A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

8

JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
Professor e assessor de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

BENEDICTO CASTRUCCI
(Falecido em 2 de janeiro de 1995)
Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).
Foi professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e da Universidade de São Paulo (USP).
Foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Ensino Fundamental – Anos Finais
Componente curricular: Matemática

FTD

4ª edição – São Paulo – 2018

FTD

Copyright © Benedicto Castrucci, José Ruy Giovanni Júnior, 2018.

Diretor editorial	Antonio Luiz da Silva Rios
Diretora editorial adjunta	Silvana Rossi Júlio
Gerente editorial	Roberto Henrique Lopes da Silva
Editor	João Paulo Bortoluci
Editores assistentes	Carlos Eduardo Bayer Simões Esteves, Diana Santos, Eliane Cabariti Casagrande Lourenço, Janaina Bezerra Pereira, Juliana Montagner, Luís Felipe Porto Mendes, Marcos Antônio Silva
Assessoria	Cristiane Boneto, Francisco Mariani Casadore, Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura, Marcelo Eduardo Pereira
Gerente de produção editorial	Mariana Milani
Coordenador de produção editorial	Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Gerente de arte	Ricardo Borges
Coordenadora de arte	Daniela Máximo
Projeto gráfico	Carolina Ferreira, Juliana Carvalho
Projeto de capa	Sergio Cândido
Foto de capa	Bob Sacha/Getty Images
Supervisora de arte	Isabel Cristina Ferreira Corandin
Editora de arte	Dayane Santiago, Nadir Fernandes Racheti
Diagramação	Débora Jóia, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, José Aparecido A. da Silva, Lucas Trevelin
Tratamento de imagens	Ana Isabela Pithan Maraschin, Eziquiel Racheti
Coordenadora de ilustrações e cartografia	Marcia Berne
Ilustrações	Alex Argozino, Alex Silva, Bentinho, Dani Mota, Daniel Almeida, Daniel Bogni, Dayane Raven, Dnepwu, Ilustra Cartoon, Lucas Farauj, Manzi, Marcos Guilherme, Marcos Machado, MW Editora E Ilustrações, Renato Bassani, Wandson Rocha
Cartografia	Allmaps, Renato Bassani, Sonia Vaz
Coordenadora de preparação e revisão	Lilian Semenichin
Supervisora de preparação e revisão	Maria Clara Paes
Revisão	Ana Lúcia Horn, Carolina Manley, Cristiane Casseb, Edna Viana, Giselle Mussi de Moura, Jussara R. Gomes, Kátia Cardoso, Lilian Vismari, Lucila V. Segóvia, Miyuki Kishi, Renato A. Colombo Jr., Solange Guerra, Yara Affonso
Supervisora de iconografia e licenciamento de textos	Elaine Bueno
Iconografia	Rosa André
Licenciamento de textos	Carla Marques, Vanessa Trindade
Supervisora de arquivos de segurança	Silvia Regina E. Almeida
Diretor de operações e produção gráfica	Reginaldo Soares Damasceno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Giovanni Júnior, José Ruy
A conquista da matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. — 4. ed. — São Paulo : FTD, 2018.

"Componente curricular: Matemática."
ISBN 978-85-96-01917-0 (aluno)
ISBN 978-85-96-01918-7 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Castrucci, Benedicto. II. Título.

18-20688 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7
Cibele Maria Dias – Bibliotecária – CRB-8/9427

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

A - 603.899/19

APRESENTAÇÃO

Para que serve a Matemática? Por que aprender todo esse conteúdo de Matemática na escola? Essas são perguntas que um dia provavelmente passaram ou vão passar por sua cabeça.

A Matemática está presente em nossas vidas, desde uma simples contagem em uma brincadeira até nos modernos e complexos computadores. Ela ajuda a decidir se uma compra deve ser paga à vista ou a prazo, a entender o movimento da inflação e dos juros, a medir os índices de pobreza e riqueza de um país, a entender e cuidar do meio ambiente... sem falar nas formas e medidas, com suas aplicações na Arquitetura, na Arte e na agricultura.

Mas, apesar de estar presente em tantos momentos importantes das nossas vidas, pode parecer, a princípio, que alguns temas da Matemática não têm aplicação imediata, o que pode gerar certo desapontamento em você.

Na verdade, a aplicação da Matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. Como em todas as áreas de estudo, para entender e fazer Matemática é necessário dedicação e estudo.

Nesta coleção, apresentamos a você as linhas mestras desse processo com uma linguagem simples, mas sem fugir ao rigor que a Matemática exige.

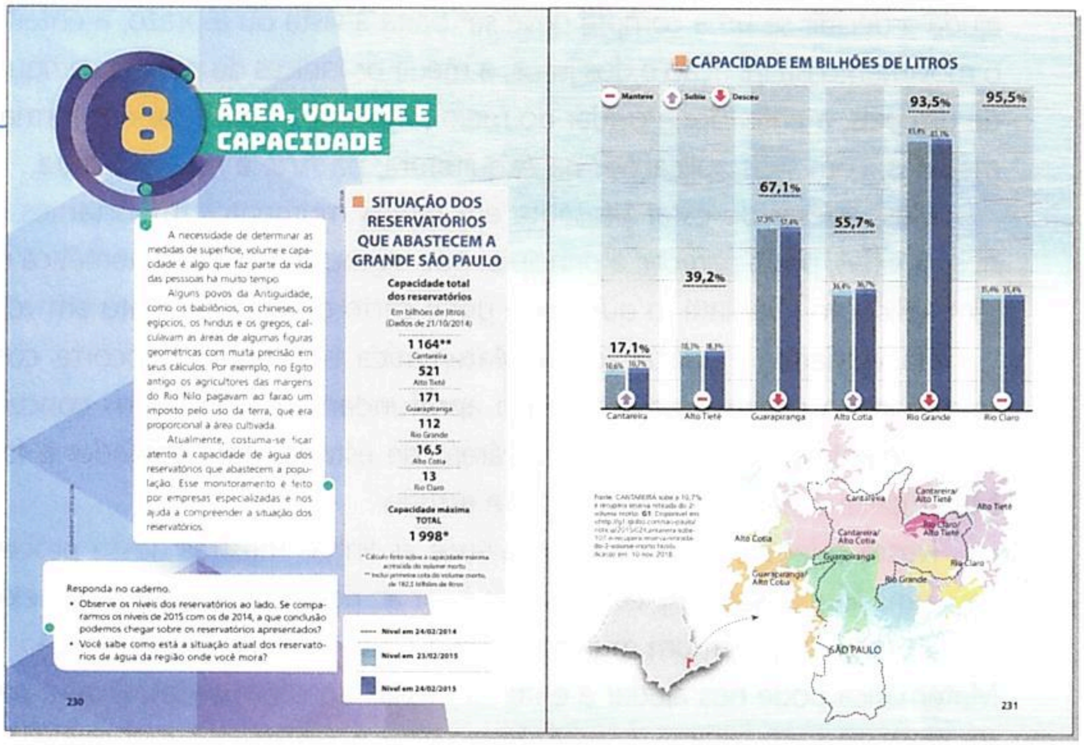
Vivemos hoje em um mundo em constante e rápida transformação, e a Matemática pode nos ajudar a entender essas transformações. Ficar à parte do conhecimento matemático é, hoje, estar à margem das mudanças do mundo. Então, vamos entender e fazer Matemática!

Os autores

CONHEÇA SEU LIVRO

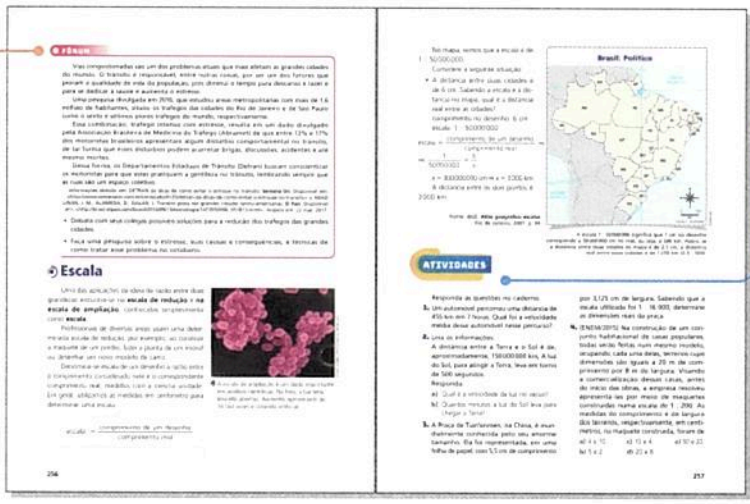
ABERTURA DE UNIDADE

As páginas de abertura introduzem o trabalho que será desenvolvido em cada Unidade. Nelas, você é convidado a observar textos e/ou imagens e relacioná-los com seus conhecimentos sobre o tema ou com contextos que serão articulados pelas questões.



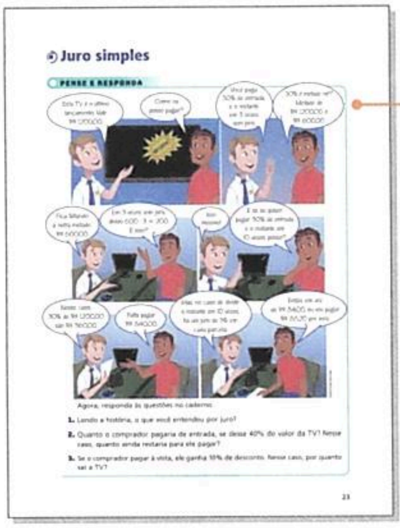
FÓRUM

Traz questões para debate, em que você e os colegas poderão praticar estratégias de argumentação.



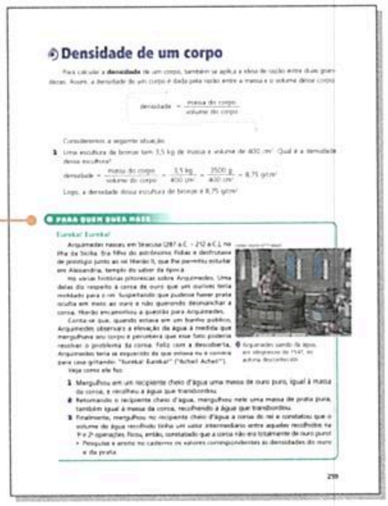
ATIVIDADES

Os exercícios apresentados são variados e visam à pratica do conteúdo aprendido. Por vezes você se deparará com exercícios mais desafiadores, inclusive o de elaborar seus próprios exercícios e compartilhá-los com seus colegas.



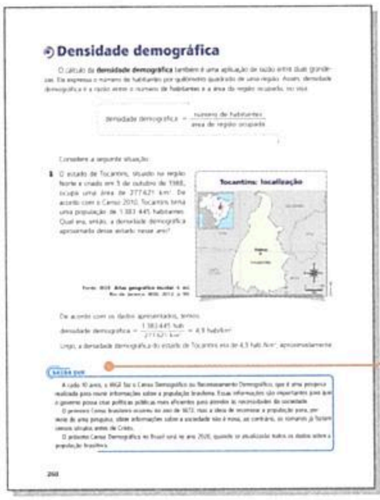
PENSE E RESPONDA

As atividades apresentadas valorizam a construção e a experimentação de suas próprias hipóteses.



PARA QUEM QUER MAIS

Nesta seção você encontra informações complementares relacionadas ao conteúdo estudado.



SAIBA QUE...

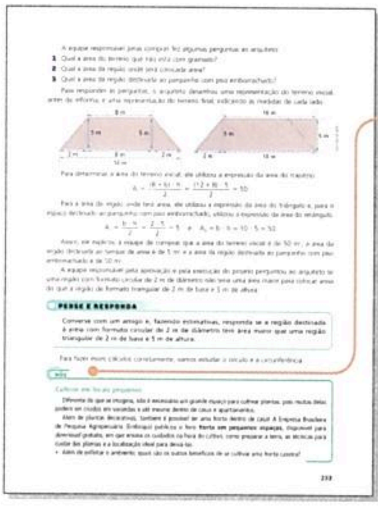
Traz informações complementares de maneira rápida e acessível.

UM NOVO OLHAR

É o momento de você refletir sobre os conhecimentos que adquiriu ao longo da Unidade e analisar sua produção nas propostas de trabalho, ampliando seu comprometimento com a aprendizagem.

DESCUBRA MAIS

Apresenta indicações de livros e *sites* que propiciam o enriquecimento e aprofundam o conteúdo em questão.



NÓS

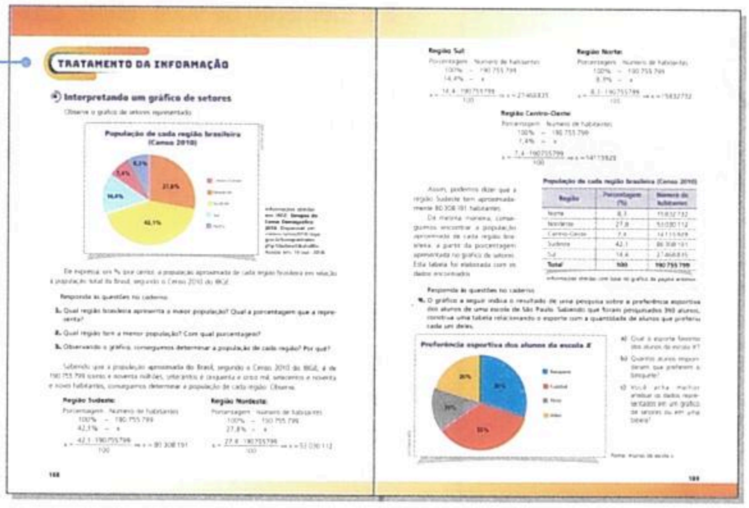
Propicia a reflexão sobre valores, que será feita sempre em duplas, trios ou grupos.

POR TODA PARTE

Esta seção apresenta diversas situações que possibilitam ainda mais a conexão da Matemática com diversas áreas do conhecimento.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Com o objetivo de desenvolver reflexões sobre atitudes como hábitos conscientes de consumo, a seção trata tópicos como controle de gastos, economia etc.

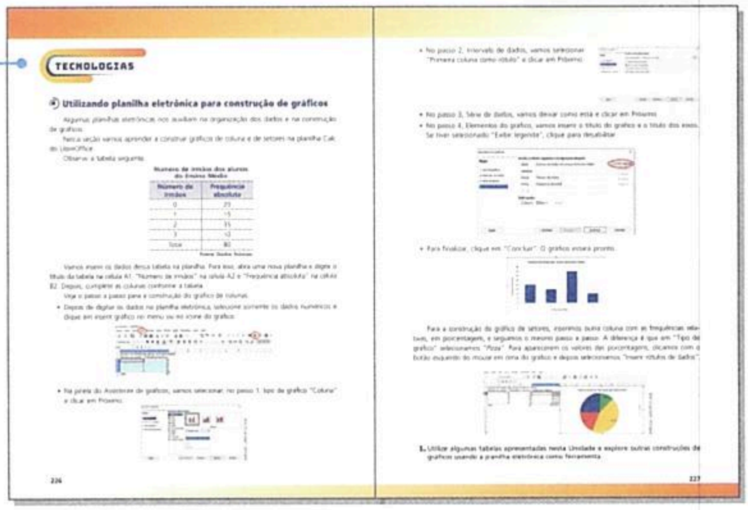


TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Esta seção trabalha de forma organizada com propostas de tratamento e organização de dados, probabilidade e Estatística.

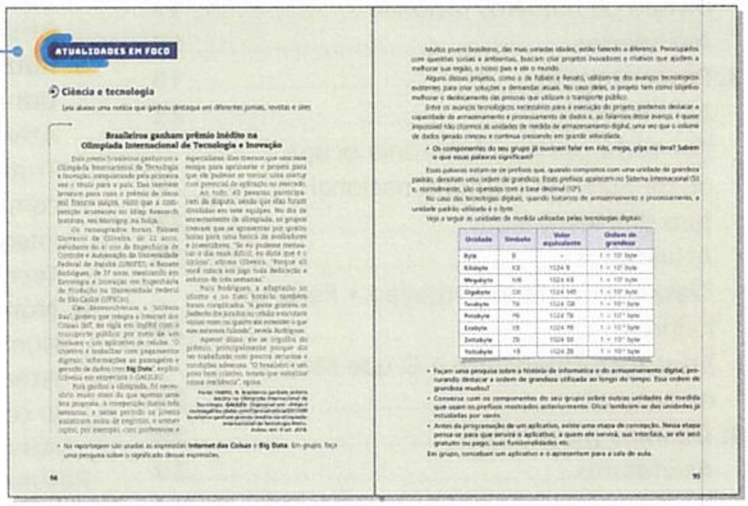
TECNOLOGIAS

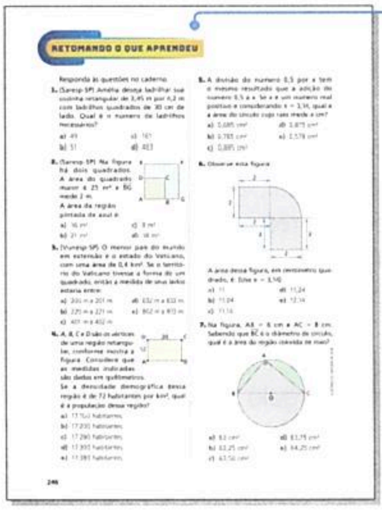
Nesta seção você verá como utilizar ferramentas tecnológicas na resolução de problemas ou questões matemáticas.



ATUALIDADES EM FOCO

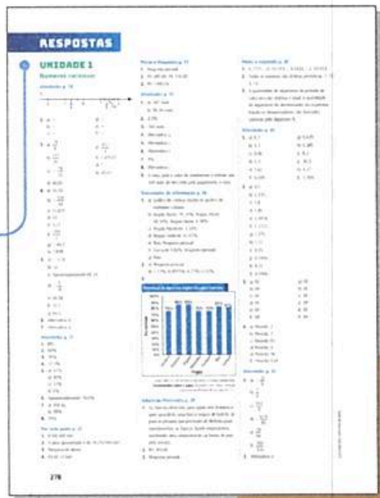
Nesta seção você encontrará o trabalho com temas atuais e de importância social. Será um momento de refletir sobre esses assuntos e de perceber como a Matemática ajuda a entender o mundo em que vivemos.





RETOMANDO O QUE APRENDEU

Esta seção visa sistematizar os temas trabalhados por meio de atividades de todos os conteúdos estudados na Unidade.



RESPOSTAS

No final do livro estão todas as respostas das atividades propostas.

SUMÁRIO

UNIDADE 6
POLÍGONOS E TRANSFORMAÇÕES NO PLANO 166

UNIDADE 7
CONTAGEM, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA 200

UNIDADE 8

ÁREA, VOLUME E CAPACIDADE 230

UNIDADE 9

ESTUDO DE GRANDEZAS 248

1 NÚMEROS RACIONAIS

MARCOS GUILHERME

A Educação financeira é um tema importante para ser pensado em qualquer idade, pois, além de planejar gastos, é importante saber lidar com a quantidade excessiva de propagandas que oferecem produtos e serviços.

Atualmente, porém, além das propagandas dos produtos, muitas lojas aderiram à divulgação das opções de pagamento: parcelado sem juro, parcelado com juro e pagamento à vista.

Muitas vezes, há um bom desconto se o produto for pago à vista.

Entendemos que consumir é preciso, mas a grande questão é verificar se somos capazes de adquirir o necessário e gastar somente o dinheiro que temos.

Agora, responda no caderno:

- O que significa equilíbrio financeiro?
- Qual é a diferença entre comprar algo à vista e comprar a prazo?
- Você sabe o que é juro? Você sabe explicar como funciona o juro?


IMPERDÍVEL!
Tudo em 10 vezes
SEM JUROS
ou 10% de desconto à vista
Escolar
Finalmente ele chegou!
O produto da moda!
Última geração!
Aquele que todos
precisam ter!
10 × R$ 25,00
SAPATOS

CAPÍTULO 1

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Os números racionais são encontrados em diversas situações cotidianas. Vamos ver algumas dessas situações:

WANDSON ROCHA

Nas situações apresentadas, temos diversos números: 3; 2018; -3; 40; 1133,99; 5; 8; 30; $\frac{2}{3}$ e 20%. Todos esses números pertencem ao conjunto dos números racionais. Os números racionais podem ser positivos ou negativos.

Todo número racional é o resultado de uma divisão de números inteiros, sendo o divisor diferente de zero, ou seja, todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com *a* e *b* inteiros e $b = 0$.

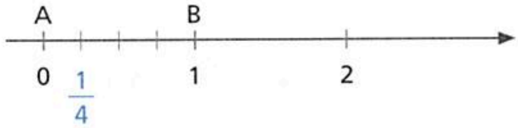
Os números racionais positivos, negativos e o zero formam o conjunto numérico denominado **conjunto dos números racionais**. Esse conjunto é representado pela letra $\mathbb{Q}$ (letra inicial da palavra **Quociente**).

A reta numérica

Vamos relembrar como localizamos números racionais na reta numérica observando os exemplos a seguir.

1 Representar na reta numérica o número racional $+\frac{1}{4}$.

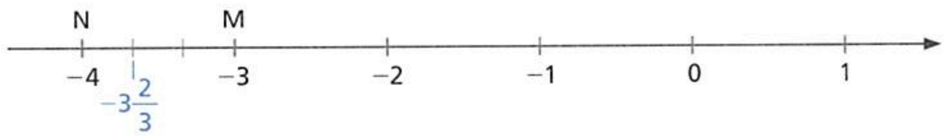
Sabemos que o número $+\frac{1}{4}$ está localizado entre os números inteiros 0 e +1. Então, vamos dividir o segmento AB, que vai de 0 até +1, em quatro partes iguais e considerar uma dessas partes, a partir do ponto *A*, para a direita.



2 Representar na reta numérica o número racional $-\frac{11}{3}$.

Vamos escrever o número $-\frac{11}{3}$ na forma mista: $-\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}$.

Esse número está localizado entre os números inteiros −3 e −4. Então, vamos dividir o segmento MN, que vai de −3 até −4, em 3 partes iguais e considerar duas dessas partes, a partir do ponto *M*, para a esquerda.



Comparação de números racionais

Comparar dois números racionais significa dizer se um é maior que o outro, ou se é menor ou, ainda, se é igual. Vamos rever como comparar dois números racionais.

- Todo número racional negativo é menor que todo número racional positivo.

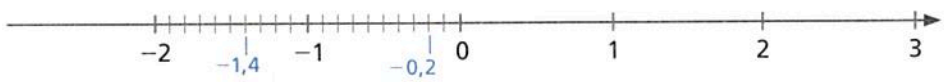
$-4,6 < 7,8$ $\qquad$ $-\frac{1}{3} < 13$ $\qquad$ $-\frac{1}{5} < \frac{3}{4}$

- Todo número racional negativo é menor que zero.

$-5 < 0$ $\qquad$ $-12,4 < 0$ $\qquad$ $-\frac{6}{11} < 0$

- Na comparação de números racionais negativos, será maior aquele que possuir o menor módulo.

Vamos comparar −1,4 e −0,2. Sabemos que $|-1,4| = 1,4$ e $|-0,2| = 0,2$. Assim, −0,2 possui o menor módulo, o que significa que está localizado mais próximo de zero.



Dessa maneira $-1,4 < -0,2$.

- Na comparação de números racionais positivos, será maior aquele que possuir o maior módulo.

Vamos comparar 12,9 e 19,2. Sabemos que $|12,9| = 12,9$ e $|19,2| = 19,2$. Assim, 12,9 possui o menor módulo, o que significa que está localizado mais próximo de zero.

Dessa maneira $12,9 < 19,2$.

CAPÍTULO 2

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

Vamos relembrar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números racionais, tanto na forma fracionária quanto na forma decimal.

Adição e subtração

- Na forma fracionária

Temos que estudar dois casos distintos: o primeiro deles refere-se às frações com denominadores iguais. O segundo, às frações com denominadores diferentes.

1º caso: Frações de mesmo denominador.

Para somarmos (ou subtrairmos) frações de mesmo denominador, mantemos o denominador e somamos (ou subtraímos) os numeradores. Veja um exemplo:

$$-\frac{34}{11} - \left(-\frac{1}{11}\right) = -\frac{34}{11} + \frac{1}{11} = -\frac{33}{11} = -3$$

2º caso: Frações com denominadores diferentes.

Para somarmos (ou subtrairmos) frações com denominadores diferentes, devemos obter frações equivalentes às frações dadas, de mesmo denominador. Em seguida, mantemos o denominador comum e somamos (ou subtraímos) os numeradores. Veja o exemplo a seguir:

$$-\frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{18}{30} - \frac{5}{30} = \frac{-23}{30}$$

- Na forma decimal

Para a adição (ou subtração) de números representados na forma decimal, devemos observar que:

- algarismos que ocupam a mesma ordem devem ficar na mesma coluna, com uma vírgula alinhada à outra.
- adicionamos (ou subtraímos) as unidades de mesma ordem entre si.
- colocamos no resultado a vírgula alinhada com as demais.

Veja os exemplos a seguir:

a)

	U		d	c
	7	,	8	8
−	3	,	5	0
	4	,	3	8

$$\begin{array}{r} 7,88 \\ -\ 3,50 \\ \hline 4,38 \end{array}$$

b)

	D	U		d	c
	1	3	,	4	9
−		0	,	2	5
	1	3	,	2	4

$$\begin{array}{r} 13,49 \\ -\ 0,25 \\ \hline 13,24 \end{array}$$

EDITORIA DE ARTE

Multiplicação de números racionais

- Na forma fracionária

Para multiplicarmos dois números racionais na forma fracionária, multiplicamos os numeradores entre si e, em seguida, os denominadores. Caso seja necessário, simplificamos o resultado até obter a fração irredutível. Veja o exemplo:

$$\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(-\frac{15}{7}\right)=\frac{60}{63}=\frac{20}{21}$$

- Na forma decimal

Para multiplicar um número decimal por outro número decimal, devemos:

– multiplicar os números como se fossem números naturais.

– colocar a vírgula no resultado, de modo que a quantidade de casas decimais seja igual à soma da quantidade de casas decimais dos fatores.

Veja um exemplo:

$$\begin{array}{rccl} & 4{,} & 2 & \longrightarrow \text{1 algarismo na parte decimal} \\ \times & 2{,} & 1 & \longrightarrow \text{1 algarismo na parte decimal} \\ \hline & 4 & 2 & \\ +\ 8 & 4 & & \\ \hline 8{,} & 8 & 2 & \longrightarrow \text{2 algarismos na parte decimal} \end{array}$$

Divisão de números racionais

- Na forma fracionária

Para dividirmos dois números racionais na forma fracionária, mantemos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda. Veja o exemplo:

$$\frac{12}{7}:\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{12}{7}\cdot\left(-\frac{4}{1}\right)=-\frac{48}{7}$$

- Na forma decimal

Para obtermos o quociente entre dois números racionais na forma decimal, podemos multiplicar os dois termos por uma mesma potência de 10 conveniente a fim de obtermos um número natural como divisor. Veja:

$$\overset{\times 10}{12{,}66 : 0{,}3 = 126{,}6 : 3}$$

Então, dividir 12,66 por 0,3 é o mesmo que dividir 126,6 por 3. Efetuando os cálculos, temos que 12,66 dividido por 0,3 é igual a 42,2.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Construa um segmento de reta de 8 cm. Subdivida-o partes iguais e numere-as de -2 a 2. Em seguida, localize os seguintes pontos:

$$-\frac{3}{7} \qquad 1{,}6 \qquad \frac{7}{5} \qquad -1 \qquad 0$$

2. Compare os números racionais a seguir, usando os símbolos $>$, $<$ e $=$:

a) $4{,}9 \blacksquare 4{,}09$

b) $-15{,}3 \blacksquare 15{,}3$

c) $\frac{19}{3} \blacksquare \frac{23}{3}$

d) $-\frac{89}{7} \blacksquare -\frac{63}{4}$

e) $-\frac{7}{5} \blacksquare -1{,}4$

f) $23{,}98 \blacksquare 23{,}89$

3. Efetue as adições e as subtrações:

SAIBA QUE

Podemos transformar em fração um número na forma decimal e vice-versa.

a) $-\frac{7}{8} + 4{,}5$

b) $\frac{13}{4} + \frac{19}{5}$

c) $-\frac{8}{11} - \frac{5}{3}$

d) $79{,}05 - 12{,}4$

e) $123 - \frac{35}{4}$

f) $1\,347{,}01 + 132{,}86$

g) $\frac{49}{7} + \left(-\frac{18}{3}\right)$

h) $50 - 4{,}99$

4. Efetue as multiplicações a seguir:

a) $5{,}4 \times 3{,}1$

b) $\left(-\frac{45}{49}\right) \times \left(\frac{48}{18}\right)$

c) $8{,}7 \times \frac{5}{4}$

d) $\left(-\frac{36}{15}\right) \times \left(-\frac{50}{12}\right)$

e) $(-4{,}6) \times (-0{,}7)$

f) $\frac{19}{3} \times \frac{33}{7}$

g) $11{,}05 \times (-4)$

h) $3{,}9 \times 2{,}02$

5. Encontre os quocientes das divisões a seguir:

a) $16{,}38 : (-1{,}3)$

b) $\left(-\frac{42}{13}\right) : \left(-\frac{7}{26}\right)$

c) $-1\,397 : (-20{,}5)$

d) $5 : \left(-\frac{78}{3}\right)$

e) $501{,}3 : 7{,}5$

f) $643{,}284 : 20{,}04$

g) $18\,331{,}2 : 304$

6. (OBM) Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas, o peso da barra, em gramas, é:

a) 160
b) 200
c) 240
d) 280
e) 400

7. (Prova Brasil) Uma casa tem 3,88 metros de altura. Um engenheiro foi contratado para projetar um segundo andar e foi informado que a prefeitura só permite construir casas de dois andares com altura de até 7,80 metros. Qual deve ser a altura máxima, em metros, do segundo andar?

a) 3,92
b) 4,00
c) 4,92
d) 11,68

CAPÍTULO

3 PORCENTAGEM

A expressão **por cento** faz parte de nosso dia a dia. Podemos encontrá-la facilmente em notícias ao ler jornais, revistas ou assistir à televisão. Nas compras em lojas e supermercados, nas aplicações e nos empréstimos em bancos, enfim, em tudo que se relaciona à economia e às finanças encontramos a expressão **por cento**. Também usamos comumente essa expressão para fazer comparações, como você já pôde observar em muitos dos gráficos e tabelas estudados anteriormente.

FABIO COLOMBINI

A expressão **por cento** vem do latim *per centum* e quer dizer "por um cento". Pode ser representada pelo símbolo **%**.

Assim, quando você lê ou escuta uma afirmação como "A região Norte ocupa uma superfície que corresponde a 45% da superfície do Brasil", isso significa que a região Norte ocupa uma área de 45 km² para cada 100 km² da área ocupada pelo Brasil.

Então, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$45\% = \frac{45}{100} = 0{,}45$$

- $0{,}45$ → representação decimal
- $\frac{45}{100}$ → razão centesimal
- 45% → representação percentual

Quando dizemos que "Quase 85% da população brasileira vive em áreas urbanas", isso significa que cerca de 85 em cada grupo de 100 brasileiros vivem em áreas urbanas.

$$85\% = \frac{85}{100} = 0{,}85$$

- $0{,}85$ → representação decimal
- $\frac{85}{100}$ → razão centesimal
- 85% → representação percentual

Veja como podemos calcular a taxa ou índice percentual nas situações a seguir.

1 Como escrever $\frac{1}{2}$ na forma de taxa percentual?

Devemos escrever uma razão equivalente à razão dada e que tenha denominador 100.

$$\frac{1}{2} \overset{\times 50}{\underset{\times 50}{=}} \frac{50}{100} = 50\% \longrightarrow \frac{1}{2} = 50\%$$

SAIBA QUE

Nos exemplos anteriores, 45% e 85% são chamados de **taxas percentuais**.

2 Como escrever a razão $\frac{3}{8}$ na forma de taxa percentual?

Observando que 8 não é divisor de 100, vamos escrever a forma decimal de $\frac{3}{8}$ (dividindo 3 por 8):

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = \frac{0{,}375 \cdot 100}{100} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\% \longrightarrow \frac{3}{8} = 37{,}5\%$$

3 Um desconto de 7 mil reais sobre um preço de 25 mil reais representa quantos por cento de desconto?

Inicialmente, temos a razão $\frac{7\,000}{25\,000} = \frac{7}{25}$

Podemos fazer o cálculo de dois modos.

1º modo

Usando razões equivalentes:

$$\frac{7}{25} \overset{\times 4}{\underset{\times 4}{=}} \frac{28}{100} = 28\%$$

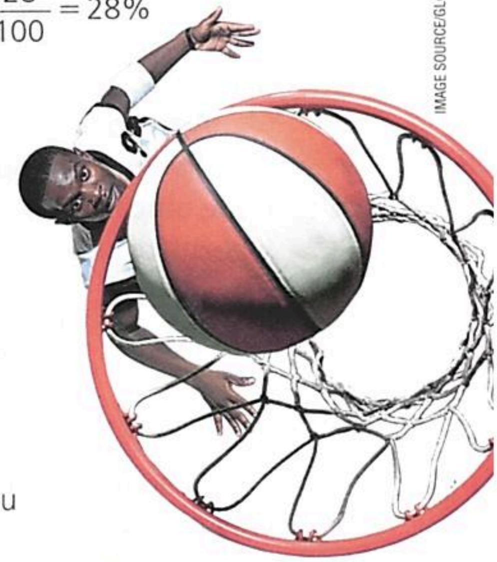
Representa 28% de desconto.

2º modo

Escrevendo na forma decimal:

$$\frac{7}{25} = 0{,}28 = \frac{28}{100} = 28\%$$

IMAGE SOURCE/GLOW IMAGES



Jogador de basquete acertando a bola na cesta.

4 Em uma partida de basquetebol, obtemos o índice de aproveitamento de lances livres de um jogador calculando a razão percentual entre o número de acertos e o total de lances livres cobrados por esse jogador.

Qual o índice de aproveitamento de um jogador que acertou 12 dos 15 lances livres que cobrou em uma partida?

$$\frac{12}{15} = 0{,}8 = 0{,}80 = \frac{80}{100} = 80\%$$

O índice de aproveitamento desse jogador foi de 80%.

Veja no material audiovisual o vídeo sobre movimentos migratórios no mundo.

NÓS

Consumo sustentável

Consumo sustentável é um conjunto de práticas adotadas na escolha de um produto ou serviço, cujo objetivo é causar menor impacto sobre os recursos naturais ou até mesmo eliminá-lo. O consumo sustentável também está relacionado com a escolha consciente das compras, ou seja, evitando as compras por impulso, compra-se apenas o que realmente é necessário.

- Você já parou para pensar se tem hábitos de consumo sustentável? Cite algumas ações que podem ser adotadas no dia a dia que evitam desperdício.
- Pesquise a taxa percentual referente à reciclagem do lixo na sua cidade.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Na venda de um tênis de 150 reais, um vendedor obteve uma comissão de 12 reais. Essa comissão representa quantos por cento do preço do produto?

2. Rafael prepara um copo de suco misturando 120 mililitros de água e 80 mililitros de suco de fruta concentrado. Qual é a taxa percentual de água nessa mistura?

3. Vilma acertou 38 das 50 questões da prova de Matemática de um vestibular. Quantos por cento dessa prova ela acertou?

4. Quinta-feira passada, 5 dos 40 alunos de uma classe faltaram na aula de Educação Física. Nesse dia, o professor registrou quantos por cento de faltas?

5. Após uma apresentação de música, 250 espectadores foram entrevistados e opinaram sobre o *show*. Veja o resultado dessa pesquisa:

Opinião sobre o *show*

Opinião	Número de pessoas
Ótimo	105
Bom	100
Regular	30
Ruim	15

Fonte: Dados fictícios.

Observando a tabela e considerando o total de entrevistados, escreva a taxa percentual correspondente a cada opinião.

a) Ótimo

b) Bom

c) Regular

d) Ruim

6. O primeiro Campeonato Mundial de Voleibol Masculino foi realizado em 1949. Desse ano até 2014, já foram realizados 18 torneios, e o Brasil ganhou 3 deles. O número de conquistas brasileiras representa quantos por cento do número de torneios realizados?


CC. 2.5 BY KIBBUTZ GAN SHMUEL ARCHIVE

Campeonato Mundial de Voleibol Masculino, em Moscou, 1952.

7. No verão de 2018, foi realizada uma análise do lixo deixado em uma praia do litoral brasileiro. O lixo foi separado e classificado, e os resultados foram:

Análise do lixo encontrado na praia

Tipo de material	Massa (em kg)
Plástico	396
Vidro	9
Metal	18
Papel	27

Fonte: Dados fictícios.

Com base nessa tabela, responda:

a) Quantos quilogramas de lixo foram recolhidos nessa praia?

b) Os materiais de plástico recolhidos representam quantos por cento desse total?

8. No colégio do meu bairro estudam 1 600 alunos, dos quais 720 são meninos. O número de meninas representa quantos por cento do total de alunos que estudam nesse colégio?

POR TODA PARTE

Amazônia ocupa quase 50% do território nacional

Maior reserva de diversidade biológica do mundo, a Amazônia é também o maior **bioma** brasileiro em extensão. Com a área aproximada de 4 196 943 km², o Bioma Amazônia ocupa quase metade do território nacional (49,29%).

A bacia amazônica ocupa $\frac{2}{5}$ da América do Sul e 5% da superfície terrestre. Sua área, de aproximadamente 6,5 milhões de quilômetros quadrados, abriga a maior rede hidrográfica do planeta, que escoa cerca de $\frac{1}{5}$ do volume de água doce do mundo. Sessenta por cento da bacia amazônica encontra-se em território brasileiro, onde o Bioma Amazônia ocupa a totalidade de cinco unidades da federação (Acre, Amapá, Amazonas, Pará e Roraima), grande parte de Rondônia (98,8%), mais da metade do Mato Grosso (54%), além de parte do Maranhão (34%) e de Tocantins (9%).

Informações obtidas em: IBGE. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2013-agencia-de-noticias/releases/12789-asi-ibge-lanca-o-mapa-de-biomas-do-brasil-e-o-mapa-de-vegetacao-do-brasil-em-comemoracao-ao-dia-mundial-da-biodiversidade.html>. Acesso em: 1 jul. 2018.

SAIBA QUE

Bioma é conceituado como um conjunto de vida (vegetal e animal), constituído pelo agrupamento de tipos de vegetação contíguos e identificáveis em escala regional, com condições geoclimáticas similares e história compartilhada de mudanças, o que resulta em uma diversidade biológica própria.

De acordo com o texto apresentado, responda às questões a seguir, no caderno, usando uma calculadora.

1. Qual a área aproximada do território brasileiro?

2. Qual a área aproximada da superfície da América do Sul?

3. Faça uma pesquisa e descubra quantos biomas há no Brasil e quantos por cento cada um deles representa do território nacional.

4. O Programa de Monitoramento do Desmatamento na Amazônia (Prodes) é o sistema responsável pelas taxas oficiais do desmatamento na Amazônia Legal, cujo satélite opera com imagens de 30 metros de resolução. A apuração do Inpe (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) com esse sistema, referente ao período de agosto de 2016 a julho de 2017, apontou uma queda de 16% no desmatamento da floresta. Essa é a segunda menor taxa de toda a história do monitoramento.

Informações obtidas em: INPE. Disponível em: <http://www.obt.inpe.br/OBT/noticias/INPE-estima-desmatamento-por-corte-raso-na-Amazonia-em-2017>. Acesso em: 1 jul. 2018.

- Sabendo que a área desmatada registrada de agosto de 2015 a julho de 2016 foi cerca de 7 893 km², calcule e registre a área desmatada no mesmo período entre 2016 e 2017.

Vista aérea de desmatamento no município de Altamira, PA.

RICARDO LIMA/MOMENT OPEN/GETTY IMAGES

Juro simples

PENSE E RESPONDA

Agora, responda às questões no caderno.

1. Lendo a história, o que você entendeu por juro?

2. Quanto o comprador pagaria de entrada, se desse 40% do valor da TV? Nesse caso, quanto ainda restaria para ele pagar?

3. Se o comprador pagar à vista, ele ganha 10% de desconto. Nesse caso, por quanto sai a TV?

Quando uma pessoa pede dinheiro emprestado a um banco, ela paga uma compensação pelo tempo que fica com a quantia emprestada.

Às vezes, quando se compra uma mercadoria à prestação, paga-se um acréscimo pelo tempo correspondente ao número de prestações.

Quando alguém aplica dinheiro em um banco, recebe uma compensação pelo tempo em que está emprestando a quantia ao banco.

Essa compensação ou esse acréscimo a que estamos nos referindo se chama **juro** e corresponde sempre a uma porcentagem do valor do empréstimo ou da compra.

Assim, podemos dizer que:

> Toda compensação em dinheiro que se paga, ou que se recebe, pela quantia em dinheiro que se empresta, ou que se pede emprestado, é chamada **juro**.

Quando falamos em juro, devemos considerar:

- O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado chama-se **capital**.
- A taxa de porcentagem que se paga pelo "aluguel" do dinheiro chama-se **taxa de juro**.
- O total que se paga no fim do empréstimo (capital + juro) chama-se **montante**.

Vejamos, a seguir, algumas situações que envolvem juro.

1 Regina vai a um banco e faz um empréstimo de 12 000 reais por 3 meses com uma taxa de juro simples de 2,7% ao mês. Qual a quantia que ela deverá pagar de juro e qual o total que Regina terá de pagar no fim do empréstimo?

Vamos indicar por x a quantia que ela deverá pagar de juro e teremos:

$x = (2{,}7\% \text{ de } 12\,000) \cdot 3$

$x = 0{,}027 \cdot 12\,000 \cdot 3 = 972$

Ao todo, ela deverá pagar ao banco a quantia de:

$12\,000 + 972 = 12\,972$

Regina deverá pagar 972 reais de juro e pagará, no total, 12 972 reais.

2 Uma aplicação feita durante 2 anos, a uma taxa de 12% ao ano, rendeu 1 800 reais de juro simples. Qual foi a quantia aplicada?

Vamos, inicialmente, determinar quanto a aplicação rendeu de juro por ano: $1\,800 : 2 = 900$

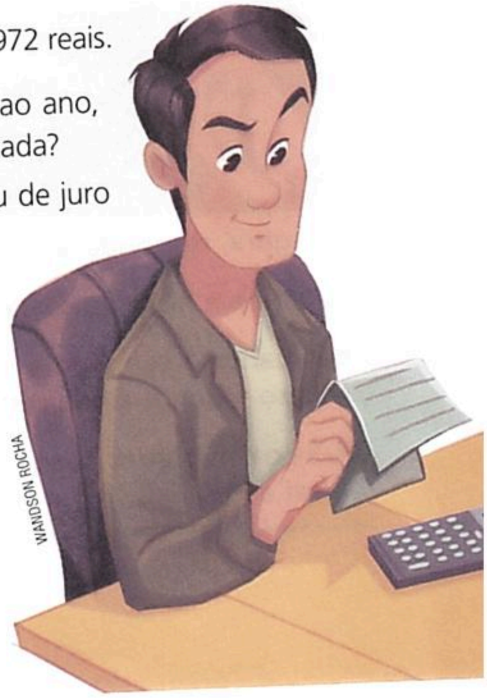
Representando a quantia aplicada por x, podemos escrever:

$12\% \cdot x = 900$

$0{,}12x = 900$

$x = \dfrac{900}{0{,}12} = 7\,500$

A quantia aplicada foi 7 500 reais.



WANDSON ROCHA

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno, considerando juro simples.

1. Quanto renderá de juro:

a) a quantia de 1 800 reais, aplicada durante 5 meses, a uma taxa de 2,3% ao mês?

b) a quantia de 2 450 reais, aplicada durante 2 meses, a uma taxa de 1,96% ao mês?

2. Uma aplicação de 40 000 reais rendeu, em 3 meses, 3 000 reais de juro. Qual é a taxa mensal de juro?

3. Luís Roberto colocou parte de seu 13º salário em uma aplicação que rendia 25,6% de juro ao ano. Sabendo-se que após dois anos ele recebeu 389,12 reais de juro, qual foi a quantia que ele aplicou?

4. (UFPB) Katienne tem duas opções de pagamento na compra de um fogão: sem juros, em quatro parcelas mensais iguais de R$ 350,00; ou à vista, com 15% de desconto. Nesse contexto, o preço desse fogão, à vista, é:

a) R$ 1 190,00

b) R$ 1 110,00

c) R$ 1 210,00

d) R$ 1 090,00

e) R$ 1 290,00

5. (Saresp-SP) Certo banco cobra juros simples de 0,3% ao dia para contas pagas com atraso de até 30 dias. Pedro pagou uma conta de R$ 50,00 com atraso de 12 dias. O valor pago por Pedro foi de:

a) R$ 51,00

b) R$ 51,40

c) R$ 51,80

d) R$ 52,20

6. (Saresp-SP) Marcos fez um empréstimo de R$ 120 000,00 que deverá ser pago com juros de 1% ao mês sobre o valor emprestado a cada mês. Sabendo que pagou R$ 6 000,00 de juros, quantos meses levou para pagar o empréstimo?

a) 3 meses

b) 4 meses

c) 5 meses

d) 6 meses

7. Uma loja do meu bairro colocou o seguinte anúncio na vitrine:

EDITORIA DE ARTE

Qual é a taxa mensal de juro que essa loja está cobrando para pagamento a prazo?

8. (Fuvest-SP) Há um ano, Bruno comprou uma casa por R$ 50 000,00. Para isso, tomou emprestados R$ 10 000,00 de Edson e R$ 10 000,00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e 4% de juros, respectivamente. A casa valorizou 3% durante este período de um ano. Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e Carlos, o seu lucro foi de:

a) R$ 400,00

b) R$ 500,00

c) R$ 600,00

d) R$ 700,00

e) R$ 800,00

9. Mariana precisa comprar um fogão. Depois de pesquisar bastante, ela encontrou um fogão com duas opões de pagamento: R$ 700,00 à vista ou R$ 800,00 em 4 parcelas de R$ 200,00, pagando a primeira parcela no ato da compra. Sabendo-se que Mariana tem os R$ 800,00 e pretende aplicá-los a juro simples de 4% ao mês, qual tipo de pagamento será mais vantajoso financeiramente? Por quê?

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

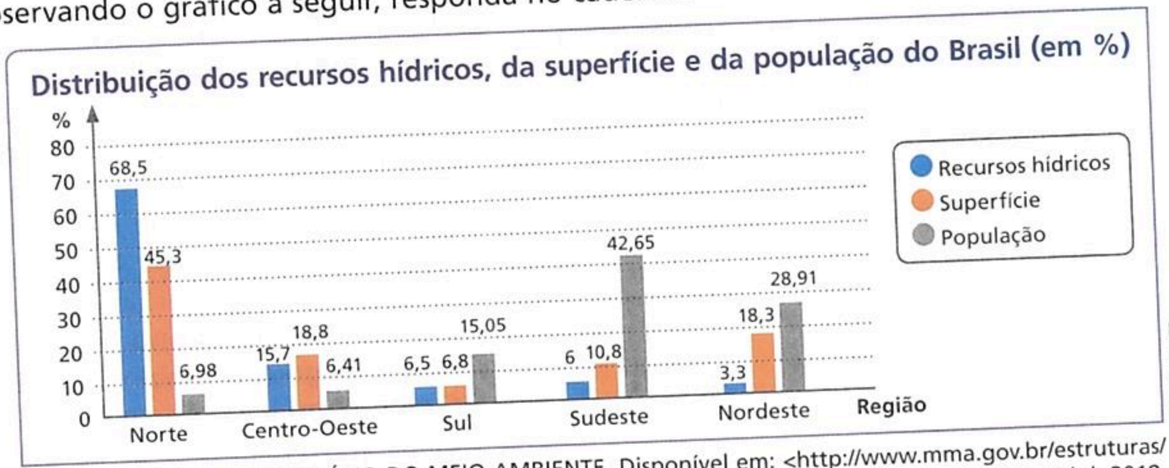
Recursos hídricos

A água é uma substância fundamental para a manutenção da vida animal e da vida vegetal. É um recurso natural de extrema importância no desenvolvimento de diversas atividades, como no setor agrícola, industrial, econômico, entre outros.

As atividades a seguir trazem algumas pesquisas estatísticas sobre a importância da água. Para resolver essas atividades, é necessário interpretar e construir diferentes tipos de gráfico.

1. O Brasil possui cerca de 13,7% do total de água doce do mundo, sendo considerado um território rico em termos hídricos. No entanto, o país vive sérios problemas, relacionados tanto à degradação da qualidade das águas, principalmente nas proximidades das áreas urbanas, quanto à falta de controle do excesso e da insuficiência de água, que atingem várias localidades brasileiras. Não são somente as enchentes que afetam as cidades brasileiras: a escassez hídrica também impõe sérias restrições e elevados custos ao desenvolvimento econômico e social de grandes cidades do Brasil.

Observando o gráfico a seguir, responda no caderno:



Informações obtidas em: MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/estruturas/sedr_proecotur/_publicacao/140_publicacao09062009025910.pdf>. Acesso em: 1º jul. 2018.

a) Que tipo de gráfico é este?

b) Indique a região brasileira:

- com a maior superfície;
- com mais recursos hídricos;
- com a segunda menor concentração de população.

c) Que região tem a menor taxa percentual de recursos hídricos do nosso país?

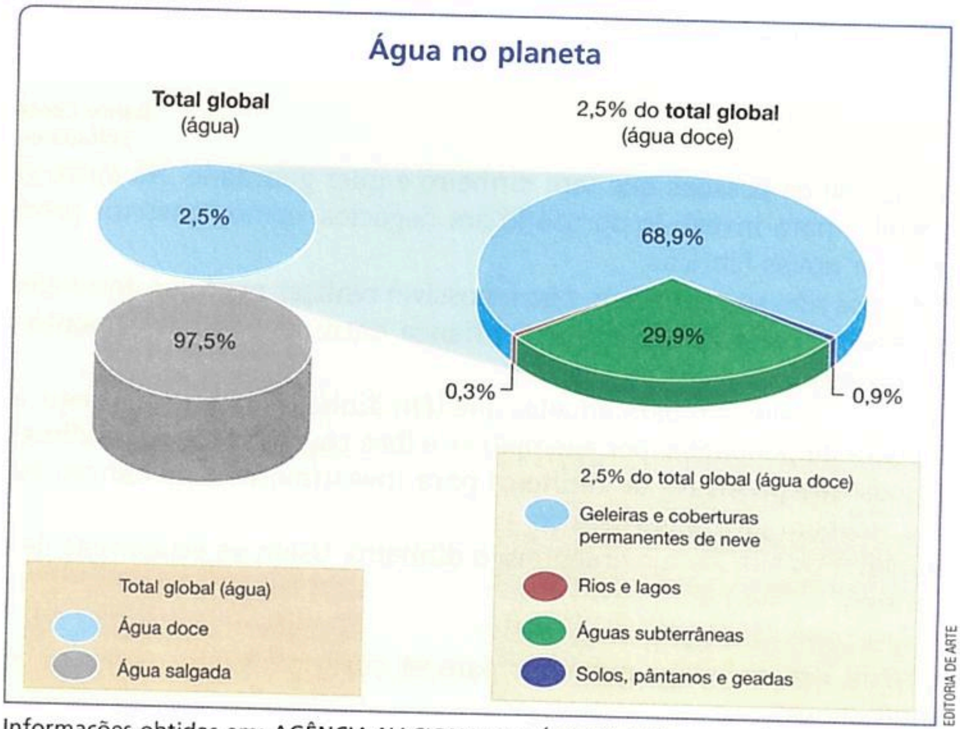
d) Em qual região há maior concentração de população?

e) Pode-se dizer que quanto maior a superfície da região, maior é o número de habitantes? Justifique sua resposta.

f) Quantos por cento da água doce do mundo estão na região Sudeste brasileira? Explique como você pensou para responder.

g) Pode-se dizer que a região que dispõe de mais recursos hídricos é a que possui a maior população?

Cerca de 70% da superfície da Terra está coberta de água. Desse total, 97,5% constituem os oceanos e mares, e somente 2,5% são de água doce. Observe, no gráfico, como essa água é distribuída.



EDITORIA DE ARTE

Informações obtidas em: AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS. **A água no planeta para crianças.** Disponível em: <http://arquivos.ana.gov.br/institucional/sge/CEDOC/Catalogo/2014/AAguaNoPlanetaParaCriancas2014.pdf>. Acesso em: 1º jul. 2018.

2. Responda no caderno, ao que se pede.

a) Explique o significado de cada taxa percentual representada no gráfico.

b) Determine qual taxa percentual, aproximada, de água do planeta corresponde:

- às geleiras e coberturas permanentes de neve;
- aos rios e lagos;
- às águas subterrâneas;
- aos solos, aos pântanos e às geadas.

Você pode utilizar uma calculadora para fazer os cálculos.

3. Você sabia que o total de água no corpo humano é 70%, a mesma taxa percentual de água da superfície terrestre? Veja, na tabela, quantos por cento de água há nos órgãos do corpo humano. Faça um gráfico de barras com os dados da tabela.

Percentual de água nos órgãos do corpo humano

Órgão	Percentual
Cérebro	75%
Pulmões	86%
Fígado	86%
Músculos	75%
Coração	75%
Rins	83%
Sangue	81%

Informações obtidas em: NÚCLEO DE TECNOLOGIA EDUCACIONAL MUNICIPAL **Curiosidades sobre a água.** Disponível em: <https://ead.pti.org.br/ntm/mod/forum/discuss.php?d=32>. Acesso em: 3 ago. 2018.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

O que são os bancos?

Banco Central do Brasil
Editada em dez. 2002

Existe um grupo de pessoas que tem dinheiro e quer guardá-lo. Há outro grupo que precisa de dinheiro para investi-lo ou usá-lo em negócios, como construir prédios, abrir comércio e instalar novas fábricas.

Se esses grupos não se conhecem, não é possível realizar negócios entre eles. Mesmo que se conhecessem, poderia não haver confiança entre as pessoas, a ponto de umas pedirem dinheiro emprestado às outras.

Então, os bancos oferecem para aquelas que têm dinheiro uma forma segura de guardá-lo — uma conta de poupança, por exemplo — e lhes pagam juros ou rendimentos.

E, às pessoas que precisam de dinheiro para investimentos, os bancos fazem-lhes empréstimos e recebem juros pelo serviço.

Dessa maneira, os bancos movimentam o dinheiro. Usam as economias de uns para emprestar a outros.

[...]

Além do mais, acontece algo que pode parecer curioso: os bancos fazem com que o dinheiro se multiplique.

Quando as pessoas guardam seu dinheiro no banco, deixam-no depositado por algum tempo. Sabendo disso, os bancos só conservam em seus cofres uma pequena parte de tudo aquilo que recebem, para atender aos clientes que solicitarem alguma quantia. A outra parte, bem maior, é emprestada a outras pessoas. Com a diferença entre os juros que recebem das pessoas que tomam empréstimo e os juros que pagam às pessoas que guardam o dinheiro (em uma conta de poupança, por exemplo), os bancos pagam a seus empregados e obtêm seus lucros.

Por isso, muitos clientes dos bancos podem adquirir bens, como um carro ou uma casa, sem ter dinheiro na hora. Eles tomam dinheiro emprestado e assumem o compromisso de fazer o pagamento no futuro. Os bancos, por confiarem neles, garantem o negócio. [...]

Fonte: BANCO Central do Brasil. **O que são os bancos?**
Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/Pre/educacao/cadernos/bancos.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2018.

Usando seus conhecimentos sobre porcentagem e juro, responda, no caderno, às questões e entenda melhor como os bancos funcionam.

1. Segundo o texto, qual o papel dos bancos?

2. Uma pessoa fez uma aplicação de R$ 1 000,00 a juro simples de 3% ao mês. Quanto receberá de juro em 1 ano?

3. As aplicações financeiras nos auxiliam a capitalizar nosso dinheiro. Discuta com seus colegas as situações a seguir indicando se a aplicação financeira pode ou não contribuir para:

a) Ter um dinheiro extra para aproveitar mais a vida.

b) Comprar uma máquina que vai aumentar a produtividade de um negócio.

c) Iniciar um negócio cuja previsão de rendimento seja maior que o juro pago.

d) Completar o orçamento doméstico.

e) Comprar um objeto cujo valor não está disponível.

CAPÍTULO 4

DÍZIMAS PERIÓDICAS

Em Matemática, muitas vezes, é útil representar números racionais, expressos por meio de frações, na forma decimal. Para isso, basta dividir o numerador pelo denominador.

Em alguns casos, essa representação decimal é finita. Por exemplo, a fração $\frac{9}{20}$:

$$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{20} \\ 9\,0 & 0{,}45 \\ 1\,0\,0 & \\ 0 & \end{array}$$

Ou seja, $\frac{9}{20} = 0{,}45$

Em outros casos, essa representação decimal é infinita. Vamos ver a fração $-\frac{7}{11}$:

$$\begin{array}{l|l} 7 & \underline{11} \\ 7\,0 & 0{,}636363\ldots \\ \quad 4\,0 & \\ \qquad 7\,0 & \\ \qquad\quad 4\,0 & \\ \qquad\qquad 7\,0 & \\ \qquad\qquad\quad 4\,0 & \\ \qquad\qquad\qquad\;\; 7 & \end{array}$$

Ou seja, $-\frac{7}{11} = -0{,}636363\ldots$

No segundo exemplo, o resto nunca se anula e fica alternando entre 7 e 4. O quociente tem a parte decimal infinita e periódica, ou seja, é uma **dízima periódica**. No caso de $-0{,}636363\ldots$, os algarismos 6 e 3, respectivamente, continuarão se repetindo indefinidamente.

Dizemos que:

Na dízima periódica $-0{,}636363\ldots$, o período é o grupo 63, que se repete, e a representação abreviada desse número é $-0{,}\overline{63}$. Essa dízima é uma dízima periódica dita simples.

Vamos observar a seguinte dízima periódica: 12,1454545...

Nela o período é 45 e o algarismo 1, que ocupa a casa dos décimos, não se repete. Portanto não pertence ao período. Nesse caso, a dízima periódica é chamada de composta.

Em uma dízima periódica, a parte que fica à direita da vírgula e não compõe o período pode ou não existir. Caso exista, ela determina uma **dízima periódica composta**. Caso contrário, trata-se de uma **dízima periódica simples**.

PENSE E RESPONDA

Observe as frações e, usando uma calculadora, transforme-as em números racionais na forma decimal.

- $\frac{7}{9}$
- $\frac{13}{99}$
- $\frac{3}{9}$
- $\frac{211}{99}$

Agora, no caderno, faça o que se pede.

1. Quais os valores encontrados?

2. Quais dos números obtidos são dízimas periódicas? Quais os períodos delas?

3. Observando os números na forma de fração e as dízimas periódicas, quais relações podemos identificar?

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Os números racionais a seguir são chamados frações decimais. Escreva cada um deles na forma decimal.

a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{31}{10}$

c) $\frac{6}{100}$

d) $\frac{11}{100}$

e) $\frac{162}{100}$

f) $\frac{9}{1\,000}$

g) $\frac{29}{1\,000}$

h) $\frac{385}{1\,000}$

i) $\frac{82}{10}$

j) $\frac{163}{10}$

k) $\frac{427}{100}$

l) $\frac{1\,104}{1\,000}$

2. Qual é a representação decimal de cada um dos seguintes números racionais?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{9}{5}$

d) $\frac{37}{20}$

e) $\frac{35}{11}$

f) $\frac{11}{9}$

g) $\frac{11}{8}$

h) $\frac{33}{25}$

i) $\frac{3}{20}$

j) $\frac{13}{90}$

k) $\frac{33}{4}$

l) $\frac{25}{6}$

3. Classifique os números decimais do exercício anterior em decimais exatos (DE) ou dízimas periódicas (DP).

4. Para cada uma das dízimas periódicas a seguir, identifique o período:

a) 0,02222...

b) 1,77777...

c) 12,0101...

d) −56,3333...

e) −3,4565656...

f) 1,034034034...

Fração geratriz de dízimas periódicas simples

Veja os casos a seguir.

1 Vamos encontrar a fração geratriz da dízima periódica 0,5555..., ou seja, encontrar qual fração, quando transformada em número racional na forma decimal, gera essa dízima.

Para isso, montamos a equação $x = 0{,}5555...$ (que chamaremos de **I**) em que *x* é a fração geratriz procurada. Depois, multiplicamos os dois termos dessa equação por 10, ou seja, $10x = 5{,}5555...$ (que chamaremos de **II**).

Em seguida, subtraímos (**I**) de (**II**):

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 5{,}5555...\ (\mathbf{II}) \\ - & x = & 0{,}5555...\ (\mathbf{I}) \\ \hline & 9x = & 5 \end{array}$$

Resolvendo a equação temos que:

$$9x = 5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

A fração geratriz da dízima periódica 0,5555... é $\frac{5}{9}$.

2 Dada a dízima periódica 3,2727..., vamos encontrar a fração geratriz dela.

Para encontrar a fração geratriz dessa dízima periódica, montamos a equação $y = 3{,}2727...$ (que chamaremos de **I**) em que *y* é a fração geratriz que desejamos. Em seguida, multiplicamos os dois termos dessa equação por 100 e obtemos $100y = 327{,}2727...$ (que chamaremos de **II**).

Em seguida, subtraímos (**I**) de (**II**):

$$\begin{array}{rrl} & 100y = & 327{,}2727...\ (\mathbf{II}) \\ - & y = & 3{,}2727...\ (\mathbf{I}) \\ \hline & 99y = & 324 \end{array}$$

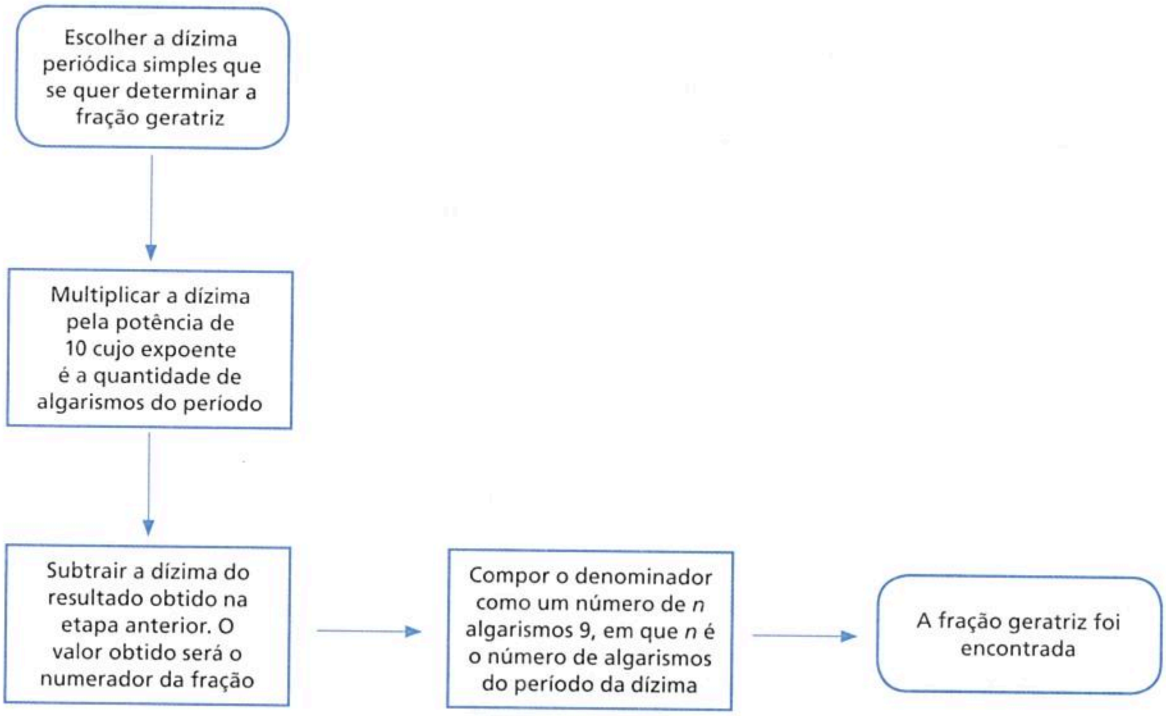
$$99y = 324 \Rightarrow y = \frac{324}{99} = \frac{36}{11}$$

A fração geratriz procurada é $\frac{36}{11}$.

No primeiro caso, multiplicamos a dízima por 10, pois o período continha apenas um algarismo que se repetia: o algarismo 5. Ao fazermos a subtração, as casas decimais, por serem iguais, se eliminam.

O mesmo raciocínio foi aplicado ao exemplo 2, mas dessa vez foi necessário multiplicarmos por 100, pois o período era composto por 2 algarismos que se repetiam: os algarismos 2 e 7.

Observe um fluxograma do processo para encontrar frações geratrizes de dízimas periódicas simples:



ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Encontre a fração geratriz das dízimas periódicas simples a seguir:

a) −2,4444... **c)** 17,8888... **e)** 0,292929...

b) 0,11111... **d)** −6,353535... **f)** 2,102102102...

2. (UFPI) Marque a alternativa que contém o valor da expressão numérica 1,88888... + $\frac{1}{9}$.

a) $\frac{33}{50}$ **b)** $\frac{10}{9}$ **c)** $\frac{10}{19}$ **d)** 2 **e)** $\frac{7}{55}$

Fração geratriz de dízimas periódicas compostas

Assim como é possível determinar a fração geratriz das dízimas periódicas simples, também podemos determinar as frações geratrizes de dízimas periódicas compostas.

Veja o caso a seguir.

1 Dada a dízima periódica composta −5,6707070..., vamos encontrar sua fração geratriz.

Para fazermos o que se pede, primeiro escrevemos a equação x = −5,6707070..., em que *x* é a fração que queremos encontrar. Em seguida, multiplicamos os dois membros dessa equação por 10 (equação **I**) e também por 1 000 (equação **II**).

Em seguida, subtraímos (**I**) de (**II**):

$$\begin{array}{rl} 1\,000x = -5670{,}707070\ldots & (\mathbf{II}) \\ -\quad 10x = -\quad 56{,}707070\ldots & (\mathbf{I}) \\ \hline 990x = -5\,614 & \end{array} \Rightarrow 990x = -5\,614 \Rightarrow x = -\frac{5\,614}{990} = -\frac{2\,807}{495}$$

A fração geratriz que procurávamos é $-\dfrac{2\,807}{495}$.

Nesse exemplo, multiplicamos a dízima por 10, pois havia um algarismo que não pertencia ao período (o algarismo 6). Em seguida, multiplicamos a dízima por 1 000, pois tínhamos 3 algarismos até a repetição do período (6, 7 e 0). Em seguida, subtraímos as duas equações, eliminando as casas decimais e encontrando a fração procurada.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Faça um fluxograma do processo de obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica composta.

2. Encontre a fração geratriz das dízimas periódicas compostas a seguir:

a) 7,15555... **c)** 69,0333...

b) −0,53333... **d)** −1,17474...

3. (OBM) Sabendo-se que 0,333... $-\dfrac{1}{3}$, qual é a fração irredutível equivalente a 0,1333...?

a) $\dfrac{1}{13}$ **c)** $\dfrac{1}{30}$ **e)** $\dfrac{1\,333}{10\,000}$

b) $\dfrac{1}{15}$ **d)** $\dfrac{2}{15}$

4. (UFPI) Sabendo-se que 0,6666... $-\dfrac{2}{3}$, qual das frações irredutíveis abaixo equivale a 1,5666...?

a) $\dfrac{1}{30}$ **c)** $\dfrac{133}{300}$ **e)** $\dfrac{47}{30}$

b) $\dfrac{2}{15}$ **d)** $\dfrac{43}{330}$

5. (Ufop-MG) A respeito dos números a − 0,499999... e b − 0,5, é correto afirmar:

a) b = a + 0,011111...

b) a = b

c) *a* é irracional e *b* é racional.

d) a < b

6. (PUC-RJ) Escreva na forma de fração $\dfrac{m}{n}$, a soma 0,2222... + 0,23333...

TECNOLOGIAS

Investigando com a calculadora

Dado um número racional na forma fracionária, temos como saber se sua representação decimal será exata ou periódica sem transformá-lo em um número racional na forma decimal? Vamos investigar.

- Primeiro, vamos tentar fazer essa análise com algumas frações. Anote em seu caderno quais das frações a seguir você supõe serem, ou tem certeza que são, dízimas periódicas. Em seguida, justifique as escolhas.

a) $\frac{17}{25}$ b) $\frac{37}{33}$ c) $\frac{109}{40}$ d) $\frac{46}{81}$ e) $\frac{12}{7}$ f) $\frac{90}{16}$

- Agora, vamos iniciar nossa investigação. Junte-se a um colega para realizá-la. Para isso, vocês precisarão reproduzir o quadro a seguir em seu caderno e ter em mãos uma calculadora.

Com o auxílio da calculadora, divida o numerador pelo denominador e vá assinalando em seu quadro se o resultado encontrado é um número decimal exato ou uma dízima periódica.

Fração	Representação decimal		Fração	Representação decimal		Fração	Representação decimal	
	Decimal exato	Dízima periódica		Decimal exato	Dízima periódica		Decimal exato	Dízima periódica
$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{9}$			$\frac{1}{16}$		
$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{10}$			$\frac{1}{17}$		
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{11}$			$\frac{1}{18}$		
$\frac{1}{5}$			$\frac{1}{12}$			$\frac{1}{19}$		
$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{13}$			$\frac{1}{20}$		
$\frac{1}{7}$			$\frac{1}{14}$			$\frac{1}{21}$		
$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{15}$			$\frac{1}{22}$		

- O que você observa com relação aos denominadores de frações correspondentes a números decimais exatos? E de frações correspondentes a dízimas periódicas? Anote suas hipóteses no caderno e debata com seus colegas e com seu professor.
- Com base nas suas observações, diga se os números racionais a seguir, ao serem escritos na forma decimal, serão decimais exatos (DE) ou dízimas periódicas (DP), sem realizar a transformação para a forma decimal.

a) $\boxed{\frac{11}{21}}$

b) $\boxed{\frac{57}{8}}$

c) $\boxed{\frac{72}{24}}$

d) $\boxed{\frac{7}{13}}$

e) $\boxed{\frac{44}{80}}$

f) $\boxed{\frac{108}{30}}$

- Retome as primeiras frações apresentadas nesta seção e verifique se suas hipóteses iniciais estavam corretas.

PARA QUEM QUER MAIS

A fração geratriz da dízima 0,999...

Ao analisar o número 0,9999..., independentemente da quantidade de casas que vamos analisar, pode passar a impressão de ser um número menor que 1.

Porém, ao determinar a fração geratriz da dízima 0,999..., nos deparamos com o seguinte resultado:

$$x = 0{,}999\ldots$$

$$10x = 9{,}999\ldots$$

$$10x - x = 9{,}999\ldots - 0{,}999\ldots$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. Copie a frase a seguir e, usando as palavras indicadas, complete a frase:

equivalentes	numeradores
denominadores	mantemos
irredutível	

Para somarmos frações de ______ diferentes, encontramos as frações ______ às frações dadas, ______ os denominadores e somamos os ______. Se necessário, simplificamos o resultado a fim de obter a fração ______.

2. A quantidade de casas decimais do produto $-3{,}4$ por $-1{,}56$ é igual a:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

3. Uma pesquisa de "boca de urna", realizada no primeiro turno das eleições para prefeito de uma cidade, indicou que um dos candidatos tinha $\frac{1}{5}$ das intenções de voto. Esse número representa quantos por cento das intenções de voto dessa pesquisa?

a) 5% **b)** 10% **c)** 20% **d)** 25% **e)** 50%

4. Uma pesquisa mostrou que uma área de 4 hectares de floresta, na região tropical, pode conter cerca de 375 espécies diferentes de plantas, enquanto uma área florestal do mesmo tamanho, na região temperada, pode apresentar cerca de 15 espécies. O número de espécies em uma floresta de região temperada representa quantos por cento do número de espécies em uma floresta de região tropical?

a) 1% **b)** 2% **c)** 4% **d)** 5% **e)** 6%

5. 30% de 40% de 50% de um número representa quantos por cento do número?

a) 4% **b)** 8% **c)** 5% **d)** 6% **e)** 10%

6. Tarcísio tomou emprestados R$ 2.400,00 do banco e vai pagar o empréstimo em 6 vezes, com juro simples de 4% ao mês. A quantia que Tarcísio pagará de juro por mês será:

a) R$ 16,00

b) R$ 32,00

c) R$ 96,00

d) R$ 160,00

e) R$ 300,00

7. Encontre as frações geratrizes das dízimas periódicas a seguir:

a) 3,777...

b) 0,2555...

c) −12,181818...

d) 4,01313....

8. Elabore uma atividade envolvendo o tema porcentagem de tal modo que, para resolvê-lo será necessário aplicar os conhecimentos adquiridos nessa unidade. Utilize tabelas e gráficos para compor a atividade e, se achar necessário, aconselhe o uso da calculadora ou de uma planilha eletrônica.

Em seguida, troque sua atividade com a de um colega, resolva a atividade dele e, juntos, corrijam e debatam as duas atividades.

9. (UFMG) No período de um ano, certa aplicação financeira obteve um rendimento de 26%. No mesmo período, porém, ocorreu uma inflação de 20%. Então, é correto afirmar que o rendimento efetivo da referida aplicação foi de:

a) 3%

b) 5%

c) 5,2%

d) 6%

10. (PUC-RJ) Em um viveiro há várias araras.

- 60% das araras são azuis,
- 40% das araras são vermelhas,
- 40% das araras azuis têm bico branco,
- 30% das araras vermelhas têm bico branco.

Que porcentagem das araras do viveiro tem bico branco?

a) 10%

b) 12%

c) 24%

d) 36%

e) 40%

11. (Saresp-SP) Uma pesquisa publicada pelo jornal *Folha de S.Paulo* levantou a parcela da população chamada de "excluída". (São pessoas que, em geral, não completaram o 1º grau e vivem em famílias com renda inferior a R$ 1 200,00.)

Constatou-se que essa parcela corresponde a 60% da população.

Qual é o gráfico que melhor representa essa situação?

a)

c)

b)

d)

EDITORIA DE ARTE

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, revimos o conjunto dos números racionais e suas operações e estudamos a porcentagem e o sistema de juro simples, com enfoque em aplicações na vida cotidiana e, por consequência, na cidadania.

Entre os conceitos estudados, destacamos: o entendimento da porcentagem como taxa, os descontos e acréscimos, as aplicações de porcentagem e o juro simples e suas aplicações como rendimento ou dívida.

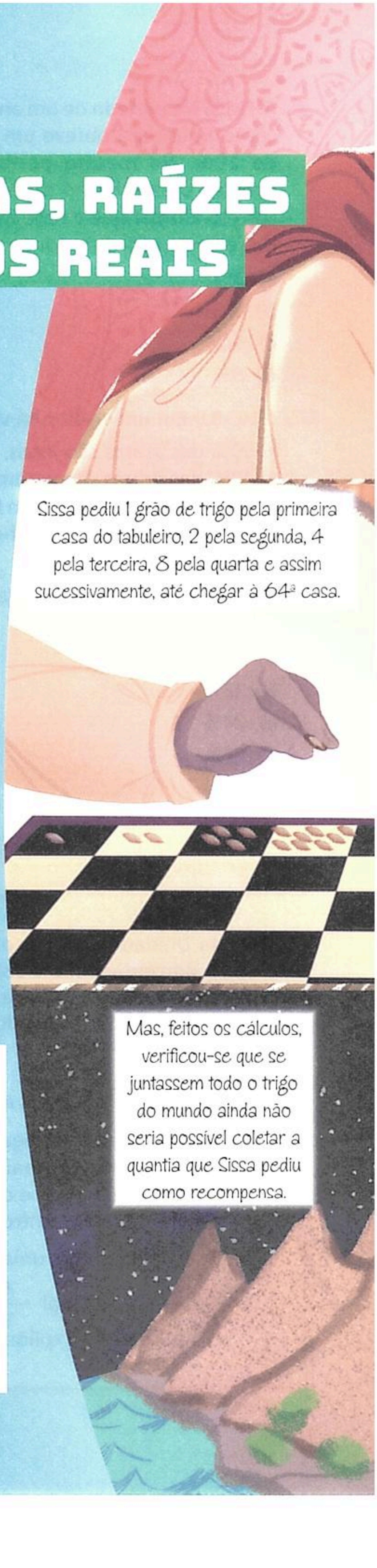
Além disso, aprendemos a encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica.

- Imagine que um colega de classe tenha faltado na aula de revisão das operações com números racionais. Escreva um bilhete para ele, explicando como somar, subtrair, multiplicar e dividir números racionais. Aproveite para contar-lhe quais dificuldades você enfrentou nessa aula e o que fez para saná-las.
- Ao se deparar com uma dízima periódica, você é capaz de identificar seu período?
- O número racional $-\frac{6}{11}$ ao ser escrito na representação decimal será exato ou será periódico? Explique sua resposta, com argumentos matemáticos.

