 cadeiras dispostas ao redor de uma mesa circular. O grupo deve ser acomodado de modo que cada homem sente entre duas mulheres. João e Maria estão nesse grupo de pessoas; entretanto, por motivos de ordem estritamente pessoal, não podem sentar-se lado a lado. Duas acomodações das pessoas ao redor da mesa são consideradas diferentes quando pelo menos uma não tem o mesmo vizinho à direita, nas duas acomodações. Determine o número de diferentes acomodações possíveis dessas 8 pessoas ao redor da mesa circular.

**17** Uma criança possui 96 blocos distintos. Cada bloco pode ser de 2 materiais (plástico ou madeira), 3 tamanhos (pequeno, médio ou grande), 4 cores (azul, verde, vermelho e amarelo) e 4 formatos (círculo, hexágono, quadrado e triângulo). Quantos desses blocos diferem do bloco “plástico médio vermelho círculo” em exatamente dois quesitos? (Um exemplo seria o bloco “madeira médio vermelho quadrado”.)

**18** **(AFA)** Em uma demonstração de paraquedismo, durante a queda livre, participam 10 paraquedistas. Em certo momento, 7 deles devem dar as mãos e formar um círculo. De quantas formas distintas eles poderão ser escolhidos e dispostos nesse círculo?

(A) 120.
(B) 720.
(C) 86400.
(D) 151200.

**19** **(AFA)** Dez balões azuis e oito brancos deverão ser distribuídos em três enfeites de salão, de modo que um deles tenha 7 balões e os outros dois, no mínimo 5. Cada enfeite deverá ter 2 balões azuis e 1 branco, pelo menos. De quantas maneiras distintas pode-se fazer os enfeites, usando simultaneamente todos os balões?

(A) 9.
(B) 10.
(C) 11.
(D) 12.

**20** Quantas são as peças de um dominó comum?

**21** **(UFRJ)** Um campeonato de futebol foi disputado por 10 equipes em um único turno, de modo que cada time enfrentou cada um dos outros apenas uma vez. O vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha ponto algum; em caso de empate, cada equipe ganha 1 ponto. Ao final do campeonato, tivemos a seguinte pontuação:

Equipe 1 – 20 pontos;
Equipe 2 – 10 pontos;
Equipe 3 – 14 pontos;
Equipe 4 – 9 pontos;
Equipe 5 – 12 pontos;
Equipe 6 – 17 pontos;
Equipe 7 – 9 pontos;
Equipe 8 – 13 pontos;
Equipe 9 – 4 pontos;
Equipe 10 – 10 pontos.

Determine quantos jogos desse campeonato terminaram empatados.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** **(MORGADO)** Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

**02** **(ITA)** Uma escola possui 18 professores, sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada um contenha exatamente 5 professores de Matemática, com no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?

(A) 875.
(B) 1877.
(C) 1995.
(D) 2877.
(E) N.D.A.

**03** **(JOSÉ PLÍNIO - PRC)** De quantas maneiras um grupo de 7 pessoas pode ser agraciado com 4 prêmios diferentes: (todos os prêmios devem ser distribuídos)

a. se nenhuma pessoa puder receber mais que um prêmio;
b. se cada pessoa puder receber qualquer número de prêmios (até quatro naturalmente);
c. se o vencedor do primeiro prêmio não puder receber outro prêmio, mas vencedores de outros prêmios puderem receber mais de um prêmio.

**04** **(OBM)** Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos? (Obs.: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas)

(A) $35!$
(B) $\frac{35!}{5!}$
(C) $\frac{35!}{5}$
(D) $\left(\frac{35!}{5}\right)5!$
(E) $e^{\pi\sqrt{163}}$

**05** **(MORGADO)** No quadro abaixo, de quantos modos é possível formar a palavra MATEMÁTICA, partindo de um M e indo sempre para a direita ou para baixo?

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | M |
| | | | | | | | | M | A |
| | | | | | | | M | A | T |
| | | | | | | M | A | T | E |
| | | | | | M | A | T | E | M |
| | | | | M | A | T | E | M | A |
| | | | M | A | T | E | M | A | T |
| | | M | A | T | E | M | A | T | I |
| | M | A | T | E | M | A | T | I | C |
| M | A | T | E | M | A | T | I | C | A |

**06** Para a Seleção Brasileira de Futebol foram convocados 22 jogadores, os quais jogam em todas as posições, exceto dois deles, que só jogam no gol. De quantos modos se podem selecionar os 11 titulares?

**07** **(ITA)** Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica à outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

**08** **(JOSÉ PLÍNIO – PRC)** De quantas maneiras 8 contas distintas podem ser colocadas num cordão elástico de modo a formar uma pulseira?

**09** **(UFRJ – 08)** Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

– um dentre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;
– um dentre os tamanhos: pequeno e grande;
– de um até cinco dentre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio em um mesmo sanduíche.

Calcule:

a. quantos sanduíches distintos podem ser montados;
b. o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

**10** Tem-se 5 pontos sobre uma reta $r$ e 8 pontos sobre uma reta $r'$ paralela a $r$. Quantos quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos existem?

**11** **(ITA – 95)** Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição.

Calcule a soma de todos esses números.

(A) $5 \cdot 10^6$ e $6 \cdot 10^6$.
(B) $6 \cdot 10^6$ e $7 \cdot 10^6$.
(C) $7 \cdot 10^6$ e $8 \cdot 10^6$.
(D) $9 \cdot 10^6$ e $10 \cdot 10^6$.
(E) $10 \cdot 10^6$ e $11 \cdot 10^6$.

**12** **(ITA)** Considere (P) um polígono regular de $n$ lados. Suponha que os vértices de (P) determinem $2n$ triângulos, cujos lados não são lados de (P). O valor de $n$ é:

(A) 6.
(B) 8.
(C) 10.
(D) 20.
(E) Não existe este polígono.

**13** **(Morgado)** No início de uma festa há 6 rapazes desacompanhados e 10 moças desacompanhadas. Quantos são os estados possíveis no fim da festa?

**14** **(Morgado)** São dados $n$ pontos em círculo. Quantos $n$-*ágonos* (não necessariamente convexos) existem com vértices nesses pontos?

**15** **(José Plínio – PRC)** Quantos números distintos podem ser formados pelo produto de dois números ou mais do multiconjunto {3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7}. (Obs.: Um multiconjunto é um conjunto em que o número de cópias de um elemento é relevante.)

**16** **(Morgado)** Quantas são as permutações simples dos números 1, 2, ..., $n$ nas quais o elemento que ocupa a $k$-ésima posição é maior que $k - 3$, para todo $k$?

**17** Determine o número de triplas ordenadas de conjuntos (A, B, C) tais que: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, ..., 2013\}$ e $A \cap B \cap C = \varnothing$.

**18** Calcule o número de subconjuntos de três elementos escolhidos de $\{2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{2013}\}$ tais que eles formem uma P.G.

**19** **(José Plínio – PRC)** Determine o número de pares ordenados $(a, b)$ tais que MMC $(a, b) = 2^{33557}$:

**20** **(EN – 91)** A partir de um conjunto de 19 atletas, formam 57 times de 4 atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo numero de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo numero $x$ de vezes. O valor de $x$ é?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

## Soluções inteiras e não negativas

### EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** **(AFA)** O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + t = 6$ é igual a:

(A) 84.
(B) 86.
(C) 88.
(D) 90.
(E) N.R.A.

**02** **(EN)** Uma livraria vai doar 15 livros iguais a 4 bibliotecas. Cada biblioteca deve receber ao menos dois livros. O número de modos que esses livros podem ser repartidos nessa doação é igual a:

(A) 1.365.
(B) 840.
(C) 240.
(D) 120.
(E) 35.

**03** **(UESPI)** Um supermercado oferece 10 variedades de sopas em pacotes. De quantas maneiras um consumidor pode escolher 4 pacotes de sopas, se pelo menos 2 pacotes devem ser da mesma variedade?

(A) 500.
(B) 505.
(C) 510.
(D) 515.
(E) 520.

**04** **(UFF)** Quinze (15) pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura. De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas nessa fila?

**05** **(Morgado)** Quantas soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ existem nas quais exatamente 3 incógnitas são nulas? Em quantas pelo menos três são nulas?

**06** **(Morgado)** Qual é o número máximo de termos de um polinômio do grau $p$ com $n$ variáveis?

**07** **(ITT)** O número de soluções inteiras não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 20$ é:

(A) 530.
(B) 534.
(C) 532.
(D) 536.

**08** **(José Plínio – PRC)** De quantas maneiras as letras da palavra INDIVISIBILIDADE podem ser permutadas de modo que duas letras “I” nunca fiquem juntas?

**09** **(EN)** Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA nos quais nenhuma letra ocupa o seu lugar primitivo?

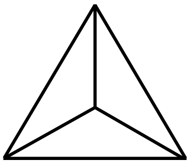
(A) 719.
(B) 265.
(C) 197.
(D) 100.
(E) 249.

### EXERCÍCIOS NÍVEL 2

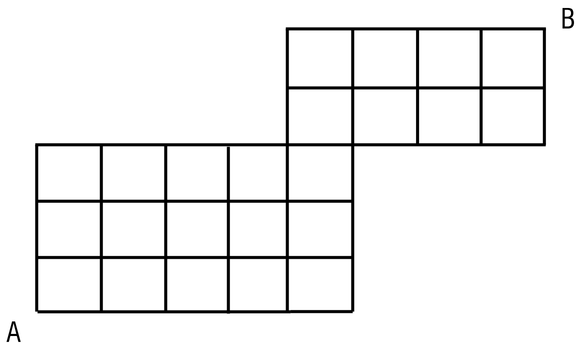
**01** **(OBM)** Dizemos que uma palavra Q é quase anagrama de outra palavra P quando Q pode ser obtida retirando-se uma letra de P e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que P. Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são quase anagramas de CARRO. Quantos são os quase anagramas da palavra BACANA que começam com A?

(A) 48.
(B) 60.
(C) 72.
(D) 96.
(E) 120.

**02** **(Olímpiada de Maio)** Cada um dos seis segmentos da figura ao lado deve ser pintado de uma entre quatro cores de modo que segmentos vizinhos não tenham a mesma cor. De quantas maneiras podemos fazer isso?



**03** **(UFPE – Adaptado)** No mapa abaixo estão esboçadas as ruas de um bairro. As ruas verticais são paralelas entre si e a distância entre duas ruas consecutivas é a mesma; o mesmo acontece com as ruas horizontais. Calcule o número de formas de sair de A e chegar até B percorrendo a menor distância possível.




**04** **(Morgado)** Quantas permutações de 7 letras $A$ e 7 letras $B$, nas quais não há 3 letras $A$ adjacentes, existem?

**05** **(José Plínio – PRC)** Em uma caixa há três tipos de objetos, cada um em uma quantidade de $2n$, de modo que ao final, ao todo, são $6n$ objetos. De quantas maneiras podemos dividi-lo entre duas pessoas de modo que cada um fique com $3n$ objetos?

**06** Dados oito anéis distintos, determine o número de maneiras de usarmos 5 anéis em 4 dedos (o polegar não entra) de uma única mão. (A ordem dos anéis é significante, mas não é necessário que todos os dedos possuam um anel).

**07** Em um elevador entram 6 pessoas. De quantos modos essas 6 pessoas podem saltar no 3º, 5º e 6º andares, de maneira que em cada um desses andares salte pelo menos uma pessoa?

**08** Quantas são as sequências de $n$ termos, todos pertencentes a $\{0,1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

**09** Dado o alfabeto com três letras ($a, b, c$), encontre o número de palavras com $n$ letras contendo um número par de $a$'s.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** **(Morgado)**

a. Qual a soma dos divisores inteiros e positivos de 720?
b. De quantos modos 720 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos?
c. De quantos modos 720 pode ser decomposto em um produto de três inteiros positivos?
d. De quantos modos 144 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos?

**02** **(Morgado)** Nove cientistas trabalham em um projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

a. Qual o número mínimo de cadeados?
b. Na situação do item a., quantas chaves cada cientista deve ter?

**03** Quantos números de 5 algarismos são divisíveis por 3 e também possuem 6 como um de seus algarismos?

**04** **(Morgado)** Escrevem-se números de cincos dígitos (inclusive os começados por zero) em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9, um só cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?

**05** **(AIME)** Dois quadrados de um tabuleiro $7 \times 7$ são pintados de amarelo e o restante de verde. Dizemos que duas colorações são equivalentes se uma puder ser obtida através da outra por uma rotação. Quantas colorações não equivalentes existem?

**06** **(Morgado)** De quantos modos podemos escolher 3 números, não necessariamente distintos, no conjunto $\{1, 2, \ldots ,150\}$ de modo que a soma dos números escolhidos seja divisível por 3? E se os números devessem ser distintos?

**07** **(Morgado)** Para $n \geq k$, determine o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, em que $\#A = n$ e $\#B = k$.

**08** **(OBM)** Um quadrado $4 \times 4$ é dividido em 16 quadrados unitários. Cada um dos 25 vértices desses quadrados deve ser colorido de vermelho ou azul. Ache o número de colorações diferentes tais que cada quadrado unitário possua exatamente dois vértices vermelhos.

**09** De quantos modos se podem sentar em fila 3 russos, 3 ucranianos e 3 bielorrussos, de modo que não fiquem dois compatriotas juntos?

**10** **(Eureka)** Quantas são as sequências de $n$ termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero?

**11** Uma bandeira circular de $n$ setores deve ser pintada utilizando-se $k$ cores. De quantos modos isso pode ser feito, sabendo que regiões adjacentes não podem ser pintadas com a mesma cor?

**12** **(Morgado)** Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferecendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada. De quantos modos ele pode fazer os convites se ele não deseja que um mesmo par de alunos compareça a mais de um jantar?

**13** **(AIME)** Em um torneio, cada jogador jogou exatamente um jogo contra cada um dos outros jogadores. Em cada jogo, o vencedor recebe 1 ponto, o perdedor recebe 0 ponto e, se houve empate, cada um dos jogadores recebe 0,5 ponto. Ao fim do torneio, notou-se que exatamente metade dos pontos conquistados por cada jogador foram ganhos em jogos contra os dez jogadores com menor pontuação. (Em particular, cada um dos dez piores jogadores marcou metade de seus pontos contra os outros nove desses dez). Qual o total de participantes do torneio?

## Introdução

A trigonometria surgiu com o objetivo de estabelecer relações entre ângulos (normalmente fáceis de medir) e comprimentos (às vezes difíceis de mensurar, como no caso da largura de um rio extenso ou do comprimento de um morro/prédio muito alto) em figuras geométricas. Hoje, a trigonometria também tem aplicações como ferramenta puramente algébrica, útil para descrever fenômenos físicos e para simplificações matemáticas.

Os seus objetivos nesta seção incluem memorizar as definições trigonométricas e as relações algébricas entre elas, memorizar transformações trigonométricas e identificar oportunidades de aplicação (usualmente a parte mais difícil e mais importante), resolver equações e inequações trigonométricas e compreender o comportamento das funções trigonométricas e suas inversas.

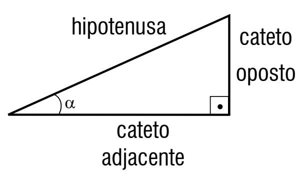
## 1. Definições e relações básicas

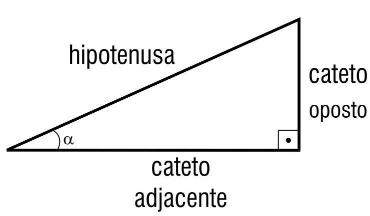
Triângulos retângulos com um ângulo comum $\alpha$ sempre são semelhantes (caso AA) e, portanto, têm a mesma razão entre lados correspondentes. Essas razões recebem nomes especiais, definidos abaixo:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$




$$\csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}, \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

**Obs.:** Em um triângulo qualquer, vale a lei dos senos, que relaciona um ângulo $\alpha$, o lado *a* oposto a esse ângulo e o raio *R* do círculo circunscrito de um triângulo pela fórmula $a = 2R.\text{sen}\alpha$

### 1.1 Relações fundamentais

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

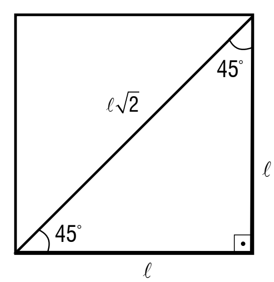
$$\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

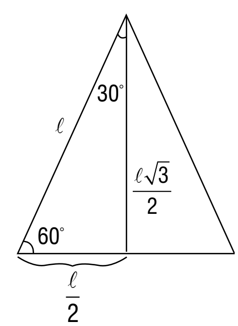
**Demonstração:** Substituindo as definições, vemos que todas essas relações são equivalentes ao teorema de Pitágoras.

### 1.2 Linhas trigonométricas notáveis

| Ângulo | Seno | Cosseno | Tangente |
|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

**Demonstração:** basta aplicar as definições às figuras abaixo:




### 1.3 Relações entre ângulos complementares

$$\text{sen}(90 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90 - \alpha) = \text{sen}\alpha$$

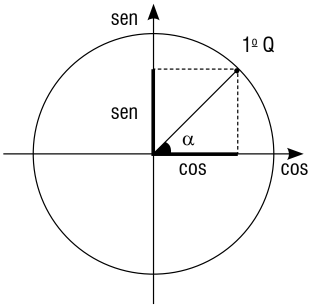
$$\tan(90 - \alpha) = \cot\alpha$$

**Demonstração:** Basta ver que o cateto oposto ao ângulo $\alpha$ é adjacente ao ângulo $90° - \alpha$ .

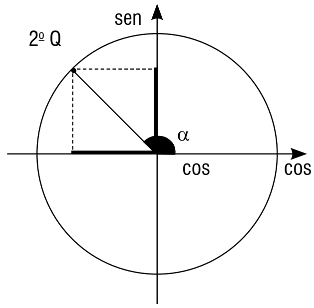
### 1.4 Linhas trigonométricas para ângulos quaisquer (ciclo trigonométrico)

Podemos estender as definições de linhas trigonométricas para ângulos maiores que 90 (ou menores que zero) com auxílio do ciclo trigonométrico (circunferência de raio 1, como nas figuras).

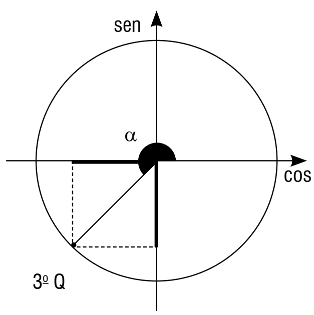
Para ângulos entre 0 e 90 (1º quadrante), temos por definição (fazendo 1º hipotenusa = 1) que o cosseno é a projeção do raio no eixo horizontal e o seno é a projeção no eixo vertical. Estendendo esta ideia, definimos o cosseno (seno) de um ângulo *x* qualquer como o tamanho da projeção no eixo horizontal (vertical) do raio que forma um ângulo *x* com o eixo horizontal. As demais linhas trigonométricas continuam definidas em função do seno e do cosseno como nos ângulos agudos.



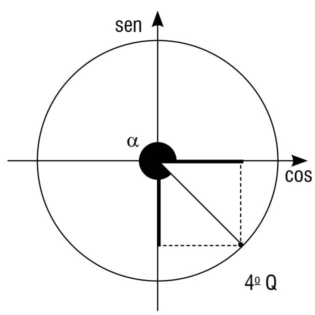

sen > 0
cos > 0




sen > 0
cos < 0




sen < 0
cos < 0




sen < 0
cos > 0

## 1.5 Redução ao 1º quadrante

**Casos principais:**

Ângulos suplementares (2º para 1º quadrante): sen$(180 - x)$ = sen$x$, cos$(180 - x)$ = – cos$x$

Ângulos explementares (3º para 1º quadrante): sen$(180 + x)$= – sen$x$, cos$(180 + x)$ = – cos$x$

Ângulos replementares (4º para 1º quadrante): sen$(360 - x)$= – sen$x$, cos$(360 - x)$ = cos$x$

**Demonstração:** Basta desenhar o ponto no ciclo trigonométrico, observar a orientação dos eixos cosseno/seno e compará-lo (visualmente ou por meio de congruência de triângulos) com o ponto correspondente no 1º quadrante.

**Obs.:** Na prática, a melhor forma de resolver este tipo de problema é usando as fórmulas de adição e subtração de arcos que veremos em 2.1.

## 1.6 Paridade

sen$(-x)$= – sen$x$

cos$(-x)$= cos$x$

tan$(-x)$= – tan$x$

**Demonstração:** São as simetrias (congruências) no ciclo trigonométrico.

**Obs.:** Usaremos, a partir de agora, indiscriminadamente as unidades grau e radiano para representar ângulos (180 graus equivalem a $\pi$ radianos).

## 1.7 Periodicidade

Seno e cosseno têm período $2\pi$: sen$(x + 2\pi)$ = sen$x$ e cos$(x + 2\pi)$ = cos$x$ para todo $x$.

Tangente tem período $\pi$: tan$(x + \pi)$ = tan $x$ para todo $x$.

**Demonstração:** O primeiro caso segue da definição, dado que $x$ e $x+2\pi$ têm a mesma representação no ciclo trigonométrico. O segundo caso segue de $\tan(x+\pi) = \dfrac{\text{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\text{sen}x}{-\cos x} = \tan x$.

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Calcule, para todo $x$, $3(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) - 2(\text{sen}^6 x + \cos^6 x)$.

**Solução:**
Não basta atribuir valores para $x$, já que queremos determinar a expressão para todo $x$. Elevando ao quadrado a relação fundamental, temos que $(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, que nos dá $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\text{sen}^2 x \cos^2 x$ (repare que usamos $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$). Agora, elevando ao cubo a relação fundamental, temos que $(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$, que nos dá $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\text{sen}^2 x \cos^2 x\,(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\text{sen}^2 x \cos^2 x$ (repare que usamos $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$). Daí, a expressão dada é igual a: $3 \cdot (1 - 2\text{sen}^2 x \cos^2 x) - 2 \cdot (1 - 3\text{sen}^2 x \cos^2 x) = 1$.

**02** Simplifique a expressão $\sqrt{\text{sen}^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\text{sen}^2 x}$.

**Solução:**
Quando só temos seno e cosseno, é inevitável usarmos a relação fundamental.
O 1º radical é igual a:

$$\sqrt{(1-\cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} = \sqrt{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + 4\cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{1 + 2\cos^2 x + \cos^4 x} = \sqrt{(1 + \cos^2 x)^2} = 1 + \cos^2 x$$

De forma análoga, temos que o 2º radical é igual a $1 + \text{sen}^2 x$. Portanto, a expressão dada é igual a: $(1 + \cos^2 x) - (1 + \text{sen}^2 x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x$.

**03** Sendo $\tan\alpha = \dfrac{4}{15}$, calcule $F = \dfrac{5\text{sen}\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\text{sen}\alpha}$.

**Solução:**
Em F, basta dividir o numerador e o denominador por $\cos\alpha$:

$$F = \frac{5\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 7\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{6\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - 3\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{5\tan\alpha + 7}{6 - 3\tan\alpha} = \frac{5\cdot\dfrac{4}{15} + 7}{6 - 3\cdot\dfrac{4}{15}} = \frac{125}{78}$$

**04** Sabendo que $9\cos^2 x - 5\,\text{sen}x \cdot \cos x + 4\,\text{sen}^2 x = 3$, determine tan$x$.

**Solução:** Usando que $3 = 3\,(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)$, observamos que essa é uma equação homogênea de grau 2 em sen$x$, cos$x$ (reveja o conceito na apostila de álgebra básica). Dividindo por $\cos^2 x$, obtemos $9 - 5\tan x + 4\tan^2 x = 3\sec^2 x$ $(= 3 + 3\tan^2 x)$, ou seja, $\tan^2 x - 5\tan x + 6 = 0$. Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos tan$x$ = 2 ou tan $x$ = 3.

**05** Simplifique a expressão sen$(270° + a)$ + sen$(450° - a)$.

**Solução:** Escrevendo $270 = 3 \cdot 90°$ e $450 = 5 \cdot 90°$, podemos desenhar os pontos no ciclo trigonométrico e concluir que: sen$(270° + a)$ = –cos$a$ e sen $(450° - a)$ = sen$(90° - a)$ = cos$a$. Logo, a expressão vale zero.

# 2. Transformações trigonométricas

Para manipular expressões trigonométricas (simplificar expressões, resolver equações/inequações), é importante compreender e memorizar transformações importantes como adição/subtração de arcos, arco duplo, arco metade, fatoração (transformação soma em produto), transformação produto em soma e outras que veremos a seguir.

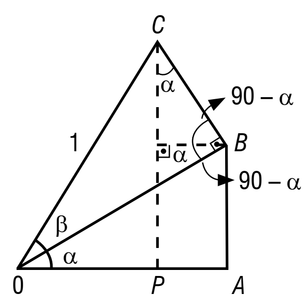
## 2.1 Adição e subração de arcos

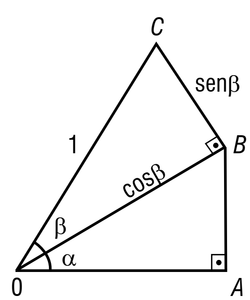
$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

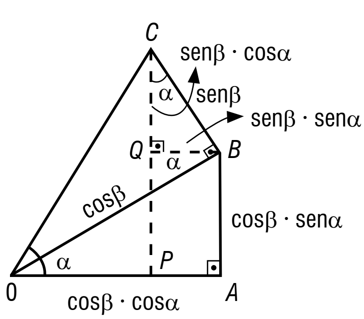
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

**Demonstração:** Inicialmente, sobreponha um triângulo retângulo de ângulo *a* a um de ângulo *b* e hipotenusa 1 como na sequência de figuras abaixo. Em seguida, pense no seno como a projeção da hipotenusa no cateto separado e no cosseno como a projeção no cateto colado para obter as seguintes relações:



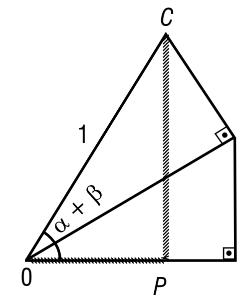




No triângulo *OBC*, temos: $OB = \cos\beta$ e $BC = \text{sen}\beta$.

No triângulo *OAB*, temos: $OA = \cos\alpha \cdot \text{hipotenusa} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ e $AB = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta$.

No triângulo *QBC*, temos: $BQ = \text{hipotenusa} \cdot \text{sen}\alpha = \text{sen}\beta \cdot \text{sen}\alpha$ e $QC = \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha$.

Logo, olhando para o triângulo *OPC*, temos:




$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{PC}{1} = AB + QC = \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OP}{1} = OA - BQ = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta$$

Dividindo uma pela outra e, em seguida, dividindo numerador e denominador por cos*a* · cos*b*:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \dfrac{\text{sen}\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Para as fórmulas de subtração, basta escrever $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ e usar paridade.

**Obs.:** Como usamos somente a definição de seno e cosseno como projeções, esta demonstração funciona mesmo que $\alpha$ e $\beta$ não sejam ângulos agudos.

## 2.2 Arco duplo

$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 a$

$\text{sen}(2a) = 2\text{sen}a \cdot \cos a$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2 a}$$

**Demonstração:** Basta tomar *b* = *a* na fórmula de adição de arcos.

**Observação:** De forma similar, temos:

$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$, $\text{sen}(3a) = -4\text{sen}^3 a + 3\text{sen}a$ e

$$\tan(3a) = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

## 2.3 Arco metade

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\text{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

**Demonstração:** Trocando 2*a* por *a* na fórmula do cosseno do arco duplo, obtemos as duas primeiras fórmulas. Dividindo uma pela outra, obtemos a terceira.

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 \Rightarrow \cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$$

$$\cos a = 1 - 2\text{sen}^2\frac{a}{2} \Rightarrow \text{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$$

**Obs.:** Em algumas situações, é interessante utilizar essas fórmulas ao contrário, fatorando expressões da forma 1 ± cos*a* $\left(\text{por exemplo, } 1-\cos a = 2\text{sen}^2\frac{a}{2}\right)$ ou 1 ± sen*a* (neste caso, primeiro faz-se sen*a* = cos(90 – α)).

## 2.4 Fatoração (ou transformação soma em produto)

Fatorar (transformar soma em produto) é uma das principais ferramentas algébricas para simplificação de expressões e resolução de equações, de forma que estes resultados merecem atenção especial.

$$\text{sen}x \pm \text{sen}\, y = 2\text{sen}\frac{x \pm y}{2} \cdot \cos\frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = +\,2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -\,2\text{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \text{sen}\frac{x-y}{2}$$

$$\tan a \pm \tan b = \text{sen}(a \pm b) \cdot \sec a \cdot \sec b$$

$$\cot a \pm \cot b = \text{sen}(a \pm b) \cdot \csc a \cdot \csc b$$

**Demonstração:** Fazendo $x = a + b$, $y = a - b$ em 2.1., temos

$a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$ e:

$$\text{sen}x + \text{sen}y = \text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2\text{sen}a \cdot \cos b =$$

$$= 2\text{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b =$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = \cos(a+b) - \cos(a-b) = -\,2\text{sen}a \cdot \text{sen}b =$$

$$= -\,2\text{sen}\frac{x+y}{2} \cdot \text{sen}\frac{x-y}{2}$$

Trocando *x* por – *x*, obtemos as demais fórmulas.

Substituindo a definição de tangente e cotangente:

$$\tan a + \tan b = \frac{\text{sen}a}{\cos a} + \frac{\text{sen}b}{\cos b} = \frac{\text{sen}a \cdot \cos b + \text{sen}b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} =$$

$$= \text{sen}(a+b) \cdot \sec a \cdot \sec b$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\text{sen}a} + \frac{\cos b}{\text{sen}b} = \frac{\text{sen}b \cdot \cos a + \text{sen}a \cdot \cos b}{\text{sen}a \cdot \text{sen}b} =$$

$$= \text{sen}(a+b) \cdot \csc a \cdot \csc b$$

Trocando *b* por – *b*, obtemos as demais fórmulas.

**Obs.:** Para fatorar expressões com linhas trigonométricas diferentes (por exemplo, sen*a* + cos*b*), basta transformar cosseno em seno (por exemplo, fazendo cos*b* = sen(90 – *b*)) e usar 2.4.

## 2.5 Transformação produto em soma

Em algumas ocasiões (por exemplo, quando um produto está sendo somado a uma parcela) é interessante fazer o contrário da fatoração, i.e., transformar um produto em uma soma.

$$\text{sen}a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot \left(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\right)$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\text{sen}a \cdot \text{sen}b = -\frac{1}{2} \cdot \left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$

**Demonstração:** basta observar as contas intermediárias da demonstração do teorema 10.

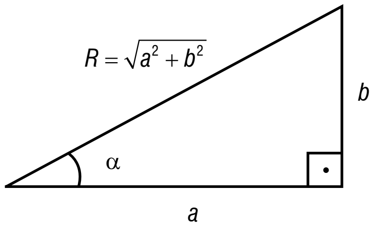
## 2.6 Truque do triângulo retângulo

Para lidar com combinações lineares de senos e cossenos de um mesmo arco (ex.: sen*x*+ cos*y*, 3sen*x* + 2cos*x*, 5sen*x* + 12cos*x*, etc.) reescrevemos a expressão como:

$a \cdot \text{sen}x + b \cdot \cos x = R \cdot \text{sen}(x + \alpha)$, em que

$R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

**Demonstração:** Considerando um triângulo retângulo de catetos *a* e *b* como na figura abaixo:




Temos $a = R \cdot \cos\alpha$, $b = R \cdot \text{sen}\alpha$

Logo,

$a \cdot \text{sen}x + b \cdot \cos x = R \cdot (\text{sen}x \cdot \cos\alpha + \text{sen}\alpha \cdot \cos x) =$

$= R \cdot \text{sen}(x + a)$

**Obs.:** Embora a intuição geométrica utilizada só funcione para ângulos agudos, é possível demonstrar o resultado no caso geral. Como $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, basta escolher α tal que $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e substituir.

## 2.7 Parametrização em função do arco metade

É possível escrever todas as seis linhas trigonométricas de um ângulo *x* em função de uma única variável $t = \tan\frac{x}{2}$. Desta forma, todas as expressões trigonométricas podem ser transformadas em frações envolvendo apenas polinômios (nem sempre de grau baixo).

$$\text{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

**Demonstração:** A primeira expressão é a mais difícil de demonstrar: partindo do seno do arco duplo, multiplicando em cima e embaixo por cosseno para forçar o aparecimento da tangente, e usando a relação fundamental:

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

A segunda expressão é simplesmente a tangente do arco duplo, e a terceira expressão pode ser obtida dividindo-se a primeira pela segunda.

## 2.8 Soma de senos/cossenos de arcos em progressão aritmética

$$C = \cos b + \cos(b+r) + \cos(b+2r) + \ldots + \cos(b+nr) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left((n+1)\cdot\frac{r}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\cdot\cos\left(b+n\cdot\frac{r}{2}\right)$$

$$S = \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(b+r) + \operatorname{sen}(b+2r) + \ldots + \operatorname{sen}(b+nr) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left((n+1)\cdot\frac{r}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\cdot\operatorname{sen}\left(b+n\cdot\frac{r}{2}\right)$$

**Demonstração:** Uma técnica geral para resolver somas fechadas é tentar encontrar uma "soma telescópica", i.e., tentar quebrar cada parcela como uma diferença de termos sucessivos se cancelem.

Neste caso, podemos multiplicar a primeira equação por $\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$ e transformar produto em soma.

$$C\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\cdot\cos(b+r) + \ldots$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\cdot\cos(b+nr)$$

$$2C\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(b+\frac{r}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(b-\frac{r}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(b+\frac{3r}{2}\right)$$

$$-\operatorname{sen}\left(b+\frac{r}{2}\right) + \ldots + \operatorname{sen}\left(b+\frac{(2n+1)r}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(b+\frac{(2n-1)r}{2}\right)$$

Cancelando os termos comuns:

$$2C\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(b+(2n+1)\frac{r}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(b-\frac{r}{2}\right)$$

Transformando o lado direito em produto:

$$C = \frac{sen\left((n+1)\cdot\frac{r}{2}\right)}{sen\left(\frac{r}{2}\right)}\cdot\cos\left(b+n\cdot\frac{r}{2}\right)$$

Trocando $b$ por $90 - b$ e usando 1.2, temos:

$$S(b) = C(90-b) = \frac{\operatorname{sen}\left((n+1)\cdot\frac{r}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\cdot\cos\left(90-b+n\cdot\frac{r}{2}\right) =$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left((n+1)\cdot\frac{r}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\cdot\operatorname{sen}\left(b+n\cdot\frac{r}{2}\right)$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Calcule sen 15º e sen 75º:

**Solução:**
Utilizando as fórmulas de subtração e adição de arcos, temos:

$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Analogamente, $\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**Obs.:** Das relações entre ângulos complementares (1.2.), obtemos $\cos 15^\circ = 75^\circ$ e $\cos 75^\circ = \operatorname{sen} 15^\circ$.

**02** Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{3}{4}$, determine os possíveis valores de $\operatorname{sen}(2x)$ e $\tan(2x)$.

**Solução:**
Elevando a expressão dada ao quadrado para que apareça o termo $2\operatorname{sen} x\cdot\cos x$ da fórmula do $\operatorname{sen}(2x)$, obtemos

$\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cdot\cos x + \cos^2 x = \frac{9}{16} \Rightarrow 1 + \operatorname{sen} 2x = \frac{-7}{6}$.

Para calcular a tangente, basta calcular o valor de $\cos 2x$ pela relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 1$$

$$\cos^2 2x = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256}$$

$$|\cos 2x| = \frac{\sqrt{207}}{16}$$

$$|\tan 2x| = \left|\frac{\frac{-7}{16}}{\frac{\sqrt{207}}{16}}\right| = \frac{7\sqrt{207}}{207}$$

**03** **(Lei das tangentes)** Em um triângulo não retângulo, prove que são iguais a soma e o produto das tangentes dos ângulos internos.

**Solução:**
Como $A$, $B$ e $C$ são ângulos de um mesmo triângulo, temos $A + B + C = 180^\circ$ (Em todo problema com esse dado '$A$, $B$ e $C$ ângulos de um triângulo', essa é obviamente a primeira ideia). Daí $A + B = 180^\circ - C$ e, aplicando a função tangente dos dois lados, temos que $\tan(A + B) = \tan(180^\circ - C)$, logo $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$. Eliminando o denominador, chegamos a $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

**04** Sendo $A$, $B$ e $C$ ângulos de um mesmo triângulo, prove que:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

**Solução:**
Assim como no exemplo anterior, temos $A + B = 180° - C$, o que dá sen $C$ = sen$(A + B)$. Então: sen $A$ + sen $B$ + sen $C$ = sen $A$ + sen $B$ + sen$(A + B)$ =

$$= 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) =$$

$$= 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)(*).$$

É fácil ver que $\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{sen}\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$. Além disso,

$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}$, ou seja, $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$.
Substituindo em (*), temos o resultado.

## 3. Equações e inequações

A primeira etapa para resolver equações ou inequações trigonométricas é simplificar as expressões por meio de transformações, com o objetivo de chegar a uma igualdade ou desigualdade simples entre linhas trigonométricas iguais.

### 3.1 Igualdade entre mesmas linhas trigonométricas

$\cos x = \cos y \Rightarrow x = \pm y + 2\kappa\pi,\ \kappa \in Z$

$\tan x = \tan y \Rightarrow x = y + \kappa\pi,\ \kappa \in Z$

$\text{sen}\, x = \text{sen}\, y \Rightarrow x = y + 2\kappa\pi$ ou $x = -y + (2\kappa + 1)\pi,\ \kappa \in Z$

**Demonstrações:** Observando o ciclo trigonométrico e o resultado sobre redução ao 1º quadrante:

Cossenos iguais implicam ângulos congruentes $(x - y = 2\kappa\pi)$ ou replementares $(x + y = 2\kappa\pi)$.

Tangentes iguais implicam ângulos congruentes $(x - y = 2\kappa\pi)$ ou explementares $(x - y = \pi + 2\kappa\pi)$. Combinando as expressões, obtemos $x = y$, $x = y + \pi$, $x = y + 2\pi$, etc.

Senos iguais implicam ângulos congruentes $(x - y = 2\kappa\pi)$ ou suplementares $x + y = (2\kappa + 1)\pi$.

### 3.2 Caso geral de equações trigonométricas

No caso geral, deve-se sempre utilizar substituições, transformações e reduções de quadrante para se obter uma situação de igualdade entre mesmas linhas trigonométricas.

**Ex.:** para resolver sen $x$ = cos $2x$, podemos inicialmente escrever $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; para encontrar a solução de $\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\, x + 2 = 0$, fazemos a substituição $t$ = sen $x$; e para resolver uma equação do tipo sen $x$ + sen $3x$ = cos $x$, começamos por transformar o lado esquerdo em um produto.

### 3.3 Inequações trigonométricas

Para casos simples (ex: inequações em que os argumentos das funções estão limitados ao intervalo $[0, 2\pi]$), basta desenhar o ciclo trigonométrico e identificar os intervalos que funcionam.

Para o caso geral, a ideia é deixar um lado igual a zero, fatorar o outro lado e utilizar quatro sinais para lidar com cada fator conforme resultados abaixo:

$$\text{sen}\, z > 0 \Leftrightarrow z \in \bigcup_{\kappa\in\mathbb{Z}} (2\kappa\pi, \pi + 2\kappa\pi)$$

(i.e., $z \in \ldots \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \ldots$)

$$\cos z > 0 \Leftrightarrow z \in \bigcup_{\kappa\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi, \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right)$$

(i.e., $z \in \ldots \cup \left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \ldots$)

#### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Utilize a equação sen $3x$ = sen $2x$ para obter o valor de cos36°.

**Solução:**
Veja que $x = 36°$ é solução dessa equação, pois sen108° = sen72°.
Inicialmente, vamos provar que sen$3x$ = 3sen$x$ – 4sen$^3 x$:
sen3 $x$ = sen$(2x + x)$ = sen2 $x$ cos $x$ + sen $x$ cos $2x$ = 2sen $x$ cos $x$ cos $x$ + sen $x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$ = 2sen $x(1 - \text{sen}^2 x)$ + sen $x(1 - 2\text{sen}^2 x)$ = 3sen $x$ – 4sen$^3 x$.

Agora, no problema, temos a equação 3sen $x$ – 4sen$^3 x$ = 2sen $x$ cos $x$. Para sen $x \neq 0$, temos $3 - 4\text{sen}^2 x = 2\cos x \Leftrightarrow 3 - 4(1 - \cos^2 x) = 2\cos x \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$. Como cos36° > 0, segue que $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**Obs.:** Em alguns problemas, é conveniente saber de antemão o valor de cos36°.

**02** Resolva a equação $\text{sen}x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

**Solução:**
Esse problema pode ser resolvido de outra forma, mas a melhor solução é utilizando o truque do triângulo retângulo. Dividindo ambos os lados da equação por 2, temos que $\frac{1}{2}\text{sen}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$, ou seja, $\cos\frac{\pi}{3}\text{sen}x + \text{sen}\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2}$. Usando a fórmula de seno da soma, temos

$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, que dá $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, para $k$ inteiro. Então $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| k \in Z\right\}$.

**03** Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem sen$(3x)$ < cos$(4x)$.

**Solução:**
Colocando tudo no lado esquerdo e transformando seno em cosseno (usando 1.2) temos:

$$\text{sen}(3x) - \cos(4x) < 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \cos(4x) < 0$$

Fatorando o lado esquerdo da desigualdade (usando 2.4):

$$-2\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-3x+4x\right)\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-3x-4x\right)\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{2}\right)>0$$

Fazendo o quadro de sinais, concluímos que a expressão será negativa em dois casos.

$$\text{Caso 1: sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)>0 \text{ e sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7x}{2}\right)>0.\text{ Usando 3.3:}$$

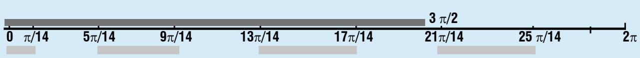
$$\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\in\ldots\cup(-2\pi,-\pi)\cup(0,\pi)\cup(2\pi,3\pi)\cup\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\ldots\cup\left(-\frac{9\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{7\pi}{2},\frac{11\pi}{2}\right)\cup\ldots$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{7x}{2}\in\ldots\cup(-2\pi,-\pi)\cup(0,\pi)\cup(2\pi,3\pi)\cup\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\ldots\cup\left(+\frac{17\pi}{14},+\frac{13\pi}{14}\right)\cup\left(+\frac{9\pi}{14},+\frac{5\pi}{14}\right)\cup\left(+\frac{\pi}{14},-\frac{3\pi}{14}\right)\cup\ldots$$

Para encontrar a interseção, desenhamos a reta numérica de 0 até $2\pi$.




Logo, o conjunto solução no 1º caso é:

$$S_1=\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right)\cup\left(\frac{13\pi}{14},\frac{17\pi}{14}\right)$$

$$\text{Caso 2: sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)<0 \text{ e sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7x}{2}\right)<0$$

Para o 2º caso, olhamos os complementos das partes hachuradas na reta numérica: $S_2=\left(\frac{25\pi}{14},2\pi\right]$

Logo, a resposta do problema é

$$S=S_1\cup S_2=\left(0,\frac{\pi}{14}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{14},\frac{9\pi}{14}\right)\cup\left(\frac{13\pi}{14},\frac{17\pi}{14}\right)\cup\left(\frac{25\pi}{14},2\pi\right]$$

# 4. Funções trigonométricas

Como definimos seno e cosseno de maneira única para todo número real $x$, podemos definir funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\text{sen}\,x$. E, restringindo domínios de forma apropriada, podemos definir funções para todas as linhas trigonométricas:

$$\tan:\left\{x\in\mathbb{R}; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ \cot:\{x\in\mathbb{R}; x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$$

$$\sec:\left\{x\in\mathbb{R}; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ \csc:\{x\in\mathbb{R}; x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$$

## 4.1 Período

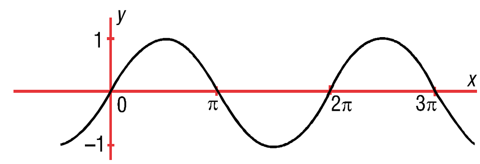
| Tipo de função | Período |
|---|---|
| $\text{sen}(ax+b), \cos(ax+b),$ $\sec(ax+b), \csc(ax+b)$ | $\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ |
| $\tan(ax+b), \cot(ax+b)$ | $\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ |

**Demonstração:** Basta substituir e usar as expressões de redução ao 1º quadrante.

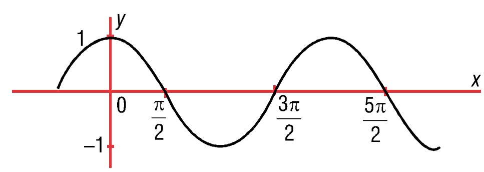
## 4.2 Gráfico

Para esboçar o gráfico de uma função trigonométrica, é aconselhável determinar, se possível, o período, as raízes, os pontos de máximo/mínimo e o comportamento próximo aos pontos fora do domínio da função. Os gráficos das funções principais são:

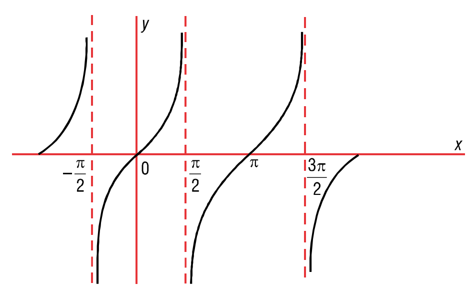
**Seno:**




**Cosseno:**




**Tangente:**




## 4.3 Inversa

Restringindo o domínio e o contra-domínio das funções trigonométricas, pode-se garantir que elas sejam bijetoras. Por exemplo, as funções $\text{sen}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ e $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ são todas bijetoras e contínuas. Definem-se as funções trigonométricas inversas como:

$\text{arc sen}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, definida por $y=\text{arc sen}\,x\Leftrightarrow x=\text{sen}\,y$

$\text{arc cos}:[-1,1]\to[0,\pi]$, definida por $y=\text{arc cos}\,x\Leftrightarrow x=\cos y$

$\text{arc tan}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, definida por $y=\text{arc tan}\,x\Leftrightarrow x=\tan y$

**Obs.:** de forma similar, define-se arc cot, arc sec e arc csc com contra-domínios $(0,\pi)$, $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, e $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$ respectivamente.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**07** Calcule $x = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.

**Solução:**

Defina $\begin{cases} \alpha = \arctan\frac{1}{2} \\ \beta = \arctan\frac{1}{3} \end{cases}$ (na grande maioria dos problemas que envolvem funções inversas trigonométricas, isso é uma boa ideia!). Essas definições nos dão as seguintes informações: $\begin{cases} \tan\alpha = \frac{1}{2} \\ \tan\beta = \frac{1}{3} \end{cases}$ e $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Então, $x = \alpha + \beta \Rightarrow \tan x = \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

Como $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, temos que $x = \alpha + \beta \in (-\pi, \pi)$. Como $\tan x$

$\tan x = 1$, temos que $x = \frac{\pi}{4}$.

## Definições, relações básicas e adição de arcos

**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

**01** **(EFOMM-1999)** A soma das raízes da equação $4 \cdot \cos^2\theta = 1$ é: $(0 < \theta < \pi)$

(A) $\pi$.
(B) $\frac{3\pi}{2}$.
(C) $\frac{\pi}{4}$.
(D) $\frac{\pi}{7}$.
(E) $\frac{\pi}{2}$.

**02** **(EN-2000)** Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o triplo de um dos catetos. Considerando o ângulo oposto ao menor lado, podemos afirmar que $\tan\alpha + \cos\alpha$ é igual a:

(A) $\frac{5}{6}$.
(B) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$.
(C) $\sqrt{2}$.
(D) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$.
(E) $\frac{12+\sqrt{2}}{4}$.

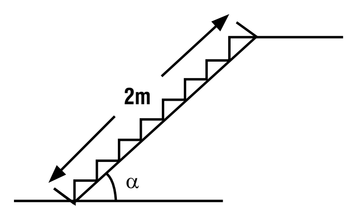
**03** **(EFOMM-96)** Sabendo que $A = 6\,tg\frac{\pi}{6} + 4\,sen\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6}$, então o valor de $\sqrt{A}$ é igual a:

(A) $\frac{3\sqrt[4]{12}}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$
(D) $\frac{\sqrt[6]{12}}{4}$
(E) $\sqrt{3}$

**04** **(AFA-2000)** Simplificando a expressão $\dfrac{(\text{cossec } x)^2 - 2}{(\text{cossec } x)^2}$, para $\text{cossec } x \neq 0$, obtemos:

(A) $\cos x$
(B) $\cos^2 x$
(C) $\text{sen}^2 x$
(D) $\cos 2x$

**05** **(AFA-2000)** O acesso ao mezanino de uma construção deve ser feito por uma rampa plana, com 2 m de comprimento. O ângulo $\alpha$ que essa rampa faz com o piso inferior (conforme figura) para que nela sejam construídos 8 degraus, cada um com 21,6 cm de altura, é, aproximadamente, igual a:




(A) 15º
(B) 30º
(C) 45º
(D) 60º

**06** A soma de dois arcos é 400º. Calcule seus arcos sabendo que seus cossenos são números simétricos.

**07** Simplificar as expressões:

(A) $\cos(90° + a) \cdot \cos(180° - a) + \text{sen}(180° + a) \cdot (90° + a)$;
(B) $\text{sen}(360° + a) + \cos a \cdot \cos(90° - a) + \text{sen}(90° - a) \cdot \text{sen}(360° - a)$;
(C) $\dfrac{\text{sen}(-a)}{\text{sen}(180° + a)} - \dfrac{\tan(90° + a)}{\cot a} + \dfrac{\cos a}{\text{sen}(90° + a)}$.
(D) $\dfrac{\cos(90° + a) \cdot \sec(-a) \cdot \tan(180° - a)}{\sec(360° + a) \cdot \text{sen}(180° + a) \cdot \cot(90° - a)}$.
(E) $\dfrac{\text{sen}(270° - a) \cdot \tan(180° - b)}{\cot(b - 270°) \cdot \cos(540° + a)} + \dfrac{\cot(450° - a) \cdot \text{sen}(c - 90°)}{\cos(180° + c) \cdot \tan(1260° + a)}$

**08** Calcule para $x = \frac{15\pi}{4}$ o valor de:

(A) $3\sec^2 x + \text{sen}^2 x - 2\tan x + \cos^2 x$
(B) $2\text{sen}^2 x - 2\tan x + \sec^2 x$

**09** Se sen $x$ + sen² $x$ = 1, calcule $E = \cos^2 x + \cos^4 x$.

**10** **(EFOMM-02)** O resultado da simplificação da expressão $\sec^2 x - \dfrac{\text{tg } x \cdot \text{cotg } x}{\text{cossec}^2 x - 1}$ é:

(A) sen $x$.
(B) cos $x$.
(C) –1.
(D) 1.
(E) 0.