2 POTÊNCIAS, RAÍZES E NÚMEROS REAIS

Lendas são narrativas ligadas à tradição oral que contam fatos históricos combinados a outros de origem fantástica.

Ao lado, apresentamos resumidamente uma lenda de como o jogo de xadrez teria sido inventado.



Leia a lenda e responda no caderno às questões a seguir:

- Sissa faz um pedido que se mostra impossível de ser atendido. Qual foi esse pedido?
- Que estratégias você utilizaria para calcular quantos grãos Sissa deveria receber?
- Uma das lendas diz que os matemáticos do rei levaram um grande tempo para calcular a quantidade de grãos que deveria ser paga a Sissa. Hoje existem ferramentas tecnológicas, além da calculadora, que ajudam a realizar esses cálculos com mais facilidade. Você conhece alguma dessas ferramentas tecnológicas?


Segundo a lenda, Sissa, um sábio indiano, inventou o jogo de xadrez para curar o tédio do rei.
Tendo gostado do jogo, o rei prometeu uma recompensa: daria qualquer coisa que Sissa pedisse.
O rei ficou espantado perante um pedido que pareceu tão humilde e cedeu imediatamente à sua aparente insignificância.
WANDSON ROCHA
Indicando por Q a soma dos grãos, temos:
$Q = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$

CAPÍTULO

1 POTÊNCIA DE UM NÚMERO RACIONAL

PENSE E RESPONDA

Pegue algumas folhas de papel sulfite e siga as orientações:

1. Dobre uma das folhas ao meio, sucessivamente, por 3 vezes, como mostram as ilustrações.

1ª dobra — 2ª dobra — 3ª dobra

WANDSON ROCHA

A seguir, desdobre a folha. Depois responda às questões no caderno.

a) Em quantas partes iguais a folha ficou dividida?

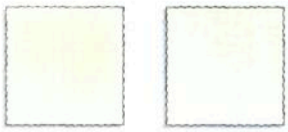
b) Dobre outra folha de papel sulfite ao meio, sucessivamente, por 4 vezes. Desdobre-a e responda: Em quantas partes a folha ficou dividida?

c) Você é capaz de dizer em quantas partes uma folha de papel sulfite vai ficar dividida se for dobrada, sucessivamente, por 5 vezes?

d) Explique como você chegou a essas respostas.

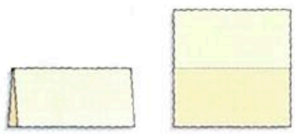
Descobrindo a potência de um número racional

Agora, observe uma folha de papel e as dobras nela feitas.



0 dobra ⟶ 1 parte

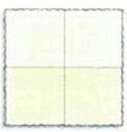
$2^0 = 1$



1 dobra ⟶ 2 partes

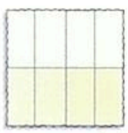
$2^1 = 2$

ILUSTRAÇÕES: MARCOS GUILHERME



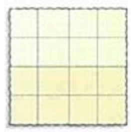
2 dobras ⟶ 4 partes

$2^2 = 2 \times 2 = 4$



3 dobras ⟶ 8 partes

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$



4 dobras ⟶ 16 partes

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

- **5** dobras $\longrightarrow$ **32** partes
  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- **6** dobras $\longrightarrow$ **64** partes
  $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$
- **7** dobras $\longrightarrow$ **128** partes
  $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$
- **8** dobras $\longrightarrow$ **256** partes
  $2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

Dado um número racional *a* e um número natural *n*, a expressão a^n chama-se **potência** e representa uma multiplicação de *n* fatores iguais ao número *a*.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatores}}$$

Essa operação é chamada **potenciação**.

Assim, pela definição:

- $10^3 = \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{3 \text{ fatores}} = 1\,000$

- $(0{,}5)^4 = \underbrace{0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5}_{4 \text{ fatores}} = 0{,}0625$

- $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}_{2 \text{ fatores}} = \frac{1}{9}$

Em uma potenciação, temos os seguintes termos:

$$2^5 = 32$$

expoente: 5

potência (resultado da operação): 32

base: 2

Lê-se: dois elevado à quinta é igual a 32.

Observações:

Dado um número racional *a*, define-se $a^1 = a$.

- $6^1 = 6$
- $\left(\frac{1}{9}\right)^1 = \frac{1}{9}$
- $(1{,}7)^1 = 1{,}7$

Dado um número racional *a*, com $a \neq 0$, define-se $a^0 = 1$.

- $5^0 = 1$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$
- $(2{,}4)^0 = 1$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Observe as multiplicações e escreva cada uma na forma de potência.

a) $6 \times 6 \times 6$

b) $0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5$

c) $\frac{3}{10} \times \frac{3}{10}$

d) $1,2 \times 1,2 \times 1,2 \times 1,2$

e) $\underbrace{9 \times 9 \times 9 \times ... \times 9}_{\text{10 fatores}}$

f) $\underbrace{1,1 \times 1,1 \times 1,1 \times ... \times 1,1}_{\text{20 fatores}}$

g) $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times ... \times 2}_{\text{25 fatores}}$

h) $\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times ... \times 1}_{\text{100 fatores}}$

2. Escreva na forma de multiplicação as potências a seguir.

a) 2^5

b) $(0,8)^3$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$

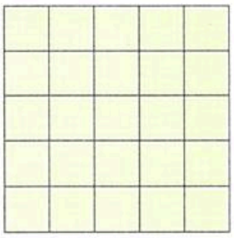
d) 10^6

e) $(2,8)^2$

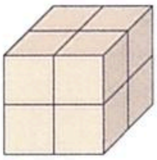
f) $(0,7)^3$

3. Cada figura a seguir sugere uma potência. Escreva a potência sugerida.

a)



b)



Cubo.

Quadrado.

4. Calcule as potências a seguir.

a) 5^3

b) 10^5

c) 2^7

d) 3^4

e) 11^2

f) 20^0

g) $(1,8)^2$

h) $(0,4)^3$

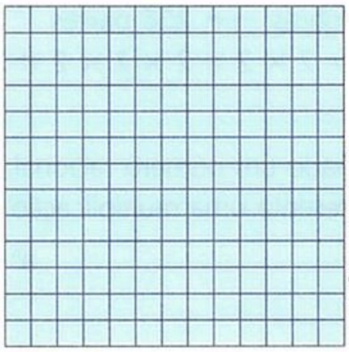
i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

j) $(2,5)^2$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

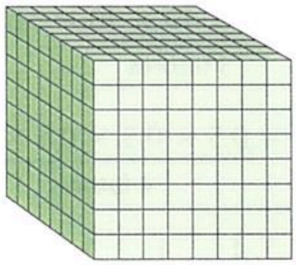
l) $(3,7)^0$

5. Considerando o □ como unidade de medida de superfície, use a potenciação para calcular a área da figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

6. Com cubinhos iguais a este, Lucca compôs o cubo a seguir. Use a potenciação para descobrir quantos cubinhos ele usou.



7. Verifique se a expressão $(10 + 7)^2$ é diferente da expressão $10^2 + 7^2$.

8. Considerando que $50\% = 0,5$, qual é o número decimal que representa o cubo de 50%?

9. Sabe-se que o número decimal *A* representa o dobro de 1,1 e o número decimal *B* representa o quadrado de 1,1. Qual é o valor de $A - B$?

10. Escreva a expressão $(0,5)^2$ na forma:

a) decimal.

b) percentual (%).

11. Compare os números *a* e *b* usando o sinal =, > ou <.

a) $a = 2^3 \times 2^2$ e $b = 2^6$

b) $a = 3^2 \times 5^2$ e $b = (3 \times 5)^2$

12. Sabendo que $10^x = 100$ e $10^0 = y$, calcule o valor de $x + y$.

CAPÍTULO 2

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

PENSE E RESPONDA

Veja as potências que Thiago calculou:

$2^1 = 2$
$2^2 = 2 \times 2 = 4$
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

$3^1 = 3$
$3^2 = 3 \times 3 = 9$
$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$
$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$

WANDSON ROCHA

1. Usando os resultados obtidos por Thiago, faça as atividades a seguir no caderno.

a) Usando o símbolo = ou ≠, compare:
- $2^2 \times 2^3$ e 2^5
- $3^4 \times 3^2$ e 3^6

b) Usando o símbolo = ou ≠, compare:
- $2^5 : 2^3$ e 2^2
- $3^5 : 3^2$ e 3^3

c) Encontre o resultado de:
- $(2^3)^2$
- $(2^2)^3$
- 3^4

d) Usando o símbolo = ou ≠, compare:
- $(2^3)^2$ e 2^6
- $(3^2)^2$ e 3^4
- $(2^2)^3$ e 2^6

Explorando a calculadora

Para calcular o valor de uma potência, por exemplo, 3^5, usando uma calculadora simples, podemos fazer assim:

3 × 3 × 3 × 3 × 3 = 243.

Ou assim:

3 × 3 = = = = 243.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Conhecendo as propriedades da potenciação

1ª propriedade: Produto de potências de mesma base.

Um produto de potências de mesma base pode ser escrito na forma de uma única potência: conservamos a base e **adicionamos os expoentes**.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Consideremos, por exemplo, o produto de potências de mesma base $2^3 \times 2^7$.

$$2^3 \times 2^7 = \underbrace{\underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{2^3} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{2^7}}_{\text{potências de mesma base}}$$

$$2^3 \times 2^7 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{10 fatores}} = 2^{10}$$

$$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} \text{ ou } 2^{10}$$

Assim:

- $3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$
- $\left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2+1+3} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$

2ª propriedade: Quociente de potências de mesma base.

Um quociente de potências de mesma base, em que o expoente do dividendo é maior ou igual ao expoente do divisor, pode ser escrito na forma de uma única potência: conservamos a base e **subtraímos os expoentes**.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } m \geqslant n.$$

Consideremos, por exemplo, o quociente de potências de mesma base $7^5 : 7^2$.

$$7^5 : 7^2 = \underbrace{(7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7)}_{7^5} : \underbrace{(7 \times 7)}_{7^2} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times 7 \times 7 \times 7}{\cancel{7} \times \cancel{7}} = 7 \times 7 \times 7 = 7^3$$

$$7^5 : 7^2 = 7^{5-2} \text{ ou } 7^3$$

Assim:

- $11^5 : 11^5 = 11^{5-5} = 11^0$
- $(2,3)^6 : (2,3)^5 = (2,3)^{6-5} = (2,3)^1$

3ª propriedade: Potência de uma potência.

Uma potência de uma potência pode ser escrita na forma de uma única potência: conservamos a base e **multiplicamos os expoentes**.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Consideremos, por exemplo, a seguinte potência de potência $(5^2)^3$.

$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^6$ $\quad$ $(5^2)^3 = 5^{2 \times 3}$ ou 5^6

Assim:

- $(6^2)^5 = 6^{2 \times 5} = 6^{10}$
- $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{4 \times 6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{24}$

4ª propriedade: Potência de um produto.

Para elevar um produto de dois ou mais números racionais a um expoente, **elevamos cada fator a esse expoente**.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Consideremos, por exemplo, a potência de um produto $(2 \times 7)^3$.

$$(2 \times 7)^3 = \underbrace{(2 \times 7) \times (2 \times 7) \times (2 \times 7)}_{\text{3 fatores}} = 2 \times 7 \times 2 \times 7 \times 2 \times 7$$

$$(2 \times 7)^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^3$$

Assim:

- $\left[\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right]^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$
- $(5^2 \times 7^3)^2 = (5^2)^2 \times (7^3)^2 = 5^4 \times 7^6$

Observação:

Essa propriedade também pode ser aplicada quando temos uma potência de um quociente. Veja:

- $(7 : 6)^3 = 7^3 : 6^3$
- $(3 : 5^2)^4 = 3^4 : (5^2)^4 = 3^4 : 5^8$

Potências de base dez

Você deve saber que 10^n, para *n* natural, escreve-se:

$$10^n = 1\underbrace{000...0}_{n \text{ zeros}}$$

Assim, a potência de base 10, com expoente natural, é uma maneira de se escrever o número que, no Sistema de Numeração Decimal, é representado por 1 seguido de *n* zeros. Observe:

- $10^5 = 1\underbrace{00000}_{\text{5 zeros}}$
- $10^2 = 1\underbrace{00}_{\text{2 zeros}}$
- $10^1 = 1\underbrace{0}_{\text{1 zero}}$

As potências de base 10 são úteis para escrever números muito grandes.

Por exemplo, 1 200 000 pode ser escrito na forma:

$$1\,200\,000 = 1{,}2 \times 1\,000\,000 = 1{,}2 \times 10^6$$

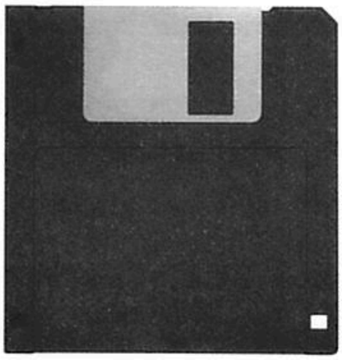
Veja outros exemplos:

- A distância de Marte ao Sol é aproximadamente 228 000 000 km e pode ser indicada assim: $2{,}28 \times 100\,000\,000$ km $= 2{,}28 \times 10^8$ km.
- Netuno encontra-se a cerca de 4 500 000 000 km do Sol. Podemos escrever essa distância assim: $4{,}5 \times 1\,000\,000\,000$ km $= 4{,}5 \times 10^9$ km.

Dizemos que os números $1{,}2 \times 10^6$, $2{,}28 \times 10^8$ e $4{,}5 \times 10^9$ estão representados em **notação científica**. Nesse tipo de representação, o número que multiplica a potência de base dez deve estar entre o número 1 e o 10.

Do disquete ao *pen drive*

No fim dos anos 1990 e início dos anos 2000, usávamos corriqueiramente os disquetes para armazenar arquivos de computadores e transportá-los a todos os lugares. Eram aqueles disquetes de 3,5 polegadas, revestidos por uma capinha de plástico e com capacidade de 1,44 MB (*megabytes*). Além da pequena capacidade de armazenamento desses dispositivos removíveis, havia alguns inconvenientes relacionados ao seu uso, como a desmagnetização, a quebra e a grande facilidade de os arquivos neles armazenados serem "corrompidos". Devido a essas limitações, o CD-ROM entrou em cena, armazenando quase 500 vezes mais dados que os disquetes.


PHOTODISC/GETTY IMAGES

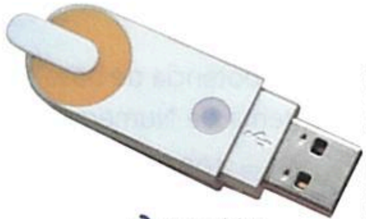
Disquete.

Depois do CD-ROM surgiu o DVD com capacidades de 4,7 GB (*gigabytes*) (DVD de uma camada) a 8,5 GB (DVD de dupla camada).


HERMES

CD-ROM.

Contudo, o dispositivo que veio revolucionar o armazenamento de arquivos foi o *pen drive*, também chamado de memória USB *Flash*. Entre os diferenciais do novo dispositivo, podem-se destacar: a capacidade de armazenamento, que inicialmente era de 8 MB (atualmente há modelos com capacidade maior de 512 GB), a facilidade de transporte, manuseio e de transferência de dados e a durabilidade (se bem cuidado, pode durar até dez anos).


GARO/PHANIE/GLOW IMAGES

Pen drive.

Você sabe o que é o *byte*?

O *byte* é uma unidade de quantidade de informações usada para especificar a capacidade de memórias de computadores, tamanhos de arquivos e discos, entre outros. Um *byte* equivale a 8 *bits*.

Veja alguns múltiplos do *byte*:

- 1 *quilobyte* (KB) é aproximadamente igual a 1 000 *bytes* ou 10^3 *bytes*;
- 1 *megabyte* (MB) é aproximadamente igual a 1 000 000 *bytes* ou 10^6 *bytes*;
- 1 *gigabyte* (GB) é aproximadamente igual a 1 000 000 000 *bytes* ou 10^9 *bytes*.

1. Um CD-ROM com capacidade de 700 MB foi usado para gravar dados que ocupavam 123 MB. Escreva, no caderno, esses valores em *quilobyte*, *byte* e *bit*, utilizando potências de base 10.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Aplicando as propriedades da potenciação, escreva cada expressão em uma única potência:

a) $9^6 \times 9^2$

b) $(20^3)^2$

c) $10^7 : 10^5$

d) $(8^{10})^3$

e) $(0{,}7)^4 : (0{,}7)$

f) $[(2{,}5)^4]^5$

g) $(1{,}9)^{12} : (1{,}9)^{10}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)$

i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{14} : \left(\frac{2}{5}\right)^9$

2. Sabendo que $a = 2^{13}$, $b = 2^7$, $c = 2^5$, determine na forma de potência o valor das expressões:

a) $a \times b$

b) $b : c$

c) $a \times c$

d) $a : b$

e) a^2

f) b^3

g) $a \times b \times c$

h) $a : c$

i) c^4

3. Dados $x = 10^2$ e $y = 10^5$, compare as potências x^5 e y^2 usando o sinal $=$ ou $\neq$.

4. Transforme cada expressão em um produto de potências:

a) $[(0{,}6) \times (1{,}1)]^4$

b) $(3^2 \times 10)^2$

c) $[(1{,}6)^3 \times (2{,}4)^2]^2$

d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)\right]^5$

5. Calcule o valor da expressão $\dfrac{(10^4)^7}{(10^8 \times 10)^3}$.

6. Você já sabe que $9 = 3^2$, $27 = 3^3$ e $729 = 3^6$. Usando as propriedades das potências de mesma base, calcule o valor da expressão $(9 \times 729) : 27$.

7. Se $a = 2^7 \times 3^4 \times 7^2$, $b = 2^5 \times 3^2 \times 7$ e $c = 2^5 \times 3 \times 7$, calcule o quociente indicado em cada item a seguir:

a) $a : b$ **b)** $a : c$ **c)** $b : c$

8. Aplicando as propriedades da potenciação, calcule o valor das expressões numéricas:

a) $(2^9 \times 2^{11} \times 2^3) : (2^7)^3$

b) $[(0{,}4)^2]^{10} : [(0{,}4)^9 \times (0{,}4)^7 \times (0{,}4)]$

9. Determine o quociente de $1\,024^2$ por 64^3.

10. Considerando que $a \times b = 20$, calcule o valor de:

a) $a^2 \times b^2$ **b)** $a^3 \times b^3$

11. Algumas unidades de medida muito utilizadas são o **metro**, o **grama** e o **litro**. Seus múltiplos possuem prefixos que equivalem a:

giga ↔ 1 000 000 000
mega ↔ 1 000 000
miria ↔ 10 000
quilo ↔ 1 000
hecto ↔ 100
deca ↔ 10

Escreva esses prefixos e indique as potências de base 10 que correspondem às equivalências apresentadas anteriormente.

12. Escreva os números a seguir em notação científica:

a) 1 350 000

b) 689 000

c) 543 000 000

d) 82 760 000

13. Escreva os números dados em notação científica com todos os seus algarismos:

a) $6{,}3 \times 10^9$

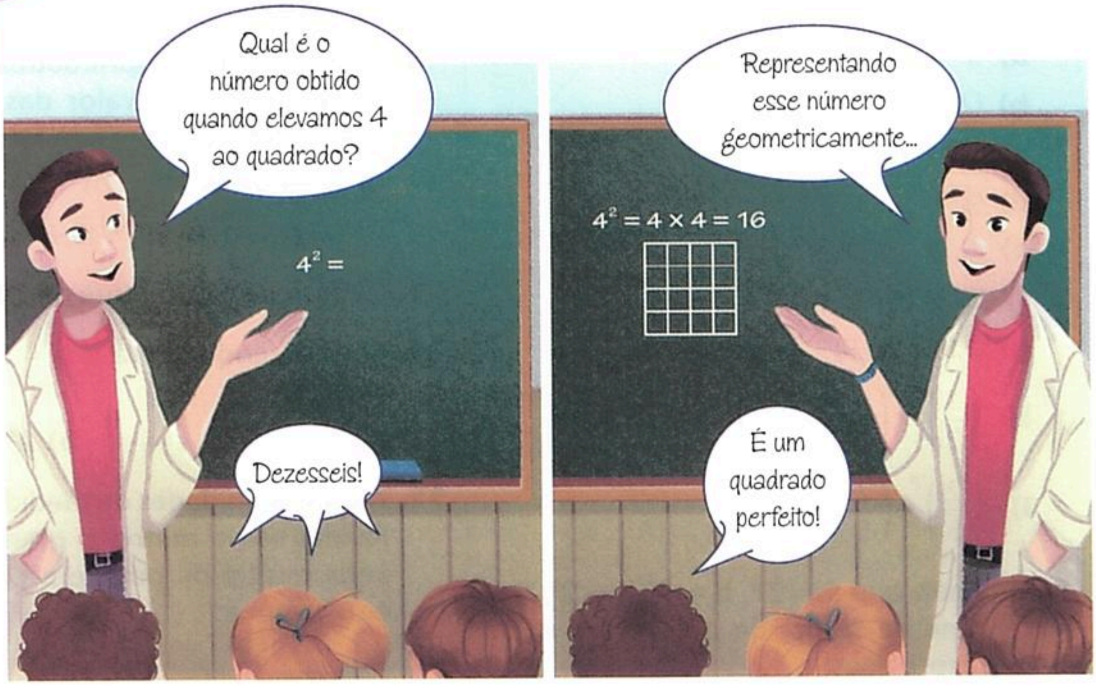
b) $9{,}23 \times 10^4$

c) $4{,}608 \times 10^5$

d) $1{,}6 \times 10^7$

CAPÍTULO 3

NÚMEROS QUADRADOS PERFEITOS

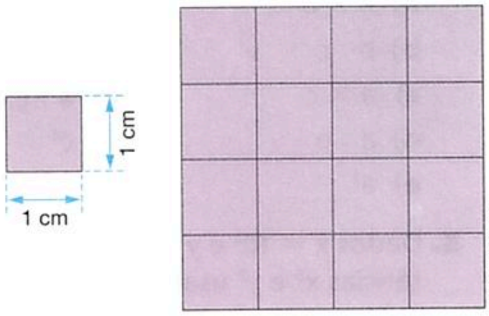


WANDSON ROCHA

O número 16, que equivale a 4 ao quadrado, é chamado quadrado perfeito.

É possível mostrar geometricamente que 16 é um número quadrado perfeito.

Consideremos um quadrado com 1 cm de lado. Se usarmos 16 desses quadrados, poderemos formar um novo quadrado.



EDITORIA DE ARTE

Os números naturais que são quadrados de outros números naturais são denominados **números quadrados perfeitos**.

Veja, a seguir, o quadro com alguns números naturais que são quadrados perfeitos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2 (números quadrados perfeitos)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Como reconhecer se um número é quadrado perfeito

Reconhecer se um número é quadrado perfeito pelo processo geométrico é demorado, principalmente se o número for grande. Vamos agora aprender outro processo. Primeiro devemos fatorar na forma completa um número. Se todos os fatores tiverem expoente par, o número será um quadrado perfeito. Caso um dos fatores não apresente expoente par, o número não será um quadrado perfeito. Acompanhe os exemplos:

- Verificar se 144 é um quadrado perfeito.

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 144 = 2^4 \times 3^2$$

Como todos os fatores encontrados apresentam expoente par, 144 é um número quadrado perfeito.

- Verificar se 450 é um quadrado perfeito.

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 450 = 2^1 \times 3^2 \times 5^2$$

Como o fator 2 não apresenta expoente par, 450 não é um número quadrado perfeito.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Desenhe um quadrado de 1 cm de lado e depois responda:

a) Você pode formar um novo quadrado usando 25 desses quadrados?

Então 25 é um quadrado perfeito?

b) Se usar 29 desses quadrados, você poderá formar um novo quadrado?

Então 29 é um quadrado perfeito?

2. Fazendo a fatoração dos números naturais a seguir, verifique quais deles são números quadrados perfeitos.

a) 225 **e)** 1 000
b) 300 **f)** 1 024
c) 400 **g)** 2 000
d) 729 **h)** 1 600

3. O número natural *A* é expresso por:

$$\boxed{A = 2^x \times 11^6}$$

Dê um algarismo que possa ser colocado no lugar do expoente x para que A não seja um número quadrado perfeito.

4. Quantos números naturais quadrados perfeitos há entre 100 e 300? Sugestão: para achar os números, faça 11^2, 12^2, ...

5. Qual é o menor número inteiro pelo qual devemos multiplicar $2^4 \times 3^2 \times 5^3$ para que esse número se torne quadrado perfeito?

a) 2 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 10 **e)** 0

6. O número natural *B*, cujo algarismo da unidade é 5, é um número quadrado perfeito e está entre 600 e 700. Descubra o valor de *B*.

CAPÍTULO 4

RAIZ QUADRADA EXATA DE UM NÚMERO RACIONAL NÃO NEGATIVO

Se um número representa um produto de dois fatores iguais não negativos, então cada fator é a **raiz quadrada desse número**. Por exemplo:

- A raiz quadrada de 25 é 5, pois $5 \times 5 = 5^2 = 25$. Indica-se: $\sqrt{25} = 5$.
- A raiz quadrada de 49 é 7, pois $7 \times 7 = 7^2 = 49$. Indica-se: $\sqrt{49} = 7$.

Observamos, então, que todo número quadrado perfeito tem uma raiz quadrada exata.

Veja, agora, como fazer para determinar a raiz quadrada exata de outros números quadrados perfeitos, acompanhando as situações a seguir.

1 Veja a conversa de Luana e Renato.

O número 576 está entre os números quadrados perfeitos 400 e 900.

A raiz quadrada do número 400 é 20, pois:

$400 = 20 \times 20 = 20^2$

A raiz quadrada do número 900 é 30, pois:

$900 = 30 \times 30 = 30^2$

Então, o número que procuramos está entre os números 20 e 30.
Por tentativas, fazemos:

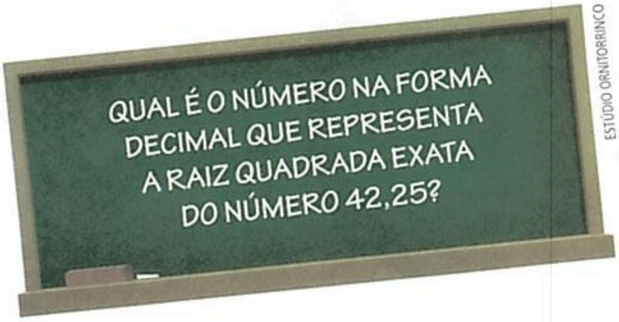
$21^2 = 441$ $\quad 22^2 = 484$ $\quad 23^2 = 529$ $\quad 24^2 = 576$

Então, pela definição, temos:

$$\sqrt{576} = 24, \text{ pois } 24^2 = 24 \times 24 = 576.$$

Para conferir com a calculadora, digite o número 576 e aperte a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$.

2 Observe a pergunta que a professora escreveu para os alunos.



Nesse caso, sabemos que o número 42,25 está entre 36 e 49.

$$36 = 6 \times 6 = 6^2$$
$$49 = 7 \times 7 = 7^2$$

Logo, o número que procuramos é um número na forma decimal entre 6 e 7. Daí, temos:

$$(6,1)^2 = 6,1 \times 6,1 = 37,21$$
$$(6,2)^2 = 6,2 \times 6,2 = 38,44$$
$$(6,3)^2 = 6,3 \times 6,3 = 39,69$$
$$(6,4)^2 = 6,4 \times 6,4 = 40,96$$
$$(6,5)^2 = 6,5 \times 6,5 = 42,25$$

Então, pela definição: $\sqrt{42,25} = 6,5$, pois $(6,5)^2 = 6,5 \times 6,5 = 42,25$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

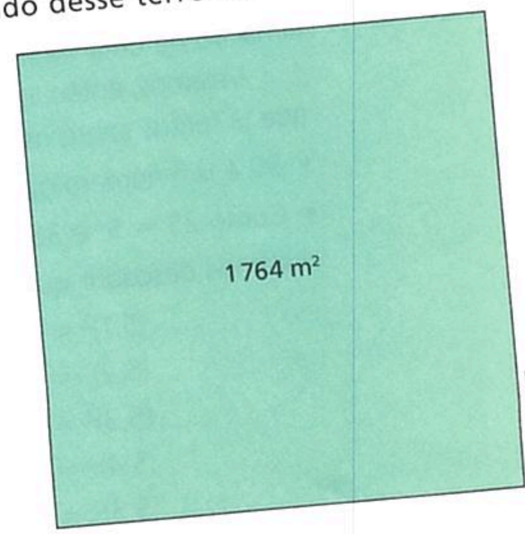
1. Os números naturais a seguir são quadrados perfeitos. Determine a raiz quadrada exata de cada um deles.

a) 484
b) 625
c) 729
d) 1 156
e) 1 296
f) 1 849
g) 3 025
h) 4 096

2. Os números na forma decimal a seguir têm a raiz quadrada exata. Determine essa raiz.

a) 2,56
b) 3,61
c) 5,29
d) 7,84
e) 10,24
f) 12,25
g) 37,21
h) 51,84

3. A área de um terreno quadrado mede 1 764 m^2. A medida do lado desse terreno representa a raiz quadrada exata desse número. Quanto mede o lado desse terreno?

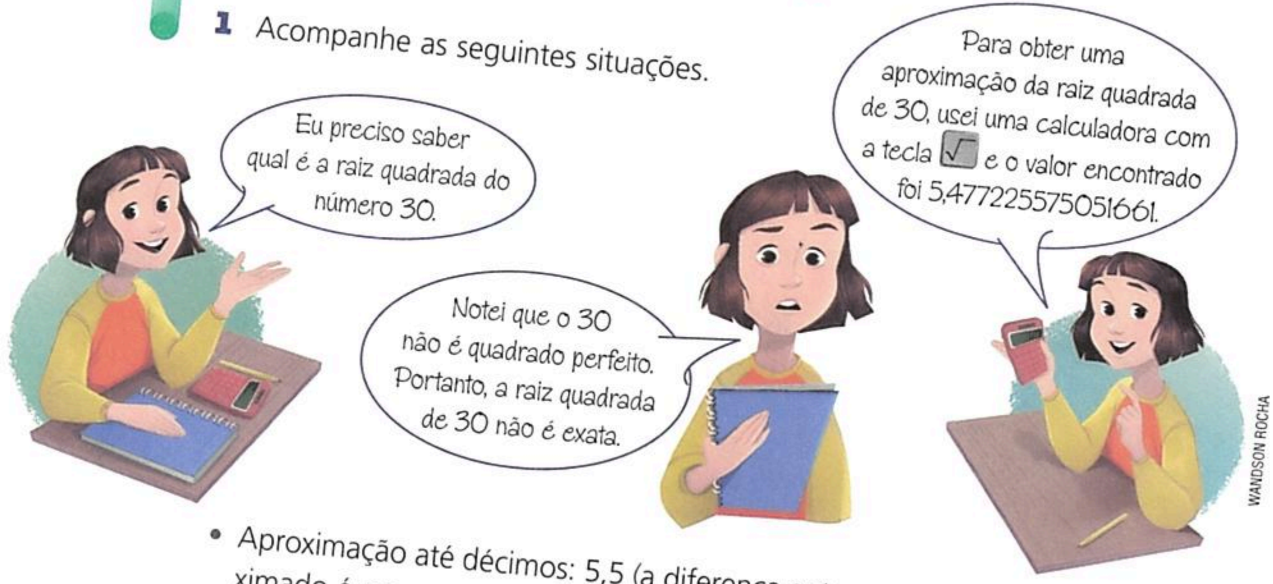


EDITORIA DE ARTE

CAPÍTULO 5

RAIZ QUADRADA APROXIMADA DE UM NÚMERO RACIONAL NÃO NEGATIVO

1 Acompanhe as seguintes situações.



WANDSON ROCHA

- Aproximação até décimos: 5,5 (a diferença entre o valor encontrado e o aproximado é menor que 0,1).
- Aproximação até centésimos: 5,48 (a diferença entre o valor encontrado e o aproximado é menor que 0,01).
- Aproximação até milésimos: 5,477 (a diferença entre o valor encontrado e o aproximado é menor que 0,001).

É possível, então, determinar a raiz quadrada de 30 com a aproximação conveniente.

Porém, nem sempre dispomos de uma calculadora. Como podemos calcular, nesse caso?

Podemos determinar o número que expressa a raiz quadrada, com aproximação de uma ou mais casas decimais, fazendo uma estimativa desse valor.

Vejamos, então, como estimar a raiz quadrada de 30 com os conhecimentos que já temos sobre os números quadrados perfeitos.

- 30 é um número que está entre os quadrados perfeitos 25 e 36.
- Como $25 = 5^2$ e $36 = 6^2$, o número procurado está entre 5 e 6.
- Vamos descobrir que número é esse fazendo tentativas:

$$(5,1)^2 = 5,1 \times 5,1 = 26,01 \longrightarrow 26,01 < 30$$
$$(5,2)^2 = 5,2 \times 5,2 = 27,04 \longrightarrow 27,04 < 30$$
$$(5,3)^2 = 5,3 \times 5,3 = 28,09 \longrightarrow 28,09 < 30$$
$$(5,4)^2 = 5,4 \times 5,4 = 29,16 \longrightarrow 29,16 < 30$$
$$(5,5)^2 = 5,5 \times 5,5 = 30,25 \longrightarrow 30,25 > 30$$

Observando os cálculos anteriores, verificamos que:

- O número que expressa $\sqrt{30}$ é maior que 5,4 e menor que 5,5.
- 5,4 e 5,5 são os números que representam uma aproximação para $\sqrt{30}$ até décimos.

Para não termos dois valores, convencionamos que o número procurado corresponde ao menor valor e escrevemos: $\sqrt{30} \simeq 5{,}4$. Assim, a raiz quadrada de 30 é aproximadamente igual a 5,4 se a aproximação for de uma casa decimal (menor que 0,1). Caso haja necessidade de uma aproximação de duas casas decimais (aproximação menor que 0,01), fazemos mais tentativas com números entre 5,4 e 5,5.

$(5{,}41)^2 = 29{,}2681 \rightarrow 29{,}2681 < 30$
$(5{,}42)^2 = 29{,}3764 \rightarrow 29{,}3764 < 30$
$(5{,}43)^2 = 29{,}4849 \rightarrow 29{,}4849 < 30$
$(5{,}44)^2 = 29{,}5936 \rightarrow 29{,}5936 < 30$
$(5{,}45)^2 = 29{,}7025 \rightarrow 29{,}7025 < 30$
$(5{,}46)^2 = 29{,}8116 \rightarrow 29{,}8116 < 30$
$(5{,}47)^2 = 29{,}9209 \rightarrow 29{,}9209 < 30$
$(5{,}48)^2 = 30{,}0304 \rightarrow 30{,}0304 > 30$

Pela convenção já estabelecida, podemos escrever que $\sqrt{30} \simeq 5{,}47$, ou seja, a raiz quadrada de 30 é aproximadamente 5,47 se a aproximação for de duas casas decimais (menor que 0,01).

2 Um número positivo *x* representa a raiz quadrada aproximada, com uma casa decimal, do número 11,3. Vamos descobrir o valor desse número *x*?

Sabemos que o número 11,3 está entre 9 e 16. Como $9 = 3^2$ e $16 = 4^2$, o número procurado está entre 3 e 4. Vamos, então, fazer os cálculos:

$(3{,}1)^2 = 9{,}61 \rightarrow 9{,}61 < 11{,}3$
$(3{,}2)^2 = 10{,}24 \rightarrow 10{,}24 < 11{,}3$
$(3{,}3)^2 = 10{,}89 \rightarrow 10{,}89 < 11{,}3$
$(3{,}4)^2 = 11{,}56 \rightarrow 11{,}56 > 11{,}3$

Então, considerando sempre o menor valor, podemos dizer que a raiz quadrada de 11,3 é aproximadamente 3,3, ou seja, $\sqrt{11{,}3} \simeq 3{,}3$ (aproximação menor que 0,1).

O valor do número *x* é 3,3.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Obtenha um valor inteiro aproximado que expresse a raiz quadrada de:

a) 172
b) 200
c) 360
d) 500

2. Com aproximação até a primeira casa decimal, calcule a raiz quadrada de:

a) 2,9
b) 6,9
c) 13,1
d) 18,5
e) 51,2
f) 66,21

3. Calcule a raiz quadrada, com valor aproximado até a primeira casa decimal, de cada um dos seguintes números:

a) 2
b) 3
c) 6
d) 10
e) 20
f) 55
g) 150
h) 450

4. Com valor aproximado até a primeira casa decimal, calcule o valor da $\sqrt{5}$.

As operações com números reais

Já vimos que há certas limitações em relação às operações nos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Assim:

- no conjunto $\mathbb{N}$, nem sempre é possível subtrair, obter divisões exatas ou extrair a raiz quadrada e encontrar um número natural;
- no conjunto $\mathbb{Z}$, nem sempre é possível obter divisões exatas ou extrair a raiz quadrada e encontrar um número inteiro;
- no conjunto $\mathbb{Q}$, nem sempre é possível extrair a raiz quadrada exata e encontrar um número racional.

Porém, no conjunto dos números reais efetuamos qualquer adição, subtração, multiplicação e divisão com números reais (exceto a divisão por zero), bem como extraímos a raiz quadrada de qualquer número não negativo e encontramos números reais.

Vale lembrar que há restrições: a raiz quadrada de um número negativo, por exemplo, não representa um número real, pois não existe número real que, elevado ao quadrado, tenha como resultado um número real negativo. Então, por exemplo, $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Observe os números a seguir.

-4 | $-2{,}3$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $0{,}\overline{6}$ | 1 | $\sqrt{8}$

Quais deles pertencem ao conjunto:

a) $\mathbb{N}$?

b) $\mathbb{Z}$?

c) $\mathbb{Z}$, mas não pertencem a $\mathbb{N}$?

d) $\mathbb{Q}$, mas não pertencem a $\mathbb{Z}$?

2. Observe os números a seguir.

6 | $\sqrt{6}$ | $6{,}6$ | -6

Identifique quais deles são:

a) reais e naturais.

b) reais e inteiros.

c) reais e racionais.

d) reais e irracionais.

3. Qual destes números reais é o maior: $\sqrt{5}$ ou $\frac{22}{9}$.

4. Usando o símbolo $\in$ ou $\notin$, estabeleça a relação entre:

a) 100 e $\mathbb{R}^*$

b) 100 e $\mathbb{R}_+$

c) 100 e $\mathbb{R}_-$

d) $\sqrt{9}$ e $\mathbb{R}$

e) $-\sqrt{9}$ e $\mathbb{R}$

f) $\sqrt{-9}$ e $\mathbb{R}$

g) $2{,}6$ e $\mathbb{R}_+$

5. (Saresp-SP) José, com sua calculadora, determinou o valor de $\sqrt{50}$ e obteve como resultado 7,0710678... Pode-se provar que esse número tem infinitas casas decimais e não é dízima periódica. É, portanto, um número:

a) irracional.

b) natural.

c) racional.

d) inteiro relativo.

6. Construa uma reta real e, nela, localize os seguintes números reais: -5; $\frac{7}{2}$; $\sqrt{9}$; $-0{,}4$; $-\frac{5}{4}$.

7. Junte-se a um colega e criem um exemplo de um número real que seja também racional e esteja escrito na forma fracionária. Esse número é uma dízima periódica? Expliquem.

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. (PUC-RJ) O maior número abaixo é:

a) 3^{31}

b) 8^{10}

c) 16^{8}

d) 81^{6}

e) 243^{4}

2. (FGV-SP) Se calcularmos o valor de 2^{95}, iremos obter um número natural $\mathbb{N}$. O algarismo final (das unidades) desse número $\mathbb{N}$ vale:

a) 2

b) 4

c) 5

d) 6

e) 8

3. (OBM) Quantos dos números a seguir são maiores que 10?

$3\sqrt{11}$, $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$, $6\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}$

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

DESAFIO

4. (UERJ) Um evento está sendo realizado em uma praia cuja faixa de areia tem cerca de 3 km de extensão e 100 m de largura.

A ordem de grandeza do maior número possível de adultos que podem assistir a esse evento sentados na areia é de:

a) 10^{4}

b) 10^{5}

c) 10^{6}

d) 10^{7}

5. (OBM) Dividindo-se o número $4^{(4^2)}$ por 4^4 obtemos o número:

a) 2

b) 4^{3}

c) 4^{4}

d) 4^{8}

e) 4^{12}

6. (OBM) A razão $\dfrac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) 1

d) 2

e) 8

7. (OBM) O valor da soma

$$\frac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \frac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} \text{ é:}$$

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{2}{3}$

c) 1

d) $\dfrac{4}{3}$

e) 2

8. (Enem/MEC-Simulado) No depósito de uma biblioteca há caixas contendo folhas de papel de 0,1 mm de espessura, e em cada uma delas estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura.

Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?

a) 10^{2}

b) 10^{4}

c) 10^{5}

d) 10^{6}

e) 10^{7}

9. Se um quadrado tem 7,7 cm de lado, a sua área é de:

a) 50,29 cm^2
b) 59,29 cm^2
c) 59,19 cm^2
d) 51,09 cm^2
e) 50,09 cm^2

10. Sabe-se que a área de um terreno quadrado é 1 764 m^2. Qual é o perímetro desse terreno?

a) 158 m
b) 168 m
c) 178 m
d) 186 m
e) 196 m

11. Os números *x* e *y* representam, respectivamente, as raízes quadradas exatas dos números 51,84 e 40,96. Com o auxílio de uma calculadora, descubra quanto vale $x - y$.

a) 0,08
b) 8
c) 1,8
d) 0,8
e) 2,8

12. Dos números a seguir, qual deles é quadrado perfeito?

a) 151
b) 453
c) 20,44
d) 24 964
e) 3 804

13. O valor aproximado com uma casa decimal da raiz quadrada de 10 é:

a) 3,2
b) 3,4
c) 3,3
d) 3,1
e) 3,5

14. Todo número cuja representação decimal é infinita e não periódica é um número:

a) natural.
b) inteiro positivo.
c) racional.
d) fracionário.
e) irracional.

15. A representação decimal de um número pode ser: finita, infinita e periódica ou, ainda, infinita e não periódica. Escreva qual é o caso de cada um dos números a seguir.

a) $\frac{27}{6}$
b) $0,\overline{23}$
c) $\sqrt{2}$

16. Observe os números a seguir e responda às questões:

$\boxed{-97}$ $\boxed{\frac{3}{5}}$ $\boxed{-\sqrt{3}}$ $\boxed{\frac{49}{7}}$ $\boxed{1,\overline{25}}$

a) Alguns desses números pertencem ao conjunto dos números naturais? Qual?
b) Quais números pertencem ao conjunto dos números inteiros?
c) Quais números são irracionais?
d) Quais números são reais, mas não são racionais?
e) Quais números são reais, mas não são irracionais?

17. Qual é o menor número natural que devemos multiplicar pelo número 60 para que o produto seja um número quadrado perfeito?

a) 2
b) 3
c) 5
d) 15
e) 60

18. Sabendo que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, calcule o valor de $999^2 - 1$.

a) 1 000 000

b) 999 999

c) 998 999

d) 998 000

e) 990 000

19. Por qual número devemos dividir 105 125 para que o quociente tenha uma raiz quadrada exata?

a) 3

b) 5

c) 7

d) 15

e) 21

20. O número π é classificado como:

a) um número natural.

b) uma dízima periódica.

c) um número racional.

d) uma dízima não periódica.

e) um número inteiro.

21. Ao calcular $\sqrt{\dfrac{3^{10}+3^8}{10}}$ obtemos como resposta:

a) um número irracional maior que 50.

b) o número natural 81.

c) um número irracional menor que 100.

d) a potenciação 3^7.

e) um número racional.

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, pudemos conhecer um pouco mais as potências e as raízes, como também aprofundar nossos conhecimentos explorando as propriedades da potenciação e o papel facilitador que ela desempenha nas operações. Trabalhamos com a potência de base 10, tópico em que pudemos perceber algumas aplicações voltadas à escrita de números grandes, como as distâncias entre o Sol e alguns planetas.

Ampliamos nossos estudos sobre conjuntos, com o conjunto dos números reais, e foi possível explorar: a raiz quadrada de um número racional na forma decimal, os números quadrados perfeitos, a raiz quadrada de números racionais em sua forma exata e aproximada e os números irracionais.

Pudemos relacionar a potência ao jogo de xadrez ao refletirmos sobre a lenda de Sissa, apresentada na abertura. Foi possível perceber o uso do conceito de potência para representar a capacidade de memória e armazenamento de alguns dispositivos.

Vamos retomar o que estudamos e refletir sobre as aprendizagens que tivemos nesta Unidade, respondendo às questões a seguir no caderno.

- Foi possível perceber que, além de uma operação, a potência pode ser utilizada para representar números e resultados?
- Quantos *bits* tem um *quilobyte* (KB)?
- O que são os números quadrados perfeitos?
- Como a potência de expoente 2 se relaciona com a raiz quadrada?

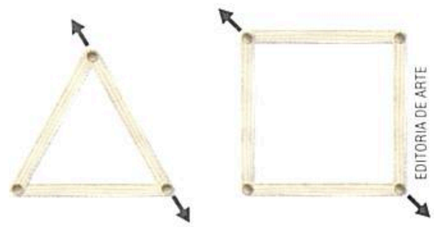
3 ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

O triângulo é conhecido e usado há milênios pelo ser humano por conta de suas diversas aplicações. Por exemplo, a utilização de um triângulo retângulo para verificar se o ângulo de uma parede com o chão é 90°. Se a medida do ângulo for essa, dizemos que a parede está subindo "reta", ou seja, perpendicular ao chão.

Além disso, triângulos dão sustentação a construções, sejam elas metálicas ou de pedras, como você pode ver nas fotografias ao lado.

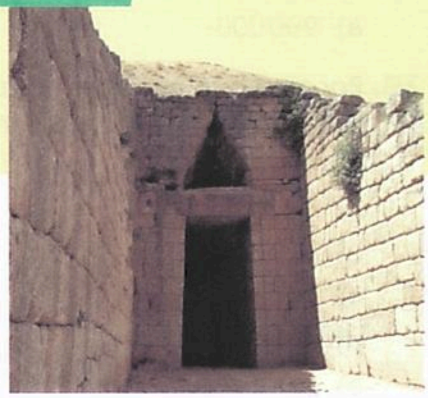
Vamos entender o porquê disso?

Construa com palitos de sorvete e percevejos um triângulo e um quadrado, tomando cuidado para deixar os vértices livres para girarem. Veja:



EDITORIA DE ARTE

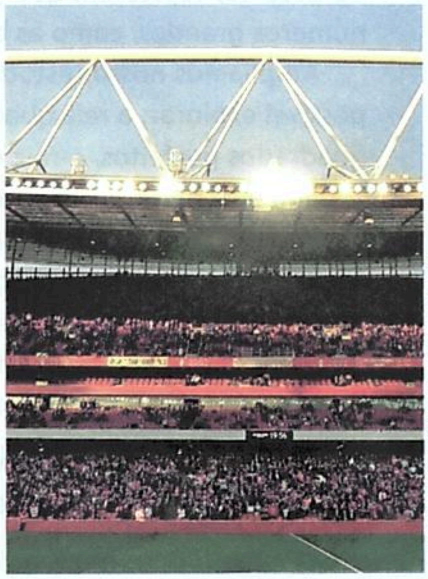
S_MARIA/SHUTTERSTOCK.COM



Triângulo de descarga: construção que permitia descarregar as pressõe exercidas por grandes pesos que se encontravam por cima das portas dos túmulos e das cidadelas.

No passado

Atualmente



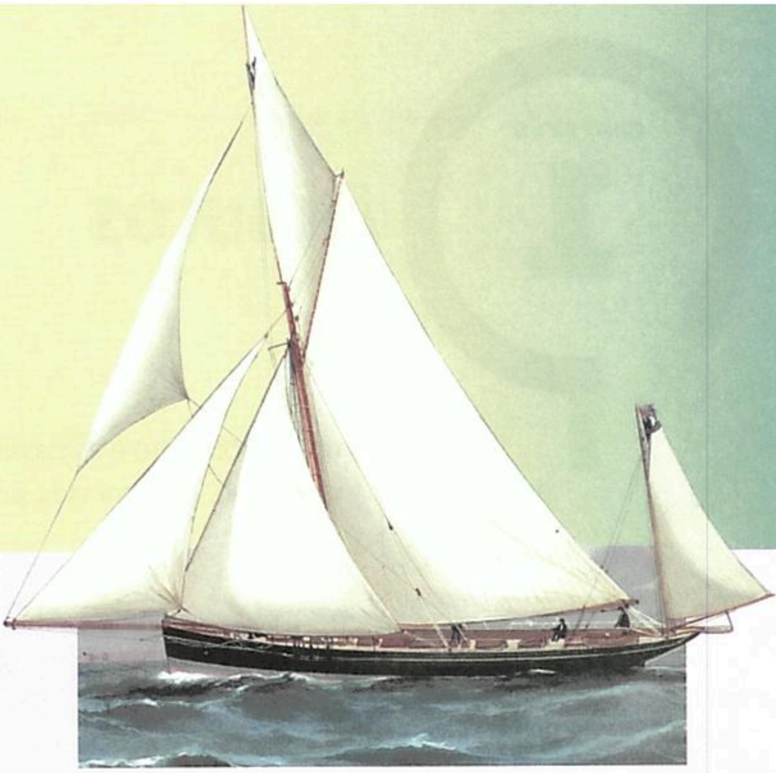
Os triângulos dão resistência às estruturas.

Agora, segurando em dois vértices do triângulo, puxe-os e empurre-os em sentidos opostos. Faça o mesmo com o quadrado.

- O que você pôde notar? O que aconteceu com o triângulo? E com o quadrado?

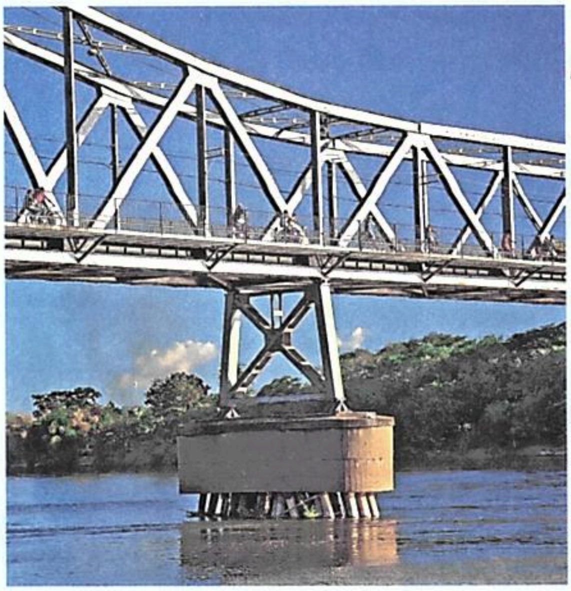
IRAQ MUSEUM, BAGHDAD/BRIDGEMAN/EASYPIX

Escrita cuneiforme gravada em pedra, feita pelos sumérios por volta de 3200 a.C. Repare na decomposição de triângulos.



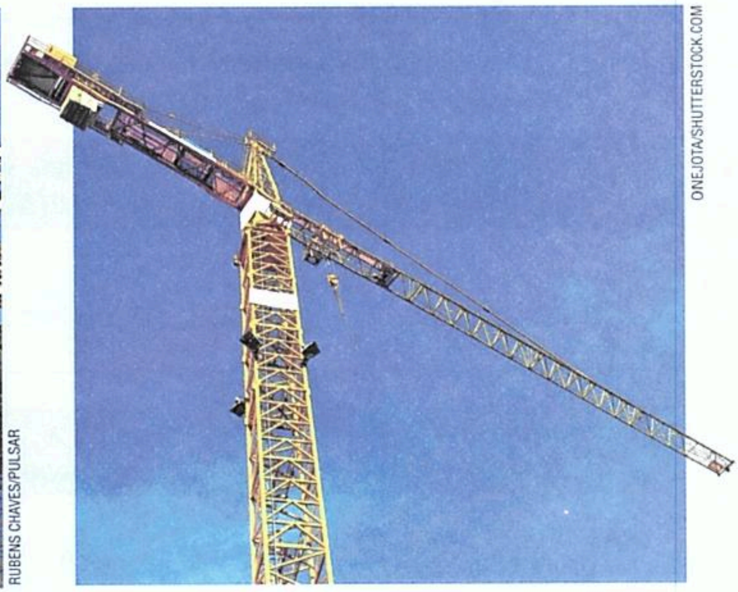
ROYAL EXCHANGE ART ROYAL EXCHANGE ART GALLERY AT CORK STREET, LONDON/BRIDGEMAN/EASY PIX

Vela triangular: apareceu pela primeira vez na Idade Média. Não se sabe que nação foi a primeira a utilizá-la.



RUBENS CHAVES/PULSAR

Os triângulos são muito utilizados, por exemplo, na construção civil.

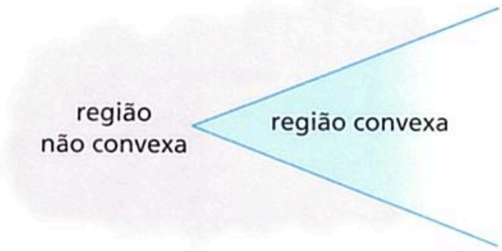


ONEJOTA/SHUTTERSTOCK.COM

Repare no guindaste: sua estrutura permite a ele levantar massas maiores do que sua base de apoio.

CAPÍTULO 1 ÂNGULOS

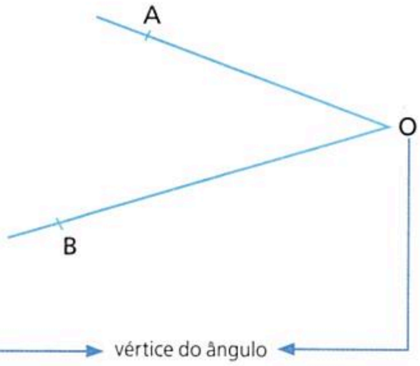
Vamos relembrar o conceito e as classificações de ângulos. Ângulo é toda região do plano, convexa ou não, determinada por duas semirretas de mesma origem.



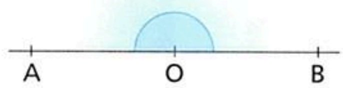
No ângulo desta figura, destacamos os seguintes elementos:

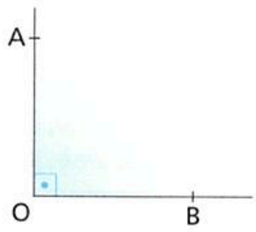
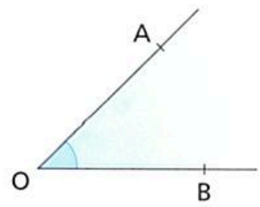
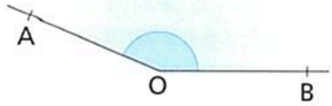
- O ponto *O*, origem das semirretas, denominado **vértice** do ângulo.
- As semirretas OA e OB denominadas **lados** do ângulo.

Para identificar esse ângulo, utilizamos a notação AÔB.



Os ângulos podem ser classificados conforme suas medidas. Vamos rever nos quadros a seguir essas classificações.

Ângulo nulo med(AÔB) = 0°	**Ângulo de meia-volta ou ângulo raso med(AÔB) = 180°**	**Ângulo de uma volta med(AÔB) = 360°**
		

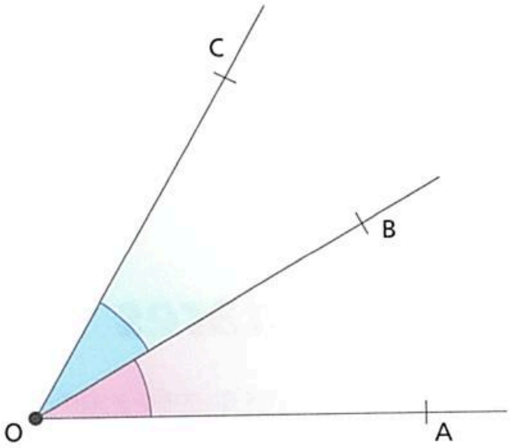
Ângulo reto med(AÔB) = 90°	**Ângulo agudo 0° < med(AÔB) < 90°**	**Ângulo obtuso 90° < med(AÔB) < 180°**
		

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Ângulos adjacentes

Vamos relembrar: dois ângulos que possuem o mesmo vértice e têm um lado comum são denominados **ângulos consecutivos**.

Na figura a seguir, AÔB e BÔC são consecutivos. Eles têm em comum apenas um lado (OB), não tendo pontos internos comuns.



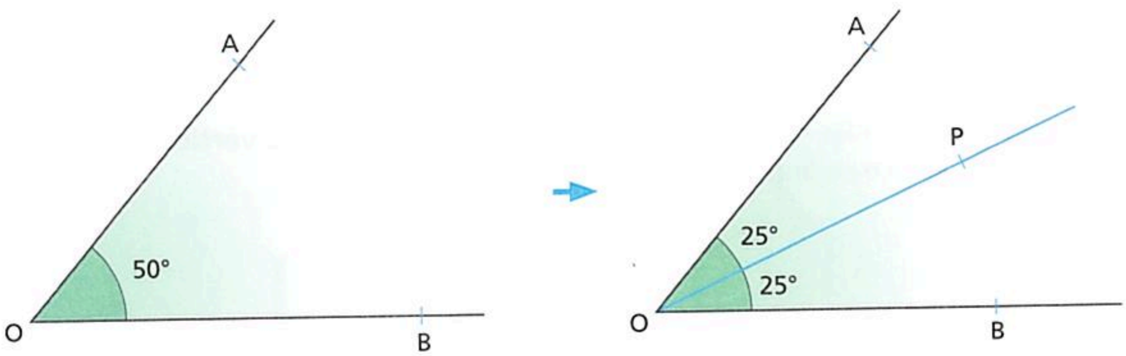
Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos comuns são denominados **ângulos adjacentes**.

Então, em nosso exemplo, AÔB e BÔC são adjacentes.

Bissetriz de um ângulo

Seja o ângulo AOB da figura e med (AÔB) = 50°.

A partir do vértice *O*, traçamos $\overrightarrow{OP}$ que divide AÔB em dois ângulos adjacentes de mesma medida. A $\overrightarrow{OP}$ damos o nome de bissetriz de AÔB. Observe:



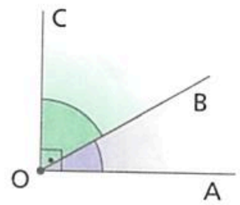
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice desse ângulo que determina, com seus lados, dois ângulos adjacentes congruentes.

Ângulos complementares

Dois ângulos adjacentes são **complementares** quando a soma de suas medidas é igual a 90°.

Na figura a seguir, AÔB e BÔC são adjacentes e complementares, e cada ângulo é chamado complemento do outro.

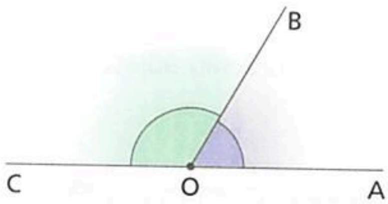


Assim, se a med(AÔB) for igual a x, a medida de seu complemento (BÔC) será $90° - x$.

Ângulos suplementares

Dois ângulos adjacentes são **suplementares** quando a soma de suas medidas é igual a 180°.

Na figura a seguir, AÔB e BÔC são adjacentes e suplementares, e cada ângulo é chamado suplemento do outro.

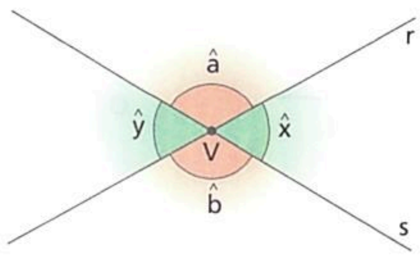


Dessa forma, se a med(AÔB) for igual a x, a medida de seu suplemento (BÔC) será $180° - x$.

Ângulos opostos pelo vértice

Consideremos duas retas r e s, que se cruzam em um único ponto V, formando quatro ângulos de medidas a, x, b e y, conforme mostra a figura a seguir.

Os ângulos de medidas x e y são chamados ângulos **opostos pelo vértice (o.p.v.)**. Também são opostos pelo vértice os ângulos de medida a e b.



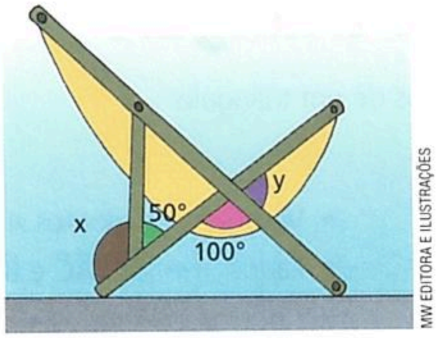
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Se você usar um transferidor, verá que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Observe os pares de ângulos suplementares destacados na figura e determine as medidas x e y indicadas.



MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

2. Determine a medida do complemento de um ângulo de:

a) 66° **c)** 22°

b) 74° **d)** 47°

3. Determine a medida do suplemento de um ângulo de:

a) 78° **c)** 135°

b) 67° **d)** 139°

4. A medida de um ângulo é igual à medida do seu complemento, aumentada de 70°. Qual é a medida desse ângulo?

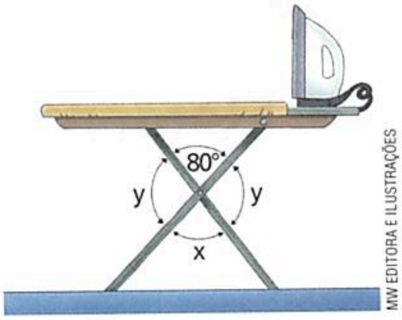
5. A medida de um ângulo é igual à terça parte da medida do seu suplemento. Qual a medida desse ângulo?

6. Sabendo que a medida de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do seu complemento, determine a medida desse ângulo.

7. O triplo da medida de um ângulo é igual ao dobro da medida do seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo?

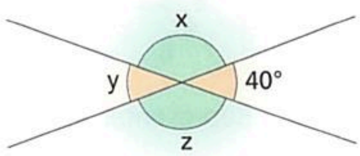
8. A medida do suplemento de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do complemento desse mesmo ângulo. Quanto mede esse ângulo?

9. Observe a figura e dê as medidas x e y indicadas.

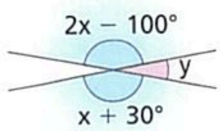


MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

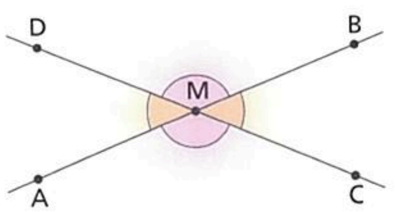
10. Na figura abaixo, calcule as medidas x, y e z indicadas.



11. Determine as medidas x e y indicadas na figura a seguir.



12. Duas retas, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, são concorrentes em um ponto M, de tal modo que a medida de $A\hat{M}D$ representa a terça parte da medida de $A\hat{M}C$. Determine as medidas dos quatro ângulos adjacentes, indicados na figura, formados com vértice no ponto M.



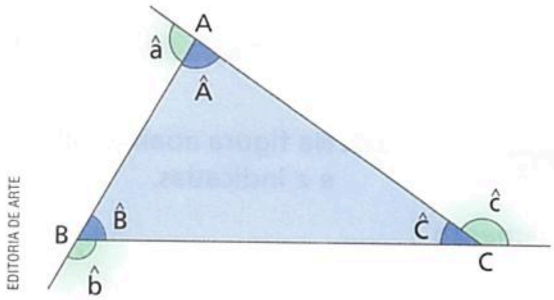
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

CAPÍTULO 2

TRIÂNGULOS

Elementos de um triângulo

Vamos destacar os seguintes elementos de um triângulo:



- Vértices → pontos A, B e C
- Lados → $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$
- Ângulos internos → $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$
- Ângulos externos → $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$

Representação: $\triangle ABC$

Classificação de triângulos

Classificamos os triângulos em relação às medidas de seus lados ou às medidas de seus ângulos internos. Em relação às **medidas dos lados**, um triângulo é classificado como:

Equilátero	Isósceles	Escaleno
Quando os três lados têm medidas iguais.	Quando dois lados têm medidas iguais.	Quando os três lados têm medidas diferentes.

Em relação às **medidas dos ângulos**, um triângulo é classificado como:

Acutângulo	Retângulo	Obtusângulo
Quando os três ângulos internos são agudos (menores que 90°).	Quando um dos ângulos internos é reto (medida igual a 90°).	Quando um dos ângulos internos é obtuso (a medida é maior que 90° e menor que 180°).

Ângulos no triângulo

PENSE E RESPONDA

Veja como Núbia determinou a soma dos ângulos internos de um triângulo.

1º passo: Núbia, com uma tesoura de pontas arredondadas, recortou um papel em um formato que lembra um triângulo.

2º passo: Em seguida, usou lápis de diferentes cores para destacar os três ângulos internos e os nomeou como *a*, *b* e *c*.


WANDSON ROCHA

3º passo: Depois, usando a mesma tesoura, recortou o triângulo, dividindo-o em três partes.

4º passo: Por último, juntou os três vértices em um único ponto.

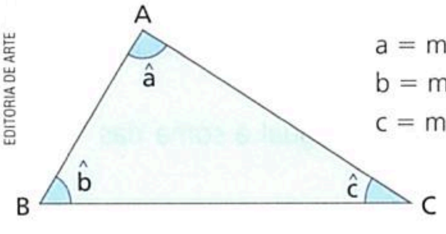
Agora, faça o que se pede:

1. Utilizando uma folha de papel sulfite, uma tesoura de pontas arredondadas e lápis de cor, faça o mesmo trabalho de Núbia.

2. Com o trabalho finalizado, responda no caderno: qual a soma dos ângulos internos de um triângulo?

Agora, vamos usar os conhecimentos que adquirimos sobre ângulos formados por uma transversal com duas retas paralelas para demonstrar essa relação.

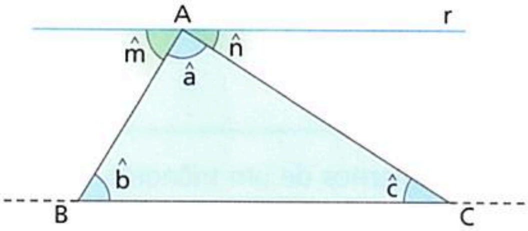
- Consideremos a representação do triângulo ABC seguinte:



EDITORIA DE ARTE

$a = \text{med}(\hat{A})$
$b = \text{med}(\hat{B})$
$c = \text{med}(\hat{C})$

Tracemos uma reta *r*, paralela à reta que contém o lado BC, passando por *A*. Essa paralela vai formar com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ dois ângulos cujas medidas indicaremos por *m* e *n*, respectivamente.



$r // \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} m = b \text{ (alternos internos)} \\ n = c \text{ (alternos internos)} \end{cases}$

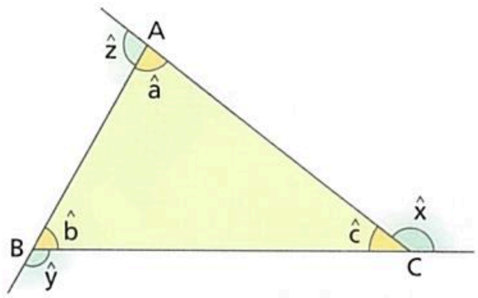
Assim: $m + a + n = 180°$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{180°}$$

Além dos ângulos internos, um polígono, como o triângulo, possui ângulos externos.

Os **ângulos externos** são aqueles formados por um lado do polígono e pelo prolongamento de um lado consecutivo a ele.

Considerando o triângulo ABC da figura a seguir, temos:

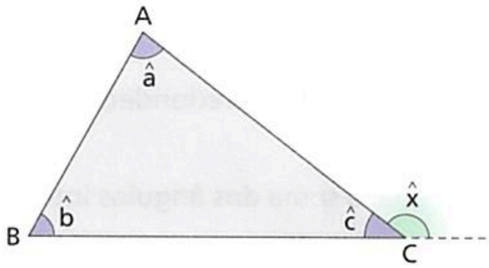


- *a*, *b*, *c* são as medidas dos ângulos internos;
- *x*, *y*, *z* são as medidas dos ângulos externos.

Através da imagem, podemos observar que os ângulos *a* e *z* são adjacentes suplementares. O mesmo ocorre com os ângulos *b* e *y* e *c* e *x*.

Para o triângulo, existe uma relação entre a medida de um ângulo externo e as medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Vamos observar a figura seguinte, da qual estabelecemos que:

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



- $x + c = 180°$ (adjacentes suplementares);
- $a + b + c = 180°$ (soma das medidas dos ângulos internos).

Assim, temos:

$$\left.\begin{array}{r} x + c = 180° \\ a + b + c = 180° \end{array}\right] x + c = a + b + c \Rightarrow \underbrace{x}_{\text{medida do ângulo externo}} = \underbrace{a + b}_{\text{soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes}}$$

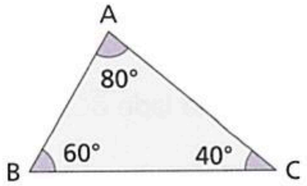
Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

ATIVIDADES

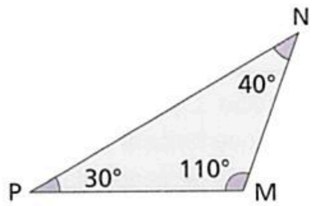
Responda às questões no caderno.

1. Em cada uma das representações dos triângulos, identifique o maior lado:

a)



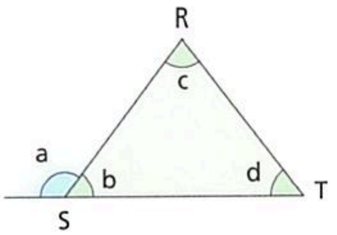
b)



SAIBA QUE

Em qualquer triângulo, o maior ângulo opõe-se ao maior lado, e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

2. Considerando as medidas **a**, **b**, **c** e **d** indicadas na representação do triângulo, qual relação de igualdade podemos formar entre:

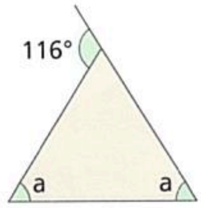


a) *b*, *c* e *d*? **b)** *a* e *b*? **c)** *a*, *c* e *d*?

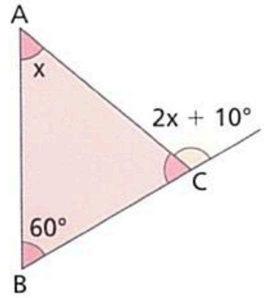
3. Num triângulo, as medidas de dois de seus ângulos internos são 72° e 81°. Qual é a medida do terceiro ângulo interno?

4. As medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo são expressas por $(3x - 48°)$, $(2x + 10°)$ e $(x - 10°)$. Quanto mede o maior ângulo desse triângulo?

5. Calcule o valor de *a* na representação deste triângulo.



6. Considerando a representação do triângulo ABC da figura, determine o valor de *x*.



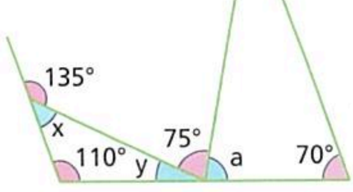
7. Em um triângulo ABC, $med(\hat{A}) = 72°$. Sabendo que a medida do ângulo externo no vértice *B* é 125°, qual a medida do ângulo interno *C*?

8. Considere um triângulo ABC, em que o ângulo externo no vértice *A* mede 116°, $med(\hat{B}) = x$ e $med(\hat{C}) = x - 20°$. Determine as medidas dos três ângulos internos desse triângulo.

DESAFIO

9. Observe a figura a seguir e calcule o valor da expressão dada, utilizando todas as propriedades que forem necessárias:

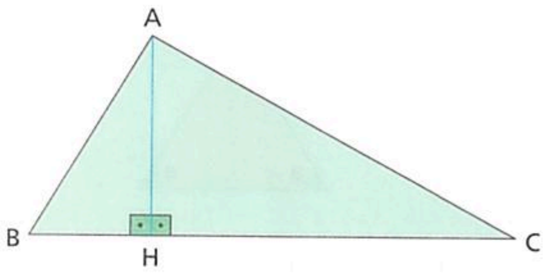
$x + y + a + b$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Altura de um triângulo

Altura de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto (ou ao seu prolongamento), formando um ângulo de 90° com esse lado (ou com seu prolongamento).

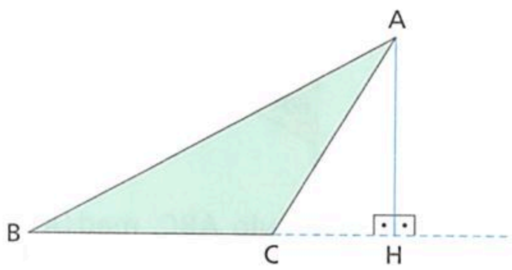


$\overline{AH} \perp \overline{BC}$

$\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

SAIBA QUE

Utilizamos o símbolo $\perp$ para relacionar segmentos ou retas que formam um ângulo de 90°, ou seja, que são perpendiculares.



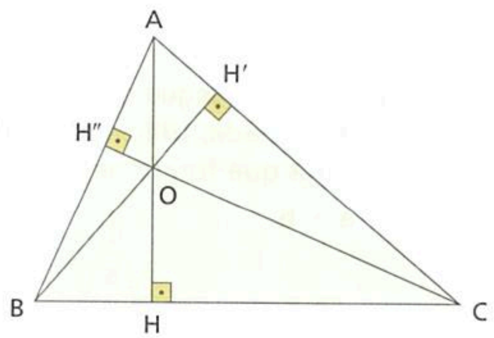
$\overline{AH} \perp \overline{BC}$

$\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Todo triângulo possui três alturas, que se encontram em um único ponto denominado **ortocentro**. Observe as alturas e o ortocentro nos diferentes triângulos:

- Triângulo acutângulo

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



$\overline{AH}$ → altura relativa ao lado $\overline{BC}$

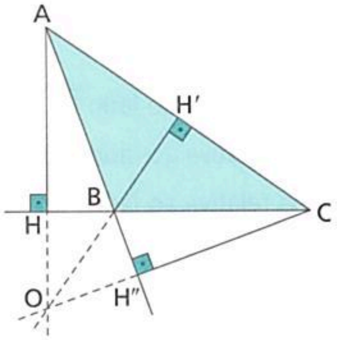
$\overline{BH'}$ → altura relativa ao lado $\overline{AC}$

$\overline{CH''}$ → altura relativa ao lado $\overline{AB}$

O → ortocentro: ponto de encontro das alturas do $\triangle ABC$

Note que, nesse caso, o ortocentro pertence à região interna do triângulo e não coincide com nenhum de seus vértices.

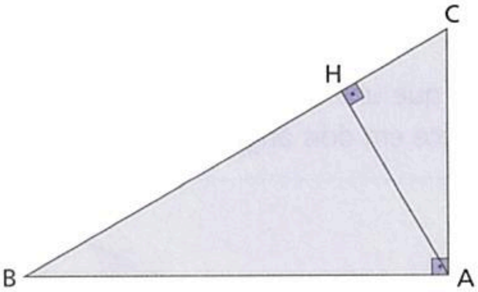
- Triângulo obtusângulo



$\overline{AH}$ → altura relativa ao lado $\overline{BC}$
$\overline{BH'}$ → altura relativa ao lado $\overline{AC}$
$\overline{CH''}$ → altura relativa ao lado $\overline{AB}$
O → ortocentro do $\triangle ABC$

Note que, nesse caso, o ortocentro não pertence à região interna do triângulo.

- Triângulo retângulo



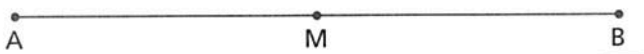
$\overline{AH}$ → altura relativa ao lado $\overline{BC}$
$\overline{CA}$ → altura relativa ao lado $\overline{AB}$
$\overline{BA}$ → altura relativa ao lado $\overline{AC}$
A → ortocentro do $\triangle ABC$

Note que, nesse caso, duas das alturas coincidem com os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, e o ortocentro coincide com o vértice A.

Mediana de um triângulo

Antes de iniciarmos o estudo de mediana, precisamos entender o que é o ponto médio de um segmento.

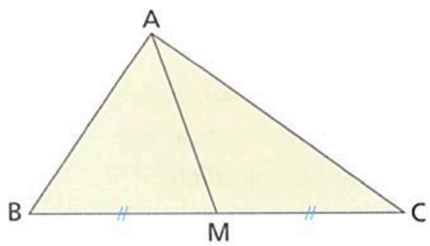
Um ponto *M*, pertencente a $\overline{AB}$, é denominado ponto médio deste segmento se *M* divide $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes.



Nesta figura, *M* é o ponto médio do segmento AB. Então $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Agora que sabemos o que é o ponto médio de um segmento, vamos estudar a mediana.