**11** Verifique as identidades:

(A) $\text{sen}^6 x + \cos^6 x - 2\text{sen}^4 x - \cos^4 x + \text{sen}^2 x = 0$
(B) $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^2 x + \tan^4 x$
(C) $\dfrac{1-2\cos^2 x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} = \tan x - \cot x$
(D) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\csc x - \text{sen}\, x} = \tan^3 x$

**12** Mostre que se $\tan^2 a = 1 + 2\tan^2 b$, então, $\cos^2 b = 2\cos^2 a$.

**13** Se sen $x$ . cos $x$ = $m$, determine em função de $m$:

(A) $y = \text{sen}\, x + \cos x$
(B) $y = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$

**14** Determine o valor de $\dfrac{\sec x + \csc x}{1+\tan x}$ sabendo que $\text{sen} x = \dfrac{1}{5}$.

**15** Determine sen $x$ e tan $x$ sabendo que $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ e $x \in 3°$ Q.

**16** **(EFOMM-1998)** Resolvendo sen 15° – sen 75°, encontra-se:

(A) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(C) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.
(D) $\sqrt{2}$.
(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** **(EFOMM-2000)** As raízes da equação $2x^2 + 3x - 1 = 0$ são tg $B$ e tg $C$, sendo $B$ e $C$ ângulos de um triângulo. O ângulo $A$ desse triângulo vale:

(A) 30°.
(B) 45°.
(C) 60°.
(D) 90°.
(E) 120°.

**02** **(AFA-1998)** O valor da expressão cos 35° (sen 25° + cos 55°) + sen 35° (cos 25° – sen 55°) + $\dfrac{tg\ 31° + tg\ 14°}{1 - tg\ 31° \cdot tg\ 14°}$ é:

(A) $\dfrac{\sqrt{2}-3}{2}$
(B) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$
(C) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$
(D) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$

**03** **(ENEM-2001)** Se $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ e $\cos^2 x - \text{sen}^2 = \dfrac{2}{5}$, o valor de $\cos^2 x + 4\,\text{sen}^2 x + 5\,\text{sen}\, x \cos x$ é:

(A) $13+\sqrt{21}$
(B) $\dfrac{17+3\sqrt{21}}{10}$
(C) $\dfrac{19+5\sqrt{21}}{10}$
(D) $\dfrac{21+2\sqrt{21}}{3}$

**04** Se $a + b = 135°$, mostre que $(1 + \cot a)(1 + \cot b) = 2$.

**05** Se $\tan x = \dfrac{a}{b}$ e $\tan y = \dfrac{b-a}{b+a}$, mostre que $x + y = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

**06** Elimine $x$ e $y$ nas equações: $\begin{cases} \tan x + \tan y = \tan a \\ \cot x + \cot y = \cot b \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

**07** Demonstrar que: $\dfrac{\text{sen}\, x + \cos x}{\cos x - \text{sen}\, x} = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

**08** Dados os arcos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ todos do primeiro quadrante, e tais que tan $\hat{A}$ = 1/3, tan $\hat{B}$ = 1/5, tan $\hat{C}$ = 1/7 e tan $\hat{D}$ = 1/8, verificar se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \pi/4$.

**09** **(ITA-77)** Considere um triângulo $ABC$ cujos ângulos internos $A$, $B$, $C$ verificam a relação $\text{sen}\, A = \tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)$. Então, podemos afirmar que:

(A) Com os dados do problema, não podemos determinar $A$ nem $B$ nem $C$.
(B) Um desses ângulos é reto.
(C) $A = \dfrac{\pi}{6}$, $B + C = \dfrac{5\pi}{6}$
(D) $A = \dfrac{\pi}{6}$, $B = \dfrac{5\pi}{12}$, $C = \dfrac{5\pi}{12}$
(E) n.d.a.

**10** **(ITA-79)** Se $a$ e $b$ são ângulos complementares, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}, 0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b} = \sqrt{3}$, então $\text{sen}\left(\dfrac{3a}{5}\right) + \cos(3b)$ é igual a:

(A) $\sqrt{3}$
(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(C) $\sqrt{2}$
(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(E) 1

**11** **(ITA-81)** Seja $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathfrak{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \csc^2 x}$. Se $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ é tal que $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$, então $f(\alpha)$ é igual a:

(A) $\dfrac{a+b}{2}$
(B) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$
(C) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$
(D) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$
(E) nenhuma das anteriores

**12** Ache a relação que deve existir entre os arcos $x$ e $y$ para que $\tan^2 x = \frac{b}{a}$ e $\sec^2 y = \frac{a+b}{a}$.

**13** Se $\frac{a}{\operatorname{sen} x} = \frac{b}{\cos x}$, calcule, em função de $a$ e $b$, o valor de $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$.

**14** Determinar a condição que deve ser imposta a $b$ para que seja possível o sistema $\begin{cases} \tan x + \tan y = 2 \\ \sec^2 x + \sec^2 y = b \end{cases}$

**15** Calcule $\tan x$ em $7\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 5$.

**16** Determine $k$ de modo que os ângulos agudos de um triângulo retângulo sejam raízes da equação $3\tan x + k^2 \cot x = 4k$ e calcule os dois ângulos agudos.

**17** Eliminar $x$ e $y$ entre as equações: $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = a \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = b \\ \cos x = c \end{cases}$

**18** Eliminar $x$ e $y$ entre as equações: $\begin{cases} a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x = m \\ b\operatorname{sen}^2 y + a\cos^2 y = n \\ a\tan x = b\tan y \end{cases}$

**19** Sendo $\tan a$ e $\tan b$ as raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule o valor da expressão:

$$E = \operatorname{sen}^2(a+b) + p \cdot \operatorname{sen}(a+b)\cos(a+b) + q \cdot \cos^2(a+b)$$

**20** Simplifique: $\frac{\tan 1° \cdot \tan 2° \cdot \tan 3° \cdot \dots \cdot \tan 89°}{\cos 4° + \cos 8° + \cos 12° + \dots + \cos 356°}$.

**21** **(ITA)** Seja $a$ real com $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

A expressão $\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+a\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right] \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ é idêntica a:

(A) $\frac{\sqrt{2}\cot^2 a}{1+\cot^2 a}$

(B) $\frac{\sqrt{2}\cot a}{1+\cot^2 a}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{1+\cot^2 a}$

(D) $\frac{1+3\cot a}{2}$

(E) $\frac{1+2\cot a}{1+\cot a}$

## Transformações trigonométricas

### EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** **(EFOMM-96)** Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{5} + \cos x$, então $\operatorname{sen} 2x$ vale:

(A) $\frac{25}{24}$

(B) $\frac{9}{25}$

(C) $\frac{-9}{25}$

(D) $\frac{-2}{5}$

(E) $\frac{24}{25}$

**02** **(EFOMM-94)** Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x = 3\operatorname{sen} 2x$, então $\operatorname{tg} 2x$ vale:

(A) 0

(B) 1

(C) $\pi$

(D) $\sqrt{6}$

(E) $\sqrt{35}$

**03** **(EFOMM-01)** O valor de $(\operatorname{tg} 10° + \operatorname{cotg} 10°)\operatorname{sen} 20°$ é:

(A) 0,5

(B) 1

(C) 2

(D) 2,5

(E) 4

**04** **(EFOMM-1995)** Se $\operatorname{sen}2a = x$ e $\operatorname{sen}2b = y$, então $\operatorname{sen}(a+b)\cos(a-b)$ é igual a:

(A) $x + y$

(B) $2(x + y)$

(C) $x - y$

(D) $x^2 + y^2$

(E) $\frac{x+y}{2}$

**05** **(ITA-99)** Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ é tal que $4\tan^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de $\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x)$ é:

(A) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

(C) $\frac{3\sqrt{15}}{8}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

**06** **(EFOMM-1999)** Sabendo que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e que $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, o valor de $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - \operatorname{sen}(\pi - 2\theta)$ é igual a:

(A) $\frac{9}{25}$.

(B) $-\frac{39}{25}$.

(C) $2-\sqrt{2}$.

(D) $\frac{4+\sqrt{5}}{25}$.

(E) $\frac{3-\sqrt{2}}{9}$.

**07** **(AFA-1999)** O valor da expressão $\cos 15^0 + \operatorname{sen} 105^0$ é

(A) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

**08** **(EFOMM-01)** O valor numérico de $y = \text{sen}\frac{13\pi}{12} \cdot \cos\frac{11\pi}{12}$ é:

(A) $\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$
(B) $\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$
(C) $\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$
(D) $\text{tg}^2\frac{\pi}{11}$
(E) $\frac{\pi}{12}$

**09** **(ITA -2001)** Sendo $\alpha$ e $\beta$ os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\text{sen}^2(2\beta) - 2\cos(2\beta) = 0$, então sen$\alpha$ é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(B) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$.
(C) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$.
(D) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$.
(E) zero.

**10** **(ITA-87)** O valor de $x > 0$ que satisfaz a equação $\sqrt{x} = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ é:

(A) $x = 4\sqrt{3}$.
(B) $x = 5 - 4\sqrt{3}$.
(C) $x = 7 - \sqrt{3}$.
(D) $x = 7 - 4\sqrt{3}$.
(E) $x = 9 - 4\sqrt{3}$.

**11** **(ITA-87)** Suponha $x$ e $y$ números reais, tais que $\begin{cases} \tan(x-y) = \sqrt{3} \\ \tan x \cdot \tan y = 1 \end{cases}$. Calcule o módulo do número $S = \tan x + \tan y$.

**12** Calcule $\tan\frac{\neq}{8}$ e $\tan\frac{3\neq}{8}$.

**13** Prove que para todo arco $x$ cada uma das relações abaixo é verdadeira:

(A) $\text{sen}\,x + \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

(B) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

**14** Calcule o valor da expressão: $E = \tan 20° + \tan 40° + \sqrt{3}\tan 20° \cdot \tan 40°$.

**15** Sendo $y = \text{sen}\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$, o valor numérico de $y$ é:

(A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\sqrt{3} + 2$
(E) $2(\sqrt{3} + 1)$

**16** Resolver a equação: $\cos 4x = 7\cos^4 x - \frac{27}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}$.

**17** Dada a equação: $3\text{sen}\,2x + \cos 2x = 1$, calcule $\tan x$.

**18** **(EN -1999)** Coloque (F) falso ou (V) verdadeiro nas proposições abaixo e assinale a opção correta.

I. $\left(1+\cot^2 x\right)\left(1-\cos^2 x\right) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

II. $\left(1+\sec 4x\right) = 2\sec^2 x + \tan^4 x,\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

III. $\text{sen}\frac{13\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{1}{4}$

(A) F – V – V
(B) F – F – V
(C) V – V – F
(D) V – V – V
(E) V – F – V

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** Mostre a expressão $E(x) = \cos x \cdot \left(1 + \tan x \cdot \tan\frac{x}{2}\right)$ tem valor constante, independente do arco $x$.

**02** Se $a + b = 45°$, mostre que $\tan a + \tan a \cdot \tan b + \tan b = 1$.

**03** Demonstrar a identidade $\tan^2 x + \cot^2 x = 2 \cdot \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}$.

**04** **(EFOMM-00)** A função cos a + cos 3a + cos 5a + cos 9a equivale a:

(A) 4cos 4a cos 3a cos 2a
(B) 3cos 3a cos 2a cos a
(C) 2cos 2a 2cos a
(D) 3sen a cos 2a sen 2a
(E) 2sen 3a cos a

**05** Calcule $\tan\frac{x}{2}$ se $\text{sen}\,x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{6}$.

**06** Sendo $\text{sen}\,x + \text{sen}\,y = a$ e $\cos x + \cos y = b$, calcule $\text{sen}(x + y)$.

**07** Demonstrar que, em um triângulo $ABC$, $\cot\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\text{sen}\hat{B} + \text{sen}\hat{C}}{\cos\hat{B} + \cos\hat{C}}$

**08** Os ângulos agudos de um $\Delta ABC$, verificam a relação $2.\tan A = \tan B + \tan C$, mostre que:

(A) $\tan B \cdot \tan C = 3$.
(B) $\cos A = 2 \cdot \cos B \cdot \cos C$.

**09** Sendo $a + b + c = 180°$, calcular:
$$y = \frac{\cos(a-b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b} + \frac{\cos(a-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c} + \frac{\cos(b-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}$$

**10** Sejam $A$, $B$, $C$ os ângulos de um triângulo. Mostre que $\text{sen}\,2A + \text{sen}\,2B + \text{sen}\,2C = 4\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C$.

**11** **(EN-1997)** Sabendo-se que $\tan x = a$, $\tan y = b$, pode-se reescrever $z = \dfrac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)}{\text{sen}(2x) - \text{sen}(2y)}$ como:

(A) $\left(\dfrac{1-ab}{1+ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)$

(B) $\left(\dfrac{1+ab}{1-ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)$

(C) $\left(\dfrac{1-ab}{1+ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)$

(D) $\left(\dfrac{1+ab}{1-ab}\right)\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)$

**12** **(2ª Lei dos Cossenos)** Sendo $A$, $B$ e $C$ ângulos de um $\Delta ABC$, mostre que:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$$

**13** **(ITA-2003)** Para todo $x$ real, a expressão $\cos^2(2x)\cdot \text{sen}^2(2x)\cdot \text{sen}\, x$ é igual a:

(A) $2^{-4}\left[\text{sen}(2x) + \text{sen}(5x) + \text{sen}(7x)\right]$
(B) $2^{-4}\left[2\text{sen}(x) + \text{sen}(7x) - \text{sen}(9x)\right]$
(C) $2^{-4}\left[-\text{sen}(2x) - \text{sen}(3x) + \text{sen}(7x)\right]$
(D) $2^{-4}\left[-\text{sen}\, x + 2\text{sen}(5x) - \text{sen}(9x)\right]$
(E) $2^{-4}\left[\text{sen}\, x + 2\text{sen}(3x) + \text{sen}(5x)\right]$

**14** Em um $\Delta ABC$, calcule $\dfrac{\hat{C}}{2}$, sabendo que $\tan\dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{5}{6}$ e $\tan\dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{20}{37}$.

**15** Mostre que: se em um triângulo $ABC$ vale a relação: $\dfrac{\cos(B-C)}{\text{sen}\, A + \text{sen}(C-B)} = \tan B$, então o triângulo é retângulo com ângulo reto em $A$.

**16** Em um triângulo $ABC$, vale a relação $9BC^2 + 9CA^2 - 19AB^2 = 0$. Qual o valor de $\dfrac{\cot C}{\cot A + \cot B}$?

**17** Sejam $\ell$ o lado de um polígono regular de $n$ lados, $r$ e $R$, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a este polígono. Prove que $r + R = \dfrac{\ell}{2}\cot\dfrac{\pi}{2n}$.

**18** Mostre que, se os ângulos de um triângulo $ABC$ verificam a igualdade $\text{sen}4A + \text{sen}4B + \text{sen}4C = 0$, então o triângulo é retângulo.

**19** Resolva o sistema $\begin{cases} \tan^2 x + \tan^2 y = 6 \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} + \dfrac{\tan y}{\tan x} = -6 \end{cases}$

**20**

(A) Prove que: $\tan(\dfrac{\pi}{3} - x)\cdot \tan x \cdot \tan(\dfrac{\pi}{3} + x) = \tan 3x$.

(B) Usando (a), mostre que $\tan 20° \cdot \tan 30° \cdot \tan 40° = \tan 10°$.

**21** Verifique as igualdades:

(A) $\tan 50^o + \cot 50^o = 2 \cdot \sec 10^o$.
(B) $\cos^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{3}{4}$.
(C) $\tan 50^o - \tan 40^o = 2 \cdot \tan 10^o$.

**22** Calcule o valor da expressão: $E = \tan\dfrac{\pi}{20} - \tan\dfrac{3\pi}{20} - \tan\dfrac{7\pi}{20} + \tan\dfrac{9\pi}{20}$.

**23** Determine o valor de $P = \text{sen}\dfrac{\pi}{24}\text{sen}\dfrac{5\pi}{24}\text{sen}\dfrac{7\pi}{24}\text{sen}\dfrac{11\pi}{24}$.

**24** **(ITA-2002)** Se $x$, $y$ e $z$ são os ângulos internos de um triângulo ABC e $\text{sen}\, x = \dfrac{\text{sen}\, y + \text{sen}\, z}{\cos y + \cos z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

## Equações e inequações trigonométricas

### EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** **(EFOMM-95)** Se $x \in [0, 2\pi]$, o número de soluções da equação $2\text{sen}^3 x - \text{sen} x + 1 = \cos^2 x$ é igual a:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 6.

**02** **(AFA-2000)** Se ($\text{sen} x$, $\text{sen}^2 x$, $\cos x$) é uma progressão geométrica estritamente crescente, com $0 < x < 2\pi$, então o valor de $x$ é:

(A) $\dfrac{\neq}{12}$
(B) $\dfrac{\neq}{10}$
(C) $\dfrac{\neq}{8}$
(D) $\dfrac{\neq}{6}$

**03** **(AFA-1998)** O conjunto solução, em $\Re$, da equação $(\cos x)(\text{sen}\, 2x) = (\text{sen}\, x)(1 + \cos 2x)$, é:

(A) $\varnothing$
(B) $\Re$
(C) $\{x \in \Re \mid x = 2k\pi \pm \pi/2,\ k \in Z\}$.
(D) $\{x \in \Re \mid x = 2k\pi \pm \pi/3,\ k \in Z\}$.

**04** Resolva as equações abaixo:

(A) $\text{sen}\, 2x = \text{sen}\, 5x$.
(B) $\text{sen}\, 3x = \cos 4x$.
(C) $\text{sen}\, 4x + \text{sen}\, x = 0$.
(D) $\cos 5x = \cos 7x$.
(E) $\cos 3x + \text{sen}\, 5x = 0$.
(F) $\cos 2x + \cos 8x = 0$.
(G) $\tan 5x = \tan 2x$.
(H) $\tan 5x + \tan x = 0$.
(I) $\tan x \cdot \tan 3x = 1$.

**05** Ache as expressões gerais das medidas algébricas de todos os arcos que verificam as igualdades:

(A) $2\text{sen}^2 x + 3\text{sen}\, x - 2 = 0$
(B) $\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

**06** Resolver a equação: $\cos 4x = 7\cos^4 x - \dfrac{27}{4}\cos^2 x + \dfrac{3}{4}$.

**07** Resolva:

$$\frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\cot^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x} = -3$$

**08** **(EFOMM-01)** O conjunto solução da equação $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ é:

(A) $S = \{x \in \Re \,/\, x = \pi + 2h\pi, h \in \mathbf{Z}\}$

(B) $S = \{x \in \Re \,/\, x = h\pi \text{ ou } x = \pi + 2h\pi,\ h \in \mathbf{Z}\}$

(C) $S = \left\{x \in \Re \,/\, x = 2h\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2h\pi,\ h \in \mathbf{Z}\right\}$

(D) $S = \{x \in \Re \,/\, x = 2h\pi,\ h \in \mathbf{Z}\}$

(E) $S = \left\{x \in \Re \,/\, x = \frac{3\pi}{2} + 2h\pi,\ h \in \mathbf{Z}\right\}$

**09** **(AFA -2003)** Dado que $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tem-se que $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ vale:

(A) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{2}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

**10** **(AFA-02)** O conjunto dos valores reais de $x$ que tornam verdadeira a desigualdade $\cos^2 (x - \pi) \geq \pi$ é:

(A) $\{ x \in \Re \,/\, x \leq -\sqrt{\pi} \text{ ou } x \geq \sqrt{\pi} \}$
(B) $\{ x \in \Re \,/\, -\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi} \}$
(C) $\Re$
(D) $\varnothing$

**11** **(AFA-1998)** O conjunto solução da inequação $\frac{1}{4}$ ″ $\operatorname{sen} x \cdot \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, para $0 \leq x \leq \pi$, é:

(A) $\{ x \in \Re \mid \frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{6} \}$.

(B) $\{ x \in \Re \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{3} \}$.

(C) $\{ x \in \Re \mid \frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \}$.

(D) $\{ x \in \Re \mid \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} \}$.

**12** Resolva no intervalo $(0, 2\pi)$, a desigualdade $2\,sen^2x - 3\operatorname{sen}x + 1 < 0$.

**13** Resolva: $\operatorname{sen}x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$.

**14** **(EN-1997)** Se $x \in [0, 2\pi]$, o conjunto solução de $\frac{\sqrt{3}}{9} \leq \frac{\sec x - \cos x}{\csc x - \operatorname{sen} x} < 1$ é:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[ \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right[\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[ \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right[\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[ \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right[\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[ \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right[\right\}$

**15** **(ITA- 2000)** Para $x$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o conjunto de todas as soluções da inequação $\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ é o intervalo definido por:

(A) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

(E) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** **(ITA-87)** O número de raízes reais da equação $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^8 x + \operatorname{sen}^{10} x = 5$ é:

(A) um número maior do que 12.
(B) zero.
(C) 2.
(D) 10.
(E) 1.

**02** **(EN-2003)** O número de soluções reais da equação $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = x - 2$ é igual a $n$; assim, pode-se concluir que:

(A) $n = 0$
(B) $n = 1$
(C) $n = 2$
(D) $n = 3$
(E) $n > 3$

**03** **(ITA-88)** Sobre a equação $\tan x + \cot x = 2\operatorname{sen}(6x)$, podemos afirmar que:

(A) apresenta uma raiz no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{4}$

(B) apresenta duas raízes no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(C) apresenta uma raiz no intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

(D) apresenta uma raiz no intervalo $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

(E) não apresenta raízes reais.

**04** **(ITA-88)** Seja a equação $\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{m}$, onde m é um número real não nulo. Podemos afirmar que:

(A) A equação admite solução qualquer que seja $m$ não nulo.
(B) Se $|m| < 4$, esta equação não apresenta solução real.
(C) Se $m > 1$, esta equação não apresenta solução real.
(D) Se $|m| > 2$, esta equação sempre apresenta solução real.
(E) Se $m < 4$, esta equação não apresenta solução real.

**05** **(AFA-2000)** Os valores de $m \in \Re$ para os quais a equação $\sqrt{2}\,(\text{sen}\,x - \cos x) = m^2 - 2$ admite soluções, são:

(A) $-1 \le m \le 1$.
(B) $-2 \le m \le 2$.
(C) $0 \le m\,\sqrt{2}$.
(D) $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

**06** **(EN-1999)** O produto das soluções da equação $2\text{sen}^3x + 5\cos^2x + 4\text{sen}x + 2\tan^2x = 4 + 2\sec^2x$ no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$ é:

(A) $\dfrac{5\pi^2}{12}$
(B) $\dfrac{\pi^3}{12}$
(C) $\dfrac{5\pi^3}{72}$
(D) $\dfrac{\pi^2}{6}$
(E) $\dfrac{\pi^2}{12}$

**07** **(ITA-88)** A respeito da solução da equação $\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = 2,\ 0 \le x < 2\pi$, podemos afirmar que:

(A) existe apenas uma solução no primeiro quadrante.
(B) existe apenas uma solução no segundo quadrante.
(C) existe apenas uma solução no terceiro quadrante.
(D) existe apenas uma solução no quarto quadrante.
(E) existem duas soluções no intervalo.

**08** Resolva a equação: $4 \cdot \text{sen}2x + 3 \cdot \cos 2x = 3$.

**09** Resolva a equação: $5\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\,x \cos x + 4\cos^2 x = 3$.

**10** Resolva a equação $\cos 3x - 2\cos 2x + 1 = 0$.

**11** Resolva a equação: $2(\text{sen}\,x - \cos x) + 2\,\text{sen}\,x \cos x = 1$.

**12** Resolva a inequação: $4sen^2\,x - 2\,(1+\sqrt{2})\,senx + \sqrt{2} < 0$

**13** Resolva no intervalo $[0,2\pi]$; $\dfrac{2\text{sen}^2x + \cos x - 1}{\text{sen}x - \cos x - \sqrt{2}} \ge 0$

**14**

(A) Resolva a seguinte desigualdade: $\dfrac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} \ge 2$ para $0 \le x \le \pi$;

(B) Resolva a inequação $\dfrac{2\cos x + 2\text{sen}\,x + \sqrt{2}}{\cos x - \text{sen}\,x} < 0$.

**15** **(AFA-2000)** Os valores de $\alpha$, $0 \le \alpha < 2\pi$, que satisfazem a desigualdade $-x^2 + \dfrac{1}{2} < \text{sen}\alpha$, para todo $x$ real, pertencem ao intervalo:

(A) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
(B) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$
(C) $\dfrac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$
(D) $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{5}{6}\pi$

## Funções trigonométricas

### EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** Calcule arcsen(sen150°).

**02** Calcule:

(A) $y = \text{arcsen}\dfrac{1}{2}$.

(B) $y = \arctan\sqrt{3} + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(C) $y = \cot\left(\text{arcsen}\dfrac{1}{3}\right)$.

(D) $y = \text{arcsen}\,x + \arccos x$.

**03** **(EN)** Seja $x = \arccos\frac{3}{5}$, $x \in [0, \pi]$. Então, sen(2$x$) é igual a:

(A) $\frac{24}{25}$
(B) $\frac{4}{5}$
(C) $\frac{16}{25}$
(D) $\frac{6}{5}$
(E) $\frac{2}{5}$

**04** **(AFA)** O valor de $\text{cotg}\left(\text{arcsen}\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ é

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(B) $2\sqrt{2}$.
(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
(D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

**05** **(AFA-2000)** O valor de $\text{sen}\left(\text{arc cos}\ \dfrac{1}{2} + \text{arc sen}\ \dfrac{1}{3}\right)$ é:

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$.
(B) $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$.
(C) $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}$.
(D) $\dfrac{-2\sqrt{6}-1}{6}$.

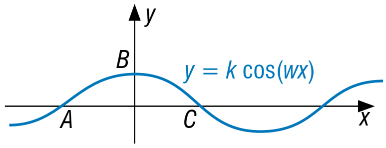
**06** **(AFA-1999)** O valor real que satisfaz a equação arcsen$x$ + arcsen2$x$ = $\pi/2$, para $x$ pertencente ao intervalo (0,1), é:

(A) $\dfrac{1}{5}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
(C) $\dfrac{1}{2}$.
(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**07** **(EN-2002)** Seja $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ definida nos reais e seja $g(x) = \tan x$ definido no intervalo aberto $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Se $x \in\ ]-\pi, \pi[$, então o valor da função composta no número $x/2$ é igual a:

(A) $\cos(2x)$
(B) $\tan x$
(C) $\text{sen}\,x$
(D) $\cos x$

**08** **(EN-2002)** Sejam *A*, *B* e *C* os pontos de interseção da curva com os eixos coordenados conforme a figura abaixo, em que *k* e *w* são constantes reais.




Supondo que o triângulo de vértices *A*, *B* e *C* tem $3\pi$ unidades de área e que $k + w - 14 = 0$, o valor de $(k - w)$ é:

(A) – 14.
(B) – 10.
(C) 10.
(D) 12.

**09** **(ITA-80)** Sobre a função $f(x) = \text{sen}^2\, x$, podemos afirmar que:

(A) é uma função periódica de período $4\pi$.
(B) é uma função periódica de período $2\pi$.
(C) é uma função periódica de período $\pi$.
(D) é uma função periódica onde o período pertence ao intervalo $(\pi, 2\pi)$.
(E) não é uma função periódica.

**10** Determine o período das seguintes funções trigonométricas:

(A) $y = \text{sen}\dfrac{x}{3}$.
(B) $y = 3\tan(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{\pi}{4})$.
(C) $y = 4 - 3\sec(-\pi x)$.
(D) $y = \text{sen}^2\, x$.
(E) $y = \tan^2 x$.
(F) $y = \cos^3 \dfrac{x}{2}$.

**11** **(ITA-88)** O conjunto imagem da função f: $[0,1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos \dfrac{3x-1}{2}$ é:

(A) $\left\{0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$
(B) $[0, \pi]$
(C) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$
(D) $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$
(E) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** Determine *x* na equação $\dfrac{1}{2}\arctan x = \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

**02** Resolva a equação: $\arctan\dfrac{1}{x-1} - \arctan\dfrac{1}{x+1} = \arctan a$.

**03** Resolva o sistema $\begin{cases} \text{arcsen}\sqrt{xy} - \text{arcsen}\sqrt{1-xy} = \pi/6 \\ \arctan 2x + \arctan 2y = \arctan 2 \end{cases}$

**04** **(ITA)** A solução da equação $\arctan x + \arctan\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\pi}{4}$ definida no conjunto dos reais diferentes de – 1 é:

(A) 1.
(B) ½.
(C) ½ e 1.
(D) 2.
(E) 2 e 1.

**05** **(ITA)** Sendo $z = \cos(\arctan(a^2 + b^2) + \text{arccot}(a^2 + b^2))$, podemos afirmar que:

(A) $z = 0$
(B) $z = 1$
(C) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\cos(a^2 + b^2)$, se $a^2 + b^2 \leq 1$
(E) é impossível determinar o valor de *z*

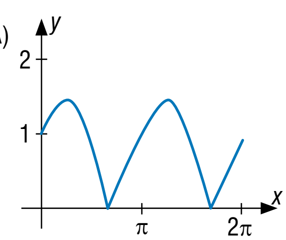
**06** **(ITA)** Seja *k* uma constante real e considere a equação em *x*: $\text{arcsen}\left(\dfrac{1+x^2}{2x}\right) = k$, $x \neq 0$. Podemos afirmar que:

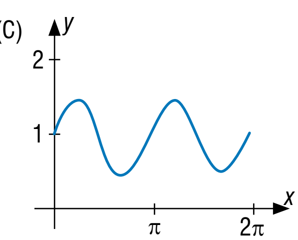
(A) Para cada *k* real, a equação admite uma única solução.
(B) Para cada *k* real, a equação admite duas soluções.
(C) Existe *k* real tal que a equação admite uma infinidade de soluções.
(D) Não existe *k* real tal que a equação admita solução.
(E) Existe *k* real tal que a equação admite uma única solução.

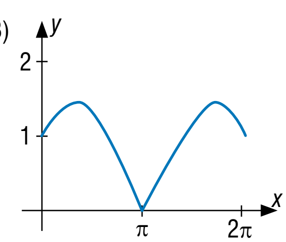
**07** **(ITA)** Seja $f(t) = 4 + 3\cos(\pi t) + 4\text{sen}(\pi t)$ a função definida nos reais. Sobre esta função das alternativas abaixo é correta?

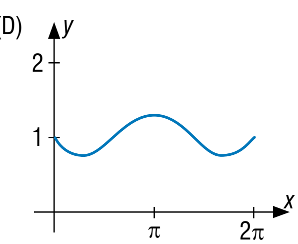
(A) f(*t*) é função par.
(B) f(*t*) é função ímpar.
(C) o maior valor que f(*t*) assume é 9.
(D) o maior valor que f(*t*) assume é – 3.
(E) o maior valor que f(*t*) assume é – 1/2.

**08** **(AFA)** O gráfico que melhor representa a função $y = |\text{sen}\, x + \cos x|$, com $0 \leq x < 2\pi$, é:

(A)



(C)



(B)



(D)



**09** **(ITA-81)** Seja *g* uma função não nula dos reais nos reais que satisfaz, para todo *x* e *y*, $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Se *f* real for definida por $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{2g(x)}{a}\right)$, $a \neq 0$, então podemos garantir que:

(A) *f* é periódica com período $\pi a$.
(B) Para $a = n$, *n* natural, temos $f(n) = 2\text{sen}(g(1))$.
(C) Se $g(1) \neq 0$, então $g(1) = f(0)$.
(D) Se $g(T) = \pi a$, então *T* é período de *f*.
(E) $g(T) = 2\pi$, então *T* é período de *f*.

**10** Determine o período e a amplitude da função: $y = 12\text{sen}x - 5\cos x$.

**11** Seja $f(x) = 5\text{sen}^2 x + 3\text{sen}x\cos x + 7\cos^2 x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine o conjunto-imagem da função $f$.

**12** **(ITA)** Seja $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $f$ uma função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{\left(a^{x^2} - a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos(2\pi x) + 4\cos(\pi x) + 3}$.

Sobre o domínio $A$ desta função podemos afirmar que:

(A) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Z} \subset A$.
(B) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}$.
(C) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \subset A$.
(D) $\{x \in \mathbb{R} / x \notin \mathbb{Z}, x \geq 2\} \subset A$.
(E) $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

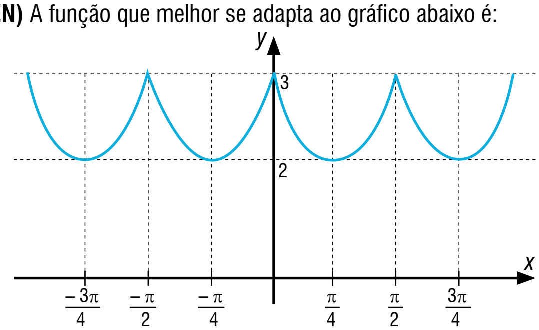
**13** **(AFA)** Analise as alternativas seguintes e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) O período e o conjunto-imagem da função $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{4}\text{sen}x \cdot \cos x$ são, respectivamente, $2\pi$ e $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.
( ) A função $y = 2\arccos 4x$ tem por domínio o conjunto de todos os valores de $x$ pertencentes a $\left[0, \frac{1}{4,}\right]$.
( ) Para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, o valor de $(\text{tg}^2 x + 1) \cdot (\text{sen}^2 x - 1)$ é $-1$.

A opção que corresponde à classificação anterior é:

(A) F – V – F.
(B) V – V – F.
(C) F – F – V.
(D) V – F – V.

**14** **(EN)** A função que melhor se adapta ao gráfico abaixo é:




(A) $y + \left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| = 3$.
(B) $y + \left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| = 3 + \sqrt{2}/2$.
(C) $y + |\cos 2x| = 4$.
(D) $y + \left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| = 3 - \sqrt{2}/2$.
(E) $y + |\text{sen}2x| = 3$.

**15** **(ITA)** Considere os contradomínios das funções arco seno e arco cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função $f$: $[-1,1] \to f(x) = \text{acrsen}\, x + \arccos x$, temos que:

(A) é não crescente e ímpar.
(B) não é par nem ímpar.
(C) é sobrejetora.
(D) é injetora.
(E) é constante.

**16** **(ITA)** Encontre todos os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real $x$:

$$\arctan\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) + \arctan\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a \text{ admite solução.}$$

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** **(ITA)** Dados $A$, $B$ e $C$ ângulos internos de um triângulo, tais que $2B + C \neq \pi$ e $\alpha \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$, o sistema $\begin{cases} \text{sen}A + \text{sen}B = \text{sen}\left(\frac{\alpha - C}{2}\right) \\ -\cos A + \cos B = \cos\left(\frac{\alpha - C}{2}\right) \end{cases}$

admite como solução:

(A) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}, B = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\pi}{3}$ e $C = \frac{2\pi}{3}$

(B) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}, B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = 0$

(C) $A = \frac{2\pi}{3}, B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}$

(D) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}, B = \frac{2\pi}{3}$ e $C = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\pi}{3}$

(E) $A = \pi, B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = -\frac{\alpha}{2}$

**02** **(ITA)** Seja $a$ uma constante real. Eliminando $\theta$ das equações abaixo:

$\begin{cases} x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \text{sen}\theta = 2a \cdot \text{sen}2\theta \\ x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\theta = a \cdot \cos 2\theta \end{cases}$, obtemos:

(A) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

(B) $(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

(C) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(D) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{2}$

(E) n.d.a.

**03** **(AFA)** Considere a função real definida por $y = \dfrac{\cos(2x)}{1 + \text{sen}(2x)}$ e as seguintes afirmações:

I. A função é decrescente em todo seu domínio
II. O gráfico da função apresenta assíntotas em $\arccos\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
III. A função é negativa em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$
IV. A função admite inversa em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

São verdadeiras somente as afirmações contidas nos itens:

(A) I e II.
(B) II e III.
(C) III e IV.
(D) I e IV.

**04** Resolva a equação $2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \operatorname{sen} 2x)$

**05** Calcule: sen 10° · sen 50° · sen 70°.

**06** Achar os valores de $x$ que satisfazem a equação:
$\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \operatorname{arcsen}(\cos x)$.

**07** Prove que os valores da expressão $\operatorname{sen}\frac{k\neq}{\sqrt{7}}$, $k$ inteiro, são todos diferentes.

**08**
(A) Prove que: $\prod_{k=1}^{n} \cos 2^{k-1} a = \frac{\operatorname{sen} 2^n a}{2^n \operatorname{sen} a}$.
(B) Usando (a), mostre que $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots = \frac{2}{\pi}$

**09** Dada a equação $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - m\operatorname{sen}^2 x = 0$ determine a condição que deve satisfazer $m$ para que ela tenha pelo menos uma solução $x_0$ tal que $0 < x_0 < 2\pi$.

**10** Calcule $\frac{1}{\operatorname{sen}1^\circ \cdot \operatorname{sen}2^\circ} + \frac{1}{\operatorname{sen}2^\circ \cdot \operatorname{sen}3^\circ} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{sen}n^\circ \cdot \operatorname{sen}(n+1)^\circ}$

**11**
(A) Mostre que é possível expressar tan $3\alpha$ em função de tan $\alpha = x$.
(B) Utilize o item anterior para determinar as soluções da equação $x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$ onde $m$ é um número real dado.

**12**
(A) Resolva a equação $m \cos x - (m + 1)\operatorname{sen} x = m$, $m \in \mathbb{R}^*$;
(B) Determine $m$ de modo que essa equação admita as raízes $x'$ e $x''$ cuja diferença seja $\pi/2$.

**13** Determine os valores de $x$ e $y$ que satisfazem as equações:

$$\begin{cases} x + y = \pi/5 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos\frac{\pi}{5} \end{cases}.$$

**14** Sejam $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ ângulos internos de um triângulo oposto aos lados a, b, c respectivamente.

a. Mostre que $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{b+c}$ .

b. Mostre que $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$.

**15** Sejam $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ ângulos internos de um triângulo.

a. Mostre que $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$

b. Mostre que $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$

**16** Resolva sen $18x$ + sen $10x$ + sen $2x$ = 3 + $\cos^2 2x$.

**17** Prove que um triângulo satisfaz $a + b = \tan\frac{\hat{C}}{2}\left(a\tan\hat{A} + b\tan\hat{B}\right)$ é isósceles.

**18** Mostre que $\csc\frac{2\pi}{7} + \csc\frac{3\pi}{7} = \csc\frac{\pi}{7}$.

**19** Mostre que cos1° é irracional.

**20** Considere uma sequência definida por $x_0 = 2014$ e $x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{1 - x_n}$ para $n > 0$. Calcule $x_{2014}$.

RASCUNHO

RASCUNHO

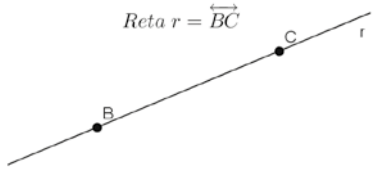
## 1. Conceitos primitivos e axiomas

Na geometria euclidiana, trabalha-se com noções de elemento e conjunto, embora denotemos por alguns nomes diferentes. Os conceitos primitivos são os objetos com os quais iremos trabalhar, mas não definiremos formalmente. São eles:

- o ponto, um objeto adimensional, e que deve ser lidado como um 'elemento'.
- a reta, um objeto de dimensão 1, que é um 'conjunto' de pontos.
- o plano, um objeto de dimensão 2, também um 'conjunto' de pontos.

Ponto A


Reta $r = \overleftrightarrow{BC}$




*Plano* $\alpha$

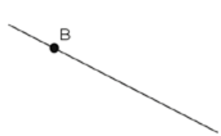

Apesar de não podermos defini-los, podemos estabelecer notações e relações entre eles, através dos axiomas. Os axiomas são como "regras do jogo", as verdades que não podemos provar, e que servem pra iniciar o estudo desse sistema.

Existem cinco grupos principais de axioma na geometria euclidiana, segundo a axiomatização de Hilbert. Seguem alguns dos principais axiomas da geometria:

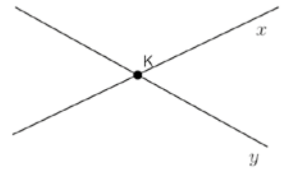
- Existem infinitos pontos;
- dois pontos distintos determinam uma reta que os contém;
- numa reta existem infinitos pontos, fora dela também;
- três pontos distintos que não estejam em uma mesma reta determinam um plano que os contém;
- dados uma reta e um ponto fora dela, existe e é única uma segunda reta que contém o ponto dado e não intersecta a reta dada, embora esteja no mesmo plano. [Ax. De Euclides]

A essa reta, chamamos de paralela. Foram suprimidos alguns axiomas, para facilitar o entendimento.


*Ponto A não está em r*
$A \notin r$




*Ponto B está em r*
$B \in r$




*Retas x e y concorrentes em K*
$x \cap y = \{K\}$


*Retas s e t paralelas*
$s \cap t = \varnothing$

A partir daqui, começaremos o estudo da geometria plana. Todos os objetos estarão contidos em um mesmo plano, ou seja, serão coplanares.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**01.** Prove que existem infinitas retas.

**Solução:**
Como existem infinitos pontos, sejam *A* e *B* dois deles. A partir deles, definimos a reta *AB*. Como em uma reta existem infinitos pontos, bem como fora dela, tome fora dela o ponto *X*. A cada ponto *P* da reta *AB*, seja a reta *XP*. Como *X* não pertence à reta *AB*, todas as retas *XP* são diferentes de *AB*. Agora, dados dois pontos *P* e *Q* na reta *AB*, se *XP* e *XQ* fossem uma mesma reta, então seriam a reta *PQ*, que é a reta *AB*, o que é um absurdo, pois *X* não está na reta *AB*. Logo todas as retas do tipo *XP* são diferentes entre si, variando *P*. Como são infinitos pontos *P*, são infinitas retas no plano.

## 2. Outros objetos iniciais e definições

Segmento de reta $\overline{AB}$ é o conjunto de pontos que estão entre os pontos *A* e *B*. Chamamos *A* e *B* de extremidades do segmento. Todo ponto que está entre *A* e *B* está na reta *AB*, logo o segmento de reta $\overline{AB}$ está contido na reta $\overleftrightarrow{AB}$. A cada segmento de reta, associamos uma medida, que é um número real positivo. A união de dois segmentos adjacentes tem por medida a soma das medidas de ambos.

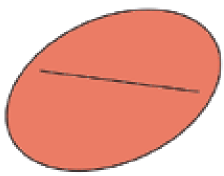
Formalmente, dados dois pontos *A* e *B*, chamamos de semirreta $\overrightarrow{AB}$ o conjunto dos pontos *X* que estão entre *A* e *B* ou são tais que *B* está entre *A* e *X*. Para entender, pense em *A* dividindo a reta em dois conjuntos infinitos em sentidos diferentes, um dos quais contém o ponto *B*. Esse conjunto é a semirreta $\overrightarrow{AB}$. O vértice (ou origem) dela é o ponto *A*. Quando duas semirretas possuem o mesmo vértice e a sua união é a reta suporte delas, dizemos que são semirretas opostas.

O ponto *M* entre *A* e *B* tal que os segmentos *AM* e *MB* têm a mesma medida é chamado de ponto médio.

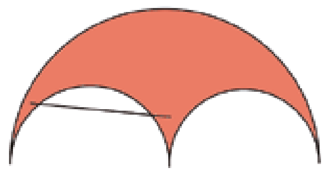

*Segmento* $\overline{XY}$


*Semirreta* $\overrightarrow{AB}$

Dizemos que um conjunto do plano é convexo se, e somente se, para todo par de pontos $A$ e $B$ do conjunto, o segmento $AB$ está contido no conjunto também. Caso existam dois pontos do conjunto tais que o segmento com extremidade neles não está contido no conjunto, dizemos que o conjunto é não-convexo.



Conjunto convexo



Conjunto não-convexo

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

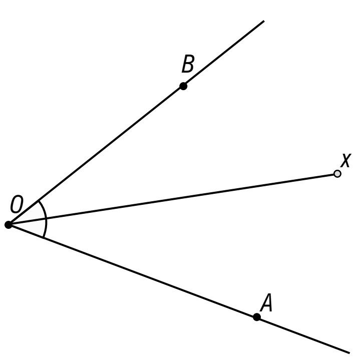
**01.** Sejam $A$, $B$ e $P$ pontos colineares tais que $B$ está entre $P$ e $A$. Sejam $M$ e $N$ pontos médios dos segmentos $AP$ e $PB$ respectivamente. Calcule a medida de $MN$, sabendo as medidas de $AP = a$, $PB = b$.

**Solução:**
Como $AP = a$, e $M$ é médio de $AP$, então $MP = a/2$. Como $PB = b$, e N é médio de $PB$, então $NP = b/2$. Agora, como $N$ está entre $M$ e $P$, tem-se que $MN = MP - PN = (a - b)/2$.

## 3. Ângulos

Quando duas semirretas $OA$ e $OB$ possuem mesmo vértice, elas determinam uma região do plano que chamamos de ângulo [denotamos $A\hat{O}B$], e as semirretas chamamos de lados do ângulo. Associamos a cada ângulo uma medida, que é um número real positivo. Quando dois ângulos têm por interseção apenas um lado em comum, dizemos que são adjacentes, e a medida da união é a soma das medidas. O ângulo formado por duas semirretas opostas é associado à medida em graus de 180°. Existem outras unidades de medida, como o radiano e o grado. Para converter, é só fazer uma regra de três com a seguinte equivalência: $180° = \pi\text{rad.} = 200\text{gr}$

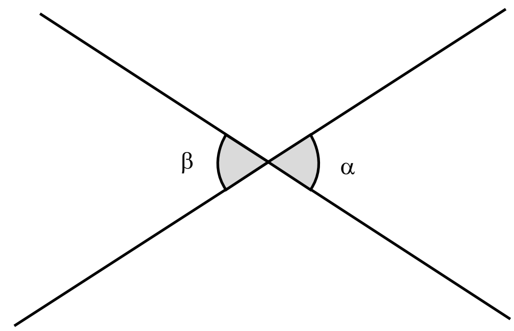
Dado um ângulo $A\hat{O}B$, chamamos a semirreta interna a ele $OX$ de bissetriz, se, e somente se, os ângulos $X\hat{O}A$ e $X\hat{O}B$ são congruentes, isto é, têm a mesma medida.




$A\hat{O}X = X\hat{O}B$

$\overrightarrow{OX}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$

Dizemos que dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são semirretas opostas aos lados do outro. Prova-se que se dois ângulos são opostos pelo vértice, então são congruentes.




Os ângulos $\alpha$ e $\beta$ são opostos pelo vértice $\alpha = \beta$

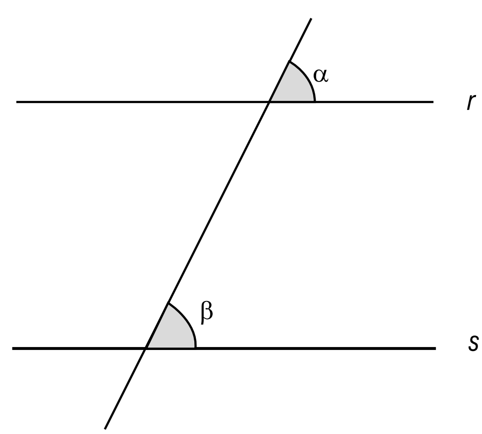
Segue a nomenclatura dos ângulos quanto às suas medidas:

- Ângulo Agudo: ângulo maior que 0° e menor que 90°.
- Ângulo Reto: ângulo de 90°.
- Ângulo Oblíquo: ângulo maior que 90° e menor que 180°.
- Ângulo Raso: ângulo de 180°.
- Ângulo Côncavo ou Reentrante: ângulo maior que 180° e menor que 360°.

- Ângulos complementares: ângulos que somam 90°.
- Ângulos suplementares: ângulos que somam 180°.
- Ângulos replementares: ângulos que somam 360°.
- Ângulos explementares: ângulos cuja diferença é de 180°.