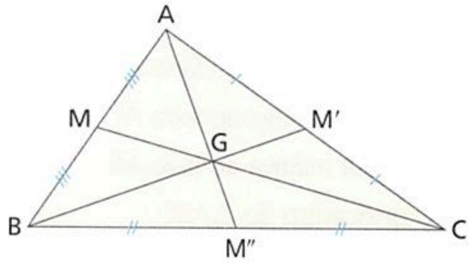
> **Mediana** de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.



$\overline{BM} \cong \overline{MC} \Rightarrow M$ é o ponto médio de $\overline{BC}$.
$\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Todo triângulo possui três medianas, que se encontram em um único ponto denominado **baricentro**.



$\overline{AM''}$ → mediana relativa ao lado $\overline{BC}$

$\overline{BM'}$ → mediana relativa ao lado $\overline{AC}$

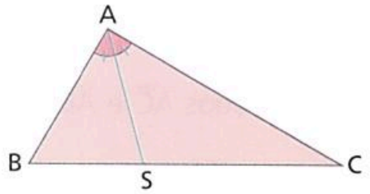
$\overline{CM}$ → mediana relativa ao lado $\overline{AB}$

G → baricentro: ponto de encontro das medianas do $\triangle ABC$

O baricentro, diferentemente do ortocentro, é sempre um ponto interno do triângulo.

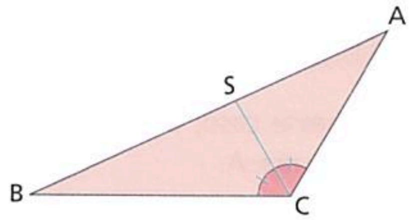
Bissetriz de um triângulo

Bissetriz de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao seu respectivo lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos de mesma medida.



$B\hat{A}S \cong C\hat{A}S$

$\overline{AS}$ é a bissetriz relativa ao ângulo A.

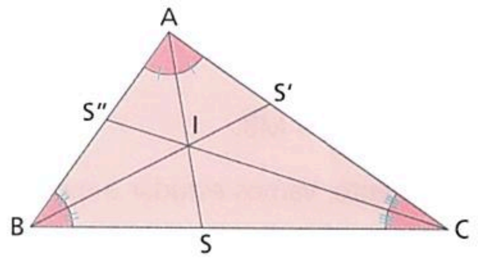


$B\hat{C}S \cong S\hat{C}A$

$\overline{CS}$ é a bissetriz relativa ao ângulo C.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Todo triângulo possui três bissetrizes, que se encontram em um único ponto denominado **incentro**.



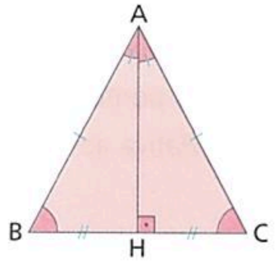
$\overline{AS}$ → bissetriz relativa ao ângulo A

$\overline{BS'}$ → bissetriz relativa ao ângulo B

$\overline{CS''}$ → bissetriz relativa ao ângulo C

I → incentro: ponto de encontro das bissetrizes do $\triangle ABC$

Em geral, as alturas, as medianas e as bissetrizes de um triângulo não coincidem, a não ser nos triângulos isósceles e equiláteros.

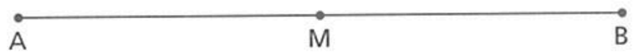


$\overline{AH}$ → a altura, a mediana e a bissetriz relativas ao lado $\overline{BC}$ coincidem

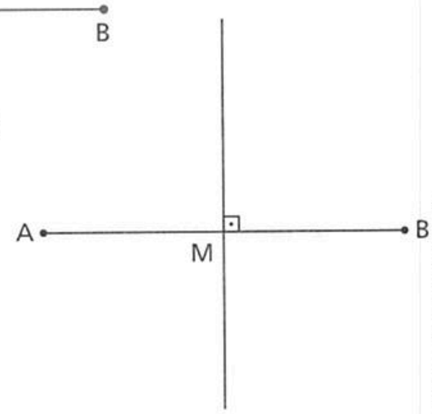
Mediatriz

Já sabemos que o ponto médio de um segmento o divide em dois segmentos congruentes.

Na figura a seguir o ponto M, pertencente a $\overline{AB}$, é o ponto médio deste segmento, pois $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.



A reta perpendicular ao segmento AB e que passa pelo ponto M é chamada reta **mediatriz** de $\overline{AB}$.



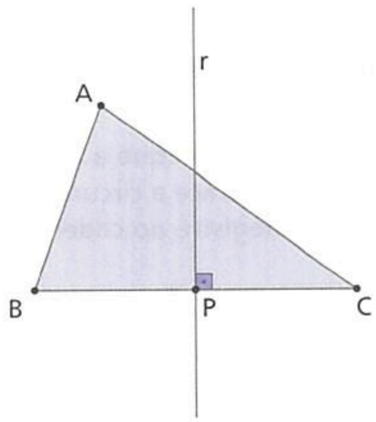
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

SAIBA QUE

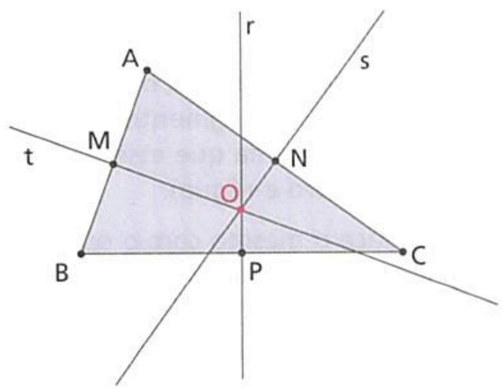
Qualquer ponto da reta mediatriz tem a mesma distância de A e de B. Assim, a mediatriz é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de A e de B.

Mediatriz de um lado de um triângulo é a reta perpendicular a esse lado que passa pelo seu ponto médio.

A reta r é a mediatriz do lado BC no triângulo ABC.



Todo triângulo possui três mediatrizes, que se encontram em um único ponto denominado **circuncentro**.



r ⟶ mediatriz do lado $\overline{BC}$

s ⟶ mediatriz do lado $\overline{AC}$

t ⟶ mediatriz do lado $\overline{AB}$

O ⟶ circuncentro: ponto de encontro das mediatrizes do $\triangle ABC$

PARA QUEM QUER MAIS

Usando dobraduras

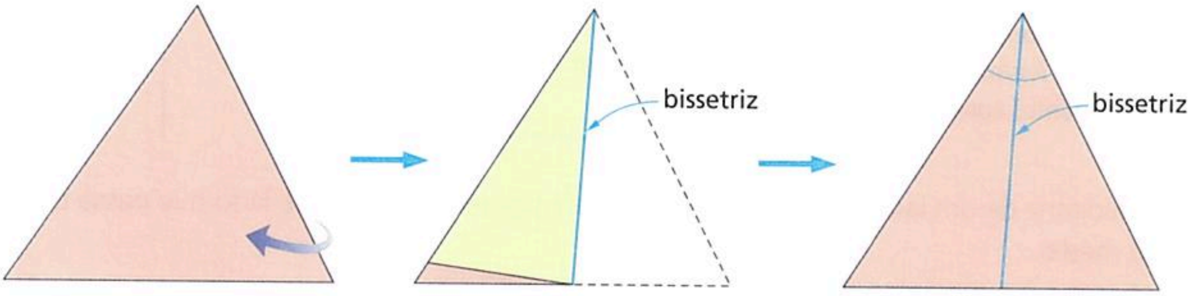
É possível representar os elementos de um triângulo usando dobraduras. Nesta atividade vamos obter as bissetrizes e o incentro de um triângulo.

Você vai precisar de:

- papel sulfite
- tesoura com pontas arredondadas
- lápis
- esquadro
- transferidor

1º passo: Recorte um triângulo qualquer.

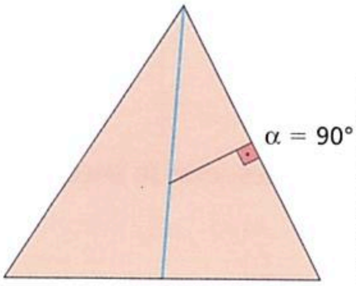
2º passo: Para obter a bissetriz de um ângulo do triângulo, dobre-o sobrepondo dois lados.



3º passo: Obtenha, da mesma maneira, as três bissetrizes dos ângulos internos.

4º passo: Marque o ponto I onde elas se encontram. Esse ponto é o **incentro do triângulo**.

Investigação 1: Pegue um compasso, coloque a ponta-seca no incentro, abra-o até o ponto mais próximo de um dos lados e trace a circunferência. A circunferência toca cada lado do triângulo em um só ponto? Registre no caderno.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

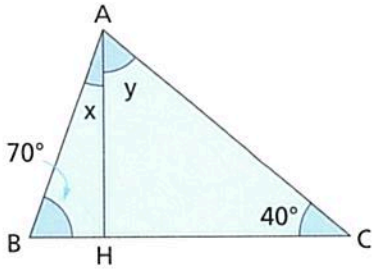
Investigação 2: Recorte um triângulo e, por dobradura, obtenha uma das bissetrizes dos ângulos internos. De um ponto qualquer da bissetriz, trace um segmento de reta até um dos lados que formam o ângulo dividido pela bissetriz de forma que esse segmento de reta seja perpendicular ao lado escolhido (dica: use esquadro e régua).

Partindo do mesmo ponto escolhido anteriormente, faça o mesmo com o outro lado que forma o ângulo. Dobre novamente o triângulo na bissetriz. Os dois segmentos traçados têm o mesmo comprimento? Repita o processo em diferentes pontos da bissetriz. O que é possível observar?

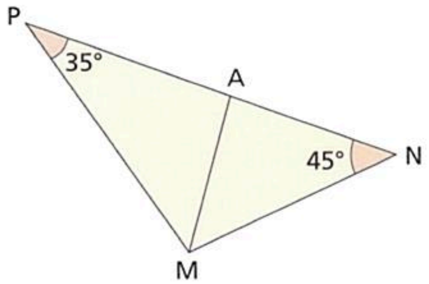
ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

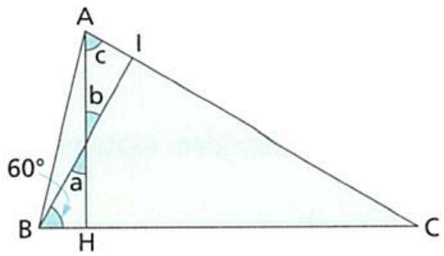
1. Sendo $\overline{AH}$ a altura do $\triangle ABC$, determine as medidas x e y.



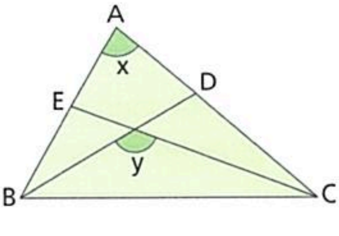
2. No $\triangle MNP$, $\overline{MA}$ é a bissetriz relativa ao lado $\overline{PN}$. Qual a medida de $P\hat{M}A$?



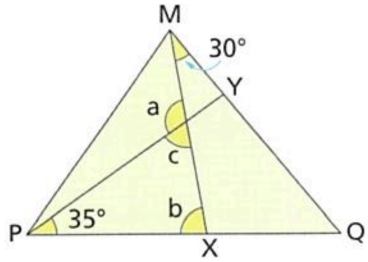
3. Na figura, $\overline{AH}$ é uma altura, e $\overline{BI}$ é outra altura. Determine as medidas a, b e c indicadas.



4. No $\triangle ABC$ a seguir, $med(\hat{B}) = 60°$ e $med(\hat{C}) = 40°$. Sabendo que $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ são as bissetrizes relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, determine as medidas x e y.

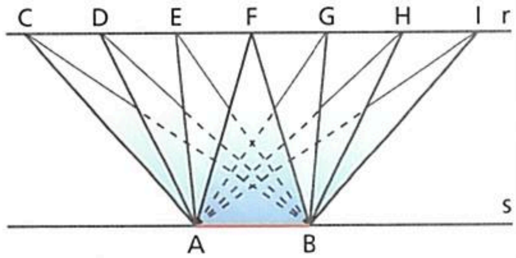


5. No $\triangle MPQ$, $\overline{MX}$ e $\overline{PY}$ são bissetrizes. Calcule as medidas a, b e c.



6. Em um $\triangle ABC$, o ângulo B mede 60°, e o ângulo C mede 20°. Calcule a medida do ângulo formado pela altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e a bissetriz do ângulo A.

7. Considere duas retas paralelas, r e s. Destacamos um segmento AB em uma das retas e traçamos vários triângulos com base AB e um vértice na outra reta paralela. Veja:



Usando a régua, responda:

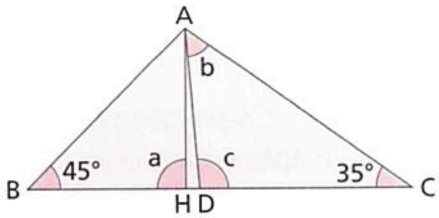
a) Qual a medida do lado comum $\overline{AB}$?

b) Qual a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ de todos os triângulos traçados? O que você observou?

c) Qual dos triângulos traçados tem:

- o menor perímetro?
- o maior perímetro?

8. Na figura, $\overline{AD}$ é bissetriz relativa ao ângulo A, e $\overline{AH}$ é altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Determine as medidas a, b e c indicadas.



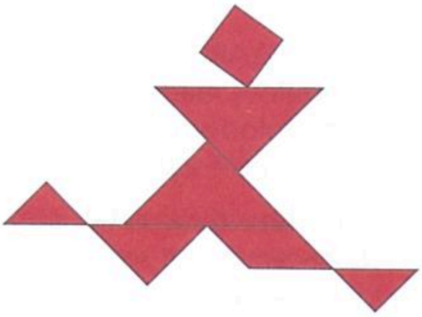
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

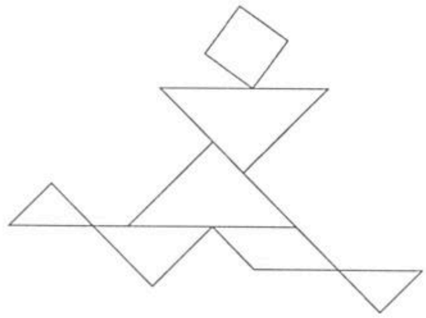
CAPÍTULO 3

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

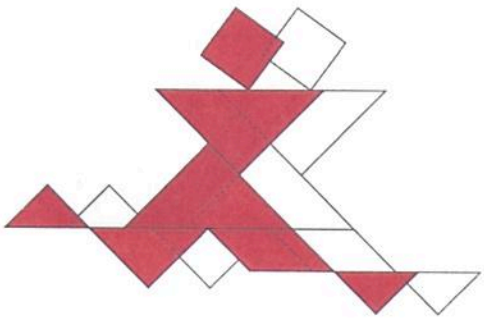
Figuras congruentes

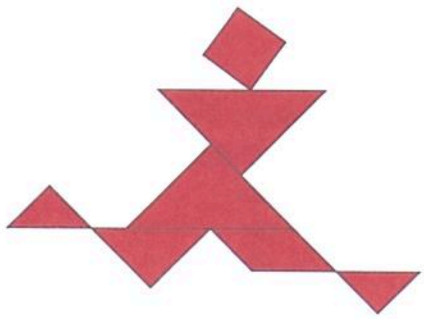
Observe as figuras geométricas:





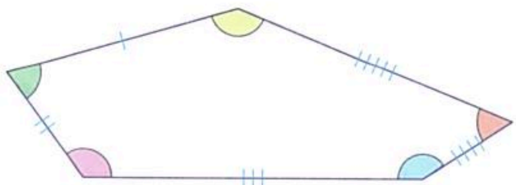
Vamos sobrepor uma figura à outra:

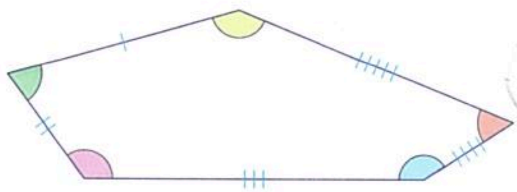




Notamos que as duas figuras, quando sobrepostas, coincidem exatamente. Nesse caso, dizemos que as figuras são **congruentes**.

O mesmo ocorre com polígonos, ou seja, dois polígonos com o mesmo número de lados são congruentes quando podemos sobrepor um ao outro exatamente, fazendo que coincidam.

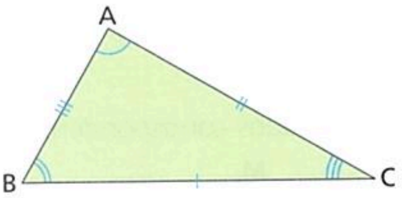


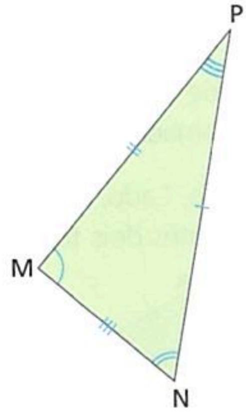


Os polígonos representados se sobrepõem exatamente; logo, são congruentes e apresentam lados com a mesma identificação congruentes e ângulos de mesma cor congruentes.

Triângulos congruentes

Considere os triângulos abaixo:





Nesses triângulos, temos:

$\hat{A} \cong \hat{M}$ ⟶ $\hat{A}$ e $\hat{M}$ são ângulos correspondentes

$\hat{B} \cong \hat{N}$ ⟶ $\hat{B}$ e $\hat{N}$ são ângulos correspondentes

$\hat{C} \cong \hat{P}$ ⟶ $\hat{C}$ e $\hat{P}$ são ângulos correspondentes

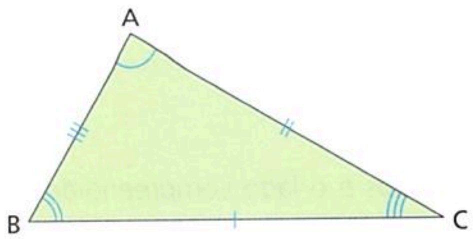
$\overline{BC} \cong \overline{NP}$ ⟶ $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$ são lados correspondentes

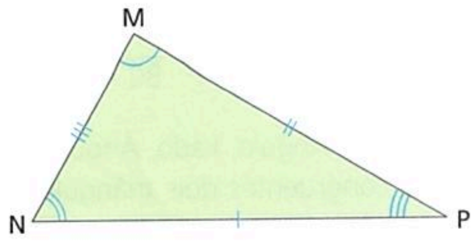
$\overline{AC} \cong \overline{MP}$ ⟶ $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ são lados correspondentes

$\overline{AB} \cong \overline{MN}$ ⟶ $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são lados correspondentes

Dois triângulos são congruentes quando têm os lados e os ângulos correspondentes congruentes.

Observe os triângulos ABC e MNP:





$$\left.\begin{array}{lcl} \hat{A} \cong \hat{M} & & \overline{AB} \cong \overline{MN} \\ \hat{B} \cong \hat{N} & \text{e} & \overline{AC} \cong \overline{MP} \\ \hat{C} \cong \hat{P} & & \overline{BC} \cong \overline{NP} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \triangle ABC \underbrace{\cong}_{\text{símbolo de congruência}} \triangle MNP$$

Como todos os lados correspondentes e todos os ângulos correspondentes são congruentes, os triângulos ABC e MNP também são congruentes.

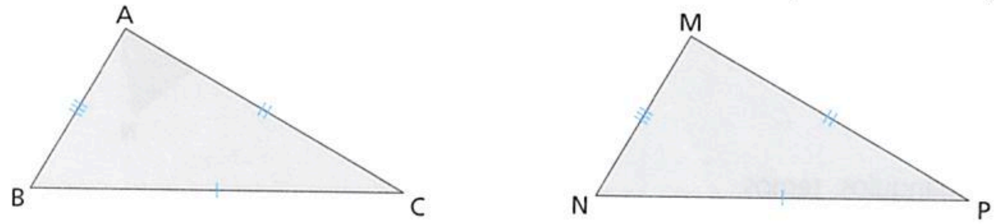
Casos de congruência de triângulos

Para saber se dois triângulos são congruentes, verificamos se os seus lados e seus ângulos correspondentes são congruentes.

No entanto, existem condições que, uma vez satisfeitas, garantem a congruência de dois triângulos sem a necessidade de verificar a congruência entre os seis elementos (3 ângulos e 3 lados). Essas condições são chamadas **casos de congruência de triângulos**. Vejamos quais são esses casos.

1º caso: Lado, Lado, Lado (LLL).

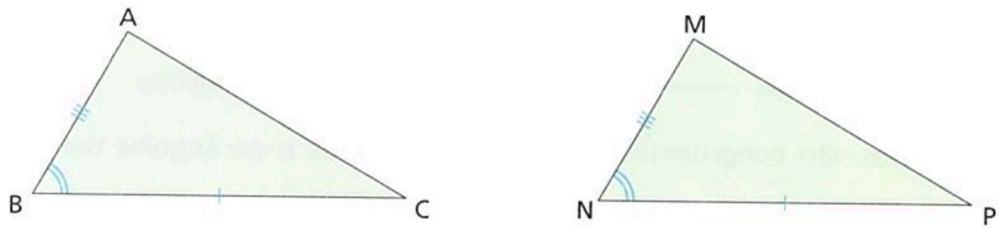
São congruentes dois triângulos que possuem os três lados correspondentes congruentes.



$$\left.\begin{array}{lll} \overline{AB} \cong \overline{MN} & & (L) \\ \overline{AC} \cong \overline{MP} & & (L) \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} & & (L) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

2º caso: Lado, Ângulo, Lado (LAL).

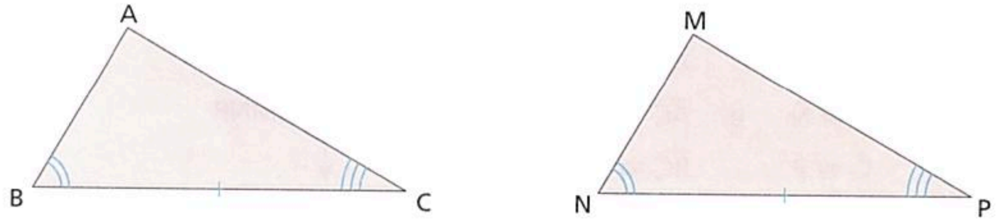
São congruentes dois triângulos que possuem dois lados e o ângulo compreendido entre esses lados correspondentes congruentes.



$$\left.\begin{array}{lll} \overline{AB} \cong \overline{MN} & & (L) \\ \hat{B} \cong \hat{N} & & (A) \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} & & (L) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

3º caso: Ângulo, Lado, Ângulo (ALA).

São congruentes dois triângulos que possuem dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos correspondentes congruentes.

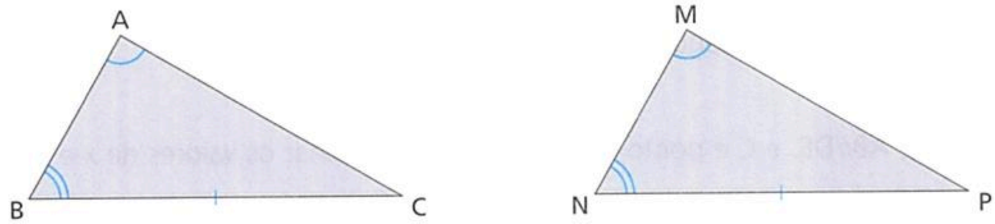


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\left.\begin{array}{lll} \hat{B} \cong \hat{N} & & (A) \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} & & (L) \\ \hat{C} \cong \hat{P} & & (A) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

4º caso: Lado, Ângulo Adjacente, Ângulo Oposto (LAA_O).

São congruentes dois triângulos que possuem um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado correspondentes congruentes.



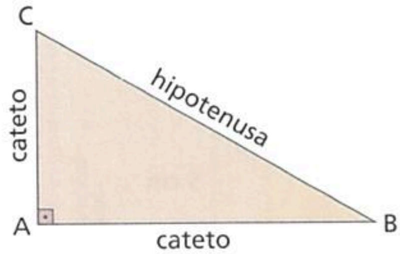
$$\left.\begin{array}{lll} \overline{BC} \cong \overline{NP} & (L) \\ \hat{B} \cong \hat{N} & (A) \\ \hat{A} \cong \hat{M} & (A_O) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

Caso de congruência no triângulo retângulo

Já vimos que um triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo interno reto (medida igual a 90°).

No triângulo retângulo, os lados recebem nomes especiais:

- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**.
- Os lados que formam o ângulo reto são chamados **catetos**.

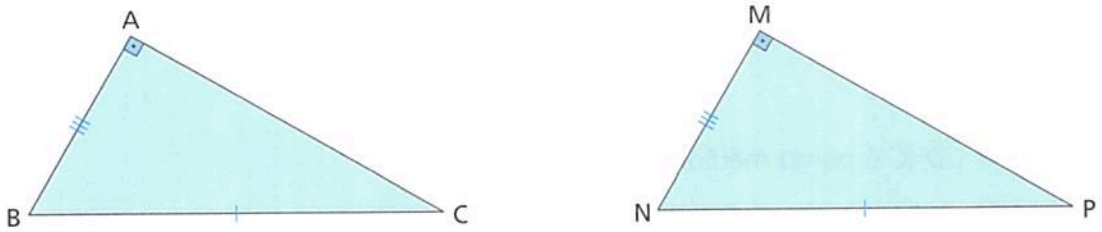


$\text{med}(\hat{A}) = 90°$

$\text{med}(\hat{B}) < 90°$

$\text{med}(\hat{C}) < 90°$

São congruentes dois triângulos retângulos que possuem a hipotenusa e um dos catetos respectivamente congruentes.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

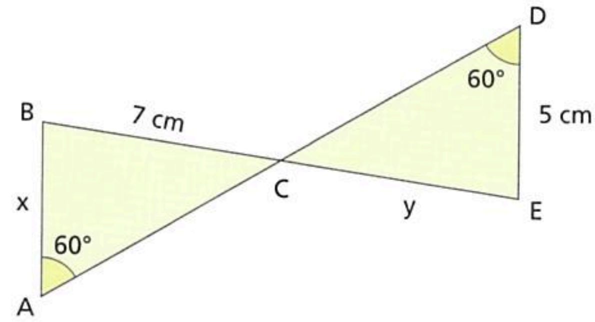
$$\left.\begin{array}{lll} \hat{A} \cong \hat{M} & \longrightarrow & \text{ângulos retos} \\ \overline{AB} \cong \overline{MN} & \longrightarrow & \text{catetos} \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} & \longrightarrow & \text{hipotenusas} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$

Utilização dos casos de congruência

Podemos utilizar os casos de congruência para determinar elementos desconhecidos nos triângulos e demonstrar propriedades importantes da Geometria.

Acompanhe a situação a seguir.

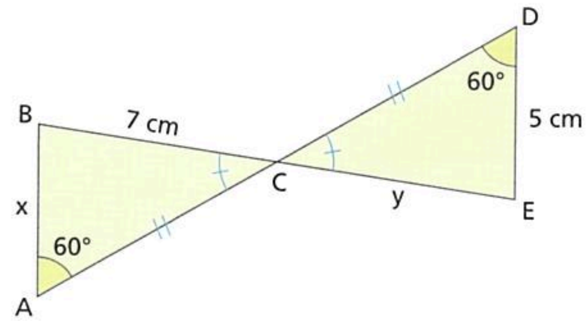
1 Na figura, AB//DE, e *C* é ponto médio de $\overline{AD}$. Determinar os valores de *x* e *y*.



Como *C* é ponto médio de $\overline{AD}$, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$.

Como $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$ são ângulos opostos pelo vértice (opv), $A\hat{C}B \cong D\hat{C}E$.

Vamos, então, comparar os triângulos ABC e DEC.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observamos que:

- $\hat{A} \cong \hat{D}$ (60°) (A)
- $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ (*C* é ponto médio) (L)
- $A\hat{C}B \cong D\hat{C}E$ (o.p.v.) (A)

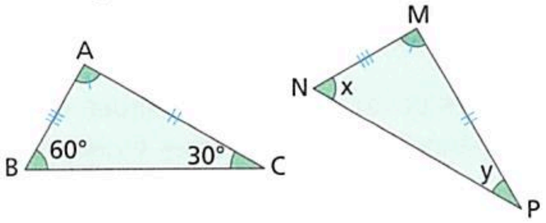
Pelo caso ALA, temos que $\triangle ABC \cong \triangle DEC$. Logo, os lados correspondentes são congruentes, ou seja, $\overline{BC} \cong \overline{EC}$ e $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

Portanto, x = 5 cm e y = 7 cm.

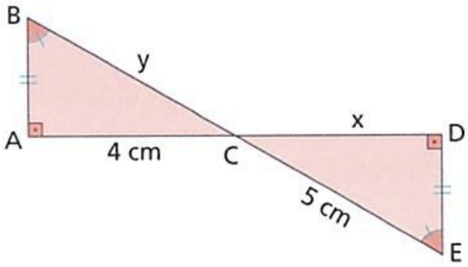
ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Os triângulos ABC e MNP são congruentes. Pelas indicações, determine o caso de congruência e as medidas *x* e *y*.



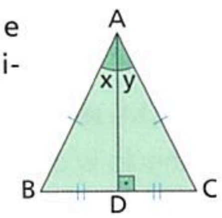
2. Na figura, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Nessas condições, determine as medidas *x* e *y*.



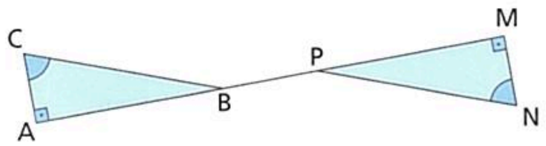
3. No $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{BD} \cong \overline{DC}$. Nessas condições, mostre que:

a) $x = y$

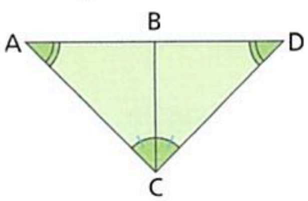
b) $\hat{B} \cong \hat{C}$



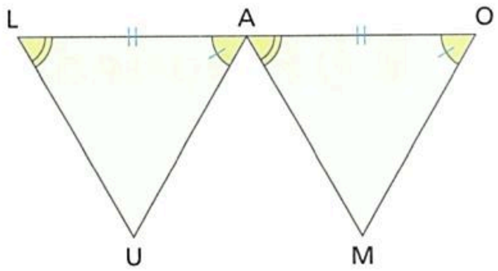
4. Na figura, $\overline{AC} \cong \overline{MN}$ e $\hat{C} \cong \hat{N}$. Prove que $\overline{AB} \cong \overline{MP}$.



5. Os triângulos ABC e DBC da figura apresentam os ângulos congruentes assinalados com marcas iguais. Nessas condições, mostre que os triângulos ABC e DBC são congruentes.



6. (Saresp-SP) Nos triângulos LUA e AMO os elementos congruentes estão assinalados com marcas iguais.



Sabendo que $\overline{UA} = 10$ cm e $\overline{LA} = 8$ cm, pode-se dizer que $\overline{AO}$ e $\overline{MO}$ medem, respectivamente:

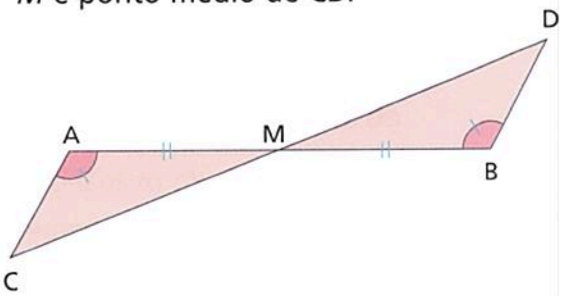
a) 10 cm e 10 cm

b) 10 cm e 8 cm

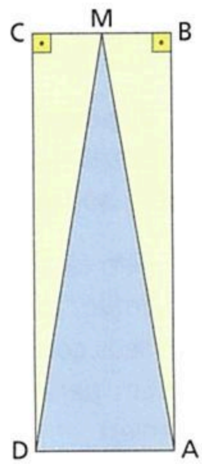
c) 8 cm e 10 cm

d) 8 cm e 8 cm

7. Na figura, $\hat{A} \cong \hat{B}$ e $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Prove que *M* é ponto médio de $\overline{CD}$.



8. A figura mostra um retângulo no qual *M* é o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Prove que o triângulo AMD é isósceles.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

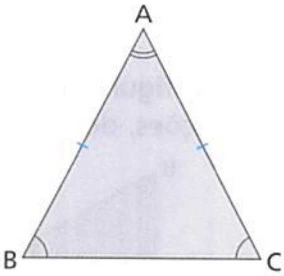
CAPÍTULO 4

PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS

Propriedades do triângulo isósceles

Já estudamos que um triângulo isósceles possui dois lados congruentes. Agora, vamos ver que alguns elementos desses triângulos recebem nomes especiais:

- O lado com medida diferente é chamado **base**.
- Os ângulos adjacentes à base são chamados **ângulos da base**.
- O ângulo oposto à base é chamado **ângulo do vértice**.



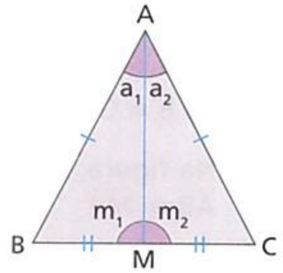
Os triângulos isósceles possuem duas propriedades importantes:

1ª propriedade: em todo triângulo isósceles, a mediana, a altura relativa à base e a bissetriz do ângulo do vértice coincidem.

Seja o $\triangle ABC$ isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, e a mediana $\overline{AM}$ relativa à base $\overline{BC}$. Queremos demonstrar que $\overline{AM}$ é também a altura relativa à base $\overline{BC}$ e a bissetriz do ângulo A.

Comparando os triângulos ABM e ACM, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (lados congruentes do triângulo isósceles) (L)
- $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ (*M* é ponto médio de $\overline{BC}$) (L)
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum) (L)



Pelo caso LLL, temos que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

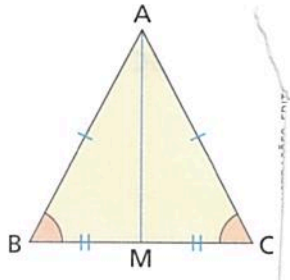
Como $\triangle ABM \cong \triangle ACM$, temos:

$a_1 = a_2 \Rightarrow B\hat{A}M \cong M\hat{A}C \Rightarrow \overline{AM}$ é bissetriz de $\hat{A}$ (ângulo do vértice).

$m_1 = m_2$ e $m_1 + m_2 = 180° \Rightarrow m_1 = m_2 = 90° \Rightarrow \overline{AM}$ é altura relativa a $\overline{BC}$ (base).

2ª propriedade: em todo triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

O triângulo ABC é um triângulo isósceles com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, e $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.



Pelo caso LLL, temos que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

Então, todos os elementos do $\triangle ABM$ são congruentes com seus correspondentes no $\triangle ACM$.

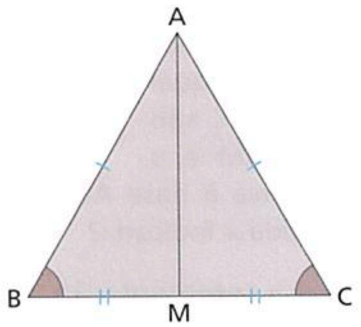
Em particular: $\hat{B} \cong \hat{C}$ (ângulos da base do triângulo isósceles).

Propriedade do triângulo equilátero

Agora vamos estudar uma propriedade do triângulo equilátero: em todo triângulo equilátero os três ângulos internos são congruentes, medindo 60° cada um.

Vamos demonstrar essa propriedade.

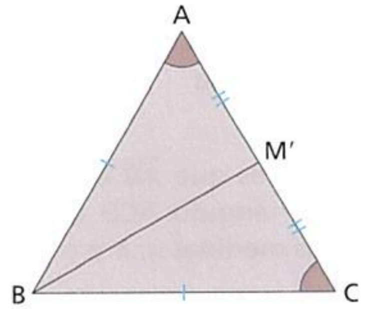
Seja um triângulo ABC equilátero ($\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$) e a mediana $\overline{AM}$ relativa à base $\overline{BC}$.



Comparando os triângulos ABM e ACM, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (lados do triângulo equilátero) (L)
- $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ (*M* é ponto médio de $\overline{BC}$) (L)
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum) (L)

Pelo caso LLL, temos que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$. Então, $\hat{B} \cong \hat{C}$. (1)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Traçamos a mediana $\overline{BM'}$. Comparando os triângulos BAM' e BCM', temos:

- $\overline{BA} \cong \overline{BC}$ (lados do triângulo equilátero) (L)
- $\overline{AM'} \cong \overline{M'C}$ (*M'* é ponto médio de $\overline{AC}$) (L)
- $\overline{BM'} \cong \overline{BM'}$ (lado comum) (L)

Pelo caso LLL, temos que $\triangle BAM' \cong \triangle BCM'$. Então, $\hat{A} \cong \hat{C}$. (2)

De (1) e (2) vem: $\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{C} \\ \hat{A} \cong \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$

Como $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$ (soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo), temos:

$$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = \frac{180°}{3} = 60°$$

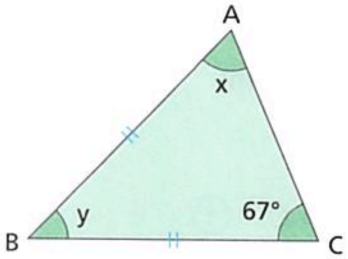
Portanto, os três ângulos internos são congruentes, medindo 60° cada um.

ATIVIDADES

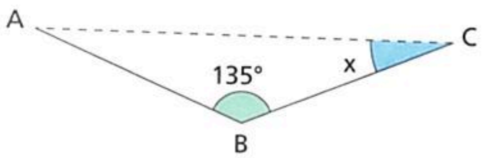
Responda às questões no caderno.

1. Em um triângulo isósceles, um dos ângulos internos mede 106°. Quanto medem os outros dois ângulos desse triângulo?

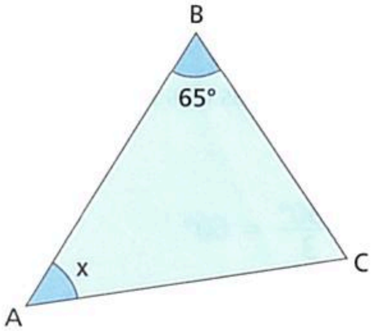
2. Na figura, a representação do triângulo ABC é isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Calcule as medidas *x* e *y* indicadas na figura.



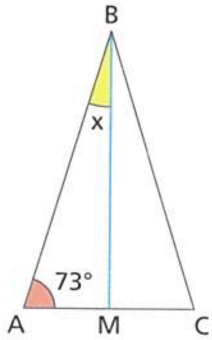
3. A figura mostra dois trechos de 600 km cada um (linha cheia) percorridos por um avião. Qual é o valor de *x*, medida do ângulo BCA?



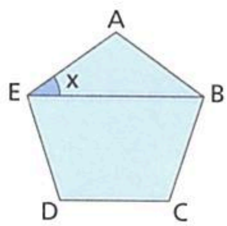
4. Caio saiu de um ponto *A*, passou pelo ponto *B*, caminhou de *B* até *C* e retornou ao ponto *A*, conforme mostra o esquema. Considerando que as distâncias $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são iguais, calcule a medida *x* do ângulo BAC.



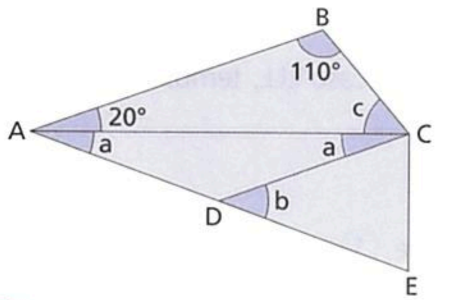
5. Você já sabe que, em um triângulo isósceles, a altura e a mediana relativas à base e a bissetriz do ângulo do vértice coincidem. No triângulo isósceles ABC da figura, no qual os lados $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, $\overline{BM}$ é a mediana relativa à base $\overline{AC}$. Qual é o valor da medida *x* indicada?



6. Sabe-se que a representação do pentágono ABCDE da figura é regular (os 5 lados e os 5 ângulos internos são congruentes). Sabendo que a medida do ângulo EAB é 108°, qual é o valor de *x*, medida do ângulo AEB indicado na figura?



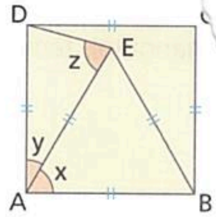
7. Na figura, temos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, e o triângulo ACD é isósceles. Determine as medidas *a*, *b* e *c* indicadas na figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

DESAFIO

8. O quadrilátero ABCD é um quadrado, e o triângulo ABE é equilátero. Nessas condições, calcule o valor da expressão x + y + z. Registre no caderno.



CAPÍTULO 5

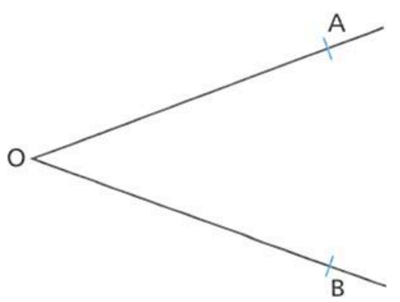
CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Veja no material audiovisual o vídeo sobre bissetriz e mediatriz.

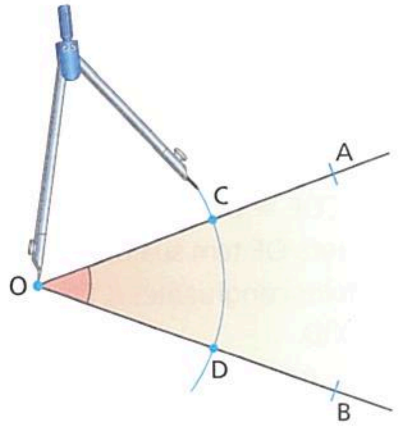
Faça, em seu caderno, as etapas indicados a seguir, de uma construção geométrica. Para isso, você precisará de lápis, compasso, borracha e régua.

Construção 1:

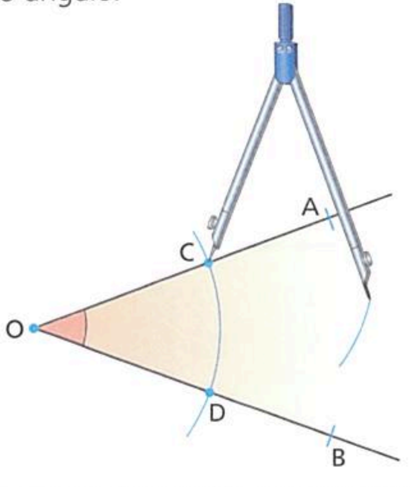
1º passo: Desenhe um ângulo qualquer.



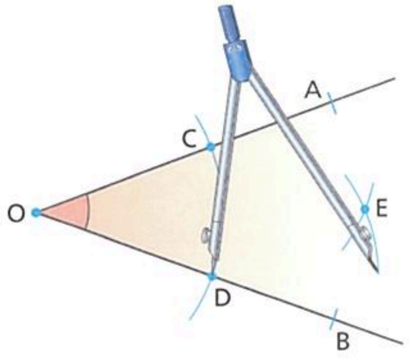
2º passo: Com a ponta-seca do compasso no vértice O, trace um arco com uma abertura qualquer e determine os pontos C e D.



3º passo: Com a ponta-seca do compasso no ponto C, trace um arco de abertura qualquer, entre as duas semirretas que formam o ângulo.

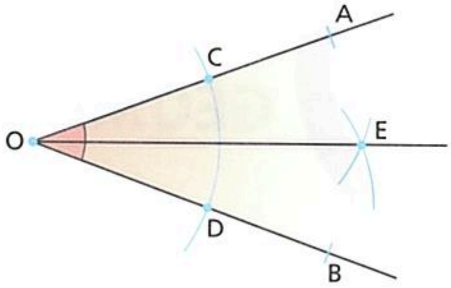


4º passo: Com a mesma abertura do passo anterior, coloque a ponta-seca do compasso no ponto D, trace um arco que se encontre com o arco formado no passo 3, marcando o ponto E.

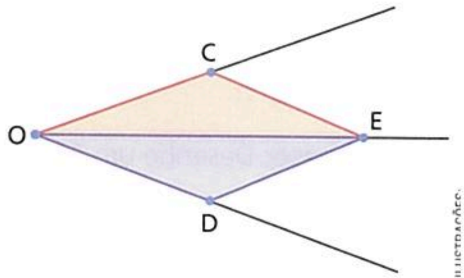


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE, ALEX ARGOZINO

5º passo: Com a régua, trace a semirreta, com origem no ponto *O* e passe pelo ponto *E*.



Agora vamos fazer uma investigação. Para isso, vamos observar a construção final sem os arcos e vamos marcar o $\triangle OCE$ e o $\triangle ODE$.



Dessa construção podemos afirmar que:

- $\overline{OC} \cong \overline{OD}$, pois os pontos *C* e *D* foram marcados através de um mesmo arco de uma circunferência com centro em *O*.
- $\overline{CE} \cong \overline{DE}$, pois o ponto *E* foi marcado usando o compasso sem modificar sua abertura.
- $\overline{OE}$ é lado comum aos dois triângulos.

Dessa forma, pelo critério LLL o $\triangle OCE$ e o $\triangle ODE$ são congruentes. Portanto, podemos afirmar que $C\hat{O}E \cong D\hat{O}E$.

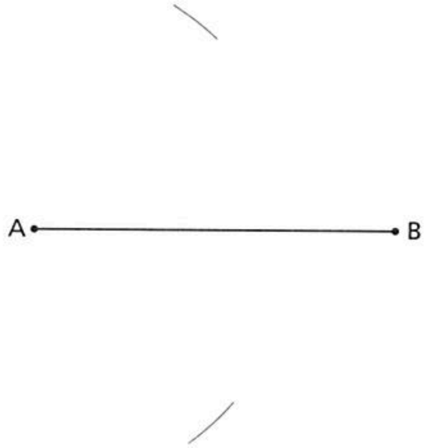
A semirreta OE tem sua origem no vértice *O* (vértice do ângulo COD) e divide o ângulo COD em dois ângulos congruentes (COE e DOE). Assim, podemos dizer que a semirreta OE é a bissetriz do ângulo COD.

Portanto, os passos acima permitem construir a bissetriz de um ângulo qualquer.

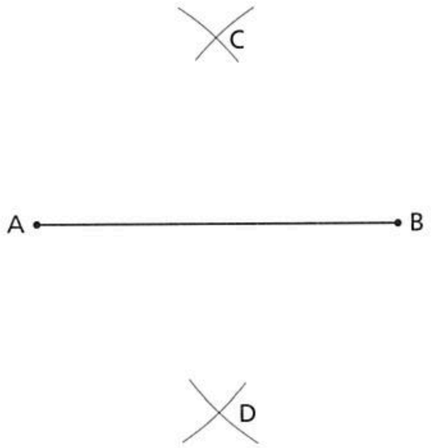
Construção 2:

1º passo: Construa um segmento de reta AB qualquer.

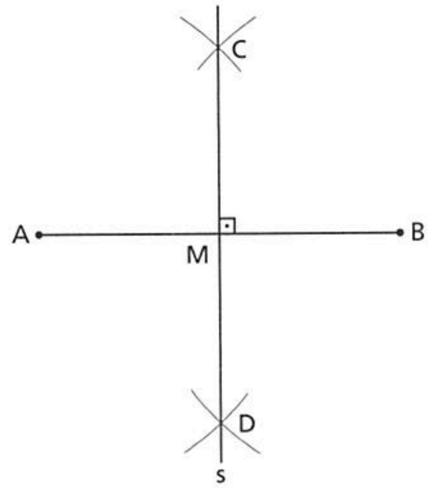
2º passo: Com a ponta-seca do compasso no ponto *A* e uma abertura maior que a metade da medida $\overline{AB}$, trace dois arcos.



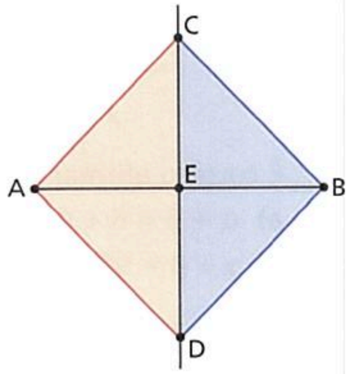
3º passo: Com a mesma abertura do passo anterior, coloque a ponta-seca do compasso no ponto *B*, trace arcos que cortam os anteriores e marque os pontos *C* e *D*.



4º passo: Trace uma reta pelos pontos *C* e *D*.



Agora vamos fazer uma nova investigação. Para isso, vamos observar a construção final sem os arcos e vamos marcar o $\triangle CAD$ e o $\triangle CBD$.

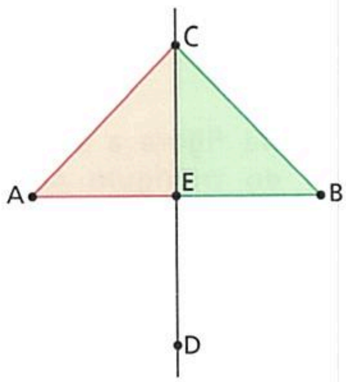


Dessa construção podemos afirmar que:

- $\overline{CA} \cong \overline{CB} \cong \overline{AD} \cong \overline{BD}$, pois os pontos *C* e *D* foram marcados com arcos de duas circunferências de mesmo raio, uma com centro em *A* e outra com centro em *B*.
- $\overline{CD}$ é lado comum aos dois triângulos.

Dessa forma, pelo critério LLL, o $\triangle CAD$ e o $\triangle CBD$ são congruentes. Portanto, podemos afirmar que $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$.

Vamos agora analisar outros dois triângulos: $\triangle CAE$ e $\triangle CBE$.



Além de sabermos que $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ e que $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$ (da análise anterior), também podemos afirmar que $\overline{CE}$ é lado comum aos dois triângulos.

Então, pelo critério LAL, temos que o $\triangle CAE$ e o $\triangle CBE$ são congruentes. Desse fato, podemos afirmar:

- $\overline{AE} \cong \overline{BE}$.
- $A\hat{E}C \cong B\hat{E}C$.

Como $\text{med}(A\hat{E}C) + \text{med}(B\hat{E}C) = 180°$, então $\text{med}(A\hat{E}C) = 90°$ e $\text{med}(B\hat{E}C) = 90°$.

Assim, podemos afirmar que a reta CD divide o segmento de reta AB em duas partes de mesma medida e é perpendicular a ele. Dessa forma, a reta CD é mediatriz do segmento de reta AB.

Assim, os passos acima permitem construir a mediatriz de um segmento de reta qualquer.

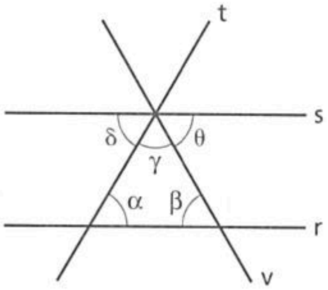
RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. (UFMA) Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x + 10°$ e $x + 50°$. Um deles mede:

a) 20° **c)** 30° **e)** 50°
b) 70° **d)** 80°

2. (Saresp-SP) Na figura abaixo as retas paralelas *r* e *s* são cortadas pelas transversais *t* e *v*.



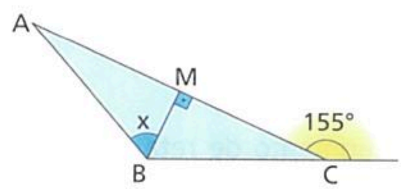
É correto afirmar que:

a) $\alpha + \beta = \delta + \theta$ **c)** $\beta + \gamma + \theta = 180°$
b) $\gamma + \beta = 90°$ **d)** $\gamma + \theta = \beta$

3. Em um triângulo isósceles ABC, em que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, o ângulo A mede o dobro da soma dos outros dois ângulos. Então, a medida do ângulo A é:

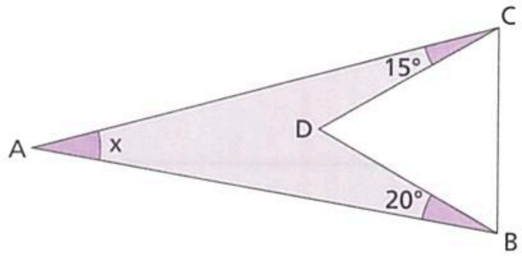
a) 90° **c)** 60° **e)** 120°
b) 30° **d)** 100°

4. Na figura a seguir, a representação do triângulo ABC é isósceles (com $\overline{AB} \cong \overline{BC}$). Determine o valor da medida *x* em graus.



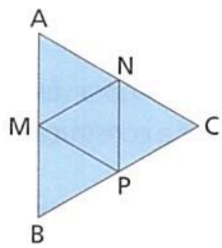
a) 130° **c)** 65° **e)** 75°
b) 100° **d)** 50°

5. O triângulo BDC é equilátero. Determine o valor da medida *x*.



a) 15° **c)** 20° **e)** 27°
b) 18° **d)** 25°

6. O triângulo ABC é equilátero e *M*, *N* e *P* são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ desse triângulo.



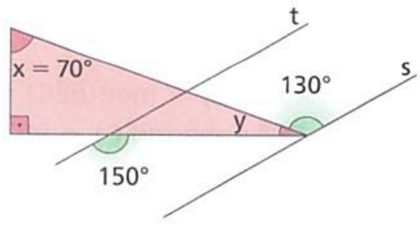
a) Quais as medidas dos ângulos internos do triângulo MNP?

b) Qual a classificação do triângulo MNP quanto às medidas dos lados?

7. O ângulo BAC de um triângulo isósceles é reto. Sendo $\overline{CP}$ a bissetriz do ângulo ACB do triângulo, a medida do ângulo BPC é igual a:

a) 22,5° **c)** 67,5° **e)** 135°
b) 45° **d)** 112,5°

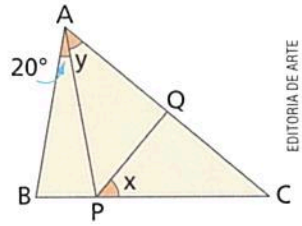
8. Na figura seguinte, as retas *t* e *s* são paralelas. Qual é o valor, em graus, da expressão $x - y$?



a) 40° **c)** 55° **e)** 65°
b) 50° **d)** 60°

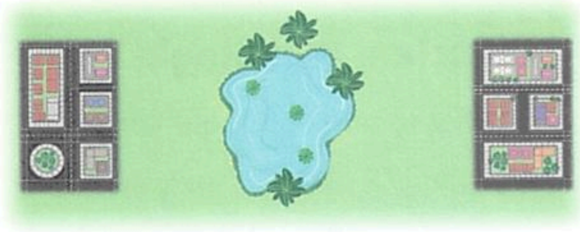
9. Na figura a seguir, os triângulos ABP e APC são isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{AP}$ e $\overline{AP} \cong \overline{PC}$). Sabendo que $\overline{PQ}$ é a bissetriz relativa ao ângulo APC, determine o valor de $x + y$.

a) 90°
b) 70°
c) 100°
d) 80°
e) 60°



EDITORIA DE ARTE

10. Entre duas cidades (*A* e *B*) será instalada uma antena de celular em um ponto *C*, de tal forma que ela deverá ficar à mesma distância das duas cidades. No entanto, traçando-se o segmento de reta que liga as duas cidades ($\overline{AB}$), percebe-se que onde está o ponto médio do segmento há um lago que impede essa instalação. Dessa forma, a instalação precisará ser deslocada para um novo local (*C'*) que deverá, ainda, atender o mesmo critério da distância.


MARCOS MACHADO

O novo ponto de instalação está localizado:

a) na bissetriz do ângulo formado pelo lado $\overline{AB}$ e o lado $\overline{AC'}$.

b) na altura de um triângulo definido pelos pontos *A*, *B* e *C'*.

c) na mediatriz do segmento AB.

d) em um outro ponto qualquer.

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, retomamos a definição de triângulo, a soma de seus ângulos internos e as classificações com relação às medidas dos lados e dos ângulos. Vimos o que é ângulo externo, altura, mediana, bissetriz, mediatriz, além da congruência de triângulos, casos de congruência e as propriedades dos triângulos isósceles e dos triângulos equiláteros.

Abordamos, ainda, a construção de bissetriz e mediatriz usando régua e compasso.

Devido ao grande número de conceitos estudados, sugerimos que faça um fichamento de cada tópico, apontando, de maneira sucinta, as definições. É interessante inserir exemplos para complementar seus registros.

Na abertura da Unidade, foram apresentadas algumas estruturas do passado e do presente nas quais o triângulo foi utilizado para aumentar a estabilidade e, por consequência, aumentar a carga de sustentação. É claro que, quanto mais aprofundado for nosso conhecimento sobre triângulos, maiores serão nossas possibilidades de perceber a aplicação deles ao nosso redor.

Vamos agora refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda no caderno às questões a seguir.

- Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Você saberia provar sua resposta?
- Como os triângulos podem ser classificados?
- Quais são os casos de congruência de triângulos que foram abordados nesta Unidade?
- Descreva como construir a mediatriz de um segmento de reta?

Ciência e tecnologia

Leia abaixo uma notícia que ganhou destaque em diferentes jornais, revistas e *sites*.

Brasileiros ganham prêmio inédito na Olimpíada Internacional de Tecnologia e Inovação

Dois jovens brasileiros ganharam a Olimpíada Internacional de Tecnologia e Inovação, conquistando pela primeira vez o título para o país. Eles também levaram para casa o prêmio de cinco mil francos suíços, visto que a competição aconteceu no Idiap Research Institute, em Martigny, na Suíça.

Os consagrados foram Fábien Giovanni de Oliveira, de 22 anos, estudante do 4º ano de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), e Renato Rodrigues, de 27 anos, mestrando em Estratégia e Inovação em Engenharia de Produção na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).

Eles desenvolveram o "Milênio Bus", projeto que integra a Internet das Coisas (IoT, na sigla em inglês) com o transporte público por meio de um *hardware* e um aplicativo de celular. "O objetivo é trabalhar com pagamentos digitais, informações ao passageiro e geração de dados com **Big Data**", explica Oliveira em entrevista à GALILEU.

Para ganhar a olimpíada, foi necessário muito mais do que apenas uma boa proposta. A competição durou três semanas, e nesse período os jovens assistiram aulas de negócios, e *venture capital*, por exemplo, com professores e especialistas. Eles tiveram que usar esse tempo para aprimorar o projeto para que ele pudesse se tornar uma *startup* com potencial de aplicação no mercado.

Ao todo, 40 pessoas participaram da disputa, sendo que elas foram divididas em sete equipes. No dia de encerramento da olimpíada, os grupos tiveram que se apresentar por quatro horas para uma banca de avaliadores e investidores. "Se eu pudesse mensurar o dia mais difícil, eu diria que é o último", afirma Oliveira. "Porque ali você coloca em jogo toda dedicação e esforço de três semanas."

Para Rodrigues, a adaptação ao idioma e ao fuso horário também foram complicados. "A gente gravava os *feedbacks* dos jurados no celular e escutava várias vezes no quarto até entender o que eles estavam falando", revela Rodrigues.

Apesar disso, ele se orgulha do prêmio, principalmente porque diz ter trabalhado com poucos recursos e condições adversas. "O brasileiro é um povo bem criativo, temos que valorizar nossa resiliência", opina.

Fonte: FABRO, N. Brasileiros ganham prêmio inédito na Olimpíada Internacional de Tecnologia. **GALILEU**. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2017/09/brasileiros-ganham-premio-inedito-na-olimpiada-internacional-de-tecnologia.html>. Acesso em: 4 set. 2018.

- Na reportagem são usadas as expressões **Internet das Coisas** e **Big Data**. Em grupo, faça uma pesquisa sobre o significado dessas expressões.

Muitos jovens brasileiros, das mais variadas idades, estão fazendo a diferença. Preocupados com questões sociais e ambientais, buscam criar projetos inovadores e criativos que ajudem a melhorar sua região, o nosso país e até o mundo.

Alguns desses projetos, como o de Fabién e Renato, utilizam-se dos avanços tecnológicos existentes para criar soluções a demandas atuais. No caso deles, o projeto tem como objetivo melhorar o deslocamento das pessoas que utilizam o transporte público.

Entre os avanços tecnológicos necessários para a execução do projeto, podemos destacar a capacidade de armazenamento e processamento de dados e, ao falarmos desse avanço, é quase impossível não citarmos as unidades de medida de armazenamento digital, uma vez que o volume de dados gerado cresceu e continua crescendo em grande velocidade.

- **Os componentes do seu grupo já ouviram falar em *kilo*, *mega*, *giga* ou *tera*? Sabem o que essas palavras significam?**

Essas palavras tratam-se de prefixos que, quando compostos com uma unidade de grandeza padrão, denotam uma ordem de grandeza. Esses prefixos aparecem no Sistema Internacional (SI) e, normalmente, são operados com a base decimal (10^X).

No caso das tecnologias digitais, quando tratamos de armazenamento e processamento, a unidade padrão utilizada é o *byte*.

Veja a seguir as unidades de medida utilizadas pelas tecnologias digitais:

Unidade	Símbolo	Valor equivalente	Ordem de grandeza
Byte	B	–	1×10^0 byte
Kilobyte	KB	1024 B	1×10^3 byte
Megabyte	MB	1024 KB	1×10^6 byte
Gigabyte	GB	1024 MB	1×10^9 byte
Terabyte	TB	1024 GB	1×10^{12} byte
Petabyte	PB	1024 TB	1×10^{15} byte
Exabyte	EB	1024 PB	1×10^{18} byte
Zettabyte	ZB	1024 EB	1×10^{21} byte
Yottabyte	YB	1024 ZB	1×10^{24} byte

- Façam uma pesquisa sobre a história da informática e do armazenamento digital, procurando destacar a ordem de grandeza utilizada ao longo do tempo. Essa ordem de grandeza mudou?
- Converse com os componentes do seu grupo sobre outras unidades de medida que usam os prefixos mostrados anteriormente. Dica: lembrem-se das unidades já estudadas por vocês.
- Antes da programação de um aplicativo, existe uma etapa de concepção. Nessa etapa pensa-se para que servirá o aplicativo, a quem ele servirá, sua interface, se ele será gratuito ou pago, suas funcionalidades etc.

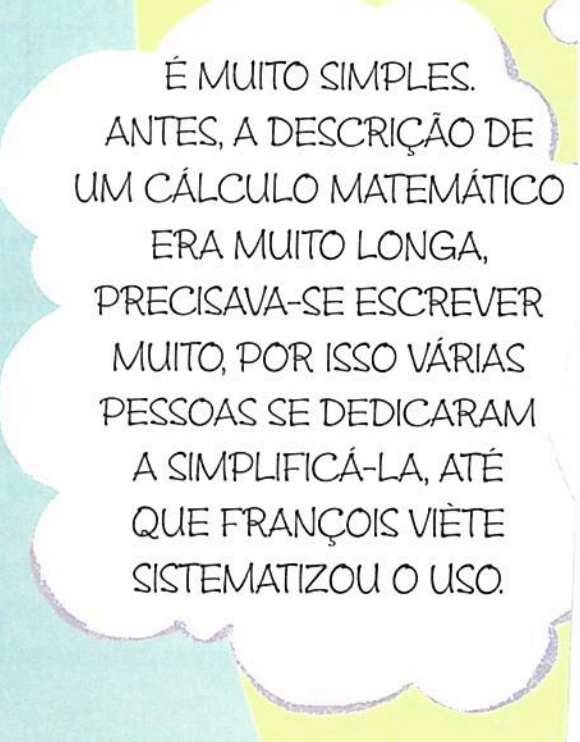
Em grupo, concebam um aplicativo e o apresentem para a sala de aula.

4 EXPRESSÕES E CÁLCULO ALGÉBRICO

Você consegue imaginar como seria "fazer" Matemática sem utilizar a simbologia matemática?

Eduardo questionou-se por que eram usados letras e símbolos para expressar cálculos que ele acreditava poderiam ser descritos com palavras. Observe, na tirinha a seguir, como Eduardo imaginou se um matemático do século XVI lhe mostrasse um exemplo de cálculo que não utilizava símbolos.

Vamos rever esse exemplo: *Duas vezes um número desconhecido adicionado de um inteiro determina qualquer número ímpar, desde que esse número desconhecido pertença ao conjunto dos números inteiros.*



Agora, pense e responda no caderno:

- A expressão apresentada como exemplo por François Viète na imaginação de Eduardo descreve que tipo de número? Passe para a linguagem matemática o exemplo apresentado na tirinha.
- Escreva literal e matematicamente uma sentença matemática. Qual das duas maneiras foi a mais simples para você escrever?


WANDSON ROCHA
3x $\sqrt{y}$ a+b $\frac{t}{3}$
EU SEMPRE ME PERGUNTEI POR QUE USAMOS LETRAS E SÍMBOLOS NAS OPERAÇÕES PARA EXPRESSAR COISAS QUE PODIAM SER DITAS COM PALAVRAS, E EU ACABEI DE DESCOBRIR O MOTIVO.
A EXPRESSÃO QUE DETERMINA OS NÚMEROS ÍMPARES É: DUAS VEZES UM NÚMERO DESCONHECIDO ADICIONADO DE UM INTEIRO DETERMINA QUALQUER NÚMERO ÍMPAR, DESDE QUE ESSE NÚMERO DESCONHECIDO PERTENÇA AO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS.

CAPÍTULO 1

O USO DE LETRAS PARA REPRESENTAR NÚMEROS

Na Antiguidade, a falta de símbolos para indicar números desconhecidos levou o ser humano a recorrer às palavras. Isso, porém, tornava o cálculo longo e complicado.

Aristóteles (384-322 a.C.) e Euclides (século III a.C.) foram os filósofos gregos que deram os primeiros passos no emprego de letras e símbolos para indicar números e expressar a solução de um problema.

Entretanto, muito tempo se passou até as letras serem amplamente usadas para indicar quantidades desconhecidas. Esse uso se deve, principalmente, ao alemão Michael Stifel (1486-1567) e aos italianos Girolamo Cardano (1501-1576) e Raffaelle Bombelli. Bombelli é autor de uma obra de notável interesse, intitulada **L'Algebra** e publicada em 1572.

Foi, porém, um advogado e matemático francês, François Viète (1540-1603), quem introduziu o uso sistemático das letras para indicar os números desconhecidos e os símbolos das operações usados até hoje.

PENSE E RESPONDA

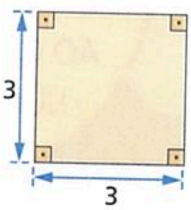
Responda às questões no caderno.

1. Você já sabe que:

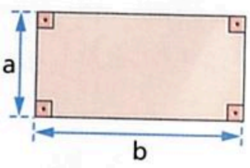
- a área de um retângulo equivale ao produto do comprimento pela largura;
- a área de um quadrado equivale ao quadrado da medida do lado do quadrado.

Como você faria para calcular a área de cada figura a seguir?

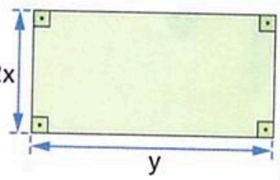
a)



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Das expressões que você escreveu para representar as áreas das figuras, quais foram escritas usando-se:

I) apenas números? II) números e letras? III) apenas letras?

2. Observe as expressões matemáticas a seguir:

a) $3 + 2 + 5 \cdot 4$

b) $x + y + z$

c) $3x^2 + 2y + 4$

d) $(5 - 1)^2 + 18 : 3 - 43$

Que diferenças você observa entre elas?

O objetivo de representar números desconhecidos por meio de letras era indicar as operações matemáticas de forma mais simples e sintética.

Assim:

x^2 → indica o quadrado de um número

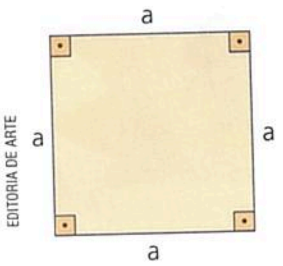
$4y$ → indica o quádruplo de um número

$\frac{c}{2}$ → indica a metade de um número

Da mesma forma, se *a* e *b* representam dois números reais quaisquer, temos que:

- $a + b$ ou $b + a$ representa a soma desses dois números;
- $a - b$ representa a diferença entre esses dois números;
- $a \cdot b$ ou $b \cdot a$ representa o produto desses dois números;
- $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, representa a divisão de *a* por *b*.

Na Geometria, se *a* representa a medida do lado de um quadrado qualquer, temos que:



- $4 \cdot a$ ou $4a$ indica o perímetro desse quadrado;
- a^2 indica a área desse quadrado.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Escreva as operações de forma sintética:

a) o quadrado do número real *x*.

b) o cubo do número real *y*.

c) a raiz quadrada do número real *a*.

d) a quinta potência do número real *b*.

e) a adição dos números reais *b* e *c*.

f) o produto dos números reais *a* e *x*.

g) o dobro do número real *y*.

h) a sexta parte do número real *m*.

i) o quociente entre os números reais *z* e *w*, com $w \neq 0$.

j) a metade do número real *x*.

k) a diferença entre os números reais *x* e *y*.

l) o quíntuplo do número real *z*.

2. Usando duas letras (por exemplo, *x* e *y*), escreva uma expressão que represente:

a) o dobro de um número real adicionado ao dobro de outro número real.

b) o produto da soma pela diferença de dois números reais quaisquer.

c) a adição dos quadrados de dois números reais quaisquer.

d) a diferença dos quadrados de dois números reais quaisquer.

e) o quadrado da soma de dois números reais quaisquer.

f) a adição da raiz quadrada de um número real com a quinta parte de outro número real.

CAPÍTULO 2

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS OU LITERAIS

Sabemos que é possível usar as letras do alfabeto (a, b, c, ..., m, n, ..., w, y, z) para representar números reais.

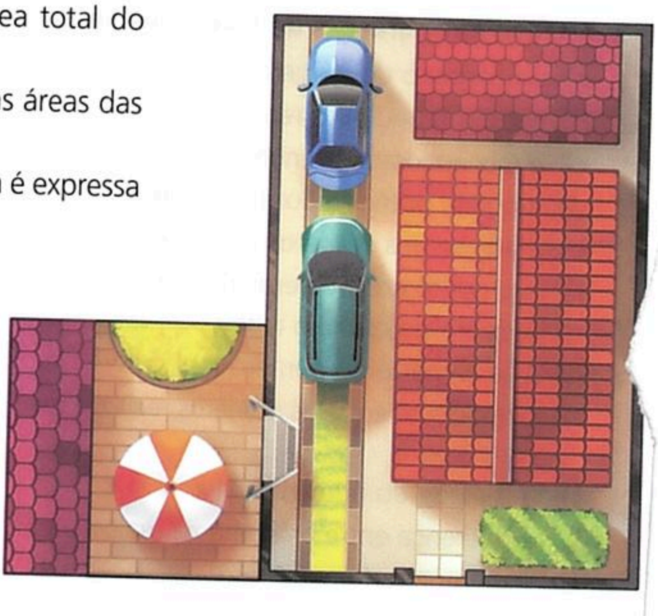
Consideremos, então, as seguintes situações:

1 Qual é a expressão que representa o perímetro da piscina retangular demonstrada a seguir?

O comprimento da piscina é expresso pelo número real *x*.
A largura da piscina é expressa pelo número real *y*.
O perímetro da piscina é igual a duas vezes o comprimento mais duas vezes a largura.
Então, a expressão que representa o perímetro da piscina retangular é:

$$\boxed{2 \cdot x + 2 \cdot y \text{ ou } 2x + 2y}$$

2 Qual é a expressão que representa a área total do terreno da figura?



A área total do terreno é igual à soma das áreas das partes **1** e **2**.
Como a parte **1** é um retângulo, a sua área é expressa por ab.
Como a parte **2** é um quadrado, a sua área é expressa por c^2.
Então, a expressão que representa a área total do terreno é:

$$\boxed{ab + c^2}$$

3 Para fazer um carreto, Geraldo cobra uma taxa fixa de R$ 40,00 e mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Qual é a expressão que representa o valor que ele cobra para fazer um carreto num percurso (ida e volta) de *x* quilômetros?

Como cada quilômetro rodado custa R$ 1,50, então para *x* quilômetros o custo é 1,50x reais. Logo, o preço *P* do carreto é dado por:

$$\boxed{P = 40 + 1{,}50x}$$

DANIEL BOGNI

SAIBA QUE

A palavra **literal** vem do latim *litteralis*, que significa "letra".

A palavra **álgebra** vem do árabe *al jabr* e representa uma regra para transformar uma igualdade em outra equivalente.

Nas três situações apresentadas, escrevemos expressões matemáticas nas quais aparecem números e letras, ou somente letras. Essas expressões matemáticas são chamadas **algébricas** ou **literais**.

Uma expressão matemática que apresenta números e letras, ou somente letras, é denominada **expressão algébrica** ou **literal**. As letras, que normalmente representam números reais, são chamadas **variáveis**.

Assim, são exemplos de expressões algébricas ou literais:

- $2x + 2y$
- $ab + c^2$
- $40 + 1{,}50x$

Mais expressões algébricas

Quando uma expressão algébrica não contém variável ou variáveis no denominador, ela é chamada **expressão algébrica inteira**.

- $2x + 3y$
- $\frac{1}{2}x$
- $\frac{xy^2}{5}$
- $\frac{3a - 2c}{10}$

Quando uma expressão algébrica contém variável ou variáveis no denominador, ela é chamada **expressão algébrica fracionária**.

- $\frac{2a}{b}$
- $\frac{1}{x}$
- $\frac{bc}{5a}$
- $\frac{2a}{x - y}$
- $\frac{1}{a^2 + ax}$

Quando uma expressão algébrica contém variável ou variáveis no interior de um radical, ela é chamada **expressão algébrica irracional**.

- $\sqrt{ab}$
- $\frac{a}{2\sqrt{x}}$
- $\sqrt{x^2 + y^2}$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em certa loja um livro custa x reais e um caderno custa y reais. Qual é a expressão algébrica que representa o valor total pago por Caio ao comprar 5 livros e 8 cadernos iguais a esses nessa loja?

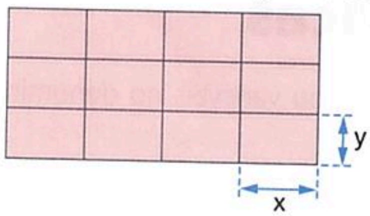
2. Em uma empresa trabalham h homens e m mulheres.

a) Qual é a expressão algébrica que vai representar:

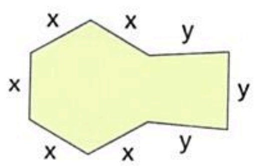
- o total de pessoas que trabalham nessa empresa?
- a diferença entre o número de homens e o número de mulheres que trabalham nessa empresa?
- a razão entre o número de homens e o número de mulheres que trabalham nessa empresa?

b) Alguma das expressões algébricas que você escreveu é fracionária? Qual?

3. A área de um retângulo pode ser dada pelo produto das medidas de dois lados consecutivos. Qual é a expressão algébrica que você pode escrever para representar a área da figura a seguir?

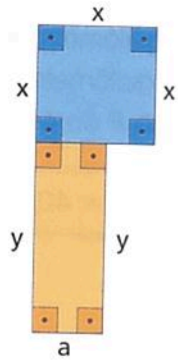


4. Suponha que um terreno tenha a forma da figura aqui mostrada e suas medidas sejam representadas, em unidades de comprimento, pelas letras x e y.



Qual é a expressão algébrica que representa o perímetro desse terreno?

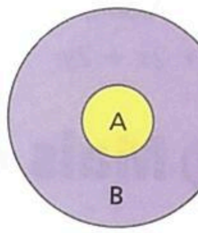
5. Escreva a expressão algébrica que representa a área da figura a seguir.



6. Caio tinha x reais. Foi a uma loja de esportes e comprou 2 pares de tênis. Cada par custou y reais. Qual expressão algébrica pode representar a quantia que sobrou para Caio, depois de comprar os pares de tênis?

7. Qual é a expressão algébrica que representa a soma do quadrado de um número x com o triplo do mesmo número x?

8. Um alvo é composto de duas regiões, A e B, conforme mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesse alvo, cada flecha que atinge a região A vale x pontos e cada flecha que atinge a região B vale y pontos. Fernando atingiu a região A com 7 flechas e a região B com 10 flechas. Escreva a expressão algébrica que representa o total de pontos que Fernando marcou.

9. Use uma expressão algébrica para responder.

a) Quantos dias há em um período de x semanas mais 20 dias?

b) Quantos meses há em um período de y anos mais 10 meses?

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Juros contra × juros a favor

Os juros são o ponto central do sucesso financeiro. Trata-se de uma questão de escolha: você pode usar os juros contra ou a favor de você! Em síntese, antecipar custa e retardar rende.