## 4. Paralelismo e teorema angular de Tales

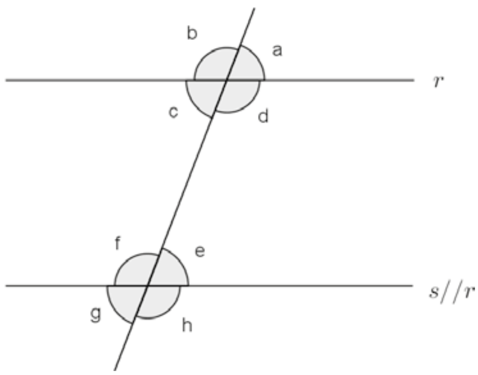
Com o conteúdo de triângulos, e após a formalização de alguns teoremas, podemos concluir o seguinte teorema: na figura, se r//s, então os ângulos $\alpha$ e $\beta$ são congruentes. Na verdade, vale a recíproca também, a qual servirá como um bom critério de paralelismo entre retas.




Na figura, $r // s \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Na figura, temos que são ângulos congruentes:

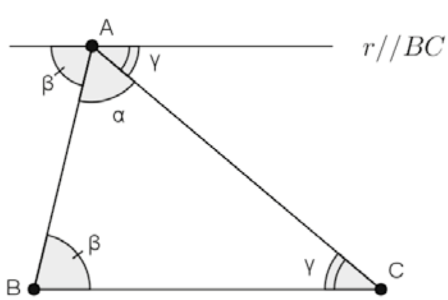
$$a = c = e = g, b = d = f = h.$$



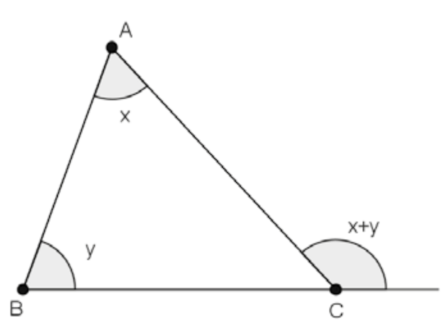

Alguns pares de ângulos, como na figura anterior, recebem um nome pela posição relativa às retas paralelas e à transversal. São eles:

- Alternos internos: (c, *e*), (*d*, *f*)
- Alternos externos: (*a*, *g*),(*b*, *h*)
- Colaterais internos: (*c*, *f*),(*d*, *e*)
- Colaterais externos: (*a*, *h*), (*b*, *g*)
- Correspondentes: (*a*, *e*),(*b*, *f*),(*c*, *g*),(*d*, *h*).

Como consequência, tem-se o **Teorema Angular de Tales**: em um triângulo, a soma dos ângulos internos é constante e igual a 180°. Analogamente, podemos concluir a relação do ângulo externo: cada ângulo externo de um triângulo mede a soma dos outros dois ângulos internos não-adjacentes a ele.




*Na figura,* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$




*Teorema do ângulo externo.*

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** São dados os pontos *A, B, C, D* e *E*, nessa ordem, sobre uma reta. Sabe-se que $AB + CD = 3 \cdot BC$ e $DE = AB$. Sendo *M* médio de *BE*, tem-se que $MD = 2$ e $AE = 16$. Calcule *MC*.

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

**02** São dados os pontos *A*, *B*, *C* e *D,* nessa ordem, sobre uma reta, de forma que $AD = 20$ e $BC = 12$, sendo *AB* menor que a metade de *CD*. Calcule a distância entre os pontos médios de *AB* e *CD*.

**03** Efetue:

a. 23°45'19" + 37°32'43"
b. 87°18'32" – 54°37'42"
c. 5°23'47" · 4
d. 56°25'33" ÷ 3

**04** Sendo dado um ângulo de medida $\alpha$, escreva simplificadamente uma fórmula que calcule:

a. o suplemento de $\alpha$;
b. o complemento da metade de $\alpha$;
c. o replemento de um terço do suplemento de $\alpha$;
d. o suplemento do dobro do complemento da metade de $\alpha$.

**05** Um ângulo é igual ao dobro do complemento do seu quádruplo. Quanto mede esse ângulo?

**06** Dois ângulos suplementares são tais que um é o triplo do complemento do outro. Quanto vale a razão entre esses ângulos?

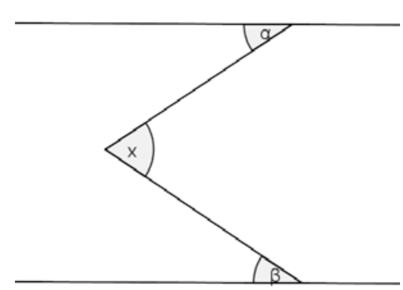
**07** Dois ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes, e o ângulo $A\hat{O}C$ mede 120°. Calcule a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$.

**08** Em um relógio de ponteiro convencional, qual é o ângulo formado pelos ponteiros quando marcam:

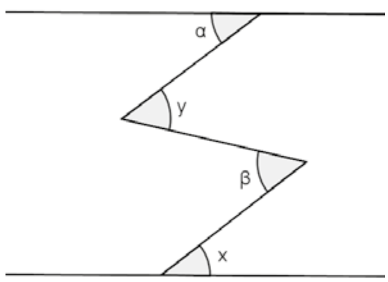
a. 5:20h
b. 10:44h

**09** As semirretas *OA*, *OB*, *OC* e *OD* formam os ângulos adjacentes $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$. Sabendo que *OA* e *OD* são semirretas opostas, e que o ângulo $B\hat{O}C$ mede 130°, quanto mede o ângulo formado pelas bissetrizes de $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$?

**10** Nas figuras, prove as relações "dos bicos".

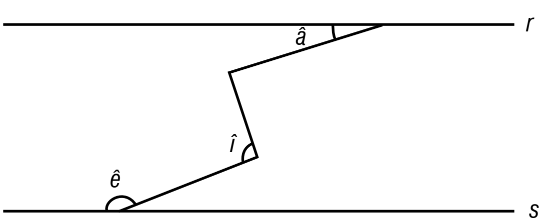



Na figura, $x = \alpha + \beta$.



Na figura, $x + y = \alpha + \beta$

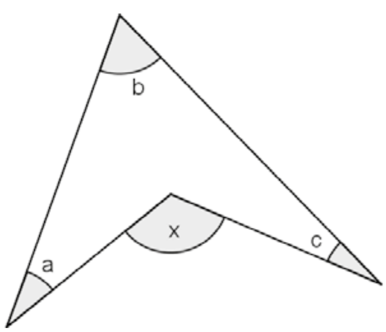
**11** **(EPCAR-2004)** Considere as retas $r$ e $s$ ($r//s$) e os ângulos $\hat{e}$, $\hat{i}$ e $\hat{a}$ da figura abaixo:




Pode-se afirmar que:

(A) $\hat{e} + \hat{i} + \hat{a} = 270°$
(B) $\hat{e} + \hat{i} + \hat{a} = 180°$
(C) $\hat{e} + \hat{i} = \hat{a}$
(D) $\hat{e} + \hat{i} = \hat{a} + 90°$

**12** Na figura, prove que vale a relação $x = a + b + c$.




## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** São dados os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$, nessa ordem, sobre uma reta. Sabe-se que $AB$ e $CD$ são congruentes. Prove que o ponto médio de $AD$ é também ponto médio de $BC$.

**02** Sobre uma reta marcam-se os pontos $M$, $A$ e $B$. Sendo $O$ o ponto médio de $AB$, calcule $k$ para que valha a seguinte relação: $MA^2 + MB^2 = k \cdot (MO^2 + AO^2)$

**03** O suplemento da terça parte de um ângulo excede o complemento do seu triplo em 130°. Quanto mede o replemento do quíntuplo desse ângulo?

**04** As medidas de quatro ângulos replementares estão em progressão aritmética. Analise as afirmativas a seguir:

I. Dois deles são complementares.
II. Existe um que é o dobro do outro.
III. Existem dois deles que são suplementares.

Quais são verdadeiras?

(A) apenas I.
(B) apenas II.
(C) apenas III.
(D) II e III.
(E) I e II.

**05** Pelo vértice de um ângulo $A\hat{O}B$ reto, traça-se uma reta $r$ qualquer, externa a ele. Calcule o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos agudos que as semirretas $OA$ e $OB$ formam com a reta r.

**06** Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes, sendo a medida do primeiro igual a $70°$. Calcule o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$.

**07** Após ver um relógio de ponteiro às 13:00, o ponteiro das horas percorreu um ângulo de 42°. Qual é o horário indicado pelo relógio após esse movimento?

**08** Após as 15:00, qual é o primeiro horário em que os ponteiros das horas e dos minutos formam um ângulo de 130°?

**09** As semirretas $OA$, $OB$, $OC$ e $OD$ formam ângulos adjacentes $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$, nessa ordem, tais que os três primeiros são proporcionais a 1, 3 e 6 respectivamente. Sabe-se que $OD$ é semirreta oposta à bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$. Calcule o ângulo $A\hat{O}D$.

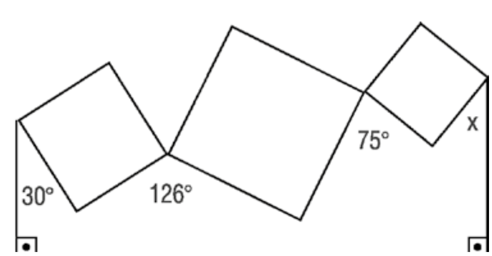
**10** Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes, sendo $A\hat{O}C = 100°$. Sendo $OX$, $OY$ e $OZ$ semirretas bissetrizes, respectivamente, de $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $X\hat{O}Y$, e sendo $B\hat{O}Z = 10°$, então o maior dentre $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ mede:

(A) 60°.
(B) 70°.
(C) 80°.
(D) 90°.
(E) faltam dados.

**11** Dados os ângulos adjacentes $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$, traçam-se as bissetrizes $OX$, $OY$ e $OZ$ dos ângulos $A\hat{O}B$, $C\hat{O}D$ e $X\hat{O}Y$, respectivamente. Sabe-se que $X\hat{O}C + X\hat{O}D - 4 \cdot B\hat{O}Z = 80°$ e que $B\hat{O}Z$ mede 50°. Calcule o ângulo $C\hat{O}D$.

(A) 10°.
(B) 20°.
(C) 40°.
(D) 60°.
(E) 80°.

**12** **(OBM)** Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.

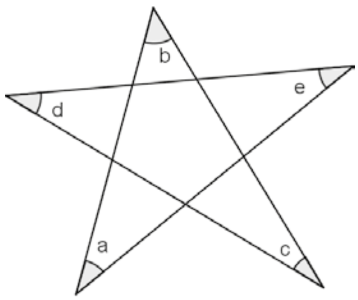



A medida do ângulo $x$ é:

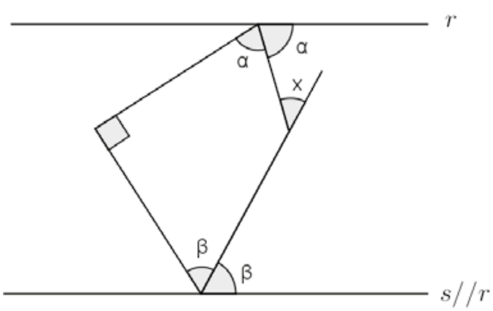
(A) 39º.
(B) 41º.
(C) 43º.
(D) 44º.
(E) 46º.

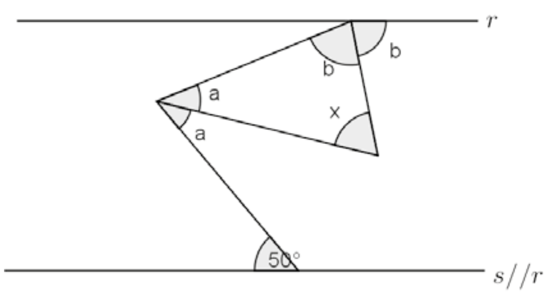
**13** Na figura que segue, quanto vale a soma $a + b + c + d + e$?

(A) 180°.
(B) 270°.
(C) 360°.
(D) 540°.
(E) faltam dados.




**14** Nas figuras, calcule a medida de $x$:



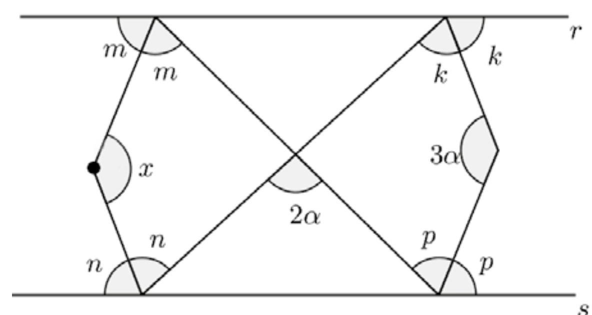

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** Quantas vezes os ponteiros das horas e dos minutos são perpendiculares em um dia de funcionamento?

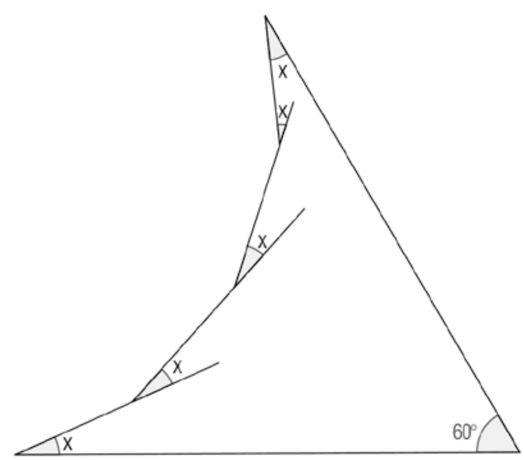
(A) 44.
(B) 46.
(C) 48.
(D) 23.
(E) 24.

**02** Os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes. Sendo $OX$, $OY$, $OZ$ e $OW$ semirretas bissetrizes, nessa ordem, de $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $X\hat{O}Y$ e $A\hat{O}C$, prove que $OZ$ é bissetriz de $B\hat{O}W$.

**03** Dê o valor numérico de $x$, em graus, na figura abaixo:




**04** Na figura, quanto vale $x$?

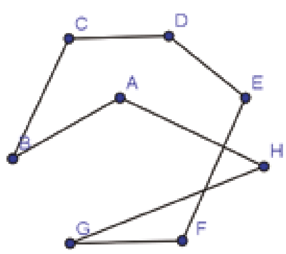


Neste bloco, você verá uma pequena introdução ao conceito de polígonos. Aqui analisaremos principalmente a parte qualitativa de polígonos. Mais adiante, com ferramentas mais avançadas, você poderá deduzir as principais relações métricas e angulares envolvidas nas questões mais comuns do assunto.

## 1. Definição e nomenclatura

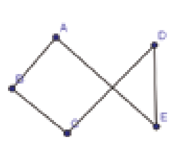
Chamamos de polígono a região delimitada pela união de segmentos não-colineares consecutivamente, desde que tal linha seja fechada. Aos segmentos chamaremos 'lados', aos extremos dos segmentos chamaremos 'vértices', e ao número de lados, que é igual ao número de vértices, chamaremos de 'gênero' do polígono. Qualquer segmento com extremidades em dois vértices é chamado de 'diagonal', desde que não seja um lado do polígono.

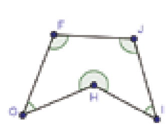
Dizemos que um polígono é simples quando não existem dois lados não-consecutivos que se intersectem mutuamente. Caso existam dois lados não-consecutivos com interseção, dizemos que o polígono é complexo. Caso seja simples, definimos como 'ângulo interno' qualquer ângulo formado por dois lados consecutivos, definido na região interna ao polígono. Observe que o número de ângulos internos é igual ao gênero do polígono.

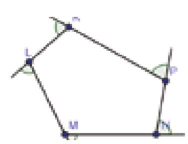


Polígono ABCDEFGH

Se o polígono é simples, então podemos classificá-lo como convexo ou não-convexo. Caso seja convexo, chamamos de 'ângulo externo' cada menor ângulo formado por um lado e um prolongamento de outro lado adjacente. Considere sempre que para cada vértice existe um ângulo externo, já que na verdade são dois ângulos opostos pelo vértice, logo são congruentes. Dessa maneira, o número de ângulos externos também é igual ao gênero do polígono.


Pentágono *ABCDE* complexo


Pentágino *IJFGH* não convexo


Pentágono *MLKPN* convexo

## 2. Fórmulas importantes

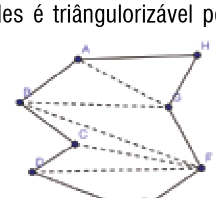
Por triangulação, que consiste em quebrar um polígono em triângulos através de suas diagonais, podemos concluir que a soma dos ângulos internos de um polígono simples é dada pela fórmula:

$S = 180° \cdot (n - 2)$,

sendo $n$ o gênero do polígono.

**Obs.:** É fácil provar que todo polígono simples é triângulorizável por indução.

Para polígonos convexos, a soma de um ângulo interno com um externo sempre será um ângulo raso, logo podemos concluir que, para polígonos convexos, a soma dos ângulos externos de cada vértice é constante e igual a 360 graus.


Octógono *ABCDEFGH* triângulo
Seis triânulos $\Rightarrow S = 1080°$

Pode ser ainda calcular o número de diagonais de um polígono de gênero $n$, pela seguinte expressão:

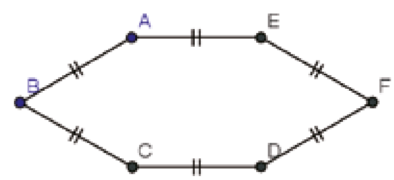
$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Dem: De fato que de cada vértice do polígono partem n – 3 retas uma vez que, um vértice não se liga a si mesmo, nem aos seus dois vizinhos(lados).

Como o polígono tem gênero $n$, teríamos $n(n-3)$ reatas, porém cada reta é contada duas vezes(uma em cada vértice).

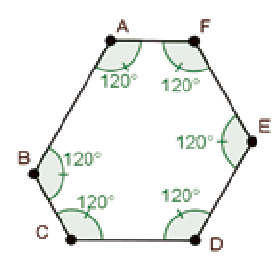
## 3. Polígonos regulares

Dizemos que um polígono convexo é equilátero quando todos os seus lados são congruentes.



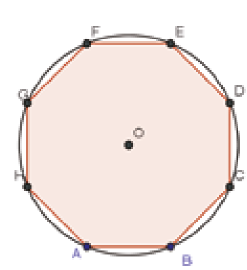
*ABCDFE* é polígono equilátero

Dizemos que um polígono convexo é equiângulo quando todos os seus ângulos internos são congruentes.

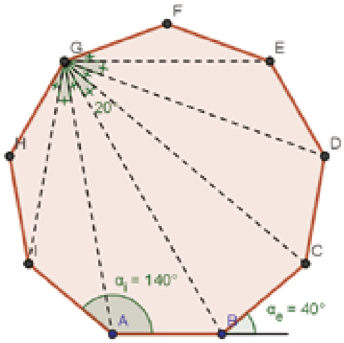


*ABCDEF* é hexágono equiângulo

Observe pelas figuras que um polígono equilátero não necessariamente é equiângulo, e vice-versa. Dessa maneira, existem os polígonos regulares: são os polígonos equiláteros e equiângulos simultaneamente. Todo polígono regular admite um centro, que é um ponto que equidista dos vértices, bem como dos lados. Logo, sempre existe um círculo circunscrito a um polígono regular, bem como um inscrito nele.


Octógono regular do centro *O*

Num polígono regular, todos os ângulos internos são iguais a $\alpha_i = \dfrac{180^0(n-2)}{n}$, e todos os ângulos externos são iguais a $\alpha_e = \dfrac{360^0}{n}$. Ao traçar as diagonais, cada ângulo interno fica dividido em partes congruentes, iguais à metade do ângulo externo.




Eneágono regular

No polígono regular de gênero *n* temos ainda os seguintes fatos conhecidos:

- *n* é par: o número de diagonais que passam pelo centro é $\dfrac{n}{2}$ e que não passam é $\dfrac{n(n-3)}{2} - \dfrac{n}{2} = \dfrac{n(n-4)}{2}$.
- *n* é ímpar: nenhuma diagonal passa pelo centro.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** *ABCD* é um quadrado, e *ABP* e *BCQ* são triângulos equiláteros, o primeiro interno ao quadrado, e o segundo externo a ele. Prove que *D*, *P* e *Q* são colineares.

**Solução:**

Considerando que *ABCD* e *ABP* possuem o mesmo lado, então o triângulo *APD* é isósceles, e $\hat{A} = 30°$ implica $PDA = 75°$. Logo $PDC = 15°$. Analogamente, considerando *ABCD* e *BCQ*, tem-se que o triângulo *QCD* é isósceles, com $C = 150°$. Logo $QDC = 15°$. Como *PDC* e *QDC* são iguais a 15°, então os pontos *D*, *P* e *Q* são colineares.

**02** Um polígono regular de gênero desconhecido *ABCDEF* é tal que o ângulo *ACE* mede 150°. Calcule o número de diagonais do polígono.

**Solução:**

*ABC* é um triângulo isósceles. Sendo $x = BCA$, tem-se que o ângulo *BCD* mede $x + 150° + x$. Além disso, o ângulo externo do polígono é dado por $2x$. Como o ângulo interno é suplementar do externo, tem-se que $(2x + 150°) + 2x = 180°$, logo $2x = 15°$. Sendo *n* o gênero, tem-se que $n = 360° / 15° = 24$. Logo $D = 24 \cdot 21 / 2 = 252$ diagonais.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** *ABCD* é um quadrado e *ABP* é um triângulo equilátero. Calcule o ângulo *CDP* nos seguintes casos:

a. o triângulo é interno ao quadrado.
b. o triângulo é externo ao quadrado.

**02** *ABCDE* é um pentágono regular, e *ABIJK* é outro pentágono regular. Calcule o ângulo $A\hat{I}C$.

**03** Em um quadrilátero *ABCD* convexo, os ângulos internos em *A* e *B* medem 120° e 80° respectivamente. Calcule o ângulo agudo formado pelas bissetrizes internas nos vértices *C* e *D*:

(A) 60°.
(B) 65°.
(C) 70°.
(D) 75°.
(E) 80°.

**04** Um polígono regular tem 20 diagonais. Quanto mede seu ângulo interno?

**05** Aumentando o número de lados de um polígono em 3 unidades, seu número de diagonais aumenta em 21. Determine o número de diagonais do polígono.

**06** Calcule o número de diagonais que não passam pelo centro de um polígono regular de 2*n* lados.

**07** A soma dos gêneros de dois polígonos é 16. Se os seus números de diagonais diferem de 26, a diferença entre seus gêneros é:

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

**08** A soma dos ângulos internos de dois polígonos regulares é 1980°, e a diferença entre seus gêneros é 3. Determine os polígonos.

**09** Dois polígonos regulares são tais que o gênero de um excede o do outro em 3 unidades, e o número de diagonais de um é o quádruplo do número de diagonais do outro. Determine os ângulos internos desses dois polígonos.

**10** Um polígono regular convexo tem o seu número de diagonais expresso por $n^2 - 10n + 8$, onde *n* é o seu número de lados. O seu ângulo interno *x* é tal que:

(A) $x < 120^o$.
(B) $120^o < x < 130^o$.
(C) $130^o < x < 140^o$.
(D) $140^o < x < 150^o$.
(E) $x > 150^o$.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** *ABCDE* é um pentágono regular, e *ABI* é um triângulo equilátero, sendo I interno ao pentágono. Calcule o ângulo $C\hat{I}D$.

**02** Em um polígono convexo de 15 vértices, são escolhidos quatro de seus vértices, sem que haja dois consecutivos. Quantas são as diagonais que partem desses 4 vértices?

**03** Em um polígono convexo, dois ângulos internos medem 130°, e todos os outros medem 128°. Determine o gênero desse polígono.

**04** Em um polígono regular, as mediatrizes de dois lados consecutivos formam um ângulo de 20°. Calcule o ângulo formado entre as duas diagonais menores que partem do mesmo vértice.

**05** As diagonais de um polígono regular convexo são medidas, e apresentam os valores: $\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{14}\}$. Calcule o ângulo externo desse polígono, sabendo que, em graus, ele apresenta um valor inteiro.

**06** Em um polígono regular *ABCDE*..., as bissetrizes externas traçadas de *A* e *C* são perpendiculares. Qual é o gênero do polígono?

**07** Dois polígonos regulares são tais que a razão entre seus ângulos internos é 5/4, e a razão entre seus ângulos externos é 1/2. Calcule o número de diagonais do polígono com maior gênero.

**08** Um ladrilho com formato de polígono regular é tal que, rotacionado em torno do centro de 40° no sentido horário ou de 60° no sentido anti-horário, fica encaixado perfeitamente no espaço vago deixado antes de rotacionar. Determine o número mínimo de lados que tal ladrilho pode possuir.

**09** Dado um polígono convexo regular *ABCDEF*.. de gênero desconhecido, considere as bissetrizes de seus ângulos internos *A* e *D*. Sabendo que o ângulo formado por essas bissetrizes é igual a $\frac{3}{40}$ da soma de todos os ângulos internos do polígono, pede-se para calcular quantas diagonais ele possui.

**10** O número de gêneros de polígonos regulares tais que quaisquer duas de suas diagonais, que passam pelo seu centro, formam entre si ângulo expresso em graus por um número inteiro, é:

(A) 17.
(B) 18.
(C) 21.
(D) 23.
(E) 24.