Se você antecipa com o banco um valor x para pagar por algo que deseja ter, devolverá ao banco x + os juros. Se, ao contrário, retarda o uso de um valor x, deixando-o guardado no banco, receberá do banco x + juros quando decidir utilizá-lo. A questão é que esse é um processo por trás do qual existe uma lógica matemática de acumulação, os chamados juros compostos, popularmente definidos como "juros sobre juros".

[...]

O problema é que essa é uma moeda de dois lados. Os juros contra você têm um efeito semelhante. Se você faz uma antecipação com o banco, por meio do cartão de crédito, para pagar por um desejo imediato, e não consegue quitar na data, pagará juros sobre juros, e o valor da dívida se multiplicará. Pior ainda, porque a taxa de juros do cartão é, no mínimo, 13 vezes maior do que a taxa de rendimento de uma poupança.

Para se ter uma ideia, uma única dívida de R$ 150,00 no cartão de crédito, a uma taxa de 9% ao mês, transforma-se em uma dívida de aproximadamente R$ 4 600 000,00 em dez anos. São os juros contra você!

[...]

Fonte: DOMINGOS, R. **Ter dinheiro não tem segredo:** educação financeira para jovens. São Paulo: DSOP Educação Financeira, 2011. p. 83.

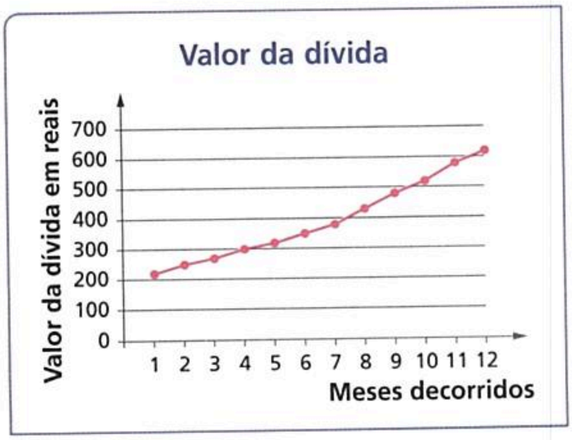
Lígia tem uma conta bancária com cheque especial. Isso significa que ela tem um limite e que pode utilizar um valor superior ao seu saldo, ficando, assim, com saldo negativo. Esse saldo negativo é um empréstimo automático e já aprovado, pelo qual se cobram juros. Para o banco não cobrar mais os juros, é necessário que o cliente deposite um valor igual ao da dívida.

O gráfico a seguir representa o saldo da conta bancária de Lígia, que inicialmente era devedor em R$ 200,00, e que incidiu juro composto de 10% ao mês.

Responda às questões no caderno.

1. Em quanto tempo a dívida de Lígia dobrará?

2. O gráfico representado pela expressão $v = 200 \cdot (1{,}1)^n$, em que *v* é o valor devido depois de *n* meses. Utilizando a expressão e uma calculadora, calcule o valor da dívida de Lígia depois de 5 anos.



Fonte: Dados fictícios.

EDITORIA DE ARTE

CAPÍTULO 3

VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Vamos analisar duas situações.

1 Ângela, Sandra e Solange vão sempre juntas ao cinema.

Supondo que cada entrada para o cinema custe *x* reais, a expressão algébrica que representa o gasto delas com as entradas é 3x.

- Supondo que, no domingo, cada entrada custe 18 reais, elas deverão pagar 54 reais pelas três entradas:

$$3x = 3 \cdot 18 = 54$$

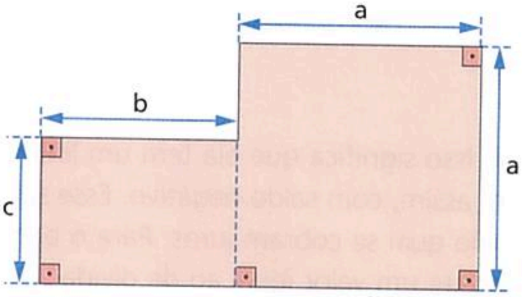
Dizemos que 54 é o **valor numérico** da expressão algébrica 3x para x = 18.

- Supondo que, na quarta-feira, cada entrada custe 15 reais, elas deverão pagar pelas três entradas 45 reais:

$$3x = 3 \cdot 15 = 45$$

Dizemos que 45 é o valor numérico da expressão algébrica 3x para x = 15.

2 A forma e as medidas de um terreno estão representadas na figura a seguir:



EDITORIA DE ARTE

A área desse terreno é dada pela expressão algébrica:

$$a^2 + bc$$

- bc: **área do retângulo de lados *b* e *c***
- a^2: **área do quadrado de lado *a***

Vamos supor que:

- o lado do quadrado meça 20 unidades de comprimento;
- as medidas dos lados *b* e *c* do retângulo sejam 16 e 12 unidades de comprimento, respectivamente.

Nessas condições, vamos calcular a área desse terreno:

$$a^2 + bc = 20^2 + 16 \cdot 12 = 400 + 192 = 592$$

A área desse terreno será 592 unidades de área.

O número 592, assim obtido, chama-se **valor numérico** da expressão algébrica $a^2 + bc$ para a = 20, b = 16 e c = 12.

> Quando substituímos as variáveis de uma expressão algébrica por números e efetuamos os cálculos indicados, obtemos o **valor numérico** da expressão algébrica dada para esses números.

Veja esta outra situação:

3 Qual é o valor numérico da expressão $(x + y) \cdot (x - y)$ quando $x = 1{,}1$ e $y = -0{,}8$?

$(x + y) \cdot (x - y) =$

$= [1{,}1 + (-0{,}8)] \cdot [1{,}1 - (-0{,}8)] =$ ⟶ **substituímos as letras pelos números dados**

$= [1{,}1 - 0{,}8] \cdot [1{,}1 + 0{,}8] =$

$= [+0{,}3] \cdot [+1{,}9] =$

$= 0{,}57$ ⟶ **valor numérico procurado**

Uma consideração importante

Em algumas expressões algébricas fracionárias não é possível obter o valor numérico da expressão. Isso acontece quando os valores atribuídos às variáveis anulam o denominador da expressão, e, como sabemos, não existe divisão por zero.

Assim:

- A expressão $\frac{a}{x}$ não tem valor numérico quando $x = 0$.
- A expressão $\frac{a+2}{a-1}$ não tem valor numérico quando $a = 1$.

Na prática, determinamos o valor para o qual uma expressão fracionária não tem valor numérico igualando o denominador dessa expressão a zero e resolvendo a equação obtida. Vamos ver duas situações:

1 Para qual valor de *x* a expressão algébrica $\frac{x-3}{2x-1}$ não tem valor numérico?

$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Dizemos que a expressão não tem valor numérico quando $x = \frac{1}{2}$.

2 Qual deve ser o valor de *x*, em função de *y*, para que a expressão algébrica $\frac{x+y}{x-y}$ não tenha valor numérico? Igualando o denominador da expressão a zero, temos:

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$

Dizemos que a expressão algébrica dada não tem valor numérico quando $x = y$.

NÓS

Investimento

Investimento é a aplicação de algum tipo de recurso, como o dinheiro, com a expectativa de receber no futuro um valor superior ao aplicado. Ao deixar dinheiro em um banco, essa instituição financeira paga ao aplicador juros, que são como um "prêmio", sobre o valor investido.

Os investimentos financeiros são formas interessantes de poupar ou assegurar dinheiro para o futuro. É necessário criar, no Brasil, uma cultura de investimento, pois boa parte das pessoas está mais habituada a lidar com empréstimos e financiamentos.

- Você conhece algum tipo de investimento? Qual?
- Para que você acredita que seja importante investir?

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Calcule o valor numérico, na forma decimal, da expressão algébrica $\frac{1}{x} - x + \sqrt{x}$ quando $x = 4$.

2. As fábricas de calçados utilizam a fórmula matemática $S = \frac{5p + 28}{4}$ para determinar a numeração dos calçados, na qual *S* é o número do sapato e *p* é o comprimento do pé, em centímetros. Qual é o número do sapato de uma pessoa cujo pé tem 24 centímetros de comprimento?

3. Um modelo matemático mostra que o número *N* de pessoas que compram determinado produto após *t* dias de veiculação publicitária é dado por $N = 10^3 + 2 \cdot 10^t$. De acordo com esse modelo, quantas pessoas comprarão o produto após 5 dias de veiculação?

4. Na igualdade $V = \frac{T}{M + 3}$, temos que $T = 43{,}2$ e $M = 1{,}5$. Qual é o valor de *V*?

5. Determine o valor de *y* na igualdade $y = \frac{6}{x} + x - 3{,}2$, para $x = 1{,}5$.

6. Sabe-se que $p = \frac{a + b + c}{2}$ e que $a = 5$, $b = 13$ e $c = 10$.

Nessas condições:

a) Qual é o valor de *p*?

b) Qual é o valor numérico da expressão algébrica $p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)$?

7. Determine o valor numérico de cada uma das seguintes expressões algébricas:

a) $\frac{a^2 - 2a}{\sqrt{a}}$, quando $a = 4$.

b) $m^2 - 2mn + n^2$, quando $m = -1$ e $n = \frac{1}{4}$.

c) $\sqrt{\frac{a^2 + ax}{m}}$, quando $a = 8$, $x = 10$ e $m = 9$.

d) $3(x^2 - y^2) - 10(x + y) \cdot (x - y)$, quando $x = -2$ e $y = -2$.

e) $(a - b)^2 - c^2$, quando $a = \frac{2}{3}$, $b = 1$ e $c = -1$.

f) $\frac{1 - x^2}{xy + 1}$, quando $x = 0{,}5$ e $y = -8$.

g) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$, quando $x = \frac{1}{2}$ e $y = -2$.

h) $\frac{y + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}}$, quando $x = 10$ e $y = 5$.

8. Considere a igualdade

$$A = p \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

Quando $p = 10^4$, $r = 250$ e $n = 2$, qual é o valor de *A*?

9. Determine os valores das variáveis para que as expressões algébricas a seguir não representem números reais.

a) $\frac{x - 5}{x - 4}$

b) $\frac{a + b}{1 - 3a}$

c) $\frac{2x}{2 + 5x}$

d) $\frac{a - b}{2 - 2b}$

10. Determine o valor de *x*, em função de *y*, para o qual cada expressão algébrica a seguir não representa número real.

a) $\frac{x}{x + y}$

b) $\frac{x + 2y}{x - 2y}$

c) $\frac{x - y}{2x + y}$

11. Dividindo-se o número 34 em partes inversamente proporcionais aos números 1, 2 e 5, obtém-se os valores *x*, *y* e *z*, respectivamente. Qual é o valor numérico da expressão algébrica $5x - 3yz$?

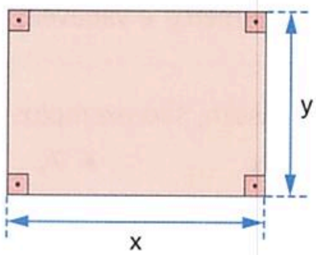
CAPÍTULO 4

MONÔMIO OU TERMO ALGÉBRICO

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Esta figura é uma representação de um retângulo, cujas medidas dos lados, expressas em unidades de comprimento, são *x* e *y*.



a) Qual é a expressão algébrica que representa a área desse retângulo?

b) Qual é a expressão algébrica que representa o perímetro do retângulo da figura?

c) Entre as duas expressões algébricas que você escreveu nos itens *a* e *b* existe uma diferença. Qual é essa diferença?

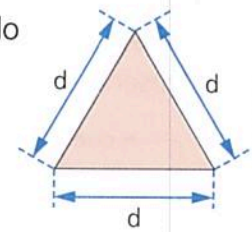
2. Suponha um número real *x*. Como você representaria:

a) o dobro desse número?

b) o quadrado do número acrescido do próprio número?

Veja as situações a seguir.

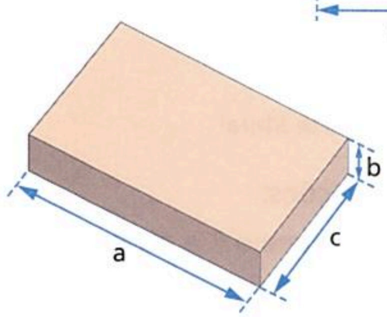
1 A figura ao lado é uma representação de um triângulo equilátero. Seu lado mede *d* unidades de comprimento.
A expressão algébrica que representa o perímetro desse triângulo é 3d.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

2 A caixa de presente lembra um bloco retangular.

OLHA UKHAL/SHUTTERSTOCK



As dimensões desse bloco retangular são: comprimento (a), altura (b) e largura (c). A expressão algébrica que representa o volume desse bloco retangular é **abc**.

Essas situações mostram expressões algébricas representadas por uma multiplicação de números e variáveis ou por uma multiplicação de variáveis.

3 Uma torneira gotejando desperdiça *y* litros de água em 1 hora.

A expressão algébrica que representa a quantidade de água desperdiçada por essa torneira gotejando por 4 horas é 4y.

Expressões algébricas desse tipo são denominadas **monômios** ou **termos algébricos**.


EDITORIA DE ARTE

Denomina-se **monômio** ou **termo algébrico** toda expressão algébrica representada apenas por um número, ou apenas por uma variável, ou por uma multiplicação de números e variáveis, em que a variável não esteja nem no denominador nem no radical.

Assim, são exemplos de monômios:

- $3x$
- $7y$
- x^2
- abc
- $\frac{4x}{3}$

WANDSON ROCHA

Geralmente, um monômio é formado por duas partes: um número, chamado **coeficiente do monômio**, e uma variável ou uma multiplicação de variáveis (considerando inclusive seus expoentes), chamada **parte literal**.

Observe os exemplos de monômios:

- $3x$ → 3: **coeficiente**; x: **parte literal**
- $-10a^3b$ → −10: **coeficiente**; a^3b: **parte literal**
- -18 → **coeficiente** (não tem parte literal)

Observações:

- Como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, temos que:

  a) $1x = x$; $1a^4x^3 = a^4x^3$; $1mn^2 = mn^2$ → **o coeficiente desses monômios é 1**

  b) $-1x = -x$; $-1a^4x^3 = -a^4x^3$; $-1mn^2 = -mn^2$ → **o coeficiente desses monômios é −1**

- Quando o coeficiente de um monômio é 0, o monômio representa sempre o número real zero e é chamado monômio nulo. Exemplos:
  - $0x = 0$
  - $0a^4x^3 = 0$
  - $0mn^2 = 0$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Mariana vende carrinhos em miniatura ao preço de x reais cada um. Qual o monômio que representa o preço de 9 desses carrinhos?

2. Em uma rodovia, o preço de um dos pedágios é R$ 9,20. Se nesse pedágio passaram x carros em determinado dia, qual é o monômio que expressa a arrecadação, em reais nesse dia?

LÉO BURGOS/PULSAR IMAGENS

Posto de pedágio na rodovia Castello Branco em São Paulo, SP.

3. Um prédio possui x apartamentos por andar. Se esse prédio tem 20 andares, qual é o monômio que representa a quantidade de apartamentos?

4. Na Viação Graviola, a viagem de Campina Grande a João Pessoa custa R$ 22,50. Qual é o monômio que representa o valor arrecadado com y passageiros que fazem esse trajeto?

ANDERSON ALCANTARA/MOMENT/GETTY IMAGES

Lagoa do Parque Solon de Lucena em João Pessoa, PB.

5. Qual é o monômio que representa o produto de 7, a e b?

6. Para gastar 100 calorias, Caio deve correr x minutos em um terreno plano ou fazer ginástica aeróbica por y minutos. Se Caio quiser perder 800 calorias, qual é o monômio que representa o tempo, em minutos, que ele deve:

a) correr em um terreno plano?

b) fazer ginástica aeróbica?

7. Identifique quais das expressões algébricas a seguir são monômios.

a) x^2

b) -10

c) $x + 2y$

d) $-2{,}1bx^2$

e) $3a - 2b$

f) $\frac{5}{8}xy^2$

g) $\frac{x}{y}$

h) y^3

i) $\frac{1}{xy}$

j) $\sqrt{x}$

8. Identifique o coeficiente e a parte literal dos monômios a seguir.

a) $7b^3$

b) $-x^2y$

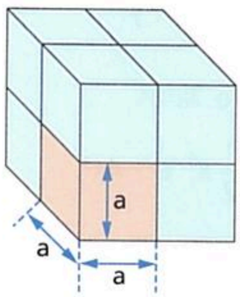
c) $0{,}9c^4$

d) a^5x^3

e) $-6{,}2a^4b^2c$

f) $\frac{4}{5}$

9. O volume de um cubo é dado pelo cubo da medida de sua aresta. Qual é o monômio que expressa o volume do cubo da figura?



EDITORIA DE ARTE

10. Considere a sequência numérica (x, 5x, 25x, ..., 15 625x). Quais são os monômios que estão faltando nessa sequência?

suicidio

Grau de um monômio

O grau de um monômio com coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes das variáveis. Exemplos:

- O monômio $6x^2y^5$ é do 7º grau. $\longrightarrow$ $(2 + 5 = 7)$
- O monômio $-\frac{1}{3}ab$ é do 2º grau. $\longrightarrow$ $(ab = a^1b^1 \Rightarrow 1 + 1 = 2)$
- O monômio $5{,}1y^6$ é do 6º grau.
- O monômio 10 é de grau zero.

O grau de um monômio também pode ser dado em relação a uma de suas variáveis. Nesse caso, o grau do monômio corresponde ao expoente da variável considerada. Exemplos:

- O monômio $3x^2y^5$ é do 2º grau em relação à variável *x*.
- O monômio $-\frac{1}{2}a^3b$ é do 1º grau em relação à variável *b*.

Monômios semelhantes

Acompanhe:

- $10x^2y$ e $-\frac{2}{3}x^2y$ possuem a mesma parte literal: x^2y.
- $2{,}5x^3$, $\frac{1}{2}x^3$ e $-4x^3$ possuem a mesma parte literal: x^3.

Quando dois ou mais monômios apresentam a **mesma parte literal**, eles são denominados **monômios semelhantes** ou **termos semelhantes**.

Assim, são exemplos de monômios ou termos semelhantes:

- $10x^2y$ e $-\frac{2}{3}x^2y$.
- $-4a^2b^2$ e $7a^2b^2$.
- $2{,}5x^3$; $\frac{1}{2}x^3$ e $-4x^3$.

Não são semelhantes, por exemplo, os monômios:

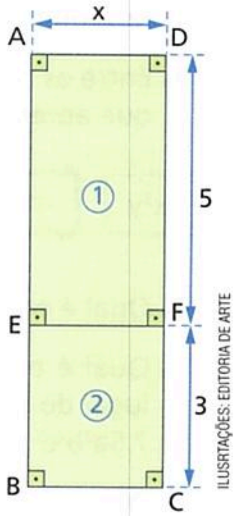
- $6x^2y$ e $-4xy^2$.
- $2x^3$; $-\frac{1}{2}x^2$ e $-\frac{5}{4}x$.

Adição algébrica de monômios

Acompanhe as situações a seguir.

1 Qual é o monômio que representa a área do retângulo ABCD da figura?
Para resolver o problema, podemos representar:

- a área do retângulo **1** pelo monômio $5x$;
- a área do retângulo **2** pelo monômio $3x$.



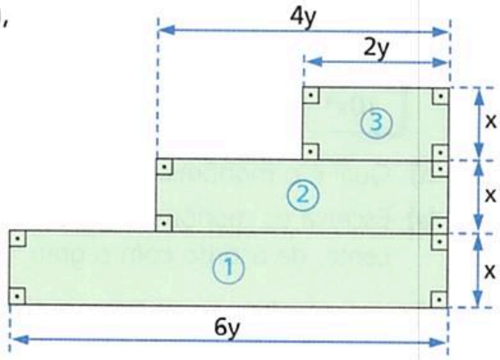
Então, a área do retângulo ABCD, que é dada pela soma das áreas dos retângulos **1** e **2**, pode ser representada por $5x + 3x$. Podemos, também, considerar o retângulo ABCD, cujos lados medem $(5 + 3) = 8$ e x, e a área será dada por $8x$.

Comparando os dois processos, temos: $5x + 3x = 8x$ ou, ainda, $5x + 3x = (5 + 3)x = 8x$.

Assim, **8x** é o monômio que representa a área do retângulo ABCD da figura.

2 Esta figura ilustra a superfície lateral de uma escada, com a indicação das medidas dos degraus.
Qual é a área dessa superfície?
Para resolver o problema, podemos considerar que:

- a área da figura **1** é dada por $x \cdot 6y$ ou $6xy$;
- a área da figura **2** é dada por $x \cdot 4y$ ou $4xy$;
- a área da figura **3** é dada por $x \cdot 2y$ ou $2xy$.



Então, a área da figura toda é dada por:
$6xy + 4xy + 2xy = (6 + 4 + 2)xy = 12xy$
Assim, a área dessa superfície é dada por **12xy**.
Generalizando, podemos dizer que:

> Em uma expressão algébrica, se todos os monômios ou termos são semelhantes, podemos tornar mais simples a expressão adicionando algebricamente os coeficientes e mantendo a parte literal. Essa operação também pode ser chamada de **redução de termos semelhantes**.

Observe os exemplos:

- $5ax - 7ax = -2ax$
  $(5 - 7)$
- $\frac{2}{3}ay^2 - \frac{7}{6}ay^2 = -\frac{1}{2}ay^2$
  $\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}\right)$
- $9mn - 15mn + 6mn = 0mn = 0$
  $(9 - 15 + 6)$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Entre os monômios a seguir, quais são os que apresentam grau 4?

$9x^3y$ $-1{,}6ac^4$ $0{,}5ax^2$ $-\frac{2}{3}m^2n^2$

2. Qual é o grau do monômio $-15a^3x^5y$?

3. Qual é o valor que se deve colocar no lugar do expoente *x* para que o monômio $7{,}5a^2b^xc^5$ seja do 10º grau?

4. Observe os monômios:

$7x^3$ $-2x^5$ $-2{,}5x$

$10x^4$ $8x^2$ 20

a) Qual é o monômio de maior grau?

b) Escreva os monômios na ordem decrescente, de acordo com o grau.

5. Os monômios $10a^nb^2$ e $20x^7y^m$ são do 8º grau. Qual é o valor numérico da expressão m + n?

6. Observe os monômios:

$5a^2x$ $-\frac{1}{2}ax$ $0{,}7ax^2$

$10ax$ $-0{,}5a^2x$ $20a^2x^2$

Entre os monômios apresentados, identifique aqueles que são semelhantes a:

a) $5ax^2$

b) $-1{,}2a^2x^2$

c) $\frac{3}{4}a^2x$

d) $-0{,}9ax$

7. Efetue as adições algébricas dos monômios a seguir.

a) $7x^2 + 2x^2 - 6x^2$

b) $20xy - 17xy - 5xy$

c) $2ab + 1{,}5ab - 2{,}3ab$

d) $-3{,}1x^2y + 4{,}5x^2y - 2{,}7x^2y$

e) $10bc - 12bc + 7bc - 3bc$

f) $1{,}1ab^3 - 3{,}5ab^3 - 0{,}9ab^3 + 2{,}8ab^3$

g) $\frac{1}{3}x^2y^2 - \frac{5}{6}x^2y^2 + \frac{4}{9}x^2y^2$

8. Qual é o monômio que devemos adicionar a $7x^3y^3$ para obter $-2x^3y^3$?

9. Escreva o monômio que adicionado a $-2x^2$ resulta em:

a) $5x^2$ **b)** $-4x^2$ **c)** x^2 **d)** 0

10. Fazendo a redução dos termos semelhantes, escreva as expressões algébricas a seguir na forma mais simples.

a) $7x - (-2x + x) + (-3x + 5x)$

b) $5y^2 - (-4y^2 + 7y^2) + (-y^2 + 9y^2 - 11y^2)$

c) $10ab - [3ab - (ab + 2ab - 5ab) - 8ab]$

d) $2xy + [-5xy + 2xy - (xy + 4xy - 2xy) - 8xy]$

11. Observe a expressão algébrica a seguir.

$20bc - [-7bc - (11bc - 40bc - 6bc) + 5bc]$

a) Escreva o monômio que pode representar essa expressão.

b) Determine o monômio que se deve adicionar ao monômio obtido no item a para se obter 5bc.

12. Obtenha a forma mais simples de escrita da expressão algébrica a seguir:

$3{,}4a^2x^2 - (-1{,}6a^2x^2 + 5{,}8a^2x^2 - 3{,}7a^2x^2) - (8{,}1a^2x^2 - 1{,}9a^2x^2)$

13. Considere a expressão algébrica $0{,}6ay - ay + 0{,}3ay + 0{,}5ay$.

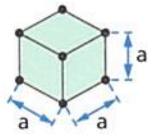
a) Escreva essa expressão na forma mais simples.

b) Qual o valor numérico dessa expressão quando a = 1,4 e y = −0,9?

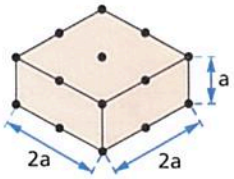
Multiplicação de monômios

PENSE E RESPONDA

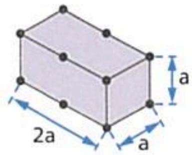
Veja o monômio que representa o volume de cada sólido:



volume: $a \cdot a \cdot a = a^3$



volume: $2a \cdot 2a \cdot a = 4a^3$

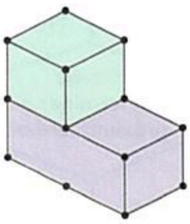


volume: $2a \cdot a \cdot a = 2a^3$

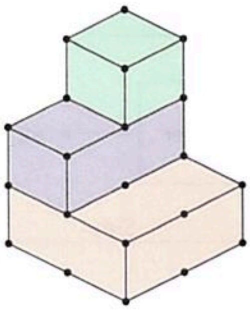
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

1. No caderno, represente com um monômio o volume dos seguintes sólidos:

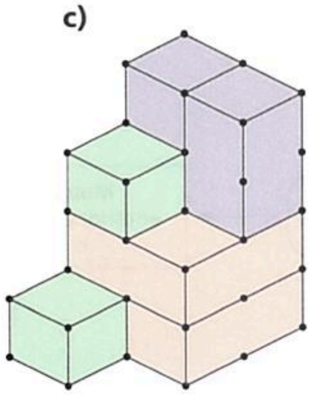
a)



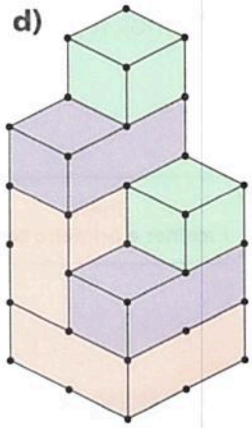
b)



c)



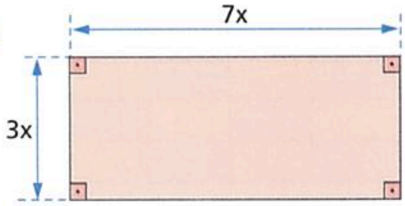
d)



Inicialmente, vamos recordar a seguinte propriedade: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

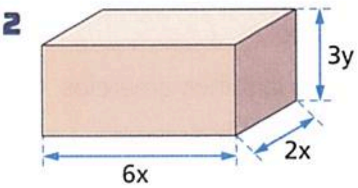
Agora, por meio do cálculo de área e de volume vamos verificar como podemos efetuar a multiplicação entre monômios.

1



Área: $(7x) \cdot (3x) = \underbrace{7 \cdot 3}_{21} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^2} = 21x^2 \longrightarrow$ **o monômio que representa a área desse retângulo é $21x^2$**

2



Volume: $(6x) \cdot (2x) \cdot (3y) = \underbrace{6 \cdot 2 \cdot 3}_{36} \cdot \underbrace{x \cdot x}_{x^2} \cdot y = 36x^2y$

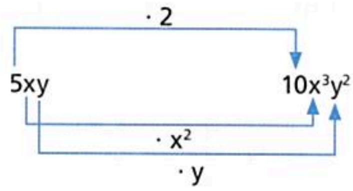
O monômio que representa o volume desse paralelepípedo retângulo é **$36x^2y$**

Para multiplicar dois ou mais monômios, multiplicamos os coeficientes entre si e multiplicamos as partes literais entre si.

Veja outro exemplo:

3 A sequência ($5xy$, $10x^3y^2$, $20x^5y^3$, ..., A) tem 6 termos. Descubra o padrão dessa sequência e escreva o 6º termo.

Vamos analisar o 1º e o 2º termos da sequência:



Observamos que o 2º termo é o produto do monômio $5xy$ (1º termo) pelo monômio $2x^2y$. Analisando o 2º e o 3º termos, temos que o 3º termo é o produto do monômio $10x^3y^2$ (2º termo) pelo monômio $2x^2y$. Assim, essa é uma sequência recursiva.

Vamos representar a geração de uma sequência desse tipo em um fluxograma:

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Efetue as seguintes multiplicações:

a) $a^4 \cdot a^6$

b) $(1{,}5x^2y) \cdot (-0{,}3xy^2)$

c) $(-2{,}6abc) \cdot (-1{,}2ab)$

d) $(-ac) \cdot (-a^4bc^2)$

e) $(-0{,}1y^3) \cdot (+0{,}2y^4)$

2. Calcule o resultado das multiplicações:

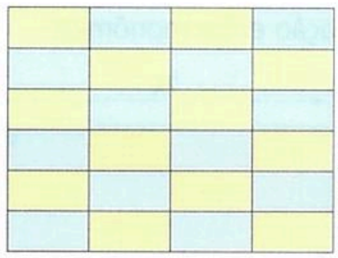
a) $(5a^4bc^3) \cdot (-b^2c) \cdot (+4a^2c)$

b) $(4{,}5y^2) \cdot (-0{,}3y) \cdot (-y^4)$

c) $(0{,}1xy) \cdot (100xy^2) \cdot (0{,}01x^3)$

d) $(-12mnp) \cdot \left(-\frac{2}{3}m^2n\right) \cdot (5np)$

3. Cada ladrilho retangular da figura a seguir tem *x* unidades de comprimento por 0,5x unidades de largura.



EDITORIA DE ARTE

Escreva o monômio que representa a área:

a) de cada ladrilho.

b) ocupada pelos ladrilhos amarelos.

c) ocupada pelos ladrilhos azuis.

d) total da figura.

4. A sequência (xy, x^3y^2, x^5y^3, ..., A) tem 6 termos. Descubra o padrão de montagem dessa sequência e escreva o monômio representado por *A*.

Divisão de monômios

Primeiro, vamos recordar a seguinte propriedade: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Agora, consideremos alguns exemplos para verificar como podemos realizar a divisão entre dois monômios.

1 Calcular $12y^5 : 4y^3$.

$$12y^5 : 4y^3 = \frac{12y^5}{4y^3} = \underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{\frac{12}{4}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ y^{5-3}}}{\frac{y^5}{y^3}} = 3y^2$$

2 Calcular $(20a^4b^2) : (-5ab)$.

$$(20a^4b^2) : (-5ab) = \frac{20a^4b^2}{-5ab} = \underset{\substack{\downarrow \\ -4}}{\frac{20}{-5}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ a^{4-1}}}{\frac{a^4}{a}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ b^{2-1}}}{\frac{b^2}{b}} = -4a^3b$$

3 Calcular $(-2a^4xy) : (-0{,}5a^2x)$.

$$(-2a^4xy) : (-0{,}5a^2x) = \underset{\substack{\downarrow \\ +4}}{\frac{-2}{-0{,}5}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ a^{4-2}}}{\frac{a^4}{a^2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{x}{x}} \cdot y = +4a^2y$$

> Para dividir um monômio por outro, dividimos os coeficientes entre si e as partes literais entre si.

Observe, agora, o resultado da seguinte divisão:

$$(15x^3y^2) : (5x^5y^5) = \frac{15x^3y^2}{5x^5y^5} = \underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{\frac{15}{5}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ x^{3-5}}}{\frac{x^3}{x^5}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ y^{2-5}}}{\frac{y^2}{y^5}} = \frac{3}{x^2y^3}$$

Nem sempre a divisão de um monômio por outro vai resultar em um monômio, como vimos antes. No entanto, ao longo dos nossos estudos veremos apenas a divisão de monômios que tenha como resultado um monômio.

Potenciação de monômios

Considere as situações a seguir.

1 Qual é o quadrado do monômio $-10a^3$?

$$(-10a^3)^2 = (-10a^3) \cdot (-10a^3) = \underbrace{(-10) \cdot (-10)}_{+100} \cdot \underbrace{a^3 \cdot a^3}_{a^{3+3}} = 100a^6$$

2 Qual é a 5ª potência do monômio $2x^2$?

$$(2x^2)^5 = (2x^2) \cdot (2x^2) \cdot (2x^2) \cdot (2x^2) \cdot (2x^2) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{32} \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2}_{x^{2+2+2+2+2}} = 32x^{10}$$

Para tornar mais simples esses cálculos, podemos usar as propriedades das potências:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Observe, nos exemplos, como o cálculo se torna mais simples:

- $(-10a^3)^2 = (-10)^2 \cdot (a^3)^2 = +100a^6$
- $(2x^2)^5 = (2)^5 \cdot (x^2)^5 = 32x^{10}$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Calcule o quociente dos monômios:

a) $(-32abc) : (+8ac)$

b) $(+40x^7y^2) : (-10x^4y^2)$

c) $(-100a^3) : (-25a^3)$

d) $(+55a^4bc^2) : (-11a^2bc)$

2. Efetue as seguintes divisões:

a) $\left(+\frac{2}{7}a^4x^3\right) : \left(+\frac{4}{7}ax^2\right)$

b) $\left(-\frac{1}{2}a^2n^7\right) : \left(+\frac{1}{8}an^6\right)$

3. Multiplique o monômio $-40ax$ pelo monômio $-0{,}5ax^2$. A seguir, divida o resultado pelo monômio $-10ax$. Qual é o monômio que você vai obter?

4. Núbia dividiu o monômio $+60x^6y^3$ pelo monômio $-12x^4y^2$. Ao resultado obtido, ela adicionou o monômio $+7x^2y$ e obteve *M*. Qual é o monômio *M*?

5. Se você dividir a expressão $-27a^4b^2 + 7a^4b^2$ pela expressão $-10ab + 6ab$, qual monômio obterá?

6. Edu efetuou a divisão $-10x^3y$ por $-2xy$ e obteve como resposta $5x^3$. A resposta de Edu está correta?

7. Se você dividir o cubo da soma $(-7y + 10y + 2y)$ pela soma $(-10y^2 - 15y^2)$, que monômio encontrará?

8. Efetue a divisão de $\left(-\frac{1}{2}a^2c^5\right)^4$ por $\left(-\frac{1}{4}a^4c^9\right)^2$.

Em seguida, adicione o monômio c^2 ao resultado. Que monômio você obteve?

POR TODA PARTE

A bicicleta

A bicicleta do barão alemão Karl von Drais, de 1817, é considerada a pioneira. Ele a batizou de "máquina corredora" (*laufmaschine* em alemão) e a imprensa a chamou de Draisine ou velocípede. Era feita de madeira e funcionava com o impulso dos pés. O objetivo de Von Drais era oferecer um meio de transporte mais barato e fácil de manter que os cavalos. [...]

Nos anos 1860, ficou popular o modelo vendido como velocípede, mas chamado *bone shaker* ("agita ossos"), por causa do que ocorria quando circulava por ruas de paralelepípedos. Os pedais ficavam na roda dianteira. [...]

Em 1870, começa a ser produzida a bicicleta de roda alta, sendo um dos modelos mais conhecidos (e caros) a Ariel, de James Starley. Apesar de agora soar estranho, essas bicicletas eram mais cômodas do que suas predecessoras, mas sua popularidade foi limitada porque "precisavam de um acrobata" para conduzi-las [...]

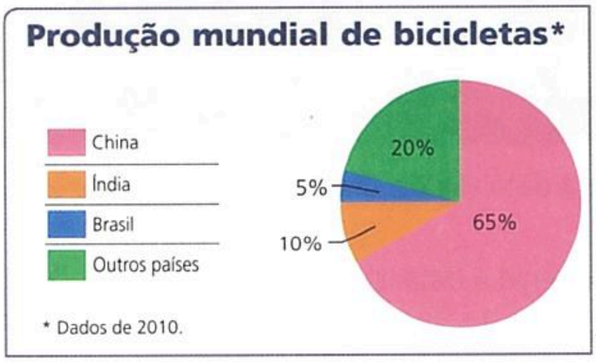
A partir da década de 1880, surgem as chamadas "bicicletas de segurança", exatamente porque diminuíam o risco de quedas em relação aos modelos anteriores. A primeira foi a Rover, obra do engenheiro J. K. Starkley. São bicicletas muito parecidas com as atuais, com duas rodas do mesmo tamanho e o quadro em forma de diamante. Em 1888, John Dunlop acrescentou as rodas com pneus, tornando os trajetos mais cômodos. [...]

Fonte: HANCOCK, J. R. Há 200 anos foi criada a primeira bicicleta: estes foram os primeiros modelos. **El País**. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/brasil/2017/04/19/deportes/1492597692_626497.html>. Acesso em: 11 set. 2018.

Atualmente cresce o número de usuários de bicicletas motivados, principalmente, pelo trânsito crescente nas grandes cidades e o aumento dos valores dos combustíveis fósseis.

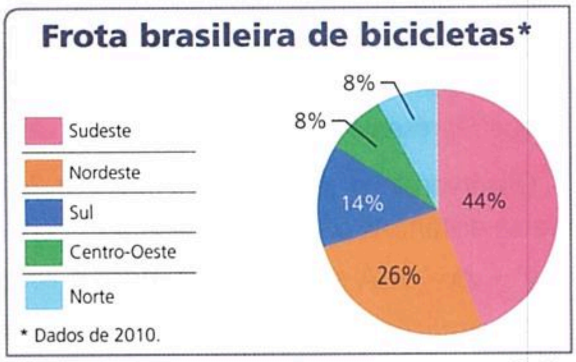
Ainda sobre a bicicleta, veja alguns dados sobre a produção mundial e a distribuição da frota nacional desse meio de transporte não poluidor.

Gráfico 1



Informações obtidas em: LOBO, J. **A bicicleta**. Disponível em: <www.ta.org.br/temp/2013/smtr_ta.pdf>. Acesso em: 3 fev. 2018.

Gráfico 2



Informações obtidas em: TRANSPORTE ATIVO. **Introdução ao mundo cicloviário**. Disponível em: <www.ta.org.br/educativos/imc/IMG/IMC_02.pdf.>. Acesso em: 3 fev. 2018.

Com base nos gráficos apresentados, responda no caderno:

a) Qual é o país que produz mais bicicletas no mundo?

b) Se representarmos por x a produção mundial de bicicletas, qual monômio corresponderá à produção:

- da China?
- da Índia?
- do Brasil?
- da China e do Brasil juntos?

c) Se representarmos por y o total da frota nacional (Gráfico 2), qual monômio representará a frota da região:

- Centro-Oeste?
- Nordeste?

d) Junte-se a um colega e elaborem outras questões sobre os dois gráficos apresentados. Troquem as perguntas com outras duplas (uma responde às questões elaboradas pela outra).

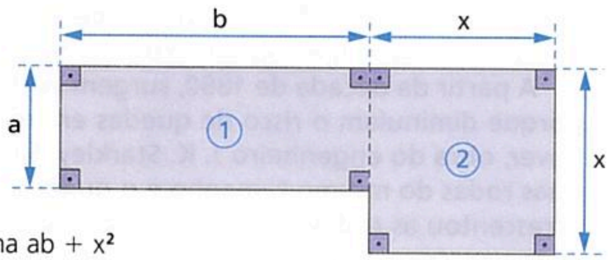
CAPÍTULO 5

POLINÔMIOS

Nos cálculos algébricos que fizemos até agora, consideramos apenas expressões algébricas chamadas **monômios**.

Acompanhe as seguintes situações:

1 Qual é a expressão algébrica que representa a área da figura a seguir?

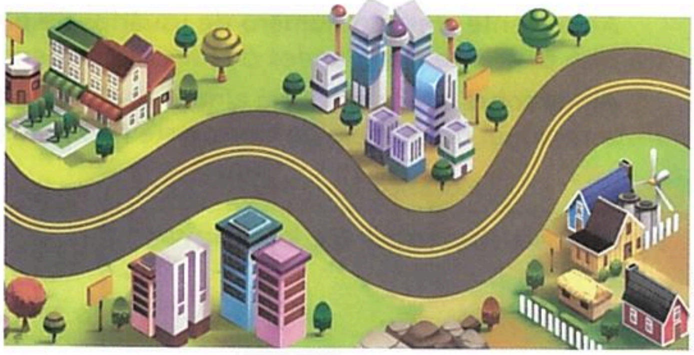


EDITORIA DE ARTE

A área da figura é dada pela soma das áreas das figuras **1** e **2**. Adicionamos, então, as áreas das duas figuras:

$ab + x^2$ ⟶ a área dessa figura é dada pela soma $ab + x^2$

2 O desenho a seguir representa o esboço de uma rodovia que passa pelas cidades *A*, *B*, *C* e *D*. A distância de *A* a *B* é igual à distância de *B* a *C*, e ambas podem ser representadas por *x* quilômetros. Sabendo que a distância de *A* a *D* é de *y* quilômetros, qual é a expressão algébrica que representa a distância de *C* a *D*?


DANIEL BOGNI

Observando o esboço, podemos concluir que a distância de C a D é dada pela diferença entre as distâncias de A a D e de A a C:

$y - 2x$ ⟶ A expressão algébrica $\mathbf{y - 2x}$ representa a distância entre as cidades *C* e *D*.

As situações que acabamos de apresentar nos mostram expressões algébricas que indicam, respectivamente, uma adição ou uma subtração de monômios, ou seja, indicam uma **adição algébrica de monômios**.

Qualquer adição algébrica de monômios denomina-se **polinômio**.

São exemplos de polinômios as seguintes expressões:

- $ab + x^2$
- $9z + 3y$
- $3x + 2y$
- $y - 2x$

Observações:

- Qualquer monômio é considerado um polinômio.
- Os monômios que formam um polinômio são denominados **termos** do polinômio.

Assim:

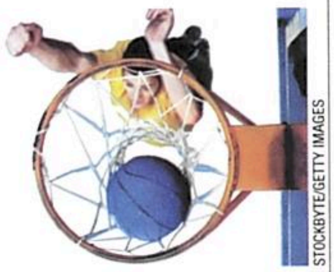
$2xy$ ⟶ é um polinômio de um só termo (monômio)

$100x + 10y + 2$ ⟶ é um polinômio de três termos: $100x$, $10y$ e 2

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em uma partida de basquete, uma jogadora acertou x cestas de 2 pontos e y cestas de 3 pontos. Escreva o polinômio que representa a quantidade de pontos que essa jogadora marcou nessa partida.



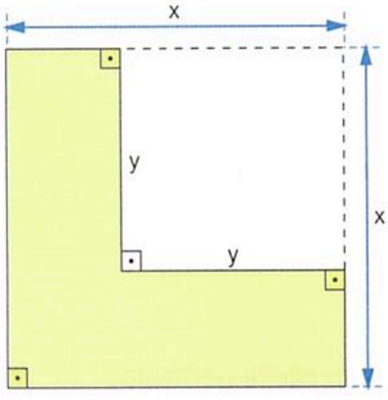
Cesta de basquete.

2. Na bicicleta reclinada da figura a seguir, temos que:

- a medida do raio da roda maior é 3r;
- a medida do raio da roda menor é 2r;
- a distância entre os pontos A e B é d.

- Escreva o polinômio que expressa a distância entre os centros C_1 e C_2 das rodas.

3. Escreva o polinômio que representa a área da região colorida de amarelo na figura a seguir.



4. Em um estacionamento, há x carros e y motos.

Escreva o polinômio que representa:

a) a quantidade de veículos estacionados.

b) a quantidade de rodas dos veículos.

5. Escreva o polinômio que representa um número formado por:

a) x dezenas e y unidades.

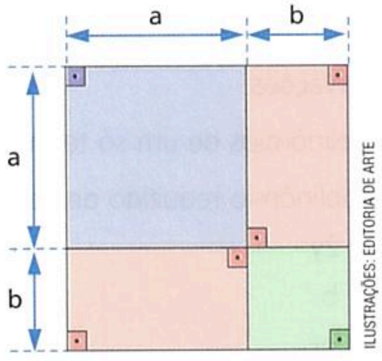
b) y dezenas e x unidades.

6. Escreva o polinômio que expressa a medida do segmento AB em cada figura:

a) A C B — 2a, b

b) A B C — b, 2a

7. Escreva o polinômio que representa a área da figura a seguir.



8. Uma empresa de aluguel de carros cobra uma taxa fixa de R$ 200,00 mais R$ 3,00 por quilômetro rodado. Qual polinômio vai expressar o valor a ser pago por uma pessoa que percorre x quilômetros com um carro dessa empresa?

Polinômio reduzido

Consideremos o polinômio $x^2 + xy + xy + x^2 + xy$.

Observe que esse polinômio possui termos ou monômios semelhantes.

Sabendo que esses termos semelhantes podem ser reduzidos, temos:

$x^2 + xy + xy + x^2 + xy =$

$= \underbrace{x^2 + x^2}_{} + \underbrace{xy + xy + xy}_{} =$ ⟶ pela propriedade comutativa

$= 2x^2 + 3xy$ ⟶ soma algébrica de monômios semelhantes

Dizemos que:

$2x^2 + 3xy$ é a **forma reduzida** do polinômio $x^2 + xy + xy + x^2 + xy$.

Veja estas outras situações:

1 Escrever na **forma reduzida** o polinômio $3a - 5ab + 8b - 2a + 3ab + b$.

$3a - 5ab + 8b - 2a + 3ab + b =$

$= \underbrace{3a - 2a}_{} \underbrace{- 5ab + 3ab}_{} + \underbrace{8b + b}_{} =$ ⟶ pela propriedade comutativa

$= a - 2ab + 9b$ ⟶ forma reduzida

2 Escrever na forma reduzida o polinômio $3x^2 - (-9x + 4) + (-7x + x^2 - 3)$.

$3x^2 - (-9x + 4) + (-7x + x^2 - 3) =$

$= 3x^2 + 9x - 4 - 7x + x^2 - 3 =$ ⟶ eliminando os parênteses

$= \underbrace{3x^2 + x^2}_{} + \underbrace{9x - 7x}_{} \underbrace{- 4 - 3}_{} =$ ⟶ pela propriedade comutativa

$= 4x^2 + 2x - 7$ ⟶ forma reduzida

Observações:

- Os polinômios de um só termo são chamados **monômios**.
- Um polinômio reduzido de dois termos também recebe o nome de **binômio**.

$3x + 2y$

$4a - b$

$xy + 5y^2$

- Um polinômio reduzido de três termos também é chamado **trinômio**.

$x^2 - 2xy + y^2$

$x^2 - 7x + 10$

$a + 2b - bc$

- Um polinômio reduzido com mais de três termos não tem nome particular.

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio reduzido não nulo é dado por seu termo de maior grau.

- O polinômio $\underbrace{a^3x}_{\text{4º grau}} - \underbrace{2a^4x^3}_{\text{7º grau}} + \underbrace{9ax^2}_{\text{3º grau}}$ é do 7º grau.

- O polinômio $\underbrace{x^3}_{\text{3º grau}} - \underbrace{6x^2y^2}_{\text{4º grau}} - \underbrace{2xy}_{\text{2º grau}}$ é do 4º grau.

O grau de um polinômio reduzido também pode ser estabelecido em relação a determinada variável. Nesse caso, o grau é dado pelo maior expoente com que a variável considerada aparece nos termos não nulos do polinômio. Assim:

O polinômio $x^3y + 3x^2y^4$ é do
→ 3º grau em relação à variável x
→ 4º grau em relação à variável y

Polinômios com uma só variável real

Considere os polinômios reduzidos:

- $x^2 + 7x - 10$
- $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

Polinômios como esses, muito importantes para estudos futuros, são denominados polinômios na variável x.

É costume, em Matemática, escrever polinômios com os termos em ordem, segundo as potências decrescentes da variável x. Veja os exemplos:

- $6x^2 - 5x - 1$
- $x^3 - x - 7$
- $5x^4 - 7x^3 - x^2 + 2x - 10$

Quando um polinômio está assim ordenado, e nele não aparecem uma ou mais potências da variável x, dizemos que o polinômio é incompleto. Nesse caso, os coeficientes dos termos que não aparecem no polinômio são zeros. Veja os exemplos:

- $x^3 - 7x - 1$ é incompleto e pode ser escrito na sua forma completa assim: $x^3 + 0x^2 - 7x - 1$ (forma geral).
- $x^4 - 9$ é incompleto e pode ser escrito na sua forma completa assim: $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 9$ (forma geral).

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Escreva os polinômios a seguir, na forma reduzida:

a) $2a^2x - 5a^2x^2 + 3a^2x - 7ax^2 +$
$+ a^2x^2 - 2a^2x + 5ax^2$

b) $6x - 5y + 3xy + 2xy - 5x +$
$+ 9y + 4x - xy - y$

2. Ao resolver uma questão, Fernando chegou ao seguinte polinômio:

$0{,}5a - (0{,}7b - 1{,}2ab) - 1{,}3b + (0{,}8a +$
$+ 2b - 0{,}6ab)$

a) Qual é a forma reduzida desse polinômio?

b) O polinômio é um trinômio ou binômio?

3. Qual é a forma reduzida de cada um dos polinômios?

a) $8ab - (a + 7b - 5) + (-5ab + 2 - b) +$
$+ (+4a + 2ab - 6b)$

b) $2x^2 - [2xy + x^2 - (3xy + y^2) + 2y^2] - xy$

4. Em relação à variável *x*, qual é o grau do polinômio a seguir?

$2bx^2 - 7ax^5 - 3cx + abx^3$

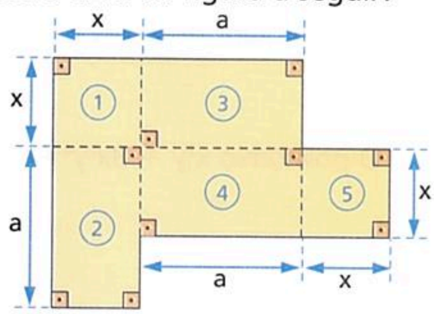
5. Considere o polinômio:

$10 - 6x^3 + x - 9x^4 + x^5 - 5x^2$

Escreva-o na forma ordenada e dê o grau do polinômio.

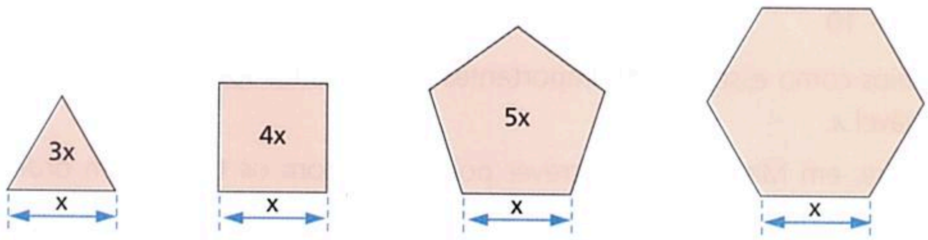
6. Escreva a forma geral do polinômio $c^5 - 1$.

7. Qual é o polinômio reduzido que expressa a área da figura a seguir?



DESAFIO

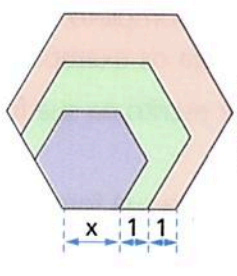
8. Todos estes polígonos são regulares e têm lados com a mesma medida *x*.



a) O que representa a expressão algébrica escrita dentro de cada figura dos três primeiros polígonos?

b) Qual expressão algébrica deve ser escrita dentro da figura do hexágono?

9. Escreva a expressão algébrica que representa o perímetro de cada um dos hexágonos regulares da figura a seguir.

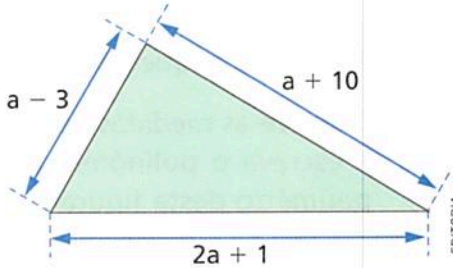


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Adição algébrica de polinômios

Considere as situações a seguir.

1 Qual é o polinômio que representa o perímetro da figura?



EDITORIA DE ARTE

Como o perímetro representa a soma das medidas dos lados, temos:

$(2a + 1) + (a + 10) + (a - 3) =$ ⟶ **adição de polinômios**

$= 2a + 1 + a + 10 + a - 3 =$

$= 2a + a + a + 1 + 10 - 3 =$

$= 4a + 8$ ⟶ **reduzindo os termos semelhantes**

O polinômio que representa o perímetro da figura é $\mathbf{4a + 8}$.

2 Um mesmo aparelho eletrodoméstico é vendido em duas lojas diferentes nas seguintes condições:

ILUSTRAÇÕES: DANIEL BOGNI

Como podemos observar, os preços são expressos de maneiras diferentes. Nessas condições, qual é o polinômio que expressa a diferença entre os preços das duas lojas?

Na loja 1, o preço é representado pelo polinômio $2x + 5y$.

Na loja 2, o preço é representado pelo polinômio $x + 3y$.

A diferença entre os preços das duas lojas pode ser assim escrita:

$(2x + 5y) - (x + 3y) =$ ⟶ subtração de polinômios

$= 2x + 5y - x - 3y = 2x - x + 5y - 3y = x + 2y$

A diferença entre os preços é expressa pelo polinômio $\mathbf{x + 2y}$.

3 Dados $P_1 = x^3 + 4x^2 - 3x + 7$, $P_2 = 3x^3 + 6x - 5$ e $P_3 = x^2 + 2x + 3$, determinar $P_1 + P_2 - P_3$.

$P_1 + P_2 - P_3 = (x^3 + 4x^2 - 3x + 7) + (3x^3 + 6x - 5) - (x^2 + 2x + 3) =$

$= x^3 + 4x^2 - 3x + 7 + 3x^3 + 6x - 5 - x^2 - 2x - 3 =$

$= x^3 + 3x^3 + 4x^2 - x^2 - 3x + 6x - 2x + 7 - 5 - 3 =$

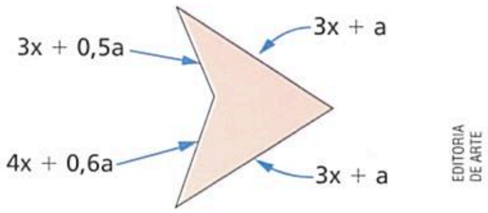
$= 4x^3 + 3x^2 + x - 1$

O polinômio resultante de $P_1 + P_2 - P_3$ é $\mathbf{4x^3 + 3x^2 + x - 1}$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Observe as medidas dos lados da figura e escreva o polinômio que expressa o perímetro desta figura.



2. Quando adicionamos os polinômios $17x^2 - 15x + 20$ e $-13x^2 + 20x - 31$, obtemos a soma: $ax^2 + bx + c$. Qual é o valor numérico da expressão $a + b + c$?

3. Em uma partida de basquete, Tiago fez x arremessos de lances livres e acertou 60% menos 3 desses lances livres. Seu companheiro de equipe, Fernando, também arremessou x lances livres, acertando 40% mais 1 desses lances.

Escreva o polinômio que representa:

a) a quantidade de lances livres que Tiago acertou.

b) a quantidade de lances livres que Fernando acertou.

c) a quantidade de lances livres que os dois acertaram juntos.

d) a diferença entre o número de lances livres que Tiago acertou e o número de lances livres que Fernando acertou.

4. Você sabia que um polinômio tem oposto? Veja as seguintes afirmações.

- $-x$ é o oposto de $+x$.
- $2xy^2$ é o oposto de $-2xy^2$.
- $(2a + b)$ é o oposto de $-(2a + b)$.
- $-(x^2 - 3x + 1)$ é o oposto de $(x^2 - 3x + 1)$.

Dado o polinômio $A = 9a^2x^2 - 7ax - 11a + 6x$, responda:

a) Qual é o oposto do polinômio A?

b) Qual é o resultado da soma de A com o seu oposto?

c) Subtraindo de A o seu oposto, que polinômio obtemos?

5. Considere os polinômios $P_1 = a + b + c$, $P_2 = a - b + c$ e $P_3 = a + b - c$. Determine:

a) $P_1 + P_2 + P_3$

b) $P_1 + P_2 - P_3$

c) $P_1 - P_2 + P_3$

d) $P_1 - P_2 - P_3$

6. Um polinômio A adicionado ao polinômio $9x + 3y - 10xy - x^2y^2$ tem como resultado o polinômio $3x^2y^2 - 7x + 5y - xy$. Qual é o polinômio A?

7. Dados os polinômios $P = x^2 + y^2 - 5xy$ e $Q = 2x^2 + 8xy - 3y^2$, determine:

a) $P + Q$ **b)** $P - Q$

8. Determine os polinômios que representam:

a) $(15a - 7b + 4c) + (-8b + 3c - 9a)$

b) $(2y^2 - 3ay + 4a^2) - (ay - 5y^2 - a^2)$

c) $(3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - 6b^3) + (7a^2b - 5a^3 + b^3 - 6ab^2)$

d) $(x^2 - 3xy + y^2 - x^2y^2) + (+x^2 + 5x^2y^2 + y^2 + 3xy)$

e) $(a^2 - 1,6b^2 + 0,9c^2) - (0,8a^2 - b^2 + 1,7c^2)$

f) $(7a^2 - 3ab + 2b^2) - (3a^2 - 5ab - c^2 - 3b^2) + (-6ab + c^2)$

g) $(0,9x^3 - 1,8x + 1) + (-1,3x^2 + 2,6x - 2) - (0,7x^3 - 1,6x^2 + 0,4x + 5)$

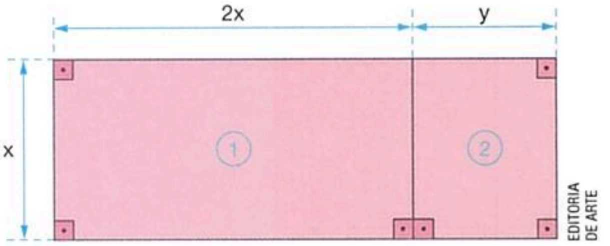
h) $(ab + a^2b^2 - 7a - b) - (4a^2b^2 - 7a + 3b - ab) + (4b + 5a^2b^2)$

i) $(7y^3 - 2y^2 + 3y - 5) + (y^3 - 4y + 9) - (5y^3 + 4y^2 - y + 1)$

Multiplicação de polinômios

Multiplicando um monômio por um polinômio

De que maneira podemos representar a área desta figura?



Uma das maneiras de representar a área é:

$$\underbrace{x}_{\text{medida da largura}} \cdot \underbrace{(2x + y)}_{\text{medida do comprimento}}$$

A expressão $\mathbf{x \cdot (2x + y)}$ representa, algebricamente, a multiplicação do monômio x pelo polinômio $2x + y$.

Outra maneira de representar a área da figura é adicionar as áreas das figuras que a compõem, ou seja:

$$x \cdot (2x + y) = \underbrace{x \cdot 2x}_{\text{área da figura } ①} + \underbrace{x \cdot y}_{\text{área da figura } ②} = 2x^2 + xy$$

Observe que usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica:

$$x \cdot (2x + y) = 2x^2 + xy$$

Podemos dizer que:

> A multiplicação de um monômio por um polinômio é feita multiplicando-se o monômio por cada termo do polinômio.

Acompanhe as situações a seguir.

1 Qual é o polinômio que representa o produto $5a^2m \cdot (3a - 2am)$?

$$\boxed{5a^2m} \cdot (3a - 2am) =$$

$$= 5a^2m \cdot 3a - 5a^2m \cdot 2am =$$

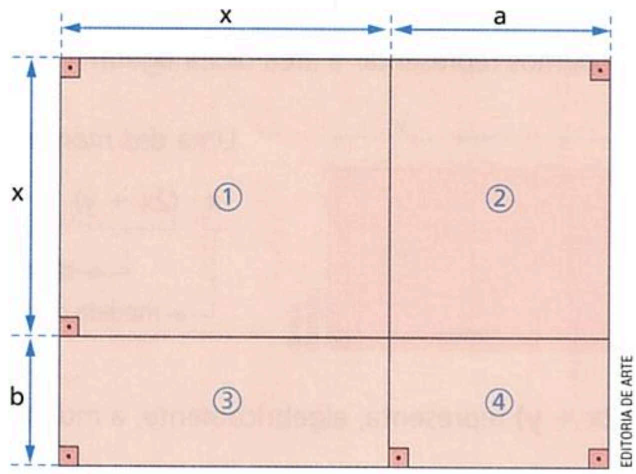
$$= 15a^3m - 10a^3m^2$$

Nesse caso:

- Multiplicamos $5a^2m$ por $3a$: $5a^2m \cdot 3a = 5 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot m = 15a^3m$.
- Multiplicamos $5a^2m$ por $-2am$: $5a^2m \cdot (-2am) = 5 \cdot (-2) \cdot a^2 \cdot a \cdot m \cdot m = -10a^3m^2$.
- Somando algebricamente ambos os resultados obtivemos o polinômio $15a^3m - 10a^3m^2$.

Multiplicando um polinômio por outro polinômio

De que maneira podemos representar a área da figura seguinte?



Como a figura representada é um retângulo de lados (x + a) e (x + b), uma das maneiras de representar a área é:

$$\underbrace{(x + a)}_{\text{medida do comprimento}} \cdot \underbrace{(x + b)}_{\text{medida da largura}}$$

Note que, algebricamente, a expressão (x + a) · (x + b) representa a **multiplicação de um polinômio** por outro polinômio.

Outra maneira de representar a área da figura é adicionar as áreas das quatro figuras que a compõem, ou seja:

$$\underbrace{x \cdot x}_{\text{área ①}} + \underbrace{x \cdot a}_{\text{área ②}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{área ③}} + \underbrace{b \cdot a}_{\text{área ④}} = x^2 + ax + bx + ab$$

Então:

$$\underbrace{(x + a)}_{\text{polinômio}} \cdot \underbrace{(x + b)}_{\text{polinômio}} = x \cdot x + x \cdot b + a \cdot x + a \cdot b = x^2 + ax + bx + ab$$

Note que usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica:

- Multiplicamos *x* por *x*, o que resultou em x^2.
- Multiplicamos *a* por *x*, o que resultou em ax.
- Multiplicamos *x* por *b*, o que resultou em bx.
- Multiplicamos *a* por *b*, o que resultou em ab.

Podemos dizer que:

> A multiplicação de um polinômio por outro polinômio é feita multiplicando-se cada termo (ou monômio) de um deles por cada termo (ou monômio) do outro e reduzindo-se os termos semelhantes (se houver).

Acompanhe as questões a seguir.

1 Qual é o polinômio que representa o produto $(3a + 2b)(2a - 5b)$?

$$(3a + 2b) \cdot (2a - 5b) =$$
$$= 3a \cdot 2a + 3a \cdot (-5)b + 2b \cdot 2a + 2b \cdot (-5)b =$$
$$= 6a^2 - 15ab + 4ab - 10b^2 =$$
$$= 6a^2 - 11ab - 10b^2$$

Também podemos fazer assim:

$$\begin{array}{rrl} & 3a + 2b & \\ \times & 2a - 5b & \\ \hline & 6a^2 + 4ab & \rightarrow 2a(3a + 2b) \\ & -15ab - 10b^2 & \rightarrow -5b(3a + 2b) \\ \hline & 6a^2 - 11ab - 10b^2 & \end{array}$$

O polinômio procurado é $6a^2 - 11ab - 10b^2$.

2 Vamos calcular o produto de $x + 2$ por $x^2 - x - 2$.

$$(x + 2) \cdot (x^2 - x - 2) =$$
$$= x \cdot x^2 + x \cdot (-x) + x \cdot (-2) +$$
$$+ 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (-x) + 2 \cdot (-2) =$$
$$= x^3 - x^2 - 2x + 2x^2 - 2x - 4 =$$
$$= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 2x - 4 =$$
$$= x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Também podemos fazer assim:

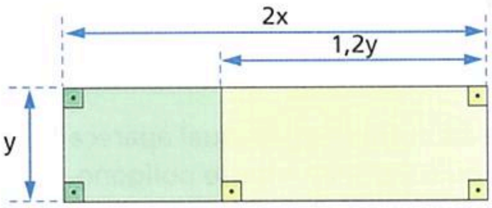
$$\begin{array}{rrl} & x^2 - x - 2 & \\ \times & x + 2 & \\ \hline & x^3 - x^2 - 2x & \rightarrow x(x^2 - x - 2) \\ & +2x^2 - 2x - 4 & \rightarrow 2(x^2 - x - 2) \\ \hline & x^3 + x^2 - 4x - 4 & \end{array}$$

O produto é expresso por $x^3 + x^2 - 4x - 4$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Escreva o polinômio que representa a área da região verde da figura.



2. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são $3x$, $2y$ e $(2x - y)$. Se o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto de suas três dimensões, escreva o polinômio que represente o volume.

3. Escreva os polinômios na forma reduzida:

a) $2bx(1 - a) + 2x(a - b - c) - 2x(a - c)$

b) $3a(2a - b) - [a(6a - 3b) - b(3a - 5b)]$

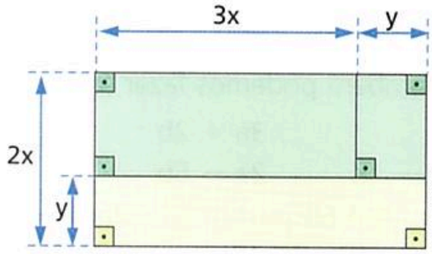
4. Na loja Só Computadores, havia a seguinte oferta:

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Sabendo que foram vendidos *x* desses computadores ontem, escreva o polinômio que representa a quantia que a loja faturou com as vendas desse dia.

5. Escreva o polinômio $P = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$ na sua forma reduzida.

6. Observe esta figura:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Escreva o polinômio que representa a área da região verde.

b) Calcule o valor numérico do polinômio obtido para $x = 20$ e $y = 10$.

7. Multiplicando o polinômio $1{,}2x + 0{,}5y$ por $1{,}5x - 0{,}5y$, obtém-se um polinômio *P*. Escreva *P*.

8. Quando você multiplica $5x^2 - x - 1$ por $2x^2 + x - 5$, obtém como produto o polinômio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Qual é o valor numérico da expressão $a + b + c + d + e$?

9. Escreva o polinômio que representa cada produto.

a) $(3a - 1{,}5x)(0{,}7a - 5x)$

b) $(a^2 - 1)(2a^2 - 2a + 1)$

c) $(a + x)(a^2 - ax + x^2)$

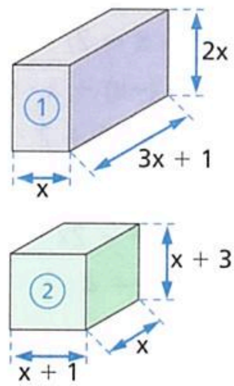
10. Usando a multiplicação, escreva o polinômio que representa cada uma das potências a seguir.

a) $(x - 5y)^2$

b) $(0{,}6 + 2ax)^2$

c) $(b + y)^3$

11. Você sabe que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto das medidas das três dimensões desse sólido. Determine o polinômio que representa a soma dos volumes das figuras a seguir.



12. Escreva na forma mais simples os polinômios:

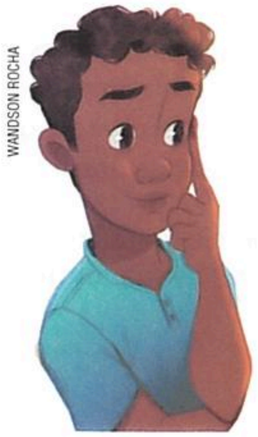
a) $(a^3 - b^3)(a + b) - (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

b) $(a - 2b)[a(b - 3) + b(1 - a)]$

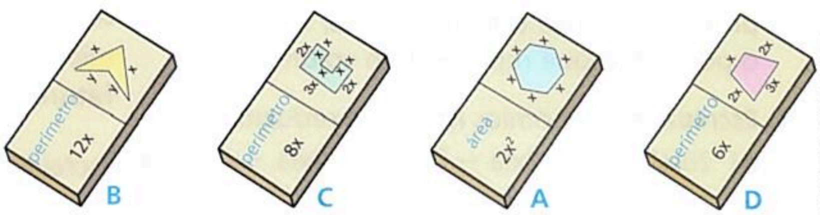
DESAFIO

13. Você sabe jogar dominó?

No dominó que aparece aqui, também devemos encostar as peças em uma das extremidades abertas. A parte de uma peça em que aparece um polígono deve ficar em contato com a parte de outra peça, na qual apareça uma expressão algébrica que represente a área ou o perímetro desse polígono. Vendo este jogo já começado, como você o continuaria? Indique em qual sequência você colocaria as seguintes peças.



WANDSON ROCHA



MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Divisão de polinômios por um monômio

Considere as seguintes situações:

1 Dividir $9x^5 + 21x^4 - 12x^3$ por $3x^3$.

$$(9x^5 + 21x^4 - 12x^3) : (3x^3) =$$

$$= (9x^5 + 21x^4 - 12x^3) \cdot \frac{1}{3x^3} = \frac{9x^5}{3x^3} + \frac{21x^4}{3x^3} - \frac{12x^3}{3x^3} =$$

$$= \underbrace{(9x^5 : 3x^3)}_{3x^2} + \underbrace{(21x^4 : 3x^3)}_{7x} - \underbrace{(12x^3 : 3x^3)}_{4} =$$

$$= 3x^2 + 7x - 4 = 3x^2 + 7x - 4$$

2 Calcular $(40x^3y^2 - 5x^2y^3) : (-10xy)$.

$$(40x^3y^2 - 5x^2y^3) : (-10xy) =$$

$$= (40x^3y^2 - 5x^2y^3) \cdot \left(-\frac{1}{10xy}\right) = -\frac{40x^3y^2}{10xy} + \frac{5x^2y^3}{10xy} =$$

$$= -\underbrace{(40x^3y^2 : 10xy)}_{-4x^2y} + \underbrace{(5x^2y^3 : 10xy)}_{\frac{1}{2}xy^2} =$$

$$= -4x^2y + \frac{1}{2}xy^2 = -4x^2y + 0{,}5\ xy^2$$

Efetuamos a divisão de um polinômio por um monômio não nulo fazendo a divisão de cada termo do polinômio pelo monômio.

Veja outra situação:

3 Calcular $(12a^4b^2 - 28a^2b^2 + 4ab^3) : (4ab)$.

$$(12a^4b^2 - 28a^2b^2 + 4ab^3) : (4ab) =$$

$$= (12a^4b^2) : (4ab) - (28a^2b^2) : (4ab) + (4ab^3) : (4ab) =$$

$$= 3a^3b - 7ab + b^2$$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Efetue cada uma das seguintes divisões:

a) $(2{,}5a^4b - 4{,}5a^5b^3) : (-5ab)$

b) $\left(\frac{1}{6}x^4y^4 - \frac{5}{8}x^3y^3\right) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^3\right)$

c) $(a^2b^2c^2 + a^3bc - abc^2) : (abc)$

2. Ao multiplicar um polinômio *P* por um monômio, você vai encontrar $18a^2x^5 + 42a^3x^4 - 72a^4x^3$. Se o monômio é $6a^2x^3$, qual é esse polinômio?

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Interpretando dados

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é um indicador geral do desenvolvimento humano apoiado sob três aspectos: saúde, educação e renda. Ele surgiu com o intuito de oferecer um contraponto ao Produto Interno Bruto (PIB) *per capita*, que é uma medida econômica e que não reflete a qualidade de vida de uma população. O pilar da saúde utiliza a **esperança de vida ao nascer** como parâmetro de cálculo.

A tabela a seguir mostra a situação, em 2016, de 13 países em relação a esse indicador: os países membros do **Grupo dos 8** (G-8), composto das sete nações mais industrializadas do mundo (Estados Unidos, Japão, Alemanha, Reino Unido, França, Itália e Canadá) e pela Federação Russa, além de cinco países em desenvolvimento (China, Índia, México, Brasil e África do Sul), que participam como convidados das reuniões anuais do G-8.

Esperança de vida ao nascer – 2016

País	Esperança de vida ao nascer (em anos)
Japão	83,98
Canadá	82,20
Itália	83,40
França	82,70
Alemanha	81,00
Reino Unido	81,20
Estados Unidos	78,69
México	77,12
China	76,25
Brasil	75,51
Rússia	71,59
Índia	68,56
África do Sul	62,77

Fonte: COUNTRYECONOMY.COM. Disponível em: <https://pt.countryeconomy.com/demografia/esperanca-vida>. Acesso em: 7 set. 2018.

Responda às questões no caderno.

1. Qual era a média, aproximada, de esperança de vida ao nascer, nos países indicados, em 2016?

2. Qual é a variação da esperança de vida ao nascer entre o país que ocupa a primeira e o que ocupa a última colocação no infográfico? Identifique quais são esses países.

3. Comparando o Brasil com o Japão, quanto os brasileiros viviam menos que os japoneses?

4. Em 2005, a esperança de vida ao nascer no Brasil era de 71,9 anos. Já em 2013 ela subiu para 73,9. Quantos anos aumentou a esperança de vida ao nascer no Brasil em 2013 em relação a 2005?

No entanto, o IDH não contempla todos os índices de desenvolvimento de um país. Por exemplo, ele não contempla a **taxa de natalidade** do país. Essa taxa é o indicativo do número de nascidos vivos a cada 1 000 habitantes. Veja a tabela com esse índice para os mesmos países que vimos antes.

SAIBA QUE

O símbolo ‰ deve ser lido "por mil".

Taxa de natalidade – 2016

País	Taxa de natalidade (‰)
Japão	7,80
Canadá	10,80
Itália	7,80
França	11,70
Alemanha	9,60
Reino Unido	11,80
Estados Unidos	12,40
México	18,17
China	12,00
Brasil	14,16
Rússia	12,90
Índia	19,01
África do Sul	20,98

Fontes: COUNTRYECONOMY.COM. Disponível em: <https://pt.countryeconomy.com/demografia/natalidade?anio=2016> e PORDATA. Disponível em: <https://www.pordata.pt/Europa/Taxa+bruta+de+natalidade-1605>. Acessos em: 11 set. 2018.

Responda às questões no caderno.

5. O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é o órgão, no Brasil, responsável pela coleta, pelo tratamento e armazenamento dos dados relativos à população brasileira. Debata com seus colegas de classe a importância desse trabalho. A que ele se destina?

6. Os dados mostrados estão organizados em forma de tabela. Organize-os em gráficos e, em seguida, faça um texto explicando a escolha pelo tipo de gráfico utilizado. Destaque pontos como adequação aos dados, facilidade de leitura, de comparação etc.

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. Determine o valor numérico da expressão $3x^2 - 5x - 1$ quando:

a) $x = 0$

b) $x = -1$

c) $x = 1{,}2$

2. Considere a seguinte expressão algébrica:

$(-a - b)(a + b) + ab^3 - \frac{a^2}{b}$

Sendo $a = b = -2$, o valor numérico dessa expressão é:

a) 2 **c)** 1 **e)** 4

b) -2 **d)** -1

3. Considere a expressão algébrica $\frac{xy}{x - y}$.

O valor numérico dessa expressão quando $x = 0{,}4$ e $y = 0{,}5$ é:

a) -4 **c)** 1 **e)** -2

b) -1 **d)** 2

4. (Saresp-SP) Uma locadora cobra R$ 20,00 por dia pelo aluguel de uma bicicleta. Além disso, ela também cobra, apenas no primeiro dia, uma taxa de R$ 30,00. Chamando de *x* o número de dias que a bicicleta permanece alugada e de *y* o valor total do aluguel, é correto afirmar que:

a) $y = 600x$

b) $y = 50x$

c) $y = 30x + 20$

d) $y = 20x + 30$

5. (Saresp-SP) O valor numérico da expressão $x^3 + 2x^2$, para *x* igual a -2, é:

a) 2 **c)** 0

b) 1 **d)** 16

6. O presidente de uma empresa resolveu anunciar um de seus produtos na televisão. Constatou-se que houve um aumento nas vendas a partir de então. O diretor de marketing dessa empresa verificou que a quantidade vendida desse produto no mês podia ser representada pela expressão algébrica $\frac{3}{2}x + 40$, em que *x* representa o número de anúncios na televisão durante o mês. Se, em determinado mês, foram feitas 50 aparições na televisão, então foram vendidas nesse mês:

a) 125 unidades.

b) 120 unidades.

c) 115 unidades.

d) 110 unidades.

e) 105 unidades.

7. (Fuvest-SP) Se $A = \frac{x - y}{xy}$, $x = \frac{2}{5}$ e $y = \frac{1}{2}$, então *A* é igual a:

a) $-0{,}1$ **c)** $-0{,}3$ **e)** $-0{,}5$

b) $0{,}2$ **d)** $0{,}4$

8. Um grupo de estudantes de meteorologia pesquisou as variações de temperatura em certa cidade. Após longa coleta de dados, o grupo concluiu que a temperatura podia ser calculada por meio da fórmula matemática $T = -\frac{1}{6}t^2 + 4t + 10$, na qual *T* representa a temperatura, e *t* representa a hora do dia. O grupo calculou a temperatura na cidade às 12 horas e às 18 horas. Nesse período, a temperatura diminuiu quantos graus Celsius?

a) 9 °C **c)** 7 °C **e)** 5 °C

b) 8 °C **d)** 6 °C

9. (FCMSC-SP) Para $x = 0{,}1$, o valor da expressão $\frac{x^3 - 1}{1 - x}$ é:

a) $-11{,}11$ **d)** $1{,}11$

b) $-1{,}11$ **e)** $11{,}1$

c) $-0{,}111$

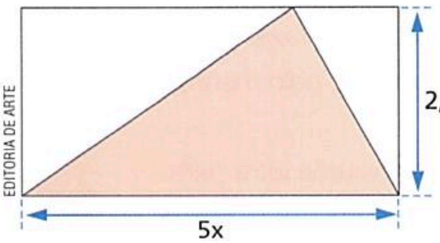
10. Considerando uma bola com 10 cm de diâmetro e se o volume da esfera é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$ (em que *r* é o raio da esfera), o volume correspondente a uma bola é:

a) 4186,66 cm^3
b) 500 cm^3
c) 5233,33 cm^3
d) 418,64 cm^3
e) 523,33 cm^3

11. Sabe-se que $a^x = 10$. Então, qual é o valor de *A*, se $A = 4 \cdot a^x - 2a^{2x}$?

a) −200
b) −160
c) −120
d) −60
e) 240

12. A área do triângulo colorido dentro do retângulo a seguir pode ser representada pelo monômio:



a) 12,5x
b) 6,25x
c) $12{,}5x^2$
d) $6{,}25x^2$
e) 6,25

13. São dados dois números reais, dos quais o maior vale o triplo do menor. Se o menor dos números é expresso por 3,5x, o monômio que representa o produto desses dois números é:

a) $36x^2$
b) $36{,}75x^2$
c) 36x
d) 36,75x
e) $24{,}5x^2$

14. (Saresp-SP) Calculando-se os valores da expressão $n^2 + 3n + 1$ para *n* valendo 1, 2, 3 etc., obtém-se uma das sequências a seguir. Qual delas?

a) 5, 11, 17, 23, ...
b) 5, 11, 19, 29, ...
c) 5, 7, 9, 11, ...
d) 1, 5, 9, 13, ...

15. A sequência $\frac{xy}{4}, \frac{x^2y}{2}, x^3y, ...$ tem 7 termos. Qual é o último termo dessa sequência?

a) $16x^7y$
b) $8x^7y$
c) $16x^6y$
d) $16x^5y$
e) $32x^7y$

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, abordamos a introdução ao cálculo algébrico, as expressões algébricas ou literais e o valor numérico das expressões algébricas. Também estudamos os conceitos de monômios, polinômios e suas operações.

Na seção *Educação financeira*, foi estabelecida uma discussão sobre juros e na seção *Tratamento da informação* continuamos o trabalho de análise de dados, determinando qual o melhor tipo de gráfico a ser utilizado.

Na abertura desta Unidade, buscou-se fazer uma reflexão sobre a simbologia utilizada na escrita matemática, de modo que você pudesse entender que as construções utilizadas nesta Unidade são uma maneira simplificada de se escrever uma expressão matemática.

Vamos agora refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda às questões seguintes no caderno:

- Qual é a importância das expressões algébricas no cotidiano e na Matemática?
- De acordo com a abertura da Unidade, além de François Viète, quais outros matemáticos e filósofos tiveram influência na utilização de letras e símbolos na Matemática? Pesquise.
- Faça um resumo de todas as operações trabalhadas com monômios e polinômios, garantindo um exemplo para cada operação.
- Qual é a importância do estudo de monômios e polinômios?

5 EQUAÇÕES

MANZI

Ah, seu inteiro, seu sétimo fazem dezenove!

Esse problema aparece em um papiro egípcio escrito há 3 000 anos. Desde essa época, o ser humano já se aventurava no campo das equações.

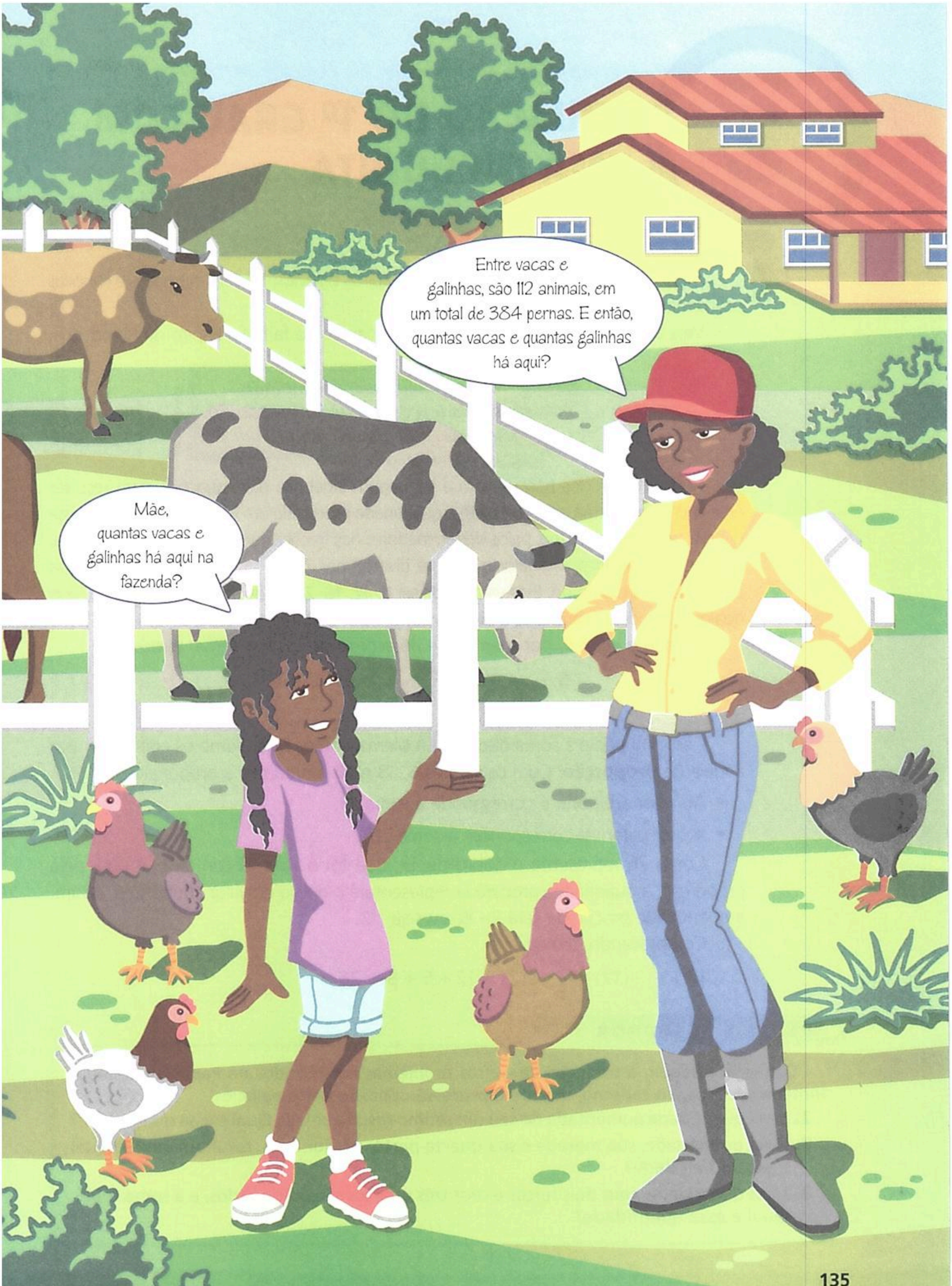
Muitas vezes, as equações são usadas para fazer previsões e projetos e toda equação possui sempre, pelo menos, um valor que não conhecemos.

Em Matemática, é comum utilizarmos uma letra para identificar esse valor.

Agora, pense e responda no caderno:

- A qual trecho do diálogo você associaria a equação $v + g = 112$?
- E a qual trecho você associaria a equação $4v + 2g = 384$?
- Observando a equação anterior, o que você acha que representa o termo $4v$? E o termo $2g$?

PRIMOPIANO/SHUTTERSTOCK.COM


Mãe, quantas vacas e galinhas há aqui na fazenda?
Entre vacas e galinhas, são 112 animais, em um total de 384 pernas. E então, quantas vacas e quantas galinhas há aqui?

CAPÍTULO 1

EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Alguns documentos antigos, como os papiros egípcios, traziam inúmeros e curiosos problemas matemáticos.

Veja a tradução de um problema que aparece no famoso Papiro de Rhind.

Uma quantidade, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: qual é essa quantidade?

EDITORIA DE ARTE

Como os egípcios não usavam a linguagem algébrica das equações, para resolver esse tipo de problema, eles atribuíam à quantidade procurada um valor arbitrário, que fosse divisível, ao mesmo tempo, pelos denominadores das frações que apareciam no problema; nesse caso específico, um valor que fosse divisível por 2 (sua metade) e por 3 (seus dois terços) ao mesmo tempo. Esse valor pode ser 6, 12, 18, 24 ou qualquer múltiplo de 6, pois qualquer um desses números é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

Usando o valor 6, por exemplo, e de acordo com o problema, temos:

$$6 + \frac{1}{2} \cdot (6) + \frac{2}{3} \cdot (6) = 6 + 3 + 4 = 13$$

Como 13 não é a soma dada no problema, vamos fazer como os egípcios e usar a ideia de **proporção**. Com os valores 6, 13 e 26 montamos a proporção:

- Ao valor arbitrário 6 corresponde a soma 13.
- A qual valor vai corresponder à soma 26?

Como 26 representa o dobro de 13, que foi o valor encontrado, então, pela proporção, a quantidade procurada representará o dobro do valor arbitrário 6. Assim, a quantidade procurada será $2 \cdot 6$, ou seja, 12.

Comprovando, temos:

$$12 + \frac{1}{2} \cdot (12) + \frac{2}{3} \cdot (12) = 12 + 6 + 8 = 26$$

PENSE E RESPONDA

Conheça, a seguir, a tradução de outros problemas encontrados no Papiro de Rhind e tente resolvê-los, no caderno, usando o processo utilizado pelos egípcios.

1. Uma quantidade aumentada do seu um sétimo resulta em 40. Qual é essa quantidade?
2. Uma quantidade, sua metade e sua quarta parte, adicionadas, resultam em 56. Qual é essa quantidade?
3. Uma quantidade, seus dois terços e seus três quartos são adicionados, e a soma é 145. Qual é essa quantidade?

A grande importância da Álgebra é permitir a resolução de problemas que envolvem números desconhecidos e possibilitar fazer generalizações.

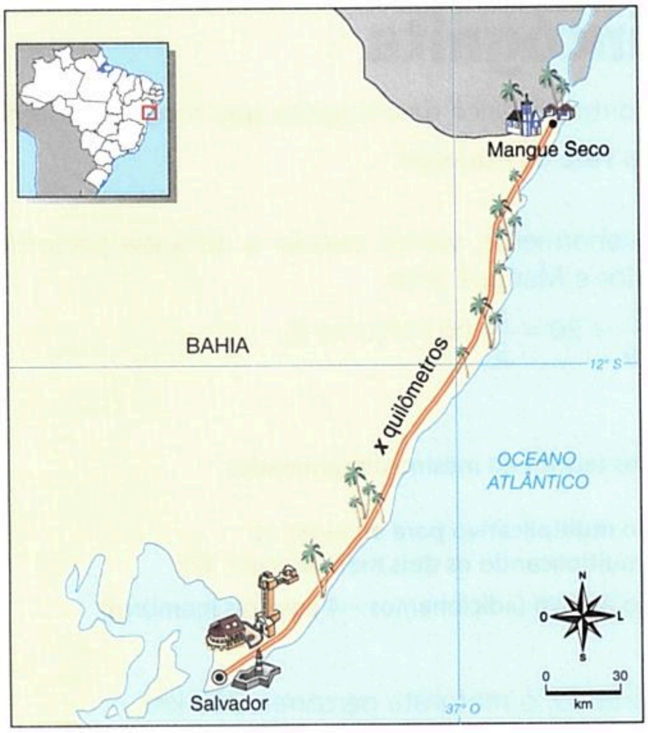
Ao representar o número desconhecido (ou incógnita) usando uma letra do alfabeto, podemos estabelecer uma relação entre os números conhecidos e os desconhecidos por meio de uma sentença matemática, por exemplo, uma equação.

Usando técnicas matemáticas, podemos manipular essa equação até torná-la a mais simples possível, permitindo, assim, que se estabeleça o valor do número desconhecido.

Considere a seguinte situação:

Desenvolvendo certa velocidade média, um motorista percorreu, de carro, a distância entre as cidades baianas de Salvador e Mangue Seco em 4 horas. Se o motorista tivesse aumentado em 20 km/h a velocidade média, teria percorrido a mesma distância em uma hora a menos, ou seja, em 3 horas. Como calcular a distância percorrida?

Distância entre Salvador e Mangue Seco



Fonte: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: 2012.

Vamos representar por x a distância percorrida.

Considerando que: velocidade média $= \dfrac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$, podemos montar a equação a seguir para o problema.

$$\frac{x}{4} + 20 = \frac{x}{3}$$

velocidade média que supostamente o veículo teria desenvolvido no percurso

aumento da velocidade média

velocidade média com a qual o carro fez o percurso

Centro histórico, Salvador, Bahia, 2018.

Nessa equação, observamos que:

- O primeiro membro, $\frac{x}{4} + 20$, é uma expressão algébrica inteira.
- O segundo membro, $\frac{x}{3}$, também é uma expressão algébrica inteira.

Equações desse tipo são chamadas **equações inteiras do 1º grau na incógnita *x***.

Aplicando os princípios de equivalência das equações, chegamos à forma reduzida $ax = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, o que simplifica a resolução.

Veja outras equações desse tipo:

- $x + 1 = 7$, que pode ser reduzida à forma $x = 6$.
- $3x + 10 = 5x$, que pode ser reduzida à forma $2x = 10$.
- $2 \cdot (3x - 1) + 5x = 0$, que pode ser reduzida à forma $11x = 2$.

Como resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita

Resolver uma equação consiste em encontrar o valor da incógnita que torna a sentença verdadeira, ou seja, encontrar a **solução** ou a **raiz** da equação.

Acompanhe as situações a seguir.

1 Considerando a situação apresentada anteriormente, vamos calcular a distância percorrida pelo motorista entre as cidades de Salvador e Mangue Seco.

Para isso, calculamos a raiz da equação $\frac{x}{4} + 20 = \frac{x}{3}$ no conjunto $\mathbb{R}$.

$\frac{x}{4} + 20 = \frac{x}{3}$

$\frac{3x + 240}{12} = \frac{4x}{12}$ → **reduzimos todos os termos ao mesmo denominador**

$3x + 240 = 4x$ → **usamos o princípio multiplicativo para eliminar os denominadores (multiplicando os dois membros por 12)**

$3x - 4x = -240$ → **usamos o princípio aditivo (adicionamos −4 aos dois membros)**

$x = 240$

O número real 240 é raiz da equação. Portanto, o motorista percorreu 240 km.

2 Resolver a equação $5 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (x + 6) = 40$ no conjunto $\mathbb{R}$.

$5(x + 2) - 3(x + 6) = 40$

$5x + 10 - 3x - 18 = 40$ → Eliminamos os parênteses

$2x - 8 = 40$

$2x = 40 + 8$ → Usamos o princípio aditivo (adicionamos 8 aos dois membros)

$2x = 48$

$x = \frac{48}{2}$ → Usamos o princípio multiplicativo $\left(\text{multiplicamos os dois membros por } \frac{1}{2}\right)$

$x = 24$

O número real 24 é a solução da equação.

3 Resolver a equação $\frac{y-3}{4} + \frac{y+1}{6} = \frac{y-1}{12}$, em que $U = \mathbb{R}$.

$\frac{y-3}{4} + \frac{y+1}{6} = \frac{y-1}{12}$

$\frac{3(y-3) + 2(y+1)}{12} = \frac{1(y-1)}{12}$ → reduzimos todos os termos ao mesmo denominador

$3(y-3) + 2(y+1) = 1(y-1)$ → usamos o princípio multiplicativo para eliminar os denominadores

$3y - 9 + 2y + 2 = y - 1$ → eliminamos os parênteses

$5y - 7 = y - 1$

$5y = y - 1 + 7$ → usamos o princípio aditivo

$5y = y + 6$

$5y - y = 6$ → usamos o princípio aditivo

$4y = 6$

$y = \frac{6}{4}$ → usamos o princípio multiplicativo

$y = \frac{3}{2}$ → simplificamos a fração

A solução da equação é o número real $\frac{3}{2}$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Considerando $U = \mathbb{R}$, determine a solução das seguintes equações do 1º grau com uma incógnita:

a) $21x - 17 = 109$

b) $73x + 100 = 53x$

c) $1,7 + 2,5x = 4,2$

d) $23x - 22 = 19x + 6$

e) $12x - 16 = -21 + 10x$

f) $1,9x - 3,6 = x - 10,8$

g) $10(x + 1) - 5(x - 2) = 70$

h) $5(x + 2) - 13 = 2(3x - 1)$

i) $7(2 + x) = 5(x - 1,2) + 35$

j) $3(x + 1) - 2(x - 1) = -(x + 5)$

2. Qual é o valor de *x*, no conjunto $\mathbb{R}$, na expressão $(3 + x) - 1 = (17 - 4x) - (3 + x)$?

3. Considerando o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, determine a raiz ou solução de cada uma das seguintes equações do 1º grau com uma incógnita:

a) $\frac{x}{4} + 20 = \frac{x}{3}$

b) $\frac{2}{5}y - \frac{3}{4} = \frac{3}{20}y$

c) $1 - \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}x + 2$

d) $\frac{x-10}{9} + \frac{x}{6} = 10$

e) $\frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{3} = \frac{7}{2}$

f) $\frac{4x-1}{10} - 2 = \frac{4}{5} - \frac{2-x}{4}$

4. Qual deve ser o número real *x* para que a expressão $\frac{x+2}{4} - \frac{x-1}{5}$ seja igual a 1?

5. As expressões $(x - 5)$, $(2x - 9)$, $(3x - 13)$ e $(4x - 3)$ representam números, cuja soma é 90. Qual é o maior desses números?

Resolvendo problemas

Usando a linguagem das equações, podemos resolver problemas. Acompanhe a resolução dos problemas a seguir.

1 Uma equipe de futebol disputou algumas partidas em 2019 e obteve o seguinte desempenho: venceu 45% dessas partidas, perdeu 20% e empatou 21 partidas. Quantas partidas essa equipe disputou em 2019?

Vamos representar por *x* o número de partidas disputadas pela equipe.

Lembre-se: 45% = 0,45 e 20% = 0,20.

Assim, podemos escrever esta equação:

$$\underbrace{0{,}45x}_{\text{quantidade de vitórias}} + \underbrace{0{,}20x}_{\text{quantidade de derrotas}} + \underbrace{21}_{\text{quantidade de empates}} = \underbrace{x}_{\text{quantidade de partidas disputadas}}$$

$$0{,}45x + 0{,}20x + 21 = x$$
$$0{,}45x + 0{,}20x - x = -21$$
$$-0{,}35x = -21$$
$$0{,}35x = 21$$
$$x = \frac{21}{0{,}35} = 60$$

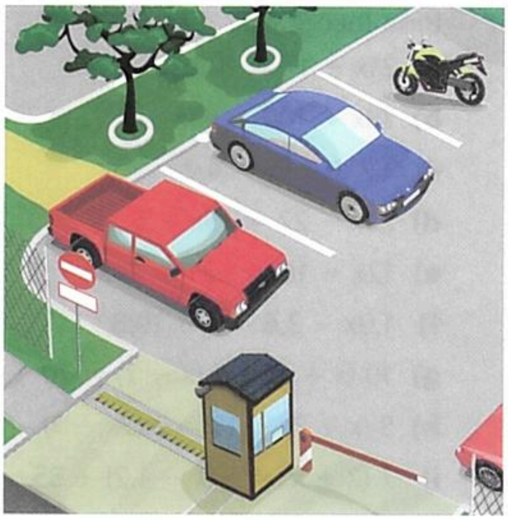
Logo, essa equipe disputou 60 partidas.

2 Em um estacionamento, há carros e motos, totalizando 14 veículos e 48 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Vamos indicar por *x* a quantidade de carros.

A quantidade de motos será indicada por 14 − x.

A equação correspondente ao problema é:


OLYA N./SHUTTERSTOCK.COM

$$\underbrace{4x}_{\text{quantidade de rodas dos carros}} + \underbrace{2 \cdot (14 - x)}_{\text{quantidade de rodas das motos}} = \underbrace{48}_{\text{quantidade total de rodas}}$$

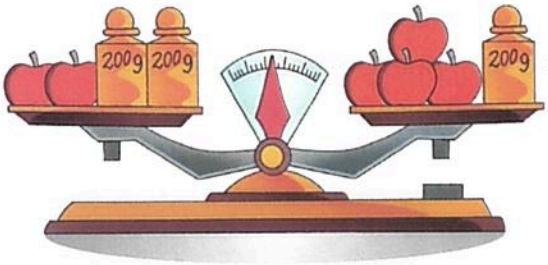
$$4x + 2(14 - x) = 48$$
$$4x + 28 - 2x = 48$$
$$2x + 28 = 48$$
$$2x = 48 - 28$$
$$2x = 20$$
$$x = \frac{20}{2} = 10 \xrightarrow{\hspace{2em}} \text{quantidade de carros}$$
$$14 - x = 14 - 10 = 4 \xrightarrow{\hspace{2em}} \text{quantidade de motos}$$

Nesse estacionamento, há 10 carros e 4 motos.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Observando a figura seguinte e supondo que todas as maçãs que estão na balança tenham a mesma massa, determine quantos gramas tem cada maçã.



MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

2. Karina participou de um concurso dividido em duas fases. Na 1ª fase, ela obteve uma nota e, na 2ª fase, obteve 3 pontos a mais que na 1ª. A nota final dos candidatos desse concurso foi calculada assim: $\dfrac{(1^{\underline{a}}\text{ nota}) + 2 \cdot (2^{\underline{a}}\text{ nota})}{3}$.

Sabendo que a nota final de Karina foi 8, que nota ela tirou em cada fase?

ELIZABETH KNOX/MASTERFILE/LATINSTOCK

Estudante em sala de aula.

3. Um prêmio de R$ 165 000,00 deve ser dividido entre Caio, Lucca e Theo. Lucca deve receber a metade do valor de Caio, e Theo vai receber R$ 20 000,00 a mais que Caio. Qual quantia cada um receberá?

4. Para comprar um computador, Valdir precisa de 200 reais a mais do que tem. Se ele tivesse o dobro da quantia que tem, compraria esse computador e ainda ficaria com 300 reais.

a) Qual a quantia que Valdir tem?

b) Qual o preço do computador?

5. A produção e as vendas de dezembro das três montadoras de automóveis de uma cidade foram registradas nesta tabela:

Produção e vendas (dezembro de 2015)

Montadora	Unidades produzidas	Taxa percentual vendida da produção
Azul	3 000	80%
Branca	5 000	60%
Vermelha	2 000	x%

Fonte: Dados fictícios.

Sabendo que nesse mês as três montadoras venderam 7 000 dos 10 000 carros produzidos, qual é o valor de x?

6. Humberto trabalha de segunda a sexta-feira e recebe mensalmente um auxílio-alimentação de R$ 380,00. Ele tem duas opções para almoçar: em um restaurante, onde paga cerca de R$ 15,00 por refeição, ou levando a refeição de sua casa, ao custo aproximado de R$ 7,00. Sabendo que às sextas-feiras Humberto nunca pode levar sua refeição para o trabalho e considerando que 1 mês tem 4 semanas, responda às questões.

a) O auxílio-alimentação é suficiente para Humberto almoçar todos os dias no restaurante?

b) Em um mês, quantos reais, no mínimo, ele gasta com o almoço no seu trabalho?

DESAFIO

7. Uma tabela tem quatro valores numéricos. Observa-se que, com exceção do primeiro, cada valor corresponde a $\frac{2}{3}$ do valor numérico anterior. Sabendo que a soma desses quatro valores é 195, qual é o primeiro valor dessa tabela? E o último?

CAPÍTULO 2
EQUAÇÃO FRACIONÁRIA COM UMA INCÓGNITA

Um ônibus, desenvolvendo certa velocidade, percorreu os 240 km que separam as cidades de Campo Grande e Bonito em *x* horas. Se tivesse aumentado em 20 km/h a sua velocidade média, teria demorado uma hora a menos, ou seja, $(x - 1)$ horas para percorrer a mesma distância. Qual foi a quantidade *x* de horas que o ônibus gastou para percorrer os 240 km?

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGES

Vista da avenida Afonso Pena, Campo Grande, Mato Grosso do Sul. Foto tirada em março de 2018.

MARCOS AMEND/PULSAR IMAGES

Cachoeira do desejo, Bonito, Mato Grosso do Sul. Foto tirada em outubro de 2017.

Considerando: velocidade média $= \dfrac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$, temos a seguinte equação para o problema.

$$\frac{240}{x} + 20 = \frac{240}{x - 1}$$

- $\frac{240}{x-1}$ → velocidade média que supostamente o ônibus teria desenvolvido no percurso
- 20 → aumento da velocidade média
- $\frac{240}{x}$ → velocidade média com a qual o ônibus fez o percurso

Nessa equação, observamos que:

- O primeiro membro, $\dfrac{240}{x} + 20$, é uma expressão algébrica fracionária, pois o termo $\dfrac{240}{x}$ contém a incógnita no denominador.
- O segundo membro $\left(\dfrac{240}{x - 1}\right)$ também é uma expressão algébrica fracionária, pois a incógnita aparece no denominador.

Equações desse tipo são chamadas **equações fracionárias na incógnita *x***.

Uma equação é fracionária quando tem pelo menos uma incógnita no denominador, sempre fora de radical.

Como resolver uma equação fracionária

Resolveremos as equações fracionárias de forma similar à maneira como resolvemos as outras equações. Devemos, contudo, excluir do conjunto solução da equação fracionária os valores da incógnita que anulam o denominador de cada um dos termos da equação.

Vamos resolver algumas equações fracionárias. Acompanhe os exemplos a seguir.

1 Determinar o número real *x* que seja a solução da equação $\frac{2x}{x-3} = \frac{3}{x} + 2$.

$$\frac{2x}{x-3} = \frac{3}{x} + 2 \longrightarrow \text{m.m.c. } (x, x-3) = x(x-3)$$

$$\frac{2x^2}{x(x-3)} = \frac{3(x-3) + 2x(x-3)}{x(x-3)}$$

$$2x^2 = 3(x-3) + 2x(x-3)$$

$$2x^2 = 3x - 9 + 2x^2 - 6x$$

$$2x^2 = 2x^2 - 3x - 9$$

$$\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} = -3x - 9$$

$$0 = -3x - 9$$

$$0 + 3x = -9$$

$$3x = -9$$

$$x = \frac{-9}{3}$$

$$x = -3$$

Note que *x* deve ser diferente de 0 e de 3, pois esses valores anulam algum denominador da equação.

→ **como −3 não anula nenhum denominador da equação, ele é a raiz ou a solução da equação**

O valor procurado é o número real −3.

2 Encontrar a solução da equação $\frac{1+t}{1-t} = \frac{3+t^2}{1-t^2}$.

Veja o que ocorre com essa equação:

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{3+t^2}{(1+t)(1-t)} \longrightarrow \text{m.m.c. } (1-t, 1-t^2) = (1+t)(1-t)$$

$$\frac{(1+t)(1+t)}{(1+t)(1-t)} = \frac{3+t^2}{(1+t)(1-t)}$$

$$(1+t)(1+t) = 3 + t^2$$

$$1 + 2t + t^2 = 3 + t^2$$

$$1 + 2t + \cancel{t^2} - \cancel{t^2} = 3$$

$$1 + 2t = 3$$

$$2t = 3 - 1$$

$$2t = 2$$

$$t = \frac{2}{2}$$

$$t = 1$$

Note que *t* deve ser diferente de 1 e de −1, pois esses valores anulam algum denominador da equação.

Como o número 1 anula os denominadores da equação, o número 1 não é raiz ou solução da equação e, portanto, podemos dizer que essa equação não tem raiz ou solução.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Determine o valor que *x* não pode assumir nas equações fracionárias a seguir:

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{x} = \frac{11}{12}$

b) $\frac{x+3}{x} = 1 + \frac{1-x}{2x}$

c) $\frac{1}{6x} + \frac{3}{2x} = \frac{x-1}{4x^2}$

d) $\frac{x-3}{x+3} = \frac{3}{5}$

e) $\frac{2}{2x-1} = \frac{5}{x+1}$

f) $1 + \frac{3}{2-x} = \frac{1}{2}$

2. Qual é o valor real de *x* que torna verdadeira a igualdade $\frac{x-1}{1-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{1-x}$?

3. Determine o valor real de *y* para que as expressões $\frac{3y}{y-4}$ e $3 + \frac{2}{y}$ sejam iguais, sabendo que $y \neq 0$ e $y \neq 4$.

4. No conjunto $\mathbb{R}$, qual é a solução da equação $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3}$, com $x \neq 1$, $x \neq 2$ e $x \neq 3$?

5. Determine o conjunto solução das seguintes equações fracionárias:

a) $\frac{5}{x^2-9} = -\frac{3}{x+3}$ $(x \neq 3, x \neq -3)$

b) $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x}$
$(x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0)$

c) $\frac{1}{y+5} + \frac{2}{y-5} = \frac{7}{y^2-25}$
$(y \neq -5, y \neq 5)$

d) $\frac{5x-2}{9-x^2} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{3-x} = 0$
$(x \neq -3, x \neq 3)$

6. Sabendo que $\frac{5x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 0$, em que $x \neq 1$ e $x \neq -1$, determine o valor real de *x* que torna verdadeira essa igualdade.

7. Em uma colônia de férias *A*, 128 crianças são distribuídas em *x* grupos de atividades, e, na colônia *B*, 224 crianças são distribuídas em $(x + 6)$ grupos de atividades. Sabendo que a quantidade de crianças, em todos os grupos, é a mesma para ambas as colônias de férias, qual é a quantidade de grupos de atividades na colônia de férias *B*?

8. Chama-se **custo médio** de produção o custo total dividido pela quantidade produzida. Uma fábrica de camisetas tem um custo total mensal *C* dado pela fórmula $C = F + 8x$, em que *F* representa o custo fixo, e *x* é a quantidade de camisetas produzidas. Quantas camisetas devem ser produzidas nessa fábrica para se ter um custo médio de R$ 12,00 para um custo fixo de R$ 2 000,00?

9. O 8º ano *A* tem *x* alunos. Nessa classe foram distribuídos 320 livros, de forma que todos receberam a mesma quantidade. O 8º ano *B* tem $(x - 2)$ alunos. Nessa classe, foram distribuídos 300 livros, e todos os alunos receberam a mesma quantidade.

ILUSTRA CARTOON

Quantos alunos há em cada classe, se cada aluno das duas classes recebeu a mesma quantidade de livros?

POR TODA PARTE

Projeto Tamar

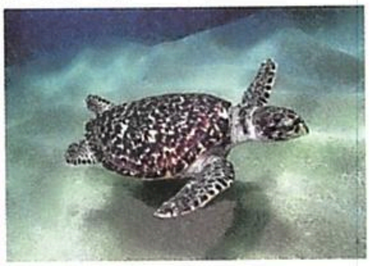
O projeto Tamar foi criado em 1980 e tem como missão o trabalho de pesquisa, conservação e manejo das cinco espécies de tartarugas marinhas que ocorrem no Brasil, todas ameaçadas de extinção.

O Tamar está presente em cerca de 1 100 km de praias, com bases localizadas no litoral e em ilhas oceânicas, em nove estados brasileiros.

Hoje, o projeto é reconhecido internacionalmente como uma das mais bem-sucedidas experiências de conservação marinha e serve de modelo para outros países, sobretudo porque envolve as comunidades costeiras diretamente no seu trabalho socioambiental.

Informações obtidas em: PROJETO TAMAR. **Missão.** Disponível em: <www.tamar.org.br/interna.php?cod=63>. Acesso em: 18 out. 2018.

Tartaruga-cabeçuda.



Tartaruga-de-pente.

Mangue Seco e o projeto Tamar

O projeto Tamar tem uma base no Sítio do Conde, na divisa entre Sergipe e Bahia, em Mangue Seco.

Essa base protege aproximadamente 1 500 desovas e 100 mil filhotes por temporada, dos quais quase metade (47,32%) da espécie oliva (*Lepidochelys olivacea*) e o restante de cabeçuda (*Caretta caretta*) e de pente (*Eretmochelys imbricata*).

Informações obtidas em: PROJETO TAMAR. **Sítio do Conde.** Disponível em: <www.tamar.org.br/base.php?cod=34>. Acesso em: 18 out. 2018.

Tartaruga-verde.

Tartaruga-oliva

A tartaruga-oliva tem carapaça de coloração cinzenta (quando jovem) e verde-cinzento-escura (quando adulta). Pode atingir até 82 cm de comprimento curvilíneo de carapaça e possui, em média, 40 kg.

É uma espécie carnívora e alimenta-se de salpas, peixes, moluscos, crustáceos, briozoários, tunicados, águas-vivas, ovos de peixe e, eventualmente, algas.

Informações obtidas em: PROJETO TAMAR. **Oliva.** Disponível em: <www.tamar.org.br/tartaruga.php?cod=21>. Acesso em: 18 out. 2018.

FOTOS: BANCO DE IMAGENS - PROJETO TAMAR

Tartaruga-oliva.

Resolva as equações a seguir no caderno.

1. O projeto Tamar tem *x* bases mantidas em áreas de alimentação, desova, crescimento e descanso das tartarugas marinhas.

$$\frac{3x}{10} - 15 = 5\frac{7}{10} - \frac{3x}{5}$$

2. Instalada em 1991, a base de Sítio do Conde monitora *y* quilômetros de praia, entre a foz do rio Inhambupe, ao sul, e a foz do rio Real, ao norte.

$$\frac{1}{4} - \frac{4}{y-11} = \frac{1}{2} - \frac{129}{6y-66}$$

CAPÍTULO

3 EQUAÇÕES LITERAIS DO 1º GRAU NA INCÓGNITA *X*

Observe as seguintes equações, todas do 1º grau na incógnita *x*:

- $3ax = 9$
- $2a - ax = bx$
- $px - 1 = p^2$

Nessas equações, aparecem outras letras, além da incógnita *x*. Essas letras figuram na equação como constantes que representam números reais.

Equações desse tipo são denominadas **equações literais do 1º grau na incógnita *x*.**

Como resolver uma equação literal do 1º grau com uma incógnita

Resolveremos as equações literais do 1º grau na incógnita *x* da mesma maneira que resolvemos as outras equações do 1º grau. Observe:

1 Considerando *x* a incógnita, resolver a equação $8x + 7a = 2x + 25a$.

$8x + 7a = 2x + 25a$

$8x = 2x + 25a - 7a$

$8x = 2x + 18a$

$8x - 2x = 18a$

$6x = 18a$

$x = \frac{18a}{6} = 3a$

A solução da equação é 3a.

2 Considerando *x* a incógnita, vamos resolver a equação $3(mx + n) - 2mx = 5n$.

$3(mx + n) - 2mx = 5n$

$3mx + 3n - 2mx = 5n$

$mx + 3n = 5n$

$mx = 2n \Rightarrow x = \frac{2n}{m}$

A solução é o número real $\frac{2n}{m}$, para $m \neq 0$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Sendo *x* a incógnita e supondo que os resultados representem números reais, resolva as seguintes equações literais no conjunto $\mathbb{R}$:

a) $5bx + 2a = bx + 3a$

b) $3(ax + b) = 2(ax - b)$

c) $(x + b)(x - b) = x \cdot (x - b^3)$

d) $(a - b)x + (a + b)x = 2a$

e) $\frac{x}{a} = c + \frac{x}{2a}$ $(a \neq 0)$

2. Qual é o conjunto solução da equação $6hx + 14 = 18 + 2hx$, em que x é a incógnita?

3. Qual deve ser o número real *x* para que a soma $\frac{b + x}{5} + \frac{b - x}{3}$ resulte em $-\frac{x}{10}$?

Juro zero e estratégia de marketing

Atenção, consumidor: "juro zero" é estratégia de *marketing*

Bruno Rosa
Publicado em 23 jul. 2011.

RIO – Entre uma promoção e outra no comércio, é difícil não aderir a um parcelamento alardeado como juro zero. Impulsionada pelo aumento da renda e pelo avanço no nível de emprego no país, a armadilha dos juros embutidos, escondida no desconto à vista, ganha força no comércio. As lojas costumam anunciar o mesmo preço à vista e para parcelamento sem juros, mas é só chorar um pouquinho que o cliente consegue um desconto se comprar em uma vez só. Isso mostra que esse valor menor é o preço real do produto, e o preço cheio embute juros.

[...]

O grande risco que o consumidor corre é de fazer das compras a prazo um hábito, pagando juros sem saber e, assim, comprometendo seu orçamento e fazendo dívidas financeiras, em que os juros são mais altos. É melhor juntar e comprar por um preço melhor, já que o juro zero é uma estratégia de *marketing* do comércio [...].

[...]

Fonte: ROSA, B. Atenção consumidor: "juro zero" é estratégia de *marketing*. **Extra 20**. Disponível em: <http://extra.globo.com/noticias/economia/atencao-consumidor-juro-zero-estrategia-demarketing-2294212.html>. Acesso em: 18 out. 2018.

Para entender melhor como são calculados os preços com juro embutido, acompanhe a situação a seguir.

Em uma loja, há duas opções de pagamento na compra de uma bolsa no valor de R$ 300,00: parcelar em duas vezes sem juro, com uma parcela sendo paga no momento da compra e a outra, após 30 dias; ou pagar à vista e em dinheiro, obtendo um desconto de 5% sobre o valor da bolsa. Vamos analisar essa situação.

Se a loja deu um desconto no pagamento à vista em dinheiro, então os valores da compra a prazo e da compra à vista são diferentes, ou seja, existe juro embutido no valor da compra a prazo. Vamos calcular o valor e a taxa de juro dessa compra a prazo.

O valor da bolsa é R$ 300,00 e pode ser pago em duas parcelas iguais de R$ 150,00.

Com o desconto de 5%, o cliente pode pagar R$ 285,00 à vista, em dinheiro.

Para calcular a taxa de juro embutido cobrada pela loja, vamos subtrair de R$ 285,00 os R$ 150,00, que correspondem ao valor da primeira parcela. Essa parcela não tem juro, pois foi paga no ato da compra. Os restantes R$ 135,00, após um mês, com o juro, resultarão em uma dívida de R$ 150,00. Portanto, podemos dizer que o juro embutido dessa compra é R$ 15,00 e a taxa de juro é aproximadamente 11%.

- No caderno, calcule qual seria a taxa de juro embutido no pagamento em duas vezes de R$ 150,00 caso o desconto do pagamento à vista fosse de 8%.

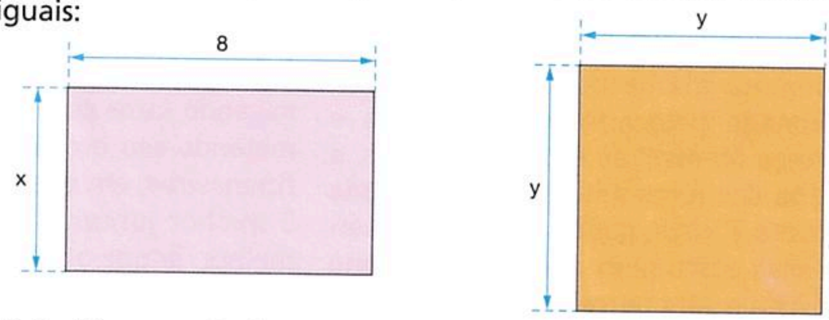
CAPÍTULO 4

EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Vamos considerar que as figuras representadas a seguir têm perímetro iguais:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Qual é a equação do 1º grau com duas incógnitas que representa esse fato?

b) Se você atribuir para a incógnita *x* o valor 6 e para a incógnita *y* o valor 7, esses dois valores verificam a equação que você escreveu?

2. Em um estacionamento, há *x* carros e *y* motos, totalizando 60 rodas.

a) Qual é a equação nas incógnitas *x* e *y* que representa esse fato?

b) Considerando 12 carros e 6 motos, esses valores (12 e 6) verificam a equação que você escreveu?

Toda equação que pode ser reduzida a uma equação equivalente na forma $ax + by = c$, com *a*, *b* e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \neq 0$, é denominada **equação do 1º grau com duas incógnitas**.

São equações do 1º grau com duas incógnitas:

- $\underbrace{x + y = 10}_{\text{incógnitas } x \text{ e } y}$
- $\underbrace{3x + 2y = 16}_{\text{incógnitas } x \text{ e } y}$
- $\underbrace{7x - 5y = 9}_{\text{incógnitas } x \text{ e } y}$

Dependendo do conjunto universo, uma equação do 1º grau com duas incógnitas, *x* e *y*, por exemplo, pode ter infinitas soluções, cada uma delas indicada por um **par ordenado** de números: o primeiro número representa o valor da incógnita *x*; o segundo representa sempre o valor da incógnita *y*. Essa ordem precisa ser respeitada. Daí o nome **par ordenado**.

Indica-se: (x, y).

Vamos verificar isso analisando as situações seguintes.

1 O par ordenado (2, 5) é solução da equação $3x + 2y = 16$?

$3x + 2y = 16$

$3 \cdot (2) + 2 \cdot (5) = 16$

$6 + 10 = 16$ (verdadeira)

O par ordenado (2, 5) é solução da equação $3x + 2y = 16$.

2 O par ordenado (5, 2) é solução da equação $3x + 2y = 16$?

$3x + 2y = 16$

$3 \cdot (5) + 2 \cdot (2) = 16$

$15 + 4 = 16$ (falsa)

O par ordenado (5, 2) não é solução da equação $3x + 2y = 16$.

3 Determinar a solução da equação $3x + 2y = 16$ quando $y = -1$.

$3x + 2y = 16$

$3x + 2 \cdot (-1) = 16$

$3x - 2 = 16$

$3x = 16 + 2$

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3}$

$x = 6$

O par ordenado (6, −1) é solução da equação quando $y = -1$.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Verifique se o par ordenado (5, −2) é uma das soluções das seguintes equações:

a) $5x + 2y = 21$

b) $x - 9y = 23$

c) $10x - y = 48$

d) $6x + 6y = 18$

e) $3x - 4y = -23$

f) $0{,}5x - 0{,}3y = 1{,}9$

2. Considerando que $y = 7x - 3$, determine o valor da incógnita *x* nas equações:

a) $2x + 5y = 59$

b) $3x - y = 21$

c) $5x - 3y = -2$

d) $0{,}3x - 0{,}2y = 1{,}7$

3. Determine uma das soluções da equação $0{,}6x - 1{,}5y = -1{,}5$ quando:

a) $y = 0{,}8$

b) $y = 1{,}2$

4. Apresente uma solução para a equação $9x - 5y = 21$ quando:

a) *y* vale 3

b) *x* vale −6

5. Dada a equação $6x - y = 42$, encontre a solução dessa equação quando:

a) $x = 8$

b) $y = 30$

6. Considere a afirmação: "O par ordenado (−1, 10) é solução, ao mesmo tempo, das equações $10x - y = -20$ e $5x + 2y = 15$". Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

DESAFIO

7. Agora, junte-se com um amigo. Fazendo tentativas e usando apenas números naturais, descubra um par ordenado (x, y) que seja solução, ao mesmo tempo, das equações $x + y = 7$ e $x - y = 1$.

Representação geométrica

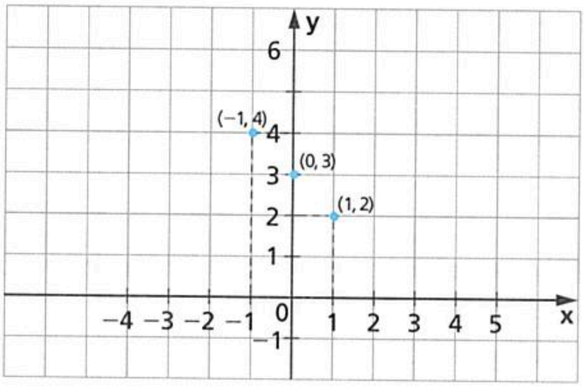
Veja como podemos representar uma equação do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano.

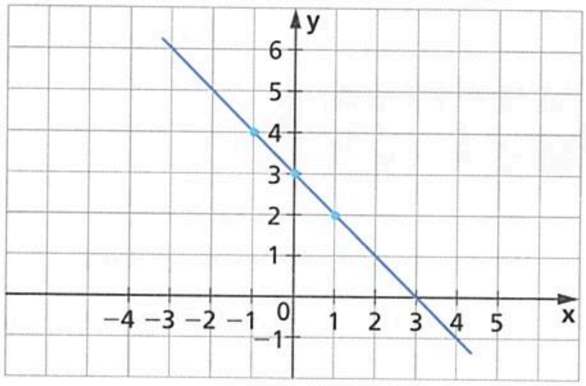
1 Representar a equação $x + y = 3$ no plano cartesiano.

Inicialmente, construímos um quadro e escolhemos alguns valores para *x* e calculamos o valor de *y* correspondente. Assim, encontramos alguns pares ordenados que são solução dessa equação.

x	y	Par ordenado (x,y)
-1	$-1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4$	$(-1, 4)$
0	$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3 + 0 = 3$	$(0, 3)$
1	$1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$	$(1, 2)$

Depois, indicamos os pares ordenados no plano cartesiano. Com uma régua, traçamos a reta que passa por esses pontos.





A representação geométrica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas é uma reta.

ATIVIDADES

Resolva as atividades a seguir no caderno.

1. Considerando que *x* assume os valores $\{-1, 0, 1, 2\}$, encontre os pares ordenados das equações a seguir:

a) $-2x + y = 2$

b) $x - 3y = -1$

2. Represente no plano cartesiano as equações a seguir, usando uma folha de papel quadriculado.

a) $x - y = 2$

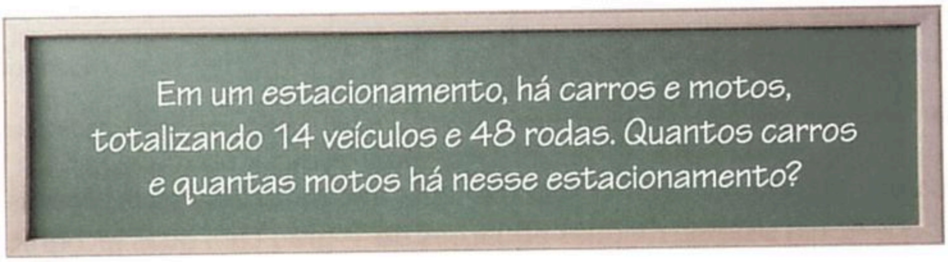
b) $2x - y = 5$

c) $-x - 3y = 1$

CAPÍTULO 5

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Consideremos o problema dos veículos apresentado na página 140.



PHOTODISC/GETTY IMAGES

Podemos resolver essa situação-problema da seguinte maneira:

São 14 veículos. Se cada veículo tivesse duas rodas, seriam 28 rodas.

FOTOS: HEMERA

Mas o problema cita que são 48 rodas no total. Então, podemos substituir motos por carros até completar 48 rodas e 14 veículos.

$4 \times 2 = 8$

$10 \times 4 = 40$

Quantidade de veículos de 4 rodas: 10
Quantidade de veículos de 2 rodas: 4
14 veículos e 48 rodas

Nesse estacionamento há 10 carros e 4 motos.

Esse modo de resolver o problema pode tornar-se trabalhoso e demorado quando as quantidades forem muito grandes.

DESCUBRA MAIS

Encontros de primeiro grau (coleção A descoberta da Matemática), de Luzia Faraco Ramos, editora Ática, 2011.

Nesse livro, Rodrigo aprende a resolver problemas que envolvem equações do 1º grau. Entre um problema e outro, ele faz novas amizades, e uma delas é Carolina, com quem começa a namorar.

Os olímpicos (coleção O contador de histórias e outras histórias da Matemática), de Egídio Trambaiolli Neto, Editora FTD, 1999.

O livro conta a história de três adolescentes que foram convidados a observar, em Olimpíadas já realizadas, os bastidores dos comitês organizadores, as manobras políticas, as grandes atuações e a importância da disciplina e da perseverança na vida dos atletas.

Vamos, agora, usar os conhecimentos de cálculo algébrico para resolver o problema de outro modo. Inicialmente, indicamos:

- a quantidade de carros que há no estacionamento com x;
- a quantidade de motos que há no estacionamento com y.

Em seguida, com base nos dados do problema, montamos duas equações:

$$x + y = 14 \quad \text{e} \quad 4x + 2y = 48$$

quantidade de carros

quantidade de motos

quantidade de veículos

quantidade total de rodas

cada moto tem 2 rodas

cada carro tem 4 rodas

Quando duas equações de 1º grau com duas incógnitas são escritas ligadas pelo conectivo *e*, dizemos que há um **sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas** (no caso, x e y).

Esse sistema pode ser representado assim: $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. **Usando as letras x e y para representar as incógnitas (números desconhecidos), estabeleça um sistema de duas equações do 1º grau associado a cada uma das situações a seguir:**

a) Dois livros custam juntos 60 reais e o preço de um deles é igual ao dobro do preço do outro.

b) A soma das idades de Theo e Fernanda é 9 anos, enquanto a diferença entre essas idades é 3 anos, sendo Theo o mais velho.

c) Uma tábua de 3,5 metros de comprimento deve ser cortada em dois pedaço de tal forma que o comprimento do pedaço maior seja igual ao triplo do comprimento do menor menos 0,5 metro.

d) Gabriela tem 10 cédulas, umas de 20 reais e outras de 10 reais, perfazendo um total de 130 reais.

e) A soma de dois números é 100, e o maior deles é igual ao dobro do menor mais 4.

f) Em um jogo de basquete, a cestinha do time vencedor fez 24 cestas, algumas valendo 3 pontos, e outras, 2 pontos, num total de 56 pontos.

g) O perímetro de um terreno retangular é 22 m, e a medida da frente é 5 m maior que a medida do fundo.

2. **Em um sítio há bois e patos, totalizando 23 animais e 82 pernas. Usando as letras x e y, escreva um sistema de duas equações associado a esse fato.**

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGES

Solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Quando duas equações formam um sistema, embora cada equação tenha infinitas soluções, devemos procurar a solução que verifica as duas equações simultaneamente.

A solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, *x* e *y*, por exemplo, é um par ordenado (x, y) que é solução tanto da primeira equação como da segunda.

Voltemos ao sistema de equações que representa o problema dos veículos da página 140:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

- O par ordenado (10, 4) é solução desse sistema, pois os valores verificam as duas equações ao mesmo tempo:

$x + y = 14$ | $4x + 2y = 48$ | $40 + 8 = 48$ (verdadeira)

$10 + 4 = 14$ (verdadeira) | $4 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 48$

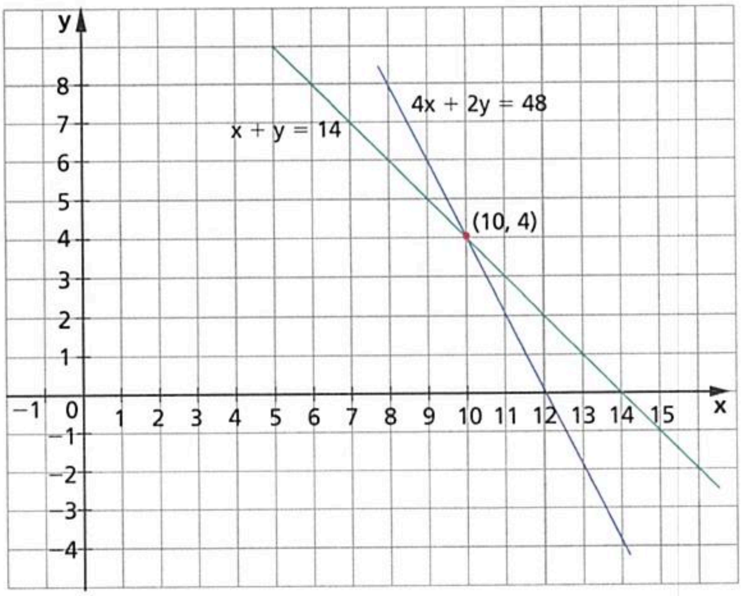
- O par ordenado (6, 8) não é solução desse sistema, pois verifica a equação $x + y = 14$, mas não verifica a equação $4x + 2y = 48$:

$x + y = 14$ | $4x + 2y = 48$ | $24 + 16 \neq 48$

$6 + 8 = 14$ (verdadeira) | $4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 48$ (falsa)

Esse sistema pode ser resolvido geometricamente. Para isso, vamos representar cada uma das equações que compõem o sistema em um mesmo plano cartesiano.

A solução do sistema de equações é o ponto de intersecção das duas retas no plano cartesiano.



NÓS

Não faz muito tempo que, para pegar um táxi, era necessário ir até a rua e balançar o dedo indicador ou ligar para alguma cooperativa de táxis. Mas isso mudou com a popularização dos *smartphones* e o desenvolvimento de novos aplicativos, desde alguns específicos para táxis até novas opções de transporte, como caronas e mesmo o transporte particular por geolocalização, o qual, em alguns casos, permite o compartilhamento da corrida com outros passageiros, o que acaba barateando o preço final.

- Você acredita que a criação de novas opções de transporte pode ser benéfica para a população?

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. O par ordenado (10, 7) é a solução do sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 2x + 3y = 41 \end{cases}$?

2. Verifique se o par ordenado (−3, 5) é a solução do sistema de equações: $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x - 5y = -31 \end{cases}$.

3. Entre os pares ordenados (1, 2) e (2, 1), qual deles é a solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$?

4. Verifique se o par ordenado (−2, 2) é a solução do sistema. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 4y = 7 \\ x - \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$

5. Descubra o par ordenado de números naturais que é a solução do sistema. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

DESAFIO

6. Agora, junte-se com um amigo para resolver o desafio a seguir. Dois irmãos acabam de contar a quantia que cada um conseguiu economizar.

Para descobrir quantos reais cada irmão conseguiu economizar, responda às questões no caderno.

a. Qual dos sistemas a seguir traduz a situação apresentada?

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 110 \\ x - y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 110 \\ y + \dfrac{x}{4} = 110 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - \dfrac{y}{3} = 110 \\ y - \dfrac{x}{4} = 110 \end{cases}$

b. No sistema correto de equações, o que representa a incógnita *x*? E a incógnita *y*?

c. Verifique qual dos pares ordenados a seguir é a solução do sistema de equações correto.
a) (80, 90) **b)** (90, 80) **c)** (85, 95)

d. Qual é a quantia que cada irmão conseguiu economizar?

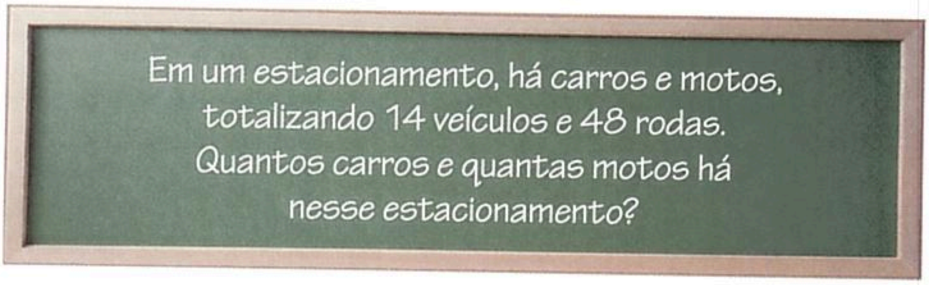
CAPÍTULO 6

RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Existem métodos algébricos que permitem calcular o par ordenado (x, y), que é a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Neste capítulo, estudaremos dois desses métodos: o da **substituição** e o da **adição**.

Método da substituição



PHOTODISC/GETTY IMAGES

Inicialmente, indicamos:

- a quantidade de carros que há no estacionamento por *x*;
- a quantidade de motos que há no estacionamento por *y*.

De acordo com os dados do problema, formamos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema pelo método da substituição, seguimos os passos:

1º passo: Na 1ª equação, isolamos a incógnita $\mathbf{x}$.

$x + y = 14$

$\mathbf{x = 14 - y}$

2º passo: Na 2ª equação, vamos substituir *x* por $\mathbf{14 - y}$.

$4x + 2y = 48$

$4(14 - y) + 2y = 48$ → equação do 1º grau na incógnita *y*

$56 - 4y + 2y = 48$

$56 - 2y = 48$

$-2y = 48 - 56$

$-2y = -8$

$2y = 8$

$y = \dfrac{8}{2}$

$\mathbf{y = 4}$ → quantidade de motos

3º passo: Substituímos *y* por 4 na equação $x = 14 - y$.

$x = 14 - y$

$x = 14 - 4$

$x = 10$ ⟶ quantidade de carros

Então, a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}$ é o par ordenado **(10, 4)**.

Há 10 carros e 4 motos no estacionamento.

Considere agora estas outras situações:

1 Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{y}{3} \\ x - 3(y + 2) = -4 \end{cases}$

1º passo: Inicialmente, devemos preparar as equações, isto é, devemos escrevê-las na forma $ax + by = c$.

- $\dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{y}{3}$

  $\dfrac{3x - 6}{6} = \dfrac{2y}{6}$

  $3x - 6 = 2y$

  $3x = 2y + 6$

  $3x - 2y = 6$

- $x - 3(y + 2) = -4$

  $x - 3y - 6 = -4$

  $x - 3y = -4 + 6$

  $x - 3y = 2$

2º passo: Agora, vamos resolver o sistema equivalente: $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

- Nesse sistema, é mais simples iniciarmos pela 2ª equação:

  $x - 3y = 2$

  $x = 2 + 3y$

- Substituímos o valor de *x* na 1ª equação:

  $3x - 2y = 6$

  $3(2 + 3y) - 2y = 6$

  $6 + 9y - 2y = 6$

  $6 + 7y = 6$

  $7y = 6 - 6$

  $7y = 0$

  $y = \dfrac{0}{7}$

  $y = 0$

- Determinamos o valor de *x* para $y = 0$:

  $x = 2 + 3y$

  $x = 2 + 3 \cdot (0)$

  $x = 2 + 0$

  $x = 2$

  A solução do sistema é o par ordenado **(2, 0)**.

2 Determinar o par (x, y) que é a solução do sistema: $\begin{cases} \dfrac{3x}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} = \dfrac{5}{y - 1} \end{cases}$

1º passo: Nesse sistema, devemos ter $y \neq 0$, $y \neq 1$ e $x \neq 0$. Vamos, então, reduzir as equações à sua forma mais simples.

- $\dfrac{3x}{y} = 1$

  $\dfrac{3x}{y} = \dfrac{y}{y}$

  $3x = y$

  $\mathbf{y = 3x}$

- $\dfrac{2}{x} = \dfrac{5}{y - 1}$

  $\dfrac{2(y - 1)}{x(y - 1)} = \dfrac{5x}{x(y - 1)}$

  $2(y - 1) = 5x$

  $2y - 2 = 5x$

  $\mathbf{-5x + 2y = 2}$

2º passo: Depois, resolvemos o sistema: $\begin{cases} y = 3x \\ -5x + 2y = 2 \end{cases}$

Nesse caso, é mais simples iniciarmos pela primeira equação.

- $y = 3x$
- $-5x + 2y = 2$

  $-5x + 2 \cdot (3x) = 2$

  $-5x + 6x = 2$

  $\mathbf{x = 2}$

- $y = 3x$

  $y = 3 \cdot (2)$

  $\mathbf{y = 6}$

A solução do sistema é o par ordenado **(2, 6)**.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações do 1º grau nas incógnitas *x* e *y*:

a) $\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 26 \\ x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x - 2y = 20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x - y = 1{,}8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = 10 - \dfrac{y}{2} \\ x - y = 8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 5y = 2(x - y) + 1 \\ 6y - 3(x - 3y) + 2 = -x \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{x}{2y} = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x = 2 + 3y \\ \dfrac{1}{y - 1} = \dfrac{1}{x - 3} \end{cases}$

2. Uma fração é equivalente a $\dfrac{7}{4}$. Se adicionarmos 2 ao denominador dessa fração, ela se tornará equivalente a $\dfrac{3}{2}$. Qual é a fração pedida?

Método da adição

Veremos a seguir como resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas usando o método algébrico da adição.

Consideremos as situações:

1 Determinar a solução (x, y) do sistema: $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$

1º passo: Como as duas equações apresentam termos opostos (**+3y** na primeira e **−3y** na segunda), adicionamos as duas equações membro a membro. Isso permite obter uma única equação, equivalente às equações dadas, sem a incógnita *y*.

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 21 \\ \underline{2x - 3y = 14+} \\ 7x + 0 = 35 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 7x = 35 \\ x = \dfrac{35}{7} \\ \mathbf{x = 5} \end{array}$$

2º passo: Substituindo *x* por 5 em uma das equações do sistema, temos:

$5x + 3y = 21$

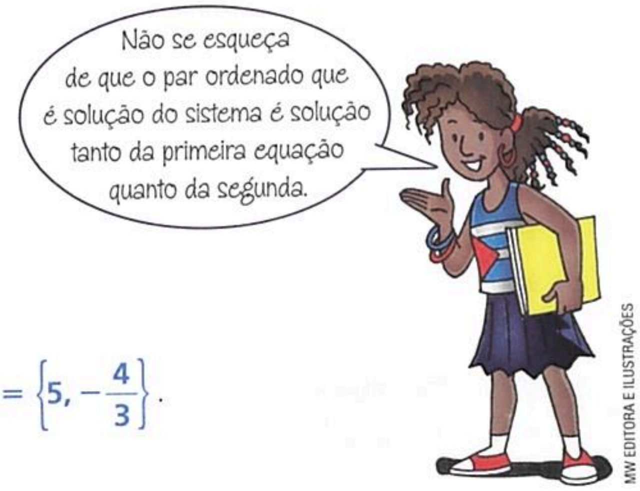
$5 \cdot 5 + 3y = 21$

$25 + 3y = 21$

$3y = 21 - 25$

$3y = -4$

$\mathbf{y = -\dfrac{4}{3}}$



A solução do sistema é o par ordenado $\mathbf{S = \left\{5, -\dfrac{4}{3}\right\}}$.

2 Resolver o sistema: $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

1º passo: Observando as equações do sistema, vemos que não é viável adicionar membro a membro as duas equações, pois, não havendo termos opostos, nenhuma das incógnitas vai "desaparecer". Vamos, então, usar um recurso que é uma aplicação do princípio multiplicativo para deixar o sistema com termos opostos.

Primeiro, devemos escolher uma das incógnitas, por exemplo, *y*. Observe que o coeficiente de *y* na primeira equação é 3 e o coeficiente de *y* na segunda equação é −2.

Assim, como os sinais dos coeficientes de *y* já estão trocados, se quisermos deixar os termos na forma de opostos, basta multiplicar a primeira equação (5x + 3y = 2) pelo coeficiente de *y* da segunda equação (2) e, também, multiplicar a segunda equação (4x − 2y = 6) pelo coeficiente de *y* da primeira equação (3). Veja o esquema a seguir:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2 \;\; (\times 2) \\ 4x - 2y = 6 \;\; (\times 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 4 \\ 12x - 6y = 18 \end{cases}$$

2º passo: Agora, temos dois termos opostos: **+6y** e **−6y**. Por esse motivo, podemos adicionar membro a membro as equações para obter uma única equação sem a incógnita *y*.

$$\begin{array}{r} 10x + 6y = 4 \\ 12x - 6y = 18 \; + \\ \hline 22x + 0 = 22 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 22x = 22 \\ \mathbf{x = 1} \end{array}$$

3º passo: Finalmente, vamos substituir *x* por 1 em qualquer uma das equações do sistema.

$5x + 3y = 2$

$5 \cdot 1 + 3y = 2$

$5 + 3y = 2$

$3y = 2 - 5$

$3y = -3$

$\mathbf{y = -1}$

A solução do sistema é o par ordenado **(1, −1)**.

3 Dado que $xy = 24$ e $\begin{cases} \dfrac{8}{x} + \dfrac{6}{y} = 3 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases}$, determinar o par (x, y) com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, que é a solução do sistema.

1º passo: Vamos reduzir as equações à sua forma mais simples.

- $\dfrac{8}{x} + \dfrac{6}{y} = 3$

  $\dfrac{8y + 6x}{xy} = \dfrac{3xy}{xy}$

  $8y + 6x = 3xy$

  Como $xy = 24$, temos:

  $8y + 6x = 3 \cdot (24)$

  $\mathbf{8y + 6x = 72}$

- $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1$

  $\dfrac{2y + 3x}{xy} = \dfrac{1xy}{xy}$

  $2y + 3x = xy$

  Como $xy = 24$, temos:

  $\mathbf{2y + 3x = 24}$

2º passo: Agora, vamos resolver o sistema equivalente: $\begin{cases} 8y + 6x = 72 \\ 2y + 3x = 24 \end{cases}$

Observe que o sistema não apresenta termos opostos, porém, ao analisar a incógnita *x*, temos que a primeira equação possui coeficiente +6 e a segunda equação possui o coeficiente +3.

Portanto, para deixar o sistema com termos opostos na incógnita *x*, basta multiplicarmos a segunda equação por −2.

Observação: se quiséssemos deixar os termos opostos na variável *y*, bastaria multiplicar a segunda equação ($2y + 3x = 24$) por −4.

Veja a resolução a seguir.

$$\begin{cases} 8y + 6x = 72 \\ 2y + 3x = 24 \quad \times(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y + 6x = 72 \\ -4y - 6x = -48 \end{cases}$$

- $$\begin{array}{r} 8y + 6x = 72 \\ -4y - 6x = -48 \; + \\ \hline 4y + 0 = 24 \end{array}$$

  $4y = 24$

  $\mathbf{y = 6}$

- $2y + 3x = 24$

  $2 \cdot (6) + 3x = 24$

  $12 + 3x = 24$

  $3x = 24 - 12$

  $3x = 12$

  $\mathbf{x = 4}$

A solução do sistema é o par ordenado **(4, 6)**.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações do 1º grau nas incógnitas *x* e *y*:

a) $\begin{cases} x + y = 42 \\ x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ -2x + 3y = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - 4y = 22 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x + 6y = 10 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 2y = -7 \\ 2x + 3y = -0{,}5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 6 \end{cases}$, com $y \neq 0$

g) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{5} = \dfrac{x - y}{2} \\ 2x = 2 - 5y \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3(x - 2) = 2(y - 3) \\ 18(y - 2) + y = 3(2x + 3) \end{cases}$

2. Dois números reais *x* e *y* são tais que $\dfrac{x + 4}{y + 3} = 1$ e $\dfrac{2y}{x + 2} = 4$.

Nessas condições, sendo $x \neq -2$ e $y \neq -3$, determine o valor de:

a) $y - x$ **b)** $x : y$ **c)** $(x + y)(x - y)$

3. Quando adicionamos 2 aos dois termos de uma fração, ela se torna equivalente a $\dfrac{5}{6}$; quando subtraímos 2 dos dois termos da mesma fração, ela se torna equivalente a $\dfrac{1}{2}$. Qual é a fração considerada?

4. Carlos pensou em dois números. A soma entre esses números é 175, e a diferença entre eles é 43. Quais são os números em que Carlos pensou?

5. Num sorteio, dois números foram premiados. A soma desses dois números é 170, e o maior deles é igual ao triplo do menor mais 2 unidades. Quais foram os números sorteados?

6. Caio e Pedro são irmãos. Em 2011, a soma das idades dos dois era 22 anos. Como Caio é dois anos mais velho que Pedro, qual era a idade de Caio em 2011?

7. Em um terreno há galinhas e ovelhas. São 31 animais e 82 pernas. Quantas galinhas e quantas ovelhas estão nesse terreno?

STOCKBYTE/GETTY IMAGES

Galinhas alimentando.

DESAFIO

8. Agora, junte-se com um amigo para resolver os desafios a seguir.

a) Observe, no quadro, a soma dos valores com figuras, em cada linha e em cada coluna. Descubra os valores "escondidos" pelas figuras.

▲	4	▼	■	→ 28
■	◆	▼	▼	→ 18
4	⬟	▲	■	→ 38
4	4	4	■	→ 20
↓ 30	↓ 26	↓ 22	↓ 26	

EDITORIA DE ARTE

b) Carlos e sua irmã Andrea levaram seu cachorro Balu ao veterinário. Lá, encontraram uma balança com defeito, que só indicava corretamente valores superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram os seguintes valores:

- Carlos e Balu, juntos, 87 kg.
- Carlos e Andrea, juntos, 123 kg.
- Andrea e Balu, juntos, 66 kg.

Quantos quilogramas tem cada um?

MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

CAPÍTULO 7

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Você já sabe que resolver uma equação significa determinar os possíveis valores que satisfazem a equação (o conjunto solução) em um conjunto universo dado.

Na resolução das equações do 2º grau, usaremos a fatoração e esta propriedade importante dos números reais:

- Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x^2 = y$, então $x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Resolvendo equações da forma $ax^2 + b = 0$

Acompanhe as situações a seguir.

1 Qual é a solução da equação $x^2 - 9 = 0$, no conjunto $\mathbb{R}$?

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ → usamos o princípio aditivo

$x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

Logo, os números -3 e 3 são as raízes da equação. Assim, $S = \{-3, 3\}$.

2 Resolver a equação $16x^2 - 1 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.

$16x^2 - 1 = 0$

$16x^2 = 1$ → usamos o princípio aditivo

$x^2 = \dfrac{1}{16}$ → usamos o princípio multiplicativo

$x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{16}} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{4}$

Logo, os números $-\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{1}{4}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \left\{-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right\}$.

SAIBA QUE

Utilizamos a notação $x = \pm\sqrt{a}$ para representar $x = +\sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

3 Determinar os valores reais de x para que se tenha $3x^2 - 60 = 0$.

Como todos os termos da equação são divisíveis por 3, podemos dividir cada termo da equação por 3, para depois determinar os valores de x:

$3x^2 - 60 = 0$

$\dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{60}{3} = \dfrac{0}{3} \Rightarrow x^2 - 20 = 0$

$x^2 = 20 \Rightarrow x = \pm\sqrt{20}$

Como 20 não apresenta raiz quadrada exata, os números $-\sqrt{20}$ e $+\sqrt{20}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\}$.

4 Determinar a solução da equação $x^2 + 4 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4}$

Como $\sqrt{-4}$ não existe no conjunto $\mathbb{R}$, não temos valores reais para x.

Logo, a equação não tem raízes reais. Assim, $S = \varnothing$.

5 Resolver, no conjunto $\mathbb{R}$, a equação $(2y + 1)^2 = 8 + 2(2y + 1)$.

Inicialmente, vamos multiplicar os polinômios e deixar a equação na forma $ax^2 + b = 0$ para, depois, resolvê-la:

$(2y + 1)^2 = 8 + 2(2y + 1)$

$(2y + 1)(2y + 1) = 8 + 2(2y + 1)$

$4y^2 + 2y + 2y + 1 = 8 + 4y + 2$

$4y^2 + 4y + 1 = 10 + 4y$

$4y^2 + 4y - 4y + 1 - 10 = 0$ → usamos o princípio aditivo

$4y^2 - 9 = 0$ → forma $ax^2 + b = 0$

$4y^2 = 9$ → usamos o princípio aditivo

$y^2 = \frac{9}{4}$ → usamos o princípio multiplicativo

$y = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$y = \pm\frac{3}{2}$

Logo, os números $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

ATIVIDADES

1. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, no conjunto $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 1 = 0$

b) $x^2 - 16 = 0$

c) $x^2 - 64 = 0$

d) $x^2 + 16 = 0$

e) $9x^2 = 25$

f) $x^2 - 20 = 0$

2. Qual é o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$?

a) $(x + 5)(x - 6) = 51 - x$

b) $2x(x + 1) - x(x + 5) = 3(12 - x)$

3. Calcule o conjunto solução de cada equação:

a) $3x - \frac{1}{3x} = 0$, $x \neq 0$, $U = \mathbb{R}$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} = -1$, $U = \mathbb{R}$

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. Qual é o número real representado pela letra *x* que torna verdadeira a igualdade $7x - [5x + 3 - (2x + 1) - 10] = -(- x + 3)$?

a) $\frac{11}{2}$ **b)** $-\frac{11}{3}$ **c)** $\frac{3}{11}$ **d)** $-\frac{3}{11}$ **e)** $-\frac{7}{3}$

2. Observe as equações:

$$\frac{3x}{x-4} = 3 + \frac{2}{x} \quad (x \neq 0,\ x \neq 4)$$

$$\frac{5}{y^2-9} = \frac{-3}{y+3} \quad (y \neq -3,\ y \neq 3)$$

Resolvendo cada uma dessas equações, o quociente $x : y$ é:

a) $-\frac{3}{5}$ **b)** $-\frac{5}{3}$ **c)** $\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{5}{3}$ **e)** $-\frac{2}{5}$

3. O aluguel de uma moto em uma agência *A* é 280 reais, acrescido de 3 reais por quilômetro rodado. Em uma agência *B*, o aluguel da mesma moto é 400 reais, acrescido de 1 real por quilômetro rodado.

Qual deve ser a quantidade de quilômetros rodados para que o valor do aluguel seja o mesmo em ambas as agências?

a) 60 km **b)** 64 km **c)** 68 km **d)** 70 km **e)** 72 km

4. Um número natural *n* é tal que: $\frac{n+3}{n+7} = \frac{n+7}{n+12}$.

Qual é o valor numérico da expressão $\sqrt{n+3}$?

a) 16 **b)** 25 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3

5. A altura de uma árvore, em metros, é dada por $h = 10 - \frac{100}{10+t}$, sendo *t* a idade da árvore em anos. Se essa árvore tem 6 metros de altura, quantos anos ela tem?

a) 12 anos. **b)** 13 anos. **c)** 14 anos. **d)** 15 anos. **e)** 16 anos.

6. Segundo pesquisa realizada em um grupo de pessoas, foi constatado que, ao longo de *x* meses, a quantidade de pessoas que contrairá certo tipo de gripe é dada pela expressão matemática $\frac{13000}{\frac{10}{x}+2}$. Após quantos meses a quantidade de pessoas infectadas por esse tipo de gripe será de 4 000?

a) 6 meses. **b)** 7 meses. **c)** 8 meses. **d)** 9 meses. **e)** 10 meses.

7. Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \\ x - \frac{y-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Qual é o valor da razão $\frac{x}{y}$?

a) 0,5 **b)** 2 **c)** 0,2 **d)** 5 **e)** 0,05

8. Em uma loja, a diferença entre o preço de venda e o preço de custo de um produto é R$ 5 000,00. Se o preço de custo representa 75% do preço de venda, então o preço de custo desse produto é:

a) R$ 10 000,00 **b)** R$ 12 000,00 **c)** R$ 15 000,00 **d)** R$ 16 000,00 **e)** R$ 20 000,00

9. Em uma caixa, a quantidade de bolas vermelhas é o triplo da quantidade de bolas pretas. Se tirarmos 2 bolas pretas e 26 bolas vermelhas, a quantidade de bolas de cada cor ficará igual. Quantas bolas vermelhas há na caixa?

a) 8
b) 12
c) 24
d) 36
e) 48

10. As revistas *A* e *B* são publicadas por uma mesma editora. A assinatura anual da revista *A* custa o quádruplo da assinatura anual da revista *B*, e a assinatura anual das duas revistas juntas custa R$ 260,00. A diferença entre os valores das assinaturas das duas revistas é:

a) R$ 52,00
b) R$ 156,00
c) R$ 208,00
d) R$ 212,00
e) R$ 218,00

11. Juca pegou um pote cheio de amendoins, que estava pesando 420 gramas, e comeu a metade deles. Verificou que o pote passou a pesar 235 gramas. Quantos gramas tem o pote vazio?

a) 25 g
b) 32 g
c) 40 g
d) 45 g
e) 50 g

12. São dadas as equações $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{y-1}$ e $3y = 2(x - 1)$. Sabendo que $x \neq 3$ e $y \neq 1$, a expressão $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ vale:

a) $-\frac{3}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $-\frac{2}{3}$
e) $\frac{2}{3}$

13. A bilheteria de um cinema apurou 620 reais vendendo ingressos para 100 pessoas durante uma sessão. O preço de cada ingresso é 8 reais, e estudante paga a metade desse preço. Quantos estudantes compraram ingressos nessa sessão?

a) 45 **b)** 48 **c)** 50 **d)** 54 **e)** 55

14. Considere dois números reais *x* e *y*. Multiplicando o número *x* por $\frac{3}{4}$, ele diminui 5 unidades, e multiplicando o número *y* por $\frac{5}{3}$, ele aumenta 6 unidades. Nessas condições, podemos dizer que $x - y$ vale:

a) 38
b) 29
c) 21
d) 11
e) 7

15. Em um grupo de jovens, 25% têm estatura superior a 1,70 m; 45% têm estatura entre 1,65 m e 1,70 m; e 12 desses jovens têm estatura inferior a 1,65 m.
Quantos desses jovens têm altura que varia entre 1,65 m e 1,70 m?

a) 40 **b)** 32 **c)** 27 **d)** 25 **e)** 18

16. Uma motocicleta, desenvolvendo certa velocidade, percorre 240 km em *t* horas. Mantendo essa mesma velocidade média, percorrerá 400 km em $(t + 2)$ horas. Qual é essa quantidade *t* de horas?