**11** **(ITA-2003)** Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto desses três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780º. O número total das diagonais nesses três polígonos é igual a:

(A) 63.
(B) 69.
(C) 90.
(D) 97.
(E) 106.

**12** **(ITA-1998)** Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I. Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.
II. Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.
III. Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

(A) Todas as afirmações são verdadeiras.
(B) Apenas I e III são verdadeiras.
(C) Apenas I é verdadeira.
(D) Apenas III é verdadeira.
(E) Apenas II e III são verdadeiras.

**13** Um hexágono *ABCDEF* convexo é tal que *AB*//*DE*, *BC*//*EF* e *CD*//*AF*. Prove que os ângulos internos nos vértices opostos são iguais.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** **(ITA-Adaptado)** Considere um polígono convexo não necessariamente regular de gênero *x*. Sabe-se dele que a soma de $x - 1$ ângulos internos desse polígono é 2014°. Calcule o número de diagonais desse polígono.

**02** Prove que, em um polígono convexo, o número máximo de ângulos internos agudos é 3.

**03** Um hexágono *ABCDEF* é equiângulo. Sabendo que $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 6$, $DE = 10$, calcule os lados *EF* e *FA*.

**04** Prove que em qualquer pentágono convexo, existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

RASCUNHO

## 1. Definição e propriedades iniciais

Triângulo é o polígono de gênero 3. Não possui diagonais, e é sempre convexo. Possui portanto três lados, três vértices, três ângulos internos [que somam 180˚] e três ângulos externos.

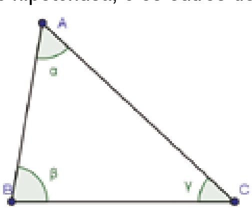
Podemos classificar os triângulos quanto às medidas dos lados:

I. **Escaleno**: todos os seus lados são diferentes;
II **Isósceles**: possui pelo menos dois lados iguais;
III **Equilátero**: possui todos os lados iguais.

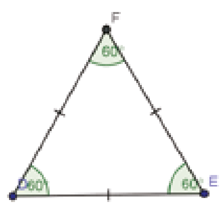
Podemos classificá-los também quanto aos ângulos internos:

I. **Acutângulo**: todos os seus ângulos internos são agudos;
II. **Retângulo**: possui um ângulo interno reto;
III. **Obtusângulo**: possui um ângulo interno obtuso.

Se um triângulo é retângulo, chamamos o lado oposto ao ângulo reto de hipotenusa, e os outros dois lados de catetos.



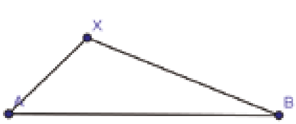
Triângulo ABC. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



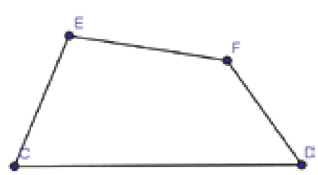
O triângulo equilátero é sempre regular

## 2. Desigualdade triangular – teorema da envolvente

A desigualdade triangular estabelece o seguinte: dados dois pontos, A e B, e um ponto *X* qualquer variável, sempre vale que AB ≤ AX + XB, com igualdade se, e somente se, *X* está entre A e B. Essa desigualdade pode ser estendida: dada uma poligonal fechada, um lado é menor que a soma de todos os outros lados.



Na figura, $AB < AX + XB$

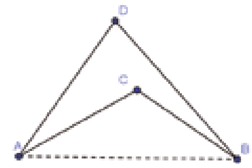


Na figura, $CD < CE + EF + FD$

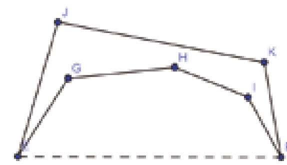
A partir disso, podemos concluir a condição de existência de um triângulo: dados os lados de um possível triângulo, ele existe se, e somente se:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases} \Leftrightarrow |a - b| < c < a + b$$

Além do mais, deduz-se o Teorema da Envolvente: se dois caminhos convexos de A para B são tais que a região definida por um [o envolvente] contém a região definida pelo outro [o envolvido], então o comprimento daquele será maior que o desse.



Na figura, $AC + BC < AD + DB$



Os caminhos são convexos.
$m\,(EGHIF) < m(EJKF)$

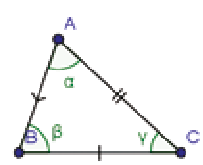
Uma desigualdade muito útil é a seguinte: num triângulo, o maior lado é sempre oposto ao maior ângulo, e o menor lado é sempre oposto ao menor ângulo.

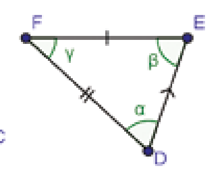
## 3. Congruência de triângulos

Dizemos que dois triângulos são congruentes se, e somente se, os lados e os ângulos internos de um são homologamente congruentes aos lados e ângulos internos do outro. Formalmente, dizemos:

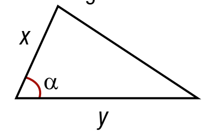
$$\Delta ABC = \Delta DEF \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}, AB = DE, AC = DF, BC = EF.$$

Para demonstrar que dois triângulos são congruentes, basta testar se vale um dos cinco casos de congruência que seguem:

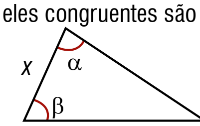


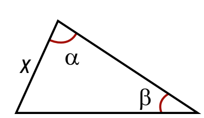

I. LAL – Lado/ângulo/lado: Triângulos com par de lados iguais formando ângulos congruentes são congruentes entre si.



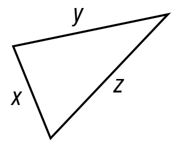

II. ALA – Ângulo/lado/ângulo: Triângulos com par de ângulos iguais com os lados comuns a eles congruentes são congruentes entre si.



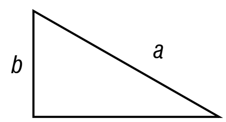

III. LAAo – Lado/ângulo/ângulo oposto: Triângulos com lado, ângulo adjacente ao lado e ângulo oposto a ele congruente um aos do outro são congruentes.



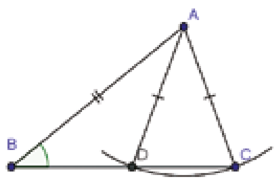

IV. LLL – Triângulos com todos os lados congruentes um aos do outro são congruentes.




V 90˚HC – Caso especial para triângulos retângulos: Triângulos retângulos que possuam hipotenusas iguais e um cateto de um igual a um do outro são congruentes.




**Obs.:** LLA não é caso de congruência!



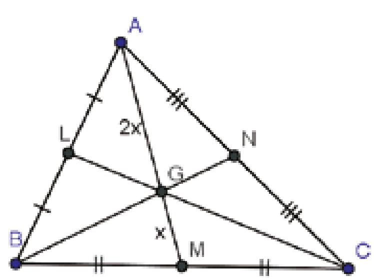

Os triângulos *ABC* e *ABD* possuem dois pares de lados em comum e os ângulos opostos a um deles iguais. Eles não são congruentes: um está dentro do outro

## 4. Cevianas notáveis – pontos notáveis

Dado um triângulo *ABC*, dizemos que o segmento *AD* é uma ceviana se o ponto *D* está sobre a reta suporte do lado *BC*. Caso *D* esteja sobre o lado *BC*, dizemos que *AD* é ceviana interna. Caso contrário, *AD* é ceviana externa.

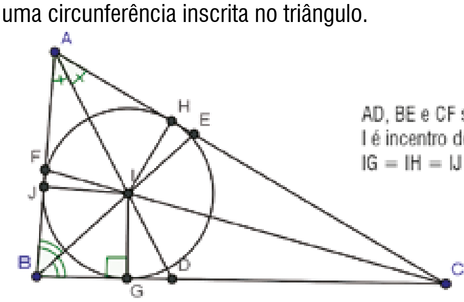
Algumas cevianas possuem propriedades importantes, e têm nomenclatura especial.

a. **Mediana [e o baricentro]**: se *M* é ponto médio de *BC*, chamamos *AM* de mediana relativa ao lado *BC*. Cada triângulo possui três medianas, que são concorrentes num ponto chamado baricentro. O baricentro *G* divide uma mediana *AM* na razão *AG* : *GM* = 2. Traçadas as medianas, o triângulo original fica dividido em seis triângulos de áreas iguais.



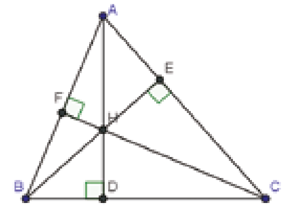

AM, BN e CL medianas
G é baricentro

b. **Bissetriz interna [e o incentro]**: se *D* sobre o lado *BC* é tal que *AD* bissecta o ângulo interno em *A*, chamamos *AD* de bissetriz interna relativa ao vértice *A*, ou relativa ao lado *BC*. Cada triângulo possui três bissetrizes internas, que são concorrrentes num ponto chamado incentro. O incentro equidista dos lados do triângulo, logo é centro de uma circunferência inscrita no triângulo.

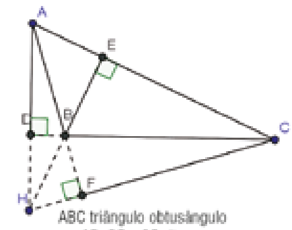



AD, BE e CF são bissetrizes
I é incentro de ABC
IG = IH = IJ é o inraio

c. **Altura [e o ortocentro]**: se *D* sobre a reta *BC* é tal que *AD* é perpendicular a *BC*, dizemos que *AD* é altura relativa a *BC*. A altura pode ser uma ceviana externa ou até mesmo um lado, como nas figuras. As três alturas traçadas a partir de cada vértice são concorrentes num ponto chamado ortocentro.




ABC triângulo acutângulo
AD, BE e CF alturas
H ortocentro interno a ABC

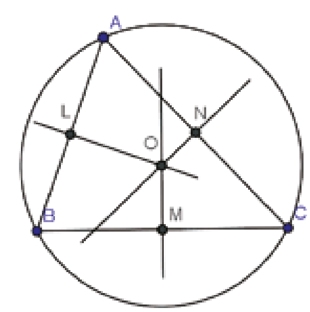



ABC triângulo obtusângulo
AD, BE e CF alturas
H ortocentro externo a ABC

d. **Bissetriz externa [e o exincentro]**: se o triângulo *ABC* é escaleno, então existe *D* sobre a reta *BC* tal que *AD* é bissetriz do ângulo externo em *A*. Chamamos *AD* de bissetriz externa. São três bissetrizes externas, uma para cada vértice. Duas retas bissetrizes externas e uma interna do vértice remanescente são concorrentes num ponto chamado exincentro relativo àquele vértice. São três exincentros, e eles são centros de círculos tangentes às retas suportes dos lados do triângulo.

Mediatriz

A mediatriz de um segmento *AB* é a reta perpendicular a *AB* no seu ponto médio. Num triângulo, as mediatrizes dos lados nem sempre são cevianas, já que não passam necessariamente pelo vértice oposto. Porém, no caso do triângulo, as mediatrizes dos lados são concorrentes num ponto chamado circuncentro, que equidista dos vértices, e, portanto, é centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo.

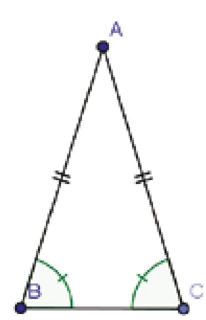



As mediatrizes dos lados encontram em O, circuncentro do triângulo ABC

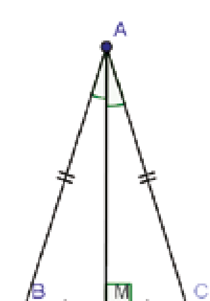
## 5. Triângulo isósceles

Podemos provar que um triângulo tem uma das propriedades abaixo se, e somente se, ele é isósceles. Seguem:

- Os ângulos das bases são congruentes;
- a altura do vértice principal também é mediana;
- a altura do vértice principal também é bissetriz;
- a bissetriz do vértice principal também é mediana.




ABC é isósceles com AB = AC
portanto B = C

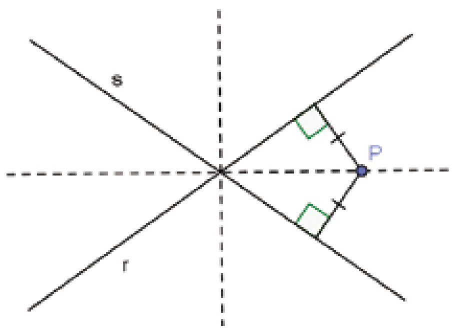



ABC é isósceles com AB = AC
AM é mediana, bissetriz e altura

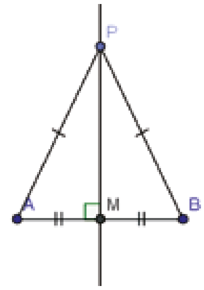
## 6. Lugares geométricos iniciais

Dada uma propriedade Ω, dizemos que certo conjunto é o *lugar geométrico* (LG) de Ω se, e somente se, todos os pontos que satisfazem a Ω estão no conjunto, e vice-versa. Inicialmente, podemos deduzir três importantes LG's.

a. **Par de retas bissetrizes:** dadas duas retas concorrentes *r* e *s*, o LG dos pontos *P* que equidistam de *r* e *s* é o par de retas bissetrizes dos ângulos formados pelas retas.

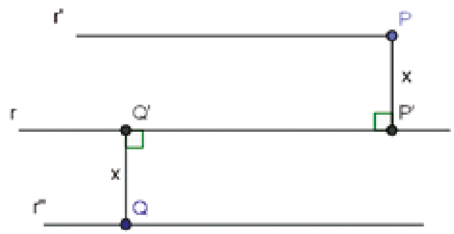



b. **Mediatriz:** dado um segmento *AB*, o LG dos pontos *P* que equidistam de *A* e *B* é a mediatriz de *AB.*




*P* está na mediatriz de *AB*, logo $PA = PB$

c. **Par de paralelas:** dada uma reta *r* e uma distância *d*, o LG dos pontos *P* que distam *d* da reta *r* é o par de paralelas a uma distância *d*.




*P* e *Q* pertencem a *r'* e *r"* paralelas distando *x* de *r*.
$\text{dist}(P, r) = PP' = x = QQ' = \text{dist}(Q, r)$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Truque do simétrico – Dados dois pontos *A* e *B* no mesmo semiplano determinado por uma reta *r*, determine o ponto *P* que minimiza a soma $PA + PB$, sendo *P* sobre a reta *r*.

**Solução:** Seja $A^*$ o simétrico de *A* em relação a *r*. Logo, por simetria [mediatriz], $AP + PB$ é igual a $A^*P + PB$ para todo *P* na reta. Logo, para minimizar $PA + PB$, basta minimizar $PA^* + PB$, o que ocorre quando $A^*$, *P* e *B* são colineares. Logo, o ponto *P* que minimiza a soma $PA + PB$ é a interseção do segmento $A^*B$ com a reta *r*.
[A ideia do simétrico é muito útil em problemas de mínimos caminhos.]

**02** Seja *P* interno ao triângulo *ABC*. Prove que $AP + PB < AC + CB$. [Teorema da Envolvente]

**Solução:** Considere prolongar o segmento *AP* até *X* sobre *BC*. Por desigualdade triangular temos:

No triângulo *ACX*: $AP + PX < AC + CX$.
No triângulo *PXB*: $PB < PX + XB$.

Somando e usando a lei do corte, tem-se a conclusão de que é um caso particular do teorema da envolvente. Usando a ideia de prolongar o segmento, podem-se provar as versões poligonais generalizadas.

**03** *A*, *B* e *C* são pontos colineares, com *B* entre *A* e *C*. Constroem-se, num mesmo semiplano gerado por *AB*, os triângulos equiláteros *ABX* e *BCY*. Sendo *M* e *N* médios de *AY* e *CX*, prove que o triângulo *BMN* é equilátero.

**Solução:** Observe que os triângulos *ABY* e *XBC* são congruentes pelo caso LAL. ($AB = XB$, $BY = BC$ e os ângulos *B* medem 120°). Logo, as medianas relativas aos lados *AY* e *XC* são congruentes [ou seja, $BM = BN$]. Além disso, o ângulo entre elas é de 60° [por argumento de rotação], logo o triângulo *BMN* é equilátero.

**04** *ABC* é um triângulo em que $\hat{A} = 120°$. Sejam *D*, *E* e *F* pés das bissetrizes internas de *A*, *B* e *C,* respectivamente. Prove que:

a. E é exincentro do triângulo *ABD*, bem como *F,* de *ACD*.
b. triângulo *EFD* é retângulo [em *D*].

**Solução:** Considerando o triângulo *ABD*, tem-se que *BE* é bissetriz interna e que *AE* é bissetriz externa [já que, prolongando *AB* de *AX*, tem-se $E\hat{A}D = E\hat{A}X = 60°$]. Logo, *E* é exincentro do triângulo *ABD*. Consequentemente, *DE* é bissetriz externa. Analogamente, *F* é exincentro do triângulo *ACD*, e *DF* é bissetriz externa desse triângulo. Como os ângulos *ADB* e *ADC* são suplementares, essas bissetrizes *DE* e *DF* são perpendiculares entre si. Logo, o triângulo *EFD* é retângulo em *D*.

### EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** Em um triângulo *ABC*, tomam-se sobre os lados *AB* e *BC* os pontos *D* e *E*, respectivamente, tais que $BD = BE$, e a medida dos ângulos *BCD* e *BAE* são iguais. Analise as afirmativas:

I. os triângulos BEA e BDC são congruentes;
II. os ângulos BDC e BEA são congruentes;
III. os segmentos BE e AD são congruentes;
IV. os segmentos CD e AE são congruentes.

Quantas afirmativas são verdadeiras?

(A) Nenhuma.
(B) Apenas uma.
(C) Apenas duas.
(D) Apenas três.
(E) Todas.

**02** Sobre os lados $AB$ e $AC$ de um triângulo $ABC$, tome os triângulos equiláteros $ABP$ e $ACQ$, externos ao triângulo $ABC$. Prove que:

a. $CP$ e $BQ$ são congruentes;
b. as retas $CP$ e $BQ$ formam um ângulo de 120°.

**03** Sobre os lados $AB$ e $AC$ de um triângulo $ABC$, tomam-se os quadrados $ABDE$ e $ACFG$. Prove que os segmentos $CE$ e $BG$ são congruentes e perpendiculares entre si.

**04** Prove que, num triângulo $ABC$, a reta suporte da mediana $AM$ equidista dos vértices $B$ e $C$.

**05** Em um triângulo $ABC$, $AD$ é bissetriz. Sobre a semirreta $AD$, tomam-se os pontos $E$ e $F$ tais que $AB = AE$ e $AC = AF$. Prove que $BF = CE$.

**06** Dadas as seguintes proposições, analise se são elas verdadeiras (V) ou falsas (F):

I. Dois triângulos retângulos são congruentes se possuem dois lados congruentes.
II. Se em um quadrilátero $ABCD$, $BC = CD$, e $B\hat{A}C = D\hat{A}C$, então os triângulos $ABC$ e $ADC$ são congruentes.
III. Se no quadrilátero $ABCD$, $AC = BD$ e os ângulos $ABD$ e $ACD$ são retos, concluímos que $AB = CD$.

Então, tem-se:

(A) V-F-V.
(B) F-V-V.
(C) V-V-V.
(D) V-V-F.
(E) F-F-V.

**07** Em um triângulo $ABC$, prolongam-se as medianas $BM$ e $CN$ de comprimentos iguais [$MB' = BM$, $NC' = CN$]. Prove que $A$ é ponto médio de $B'C'$.

**08** No triângulo $ABC$, $AB = 5$, $AC = 7$, e os ângulos internos são crescentes na seguinte ordem: $C < A < B$. Diga quanto mede $BC$, dado que é inteiro.

(A) 4.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 7.
(E) 8.

**09** Em um triângulo $ABC$ isósceles, dois lados medem 14 cm e 4 cm. Calcule o perímetro do triângulo.

(A) 18 cm.
(B) 22 cm.
(C) 32 cm.
(D) Podem ser 22 cm ou 32 cm.
(E) Faltam dados.

**10** Prove que, em um quadrilátero convexo, a soma das medidas das diagonais é maior que a soma das medidas de dois lados opostos.

**11** Entre que valores está compreendido um dos lados de um quadrilátero que possui lados medindo 3 cm, 5 cm e 11 cm?

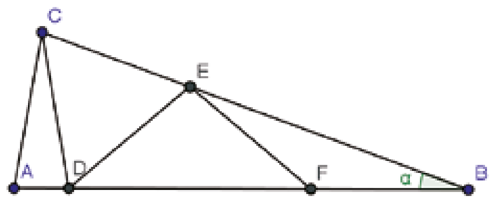
**12** Seja $ABC$ um triângulo e $AD$, uma ceviana interna. Prove que $AD$ é menor que o semiperímetro do triângulo.

**13** Em um triângulo $ABC$, calcule, em função do ângulo interno em $A$, os ângulos formados:

(A) pelas bissetrizes internas em $B$ e $C$.
(B) pelas alturas traçadas de $B$ e $C$.
(C) pelas bissetrizes externas de $B$ e $C$.
(D) pelas bissetrizes interna em $B$ e externa em $C$.

**14** $ABC$ é um triângulo isósceles tal que $AB = AC = 13$, $BC = 10$. Sobre o lado $BC$, toma-se um ponto $P$, e sobre os lados $AB$ e $AC$ tomam-se $X$ e $Y$, respectivamente, tais que $PX \,//\, AC$ e $PY \,//\, AB$. Calcule a soma $PX + PY$.

**15** Na figura, tem-se $AB = BC$ e $AC = CD = DE = EF$. Calcule $\alpha$.




**16** $ABC$ é um triângulo isósceles com $AB = AC$. Sobre os lados $BC$ e $AC$, tomam-se os pontos $P$ e $Q$, de forma que $AP = AQ$. Calcule o ângulo $QPC$, sabendo que $B\hat{A}P = 30°$.

(A) 10°.
(B) 15°.
(C) 20°.
(D) 25°.
(E) 30°.

**17** $ABC$ é um triângulo no qual o ângulo interno em $A$ é o dobro do em $B$. Sejam $X$ e $Y$ pontos sobre $BC$ e $AC$ tais que $AB = AX = XY = YC$. Calcule os ângulos do triângulo $ABC$.

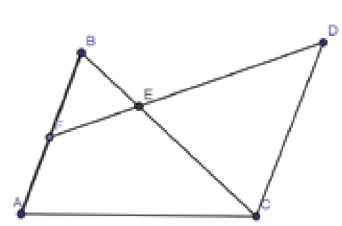
**18** Dado um triângulo $ABC$, marca-se um ponto $D$ sobre $AC$ de forma que $AB = AD$. Sabendo que o ângulo interno em $B$ excede o em $C$ em 30°, calcule a medida do ângulo $CBD$.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** Dado um triângulo $ABC$, sobre os lados $AC$ e $BC$ são marcados os pontos $M$ e $N$, respectivamente, tais que $AB = MC$, $MB = MN$, e os ângulos $ABM$ e $CMN$ são congruentes. Sabendo que $B\hat{A}C = 50°$, quanto vale o ângulo $ACB$?

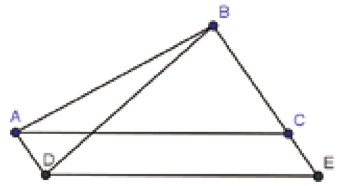
(A) 50°.
(B) 40°.
(C) 60°.
(D) 25°.
(E) 75°.

**02** Na figura, os triângulos $ABC$ e $CDE$ são congruentes, de forma que $AC = CD$. Se $EC = 5$, $EF = 2$, então quanto mede $AF$?




(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 5.
(E) 7.

**03** Na figura, $AB = BD$ e os triângulos $ABC$ e $BDE$ são congruentes. Calcule a razão entre os ângulos $BCA$ e $DAC$.




(A) 1:1.
(B) 3:2.
(C) 1:2.
(D) 1:3.
(E) 2:1.

**04** Considere os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$, sobre os quais são feitas as seguintes afirmações:

I. Se $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, então os triângulos são congruentes.
II. Se $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $B = B'$, então os triângulos são congruentes.
III. Se $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, e $BC > AB$, então os triângulos são congruentes.

As afirmações verdadeiras são:

(A) apenas II.
(B) apenas I e II.
(C) apenas II e III.
(D) apenas I e III.
(E) todas.

**05** $ABCD$ é um quadrilátero convexo, de perímetro $2p$. Podemos garantir então que $AC + BD$ está entre:

(A) 0 e $p$.
(B) $p$ e $2p$.
(C) $2p$ e $3p$.
(D) $3p$ e $4p$.

**06** Prove que a medida da mediana traçada de um vértice em um triângulo qualquer está entre a semidiferença e a semissoma dos dois lados consecutivos a ela. [Dica: considere prolongar uma mediana $AM$ de $MA' = MA$.]