17. Em um jogo de decisão de campeonato de futebol, os preços dos ingressos foram aumentados: a arquibancada passou a custar 70 reais, e a numerada, 90 reais. Como o estádio só oferecia esses dois tipos de ingressos, a renda foi de 1 540 000 reais.

Bilheteria.

Se os preços dos ingressos fossem os de sempre (50 reais para arquibancada e 80 reais para numerada), a renda do jogo teria sido de 1 210 000 reais. Quantas pessoas compraram ingressos para a arquibancada?

18. Pelo regulamento de um torneio de basquete, cada partida que a equipe ganha vale 2 pontos, e cada partida que perde vale 1 ponto. A equipe de basquete do nosso colégio disputou um torneio jogando 12 partidas e somando 18 pontos. Quantas partidas a equipe do nosso colégio venceu no torneio?

19. Para embalar 1 650 livros, uma editora usou 27 caixas, umas com capacidade para 50 livros, e outras, para 70 livros. Quantas caixas de cada tipo a editora utilizou?

20. Em uma competição esportiva, foram distribuídas apenas medalhas de ouro e de prata. Cada medalha de ouro vale 3 pontos, e cada medalha de prata vale 2 pontos, para efeito de classificação. Se a equipe *A* conquistou 11 medalhas e somou 29 pontos, quantas medalhas de ouro a equipe *A* ganhou?

21. Um treinador propôs a um de seus jogadores que arremessasse, sucessivamente, uma bola à cesta, informando-lhe que ganharia 5 pontos a cada acerto e perderia 2 pontos a cada erro. Ao fim dessa parte do treinamento, o jogador havia feito 50 arremessos e acumulara 194 pontos. Quantos arremessos o jogador acertou?

22. Fernando tem em seu cofre 78 moedas, umas de 1 real e outras de 50 centavos, num total de 49 reais.

Qual é a quantidade de moedas de 50 centavos? E a quantidade de moedas de 1 real?

STOCKDISC/GETTY IMAGES

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, realizamos estudos sobre as equações do 1º grau com uma incógnita, equações fracionárias com uma incógnita, equações literais do 1º grau na incógnita *x*, equações do 1º grau com duas incógnitas, sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, tipos de resoluções para esse modelo de sistema e equação do 2º grau incompleta, do tipo $ax^2 - b = 0$.

Na Educação Financeira, foi abordado o "juro zero" como uma estratégia de *marketing*, pois o juro, muitas vezes, pode estar embutido no preço.

Para que possa perceber suas aprendizagens e possíveis dúvidas, sugerimos a você que faça um roteiro contendo os conceitos abordados nesta Unidade e não se esqueça de acrescentar alguns exemplos.

Na abertura da Unidade, pudemos ver um uso do sistema de equações do 1º grau. Vamos retomar as aprendizagens e refletir sobre elas. Responda no caderno.

- O que devemos excluir do conjunto universo de uma equação fracionária?
- Nesta Unidade, quais foram os métodos estudados que podem ser usados para calcular a resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas?
- Na abertura da Unidade, você foi questionado sobre a interpretação de um problema. Represente o sistema que resolve o problema da abertura desta Unidade.
- Se, na situação da abertura da Unidade, o número de animais fosse 122 e o número de pernas fosse 418, quantos animais de cada espécie haveria?

6 POLÍGONOS E TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Toda imagem digital do tipo *bitmap* é composta de *pixels*.

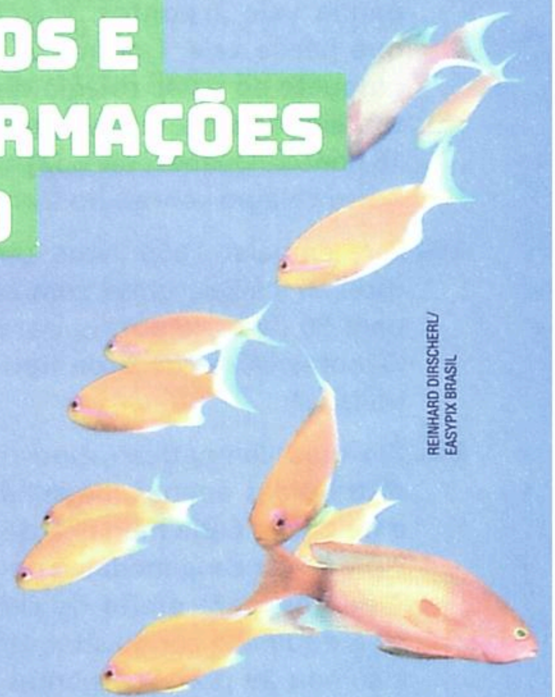
Um *pixel* é a menor unidade de uma imagem representada na tela de um computador.

É na ampliação ou na impressão de uma foto que podemos perceber a principal importância da quantidade de *pixels* que a compõem. Em uma máquina fotográfica, essa quantidade é o que conhecemos pelo nome de *megapixel*.

O valor de *megapixels* de uma máquina fotográfica diz quantos *pixels* vão compor uma fotografia tirada pela máquina.

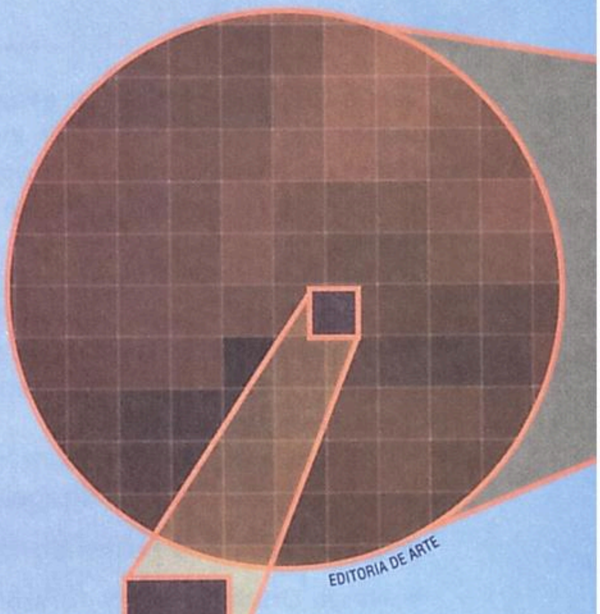
Como um *pixel* não possui um tamanho definido, quanto mais *megapixels* tiver uma foto, menor será o tamanho do *pixel* e mais ela poderá ser ampliada, pois o *pixel* sofrerá menos distorção.

Observe ao lado um exemplo de imagem no qual ampliamos uma parte da foto para ser possível ver os *pixels* e sua formação poligonal.



REINHARD DIRSCHERL/ EASYPIX BRASIL

Podemos ver facilmente um pixel em um computador ao ampliar uma imagem.

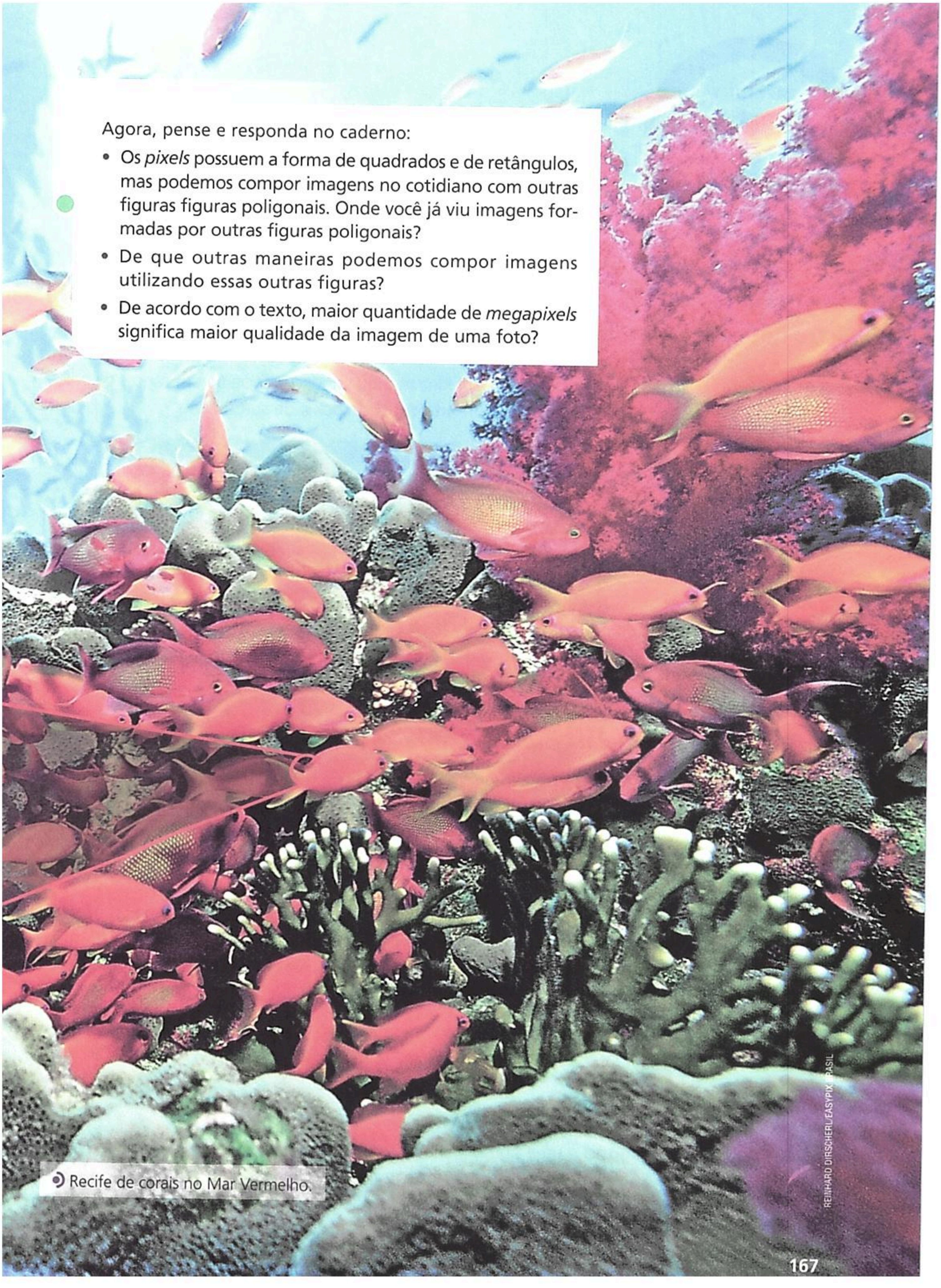


EDITORIA DE ARTE

Esta é a visualização de um *pixel*. Podemos entender que a imagem é formada por figuras quadradas bem pequenas que, juntas, formam uma imagem nítida.

Agora, pense e responda no caderno:

- Os *pixels* possuem a forma de quadrados e de retângulos, mas podemos compor imagens no cotidiano com outras figuras figuras poligonais. Onde você já viu imagens formadas por outras figuras poligonais?
- De que outras maneiras podemos compor imagens utilizando essas outras figuras?
- De acordo com o texto, maior quantidade de *megapixels* significa maior qualidade da imagem de uma foto?



Recife de corais no Mar Vermelho.

REINHARD DIRSCHERL/EASYPIX BRASIL

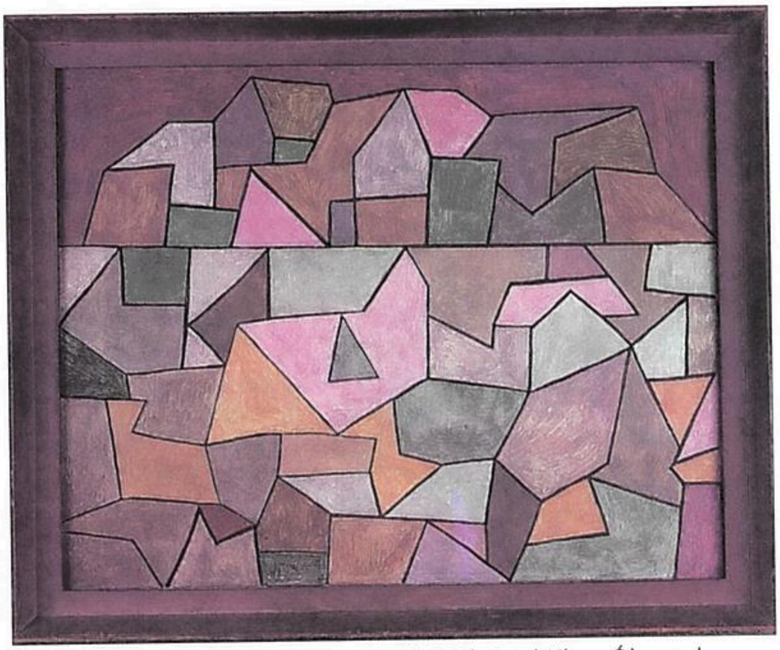
CAPÍTULO 1

POLÍGONOS E SEUS ELEMENTOS

O pintor e poeta Paul Klee nasceu em 18 de dezembro de 1879, em Münchenbuchsee, na Suíça. Em 1898, partiu para Munique, na Alemanha, a fim de estudar Arte. Foi professor da escola de Arte Moderna Bauhaus e da Academia de Belas-Artes de Dusseldorf.

Em 28 de junho de 1940, Paul Klee morreu em decorrência de um câncer de pele.

Observe a obra **Small town among the rocks**, de sua autoria:



KUNSTMUSEUM BERN, BERN

Small town among the rocks (1932), Paul Klee. Óleo sobre tela. 64 cm × 80 cm.

Nesse quadro, estão representadas figuras geométricas planas formadas apenas por linhas fechadas simples, segmentos de reta e respectivas regiões internas.

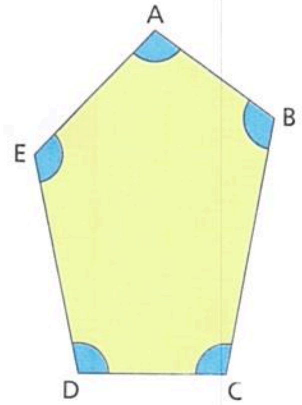
Cada uma dessas figuras é chamada **polígono**. No quadro anterior, por exemplo, lembram polígonos as seguintes figuras:

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Polígono é uma figura plana formada por uma linha fechada simples, composta apenas de segmentos de reta, reunida com a sua região interna.

Elementos de um polígono

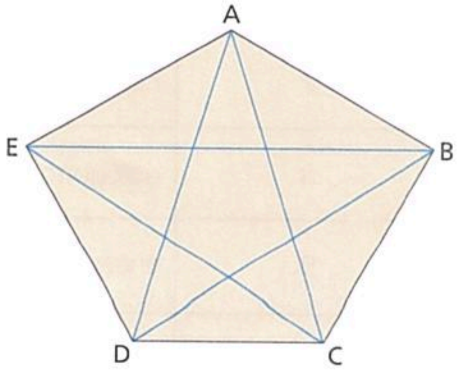
No polígono representado pela figura a seguir, podemos destacar os seguintes elementos:



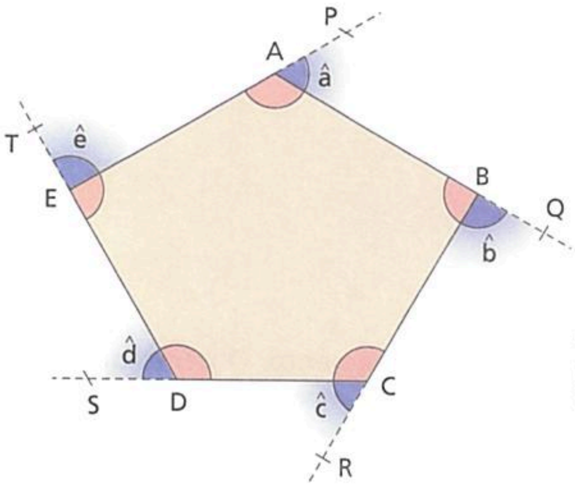
- Os **vértices**, que são os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. Nomeamos os polígonos por meio de seus vértices: no caso, temos o **polígono ABCDE**.
- Os **lados**, que são os segmentos **AB**, **BC**, **CD**, **DE** e **EA**.
- Os **ângulos internos**, que são os ângulos formados por dois lados consecutivos: $\mathbf{A\hat{B}C}$, $\mathbf{B\hat{C}D}$, $\mathbf{C\hat{D}E}$, $\mathbf{D\hat{E}A}$ e $\mathbf{E\hat{A}B}$. Também usamos as letras que indicam os vértices para representar os ângulos internos: $\mathbf{\hat{A}}$, $\mathbf{\hat{B}}$, $\mathbf{\hat{C}}$, $\mathbf{\hat{D}}$ e $\mathbf{\hat{E}}$.

Em um polígono, também devemos destacar:

- As **diagonais**, que são segmentos que unem um vértice a outro vértice não consecutivo a ele. Na figura a seguir, são diagonais $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$.



- Os **ângulos externos**, que são os ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento de um lado consecutivo a ele. No polígono da figura a seguir, temos: $\mathbf{P\hat{A}B}$, $\mathbf{Q\hat{B}C}$, $\mathbf{R\hat{C}D}$, $\mathbf{S\hat{D}E}$ e $\mathbf{T\hat{E}A}$.



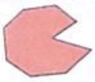
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Convém destacar que, em um mesmo polígono, o número de vértices, de lados e de ângulos internos é sempre o mesmo.

Nomenclatura

Apesar de a origem da palavra **polígono** ser relacionada a "vários ângulos", também podemos nomear polígonos considerando o número de lados que possuem.

Por serem utilizados com mais frequência, alguns polígonos recebem nomes especiais. Veja o quadro:

Polígono	Número de lados	Nome
	3	triângulo (*tri* = três)
	4	quadrilátero (*quadri* = quatro)
	5	pentágono (*penta* = cinco)
	6	hexágono (*hexa* = seis)
	7	heptágono (*hepta* = sete)
	8	octógono (*octo* = oito)
	9	eneágono (*enea* = nove)
	10	decágono (*deca* = dez)

Existem, ainda, outros polígonos com nomes especiais:

- 11 lados – undecágono
- 12 lados – dodecágono
- 15 lados – pentadecágono
- 20 lados – icoságono

Os demais polígonos, como o polígono de 13 lados, o de 18 lados, o de 25 lados, entre outros, não recebem nomes particulares.

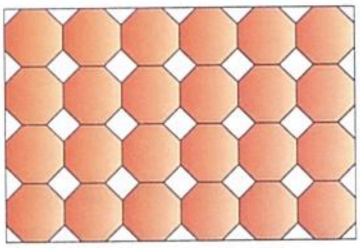
ATIVIDADE

Responda à questão no caderno.

1. A figura corresponde a um ladrilhamento. Observe que os polígonos representados nesse ladrilhamento são diferentes na forma e no tamanho, porém todos se encaixam muito bem!

a) Quantos tipos diferentes de figuras poligonais você observa nesse ladrilhamento?

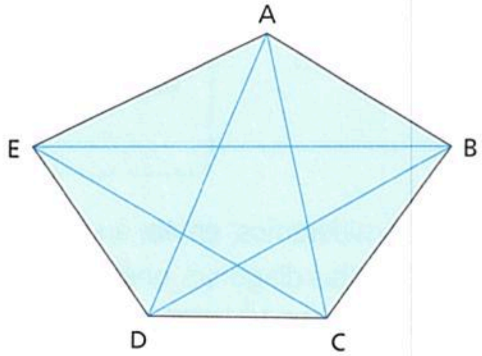
b) Como se chamam esses polígonos?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

CAPÍTULO 2

DIAGONAIS DE UM POLÍGONO CONVEXO



Você já sabe que todo segmento de reta que une dois vértices não consecutivos de um polígono é chamado **diagonal do polígono**.

No polígono da figura ao lado, os segmentos AC, AD, BD, BE e CE são as suas diagonais.

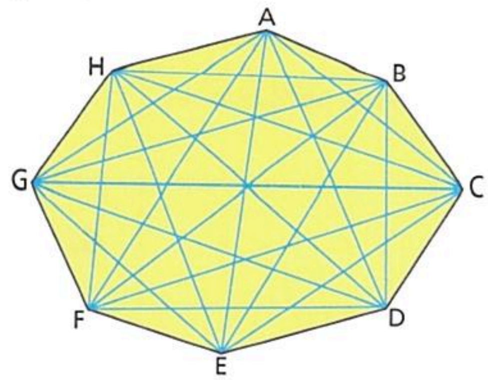
Devemos observar que:

- se quisermos traçar as diagonais a partir do vértice *A*, não podemos ligá-lo a 3 vértices do polígono, que sejam a ele mesmo (*A*) e aos vértices consecutivos (*B* e *E*);
- o segmento CA, por exemplo, indica a mesma diagonal que o segmento AC.

Em geral, o número de diagonais não coincide com o número de lados do polígono. A única exceção é o pentágono, que, como acabamos de ver na figura, possui 5 lados e 5 diagonais.

Cálculo do número de diagonais de um polígono

A representação do polígono a seguir é um octógono (8 lados), no qual estão traçadas todas as suas diagonais.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Você seria capaz de contar quantas diagonais tem esse octógono?

Traçar uma a uma ou contar as diagonais de um polígono é um processo trabalhoso, principalmente se ele tiver um número grande de lados.

Vamos, então, aprender a determinar o número de diagonais de um polígono sem traçá-las.

Note que, em um polígono qualquer de *n* lados (ou *n* vértices):

- de qualquer vértice do polígono partem diagonais para todos os vértices (*n*), menos para 3 deles (ele mesmo e os vértices consecutivos a ele); portanto, $(n - 3)$ diagonais;

- como são *n* vértices, e de cada um partem (n − 3) diagonais, o número total de diagonais seria $n \cdot (n - 3)$. Mas, dessa forma, estaríamos contando cada diagonal duas vezes (lembre-se de que $\overline{AC}$ e $\overline{CA}$, por exemplo, são a mesma diagonal). Então, o número de diagonais (*d*) é dado pela metade de $n \cdot (n - 3)$.

Assim:

> Em um polígono de *n* lados (ou *n* vértices), o número de diagonais (*d*) é dado por:
> $$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Consideremos, então, a situação a seguir.

1 Quantas diagonais possui o decágono?

decágono: 10 lados

$n = 10$

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = \frac{10 \cdot (10 - 3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

O decágono possui 35 diagonais.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Responda às questões a seguir.

a) Há um polígono que não possui diagonais. Qual é esse polígono?

b) Qual é o polígono que possui 2 diagonais?

2. Quantas diagonais tem um polígono de:

a) 5 lados?

b) 8 lados?

c) 11 lados?

d) 16 lados?

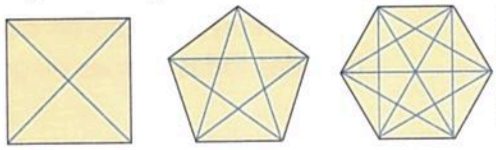
e) 18 lados?

3. O número de diagonais de um octógono é:

a) 13 **b)** 18 **c)** 20 **d)** 23

4. Um polígono tem 60 cm de perímetro, e todos os lados têm a mesma medida: 5 cm. Calcule o número de lados e o número de diagonais desse polígono.

5. (Saresp-SP) Observe as diagonais dos polígonos regulares de 4, 5 e 6 lados.



EDITORIA DE ARTE

Quantas diagonais tem um polígono regular de 7 lados?

a) 13 **b)** 14 **c)** 15 **d)** 16

6. Qual é o polígono cujo número de diagonais é o quádruplo do número de lados?

7. (UFSCar-SP) Um polígono regular com exatamente 35 diagonais tem:

a) 6 lados. **b)** 9 lados. **c)** 10 lados. **d)** 12 lados. **e)** 20 lados.

8. (PUC-RJ) Um polígono regular de *n* lados tem 90 diagonais. O valor de *n* é:

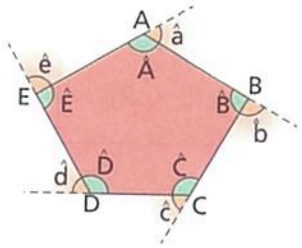
a) 10 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 20 **e)** 21

CAPÍTULO 3

ÂNGULOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

Ângulo interno e ângulo externo

Consideremos o polígono da figura seguinte. Nele podemos observar que:



- No vértice A ⟶ $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{a}) = 180°$
- No vértice B ⟶ $\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{b}) = 180°$
- No vértice C ⟶ $\text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{c}) = 180°$
- No vértice D ⟶ $\text{med}(\hat{D}) + \text{med}(\hat{d}) = 180°$
- No vértice E ⟶ $\text{med}(\hat{E}) + \text{med}(\hat{e}) = 180°$

Um ângulo interno e um ângulo externo de mesmo vértice de um polígono são sempre **adjacentes suplementares**.

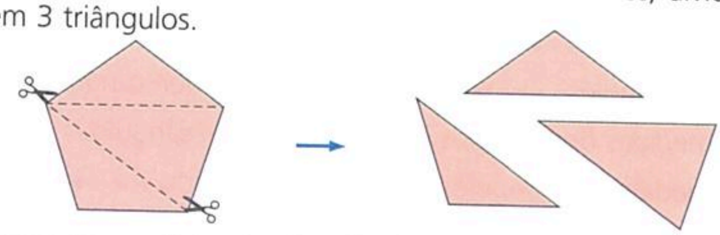
Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo

Vejamos, agora, como podemos fazer para calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo. Vamos partir do conhecimento de que a **soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°**.

Quando queremos determinar a soma das medidas dos ângulos internos (S_i) de um polígono convexo, podemos decompor o polígono em triângulos, uma vez que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo já é conhecida e igual a 180°. Fazemos isso traçando as diagonais que partem de um único vértice do polígono.

Observe:

- Traçando todas as diagonais a partir de um mesmo vértice, dividimos um pentágono em 3 triângulos.

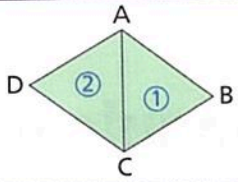
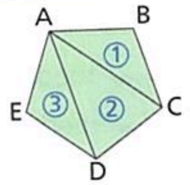
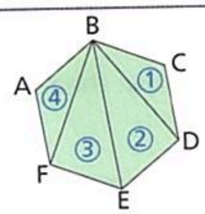
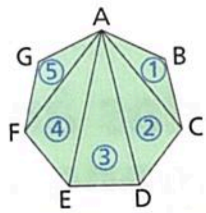


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, o valor da soma dos ângulos internos de um pentágono é $3 \cdot 180°$, ou seja, 540°.

Esse processo, porém, pode ser longo e demorado, principalmente quando o polígono tiver muitos lados.

O quadro seguinte vai nos ajudar a obter mais rapidamente essa soma.

Nome	**Polígono**	**Nº de lados**	**Nº de triângulos formados**	**Soma das medidas dos ângulos internos (S_i)**
Quadrilátero		4	$2 = (4 - 2)$	cada triângulo $2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono		5	$3 = (5 - 2)$	$3 \cdot 180° = 540°$
Hexágono		6	$4 = (6 - 2)$	$4 \cdot 180° = 720°$
Heptágono	 ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE	7	$5 = (7 - 2)$	$5 \cdot 180° = 900°$

Desse modo, verificamos que é possível dividir o polígono em um número de triângulos que coincide sempre com o número de lados do polígono menos 2.

Um decágono, por exemplo, pode ser dividido em 8 (ou seja, 10 − 2) triângulos. Então, a soma das medidas dos ângulos internos do decágono é:

$$\underbrace{8}_{\text{número de triângulos traçados}} \cdot \underbrace{180°}_{\text{soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo}} = 1\,440°$$

Podemos generalizar esse resultado para um polígono de *n* lados:

- número de lados $\longrightarrow$ *n*
- número de triângulos $\longrightarrow$ $n - 2$ (2 a menos que o número de lados do polígono)
- soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo $\longrightarrow$ 180°
- soma das medidas dos ângulos internos do polígono $\longrightarrow$ $(n - 2) \cdot 180°$

Sendo S_i a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados, temos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Veja como podemos usar a fórmula matemática $S_i = (n - 2) \cdot 180°$ para resolver problemas:

1 Um polígono tem 13 lados. Qual é a soma de seus ângulos internos?

13 lados $\longrightarrow n = 13$

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$S_i = (13 - 2) \cdot 180° = 11 \cdot 180° = 1\,980°$

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 13 lados é 1 980°.

2 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 900°. Qual é esse polígono?

Nesse caso, temos $S_i = 900°$.

Como $S_i = (n - 2) \cdot 180°$, temos: $(n - 2) \cdot 180° = 900°$

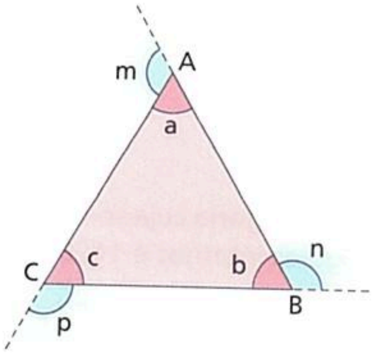
$n \cdot 180° - 360° = 900° \Rightarrow n \cdot 180° = 900° + 360° \Rightarrow n \cdot 180° = 1\,260° \Rightarrow n = \dfrac{1\,260°}{180°} = 7$

O polígono é o heptágono (7 lados).

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo

Assim como fizemos para os ângulos internos, vamos calcular a soma das medidas dos ângulos externos (S_e) de um polígono convexo.

- **Triângulo**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

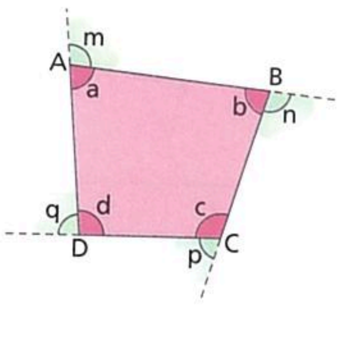
Sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} a + m &= 180° \\ b + n &= 180° \\ c + p &= 180° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{a + b + c}_{S_i = 180°} + \underbrace{m + n + p}_{S_e} = 3 \cdot 180°$$

Daí:

$180° + S_e = 540° \Rightarrow S_e = 360° \longrightarrow$ soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo

- **Quadrilátero**



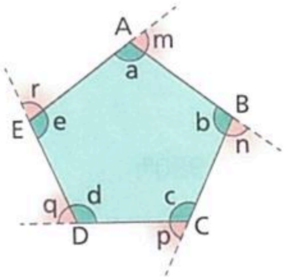
Sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} a + m &= 180° \\ b + n &= 180° \\ c + p &= 180° \\ d + q &= 180° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{a + b + c + d}_{S_i = 360°} + \underbrace{m + n + p + q}_{S_e} = 4 \cdot 180°$$

Daí:

$360° + S_e = 720° \Rightarrow S_e = 360° \longrightarrow$ soma das medidas dos ângulos externos de um quadrilátero

- **Pentágono**



Sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} a + m &= 180° \\ b + n &= 180° \\ c + p &= 180° \\ d + q &= 180° \\ e + r &= 180° \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{a + b + c + d + e}_{S_i = 540°} + \underbrace{m + n + p + q + r}_{S_e} = 5 \cdot 180°$$

Temos: $540° + S_e = 900° \Rightarrow S_e = 360°$ → **soma das medidas dos ângulos externos de um pentágono**

Se tomarmos um polígono de *n* lados, temos que, em cada vértice, a soma da medida do ângulo interno com a medida do ângulo externo é igual a 180°.

$$\underbrace{180° \cdot (n - 2)}_{S_i} + S_e = 180°n$$

$$S_i + S_e = 180°n$$

$$180°n - 360° + S_e = 180°n$$
$$S_e = \cancel{180°n} - \cancel{180°n} + 360°$$
$$S_e = 360°$$

Assim, podemos enunciar a propriedade:

A soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono é igual a 360°.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em um polígono qualquer de *n* lados, quando traçamos as diagonais que partem de um único vértice, decompomos o polígono em (n − 2) triângulos. Sabendo que, em determinado polígono, obtivemos 8 triângulos nessa decomposição, quantos lados tem esse polígono? Qual o seu nome?

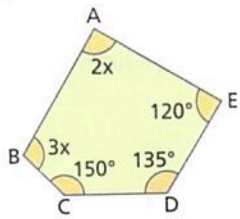
2. Copie o quadro seguinte e preencha-o corretamente.

	Pentágono	Eneágono	Icoságono
Soma das medidas dos ângulos internos			

3. Como se chama o polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é 1620°?

4. Em um polígono, temos que $S_i + S_e = 1080°$. Qual é esse polígono?

5. A figura ao lado é um pentágono não regular. Calcule as medidas dos ângulos $E\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

6. Copie o quadro seguinte e complete-o.

Soma das medidas dos ângulos internos	1 440°	1 800°	2 160°	2 340°
Número de lados do polígono				

CAPÍTULO

4 ÂNGULOS DE UM POLÍGONO REGULAR

Sabemos que, em um **polígono regular**:

- todos os lados são congruentes;
- todos os ângulos internos são congruentes.

Como em cada vértice de um polígono a soma das medidas do ângulo interno e seu ângulo externo é 180°, podemos concluir que os ângulos externos de um polígono regular também são congruentes entre si.

Indicamos:

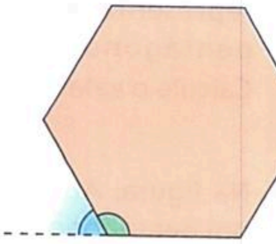
- a medida de cada ângulo interno de um polígono regular por a_i;
- a medida de cada ângulo externo de um polígono regular por a_e.

Para um polígono regular de *n* lados, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} \text{ e } a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}$$

Consideremos, então, as seguintes situações:

1 Qual a medida do ângulo interno e a do ângulo externo de um hexágono regular?



Hexágono regular: 6 lados.

Cálculo da soma das medidas dos ângulos internos:

$S_i = (6-2)\cdot 180° \Rightarrow S_i = 4 \cdot 180° = 720°$

Como o hexágono é regular:

$$a = \frac{S_i}{n} = \frac{720°}{6} = 120°$$

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$$

O ângulo interno mede 120°, e o ângulo externo mede 60°.

2 Qual é o polígono regular cuja medida do ângulo interno é igual a 144°?

Como o polígono é regular: $a_i = \frac{S_i}{n}$ $n \longrightarrow$ número de lados do polígono

Se $a_i = 144°$, então:

- $\frac{S_i}{n} = 144°$

$$\frac{180°(n-2)}{n} = 144°$$

$$\frac{180°(n-2)}{\cancel{n}} = \frac{144°n}{\cancel{n}}$$

- $180°n - 360° = 144°n$

$180°n - 144°n = 360°$

$36°n = 360°$

$$n = \frac{360°}{36°} = 10$$

Portanto, o polígono é o decágono (10 lados).

ATIVIDADES

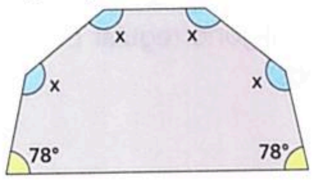
Responda às questões no caderno.

1. Em um polígono qualquer de *n* lados, podem ser traçadas (n − 3) diagonais partindo de cada vértice. Sabendo que, em um determinado polígono, podem ser traçadas 7 diagonais de cada vértice, responda:

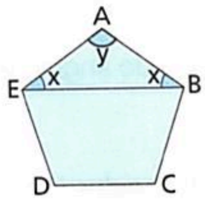
a) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono?

b) Qual é a medida de cada ângulo interno, caso o polígono seja regular?

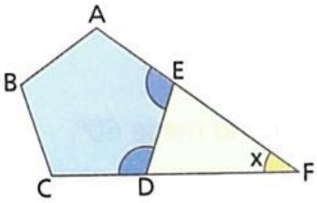
2. Considerando a representação do hexágono da figura, determine a medida *x*.



3. Na figura, ABCDE é a representação de um pentágono regular. Calcule o valor de y − x.



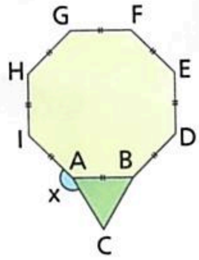
4. Na figura, ABCDE é a representação de um pentágono regular. Qual é a medida *x* do ângulo DFE do triângulo DFE?



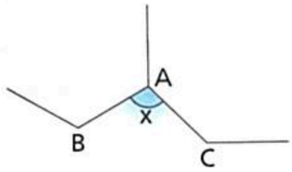
5. É dado um polígono regular, no qual a soma das medidas dos ângulos internos é igual ao quádruplo da soma das medidas dos ângulos externos. Qual é esse polígono regular?

6. Em um polígono, a razão entre a soma das medidas dos ângulos internos e a soma das medidas dos ângulos externos é igual a $\frac{7}{2}$. Quantos lados tem esse polígono?

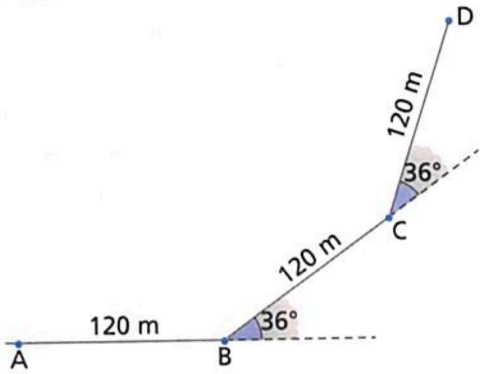
7. Considerando a figura, em que ABC é a representação de um triângulo equilátero, calcule a medida *x*.



8. Na figura seguinte, o segmento AB representa um lado de um hexágono regular, e o segmento AC representa um lado de um octógono regular. Qual é a medida de *x* do ângulo BAC?



9. A figura seguinte descreve, em esboço, de que maneira uma pessoa se desloca.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Partindo do ponto *A*, ela avança 120 m e gira 36° para a esquerda. A seguir, avança outros 120 m e gira 36° para a esquerda. Repete esse movimento até que retorna ao ponto *A*, fechando a trajetória.

a) Qual é o polígono regular que essa trajetória limita?

b) Quantos quilômetros essa pessoa caminha na trajetória toda?

c) Se, em média, essa pessoa der 11 passos a cada 8 m, quantos passos ela dará em toda a trajetória?

CAPÍTULO 5

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, vamos aprender a construir, com régua e compasso, dois polígonos regulares.

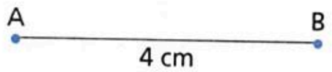
Triângulo equilátero

Já sabemos que o triângulo equilátero é um polígono regular de três lados; portanto, ele apresenta todos os lados e todos os ângulos internos congruentes entre si. Assim, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, cada ângulo do triângulo equilátero mede 60°.

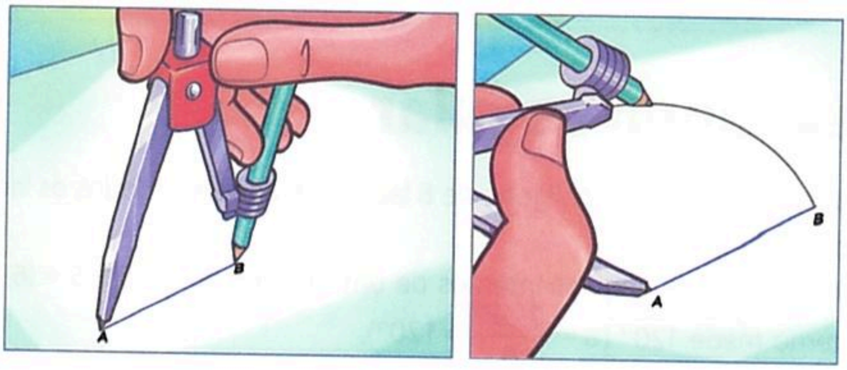
Siga, em seu caderno, as etapas da construção:

1º passo: Definimos o comprimento do lado do triângulo que desejamos construir. Nesse caso, vamos construir um triângulo equilátero de lado 4 cm.

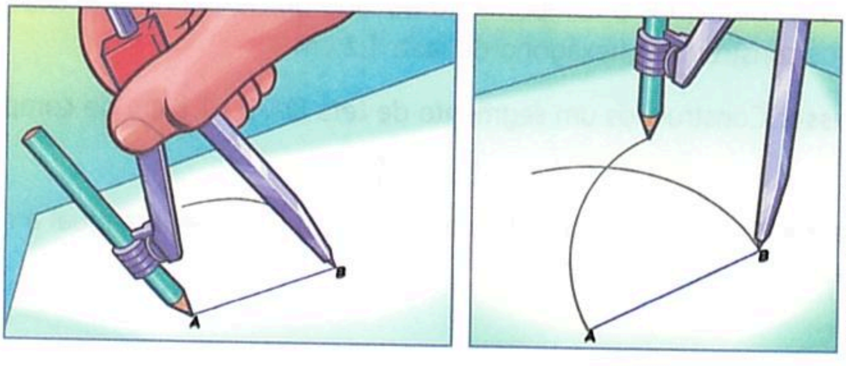
2º passo: Construímos um segmento de reta AB de 4 cm de comprimento.



3º passo: Colocamos a ponta-seca do compasso em *A*, abrimos até o ponto *B* e traçamos um arco.

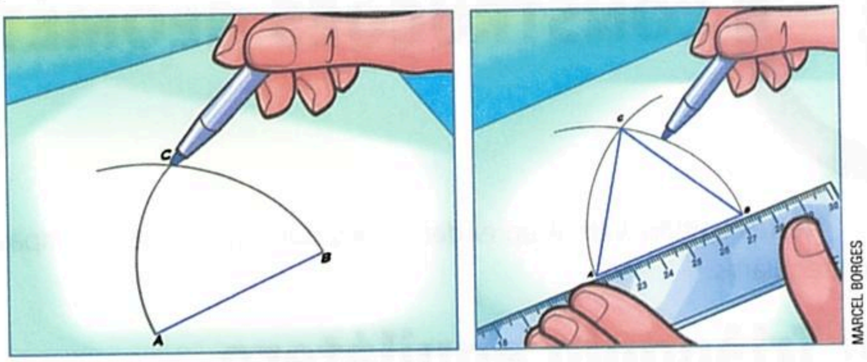


4º passo: Repetimos o procedimento anterior, mas, agora, a ponta-seca deve estar em *B*.



ILUSTRAÇÕES: MARCEL BORGES

5º passo: Marcamos o ponto de intersecção dos arcos e nomeamos como *C*. Unimos o ponto *C*, com uma régua, aos vértices *A* e *B*, determinando o triângulo equilátero.



Depois de traçado o contorno, basta colorir a parte interna da figura.

Para essa construção anterior, utilizamos arcos de circunferências de mesmo raio a fim de garantir que todos os lados do triângulo sejam congruentes. Já vimos que a circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes ao centro dessa circunferência. Assim, ao construir os arcos, estamos encontrando todos os pontos que distam 4 cm de *A* e todos os pontos que distam 4 cm de *B*. O ponto de intersecção desses arcos é aquele que dista, ao mesmo tempo, 4 cm de *A* e de *B*.

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. **Na construção anterior, utilizamos qual propriedade do triângulo equilátero?**
2. **Existe outra propriedade dos triângulos equiláteros que pode ser utilizada na sua construção?**

Hexágono regular

O hexágono regular é o polígono de 6 lados que apresenta todos os lados e todos os ângulos congruentes entre si.

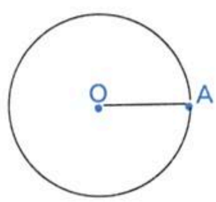
Como a soma dos ângulos internos de um hexágono é 720° ($S_i = (6-2) \cdot 180° = 720°$), cada ângulo interno mede 120° ($a = \dfrac{720°}{6} = 120°$).

Siga, em seu caderno, as etapas da construção:

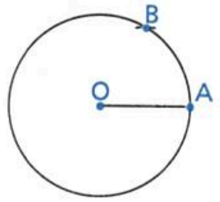
1º passo: Definimos o comprimento do lado do hexágono que desejamos construir. Nesse caso, vamos construir um hexágono de lado 1,2 cm.

2º passo: Construímos um segmento de reta OA de 1,2 cm de comprimento.

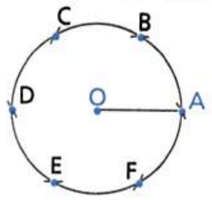
3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *O* e abertura igual à med ($\overline{OA}$) traçamos uma circunferência.



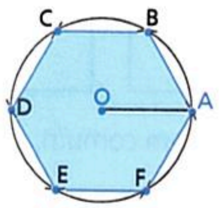
4º passo: Ainda com a mesma abertura e com a ponta-seca do compasso no ponto *A*, determinamos o ponto *B*.



5º passo: Com a mesma abertura e a ponta-seca em *B* determinamos o ponto *C* na circunferência. E com a ponta-seca em *C* e mesma abertura, determinamos o ponto *D*. E assim seguimos por toda a circunferência, até determinar todos os pontos que correspondem aos vértices do hexágono.

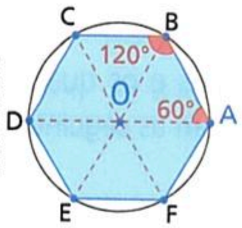


6º passo: Traçamos os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$. Para finalizar, colorimos a região interna da figura.



Esse processo garante a construção do hexágono regular desejado, pois:

- o triângulo formado pelos pontos OAB é um triângulo equilátero.
- em um triângulo equilátero, os ângulos internos são congruentes e medem 60°. Assim, construindo dois triângulos equiláteros consecutivos, obtemos o ângulo de 120° que é a medida do ângulo interno do hexágono regular.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Podemos dividir o hexágono em quantos triângulos equiláteros?

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. A partir da construção de um triângulo equilátero de 5 cm de lado, construa um hexágono regular de lado 5 cm.

DESAFIO

2. Utilizando régua e compasso, construa um polígono regular de 4 lados.

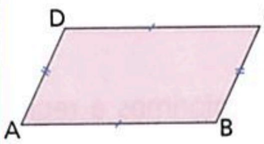
CAPÍTULO 6

PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS

Paralelogramos

Considere os quadriláteros seguintes:

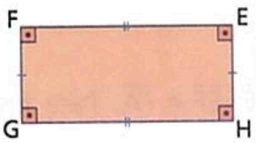
Figura 1



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

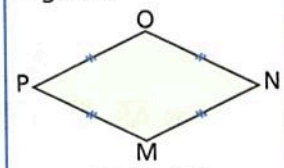
Figura 2



$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$

$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$

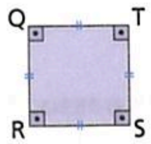
Figura 3



$\overline{MN} \parallel \overline{OP}$

$\overline{PM} \parallel \overline{NO}$

Figura 4



$\overline{RS} \parallel \overline{TQ}$

$\overline{QR} \parallel \overline{ST}$

Todos esses quadriláteros apresentam, em comum, o fato de terem os lados opostos paralelos.

Todo quadrilátero que tem os lados opostos paralelos é denominado **paralelogramo**.

Observe:

- O paralelogramo EFGH, da figura 2, que tem os quatro ângulos internos retos, é denominado **retângulo**.
- O paralelogramo MNOP, da figura 3, que tem os quatro lados congruentes, é chamado **losango** ou **rombo**.
- O paralelogramo RSTQ, da figura 4, que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos internos retos, é chamado **quadrado**. Os paralelogramos apresentam as seguintes propriedades:

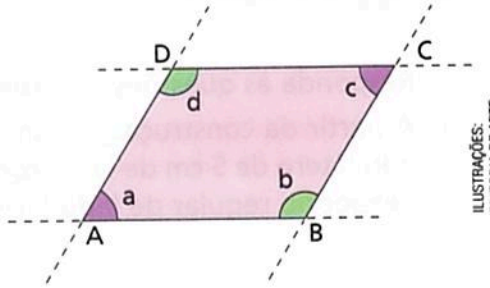
1ª propriedade:

Em um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.

- Como *a* e *d* são medidas de ângulos colaterais internos, temos: $a + d = 180° \rightarrow a = 180° - d$ (1)
- Como *c* e *d* são medidas de ângulos colaterais internos, temos: $c + d = 180° \rightarrow c = 180° - d$ (2)

Comparando (1) e (2), temos: $a = c \rightarrow \hat{A} \cong \hat{C}$

Usando o mesmo raciocínio, mostramos que $\hat{B} \cong \hat{D}$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

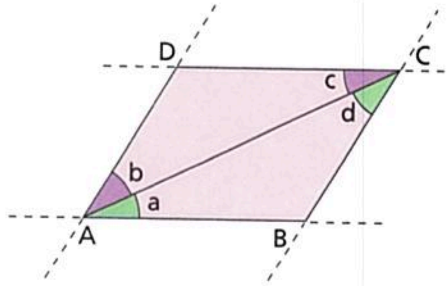
2ª propriedade:

Em qualquer paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

Traçando a diagonal $\overline{AC}$, obtemos os triângulos ABC e CDA, em que:

- a = c (ângulos alternos internos)
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum)
- b = d (ângulos alternos internos)

Então, pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Como consequência, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.



3ª propriedade:

Em qualquer paralelogramo, as diagonais cortam-se ao meio.

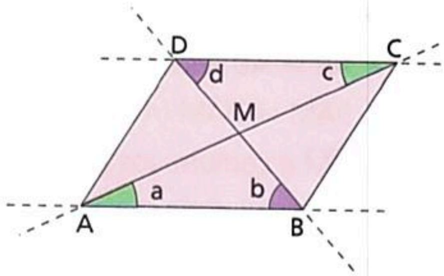
Traçando as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos:

- a = c (ângulos alternos internos)
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (lados opostos)
- b = d (ângulos alternos internos).

Então, pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos que $\triangle AMB \cong \triangle CMD$.

Como consequência, $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ e $\overline{BM} \cong \overline{DM}$.

Portanto, o ponto *M* é ponto médio tanto da diagonal $\overline{AC}$ como da diagonal $\overline{BD}$.



Agora, vamos estudar os paralelogramos que recebem nomes especiais: **retângulo, losango** e **quadrado**.

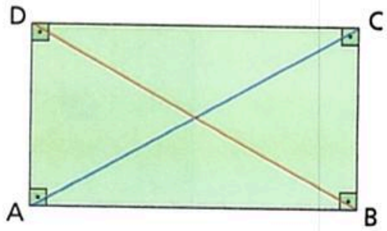
Retângulo

Além das propriedades dos paralelogramos, o retângulo apresenta uma propriedade característica: as suas diagonais são congruentes.

Decompondo o retângulo nos triângulos ABC e ABD, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (lado comum)
- $\hat{A} \cong \hat{B}$ (ângulos retos)
- $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (lados opostos do retângulo)

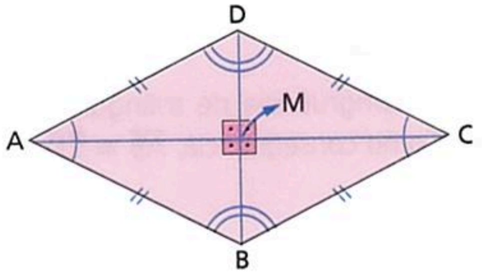
Pelo caso LAL da congruência de triângulos, temos que $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. Como consequência: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



Losango

Além das propriedades gerais dos paralelogramos, o losango apresenta uma propriedade característica: as suas diagonais são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango.

Considerando a diagonal $\overline{DB}$ do losango a seguir, pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos que $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



Podemos concluir também que esses triângulos são isósceles, portanto, os ângulos ADB e ABD e os ângulos CDB e CBD são congruentes.

Como os triângulos são congruentes, concluímos que os ângulos ADB, ABD, CDB e CBD são congruentes, assim, $\overline{DB}$ é bissetriz de $\hat{D}$ e $\hat{B}$.

Analogamente, podemos concluir que $\overline{AC}$ é bissetriz de $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

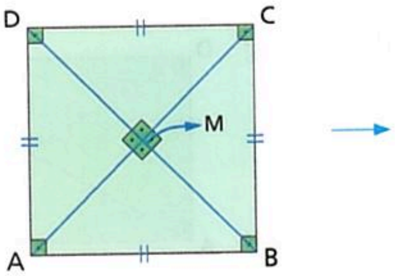
Agora, vamos demonstrar que as diagonais do losango são perpendiculares. Considerando os triângulos AMB e AMD, temos que:

- $AB \cong AD$ (lados do losango)
- $B\hat{A}M \cong D\hat{A}M$ ($\overline{AC}$ é bissetriz)
- $\overline{AM}$ é comum aos triângulos ABM e ADM.

Então, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $\triangle ABM \cong \triangle ADM$. Logo, os ângulos AMB e AMD também são congruentes e, como eles são suplementares, temos que $med(A\hat{M}B) = med(A\hat{M}D) = 90°$. Portanto, $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ são perpendiculares ($AC \perp DB$).

Quadrado

O quadrado reúne as propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos e não serão demonstradas, pois são análogas às demonstrações anteriores.



$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

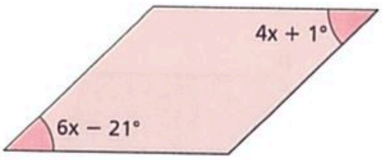
$\overrightarrow{AC}$ é bissetriz de $\hat{A}$ e $\overrightarrow{CA}$ é bissetriz de $\hat{C}$.

$\overrightarrow{BD}$ é bissetriz de $\hat{B}$ e $\overrightarrow{DB}$ é bissetriz de $\hat{D}$.

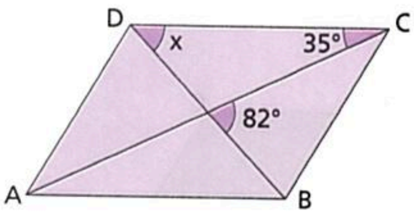
ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

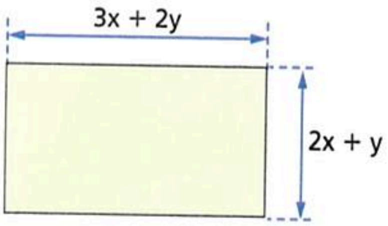
1. Considere o paralelogramo da figura a seguir. Nela, estão expressas as medidas de dois ângulos opostos. Quais são as medidas dos quatro ângulos desse paralelogramo?



2. Determine a medida x no paralelogramo da figura a seguir.



3. A figura seguinte é um retângulo.

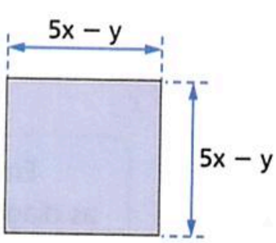


De acordo com as indicações, escreva o polinômio que indica:

a) o perímetro do retângulo.

b) a área do retângulo.

4. Esta figura é um quadrado.

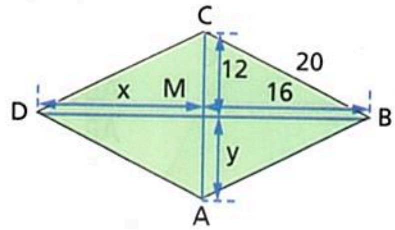


De acordo com as indicações, escreva o polinômio que indica:

a) o perímetro do quadrado.

b) a área do quadrado.

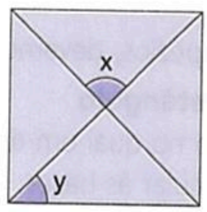
5. Observando o losango ABCD, determine:



a) as medidas x e y indicadas.

b) os perímetros dos seguintes triângulos: $\triangle AMB$, $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$.

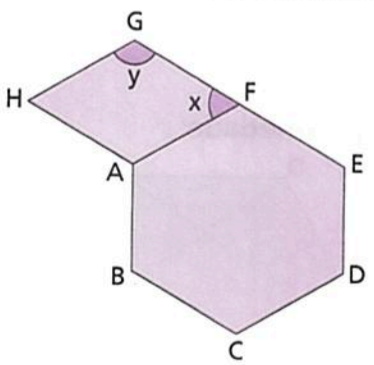
6. Sabendo que a figura a seguir é um quadrado, dê as medidas x e y indicadas.



7. Se as diagonais de um retângulo formam um ângulo de 114° entre si, quais são as medidas dos ângulos que as diagonais formam com os lados do retângulo?

8. A medida de cada ângulo obtuso de um losango é expressa por $2x + 5°$, enquanto a medida de cada ângulo agudo é expressa por $x + 40°$. Nessas condições, determine as medidas dos quatro ângulos desse losango.

9. Na figura seguinte, ABCDEF é um hexágono regular, e AFGH é um losango. Determine as medidas x e y indicadas.

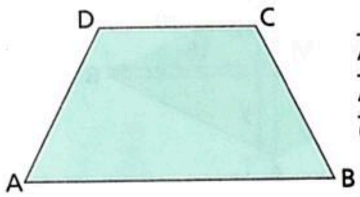


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Trapézios

Observe os quadriláteros das figuras seguintes. Eles apresentam apenas dois lados paralelos. Quadriláteros com essa característica são chamados **trapézios**.

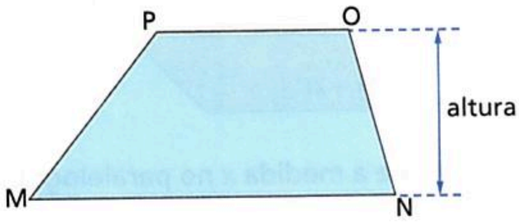
Os lados paralelos são as **bases** do trapézio.



$\overline{AB} \, // \, \overline{CD}$.
$\overline{AB}$ é a base maior.
$\overline{CD}$ é a base menor.

$\overline{PS} \, // \, \overline{QR}$.
$\overline{PS}$ é a base maior.
$\overline{QR}$ é a base menor.

A distância entre as bases é a medida da altura do trapézio.

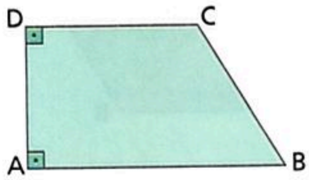


Entre os trapézios, devemos destacar dois casos particulares:

- **Trapézio retângulo**

  É o trapézio no qual um dos lados não paralelos é perpendicular às bases.

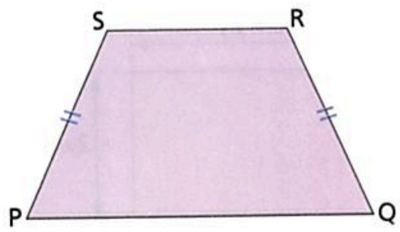
  O lado $\overline{AD}$ é perpendicular às bases.



- **Trapézio isósceles**

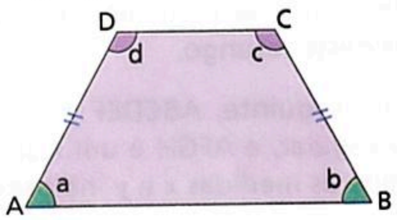
  É o trapézio no qual os lados não paralelos são congruentes.

  Vamos apresentar duas propriedades dos trapézios isósceles.



$\overline{PS} \cong \overline{QR}$

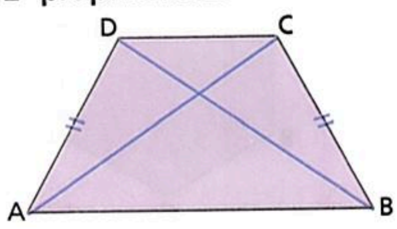
1ª propriedade:



$a = b \longrightarrow \hat{A} \cong \hat{B}$
$c = d \longrightarrow \hat{C} \cong \hat{D}$

Em um trapézio isósceles, os ângulos da mesma base são congruentes.

2ª propriedade:



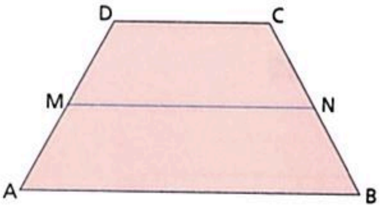
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Em um trapézio isósceles, as diagonais são congruentes.

Base média de um trapézio

O segmento cujas extremidades são os pontos médios dos lados não paralelos é denominado base média do trapézio. A base média de um trapézio é um segmento paralelo às bases do trapézio.



M ⟶ ponto médio do lado $\overline{AD}$

N ⟶ ponto médio do lado $\overline{BC}$

$\overline{MN}$ ⟶ base média do trapézio

$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$

A medida da base média de um trapézio é igual à metade da soma das medidas das bases do trapézio.

$$\text{med}\left(\overline{MN}\right) = \frac{\text{med}\left(\overline{AB}\right) + \text{med}\left(\overline{CD}\right)}{2}$$

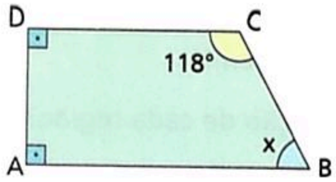
ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

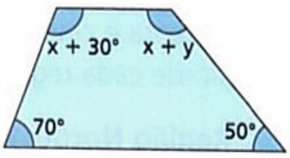
1. Em um trapézio, três de seus ângulos medem 78°, 102° e 98°. Determine a medida do quarto ângulo.

2. No trapézio isósceles, os ângulos da mesma base são congruentes. Se em um trapézio isósceles um dos ângulos mede 74°, determine as medidas dos outros três ângulos.

3. Determine a medida x indicada na figura.

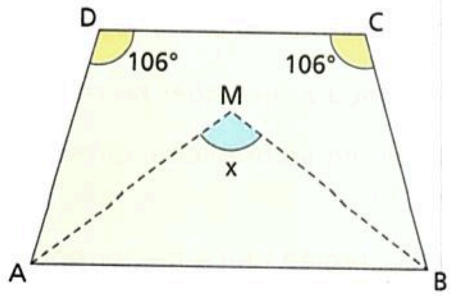


4. Determine as medidas x e y indicadas na figura.

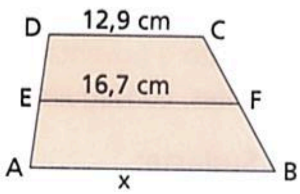


5. Em um trapézio isósceles, a medida de cada ângulo agudo corresponde a $\frac{4}{5}$ da medida de cada ângulo obtuso. Nessas condições, determine as medidas dos quatro ângulos desse trapézio.

6. A figura a seguir é um trapézio isósceles. Sabendo que $\overline{AM}$ está contido na bissetriz do ângulo A, e $\overline{BM}$ está contido na bissetriz do ângulo B, determine a medida x indicada.



7. No trapézio ABCD, $\overline{EF}$ é a base média. Determine a medida x da base maior $\overline{AB}$.



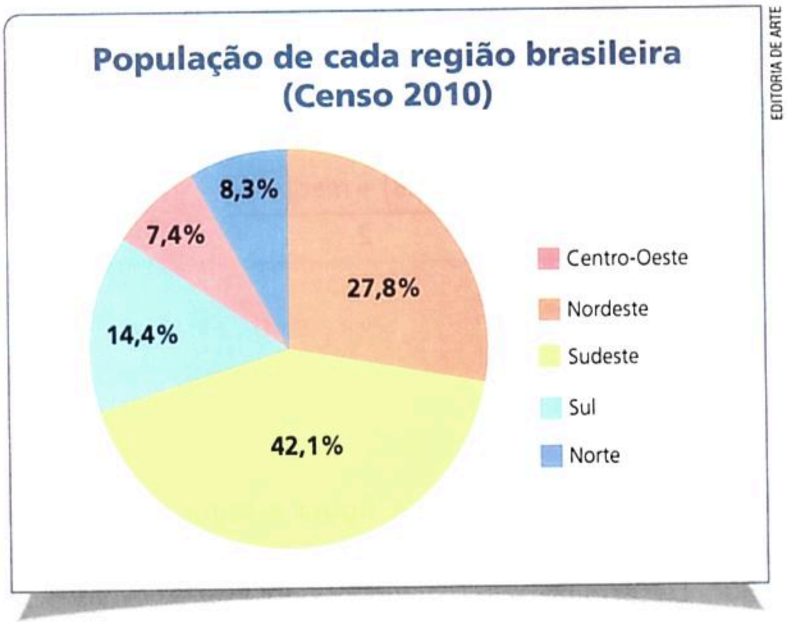
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

8. Em um trapézio, denominamos x a medida da base maior e y, a medida da base menor. Sabendo que a base média mede 25 cm e que $x - y = 14$ cm, determine as medidas das bases desse trapézio.

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Interpretando um gráfico de setores

Observe o gráfico de setores representado:



Informações obtidas em: IBGE. **Sinopse do Censo Demográfico 2010**. Disponível em: <www.censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=5&uf=00>. Acesso em: 19 out. 2018.

Ele expressa, em % (por cento), a população aproximada de cada região brasileira em relação à população total do Brasil, segundo o Censo 2010 do IBGE.

Responda às questões no caderno.

1. Qual região brasileira apresenta a maior população? Qual a porcentagem que a representa?

2. Qual região tem a menor população? Com qual porcentagem?

3. Observando o gráfico, conseguimos determinar a população de cada região? Por quê?

Sabendo que a população aproximada do Brasil, segundo o Censo 2010 do IBGE, é de 190 755 799 (cento e noventa milhões, setecentos e cinquenta e cinco mil, setecentos e noventa e nove) habitantes, conseguimos determinar a população de cada região. Observe.

Região Sudeste:

Porcentagem		Número de habitantes
100%	–	190 755 799
42,1%	–	x

$$x = \frac{42{,}1 \cdot 190755799}{100} \Rightarrow x \simeq 80\,308\,191$$

Região Nordeste:

Porcentagem		Número de habitantes
100%	–	190 755 799
27,8%	–	x

$$x = \frac{27{,}8 \cdot 190755799}{100} \Rightarrow x \simeq 53\,030\,112$$

Região Sul:

Porcentagem Número de habitantes

100% – 190 755 799

14,4% – x

$$x = \frac{14,4 \cdot 190755799}{100} \Rightarrow x \simeq 27468835$$

Região Norte:

Porcentagem Número de habitantes

100% – 190 755 799

8,3% – x

$$x = \frac{8,3 \cdot 190755799}{100} \Rightarrow x \simeq 15832732$$

Região Centro-Oeste:

Porcentagem Número de habitantes

100% – 190 755 799

7,4% – x

$$x = \frac{7,4 \cdot 190755799}{100} \Rightarrow x \simeq 14115929$$

Assim, podemos dizer que a região Sudeste tem aproximadamente 80 308 191 habitantes.

Da mesma maneira, conseguimos encontrar a população aproximada de cada região brasileira, a partir da porcentagem apresentada no gráfico de setores. Esta tabela foi elaborada com os dados encontrados.

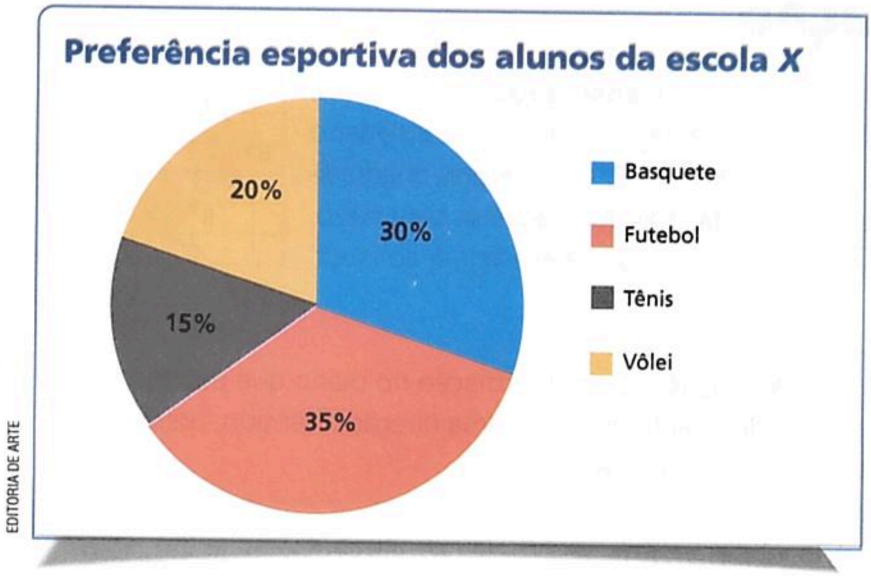
População de cada região brasileira (Censo 2010)

Região	Porcentagem (%)	Número de habitantes
Norte	8,3	15 832 732
Nordeste	27,8	53 030 112
Centro-Oeste	7,4	14 115 929
Sudeste	42,1	80 308 191
Sul	14,4	27 468 835
Total	**100**	**190 755 799**

Informações obtidas com base no gráfico da página anterior.

Responda às questões no caderno.

4. O gráfico a seguir indica o resultado de uma pesquisa sobre a preferência esportiva dos alunos de uma escola de São Paulo. Sabendo que foram pesquisados 360 alunos, construa uma tabela relacionando o esporte com a quantidade de alunos que preferiu cada um deles.



Fonte: Alunos da escola *x*.

a) Qual o esporte favorito dos alunos da escola *X*?

b) Quantos alunos responderam que preferem o basquete?

c) Você acha melhor analisar os dados representados em um gráfico de setores ou em uma tabela?

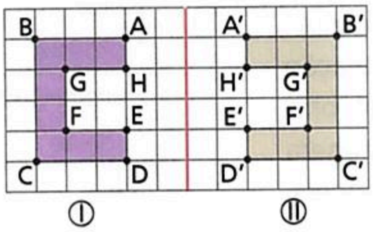
CAPÍTULO 7

TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Já vimos que, em polígonos e em outras figuras geométricas, podem ser aplicadas **transformações geométricas**. As figuras obtidas por essas transformações são imagens do original e podem ter suas medidas dos lados alteradas, assim como sua posição no plano.

Reflexão

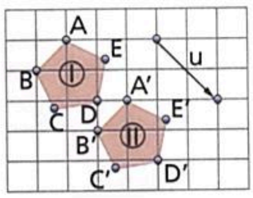
Considere a figura representada a seguir. Podemos dizer que Ⓘ é a reflexão de Ⓘ em relação à linha vermelha.



Quando duas imagens são reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há **simetria de reflexão** ou **simetria axial** e a linha é seu **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria**.

Translação

O pentágono regular Ⓘ foi **transladado** na direção e sentido do vetor *u*, gerando o pentágono Ⓘ. Para transladar o pentágono, deslocamos os vértices *A*, *B*, *C*, *D* e *E* dois quadradinhos para a direita e, em seguida, dois quadradinhos para baixo, obtendo os pontos *A'*, *B'*, *C'*, *D'* e *E'*. Observe a figura ao lado:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

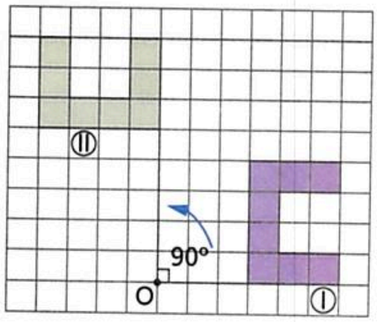
SAIBA QUE

Transladar: transferir para outro lugar.

A **translação** é a transformação no plano que desloca todos os pontos de uma figura na mesma direção e sentido, preservando suas dimensões originais.

Rotação

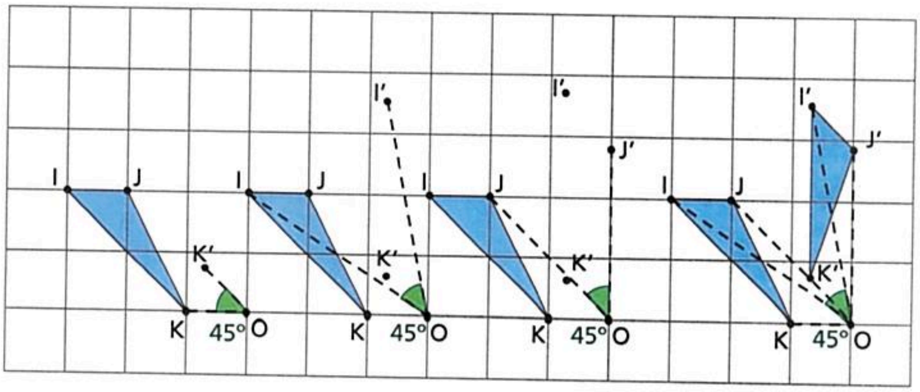
Considere a figura a seguir. Nela, (I) foi rotacionada em torno do ponto *O*, em 90° no sentido anti-horário, obtendo-se a figura (II).



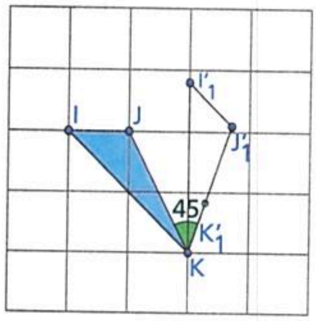
Para construir a rotação de uma figura, é preciso definir o ponto em torno do qual essa figura girará, ou seja, um **centro de rotação**. Também é preciso definir um ângulo e um sentido de rotação.

Abaixo temos a rotação do triângulo IJK, construído passo a passo, em torno do ponto *O*, com um ângulo de rotação de 45°, no sentido horário.

Observe como cada um dos vértices do triângulo foi unido ao centro de rotação e definiu, de acordo com a medida do ângulo de rotação e o sentido definido, os vértices da imagem I'J'K'.



O centro de rotação também pode ser um dos pontos da figura. Agora, vamos rotacionar o triângulo IJK, considerando o vértice *K* como centro de rotação. Faremos um giro de 45° no sentido horário:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

> A transformação geométrica **rotação** consiste em girar determinada figura, em torno de um ponto do plano, mantendo o ângulo de deslocamento.

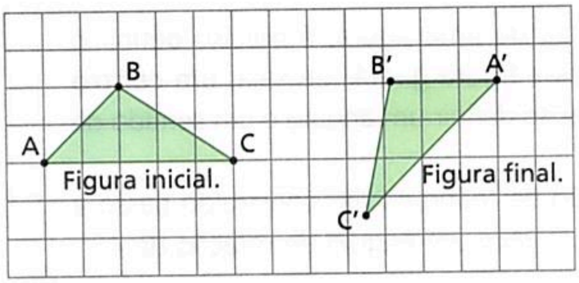
PENSE E RESPONDA

Na figura acima, qual o ponto fixo desta rotação?

Composição de transformações

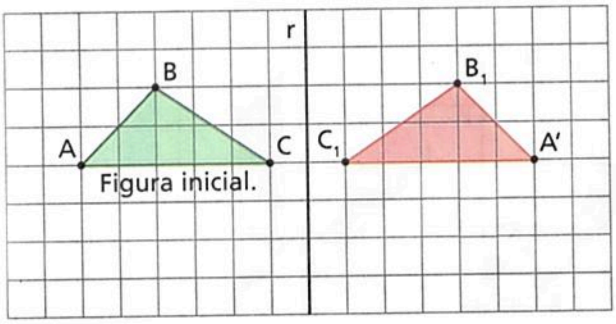
Algumas figuras podem ser obtidas por meio da composição de transformações geométricas no plano. Vejamos alguns exemplos.

1 Observe a figura.

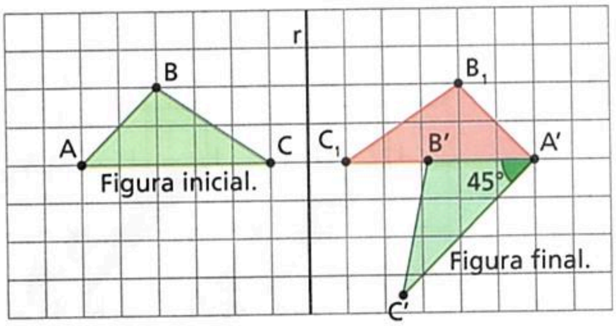


O triângulo ABC (Figura inicial) passou por duas transformações geométricas para chegar ao triângulo A'B'C' (Figura final). Acompanhe o passo a passo:

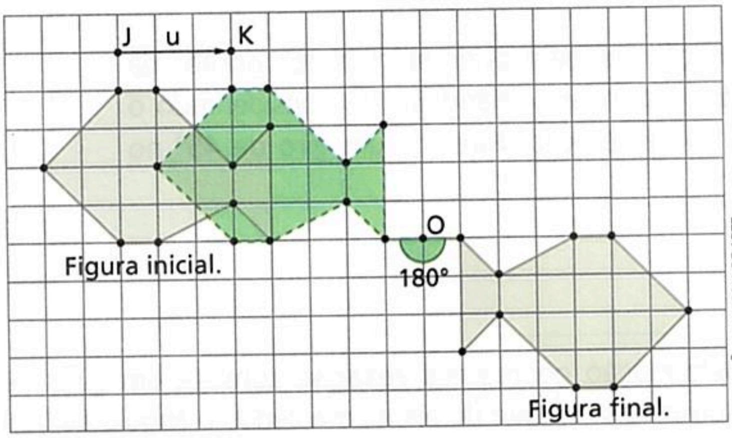
1º) Reflexão em relação à reta *r*.