**07** Em um quadrilátero $ABCD$, no qual os ângulos $ABC$ e $ADC$ são retos, tem-se que o ângulo $ACD$ é o dobro do ângulo $ACB$, e também $AB = 2$. Calcule a medida de $AD$, sabendo que é um valor inteiro.

(A) 4.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 6.
(E) 5.

**08** Seja $ABC$ um triângulo qualquer, e $P$ um ponto interno qualquer. Prove que a soma $PA + PB + PC$ é maior que o semiperímetro e menor que o perímetro do triângulo.

**09** Mostre que são menores que o perímetro de um triângulo:

a. a soma das alturas.
b. a soma das medianas.

**10** Considere $ABC$ um triângulo equilátero. Prolongando $BC$ de um segmento $CP$ qualquer, toma-se, sobre a altura de $B$ no triângulo $ABP$, um ponto $Q$ tal que $Q\hat{A}B = 30°$. Calcule a medida do ângulo $QPC$.

(A) 15°.
(B) 20°.
(C) 30°.
(D) 35°.
(E) 45°.

**11** Em um triângulo isósceles $ABC$ de base $AC$ e ângulo interno em $B = 40°$, traça-se a ceviana interna $CM$ e marca-se o incentro $I$ do triângulo $MCB$. Os ângulos $AMC$ e $IAC$ são congruentes. Calcule $B\hat{A}I$.

(A) 20°.
(B) 40°.
(C) 10°.
(D) 50°.
(E) 30°.

**12** $ABC$ é um triângulo equilátero. Prolonga-se $BC$ de um segmento $BP$, de forma que o ângulo $APB$ meça 20°. Sobre o segmento $AP$, toma-se um ponto $Q$ tal que o triângulo $PQC$ é isósceles. Calcule a medida do ângulo $QBA$.

**13** Sobre os lados $AB$ e $AC$ de um triângulo $ABC$, tomam-se os pontos $M$ e $N$, tais que $MN$ // $BC$ e $MN$ passa pelo incentro de $ABC$. Calcule a medida de $MN$, sabendo que $AB = 10$, $BC = 11$ e $AC = 12$.

**14** $ABC$ é um triângulo equilátero, $X$ é um ponto interno, e $M$, $N$ e $P$ estão sobre os lados $AB$, $AC$ e $BC$, de forma que $XM$ // $AC$, $XN$ // $BC$ e $XP$ // $AB$. Sabendo que $XM = 3$, $XN = 4$ e $XP = 5$, calcule o lado do triângulo $ABC$.

**15** Em um triângulo $ABC$, $AB = AC$, e o ângulo $\hat{A} = 40°$. Tomam-se os pontos $D$ e $E$ sobre $AB$ e $AC$, respectivamente, tais que os ângulos $DCA$ e $EBC$ medem 15° e 35°, nessa ordem. Calcule $B\hat{E}D$.

**16** O triângulo $ABC$ é equilátero de lado 3 cm. Toma-se sobre o lado $BC$ o ponto $P$. Seja $Q$ o pé da perpendicular de $P$ a $AB$, $R$ o pé da perpendicular de $Q$ a $AC$ e $S$ o pé da perpendicular de $R$ a $BC$. Calcule a distância $PB$ para que os pontos $P$ e $S$ coincidam.

**17** Prove que a soma das distâncias de um ponto qualquer da base de um triângulo isósceles aos dois lados congruentes é constante e igual às alturas iguais do triângulo.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo, e $BH$ e $CJ$ alturas. Prolonga-se $BH$ de um segmento $BX = AC$, e prolonga-se $CJ$ de um segmento $CY = AB$. Prove que o triângulo $XAY$ é retângulo isósceles.

**02** Em um grande salão de baile há várias pessoas espalhadas, e as distâncias entre elas são todas distintas. Uma pessoa A vai falar com outra pessoa B se, dentre todas, B for a mais próxima de A, e depois retorna ao lugar de origem. Uma pessoa por vez sai do seu lugar, e depois retorna. Qual é o número máximo de saudações de pessoas diferentes que alguém pode receber?

(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 5.
(E) 6.

**03** Dada uma reta, $r$, e dois pontos, $A$ e $D$, em um mesmo semiplano gerado por $r$, determine os pontos $B$ e $C$ sobre $r$ tais que $BC = k$, dado, e o comprimento da linha poligonal $AB + BC + CD$ seja mínimo.

**04** No triângulo $ABC$, retângulo em $A$, a bissetriz interna de $B$ intersecta a altura $AH$ em $E$ e o lado $AC$ em $M$. A bissetriz interna de $C$ intersecta $AH$ em $F$ e o lado $AB$ em $N$. Se $AM = 2$ cm, $NA = 6$ cm, o valor de $EF$, em cm, é:

(A) 3.
(B) 4.
(C) 4,5.
(D) 5.
(E) 6.

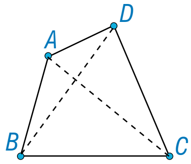
**05** Dadas duas retas concorrentes, determine o lugar geométrico dos pontos $P$ tais que a soma das distâncias de $P$ a essas retas é constante e igual a $k$, dado.

**06** Dadas duas retas concorrentes, determine o lugar geométrico dos pontos $P$ tais que a diferença das distâncias de $P$ a essas retas é constante e igual a $k$, dado.

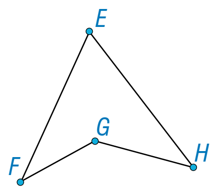
RASCUNHO

## 1. Definições e propriedades iniciais

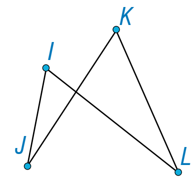
Quadrilátero é o polígono de gênero 4. Sempre possui duas diagonais. Pode ser polígono complexo, ou simples, e aí, convexo ou não convexo como nas figuras abaixo. Caso seja simples, a soma dos seus ângulos internos é 360°.



*ABCD* é um quadrilátero simples e convexo



*EFGH* é um quadrilátero simples e não convexo



*IJKL* é um quadrilátero auto intersectante

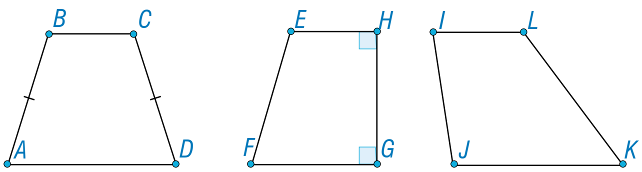
Diferente dos triângulos, os quadriláteros possuem uma estrutura não tão bem definida a partir de poucas informações [dessa maneira, é difícil inclusive estabelecer critérios de congruência de quadrilátero, de forma que não discutiremos a respeito disso]. Por outro lado, alguns quadriláteros possuem definições interessantes que levam a propriedades bastante úteis, e então recebem nomes especiais.

## 2. Trapézio

Dizemos que se o *#ABCD* é convexo tal que *AB*//*CD*, então o quadrilátero é um 'trapézio' de bases *AB* e *CD*. Caso os outros lados opostos não sejam paralelos, a eles chamaremos lados oblíquos.

Existem 3 tipos especiais de trapézio:

→ Trapézio isósceles: os lados oblíquos são congruentes;
→ Trapézio escaleno: os lados oblíquos não são congruentes;
→ Trapézio retângulo: um lado oblíquo é perpendicular às bases [costuma ser chamado de altura].



*ABCD* é um trapézio isósceles, *EFGH* é um trapézio retângulo, *IJKL* é um trapézio escaleno.

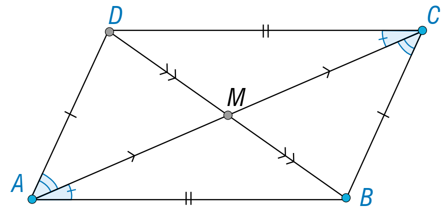
Uma estratégia comum em resolução de problemas com trapézio é traçar alguma paralela, normalmente a algum lado oblíquo, quebrando um trapézio em um triângulo e um paralelogramo.

## 3. Paralelogramo

Dizemos que se o *#ABCD* é tal que *AB*//*CD* e *AD*//*BC*, então o quadrilátero é um 'paralelogramo'. Através de congruência de triângulos, podemos provar as seguintes propriedades:

→ Os pares de ângulos internos opostos são congruentes;
→ Os pares de lados opostos são congruentes;
→ As diagonais do paralelogramo se bissectam, isto é, se cortam no ponto médio.

De fato, também é possível provar que, se uma dessas propriedades é satisfeita, então o quadrilátero é necessariamente um paralelogramo. Além disso, vale que: se o quadrilátero convexo *ABCD* é tal que *AB* e *CD* são segmentos paralelos e congruentes, então ele é um paralelogramo.

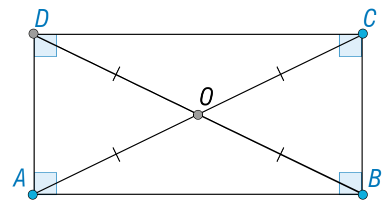


Na figura, *ABCD* é um paralelogramo.

## 4. Retângulo

Dizemos que um quadrilátero é 'retângulo' se for um quadrilátero equiângulo. Dessa maneira, todos os seus ângulos serão retos. Como todos os ângulos são congruentes, em particular os opostos são iguais; logo, todo retângulo é paralelogramo, herdando suas propriedades.

Uma propriedade que o retângulo tem a mais, diferente dos paralelogramos, é que suas diagonais são sempre congruentes.



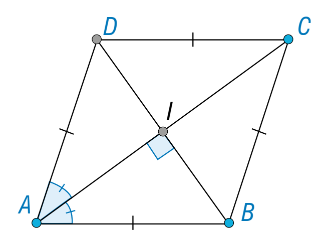
*ABCD* é um retângulo de centro *O*, o ponto *O* equidista dos vértices

Obs.: Todo triângulo retângulo pode ser obtido através do traço de uma diagonal em um retângulo. Logo, pode-se deduzir que a mediana relativa à hipotenusa sempre mede a metade dela. [Na figura, o triângulo *ABD* é retângulo, *AO* é mediana relativa à hipotenusa e vale a metade da diagonal, ou seja, vale a metade de *BD*.]

## 5. Losango

Dizemos que um quadrilátero é 'losango' se for um quadrilátero equilátero. Dessa maneira, todos os seus lados são congruentes. Em particular, tem-se que os lados opostos são congruentes; logo, todo losango é um paralelogramo, herdando assim suas propriedades.

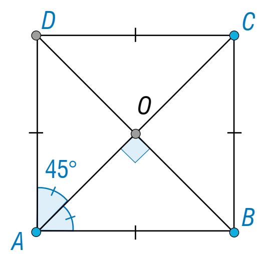
Uma propriedade que o losango tem a mais, diferente dos paralelogramos [e, portanto, também dos retângulos], é que suas diagonais são perpendiculares. Também são bissetrizes dos ângulos internos.



*ABCD* é um losango, o ponto *I* equidista dos lados

## 6. Quadrado

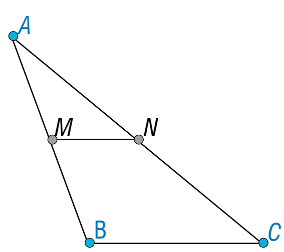
Dizemos que um quadrilátero é ‘quadrado’ se for um quadrilátero regular, isto é, se for equiângulo e equilátero ao mesmo tempo. Dessa maneira, todo quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo, portanto, possui as propriedades deles.




*ABCD* é um quadrado de centro *O*

## 7. Base média de triângulo

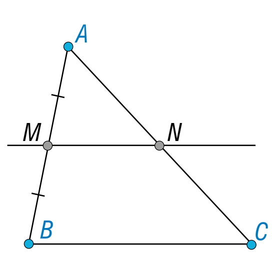
Dado um triângulo *ABC*, sejam *M* e *N* os pontos médios dos lados *AB* e *AC*. Dizemos que o segmento *MN* é uma base média relativa ao lado *BC*. Nesse caso, valem as seguintes afirmativas: $MN//BC$ e $2 \cdot MN = BC$, ou seja, a base média é paralela e igual à metade do lado ao qual ela é relativa.



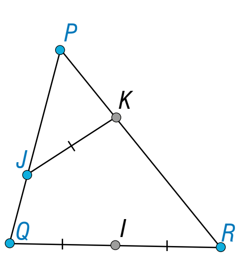

*MN* é a base média do *ABC*

$MN//BC$ e $MN = \dfrac{BC}{2}$

Se, em um triângulo *ABC*, *M* é ponto médio de *AB*, e *N* está sobre *AC* de forma que *MN* seja paralelo a *BC*, então necessariamente *N* é ponto médio de *AC*.



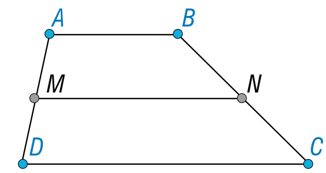

*M* ponto médio de *AB*
*MN*//*BC* implica *N* médio de *AC*




*JK* é a metade de *QR*
*JK* não é a base média

## 8. Base média de trapézio e mediana de Euler

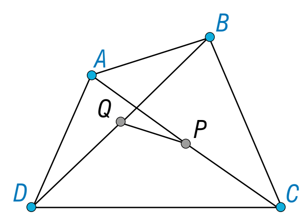
Usando argumentos de base média de triângulo, podemos provar o seguinte resultado: se *AB* e *CD* são bases de um trapézio de lados oblíquos *AD* e *BC*, e *M* e *N* são pontos médios desses lados oblíquos, então chamamos *MN* de base média do trapézio, e vale que $MN//AB//CD$ e *MN* mede a semissoma das bases, ou seja, $MN = (AB + CD)/2$.



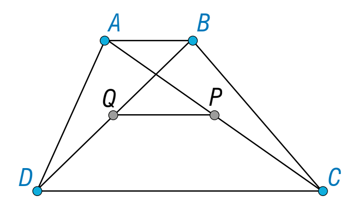

*MN* é a base média no trapézio *ABCD*

$MN//AB//CD$ E $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

Observe que a base média passa pelos pontos médios das diagonais do trapézio. O segmento formado pelos pontos médios das diagonais do trapézio é chamado de ‘Mediana de Euler’, e mede o módulo da semidiferença entre as bases do trapézio.




*PQ* é mediana de Euler em *ABCD*




Sendo *ABCD* um trapézio, *PQ* é med. de Euler, vale que $PQ//AB//CD$ e $PQ = \dfrac{CD - AB}{2}$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01.** No trapézio *ABCD*, as bases *AB* e *CD* medem 17 e 32, respectivamente. Sabendo que o ângulo interno em *B* é o dobro do encontrado em *D*, calcule a medida de *BC*.

**Solução**
Considere *P* sobre a base *CD* de forma que $BP//AD$. Dessa maneira, #*ADPB* é paralelogramo, e, por transporte de ângulos via paralelismo, os ângulos *ADP*, *BPC* e *PBA* são congruentes. Como *B* é o dobro de *D*, o ângulo *PBC* é igual também. Com isso, o triângulo *BPC* é isósceles, com $BC = CP = CD - PD = CD - AB = 32 - 17 = 15$.

**02.** *ABCD* é um quadrilátero convexo qualquer. Prove que o quadrilátero formado pelos pontos médios dos lados de *ABCD* é um paralelogramo.

**Solução**
Sejam *M*, *N*, *P* e *Q* médios de *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, respectivamente. No triângulo *ABC*, *MN* é base média relativa a *AC*; logo, $MN//AC$ e $MN = AC/2$. Analogamente, no triângulo *ACD*, $PQ // AC$ e $PQ = AC/2$. Logo, $MN//PQ$ e $MN = PQ$, o que caracteriza #*MNPQ* como paralelogramo.

### EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** Em um trapézio retângulo, as bases medem 8 cm e 18 cm. Se um dos ângulos internos do trapézio mede 45°, então a altura do trapézio é:

(A) 12 cm.
(B) 18 cm.
(C) 13 cm.
(D) 10 cm.
(E) 9 cm.

**02** *ABCD* é um paralelogramo tal que $AB = 6$ e $AD = 8$. A bissetriz do ângulo interno em *A* corta *BC* no ponto *E*. Calcule a medida do segmento *CE*.

**03** Sobre os lados *CD* e *AD* de um paralelogramo *ABCD*, constroem-se, externamente a *ABCD*, triângulos equiláteros *CDE* e *ADF*. Prove que o triângulo *BEF* também é equilátero.

**04** Prove que qualquer reta que passa pelo ponto *I* de interseção das diagonais de um paralelogramo intersecta os lados opostos em dois pontos *M* e *N* tais que $IM = IN$.

**05** Dado o retângulo *ABCD* cuja diagonal mede 10 cm, inscreve-se nele um paralelogramo que possui os lados paralelos às diagonais do retângulo. Qual é o perímetro do paralelogramo?

**06** Duas retas perpendiculares entre si cortam os lados *AB*, *BC*, *CD* e *AD* de um quadrado nos pontos *X*, *Y*, *Z* e *W*. Prove que *XZ* e *YW* são congruentes.

**07** As bases de um trapézio escaleno medem 3 cm e 9 cm. Os segmentos determinados pelas diagonais do trapézio sobre a base média são proporcionais aos números:

(A) 1,1,1
(B) 1,2,1
(C) 1,3,1
(D) 1,4,1
(E) 2,3,4

**08** Em um paralelogramo *ABCD*, se *E* e *F* são os pontos médios de *AB* e *CD*, prove que as retas *DE* e *BF* dividem a diagonal *AC* em três partes congruentes.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** No trapézio *ABCD* retângulo, a base menor *AB* mede a metade do lado oblíquo *BC*. Sendo *M* médio de *BC*, tem-se que o ângulo *DMB* mede 120°. Calcule o ângulo interno em *C* no trapézio *ABCD*.

**02** As bases de um trapézio medem 10 cm e 8 cm e os lados não paralelos medem 5 cm e *x* cm. Quais são os possíveis valores de *x*?

**03** As diagonais *AC* e *BD* de um quadrilátero convexo *ABCD* se cortam num ponto *P*. Os perímetros dos triângulos *ABC* e *ABD* são iguais, bem como os dos triângulos *ACD* e *BCD*. Mostre que *ABCD* é um trapézio isósceles.

**04** *ABCD* é um paralelogramo de lados medindo 7 cm e 10 cm. Calcule o comprimento das diagonais do quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos internos de *ABCD*.

**05** Constroem-se quadrados sobre os lados de um paralelogramo, externamente a ele. Prove que o quadrilátero formado pelos seus centros é um quadrado, cujas diagonais são concorrentes com as do paralelogramo.

**06** Em um quadrado *ABCD*, as retas *r* e *s* passam pelo vértice *A*, intersectando os lados do quadrado. Perpendiculares *BB*', *BB*'', *DD*' e *DD*'' são traçadas em relação a essas retas. Prove que *B'B*'' e *D'D*'' são congruentes e perpendiculares entre si.

**07** Seja *ABCD* um quadrilátero convexo, e *M*, *N*, *P* e *Q* pontos médios de *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, respectivamente. Estabeleça condições sobre as diagonais *AC* e *BD* para que o quadrilátero *MNPQ* seja um:

a. retângulo;
b. losango;
c. quadrado.

**08** *ABC* é um triângulo acutângulo, *H* é pé da altura traçada de *A* a *BC*, e *M*, *N* e *P* são os pontos médios de *AB*, *AC* e *BC*, respectivamente. Calcule o perímetro do quadrilátero *MNPH*, sabendo que $AB = 8$, $BC = 12$ e $BH = 3$.

**09** No interior do triângulo *ABC*, toma-se um ponto I sobre a bissetriz de *A* de forma que o ângulo $A\hat{I}B$ é reto. Sendo *M* ponto médio de *BC*, calcule *IM*, sabendo que $AB = 15$, $AC = 19$ e $BC = 20$.

**10** No quadrilátero convexo *ABCD*, *AB* e *CD* são congruentes. Prove que a reta da mediana de Euler forma com esses lados ângulos também congruentes.

**11** Em um triângulo *ABC*, *AM* é mediana. No triângulo *ABM*, traça-se a mediana *BP*, que corta *AC* no ponto *Q*. Calcule a razão *AQ* : *QC*.

(A) 1 : 1
(B) 1 : 2
(C) 1 : 3
(D) 2 : 1
(E) 2 : 3

**12** São dadas duas paralelas. De um ponto *A* de uma delas, traça-se a perpendicular comum *AC* e uma reta oblíqua *AB*. Uma reta traçada de *B* intersecta *AC* em *E* e a outra paralela em *D*, de forma que $ED = 2 \cdot AB$. Sabendo que o ângulo *ABC* é de 60°, qual é a medida do ângulo *DBC*?

**13** *ABCD* é um paralelogramo, *E* é ponto médio de *AD* e *F* é a projeção de *B* sobre *EC*. Prove que o triângulo *AFB* é isósceles.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** *ABCD* é um quadrado de lado 2. Sobre os lados *BC* e *CD* marcam-se os pontos *M* e *N* de forma que $M\hat{A}N = 45°$. Calcule o perímetro do triângulo *MCN*.

**02** *ABCD* é um quadrilátero convexo qualquer. Prove que os segmentos que unem os pontos médios dos lados opostos de *ABCD* e a mediana de Euler de *ABCD* são concorrentes no ponto médio deles.

**03** Seja *ABCD* um trapézio de bases *AB* e *CD*, com $AB < CD$. Sabe-se que o segmento que une os pontos médios das bases e a mediana de Euler do trapézio são congruentes. Prove que os ângulos *DAC* e *DBC* são obtusos.

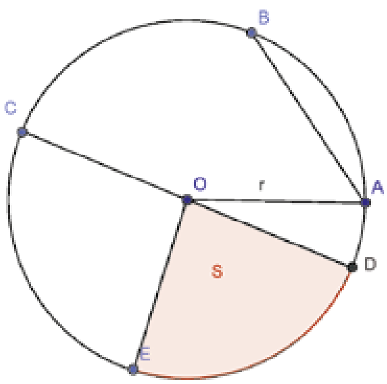
**04** Uma reta *r* contém o vértice *A* de um triângulo *ABC*. Sejam *B*' e *C*' as projeções de *B* e *C* na reta *r*. Determine a posição de *r* que torna máxima a soma $BB' + CC'$.

**05** Seja *ABC* um triângulo, e sejam *P*, *Q* e *R* simétricos do circuncentro do triângulo *ABC* em relação aos lados *AB*, *AC* e *BC*, respectivamente. Prove que os triângulos *ABC* e *PQR* são congruentes.

## 1. Definição e nomenclatura

Dizemos que a circunferência de centro $O$ e raio $r$ é o conjunto $\{P \mid OP = r\}$. O círculo de centro $O$ e raio $r$ é o conjunto $\{P \mid OP \leq r\}$. O círculo é a união da circunferência com a região interna a ela, que, prova-se, é uma região convexa.

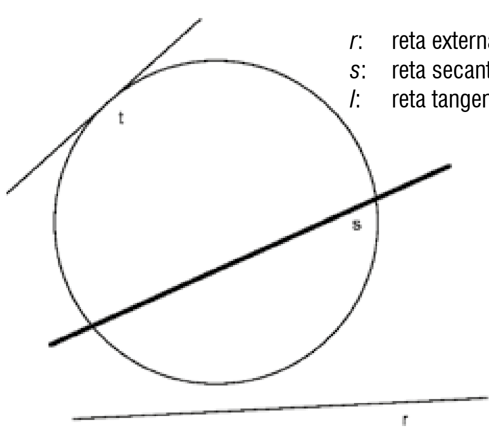
O comprimento de uma circunferência de raio $r$ é dado por $2\pi r$, sendo $\pi$ um número irracional, aproximado por 3.1415926535 (existem expressões precisas para o cálculo de $\pi$).




$O$ : *centro*;
$\overline{OA}$ : *raio*;
$\overline{AB}$ : *corda*;
$\overline{CD}$ : *diâmetro*
$S$ : *setor circular*
$\widehat{AB}$ : *arco*

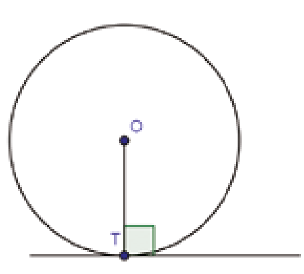
## 2. Posições relativas a uma reta

Como o círculo é uma região convexa, uma reta pode intersectar a circunferência em zero, um ou dois pontos, no máximo. Dizemos, nessa ordem, que ela é externa, tangente ou secante ao círculo, de acordo com o número de interseções com a circunferência (0,1 ou 2).

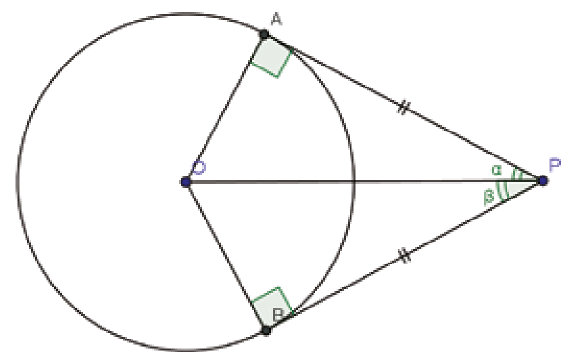



*r*: reta externa
*s*: reta secante
*l*: reta tangente

Demonstra-se que a reta tangente a um círculo é perpendicular ao raio traçado no ponto de tangência. Ou seja, se $r$ é tangente a uma circunferência de centro $O$ no ponto $T$, então $r$ é perpendicular a $OT$.