2º) Rotação de 45° no sentido anti horário, com centro de rotação o vértice *A'*.



2 A figura inicial do peixe a seguir sofreu uma translação horizontal de 3 unidades para a direita e em seguida uma rotação de 180° em relação ao ponto *O*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

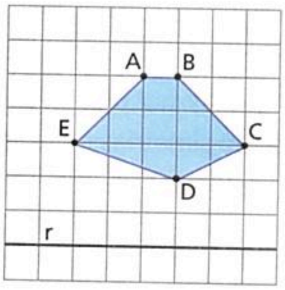
PENSE E RESPONDA

Responda à questão no caderno.

Na figura do peixe, é possível chegar à figura final fazendo outros tipos de composição de transformações?

ATIVIDADES

1. Copie o polígono ABCDE em uma folha de papel quadriculado e, em seguida, construa sua reflexão em relação à reta *r*.



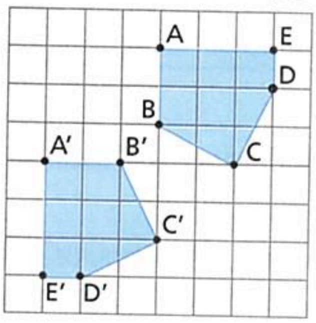
2. Construa, em uma folha de papel quadriculado, um plano cartesiano e marque os pares ordenados *A* (3, 2), *B* (7, 2) e *C* (5, 5).

Em seguida, construa o polígono A'B'C', refletido em relação ao eixo das ordenadas (eixo *y*).

a) Quais as coordenadas dos pontos A', B' e C'?

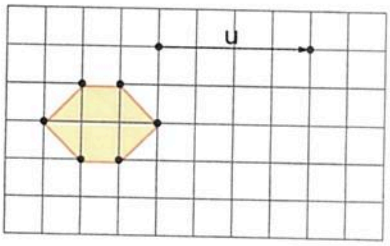
b) O que você observa com relação às coordenadas dos pontos A', B' e C'?

3. Os pentágonos ABCDE E A'B'C'D'E' são simétricos em relação a uma reta *t*. Copie os pentágonos em uma folha de papel quadriculado e desenhe a reta *t*.

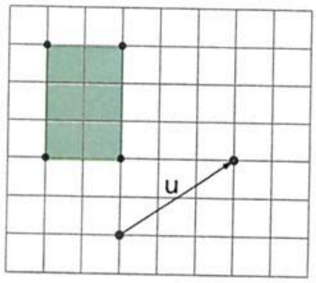


4. Copie as figuras a seguir em uma folha de papel quadriculado. Em seguida, faça a translação de cada uma delas, obedecendo o vetor dado.

a)

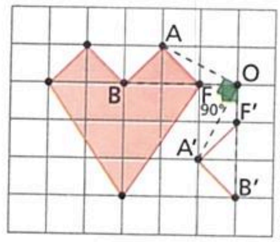


b)



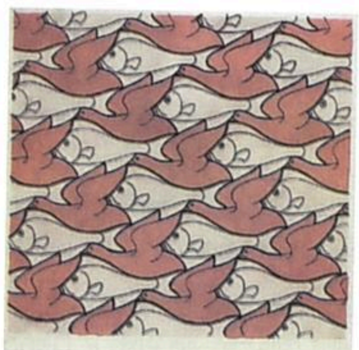
DESAFIO

5. Copie a figura em uma folha de papel quadriculado e, em seguida, complete sua rotação em torno do ponto *O* no sentido anti-horário, de um ângulo de 90°. Use régua e jogo de esquadros.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

6. Escher (1898-1972), artista holandês de grande renome, utilizou duas transformações no plano para compor a obra a seguir.



Pássaros/Peixes (Nº 22), de Maurits Cornelis Escher, 1941.

Quais transformações você identifica no quadro?

7. Em uma folha de papel quadriculado, construa um plano cartesiano e uma figura geométrica qualquer. Em seguida, aplique uma reflexão em relação ao eixo das ordenadas, seguida de uma translação vertical de 3 unidades.

TECNOLOGIAS

Depois do estudo das transformações geométricas no plano, vamos usar ferramentas do *software* Geogebra para fazer composições envolvendo simetrias de reflexão, translação e rotação.

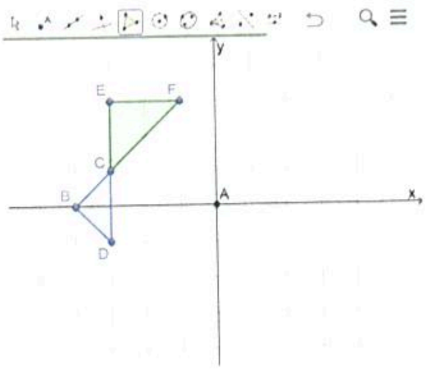
Transformações no plano

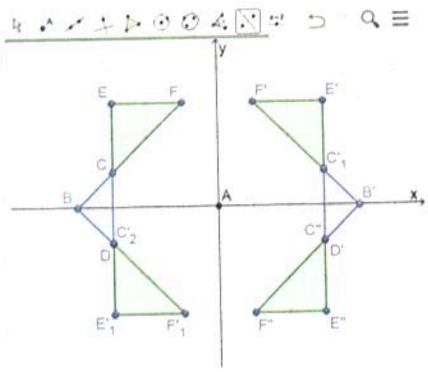
Talita e Fernando estavam usando o *software* de geometria dinâmica para estudar transformações no plano. Eles receberam um desafio para compor um padrão geométrico usando as simetrias de reflexão, translação e rotação. Nesse desafio, eles poderiam usar apenas as seguintes ferramentas:

- Mover
- Reflexão em relação a uma reta
- Polígono
- Vetor
- Rotação em torno de um ponto
- Reta
- Ponto
- Translação por um vetor
- Intersecção entre dois objetos

Além disso, eles poderiam usar a ferramenta apenas duas vezes. Observe algumas etapas das construções realizadas por Talita e Fernando.

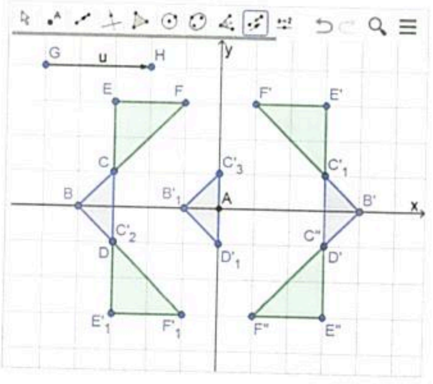
1º) Inicialmente eles construíram dois triângulos. Em seguida, os triângulos BCD e CEF foram refletidos em relação ao eixo *y*. Depois, refletiram os triângulos CEF e $F'E'C_1'$ em relação ao eixo *x*.

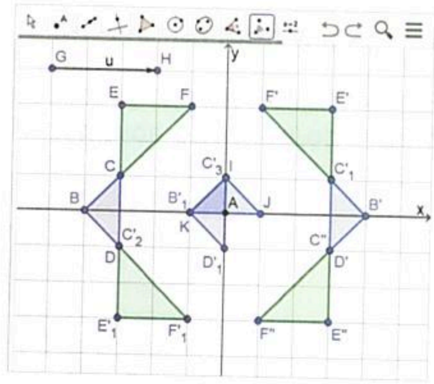




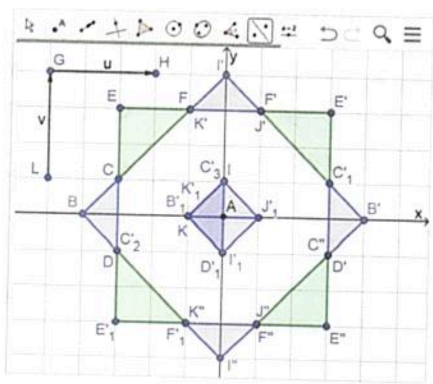
ILUSTRAÇÕES: GEOGEBRA 2018

2º) Foi realizada uma translação do triângulo BCD, obtendo o triângulo B_1' $C_3'D_1'$. Em seguida, foi feita uma rotação desse último triângulo, de centro em *A* e 90° no sentido horário.



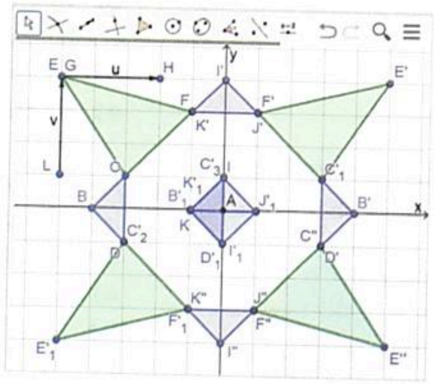


3º) Em seguida, foi realizada uma translação do triângulo JKI, obtendo o triângulo J'K'I'. Para finalizar, Talita refletiu os triângulos JKI e J'K'I' em relação ao eixo x, obtendo o padrão geométrico que desejava.



1 No Geogebra, construa o padrão geométrico apresentado anteriormente. Você pode seguir o passo a passo que Talita e Fernando usaram, ou realizar as transformações geométricas em outra ordem.

2 Depois de construído o padrão geométrico, usando a ferramenta clique sobre um vértice de um dos primeiros polígonos construídos e arraste. Veja a seguir um exemplo.



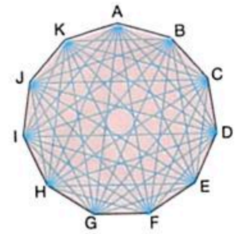
ILUSTRAÇÕES: GEOGEBRA 2018

O que você verificou?

RETOMANDO O QUE APRENDEU

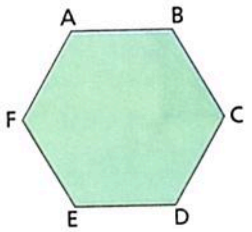
Responda às questões no caderno.

1. Calcule quantas diagonais possui a representação do polígono ao lado.



a) 22
b) 34
c) 44
d) 55
e) 66

2. (Saresp-SP) Seis cidades estão localizadas nos vértices de um hexágono regular, como mostra a figura. Há um projeto para interligá-las, duas a duas, por meio de estradas. Algumas dessas estradas correspondem aos lados do polígono, e as demais correspondem às diagonais. Desse modo, o número de estradas a serem construídas é:

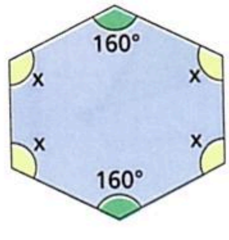


a) 9
b) 15
c) 21
d) 24
e) 27

3. Quantos lados tem o polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é 2 160°?

a) 14
b) 16
c) 17
d) 18
e) 20

4. Esta figura é a representação de um hexágono não regular. O valor de *x* é:



a) 105°
b) 100°
c) 110°
d) 120°
e) 108°

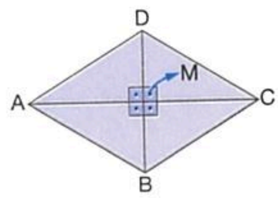
5. Em um polígono regular, a medida de cada ângulo externo é 24°. Esse polígono tem:

a) 90 diagonais.
b) 105 diagonais.
c) 119 diagonais.
d) 135 diagonais.
e) 170 diagonais.

6. Um retângulo e um quadrado têm o mesmo perímetro. No retângulo, um dos lados mede 15 cm, e a medida do outro corresponde a 60% dessa medida. O lado do quadrado mede:

a) 10 cm
b) 12 cm
c) 14 cm
d) 16 cm
e) 20 cm

7. No losango ABCD a seguir, temos que:

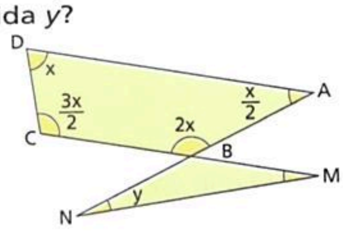


- med ($\overline{AM}$) = 40 cm
- med ($\overline{MC}$) = x + 3y
- med ($\overline{BM}$) = x + y
- med ($\overline{MD}$) = 30 cm

Qual é o valor da expressão x − y?

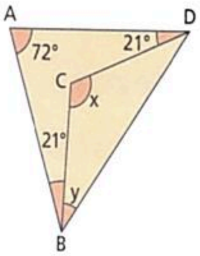
a) 16 cm
b) 18 cm
c) 20 cm
d) 25 cm
e) 30 cm

8. Na figura a seguir, o triângulo MBN é isósceles ($\overline{BM} \cong \overline{BN}$). Qual é, em graus, o valor da medida *y*?



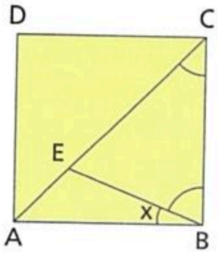
a) 12°
b) 14°
c) 15°
d) 18°
e) 20°

9. Na figura abaixo, ABCD é um quadrilátero qualquer e $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. Então, a medida y do ângulo CBD é.



a) 31°
b) 32°
c) 33°
d) 34°
e) 35°

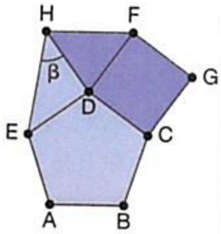
10. (OBM)



a) A figura ABCD é um quadrado e $\overline{CE} \cong \overline{CB}$. Determine a medida do ângulo x.

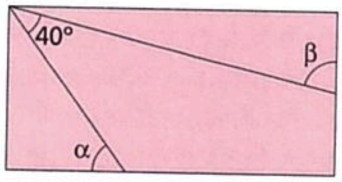
b) Resolva a equação $\dfrac{3x}{x-4} - \dfrac{2}{x} = 3$.

11. (OBM) Na figura, ABCDE é um pentágono regular, CDFG é um quadrado e DFH é um triângulo equilátero. O valor do ângulo β é:



a) 30°
b) 36°
c) 39°
d) 45°
e) 60°

12. (Fuvest-SP) No retângulo a seguir, o valor em graus de $\alpha + \beta$ é:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 50
b) 90
c) 120
d) 130
e) 220

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos os polígonos e, em especial, os quadriláteros. Nosso estudo sobre polígonos foi dividido em: elementos de um polígono, nomenclatura utilizada, diagonais de um polígono, relação entre os ângulos internos e externos de um polígono, soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo. Com relação aos quadriláteros, foram abordados: as propriedades de um quadrilátero, os paralelogramos, os trapézios e a base média de um trapézio.

Vamos agora refletir sobre as aprendizagens adquiridas nesta Unidade. Responda no caderno às questões a seguir.

- Na abertura da Unidade, citamos que a quantidade de *pixels* de uma foto é muito importante para a ampliação dela. Faça uma pesquisa e verifique qual a relação entre a quantidade de *pixels* e a qualidade de uma fotografia.
- Qual é a relação entre o ângulo interno e o ângulo externo adjacente a ele de um polígono regular?
- Que características tem um polígono regular?
- Quais quadriláteros estudados são paralelogramos?
- Que tipos de trapézios foram estudados?
- Que transformações geométricas no plano você conheceu?

Querer é poder? Mas, o que eu quero?

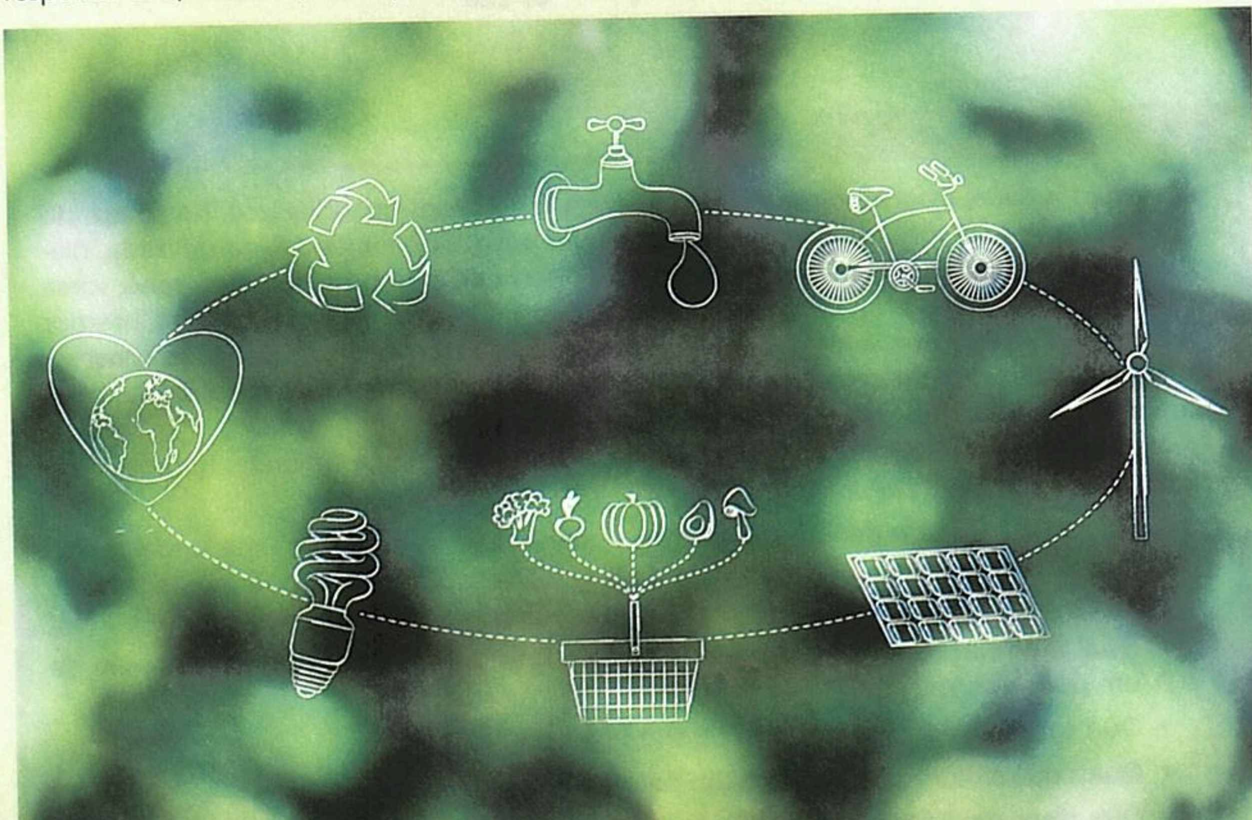
Quantas vezes você já comprou algo que não precisava? Ou apenas porque queria ter, ou porque seus colegas já tinham e você ainda não?

O consumismo, o acúmulo cada vez maior de bens materiais e supérfluos, promove em nossa sociedade um declínio de valores. Em alguns casos, as pessoas se tornam dependentes desses bens, valorizando mais a aquisição de produtos e de bens do que as relações sociais e afetivas.

Com a facilidade em se conseguir crédito, ficou cada vez mais comum substituir um produto que quebrou por outro novo, em vez de consertá-lo, bem como trocar produtos obsoletos da nossa casa, mesmo que ainda estejam funcionando.

O consumo irresponsável e ilimitado também prejudica a natureza e o meio ambiente, pois retiramos deles bens que são renovados e devolvemos uma quantidade cada vez maior de lixo, que, muitas vezes, é descartado em locais impróprios.

Dessa forma, para minimizar os efeitos do consumismo desenfreado, é preciso que se faça um trabalho de educação ou reeducação que promova reflexões acerca do consumo e do consumismo, do desejo e da necessidade, da preservação e conservação ambiental, do descarte responsável e, inclusive, da implementação de leis mais efetivas.



FAITHIE/SHUTTERSTOCK.COM

Responda no caderno:

1. A escola pode contribuir muito para a conscientização do consumo responsável e sustentável. Você concorda com essa afirmação? Por quê? Converse com seus colegas.

2. Os juros cobrados pelos bancos e pelas operadoras de crédito variam de acordo com o tipo de financiamento que utilizamos. Assim, o valor da taxa de juros aplicada em um mesmo banco pode ser diferente, de acordo com a linha de crédito. A seguir são apresentadas as taxas médias de juros aplicadas por diversos bancos durante o ano de 2010, de acordo com o Banco Central.

Taxas de Juros

Linha de crédito	**Taxa média março**	**Taxa média abril**	**Variação no mês**
Juros do comércio	5,72%	5,77%	0,87%
Cartão de crédito	10,69%	10,69%	0%
Cheque especial	7,34%	7,40%	0,82%
CDC-bancos	2,33%	2,44%	3,00%
Empréstimo pessoal - bancos	4,74%	4,79%	1,05%
Empréstimo pessoal - financeiras	9,78%	9,87%	0,92%
Taxa média	6,77%	6,82%	0,74%

Fonte: BELEDELI, M. Crédito fácil pode virar armadilha ao consumidor. **Jornal do Comércio**. Diponível em: <http://jcrs.uol.com.br/site/noticia.php?codn=30398&codp=21&codni=3>. Acesso em: 2 nov. 2018.

Responda à questão a seguir:

Vamos supor que você queira comprar um *videogame* e não tenha o dinheiro nesse mês. Mas você está com tanta vontade de comprá-lo que não resiste à persuasão do vendedor e acaba utilizando uma linha de crédito de seu cartão, mas se esqueceu que não era uma boa data para realizar a compra, pois, a fatura venceria naquele mesmo mês. Supondo que o *video game* tenha custado R$ 1 400,00 e você tenha atrasado um mês o pagamento de sua fatura, quanto pagará de juros? (Como não houve variação na taxa de juros, pode-se utilizar o valor referente a abril ou a maio.)

3. Elabore uma lista com 5 itens que você costuma consumir frequentemente; por exemplo, sucos, lanches, itens de higiene etc. Pesquise os valores unitários desses produtos em diferentes estabelecimentos. Anote o resultado em um quadro, como o da referência a seguir.

Estabelecimento:

Produto	Valor 1	Valor 2	Valor 3

a) Agora, calcule a diferença entre o maior e o menor valor encontrados para o mesmo produto e multiplique-os pelo número de unidades de cada produto que você costuma consumir durante o mês.

b) Faça a soma dessa diferença de todos os produtos que você consome e descubra quanto você economizaria se adquirisse esse produto no local onde se aplica o menor valor.

c) Compartilhe suas descobertas com os colegas e com o professor e, juntos, descubram quanto a sala toda economizaria se adotasse o hábito de pesquisar os preços para descobrir o local com a melhor oferta. Lembre-se de avaliar despesas com o deslocamento, tempo etc.

d) Você já ouviu falar em compra coletiva? Será que essa prática poderia trazer benefícios? Por quê?

7 CONTAGEM, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

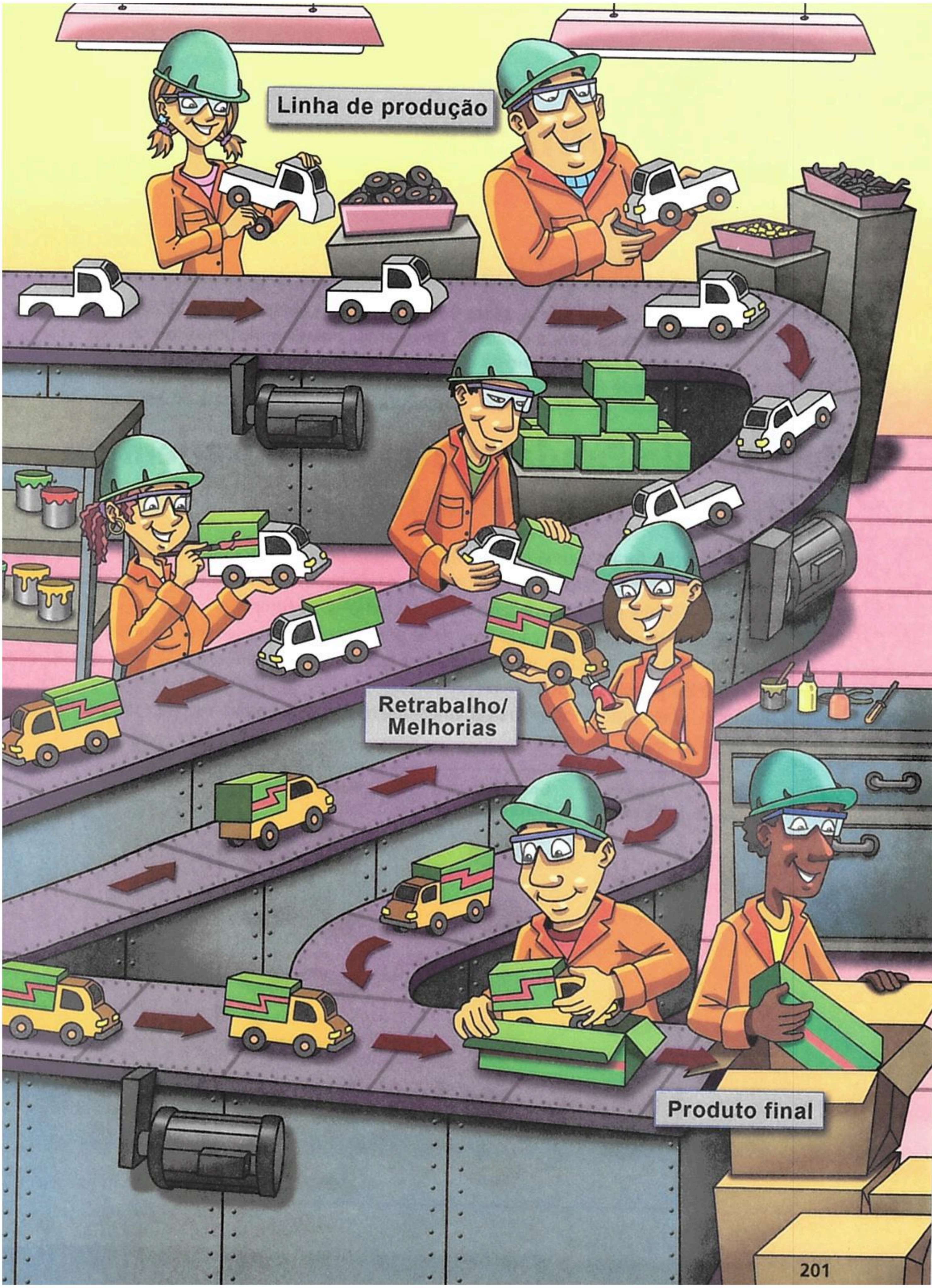
MANZI

Na imagem está representada uma linha de produção fabril em que há um setor cuja atividade consiste em reparar produtos com defeitos, os quais precisam de melhorias, o que gera **retrabalho**.

Mas como definir em quais peças há defeito? Para isso, existe um setor de inspeção, que é o responsável por avaliar a qualidade dos itens produzidos. Esse setor também é responsável por fazer uma análise estatística da produção.

Agora, observando a imagem, pense e responda no caderno.

- O retrabalho (melhorias) acontece em que momento da produção?
- O que você entende por **retrabalho**? Você acha que para uma fábrica é melhor que muitos ou poucos itens passem por esse setor?
- Quais procedimentos podem ser adotados para evitar o retrabalho e diagnosticar suas causas? Como esses dados podem ser organizados?
- Que tipo de gráfico você acha que seria melhor para representar os problemas que causam o retrabalho? Por quê?


Linha de produção
Retrabalho/
Melhorias
Produto final

CAPÍTULO 1

CONTAGEM

PENSE E RESPONDA

De uma cidade A, saem 4 rodovias para a cidade B e, de B, partem 3 rodovias para a cidade C. De quantas maneiras distintas (ou diferentes) é possível sair da cidade A e chegar à cidade C, passando pela cidade B?

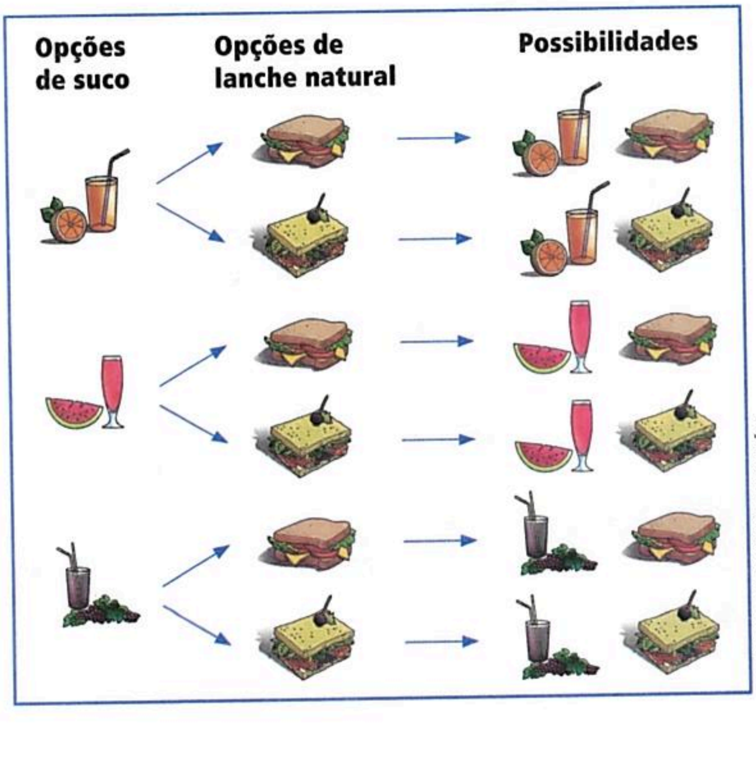
Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Bárbara e Giovana foram a uma lanchonete para cada uma delas tomar um suco e comer um lanche natural. Pediram o cardápio e verificaram que podiam escolher entre três tipos de suco (laranja, melancia e uva) e dois tipos de lanche natural (simples ou completo).

De quantas maneiras diferentes cada uma delas pode escolher um suco e um lanche?

Para responder a essa questão, vamos organizar todas as opções em um diagrama, que é chamado **árvore de possibilidades**.

Observando o diagrama a seguir, percebemos que as meninas podem escolher um suco e um lanche de 6 maneiras diferentes.



ILUSTRAÇÕES: MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Cada opção de suco pode ser combinada com cada opção de lanche natural. Como são 3 tipos de suco e 2 tipos de lanche natural, fazemos a seguinte multiplicação para encontrar todas as possibilidades:

número de opções de suco

$$3 \times 2 = 6$$

número de possibilidades

número de opções de lanche natural

Portanto, é possível escolher um lanche e um suco de 6 maneiras diferentes.

Observe outras situações em que podemos aplicar o princípio multiplicativo.

1 Um restaurante oferece em seu cardápio quatro tipos diferentes de carnes (boi, porco, frango e peixe), que podem ser servidos com três tipos de acompanhamentos: arroz branco, massa e salada. De quantas maneiras diferentes se pode escolher um prato formado por uma carne e um acompanhamento?

Para cada tipo de carne, temos 3 possibilidades de escolha do acompanhamento. Assim, podemos determinar o número de possibilidades de formar um prato, utilizando uma multiplicação.

número de opções de carne

$$4 \times 3 = 12$$

número de possibilidades

número de opções de acompanhamento

Assim, temos 12 maneiras diferentes de formar um prato.

2 Em uma sala de aula de 8º ano com 25 alunos, dois alunos serão escolhidos para assumir os cargos de representante de sala e de suplente. De quantas maneiras distintas essa dupla poderá ser formada?

Qualquer um dos 25 alunos da sala pode ser o representante; portanto, temos 25 possibilidades para o cargo de representante. Escolhido esse aluno, restam 24 alunos para assumir a posição de suplente. Assim, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

número de opções para representante de classe

$$25 \times 24 = 600$$

número de possibilidades

número de opções para suplente

Existem 600 possibilidades de formarmos uma dupla, na qual um dos escolhidos é representante de sala e o outro, suplente.

Outros problemas de contagem

Diversos problemas envolvem a noção de contagem. Veja alguns exemplos.

1 Quantos anagramas possui a palavra ROSA?

A palavra ROSA tem 4 letras e qualquer uma dessas letras pode assumir a primeira posição na palavra. Escolhida essa letra, sobram outras 3 letras para a segunda posição. Em seguida, há 2 letras disponíveis e, escolhida essa 3ª letra, restará apenas 1 para a 4ª letra.

> **SAIBA QUE**
>
> **Anagramas** são permutações das letras de uma palavra, formando novas palavras, com ou sem sentido.

Veja:

$$\underbrace{\quad 4 \quad}_{\substack{\text{número de}\\ \text{opções para}\\ \text{a 1ª letra}}} \times \underbrace{\quad 3 \quad}_{\substack{\text{número de}\\ \text{opções para}\\ \text{a 2ª letra}}} \times \underbrace{\quad 2 \quad}_{\substack{\text{número de}\\ \text{opções para}\\ \text{a 3ª letra}}} \times \underbrace{\quad 1 \quad}_{\substack{\text{número de}\\ \text{opções para}\\ \text{a 4ª letra}}} = 24$$

Assim, temos 24 anagramas da palavra ROSA.

2 Quantas são as placas de automóveis que podem ser formadas por três letras e quatro algarismos?

EDITORIA DE ARTE

O nosso alfabeto é constituído de 26 letras (incluindo K, Y e W) e temos disponíveis 10 algarismos (de 0 a 9). Assim, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$$\underbrace{26 \times 26 \times 26}_{\substack{\text{possibilidades}\\ \text{de letras}}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\substack{\text{possibilidades}\\ \text{de números}}} = 175\,760\,000$$

Assim, existem 175 760 000 placas diferentes usando 3 letras e 4 algarismos.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Bernardo é o técnico do time masculino de handebol da escola de Mari. Ele tem de mandar confeccionar os uniformes do time para o campeonato que vai acontecer no fim do ano. Como as cores da escola são azul, amarela, vermelha e branca, a empresa que vai confeccionar os uniformes deu as seguintes opções de escolha para Bernardo: 3 cores de camisetas (vermelho, amarelo e branco) e 2 cores de *shorts* (branco com listra azul e todo azul).

Organize essas opções em uma árvore de possibilidades e responda:

a) De quantas maneiras diferentes Bernardo pode montar um uniforme com uma camiseta e um *shorts*?

b) Do total de possibilidades, quantos uniformes podem ser formados com a camiseta branca?

2. Uma sorveteria dispõe de 16 sabores de sorvete que podem ser combinados com 3 caldas diferentes (morango, chocolate e caramelo). De quantas maneiras é possível combinar uma bola de sorvete e uma calda?

3. Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar?

4. As turmas do 8º ano de certa escola, já pensando na formatura no ano seguinte, farão uma eleição entre os 93 alunos para a escolha do presidente e do vice-presidente da comissão de formatura. Considere que qualquer aluno, entre os 93, pode ser escolhido. De quantas maneiras distintas é possível formar essa dupla de representantes?

5. Uma senha bancária é formada por 4 dígitos seguidos de 3 símbolos (#, & e *). De quantas maneiras Ana pode escolher uma senha, se ela não pretende usar nem o algarismo 0 nem o símbolo #?

6. Desde 2016, na Argentina, as placas de carros (chamadas *chapas patentes*) estão sendo formadas no padrão Mercosul: duas letras do alfabeto de 26 letras, seguidas de 3 algarismos, seguidos de duas letras. Quantas placas podemos formar com esse padrão?

EDITORIA DE ARTE

7. Quantos números ímpares podemos formar usando uma única vez cada um dos algarismos 3, 4, 7, 8 e 9?

8. (Enem/2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "*L*" e "*D*" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

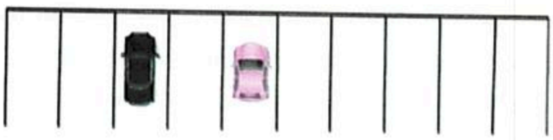
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

9. (OBMEP) Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

10. (OBMEP) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



a) 56
b) 70
c) 71
d) 72
e) 80

CAPÍTULO

2 PROBABILIDADE

Experimento aleatório

No estudo da probabilidade, um **experimento** é considerado **aleatório** se, mesmo ao repeti-lo um número considerável de vezes, da mesma maneira, o resultado obtido é sempre imprevisível.

O lançamento de um dado e o de uma moeda são exemplos de experimentos aleatórios, pois em cada repetição do experimento o resultado obtido não pode ser previsto.

Espaço amostral

Para cada experimento aleatório existe um conjunto de possibilidades de resultados.

Ao lançar um dado e observar a face de cima, é possível obter um de seis resultados diferentes. Os resultados possíveis são: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Já para o lançamento de uma moeda "honesta", é possível obter um de dois resultados diferentes: cara ou coroa.

> Dado um experimento aleatório, o **espaço amostral S** é o conjunto de todas as possibilidades de resultado daquele experimento.

Evento

Vamos imaginar agora que, a partir do lançamento de um dado honesto, vamos observar os resultados obtidos na face superior.

Desejamos saber, por exemplo, qual é a chance de sair o número 2 no lançamento desse dado. Ou, ainda, qual é a chance de ocorrer um número primo. Essas duas situações descrevem subconjuntos do espaço amostral e são denominadas **eventos**.

No primeiro caso, ao lançar o dado e sair número 2, temos que $E = \{2\}$ e, assim, o número de elementos de *E* é representado por $n(E) = 1$. No segundo, ao lançar o dado e ocorrer número primo, temos que $E = \{2, 3, 5\}$ e, assim, o número de elementos de *E* é representado por $n(E) = 3$.

Se o conjunto formado pelos elementos de um evento é vazio, dizemos que esse evento é **impossível**. Por exemplo, no experimento "Lançamento de um dado de 6 faces", o evento "Sair o número 7" é um evento impossível.

Quando o número de elementos do evento coincide com o número de elementos do espaço amostral, o evento é chamado **evento certo**. No experimento "Lançamento de um dado de 6 faces", o evento "Sair um número menor ou igual a 6" é um evento certo, pois $n(S) = 6$ e $n(E) = 6$.

Considere a situação a seguir.

1 Uma urna tem 20 bolinhas, numeradas de 1 a 20. Uma bolinha é escolhida ao acaso e observa-se seu número.

Nesse caso, o espaço amostral é dado por:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

Como vimos, todo evento é um subconjunto do espaço amostral.

O evento "Obter um número maior que 11" dado por E = {12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}.

O evento "Obter um número múltiplo de 4" corresponde ao subconjunto E = {4, 8, 12, 16, 20}.

Probabilidade

Vimos que, em um experimento aleatório, a probabilidade (*P*) de um evento acontecer é dada pela razão entre o número de possibilidades favoráveis ao evento e o número total de possibilidades que podem ocorrer no experimento. Agora, vamos realizar esse cálculo analisando o espaço amostral.

No experimento aleatório "Retirar uma bola, ao acaso, de uma urna com bolas numeradas de 1 a 15", o espaço amostral é S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}. A probabilidade de o evento "Sair a bola de número 8" acontecer é de 1 em 15, pois só existe um número 8 no espaço amostral.

Nesse caso, para determinar a probabilidade de um evento ocorrer, podemos determinar o número de elementos do espaço amostral e o número de elementos do evento.

$$\left.\begin{matrix} n(S) = 15 \\ n(E) = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow P(E) = \frac{1}{15}$$

A probabilidade (*P*) de um evento (*E*) acontecer, a partir de um experimento aleatório, é dada pela razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Veja outros exemplos.

1 A professora de música vai escolher duas de suas alunas para um teste: uma para tocar violão e outra para cantar. Ela vai escolher entre Gabriela, Helena, Luma, Leila, Bárbara e Lorena. Sabendo que todas tocam violão e cantam, qual é a probabilidade de a professora escolher Helena para tocar violão e Gabriela para cantar?

Há 30 maneiras diferentes de a professora escolher as duplas, uma para tocar violão e outra para cantar. Assim, n(S) = 30. Além disso, E = {(Helena, Gabriela)}

$$\left.\begin{matrix} n(S) = 30 \\ n(E) = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow P(E) = \frac{1}{30}$$

Portanto, a probabilidade de a professora escolher Helena para tocar violão e Gabriela para cantar é de uma em trinta, ou seja, $\frac{1}{30}$.

2 No lançamento de um dado honesto, qual é a probabilidade de:

a) sair a face com o número 4?

Para calcular a probabilidade de esse evento ocorrer, determinamos o número de elementos do espaço amostral e o número de elementos do evento. Temos:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{4\}$

$$\left.\begin{matrix} n(S) = 6 \\ n(E) = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow P(E) = \frac{1}{6} \qquad \text{Assim, } P(E) = \frac{1}{6}.$$

b) não sair a face com o número 4?

Para esse evento, temos o mesmo espaço amostral anterior, porém o número de elementos do evento muda. Vejamos:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$$\left.\begin{matrix} n(S) = 6 \\ n(E) = 5 \end{matrix}\right\} \rightarrow P(E) = \frac{5}{6}$$

Assim, a probabilidade de "não sair a face com o número 4" é igual a $P(E) = \frac{5}{6}$.

Observe que a soma das probabilidades calculadas nos itens *a* e *b* é igual a 1.

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Sair a face 4}} + \underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{Não sair a face 4}} = \underbrace{\frac{6}{6}}_{\text{Sair qualquer face}} = 1$$

Observe que, para cada face do dado, a probabilidade de que ela seja retirada é sempre igual a $\frac{1}{6}$. Assim, a soma de todas as probabilidades será igual a 1.

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Sair a face 1}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Sair a face 2}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Sair a face 3}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Sair a face 4}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Sair a face 5}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{Sair a face 6}} = \underbrace{\frac{6}{6}}_{\text{Sair qualquer face}} = 1$$

A soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é sempre 1.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. **Escreva o espaço amostral para cada um dos experimentos a seguir:**

a) lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras e coroas.

b) lançar dois dados de cores distintas e observar as faces de cima.

c) a sequência dos sexos possíveis para o nascimento de 3 filhos de um casal.

2. **Considerando os experimentos e os espaços amostrais do exercício anterior, indique os subconjuntos referentes aos eventos a seguir:**

a) sair duas moedas com 2 faces iguais.

b) sair dois dados, cuja soma seja 5.

c) o casal ter 2 meninos e 1 menina.

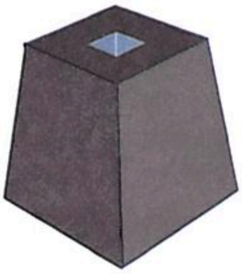
3. Um experimento consiste em retirar uma bolinha numerada de uma urna com 25 bolinhas, numeradas de 1 a 25, e observar seu número.

a) Dê o espaço amostral desse experimento.

b) Escreva os elementos do evento *A*, sendo *A* "o número obtido ser múltiplo de 9".

c) Escreva os elementos do evento *B*, sendo *B* "o número obtido ser maior que 23".

4. Uma urna contém 2 bolas amarelas, 4 bolas azuis e 3 bolas vermelhas. Ao retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser azul? E vermelha?



SELMA CAPARROZ

5. Um baralho possui 52 cartas, distribuídas em 4 naipes: ouro, copas, paus e espada. Sorteando-se uma carta ao acaso, qual é a probabilidade de:

OLGA POPOVA/ SHUTTERSTOCK.COM

a) ser um rei de paus?

b) uma dama?

c) uma figura? (dama, valete, rei e às)

6. Qual é a probabilidade de, ao sortearmos um número de 2 algarismos distintos, ele ser par?

7. Considere os números de 1 a 100. Sorteando um número ao acaso, qual é a probabilidade de o número:

a) ser múltiplo de 6?

b) ser múltiplo de 3 e de 5?

8. Escolhido um entre todos os anagramas da palavra FLECHA, qual é a probabilidade de ele começar com uma consoante?

DESAFIO

Junte-se a um colega para resolver os desafios a seguir.

9. Em um grupo de 5 adolescentes, há 3 garotas e 2 rapazes.

a) Quantas são as possibilidades de duplas formadas por esses adolescentes?

b) Qual é a probabilidade de essa dupla ser formada apenas por meninas?

10. Com os algarismo 2, 3, 6, 7 e 8 formam-se números de 4 algarismos distintos. Escolhido um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser:

a) par?

b) ímpar?

11. (FCMSC-SP) Um hospital fez um estudo com 181 pacientes, vítimas de ferimentos provocados por projétil de arma de fogo, cujos dados foram organizados de acordo com o estado de admissão do paciente e o desfecho do caso, conforme apresentado na tabela.

Estado de admissão	Desfecho do caso		Total
	Satisfatório	Ruim	
Grave	26	77	103
Moderado	15	5	20
Leve	50	8	58
Total	91	90	181

Um grupo de estudantes de medicina decidiu escolher aleatoriamente um dos casos de desfecho satisfatório para estudo. A probabilidade de o caso escolhido ser de um paciente cujo estado de admissão era grave é de, aproximadamente,

a) 33,7%.

b) 28,5%.

c) 25,2%.

d) 14,3%.

e) 56,9%.

CAPÍTULO

3 ESTATÍSTICA

Conceitos básicos da Estatística

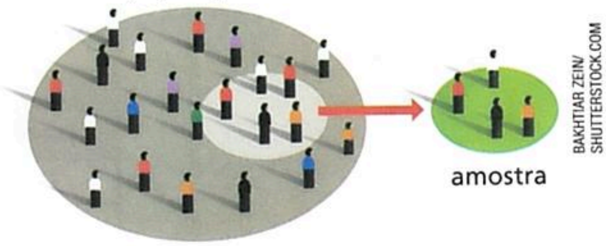
A Estatística é uma parte da Matemática em que são estudados métodos para coleta, organização e análise de dados de diferentes áreas, visando a tomada de decisões.

Realizamos uma pesquisa estatística quando pretendemos estudar alguma característica de determinado conjunto de elementos, que pode ser de pessoas, resultados, objetos etc. O conjunto de todos os elementos que têm a característica do interesse da pesquisa é chamado **população**.

Quando temos muitos elementos na população que queremos estudar, podemos realizar a pesquisa por meio de uma **amostra** que represente essa população.

População é o conjunto de elementos que queremos pesquisar e apresenta alguma característica comum.

Amostra é um subconjunto, uma parte da população, que apresenta as mesmas características da população.



Algumas pesquisas necessitam que toda a população seja investigada. Esse tipo de pesquisa é chamada **censitária**. No Brasil, a cada 10 anos, é realizado o Censo Demográfico pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que tem como objetivo constituir a principal fonte de referência para o conhecimento das condições de vida da população em todos os municípios do país. O próximo censo está previsto para acontecer em julho de 2020.

PENSE E RESPONDA

Nem todas as pesquisas são censitárias. Em muitos casos, são feitas pesquisas com amostra da população. Em sua opinião porque isso acontece?

O processo de coleta de dados de uma população pode ser muito dispendioso e demorado. Por essa razão, a escolha da amostra é de fundamental importância no processo de realização de uma pesquisa. O censo é indicado quando a população é pequena ou quando se necessita do resultado exato.

Por exemplo, em uma campanha eleitoral para presidente do Brasil, as pesquisas de intenções de voto são atualizadas toda semana. Para que isso ocorra, é necessário pesquisar uma parte dos eleitores brasileiros, pois, se a pesquisa fosse realizada com toda a população, é muito provável que, no dia da eleição, ainda não tivesse sido finalizada a primeira pesquisa.

Ao escolher uma amostra, é muito importante garantir que ela seja representativa, ou seja, que tenha as mesmas características da população, uma vez que as conclusões são feitas de acordo com os resultados obtidos da amostra. Existem algumas maneiras de escolher uma amostra, processos conhecidos como amostragem. Entre os métodos de amostragem, vamos estudar três: casual simples; sistemático e estratificado.

Amostragem é o processo para recolher amostras de uma população, de maneira que se possa garantir o acaso na escolha. Cada elemento da população deve ter a mesma chance de ser selecionado.

Amostra casual simples

A amostra casual simples é caracterizada por um sorteio aleatório. Os elementos de uma população podem ser enumerados e, em seguida, sorteados entre uma quantidade estabelecida previamente.

Veja um exemplo:

O professor de Educação Física vai fazer uma pesquisa sobre esporte favorito com todos os alunos do 8º ano para decidir os esportes que vai incluir na competição entre turmas. Como a característica da população é ser aluno do 8º ano, independentemente de outras características, como sexo, idade e estatura, ele vai fazer uma amostra casual simples de 30 dos 300 alunos dos 8º anos. Para isso, ele vai numerar os alunos de 1 a 300, escrever esses números em pedaços de papel, colocá-los em uma urna e depois realizar o sorteio.

Amostra sistemática

No caso da amostra sistemática, os elementos da população a ser estudada já se encontram ordenados. São exemplos: produtos de uma linha de produção, prontuários médicos, prédios de uma rua etc. Para a seleção dos elementos que farão parte da amostra, é elaborado um sistema pelo pesquisador.

Veja um exemplo:

Uma empresa que fabrica parafusos pretende fazer uma pesquisa para verificar se o comprimento dos parafusos está dentro do padrão. Para a amostra dessa pesquisa, será retirado, periodicamente, um elemento para a amostra, durante uma semana.

Amostra proporcional estratificada

Na amostra estratificada, a população é dividida em subpopulações chamadas **estratos**. Esse tipo de amostra é realizado quando outras características da população devem ser levadas em conta. Por exemplo, nas pesquisas de intenção de voto para presidente do Brasil, a população são os eleitores brasileiros, mas a região do país onde reside, o sexo, a faixa etária e a faixa de renda do eleitor são importantes para essa pesquisa. Assim, o pesquisador deve selecionar uma amostra aleatória de cada estrato.

Observe a situação.

Em um congresso para médicos, 110 se inscreveram para a palestra de cardiologia, 140 para a de obstetrícia e 150 para a de ortopedia. A equipe organizadora do congresso quer fazer uma pesquisa com 40 pessoas que participaram das palestras sobre a importância do tema tratado em cada uma delas.

Se for realizada uma amostra simples, existe a probabilidade de os 40 selecionados terem assistido à mesma palestra. Assim, é necessário fazer uma amostra proporcional de cada palestra (estrato). Para isso, a equipe organizadora montou o quadro:

Palestra	População	Amostra
Cardiologia	110	**11**
Obstetrícia	140	**14**
Ortopedia	150	**15**
Total	400	40

Para determinar a amostra proporcional de cada estrato, eles utilizaram o total de inscritos no congresso (400), o total de inscritos em cada estrato, o total de pessoas que participarão da amostra (40) e fizeram os seguintes cálculos:

Cardiologia:

$400 \rightarrow 40$

$110 \rightarrow x$

$$x = \frac{110 \times 40}{400} = 11$$

Obstetrícia:

$400 \rightarrow 40$

$140 \rightarrow x$

$$x = \frac{140 \times 40}{400} = 14$$

Ortopedia:

$400 \rightarrow 40$

$150 \rightarrow x$

$$x = \frac{150 \times 40}{400} = 15$$

Assim, dos 110 inscritos em cardiologia serão sorteados 11 para a amostra, dos 140 de obstetrícia serão sorteados 14 e dos 150 de ortopedia serão sorteados 15.

PENSE E RESPONDA

Em sua opinião, em uma pesquisa sobre o aplicativo de celular preferido dos alunos do 8º ano de uma escola, qual é o melhor tipo de amostragem a ser realizada?

Variáveis

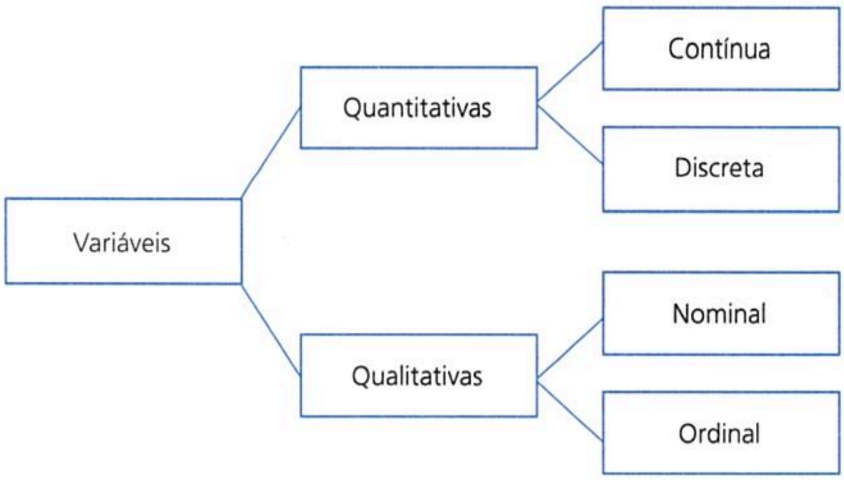
Quando nos referimos a certas características da população (e da amostra), como sexo, faixa etária, escolaridade etc., estamos nos referindo ao que chamamos, em Estatística, de variáveis.

As **variáveis** são as características que estão sendo analisadas em uma amostra ou população. Podem assumir valores numéricos e não numéricos. São classificadas em qualitativas e quantitativas.

As **variáveis quantitativas** podem ser medidas usando uma escala numérica. São classificadas em discretas ou contínuas. As **variáveis quantitativas discretas** podem ser contadas e, em geral, são representadas com números inteiros. Por exemplo: número de filhos, copos de água ingeridos em um dia. Por outro lado, as **variáveis quantitativas contínuas** representam resultados de medidas, como a massa de um indivíduo (em quilogramas), o tempo gasto em determinada atividade (em horas) etc.

Já as **variáveis qualitativas** são as características que não possuem valores numéricos; são definidas por categorias ou atributos, ou seja, representam uma classificação dos elementos da população. São designadas como nominais ou ordinais. As **variáveis qualitativas nominais** não requerem ordenação, como cor dos olhos, região onde mora. Já as **variáveis qualitativas ordinais** pressupõem uma ordenação, como grau de escolaridade ou estágio de crescimento de uma planta.

O esquema a seguir sintetiza as variáveis e suas classificações.



Organização dos dados

Para organizar os dados obtidos por meio de uma pesquisa, podemos construir tabelas e gráficos. O tipo de tabela e de gráfico que vamos utilizar depende da variável que está sendo analisada. Observe as tabelas a seguir.

SAIBA QUE

Frequência absoluta é o número de vezes em que cada elemento aparece na amostra ou em um intervalo da amostra.

Frequência relativa é a porcentagem da frequência de cada elemento ou intervalo da amostra.

Tabela 1

Esporte preferido dos alunos do 8º ano *A*

Esporte	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
Futebol	9	30
Vôlei	12	40
Basquete	9	30
Total	30	100

Fonte: Dados fictícios.

Tabela 2

Grau de escolaridade dos funcionários da empresa *X*

Grau de escolaridade	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
Ensino Fundamental	6	5
Ensino Médio	30	25
Ensino Superior	48	40
Pós-graduação	36	30
Total	120	100

Fonte: Dados fictícios.

Tabela 3

Número de filhos dos funcionários da empresa *X*

Número de filhos	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
0	10	20
1	5	10
2	25	50
3	10	20
Total	50	100

Fonte: Dados fictícios.

Tabela 4

Altura dos alunos de uma academia de ginástica

Altura (em metros)	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
$1,65 \vdash 1,69$	20	10
$1,69 \vdash 1,73$	70	35
$1,73 \vdash 1,77$	40	20
$1,77 \vdash 1,81$	50	25
$1,81 \vdash 1,85$	20	10
Total	200	100

Fonte: Dados fictícios.

PENSE E RESPONDA

Qual é o tipo de variável estudada em cada uma das pesquisas representadas nas tabelas?

Observe que na primeira coluna de cada uma das tabelas acima estão representados os dados da variável de cada pesquisa.

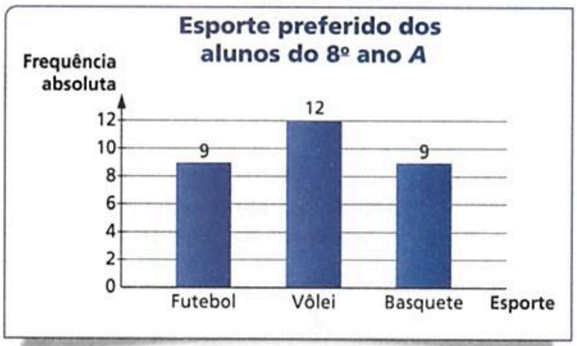
As tabelas 1 e 2 organizam pesquisas que apresentam variáveis qualitativas. Esporte preferido é uma variável qualitativa nominal, e os dados podem ser organizados da forma que o pesquisador preferir. Grau de escolaridade é uma variável qualitativa ordinal, e os dados apresentam uma hierarquia; assim, devem ser organizados em ordem.

As tabelas 3 e 4 organizam pesquisas que apresentam variáveis quantitativas. Número de filhos é uma variável quantitativa discreta e os dados são organizados em ordem crescente. Altura é uma variável quantitativa contínua e os dados são organizados em ordem crescente e em intervalos de classe.

Observe que na tabela 4 os intervalos de classe apresentam o símbolo ⊢ . Esse símbolo inclui o valor inicial e não inclui o valor final. Ou seja, por exemplo, no intervalo 1,65 ⊢1,69, contamos todos os alunos com alturas de 1,65 m (inclusive) e menor que 1,69 m. Quem tem 1,69 m de altura entra no intervalo seguinte 1,69 ⊢ 1,73.

Agora, observe os dados das tabelas organizados em gráficos.

Gráfico 1



Fonte: Dados fictícios.

Gráfico 2

Fonte: Dados fictícios.

Gráfico 3

Fonte: Dados fictícios.

Gráfico 4

Fonte: Dados fictícios.

GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

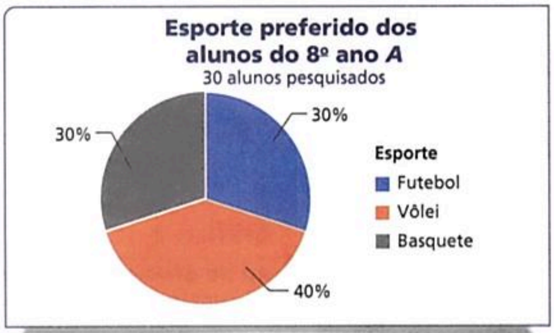
Considerando os exemplos apresentados, que correspondência podemos fazer entre o tipo de variável e sua representação gráfica?

Os gráficos 1 e 3 são **gráficos de colunas** e o gráfico 2 é um **gráfico de barras**, que já conhecemos. Eles são adequados para representar variáveis qualitativas e variáveis quantitativas discretas. Neles, as barras são separadas e relacionam cada valor com sua frequência absoluta.

O gráfico 4 representa a variável quantitativa contínua e é chamado de **histograma**. Cada barra representa um intervalo de valores e como eles são contínuos, as barras são agrupadas.

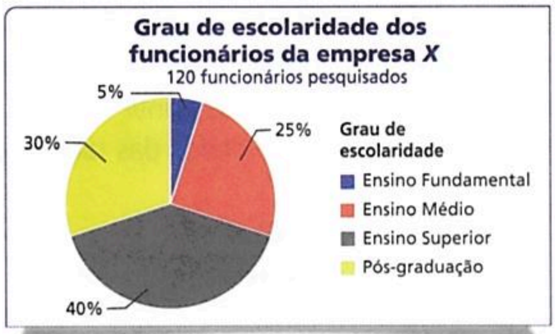
Já o **gráfico de setores**, que relaciona cada valor da variável com sua porcentagem, pode ser utilizado para todos os tipos de variáveis. Observe os gráficos referentes às pesquisas das tabelas apresentadas anteriormente.

Gráfico 1



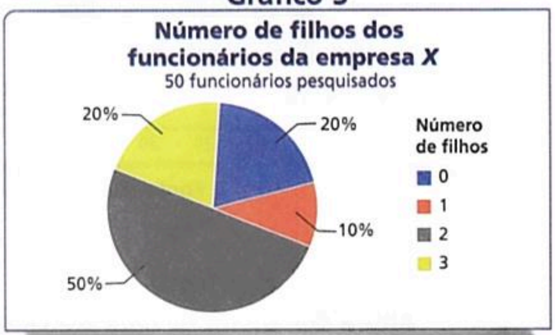
Fonte: Dados fictícios.

Gráfico 2



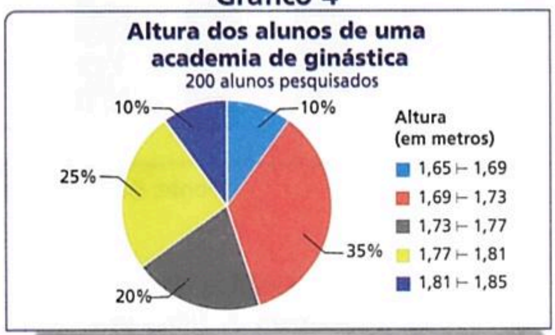
Fonte: Dados fictícios.

Gráfico 3



Fonte: Dados fictícios.

Gráfico 4



Fonte: Dados fictícios.

EDITORIA DE ARTE

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Uma fábrica de chocolates decide fazer uma pesquisa para descobrir se seu público prefere os chocolates ao leite ou os chocolates amargos. Na sua opinião, a pesquisa deverá ser censitária ou amostral? Explique.

2. Uma empresa está verificando a pertinência da implantação de uma consultoria nutricional para seus funcionários. Uma das pesquisas realizadas foi com relação à massa (em quilogramas) de seus funcionários. Para isso, pesquisaram 50 trabalhadores dos 250 funcionários registrados na empresa.

Com base nas informações anteriores, responda:

a) Qual a população dessa pesquisa?

b) Qual é a sua amostra?

c) Qual é a variável nessa pesquisa? Classifique-a.

3. A diretora de uma escola deseja saber qual é o esporte preferido pelos alunos de sua escola. Para isso, selecionou uma amostra dos alunos, contendo apenas meninos. O que podemos dizer sobre o resultado dessa pesquisa?

4. Em uma pesquisa, 100 jovens universitários foram entrevistados para saber o consumo diário de água. Copie a tabela de dados a seguir em seu caderno, completando a coluna da frequência relativa em %. Depois responda às questões.

Consumo de água

Quantidade de copos de água (por dia)	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
3	23	
6	56	
9	14	
12	7	
Total	100	

Fonte: Dados fictícios.

a) Quantos jovens ingerem 6 ou menos copos de água por dia?

b) Considerando a recomendação de se ingerir, no mínimo, 8 copos de água por dia, qual o percentual de jovens que cumprem essa recomendação?

5. A tabela apresenta os salários dos 15 funcionários de uma pequena empresa de informática:

Salários dos funcionários de uma empresa

Salários (em reais)	Frequência absoluta
954 ⊢ 1 443	9
1 443 ⊢ 1 932	2
1 932 ⊢ 2 421	1
2 421 ⊢ 2 910	1
2 910 ⊢ 3 399	2
Total	15

Fonte: Dados fictícios.

a) Quantos funcionários recebem menos que R$1 932,00?

b) Quantos funcionários recebem salário maior ou igual a R$ 2 421,00?

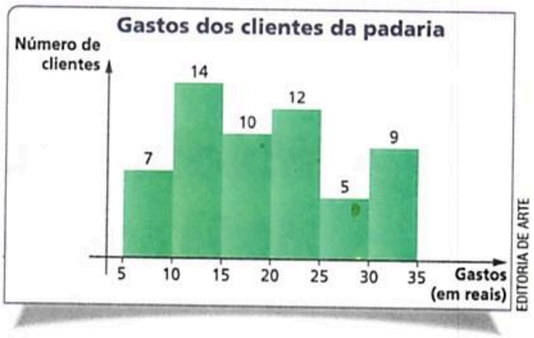
6. Em uma escola, foi realizada uma pesquisa para saber a quantidade de irmãos de cada um dos 30 alunos do 8º ano. A quantidade de irmãos, por aluno, está registrada a seguir:

3	1	4	0	2	2	1	1	0	0
0	2	2	3	4	1	0	2	3	1
0	2	4	3	1	1	0	2	0	2

a) Construa uma tabela que dê a frequência absoluta e a frequência relativa da quantidade de irmãos.

b) Quantos alunos possuem 2 ou mais irmãos?

7. Os gastos dos clientes de uma padaria em um sábado, no período da manhã, estão registrados no histograma.



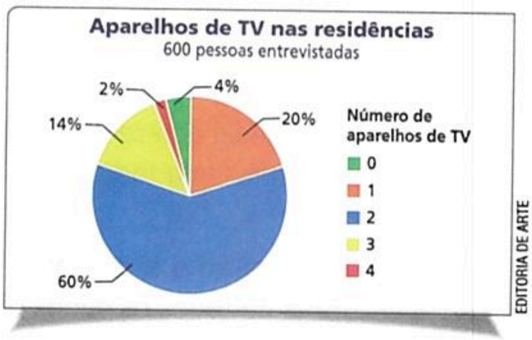
Fonte: Dados fictícios.

a) Construa uma tabela de frequências com os dados apresentados no gráfico.

b) Quantos clientes foram à padaria no período da pesquisa?

c) Quantos clientes gastaram menos de R$ 20,00?

8. O gráfico mostra o resultado de uma pesquisa socioeconômica, na qual foi perguntado a cada um dos 600 entrevistados: Quantos aparelhos de TV há em sua casa?



a) A maioria das pessoas entrevistadas tem quantos aparelhos de TV em casa?

b) Qual a porcentagem de pessoas que têm três ou mais aparelhos de TV?

c) Construa uma tabela com os dados do gráfico, apresentando as frequências absoluta e relativa.

CAPÍTULO 4

MEDIDAS EM ESTATÍSTICA

As medidas estatísticas existem para nos ajudar a verificar se determinado valor representa bem uma série de dados. As medidas estatísticas que vamos estudar agora são a média aritmética simples e a ponderada, a moda e a mediana.

Média aritmética

Média aritmética simples

Veja a situação a seguir.

Marina acompanha a previsão do tempo na cidade onde mora. A tabela mostra as temperaturas mínimas previstas para a semana de 27 a 31 de agosto de 2018.

Temperaturas mínimas previstas para a semana de 27 a 31 de agosto de 2018

Data	27/08	28/08	29/08	30/08	31/08
Temperaturas mínimas (em °C)	10	11	14	15	15

Fonte: Dados fictícios.

Podemos calcular a temperatura mínima média desses 5 dias, adicionando todas as temperaturas e dividindo o resultado por 5, ou seja, pela quantidade de dados da tabela.

$$T_{min} = \frac{10+11+14+15+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

Dessa maneira, a temperatura mínima média prevista para os cinco dias de agosto foi de 13 °C.

A média apresenta de forma resumida um conjunto de dados, e o valor encontrado representa todos os valores desse conjunto.

A **média aritmética simples** de uma série de dados é determinada pela soma de todos os dados dividida pela quantidade de dados.

Média aritmética ponderada

Algumas situações pressupõem o cálculo da média aritmética ponderada.

Veja o exemplo a seguir.

Na disciplina de Matemática, Marcos foi avaliado de diferentes maneiras: um trabalho individual com peso 1; duas provas mensais, cada uma com peso 2; e uma prova final, com peso 4. Marcos obteve nota 7,7 no trabalho, 4,8 e 8,4 nas provas mensais e 6,1 na avaliação final. Qual foi a média de notas obtida por Marcos?

Quando uma prova tem peso 2, é como se a nota obtida nessa prova fosse contada duas vezes. Veja como podemos organizar as notas de Marcos:

$$\underbrace{7{,}7}_{\text{peso 1}} \quad \underbrace{4{,}8 \quad 4{,}8}_{\text{peso 2}} \quad \underbrace{8{,}4 \quad 8{,}4}_{\text{peso 2}} \quad \underbrace{6{,}1 \quad 6{,}1 \quad 6{,}1 \quad 6{,}1}_{\text{peso 4}}$$

Assim, é como se Marcos tivesse realizado 9 provas e sua média é dada por:

$$M = \frac{7{,}7+4{,}8+4{,}8+8{,}4+8{,}4+6{,}1+6{,}1+6{,}1+6{,}1}{9} = \frac{58{,}5}{9} = 6{,}5$$

Outra maneira de calcular a média de notas de Marcos é multiplicar a nota obtida em cada um dos instrumentos avaliativos por seu respectivo peso. Em seguida, dividir pela soma dos pesos:

$$M = \frac{7{,}7 \cdot 1 + 4{,}8 \cdot 2 + 8{,}4 \cdot 2 + 6{,}1 \cdot 4}{1+2+2+4} = \frac{7{,}7+9{,}6+16{,}8+24{,}4}{9} = \frac{58{,}5}{9} = 6{,}5$$

A **média aritmética ponderada** de uma série de dados é determinada pela soma de todos os produtos de cada valor multiplicado pelo seu peso e dividido pela soma dos pesos.

A média aritmética ponderada também é utilizada quando os dados estão representados em tabelas. Assim, os pesos são indicados pela frequência absoluta, que apresenta a quantidade de vezes em que o valor aparece. Podemos organizar as notas de Marcos da seguinte maneira:

Notas de Marcos em Matemática

Nota	Frequência absoluta (peso)	Nota × frequência
4,8	2	9,6
6,1	4	24,4
7,7	1	7,7
8,4	2	16,8
Total	9	58,5

Fonte: Boletim de Marcos.

$$M = \frac{\sum(\text{Nota} \times \text{Frequência absoluta})}{\sum \text{Frequência absoluta}} = \frac{58{,}5}{9} = 6{,}5$$

SAIBA QUE

O símbolo $\sum$ significa somatório.

Moda

A moda também é uma medida utilizada na análise de dados estatísticos. Ela indica o valor que mais se repete entre os dados. Veja os exemplos a seguir.

1. Em um condomínio de casas, foi realizada uma pesquisa sobre o número de habitantes por residência. Observe os resultados:

   1 – 1 – 1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 3 – 4 – 4 – 5 – 5 – 5

   O número que mais apareceu, ou seja, que teve a maior frequência, foi de 3 habitantes por residência. Assim, a moda dessa pesquisa é 3 habitantes.

2. A tabela mostra uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio de uma escola sobre o número de irmãos. Observe.

Número de irmãos dos alunos do Ensino Médio

Número de irmãos	Frequência absoluta
0	20
1	15
2	35
3	10
Total	80

Fonte: Dados fictícios.

Para determinar a moda do número de irmãos dessa pesquisa, basta olhar o dado que apresenta maior frequência. O número 35 é maior número na frequência absoluta, indicando que 35 alunos têm 2 irmãos. Assim, a moda dessa pesquisa é 2 irmãos.

A **moda** de uma série de dados é determinada pelo valor que apresenta a maior frequência.

SAIBA QUE

Uma série de dados pode ter mais de uma moda, quando diferentes valores possuem a mesma frequência; ou ainda, pode não ter moda, quando nenhum valor se repete.

Mediana

A mediana é a medida estatística que divide o conjunto de dados em duas partes com a mesma quantidade de termos, na qual a primeira parte apresenta valores menores ou iguais a ela e, na segunda parte, valores maiores ou iguais a ela.

Veja o exemplo a seguir.

A joalheria Gema Pura vende algumas pedras preciosas. Observe, na tabela a seguir, os preços unitários de venda das pedras preciosas dessa joalheria.

Podemos organizar todos os valores em ordem crescente e buscar o preço unitário de venda que separa os demais preços em duas partes iguais.

Veja como fizemos:

Tabela de preços

Pedra	Preço unitário (R$)
Ágata	80,00
Ametista	10,00
Berilo	30,00
Diamante	190,00
Esmeralda	40,00
Rubi	700,00
Topázio	2,00

Fonte: Joalheria Gema Pura.

termo central

2	10	30	**40**	80	190	700

(Os preços estão em reais.)

Nesse caso, dizemos que a quantidade de preços unitários de venda das pedras da joalheria Gema Pura que são menores ou iguais ao termo central é igual à quantidade de preços unitários de venda que são maiores ou iguais ao termo central. Esse termo central é a mediana desse conjunto de dados.

A mediana dos preços das pedras preciosas dessa joalheria é R$ 40,00, ou seja, metade das pedras preciosas tem preços menores ou iguais a R$ 40,00 e outra metade das pedras preciosas tem preços maiores ou iguais a R$ 40,00.

> Se uma série de dados possui uma quantidade ímpar de dados, a mediana é o termo central da série, organizada em ordem crescente (ou decrescente).

O dono da joalheria Gema Pura adquiriu uma pedra de Jade. Veja como ficou a tabela de preços com a compra dessa pedra:

Tabela de preços

Pedra	Preço unitário (R$)
Ágata	80,00
Ametista	10,00
Berilo	30,00
Diamante	190,00
Esmeralda	40,00
Jade	85,00
Rubi	700,00
Topázio	2,00

Fonte: Joalheria Gema Pura.

A joalheria passou a ter 8 pedras, um número par de itens (e não ímpar, como na tabela anterior, em que foram relacionados 7 preços). Nesse caso, a mediana é calculada por meio da média aritmética dos termos centrais, de modo que a quantidade de valores que são menores ou iguais à mediana seja igual à quantidade de valores que são maiores ou iguais à mediana.

Com a aquisição da nova pedra, os preços unitários de venda (em reais), em ordem crescente, foram organizados assim:

2	10	30	**40**	**80**	85	190	700

termos centrais

A mediana dos preços de venda passou a ser R$ 60,00 $\left(\frac{40 + 80}{2}\right)$.

Amplitude

A amplitude de uma série de dados é uma medida que nos auxilia na análise das medidas que acabamos de estudar.

Os dados a seguir apresentam as notas de Lucas e de Mariana na disciplina Língua Portuguesa:

Lucas: 3,5 – 4,0 – 6,5 – 6,5 – 9,0 – 9,5

Mariana: 5,5 – 6,0 – 6,5 – 6,5 – 7,0 – 7,5

Calculando a média, a moda e a mediana das notas de cada um, temos:

Lucas

$$\text{Média} = \frac{3,5+4,0+6,5+6,5+9,0+9,5}{6} = \frac{39}{6} = 6,5$$

$$\text{Mediana: } 3,5 \quad 4,0 \quad \underbrace{6,5 \quad 6,5}_{\text{termos centrais}} \quad 9,0 \quad 9,5 \rightarrow \frac{6,5+6,5}{2} = 6,5$$

Moda: 6,5

Mariana

$$\text{Média} = \frac{5,5+6,0+6,5+6,5+7,0+7,5}{6} = \frac{39}{6} = 6,5$$

$$\text{Mediana: } 5,5 \quad 6,0 \quad \underbrace{6,5 \quad 6,5}_{\text{termos centrais}} \quad 7,0 \quad 7,5 \rightarrow \frac{6,5+6,5}{2} = 6,5$$

Moda: 6,5

Observando esses cálculos, temos a impressão de que as duas séries de dados são muito parecidas, pois a média, a moda e a mediana das notas de Lucas são iguais às de Mariana. Porém, ao olhar os dados de forma mais cuidadosa, verificamos que os dois grupos são diferentes.

Para analisar melhor essas notas, vamos considerar a diferença entre a maior e a menor nota de cada um.

Lucas

Maior nota: 9,5 Menor nota: 3,5

Diferença: 9,5 − 3,5 = 6,0

Mariana

Maior nota: 7,5 Menor nota: 5,5

Diferença: 7,5 − 5,5 = 2,0

A amplitude de uma série de dados é a **diferença** entre o maior valor e o menor valor observados.

Podemos dizer que, quanto menor a amplitude dos dados, mais próximos eles estão da média, da moda e da mediana.

Como a amplitude das notas de Lucas é bem maior que a amplitude das notas de Mariana, podemos dizer que as notas de Lucas estão "mais espalhadas" que as de Mariana, ou seja, as notas de Mariana ficam mais próximas das medidas que encontramos.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. **O quadro mostra as notas de quatro alunos do 8º ano na disciplina de Ciências. Observe:**

Bruno	6,5	7,5	7,0	7,5	6,0
Camila	8,0	8,0	7,0	6,5	7,5
Marcela	5,0	5,5	4,5	5,5	6,0
Roberto	4,5	7,5	5,0	5,0	8,0

a) Determine a média de notas de cada um dos alunos.

b) Para serem aprovados nessa disciplina, os alunos precisam de média maior ou igual a 6,0. Quais dos alunos acima foram aprovados?

2. **O quadro a seguir apresenta a altura dos jogadores de basquete do time do 9º ano do Colégio *Y*.**

Nome	Artur	Bernardo	Fernando
Altura (em m)	1,65	1,69	1,79

Guilherme	Marcelo	Otávio	Wilson
1,75	1,63	1,69	1,76

a) Determine a altura média dos jogadores desse time.

b) Qual é a mediana das alturas dos jogadores desse time? Explique o significado desse valor.

c) Gustavo também vai fazer parte do time de basquete do 9º ano do Colégio *Y*. Se sua altura é 1,78 m, qual será a altura média e a mediana das alturas do time considerando o novo integrante?