Um teorema importante: se $P$ é um ponto externo a um círculo, e $PA$ e $PB$ são segmentos tangentes traçados de $P$ ao círculo, então $PA$ e $PB$ são congruentes. Além disso, o segmento $OP$, que une o centro do círculo ao ponto $P$, é bissetriz do ângulo $APB$.




$\triangle\ OAP \equiv \triangle\ OBP$, *logo* $PA = PB$ *e* $\alpha = \beta$

## 3. Posição relativa entre círculos

De acordo com a posição entre dois círculos, podemos classificá-los como:

- **Concêntricos**: são círculos que possuem o mesmo centro.
- **Internos**: um está totalmente contido no interior do outro.
- **Tangentes internos**: um tangencia o outro internamente. (Suas circunferências só se intersectam em um ponto, no qual existe uma reta tangente comum.)
- **Secantes**: as circunferências se intersectam em dois pontos.
- **Tangentes externos**: um tangencia o outro externamente. (No único ponto de interseção das circunferências, existe uma reta tangente comum.)
- **Externos**: os círculos não se intersectam.

No caso em que círculos são tangentes, interna ou externamente, os centros e o ponto de tangência são sempre colineares. Dessa maneira, é fácil calcular a distância entre os centros.

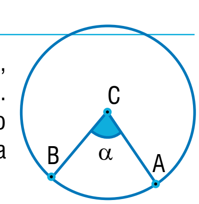
No caso em que círculos são externos, o menor segmento e o maior segmento ligando os dois conjuntos estão contidos na reta que contém os centros.

## 4. Ângulos no círculo

Uma vantagem dos círculos é a estrutura de transporte e cálculo facilitado de ângulos que podemos deduzir a partir de algumas definições. Para o que segue, seja um círculo de centro $O$.

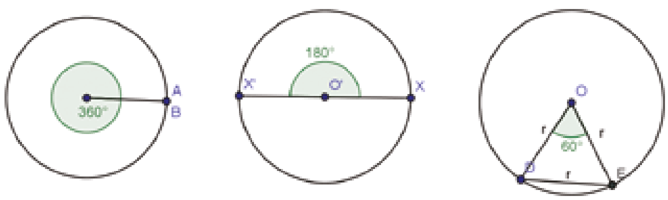
### Ângulo central

Se $A$ e $B$ são pontos sobre a circunferência, chamamos o ângulo $A\hat{O}B$ de 'ângulo central'. Identificamos cada arco $AB$ com seu respectivo ângulo central $A\hat{O}B$, de forma que diremos que a medida do arco é igual à medida do ângulo.



### Consequências imediatas:

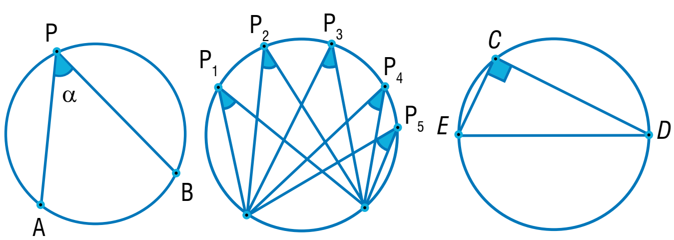
- A circunferência mede 360°.
- Um diâmetro define dois arcos de 180°, que chamamos de semicircunferência.
- Se uma corda tem medida igual ao raio da circunferência, então o arco correspondente a ela mede 60°.
- O comprimento de um arco é proporcional ao ângulo central que o determina.



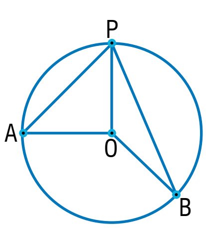

## Ângulo inscrito

Se $A$, $P$ e $B$ são pontos da circunferência, dizemos que o ângulo $APB$ é ângulo inscrito na circunferência (seu vértice está sobre a circunferência). Por consequência da definição anterior, junto com o teorema do bumerangue, temos que o arco $AB$ mede o dobro do ângulo $APB$, como mostra a figura.

Dessa maneira, fixado um certo arco $AB$, todos os ângulos inscritos que 'olham' para esse arco têm a mesma medida [ideia do arco-capaz]. Em particular, todos os ângulos inscritos em uma semicircunferência medem 90°.




Vejamos o caso em que O é interno ao ângulo:




Como OA = OP temos $O\hat{A}P = O\hat{P}A$.

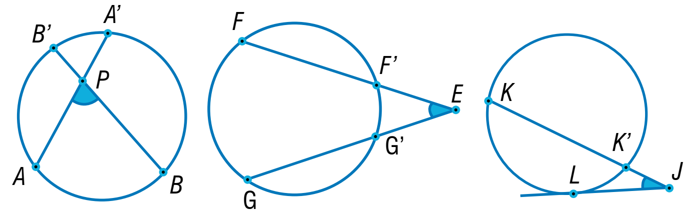
Da figura, $O\hat{P}B = A\hat{P}B - O\hat{P}A$ e como OP = OB temos: $O\hat{B}P = O\hat{P}B = A\hat{P}B - O\hat{P}A$.

Do bumerangue $A\hat{O}B = O\hat{A}P + A\hat{P}B + O\hat{B}P = 2 \cdot A\hat{P}B$.

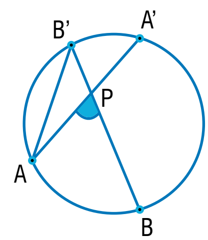
**Obs.:** O caso em que O externo pode ser feito de modo similar.

## Ângulos excêntricos

Se duas cordas $AC$ e $BD$ se intersectam no ponto $P$, interno ao círculo, dizemos que o ângulo $APB$ é 'excêntrico interno', e vale a semissoma dos arcos $AB$ e $CD$ para os quais tal ângulo olha. Caso as retas $AC$ e $BD$ se intersectem fora do círculo no ponto $P$, dizemos que o ângulo $APB$ é 'excêntrico externo', e mede a semidiferença entre os arcos $AB$ e $CD$, em módulo.




Vejamos o caso em que $A\hat{P}B$ é excentrico interno.




Traçando a reta AB' e usando ângulos inscritos temos: $AB'B = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ e $B'AA' = \dfrac{\overset{\frown}{AB'}}{2}$.

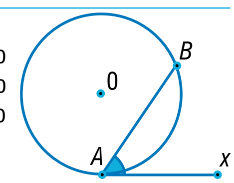
Como $A\hat{P}B$ é externo do $\Delta PAB'$ : APB = AB'B + B'AA' $= \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB}}{2}$

**Obs.:** Os outros casos podem ser demonstrados com a mesma ideia.

Em problemas de polígonos regulares, ângulos entre diagonais podem ser facilmente calculados através dos ângulos excêntricos. Lembre-se de que cada lado determina arcos iguais, e, fazendo as contas, de medida igual ao ângulo externo.

## Ângulo de segmento

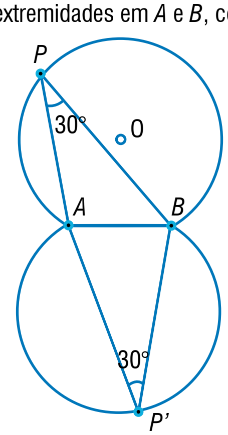
Se uma reta $XA$ é tangente a um círculo no ponto $A$, e $AB$ é uma corda, dizemos que o ângulo $X\hat{A}B$ é 'ângulo de segmento', e mede a metade do arco $AB$ contido na sua região interna.




De fato, basta considerar que a tangente é o caso limite da secante, de modo que vale o mesmo resultado do ângulo inscrito.

## 5. Arco capaz

Dado um segmento $AB$ fixo, e um ângulo $\alpha$ constante, o lugar geométrico dos pontos $P$ tais que o ângulo $APB$ mede $\alpha$ é o arco capaz de $\alpha$ sobre $AB$. Ele é a união de dois arcos de circunferência congruentes, com extremidades em $A$ e $B$, como na figura.




Arco capaz de 30° sobre $\overline{AB}$
Os pontos P e P' "olham $\overline{AB}$ segundo um ângulo de 30°

Sendo O centro do arco capaz, temos $A\hat{O}B = 2\alpha = 60°$

Observe que um círculo de diâmetro $AB$, excetuando os pontos $A$ e $B$, é arco capaz de 90° sobre $AB$.

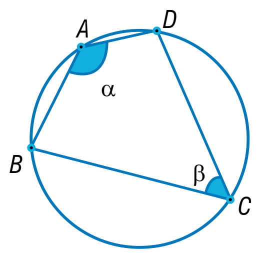
## 6. Quadrilátero inscritível

Através dos resultados anteriores, podemos adquirir uma técnica para incluir pontos em uma circunferência. Além do mais, essa ferramenta será útil para transportar ângulos.

Primeiro, observe que três pontos colineares (ou ainda, um triângulo) sempre determinam um círculo que passa por eles (círculo circunscrito a eles). Nem sempre, portanto, quatro pontos estão em um círculo por exemplo. Veremos duas condições interessantes para que isso ocorra.

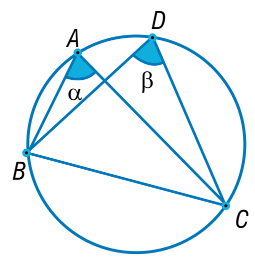
Dizemos que o *#ABCD* é inscritível quando existe uma circunferência que passa pelos vértices. Para isso, existem dois critérios angulares iniciais:

I. Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, a soma dos ângulos internos opostos vale 180°.
II. Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, atende à "ideia do arco capaz", ou seja, *#ABCD* é inscritível se, e somente se, os ângulos *BAC* e *BDC* são iguais.




$\alpha + \beta = 180°$

Os ângulos opostos são complementares.




$\alpha = \beta$

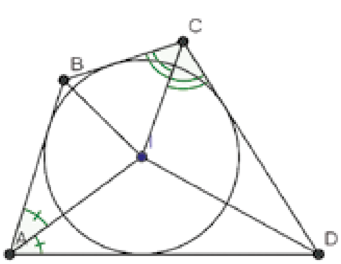
Ângulos "olhando" o mesmo arco iguais.

## 7. Quadrilátero circunscritível

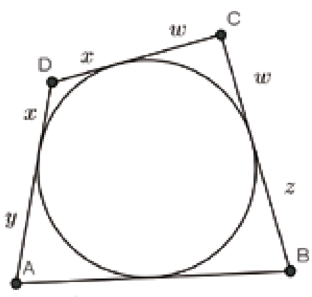
Da mesma forma, podemos estabelecer critérios para que um quadrilátero tenha seus lados tangentes a uma circunferência.

Todo triângulo possui um círculo inscrito, já que suas bissetrizes são concorrentes. Em um quadrilátero, nem sempre isso ocorre. Caso ocorra, o ponto de encontro é equidistante dos lados, logo é centro de uma circunferência que tangencia os lados.

Existe o Teorema de Pitot: o *#ABCD* é circunscritível, ou seja, seus lados tangenciam uma circunferência, se, e somente se, vale a seguinte relação: $AB + CD = AD + BC$ (as somas dos lados opostos são iguais).




ABCD é quadrilátero circunscritível
I é o centro do círculo inscrito




*Ilustrando o Teorema de Pitot*

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Fixam-se os pontos *B* e *C*, e faz-se variar um ponto *A* de forma que $B\hat{A}C = 60°$. Determine o lugar geométrico do incentro do triângulo *ABC*.

**Solução:**

Tem-se que, como $\hat{A} = 60°$, então $B + C = 120°$, logo $(B+C)/2 = 60°$. Sendo *I* o incentro de *ABC*, no triângulo *BIC*, tem-se que $B\hat{I}C = 180° - (B+C)/2 = 120°$. Como *B* e *C* são fixos, e o ângulo $B\hat{I}C$ é constante e igual a 120°, tem-se que *I* varia em um arco capaz de 120° sobre o segmento *BC*. (dado Â, tem-se $B\hat{I}C = 90° + A/2$, como visto no bloco de triângulos)

**02** O triângulo *ABC* está inscrito em um círculo, e uma corda *KL* corta os lados *AB* e *AC* nos pontos *P* e *Q*. Sabendo que o *#PQCB* é inscritível, prove que o triângulo *AKL* é isósceles.

**Solução:**

Já que o *#PQCB* é inscritível, então os ângulos *APQ* e *ACB* são congruentes. Por soma de arcos, tem-se que, daí, os arcos *AK* e *AL* são congruentes, portanto as cordas *AK* e *AL* são congruentes. Segue daí o resultado.

**03** O círculo exinscrito relativo a *BC* no triângulo *ABC* tangencia a reta *AC* em *P*. Prove que o segmento *AP* mede o semiperímetro do triângulo.

**Solução:**

Sejam *X* e *Q* os pontos de tangência do exincírculo com os lados *BC* e *AB*, respectivamente. Por segmentos tangentes iguais, tem-se: $CP = CX = x$, $BQ = BX = y$, $AP = AQ = c + x = y + b$. Logo, no triângulo *ABC*, $2p = AB + BC + AC = c + (x+y) + b = 2AP$. Daí, $AP = p$, o semiperímetro do triângulo.

**04** O círculo inscrito no triângulo *ABC* tangencia o lado *AB* no ponto *F*. Prove que $AF = p - a$, sendo *p* o semiperímetro e $BC = a$.

**Solução:**

Sejam *D*, *E* e *F* os pontos de tangência do incírculo com os lados *BC*, *AC* e *AB*, respectivamente. Então: $AE = AF = x$, $BD = BF = y$, $CE = CD = z$. Logo, no triângulo *ABC*, $2p = 2x + 2y + 2z$, logo $x + y + z = p$. Como $BC = a = y + z$, tem-se que $AF = x = p - a$.

**05** Prove que o simétrico do ortocentro de um triângulo em relação a qualquer lado pertence ao círculo circunscrito ao triângulo.

**Solução:**

Seja *ABC* o triângulo (considere por ora acutângulo), de ortocentro *H*, e seja *H** o simétrico de *H* com relação ao lado *BC*. Tem-se então que são congruentes os ângulos *HBC* e *HAC* (os dois são complementares do ângulo *C* interno). Por simetria, *HBC* e *H*BC* são congruentes, logo *H*BC* e *HAC* são congruentes. Como *A*, *H* e *H** são colineares, tem-se $H^*BC = H^*AC$. Logo o quadrilátero *H*BAC* é inscritível, ou seja, *H** pertence ao circuncírculo de *ABC*. O caso em que *ABC* é obtusângulo pode ser tratado por analogia.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 1

**01** É dado um círculo $A$ de raio 10 cm e dois círculos $B$ e $C$ tangentes a A internamente, e externamente entre si. Calcule o perímetro do triângulo formado pelos centros dos círculos $A$, $B$ e $C$.

**02** $AB$ é diâmetro de um círculo de centro O e raio 9 cm. Prolonga-se $AB$ de um segmento $BP$, e traça-se uma secante $PMN$, com $M$ e $N$ sobre o círculo, de forma que $PM = OA$. Calcule o comprimento de $NA$, sabendo que o ângulo $BPM$ mede 20°.

**03** Um triângulo acutângulo $ABC$ está inscrito em um círculo, de forma que $AB$ é congruente ao lado do triângulo equilátero inscrito nesse círculo, e $BC$ é congruente ao lado do quadrado inscrito nesse círculo. Calcule o maior ângulo interno do triângulo $ABC$.

**04** O quadrilátero $ABCD$ é convexo inscritível, e sua região interna contém o centro do círculo no qual está inscrito. Sabe-se que $AB$ e $CD$ têm medidas iguais às do quadrado e do eneágono inscritos nesse círculo. Calcule o ângulo formado pelas diagonais de $ABCD$.

**05** $ABCDEFGHIJKL$ é um polígono regular. Calcule o ângulo formado:

(A) pelas diagonais $AC$ e $BD$.
(B) pelas diagonais $BE$ e $DH$.
(C) pelos prolongamentos dos lados $CD$ e $HI$.
(D) pelos prolongamentos das diagonais $BD$ e $HK$.

**06** Um triângulo $ABC$ está inscrito num círculo de raio 6 cm, e seu perímetro mede 16 cm. Sabendo que $\hat{A} = 30°$, então a soma $AB + AC$ é igual a:

**07** Um quadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito em uma circunferência, e suas diagonais se intersectam perpendicularmente no ponto $P$. Prove que a altura traçada de $P$ no triângulo $ABP$ é colinear com a mediana traçada de $P$ no triângulo $PCD$.

**08** Um hexágono regular $ABCDEF$ e um pentágono regular $AXYZW$ estão inscritos em uma mesma circunferência. Sabendo que o arco $CY$ é menor que 90°, e que $CY$ é lado de um polígono regular inscrito nessa circunferência, determine o número de diagonais desse polígono.

**09** Prove que, em um triângulo retângulo de perímetro $2p$ e hipotenusa a, o raio do círculo inscrito mede $r = p - a$.

**10** $ABC$ é um triângulo isósceles de base $BC$, e $ABPQ$ é um quadrado construído externamente a ele. Calcule a medida do ângulo $QCB$.

**11** $A$ e $B$ são dois pontos de uma circunferência que a dividem em arcos de medidas proporcionais a 3 e 7. As tangentes traçadas por $A$ e $B$ formam um ângulo igual a:

(A) 60°.
(B) 66°.
(C) 72°.
(D) 78°.
(E) N.R.A.

**12** Em um quadrilátero $ABCD$ convexo, os vértices $B$, $C$ e $D$ são equidistantes do vértice $A$. Se $\hat{A} = 140°$, o ângulo $C$ mede:

(A) 40°.
(B) 110°.
(C) 50°.
(D) 140°.
(E) 70°.

**13** Prove que entre cordas paralelas de uma circunferência estão arcos congruentes.

**14** Dois círculos são tangentes externamente em $A$. Traça-se uma secante aos círculos por $A$, que intersecta cada círculo em $B$ e $C$, respectivamente. Prove que as tangentes em $B$ e $C$ são paralelas.

**15** Em um triângulo $ABC$, une-se o ponto médio da base $BC$ aos pés $H$ e $H'$ das alturas $BH$ e $CH'$. Prove que o triângulo $MHH'$ é isósceles, e calcule seus ângulos em função do ângulo $\hat{A}$.

**16** $ABC$ é um triângulo equilátero e $BCD$ um triângulo retângulo e isósceles em $D$, com $D$ externo ao triângulo $ABC$. Sendo $M$ médio de $AB$, determine o ângulo $DMB$.

**17** Sobre um círculo marcam-se dois arcos $AB$ e $AC$ menores que o semicírculo e uma corda $DE$ que liga os pontos médios $D$ e $E$ dos arcos $AB$ e $AC$ determinando-se sobre as respectivas cordas dois pontos $F$ e $G$. Prove que $AF = AG$.

**18** Dois círculos de centro $O$ e $O'$ se intersectam em $A$ e $B$. Se $AOC$ e $AO'D$ são dois diâmetros desses círculos, prove que:

a. $CD$ é perpendicular a $AB$;
b. os pontos $C$, $B$ e $D$ são colineares.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** Considere um triângulo $ABC$ de ângulos internos iguais a 50°, 60° e 70°. Sendo $DEF$ o triângulo cujos vértices são os pontos de tangência do incírculo de $ABC$ com seus lados, calcule os ângulos do triângulo $DEF$.

**02** $ABC$ é um triângulo cujo perímetro é 10 cm, e $BC$ mede 4 cm. Sejam $D$ e $E$ sobre os lados $AB$ e $AC$, respectivamente, tais que $DE$ é tangente ao incírculo de $ABC$. Calcule o perímetro do triângulo $ADE$.

**03** $ABC$ é um triângulo escaleno retângulo em $A$, e $AD$ é a bissetriz interna, com $D$ sobre $BC$. Toma-se o segmento $DE$ perpendicular a $BC$, com $E$ sobre o lado $AC$. Calcule o ângulo $B\hat{E}D$.

**04** É dado um círculo de centro $C$, e um ponto $O$ externo a ele. Os segmentos traçados de $O$ tangentes ao círculo são $OX$ e $OY$. Traça-se também uma secante $OBA$, cortando a circunferência em $B$ e $A$, com $B$ entre $O$ e $A$. Sabendo que o arco $AX$ é o dobro do arco $XB$ e o ângulo XOY é reto, calcule o ângulo $B\hat{O}X$.

**05** É dada uma circunferência e um ponto $P$, externo ao círculo, a partir do qual se traçam os segmentos tangentes $PC$ e $PD$. Marca-se sobre a circunferência um ponto $A$, e sobre $AD$ um ponto $B$ tal que $AB = BC$. Dessa maneira, $B\hat{A}C = 80°$. Calcule o ângulo $PBC$.

(A) 50°.
(B) 40°.
(C) 80°.
(D) 60°.
(E) 65°.

**06** No triângulo acutângulo $ABC$, $H$ é pé da altura de $A$. Os pontos $M$ e $N$ são as projeções de $H$ sobre os lados $AB$ e $AC$, e os pontos $P$ e $Q$ são as projeções de $M$ e $N$ sobre os lados $AC$ e $AB$, nessa ordem. Prove que $PQ \parallel BC$.

**07** Duas circunferências de raios $R$ e $r$ se cortam nos pontos $A$ e $B$. Em cada circunferência, a partir do ponto $B$, traçam-se cordas $BQ$ e $BN$, que cortam a outra circunferência nos pontos $P$ e $M$ [de forma que $Q$ e $M$ estão na circunferência de raio $R$, e $P$ e $N$ estão na circunferência de raio $r$]. Sabe--se que $AB$ é bissetriz do ângulo $QBN$. Assinale a proposição verdadeira:

(A) se $R > r$, então $PQ > MN$.
(B) $PQ = MN$ se, e somente se, $R > r$.
(C) sempre $PQ = MN$.
(D) $AQ = NA$ e $AM = AP$.
(E) N.R.A.

**08** Dois círculos são tangentes no ponto $A$. O segmento $BC$ é tangente comum aos círculos. Prove que o ângulo $B\hat{A}C$ é reto.

**09** $A$, $B$ e $C$ são três pontos de um círculo. A bissetriz do ângulo $ABC$ intersecta o círculo em $D$. Do ponto $D$ traça-se uma corda paralela a $AB$ que intersecta o círculo em $E$. Se $DE = 3$ cm, quanto mede o segmento $BC$?

**10** Os círculos inscrito e exinscrito relativo a $BC$ tangenciam o lado $BC$ do triângulo $ABC$ nos pontos $M$ e $N$. Prove que $BM = BN$.

**11** Em uma circunferência de centro $O$, marcam-se os pontos $P$ e $Q$, e traçam-se tangentes $AP$ e $AQ$ ao círculo. Por um ponto $M$ do menor arco $PQ$, traça-se a tangente, que corta $AP$ e $AQ$ nos pontos $B$ e $C$. Prove que, variando $M$, não variam:

a. o perímetro do triângulo $ABC$.
b. o ângulo $B\hat{O}C$.

**12** Em uma triângulo escaleno $ABC$, $\hat{A} = 60°$. Sejam $H$, $I$ e $O$, respectivamente, ortocentro, incentro e circuncentro de $ABC$. Prove que:

a. os pontos $B$, $H$, $I$, $O$ e $C$ estão num arco de circunferência.
b. $HI = IO$.

## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** $ABCD$ é um quadrado, e sobre os lados $BC$ e $CD$ tomam-se pontos $M$ e $N$ de forma que $M\hat{A}N = 45°$. Os pontos $P$ e $Q$ são os pés das alturas de $M$ e $N$ no triângulo $AMN$. Prove que os pontos $B$, $P$, $Q$ e $D$ são colineares.

**02** Em um círculo de centro $O$, toma-se uma corda $AB$, e dentro dele traça-se o triângulo $ABC$ equilátero, com $O$ interno ao triângulo. Sobre a circunferência marca-se o ponto $D$, tal que $AD = AB$, e a reta $CD$ corta o círculo novamente em $E$. Calcule o comprimento de $EB$ em função do raio $R$ do círculo.

**03** Reta de Simson-Wallace – Prove que as projeções de um ponto do circuncírculo de um triângulo sobre as retas suportes dos lados desse triângulo são colineares.

**04** **(IME)** Quatro retas concorrentes duas a duas determinam 4 triângulos. Prove que os seus circuncírculos são concorrentes em um ponto.

**05** Seja $ABC$ um triângulo e sejam $P$, $Q$ e $R$ pontos quaisquer nos lados $BC$, $AC$ e $AB$, respectivamente. Prove que as circunferências circunscritas aos triângulos $ARQ$, $BPR$ e $CPQ$ se encontram em um ponto.

RASCUNHO