3. **No curso de sapateado de Marina, são 6 meninas e 4 meninos, de diferentes idades, que compõem a companhia de dança. Na tabela a seguir, registraram-se as idades dos integrantes desse grupo:**

12	17	15	14	12	19	9	11	14	10

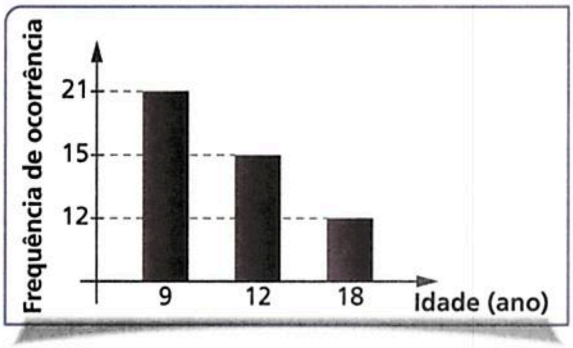
a) Qual é a idade média dos participantes desse grupo de dança?

b) Esse conjunto de dados possui uma moda? Em caso afirmativo, qual é essa moda?

c) Determine a mediana dessa série de dados. Não se esqueça de organizá-las em ordem crescente ou decrescente.

d) Determine a amplitude desses dados.

4. **(Enem/MEC) Uma pessoa, ao fazer uma pesquisa com alguns alunos de um curso, coletou as idades dos entrevistados e organizou esses dados em um gráfico.**



EDITORIA DE ARTE

Qual a moda das idades, em anos, dos entrevistados?

a) 9
b) 12
c) 13
d) 15
e) 21

5. **No quadro seguinte, temos as notas obtidas por dois alunos do 8º ano de certa escola, acompanhadas dos respectivos pesos de cada uma das avaliações.**

Avaliação	Peso	Notas do aluno 1	Notas do aluno 2
Prova mensal	3	5,5	6,3
Trabalho em grupo	2	9,2	8,7
Lista de exercícios	1	10,0	9,8
Prova trimestral	4	5,4	4,9

Sabendo que a média para aprovação nessa escola é 6,0, verifique se os alunos 1 e 2 estão aprovados.

TECNOLOGIAS

Utilizando planilha eletrônica para construção de gráficos

Algumas planilhas eletrônicas nos auxiliam na organização dos dados e na construção de gráficos.

Nesta seção vamos aprender a construir gráficos de coluna e de setores na planilha Calc do LibreOffice.

Observe a tabela seguinte.

Número de irmãos dos alunos do Ensino Médio

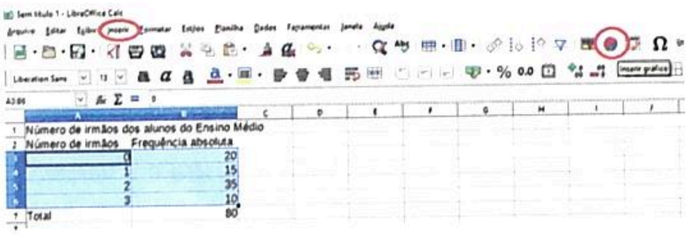
Número de irmãos	Frequência absoluta
0	20
1	15
2	35
3	10
Total	80

Fonte: Dados fictícios.

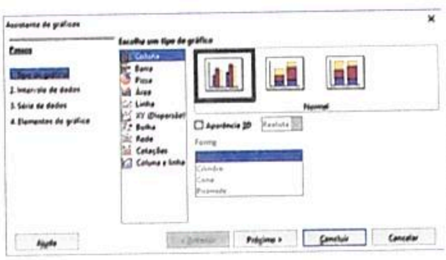
Vamos inserir os dados dessa tabela na planilha. Para isso, abra uma nova planilha e digite o título da tabela na célula A1, "Número de irmãos" na célula A2 e "Frequência absoluta" na célula B2. Depois, complete as colunas conforme a tabela.

Veja o passo a passo para a construção do gráfico de colunas.

- Depois de digitar os dados na planilha eletrônica, selecione somente os dados numéricos e clique em inserir gráfico no menu ou no ícone do gráfico.

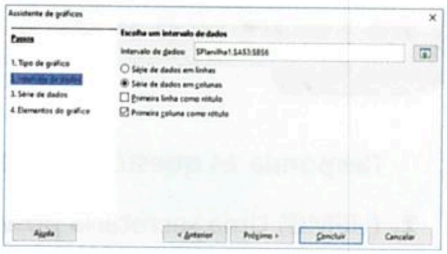


- Na janela do Assistente de gráficos, vamos selecionar, no passo 1, tipo de gráfico "Coluna" e clicar em Próximo.

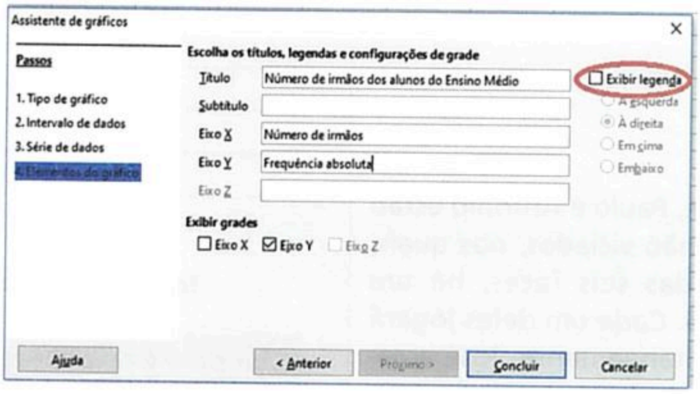


GRÁFICOS: LIBREOFFICE 2018

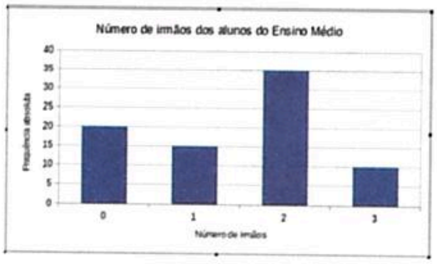
- No passo 2, Intervalo de dados, vamos selecionar "Primeira coluna como rótulo" e clicar em Próximo.



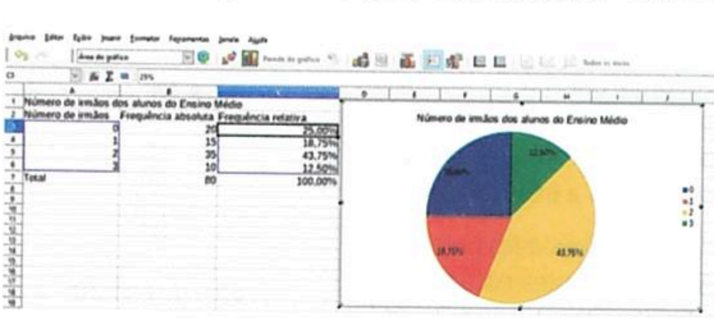
- No passo 3, Série de dados, vamos deixar como está e clicar em Próximo.
- No passo 4, Elementos do gráfico, vamos inserir o título do gráfico e o título dos eixos. Se tiver selecionado "Exibir legenda", clique para desabilitar.



- Para finalizar, clique em "Concluir". O gráfico estará pronto.



Para a construção do gráfico de setores, inserimos outra coluna com as frequências relativas, em porcentagem, e seguimos o mesmo passo a passo. A diferença é que em "Tipo de gráfico" selecionamos "*Pizza*". Para aparecerem os valores das porcentagens, clicamos com o botão esquerdo do *mouse* em cima do gráfico e depois selecionamos "Inserir rótulos de dados".



GRÁFICOS: LIBREOFFICE 2018

1. Utilize algumas tabelas apresentadas nesta Unidade e explore outras construções de gráficos usando a planilha eletrônica como ferramenta.

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. (UEMG) Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 3 pares de sapatos. O número de maneiras distintas com que a secretária poderá se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 par de sapatos corresponde a:

a) 13

b) 126

c) 72

d) 54

2. (Enem/MEC) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

3. As tabelas a seguir mostram o tempo de escolaridade de candidatos a uma vaga de vendedor de uma empresa nos anos 2013 e 2014.

Tempo de escolaridade dos candidatos em 2013

Tempo de escolaridade (em anos)	Número de candidatos
4	8
8	4
11	5
15	3

Fonte: Dados fictícios.

Tempo de escolaridade dos candidatos em 2014

Tempo de escolaridade (em anos)	Número de candidatos
4	10
8	5
11	10
15	12

Fonte: Dados fictícios.

a) Em 2013, qual foi o valor modal do tempo de escolaridade dos candidatos à vaga de vendedor nessa empresa? Qual foi esse valor em 2014?

b) Considere M_1 a média, em anos, do tempo de escolaridade entre os candidatos de 2013 e M_2 a média, em anos, do tempo de escolaridade entre os candidatos de 2014. Calcule:

- M_1
- M_2
- $\frac{M_1}{M_2}$

c) Determine a mediana do tempo de escolaridade dos candidatos à vaga de vendedor nessa empresa em 2013. Faça o mesmo considerando o ano de 2014.

4. (Enem/MEC) Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for maior.

O candidato aprovado será

a) K **b)** L **c)** M **d)** N **e)** P

5. (Enem/MEC) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

a) 20,70. **b)** 20,77. **c)** 20,80. **d)** 20,85. **e)** 20,90.

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos o princípio multiplicativo da contagem, probabilidade e Estatística. Você conheceu um pouco os conceitos básicos de Estatística e como eles estão relacionados com a organização dos dados em tabelas e gráficos.

Você percebeu como a Estatística é importante para a tomada de decisões? Com ela conseguimos analisar as características de séries de dados para entender seu comportamento e decidir a melhor forma de utilizar esses dados.

Na seção *Tecnologias*, você pôde aprender como utilizar uma planilha eletrônica para construir gráficos de colunas e de setores.

A abertura teve como tópico principal o retrabalho e como podemos, com o uso de técnicas, investigar e diagnosticar os motivos que levam ao retrabalho.

Vamos retomar as aprendizagens adquiridas nesta Unidade e refletir sobre elas, resolvendo as questões a seguir no caderno:

- Como o princípio multiplicativo pode nos auxiliar a resolver problemas de probabilidade?
- Que técnicas você aprendeu para facilitar a organização de dados?
- Quais foram as medidas estatísticas que você aprendeu?
- Qual é a diferença entre média, moda e mediana?
- Você foi convidado na abertura desta Unidade a opinar sobre que tipo de gráfico seria melhor para representar os problemas que causam o retrabalho de determinada tarefa. Após concluir esta Unidade, sua resposta permanece a mesma? Por quê?

8 ÁREA, VOLUME E CAPACIDADE

A necessidade de determinar as medidas de superfície, volume e capacidade é algo que faz parte da vida das pesssoas há muito tempo.

Alguns povos da Antiguidade, como os babilônios, os chineses, os egípcios, os hindus e os gregos, calculavam as áreas de algumas figuras geométricas com muita precisão em seus cálculos. Por exemplo, no Egito antigo os agricultores das margens do Rio Nilo pagavam ao faraó um imposto pelo uso da terra, que era proporcional à área cultivada.

Atualmente, costuma-se ficar atento à capacidade de água dos reservatórios que abastecem a população. Esse monitoramento é feito por empresas especializadas e nos ajuda a compreender a situação dos reservatórios.

SITUAÇÃO DOS RESERVATÓRIOS QUE ABASTECEM A GRANDE SÃO PAULO

Capacidade total dos reservatórios

Em bilhões de litros
(Dados de 21/10/2014)

1 164**
Cantareira

521
Alto Tietê

171
Guarapiranga

112
Rio Grande

16,5
Alto Cotia

13
Rio Claro

Capacidade máxima TOTAL

1 998*

* Cálculo feito sobre a capacidade máxima acrescida do volume morto
** Inclui primeira cota do volume morto, de 182,5 bilhões de litros

Nível em 24/02/2014

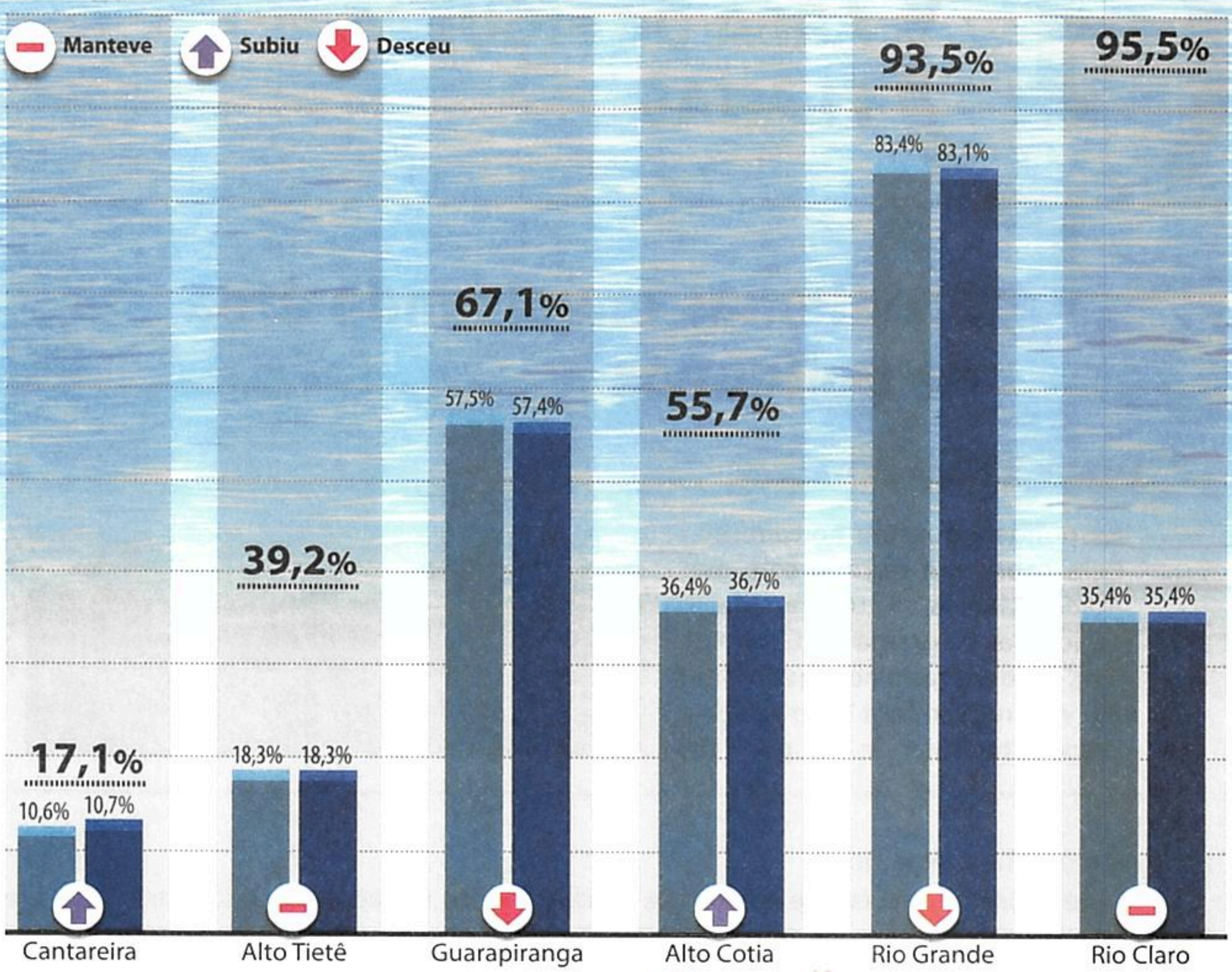
Nível em 23/02/2015

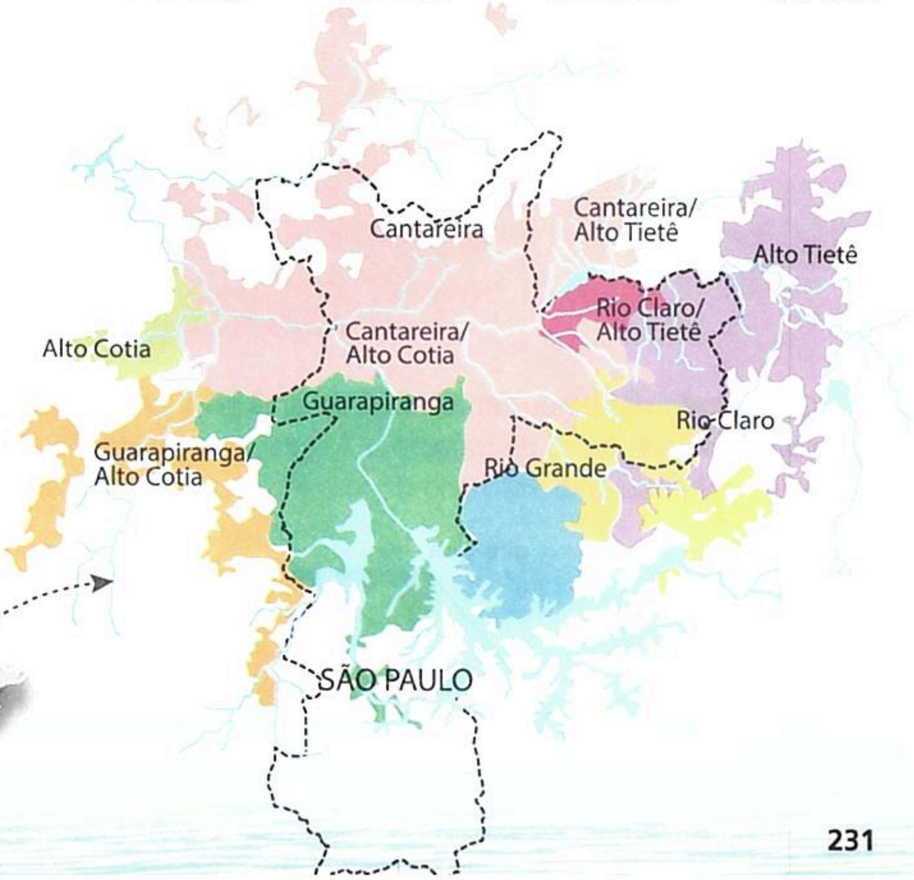
Nível em 24/02/2015

Responda no caderno.

- Observe os níveis dos reservatórios ao lado. Se compararmos os níveis de 2015 com os de 2014, a que conclusão podemos chegar sobre os reservatórios apresentados?
- Você sabe como está a situação atual dos reservatórios de água da região onde você mora?

CAPACIDADE EM BILHÕES DE LITROS





Fonte: CANTAREIRA sobe a 10,7% e recupera reserva retirada do 2º volume morto. **G1**. Disponível em: <http://g1.globo.com/sao-paulo/noticia/2015/02/cantareira-sobe-107-e-recupera-reserva-retirada-do-2-volume-morto.html>. Acesso em: 10 nov. 2018.

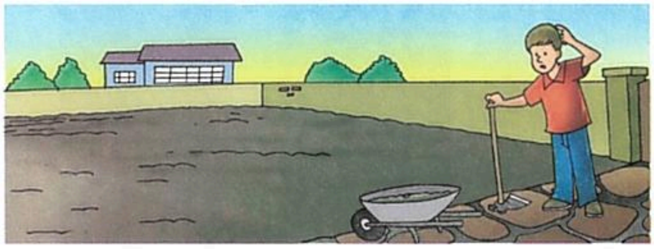
CAPÍTULO 1

ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Problemas envolvendo área de polígonos

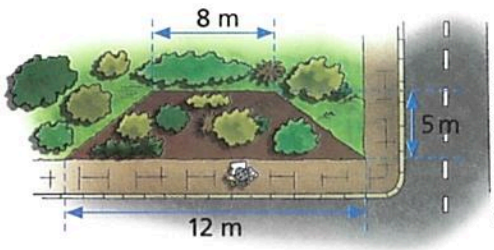
PENSE E RESPONDA

Responda à questão no caderno.
Para cobrir um terreno com gramado, Marcos vai utilizar placas quadradas de grama com lados de 1 m. De quantas placas quadradas ele vai precisar para fazer um gramado retangular de 5 m por 3 m?


MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

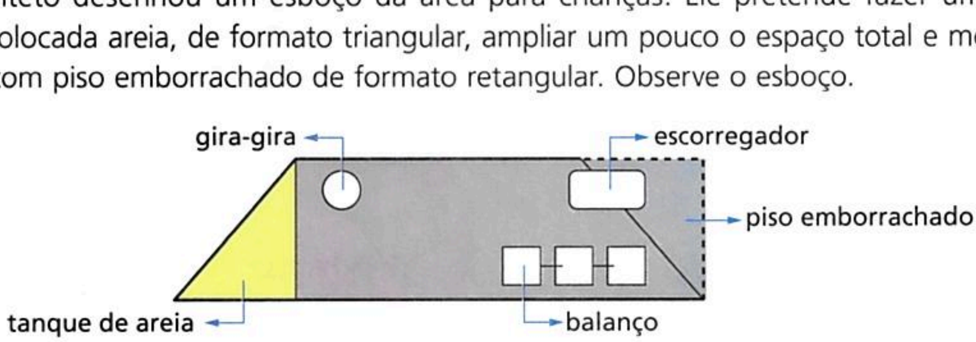
Acompanhe a situação.

A prefeitura de uma cidade atendeu as solicitações dos moradores e vai construir uma área para as crianças brincarem na praça principal da cidade. Analisando a vista aérea da praça, a equipe responsável optou por utilizar uma região em forma de trapézio que não estava com gramado. Observe.



MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

O arquiteto desenhou um esboço da área para crianças. Ele pretende fazer uma região onde será colocada areia, de formato triangular, ampliar um pouco o espaço total e montar um parquinho com piso emborrachado de formato retangular. Observe o esboço.

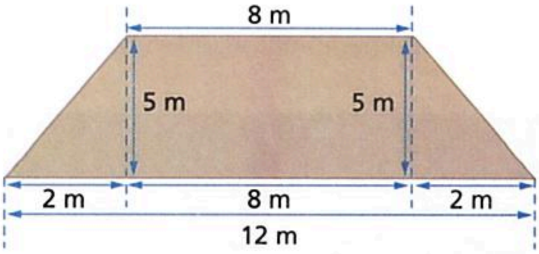


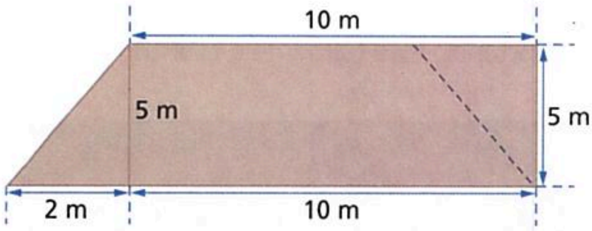
EDITORIA DE ARTE

A equipe responsável pelas compras fez algumas perguntas ao arquiteto:

1. Qual a área do terreno que não está com gramado?
2. Qual a área da região onde será colocada areia?
3. Qual a área da região destinada ao parquinho com piso emborrachado?

Para responder às perguntas, o arquiteto desenhou uma representação do terreno inicial, antes da reforma, e uma representação do terreno final, indicando as medidas de cada lado.





EDITORIA DE ARTE

Para determinar a área do terreno inicial, ele utilizou a expressão da área do trapézio:

$$A_i = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(12 + 8) \cdot 5}{2} = 50$$

Para a área da região onde terá areia, ele utilizou a expressão da área do triângulo e, para o espaço destinado ao parquinho com piso emborrachado, utilizou a expressão da área do retângulo.

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5 \quad \text{e} \quad A_p = b \cdot h = 10 \cdot 5 = 50$$

Assim, ele explicou à equipe de compras que a área do terreno inicial é de 50 m^2, a área da região destinada ao tanque de areia é de 5 m^2 e a área da região destinada ao parquinho com piso emborrachado é de 50 m^2.

A equipe responsável pela aprovação e pela execução do projeto perguntou ao arquiteto se uma região com formato circular de 2 m de diâmetro não teria uma área maior para colocar areia do que a região de formato triangular de 2 m de base e 5 m de altura.

PENSE E RESPONDA

Converse com um amigo e, fazendo estimativas, responda se a região destinada à areia com formato circular de 2 m de diâmetro tem área maior que uma região triangular de 2 m de base e 5 m de altura.

Para fazer esses cálculos corretamente, vamos estudar o círculo e a circunferência.

NÓS

Cultivar em locais pequenos

Diferente do que se imagina, não é necessário um grande espaço para cultivar plantas, pois muitas delas podem ser criadas em varandas e até mesmo dentro de casas e apartamentos.

Além de plantas decorativas, também é possível ter uma horta dentro de casa! A Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) publicou o livro **Horta em pequenos espaços**, disponível para *download* gratuito, em que ensina os cuidados na hora do cultivo, como preparar a terra, as técnicas para cuidar das plantas e a localização ideal para deixá-las.

- Além de enfeitar o ambiente, quais são os outros benefícios de se cultivar uma horta caseira?

A circunferência e o círculo

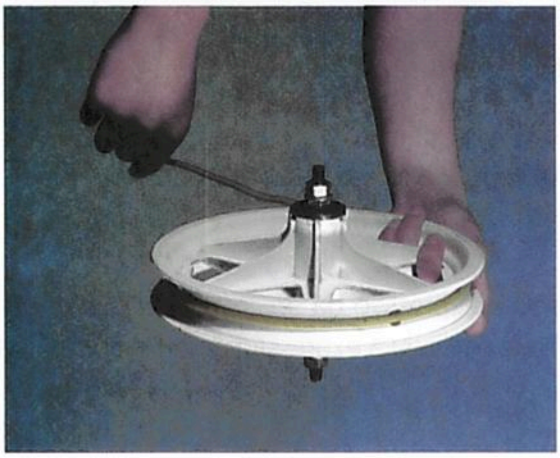
O comprimento de uma circunferência

Acompanhe a situação a seguir.

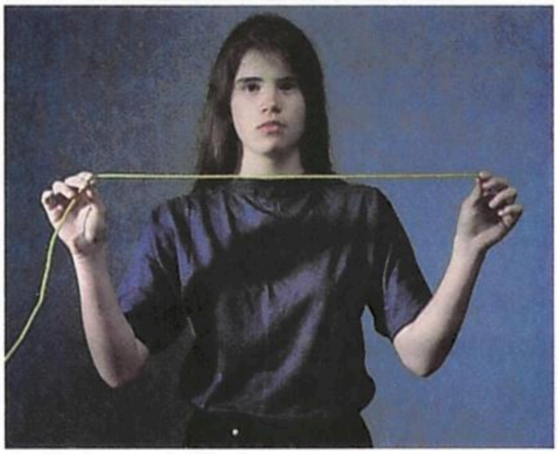
Suponha que um aro da rodinha de uma bicicleta possua o raio com comprimento igual a *r*.

Consideremos que seja possível adaptar, perfeitamente, sobre esse aro, um barbante qualquer.

Cortando esse barbante e esticando-o, obteremos o comprimento da circunferência desse aro.



Aro da rodinha de bicicleta.



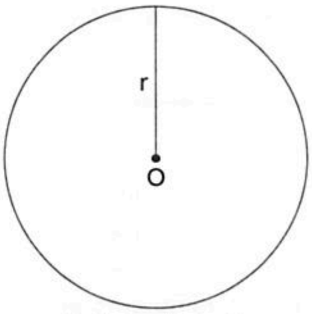
Comprimento *C* da circunferência do aro.

Se dividirmos o comprimento *C* de uma circunferência pelo comprimento 2r de seu diâmetro, encontraremos uma aproximação do número irracional π (isso ocorre sempre, qualquer que seja a circunferência).

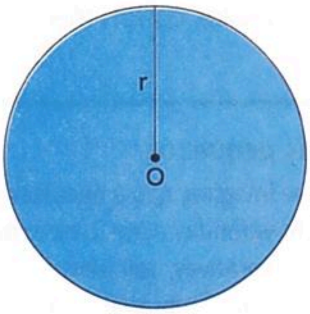
$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2r \cdot \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$

Essa fórmula permite calcular o comprimento de qualquer circunferência, conhecida a medida *r* de seu raio.

Se juntarmos à circunferência todos os pontos de seu interior, obtemos um círculo. Observe:



Circunferência.



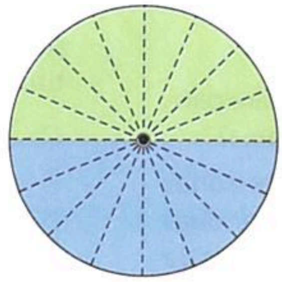
Círculo.

O círculo ocupa uma superfície, e sua medida é a área do círculo.

Área de regiões circulares

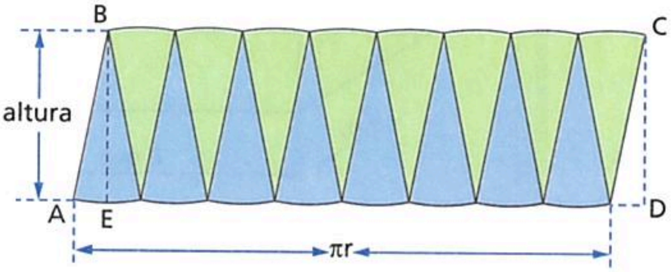
Para determinar a expressão para o cálculo da área do círculo, vamos utilizar a ideia de aproximação por áreas conhecidas. Observe.

Em uma cartolina desenhamos um círculo dividindo-o em 16 partes iguais. Depois recortamos, separando cada pedaço.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Juntamos as partes recortadas, encaixando-as, conforme a figura a seguir:



SAIBA QUE

Quanto maior a quantidade de partes em que dividimos o círculo, mais próxima de um retângulo fica a figura formada.

A superfície do círculo foi reorganizada, e sua área se aproxima da área de uma figura que conhecemos: o retângulo.

Assim, podemos calcular a área do círculo, multiplicando a medida da base pela medida da altura. Observando a imagem acima, percebemos que a medida da base é a metade da medida do comprimento da circunferência, e a medida da altura é equivalente à medida do raio da circunferência. Temos:

$$A = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Usando a fórmula da área do círculo, vamos resolver a situação a seguir.

1 Uma folha de papelão tem a forma circular de raio 21 cm. Qual é, em cm , a área ocupada por essa folha? (Usar: $\pi = 3{,}14$)

Área $= \pi r^2 \rightarrow$ Área $= 3{,}14 \cdot (21)^2 \rightarrow$ Área $= 3{,}14 \cdot 441 \rightarrow$ Área $= 1\,384{,}74$

A área ocupada por essa folha é $1\,384{,}74$ cm².

PENSE E RESPONDA

Voltando à questão da página 233 sobre a área do tanque de areia para as crianças, qual tanque ocupa uma área maior na praça: o tanque de areia com formato circular de 2 m de diâmetro, ou um tanque triangular de 2 m de base e 5 m de altura?

ATIVIDADES

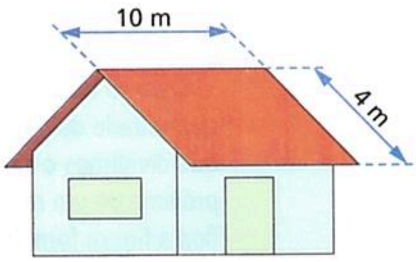
Responda às questões no caderno.

1. Um piso quadrado de cerâmica tem 15 cm de lado.

a) Qual é a área desse piso?

b) Quantos pisos são necessários para pavimentar uma sala de 45 m^2 de área?

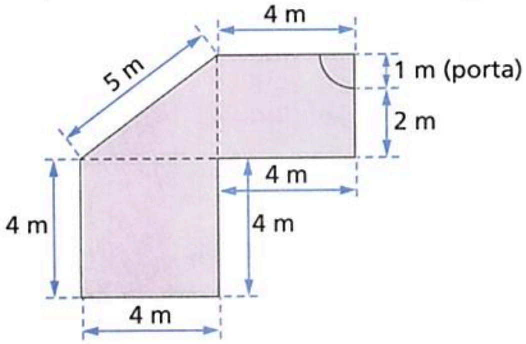
2. Quantas telhas francesas são necessárias para cobrir um telhado formado por duas partes retangulares, com as dimensões da figura a seguir, se para cada metro quadrado de telhado são usadas 20 telhas?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Os dados a seguir referem-se às questões de números 3 e 4.

(Saresp-SP) Na figura está representada a planta baixa de um escritório que terá seu piso totalmente revestido de carpete.



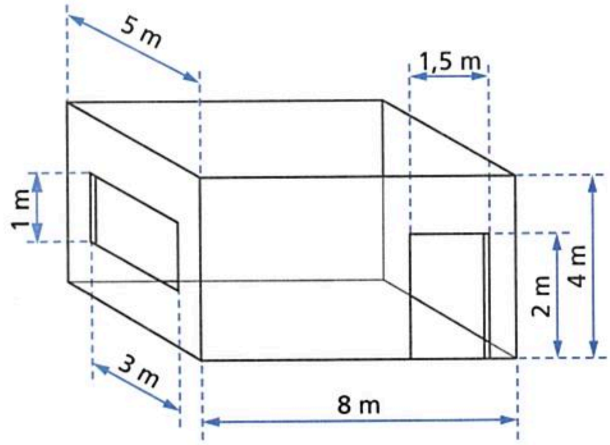
3. A quantidade de carpete necessária para executar o serviço será, no mínimo, igual a:

a) 34 m^2
b) 36 m^2
c) 38 m^2
d) 40 m^2

4. Quantos metros de cordão de acabamento serão colocados à volta toda do escritório como rodapé?

a) 30
b) 28
c) 27
d) 20

5. Quero pintar as quatro paredes e o teto de uma sala com as dimensões da figura a seguir. Sabendo que cada lata de tinta permite pintar 40 m^2, quantas latas de tinta terei de comprar?



6. O comprimento do raio de uma circunferência corresponde, em centímetro, a uma das raízes da equação $x^2 - 16x - 720 = 0$. Qual é o comprimento dessa circunferência? (Use: $\pi = 3,14$)

7. A medida do raio de uma circunferência corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles, cujos lados congruentes medem $10\sqrt{2}$ cm. Nessas condições, calcule o comprimento dessa circunferência. (Use: $\pi = 3,14$)

8. Um menino brinca com um arco de 1 m de diâmetro. Que distância ele percorre ao dar 100 voltas no arco? (Use: $\pi = 3,14$)

9. Um vazamento no tanque de um navio provoca o aparecimento de uma mancha de óleo circular. O raio *r* da mancha, *t* minutos depois do início do vazamento, é dado, em metros, pela fórmula $r = \frac{\sqrt{t}}{5}$.

a) Qual é, em metros, o raio da mancha após 4 minutos do início do vazamento?

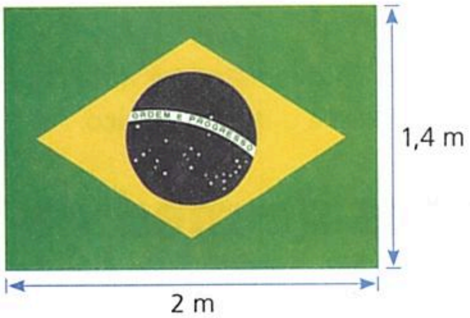
b) Nesse momento, qual é, em m^2, a área da mancha? (Use: $\pi = 3,14$)

POR TODA PARTE

Áreas pelo Brasil

Responda às questões no caderno.

1. Uma Bandeira Nacional brasileira foi confeccionada com as seguintes dimensões:

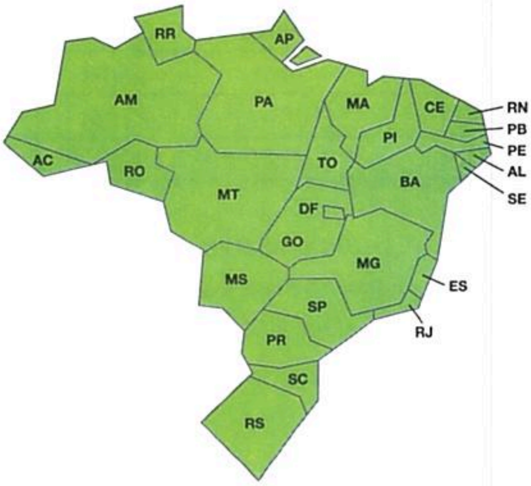


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

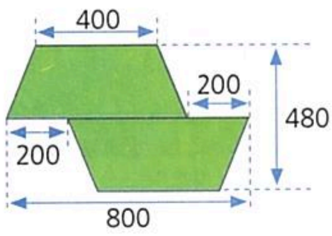
a) Sabendo que os quatro vértices do losango são equidistantes da borda e estão a 17 centímetros dela, calcule a área que ocupa a parte verde visível nessa bandeira.

b) O círculo central dessa bandeira tem área de aproximadamente 38,5 dm^2. Quantos metros quadrados tem a área da parte amarela que fica visível nessa bandeira?

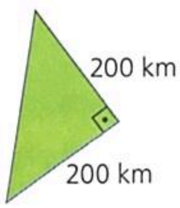
2. Uma maneira muito prática de calcular áreas aproximadas de regiões com formas complexas é dividir essas regiões por polígonos simples, como triângulos, retângulos e até trapézios. Esse processo é muito utilizado ainda nos dias de hoje. Usando esse método, vamos calcular a área de alguns estados brasileiros, conforme o esquema apresentado do mapa do Brasil, que traz os estados aproximados por polígonos.



a) A região ocupada pelo estado de São Paulo foi aproximada por dois trapézios isósceles congruentes. Observe a figura, com as medidas em quilômetros, e calcule a área aproximada desse estado.



b) Aproximando a região ocupada pelo estado de Sergipe por um triângulo retângulo isósceles, calcule essa área aproximada.



CAPÍTULO

2 VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Volume de um sólido geométrico é a medida do espaço ocupado por ele. A unidade de volume padrão é o **metro cúbico**.

Unidades de medida de volume

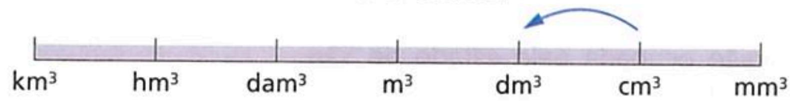
Além do metro cúbico, existem outras unidades de medida padronizadas para expressar volumes. Veja no quadro essas unidades, dispostas em ordem decrescente, com as respectivas abreviações:

Múltiplos do metro cúbico			Unidade fundamental	Submúltiplos do metro cúbico		
Quilômetro cúbico	**Hectômetro cúbico**	**Decâmetro cúbico**	**Metro cúbico**	**Decímetro cúbico**	**Centímetro cúbico**	**Milímetro cúbico**
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
$(1\,000\ m)^3$	$(100\ m)^3$	$(10\ m)^3$	$(1\ m)^3$	$(0{,}1\ m)^3$	$(0{,}01\ m)^3$	$(0{,}001\ m)^3$
$1\,000\,000\,000\ m^3$	$1\,000\,000\ m^3$	$1\,000\ m^3$	$1\ m^3$	$0{,}001\ m^3$	$0{,}000001\ m^3$	$0{,}000000001\ m^3$

As unidades mais utilizadas para expressar volumes, além do **metro cúbico**, são o **decímetro cúbico** e o **centímetro cúbico**.

Veja a seguir alguns exemplos de transformação de unidades.

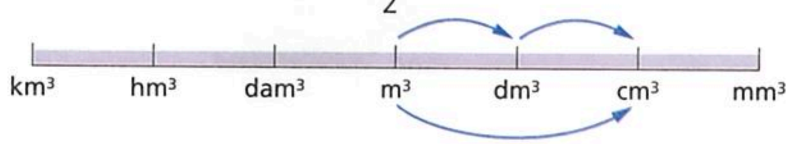
- Transformar 30 000 cm^3 em decímetro cúbico.



Como, da direita para a esquerda, cada unidade representa $\frac{1}{1000}$ da unidade anterior, devemos dividir 30 000 cm^3 por 1 000.

$$30\,000\ cm^3 = (30\,000 : 1\,000)\ dm^3 = (30\,000 \times 0{,}001)\ dm^3 = 30\ dm^3$$

- Quantos centímetros cúbicos há em $\frac{1}{2}$ m^3?



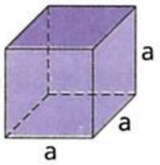
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como, da esquerda para a direita, cada unidade representa 1 000 vezes a unidade seguinte, multiplicamos $\frac{1}{2}$ m^3 por 1000×1000 (1 000 000).

$$\frac{1}{2}\ m^3 = 0{,}5\ m^3 = (0{,}5 \times 1\,000\,000)\ cm^3 = 500\,000\ cm^3$$

Cubo e bloco retangular

Você deve se lembrar de que o cubo é um sólido cujas dimensões têm medidas iguais. As três dimensões do cubo são dadas pelas medidas de suas arestas. Observe:

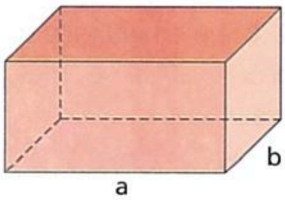


O volume *V* de um cubo de aresta com medida *a* é dado por:

$$V = a^3$$

O volume de um cubo é igual à medida de sua aresta elevada ao cubo.

Veja a seguir a imagem de um bloco retangular, também chamado de paralelepípedo. Nesse sólido, suas bases e faces laterais são retângulos:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

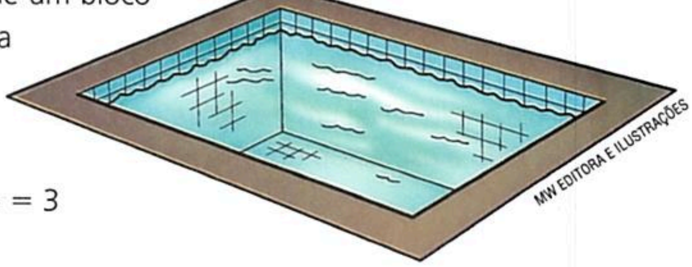
O volume *V* de um bloco retangular de dimensões com medidas *a*, *b* e *c* é dado por:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Assim como no cubo, o volume de um bloco retangular é igual ao produto de suas três dimensões.

Acompanhe a resolução de um exemplo.

O volume de uma piscina com a forma de um bloco retangular é 120 m³. O comprimento da piscina é 8 m, e a largura é 5 m. Vamos calcular a profundidade dessa piscina.



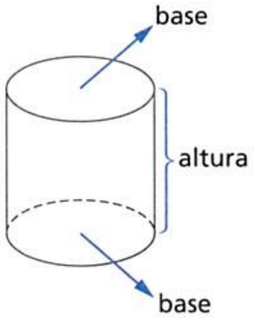
MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

$$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow 120 = 8 \cdot 5 \cdot c \Rightarrow c = \frac{120}{40} = 3$$

A profundidade dessa piscina é 3 m.

Cilindro

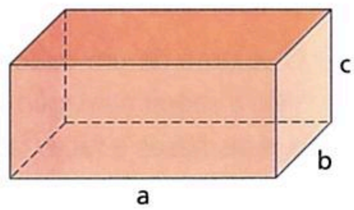
Sabemos que o cilindro circular reto é um sólido geométrico, portanto tem volume. Vamos lembrar de algumas características dos cilindros.



- As **bases** são dois círculos paralelos congruentes.
- A **altura** é a distância entre suas bases.
- Superfície lateral curva.

Para compreender o cálculo do volume do cilindro, vamos retomar o volume de um bloco retangular.

O bloco retangular é um sólido geométrico que apresenta duas bases retangulares paralelas congruentes e sua altura é a distância entre as bases. Na figura ao lado, as bases do bloco retangular são retângulos com dimensões *a* e *b*, e altura *c*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A área do retângulo é dada por $a \cdot b$ e a chamamos de área da base do bloco retangular. O volume do bloco retangular é dado por $V = a \cdot b \cdot c$, mas podemos substituir a expressão $a \cdot b$ por área da base e c por altura. Observe:

$$V_{\text{bloco retangular}} = \underbrace{a \cdot b}_{\text{área da base}} \cdot \underbrace{c}_{\text{altura}} \rightarrow V_{\text{bloco retangular}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

Como no bloco retangular, podemos determinar o volume de outros sólidos geométricos retos, que apresentam duas bases paralelas congruentes e que a altura é a distância entre elas, por meio do produto da área da base pela altura.

Assim, o volume do cilindro reto também é dado por: $V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h$

A base do cilindro é um círculo e já vimos que sua área é $A = \pi r^2$; então, temos:

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h \rightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h$$

Considere o exemplo a seguir.

1 Calcule o volume de um cilindro reto, cujo raio da base é igual a 5 cm, e a altura é igual a 10 cm.
Utilizando a expressão do volume do cilindro, temos:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 10 = 785$$

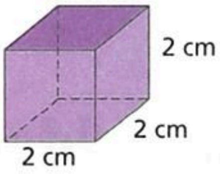
O volume do cilindro é 785 cm³.

ATIVIDADES

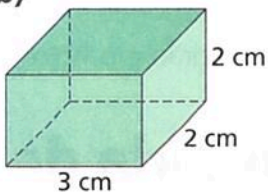
Responda às questões no caderno.

1. Para cada figura a seguir, calcule a área total e o volume.

a)



b)

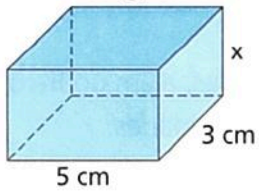


2. Qual é a medida da aresta de um cubo que tem 125 cm^3 de volume?

3. Calcule a área total de um cubo cujo volume é igual a 64 m^3.

4. Calcule o volume de um bloco retangular sabendo que suas arestas medem 2,5 cm · 1,5 cm · 2 cm.

5. O bloco retangular da figura tem 45 cm^3 de volume. Determine a medida da altura desse bloco retangular.

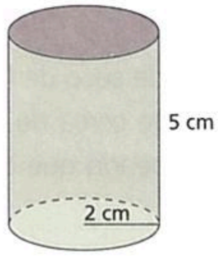


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

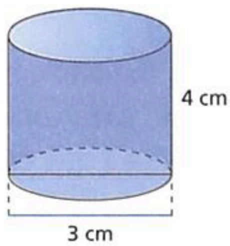
6. As medidas das arestas de um cubo medem x cm. Se dobrarmos as medidas das arestas, dobraremos o volume? Justifique sua resposta.

7. Para cada figura a seguir, determine o volume. Use $\pi = 3{,}14$.

a)



b)



8. (Enem/MEC) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa. Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar. O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é:

a) 450
b) 500
c) 600
d) 750
e) 1000

DESAFIO

Agora, reúna-se a um colega para resolver o desafio a seguir:

9. (Enem/MEC) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

Caixa 1: 86 cm · 86 cm · 86 cm
Caixa 2: 75 cm · 82 cm · 90 cm
Caixa 3: 85 cm · 82 cm · 90 cm
Caixa 4: 82 cm · 95 cm · 82 cm
Caixa 5: 80 cm · 95 cm · 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

CAPÍTULO

3 CAPACIDADE

A capacidade de certo recipiente corresponde à quantidade de líquido que cabe dentro dele. A unidade de capacidade padrão é o **litro**.

Unidades de medida de capacidade

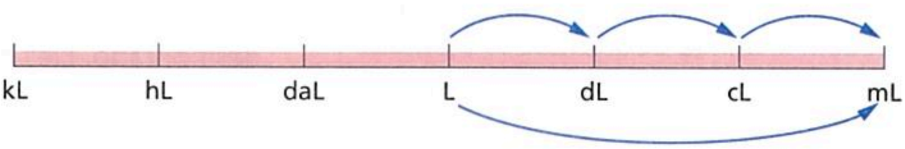
Além do litro, existem outras unidades de medida padronizadas para expressar capacidades.

Veja no quadro essas unidades, dispostas em ordem decrescente, com as respectivas abreviações:

Múltiplos do litro			Unidade fundamental	Submúltiplos do litro		
Quilolitro	**Hectolitro**	**Decalitro**	**Litro**	**Decilitro**	**Centilitro**	**Mililitro**
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
1 000 L	100 L	10 L	1 L	0,1 L	0,01 L	0,001 L

A unidade mais utilizada para expressar capacidades, além do **litro**, é o **mililitro**. Veja a seguir um exemplo de transformação de unidades.

- Expressar 35 L em mililitros.



EDITORIA DE ARTE

$$35 \text{ L} = (35 \times 10 \times 10 \times 10) \text{ mL} = (35 \times 1\,000) \text{ mL} = 35\,000 \text{ mL}$$

Acompanhe a situação a seguir.

1 Cristina vai fazer uma festa e precisa comprar embalagens de suco de frutas de capacidade igual a 1 L. Ela sabe que, cada convidado bebe cerca de 3 copos de 200 mL. Quantas embalagens ela terá que comprar, sabendo que convidou 20 pessoas para a festa?

Cada convidado deve tomar 600 mL ($3 \cdot 200$ mL = 600 mL).

Serão 20 convidados, então $20 \cdot 600 = 12\,000$ mL.

Como 1 L = 1 000 mL, temos que 12 000 mL = 12 L.

Logo, Cristina precisará comprar 12 embalagens de suco.

Equivalência entre o decímetro cúbico e o litro

PENSE E RESPONDA

Você se surpreenderia se alguém lhe dissesse que uma caixa em forma de cubo com 1 dm de aresta tem capacidade de 1 litro?
Se, em um recipiente em forma de cubo de 1 dm de aresta, for despejada a água de uma garrafa com exatamente 1 litro, veremos que nesse recipiente cabe exatamente 1 litro de água.

Agora, pense:

Se em 1 dm^3 cabe 1 litro de água, quantos litros cabem em um recipiente com 1 m^3 de capacidade?

Para responder a essa questão, imagine que esse recipiente tenha a forma de um cubo. Para que o volume desse cubo seja 1 m^3, as suas arestas devem medir 1 m. Podemos escrever:

$$1\ m^3 = 1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m$$

Sabemos que 1 m = 10 dm. Logo: $1\ m^3 = 10\ dm \cdot 10\ dm \cdot 10\ dm$

$$1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3$$

Então:

Como 1 dm^3 = 1 L, cabem 1 000 litros dentro de um recipiente com capacidade de 1 m^3.

SAIBA QUE

1 dm é o mesmo que 10 cm.

$1\ L = 1\ dm^3$

Veja no material audiovisual o vídeo sobre a relação entre litro e decímetro cúbico.

Vejamos algumas situações em que podemos aplicar essa relação.

1 Na leitura do hidrômetro de uma casa, verificou-se que o consumo do último mês foi 36 m^3. Quantos litros de água foram consumidos?

$36\ m^3 = 36\ 000\ dm^3$

Como 1 dm^3 = 1 L, temos: $36\ m^3 = 36000\ dm^3 = 36000$ L

Foram consumidos 36 000 litros de água.

ILUSTRAÇÕES: MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

2 Uma indústria farmacêutica fabrica 1 400 litros de vacina, que devem ser colocados em ampolas de 35 cm^3 cada uma. Quantas ampolas serão obtidas com a quantidade de vacina fabricada?

Como $1\ L = 1\ dm^3 = 10\ cm \times 10\ cm \times 10\ cm = 1\ 000\ cm^3$, temos:

$1\ 400\ L = 1\ 400\ dm^3 = (1\ 400 \times 1\ 000)\ cm^3 = 1\ 400\ 000\ cm^3$

$(1\ 400\ 000\ cm^3) : (35\ cm^3) = 40\ 000$ ampolas

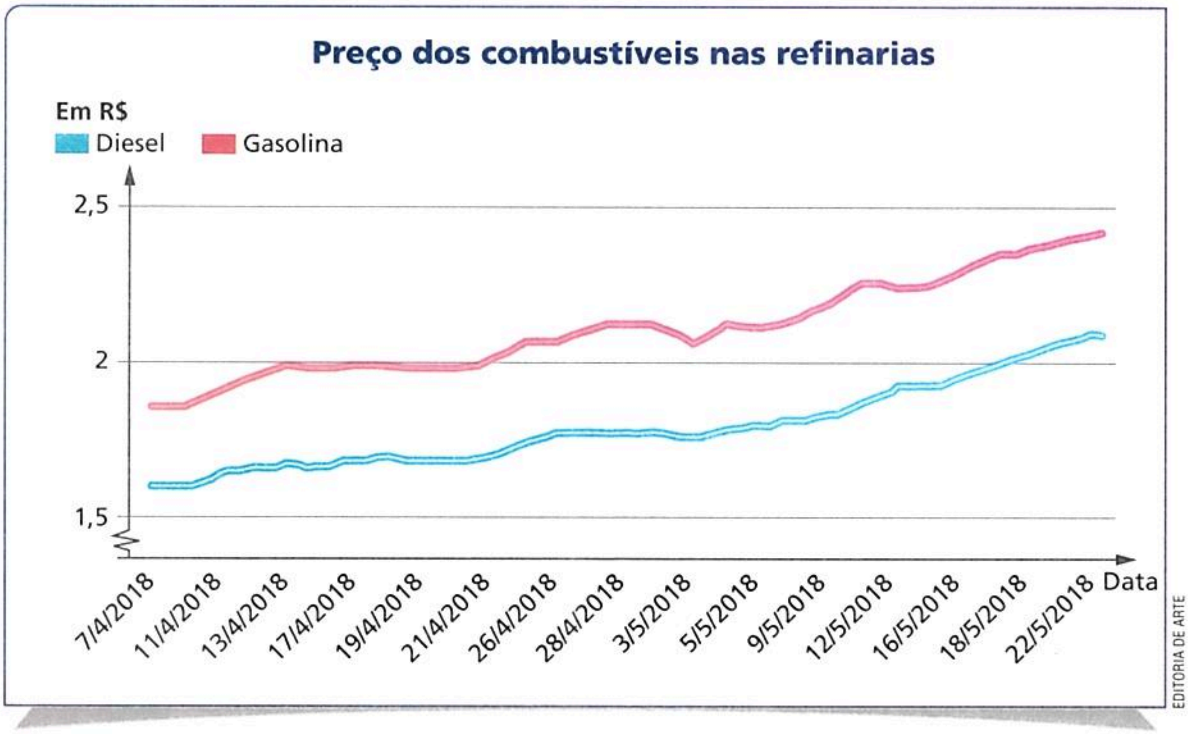
Serão obtidas 40 000 ampolas dessa vacina.

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Gráfico de linhas

Quando precisamos representar uma série de dados com relação ao tempo, o gráfico mais adequado é o **gráfico de linhas**.

No exemplo a seguir, temos representados os preços da gasolina e do diesel, ao longo dos meses de abril e maio de 2018, nas refinarias.



Fonte: MOTA, C. V. 6 perguntas para entender a alta nos preços da gasolina e do diesel. **Terra**. Disponível em: <https://www.terra.com.br/noticias/brasil/6-perguntas-para-entender-a-alta-nos-precos-da-gasolina-e-do-diesel,ca91201b9d03f54efccbe616558e74e2p1y97sm0.html>. Acesso em: 22 set. 2018.

Analisando o gráfico, percebemos que, de 7 de abril de 2018 a 22 de maio de 2015, o valor dos combustíveis aumentou consideravelmente. O que poderia ter acontecido no Brasil, ou em outros países, para que esse aumento fosse assim tão acentuado? Observe que apenas os dados do gráfico não nos permitem entender totalmente a realidade. Os dados, retirados de um contexto, não significam muita coisa.

Observe outras situações em que aparece o gráfico de linhas.

1. A partir de 2004, o governo federal instituiu o Plano de Ação para Prevenção e Controle do Desmatamento na Amazônia Legal (PPCDAm). A medida fomenta políticas públicas para manter a floresta em pé, por meio do monitoramento e de ações de fiscalização e controle.

No gráfico a seguir, temos a série histórica de 1988 a 2016, sobre o total de quilômetros quadrados desmatados na Amazônia, nesse período. O monitoramento da região amazônica é feito por satélites, desde 1988, segundo o Ministério do Meio Ambiente (MMA).

Fonte: BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Desmatamento na Amazônia Legal.** Disponível em: <http://www.mma.gov.br/mma-em-numeros/desmatamento>. Acesso em: 22 set. 2018.

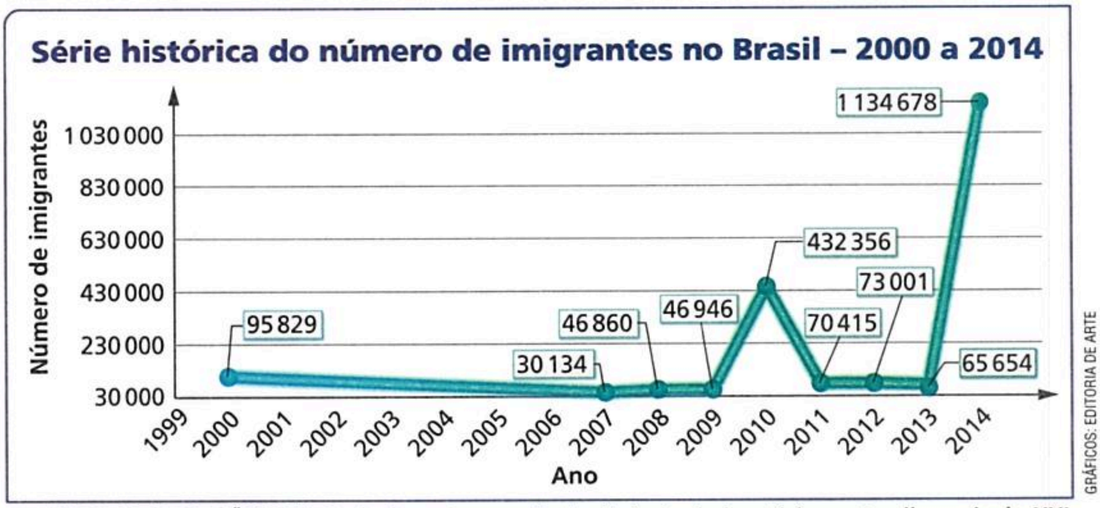
A partir da criação do programa do governo, em 2004, é claramente perceptível a redução no desmatamento da Amazônia.

Observe ainda que, com o parágrafo introdutório, que contextualiza o início do programa de controle do desmatamento, a leitura do gráfico torna-se muito mais eficiente.

Ainda observando o gráfico, responda às questões a seguir no caderno:

- Em qual ano, a quantidade de quilômetros quadrados desmatados foi mínima?
- Qual foi a porcentagem de redução, com relação a 2004?

2. O gráfico a seguir mostra o número de imigrantes vindos para o Brasil de 2000 a 2014.



Fonte: UEBEL, R. R. G.; RÜCKERT, A. A. **Aspectos gerais da dinâmica imigratória no Brasil no século XXI.** Disponível em: <https://journals.openedition.org/confins/11905#tocto1n1>. Acesso em: 22 set. 2018.

- Analise o gráfico e diga em qual ano ocorreu o primeiro pico migratório para o Brasil.
- Faça uma pesquisa sobre imigração no Brasil e explique o que aconteceu para ocorrer esses dois picos migratórios indicados no gráfico.

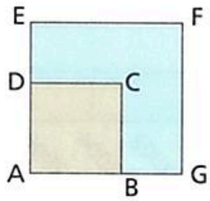
RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. (Saresp-SP) Amélia deseja ladrilhar sua cozinha retangular de 3,45 m por 4,2 m com ladrilhos quadrados de 30 cm de lado. Qual é o número de ladrilhos necessários?

a) 49 **c)** 161
b) 51 **d)** 483

2. (Saresp-SP) Na figura há dois quadrados. A área do quadrado maior é 25 m² e $\overline{BG}$ mede 2 m.



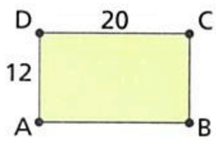
A área da região pintada de azul é:

a) 16 m² **c)** 9 m²
b) 21 m² **d)** 18 m²

3. (Vunesp-SP) O menor país do mundo em extensão é o estado do Vaticano, com uma área de 0,4 km². Se o território do Vaticano tivesse a forma de um quadrado, então a medida de seus lados estaria entre:

a) 200 m e 201 m. **d)** 632 m e 633 m.
b) 220 m e 221 m. **e)** 802 m e 803 m.
c) 401 m e 402 m.

4. *A*, *B*, *C* e *D* são os vértices de uma região retangular, conforme mostra a figura. Considere que as medidas indicadas são dadas em quilômetros.



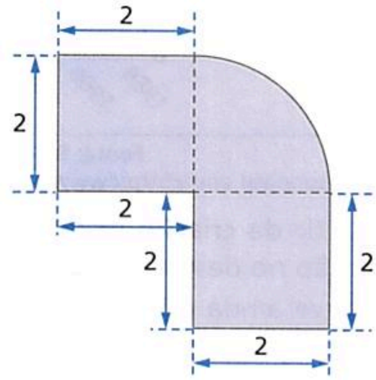
Se a densidade demográfica dessa região é de 72 habitantes por km², qual é a população dessa região?

a) 17 100 habitantes.
b) 17 200 habitantes.
c) 17 280 habitantes.
d) 17 300 habitantes.
e) 17 380 habitantes.

5. A divisão do número 0,5 por *x* tem o mesmo resultado que a adição do número 0,5 a *x*. Se *x* é um número real positivo e considerando $\pi = 3{,}14$, qual é a área do círculo cujo raio mede *x* cm?

a) 0,685 cm² **d)** 0,875 cm²
b) 0,785 cm² **e)** 0,578 cm²
c) 0,885 cm²

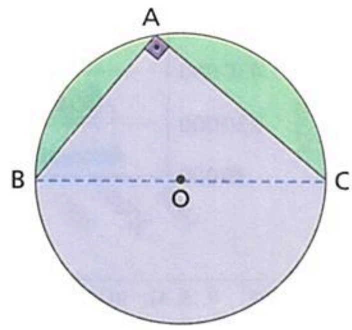
6. Observe esta figura:



A área dessa figura, em centímetro quadrado, é: (Use $\pi = 3{,}14$)

a) 11 **d)** 11,24
b) 11,04 **e)** 12,14
c) 11,14

7. Na figura, AB = 6 cm e AC = 8 cm. Sabendo que $\overline{BC}$ é o diâmetro do círculo, qual é a área da região colorida de roxo?



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 63 cm² **d)** 63,75 cm²
b) 63,25 cm² **e)** 64,25 cm²
c) 63,50 cm²

8. (Saresp-SP) Um recipiente de plástico, de forma cúbica, tem o volume de 1 331 cm³. Podemos dizer que nesse recipiente cabe:

a) menos que 1 litro de água.

b) entre 1 litro e 1 litro e meio de água.

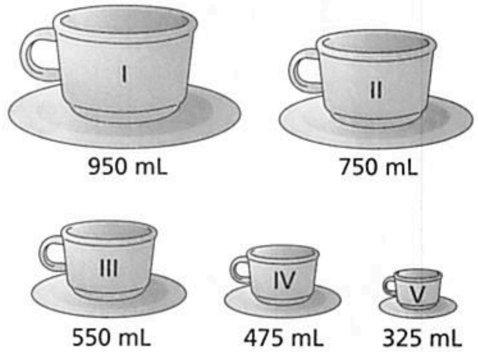
c) entre 1 litro e meio e 2 litros de água.

d) mais que dois litros de água.

9. Uma empresa comprou 100 barris, sendo que cada barril contém 120 L de óleo. A quantidade de óleo deverá ser colocada em recipientes que têm 750 mL de capacidade cada um. Quantos recipientes serão necessários?

10. Um reservatório, cujo volume é 10 m³, estava totalmente cheio, quando dele foram retirados 2 200 L de água. Numa segunda vez, foi retirado $\frac{1}{2}$ da quantidade de água que restou. Quantos litros ainda restaram nesse reservatório?

11. (OBMEP) Cada uma das 5 xícaras da figura está cheia só com café, só com leite ou só com suco. No total, a quantidade de café é o dobro da de suco. Nenhuma das bebidas está em mais de 2 xícaras diferentes. Quais as xícaras que contêm leite?



EDITORIA DE ARTE

a) Apenas a xícara I.

b) As xícaras III e IV.

c) As xícaras II e V.

d) As xícaras III e V.

e) As xícaras IV e V.

12. (Enem/MEC) A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado. Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

a) 8

b) 80

c) 800

d) 8 000

e) 80 000

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, aprofundamos o estudo sobre a área de figuras geométricas planas. Estudamos também a área do círculo. Retomamos o estudo do volume de cubos e blocos retangulares. Relembramos as características do cilindro e aprendemos como calcular seu volume.

Retomamos também a ideia de capacidade e vimos a equivalência entre as unidades de medida de volume e de capacidade. Na abertura dessa Unidade você foi convidado a refletir sobre a capacidade dos reservatórios de água que abastecem a Grande São Paulo.

Agora, vamos retomar e refletir sobre as aprendizagens da Unidade 8. Responda às questões no caderno.

- Quais as medidas estudadas que você costuma usar no dia a dia? Cite exemplos.
- Qual é a diferença entre volume e capacidade?
- Aponte relações do assunto tratado nesta Unidade com conceitos estudados em outras disciplinas.

9 ESTUDO DE GRANDEZAS

O uso de escala na Arquitetura

Você já viu a planta baixa de uma residência ou alguma maquete que represente uma construção ou um conjunto de construções, como um bairro, por exemplo?

Diante da impossibilidade de usar as medidas reais em tais representações, profissionais que trabalham com Arquitetura, Engenharia Civil, *Design*, entre outros, usam o conceito de **escala**.

Com isso, podemos verificar a relação entre a medida do comprimento de uma parede da sala de aula e a medida do comprimento da representação correspondente em uma planta baixa.

Observe a imagem, converse com os colegas e faça no caderno o que se pede nos itens a seguir.

- Identifique na imagem o que nos permite afirmar que temos uma maquete que representa uma casa em construção.
- Você já viu uma maquete ou uma planta baixa? Junte-se a um colega e pesquise situações em que é comum o uso desses recursos.
- Meça as paredes da sua sala de aula e faça o esboço de uma delas para representá-la. Use 1 cm, no desenho, para representar 1 metro de comprimento real. Nesse caso a escala utilizada é de 1 para 100, indicada por 1 : 100.

DAVID KASZA/SHUTTERSTOCK.COM

CAPÍTULO 1

GRANDEZAS

Razão e proporção

Vimos que, sendo *a* e *b* dois números racionais, com $b \neq 0$, denomina-se **razão entre *a* e *b*** ou **razão de *a* para *b*** o quociente $\frac{a}{b}$ ou a : b.

A razão $\frac{a}{b}$ ou a : b pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

razão de *a* para *b* ou ***a* está para *b*** ou **a para *b***.

Considere a situação a seguir.

Em um jogo de basquete, determinado jogador fez 23 dos 92 pontos marcados pela sua equipe em certa partida. A razão entre o número de pontos feitos por esse jogador e o total de pontos da partida é dada por: $\frac{23}{92}$.

LEONARD ZHUKOVSKY/SHUTTERSTOCK.COM

Kevin Durant, jogador da seleção norte-americana de basquete, nos Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro. 2016.

No exemplo dado, podemos afirmar que a cada 4 pontos feitos, 1 foi desse jogador. Assim, temos a razão $\frac{1}{4}$.

As razões são equivalentes; portanto, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\boxed{\frac{23}{92} = \frac{1}{4}}$$

A essa igualdade, damos o nome de **proporção**.

A **proporção** é uma igualdade entre duas razões.
Segundo a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Verificando a propriedade fundamental das proporções no exemplo anterior, temos: $\frac{23}{92} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 23 \times 4 = 92 \times 1$.

Grandezas proporcionais

Vamos analisar algumas situações que relacionam grandezas proporcionais.

1 No quadro a seguir, relacionamos a medida do lado de um quadrado e o respectivo perímetro.

Medida do lado do quadrado (em metros)	Perímetro do quadrado (em m)
1	4
2	8
3	12

Observe que, quanto maior a medida do lado do quadrado, maior o seu perímetro. E esse aumento é proporcional, pois, ao dobrarmos a medida do lado do quadrado, seu perímetro também dobrará. Ao triplicarmos a medida do lado, o perímetro também triplicará.

2 Um automóvel e um ônibus farão uma viagem entre São Paulo (SP) e Valparaíso (SP), distantes 560 km. A velocidade média permitida para o automóvel é de 100 km/h. Já o ônibus precisa transitar desenvolvendo uma velocidade média de 80 km/h. Sabendo que o automóvel leva 5,6 h para percorrer essa distância, considerando sua velocidade constante, calcule quanto tempo a mesma distância será percorrida pelo ônibus (também com velocidade constante).

Construindo um quadro que relaciona as duas informações, temos:

	Velocidade média (em km/h)	Tempo gasto no percurso (em h)
Automóvel	100	5,6
Ônibus	80	7

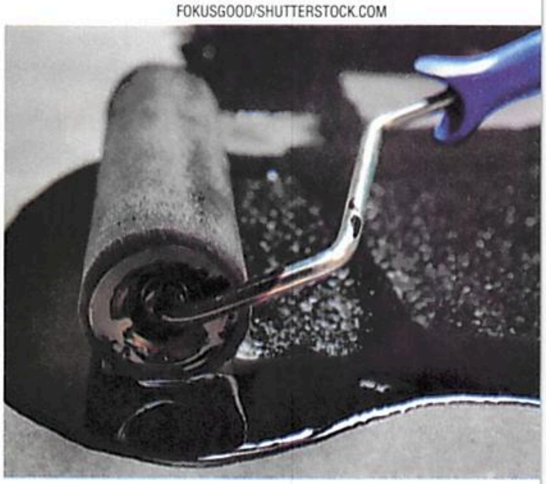
Observe que o produto entre a velocidade e o tempo gasto, em ambos os casos, é igual a 560. Conforme a velocidade média aumenta, o tempo gasto no percurso se reduz, proporcionalmente.

3 Para asfaltar certa região retangular, de 25 m por 60 m, usamos 2 340 L de betume. Qual volume de betume é necessário para asfaltarmos outra região retangular, de 80 m por 60 m?

Para resolver essa situação, vamos construir um quadro, relacionando a área a ser asfaltada e a quantidade de betume necessário.

Área retangular a ser asfaltada (em m²)	Volume de betume (em L)
$25 \times 60 = 1\,500$ m²	2 340
$80 \times 60 = 4\,800$ m²	x

FOKUSGOOD/SHUTTERSTOCK.COM



Observe que uma das dimensões do terreno se manteve. A outra dimensão aumentou 3,2 vezes ($80 : 25 = 3{,}2$). Assim, o volume de betume necessário também deverá aumentar em 3,2 vezes.

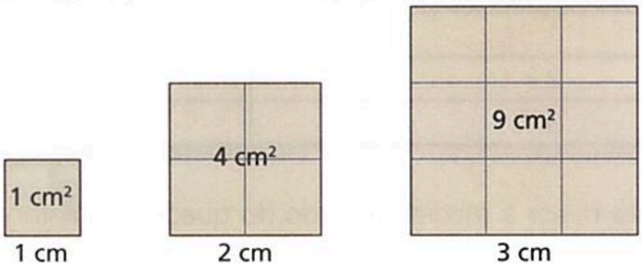
Dessa maneira, $2\,340 \times 3{,}2 = 7\,488$.

O volume necessário de betume será de 7 488 L.

Grandezas não proporcionais

Vamos analisar algumas situações que relacionam grandezas, mas não de forma proporcional.

1 Considere o lado de um quadrado, medido em centímetros (cm), e sua área, medida em centímetros quadrados (cm^2).



Vamos organizar esses dados em um quadro.

Medida do lado do quadrado (em cm)	Área do quadrado (em cm^2)
1	1
2	4
3	9

Percebemos que, ao dobrarmos a medida do lado do quadrado, sua área quadruplicará. Da mesma maneira, triplicando a medida do lado, a área ficará multiplicada por 9.

Assim, podemos concluir que a medida do lado de um quadrado e de sua área não são grandezas proporcionais. Observe: $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3}$.

2 A escala de temperatura Fahrenheit é muito utilizada nos países de língua inglesa. Para converter uma temperatura, medida em graus Celsius (°C) para graus Fahrenheit (°F) é preciso multiplicar a temperatura em °C por 1,8 e somar 32. Observe o quadro a seguir.

Medida em grau Celsius (°C)	Medida em grau Fahrenheit (°F)
10	50
20	68

Assim, 10 °C correspondem a 50 °F e 20 °C, a 68 °F.

As duas escalas termométricas não são proporcionais, pois, ao dobrarmos a temperatura em graus Celsius, isso não se repetirá na escala Fahrenheit.

SYDA PRODUCTIONS/SHUTTERSTOCK.COM

PENSE E RESPONDA

Um bebê nasceu com 3,5 kg e 50 cm; ao final do primeiro ano, ele está com 75 cm.

Podemos afirmar que, aos 20 anos, esse bebê terá 1 500 cm, ou seja, 15 m? Explique seu raciocínio.

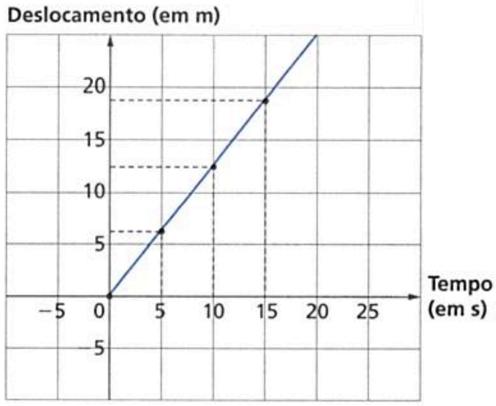
Representação gráfica

As situações que apresentam grandezas proporcionais podem ser representadas por meio de gráficos.

Acompanhe as situações a seguir.

1 Considere um automóvel que, partindo de uma situação de repouso, começa a se deslocar 6 metros a cada 5 segundos. Observe no quadro a seguir os dados desse deslocamento.

Tempo (em s)	Deslocamento (em m)
0	0
5	6
10	12
15	18



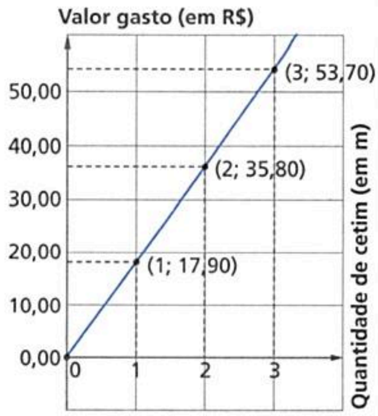
Observe que, em todos os pontos, o deslocamento é igual a 1,2 vezes o tempo, pois $\frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{18}{15} = 1{,}2$.

Considerando o deslocamento como *y* e o tempo, como *x*, matematicamente, temos: $y = 1{,}2 \cdot x$.

Observe que os pontos estão alinhados, o que nos permite traçar uma semirreta, começando pela origem do sistema cartesiano.

2 Uma costureira está fazendo a tabela de preço dos vestidos que vai produzir. Ela sabe que o preço de 1 metro de cetim custa R$ 17,90. Decidiu fazer um quadro com valores para saber o quanto vai gastar, dependendo da quantidade de cetim que precisará comprar, depois representou em um gráfico. Observe.

Quantidade de cetim (em m)	Valor gasto (em R$)
1	17,90
2	35,80
3	53,70



Com a representação gráfica, ela consegue perceber que, se precisar de 2,5 m de tecido, por exemplo, vai gastar por volta de R$ 45,00.

Podemos dizer que o valor gasto depende da quantidade de metros. Assim, se chamarmos o valor gasto em reais de *y* e a quantidade de cetim em metros, de *x*, temos: $y = 17{,}9 \cdot x$.

Com essa expressão, podemos calcular que para 2,5 metros de cetim essa costureira pagará R$ 44,75.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Retome a relação entre as escalas termométricas estudadas na Unidade. Vimos que as escalas Celsius e Fahrenheit não são proporcionais. A relação matemática entre elas é dada pela expressão: °F = 1,8 × °C + 32.

Assim, determine:

a) 68 °F em °C. **b)** 25 °C em °F.

2. Classifique as grandezas apresentadas nas situações a seguir em Proporcionais (P) ou em Não Proporcionais (NP).

A medida do lado de um hexágono regular e seu perímetro.

A quantidade de cestas convertidas em uma partida de basquetebol e o tempo de jogo.

A temperatura e a hora em que foi medida ao longo de um dia.

A distância percorrida por um automóvel, a uma velocidade constante, e o tempo do percurso.

A medida da aresta de um cubo e seu volume, em litros.

3. Uma livraria decidiu fazer uma liquidação com alguns livros.

Ao chegar lá, é possível ler o anúncio: "2 livros por R$ 19,00"; "5 livros por R$ 38,00".

Os preços são proporcionais ao número de livros comprados? Justifique sua resposta.

4. Maurício foi a uma quitanda e viu que três alcachofras custavam R$ 11,70. Decidiu comprar 8. Quanto ele pagou no total?

5. Um prêmio de loteria, no valor de R$ 1 530 000,00, será dividido igualmente pelo total de acertadores.

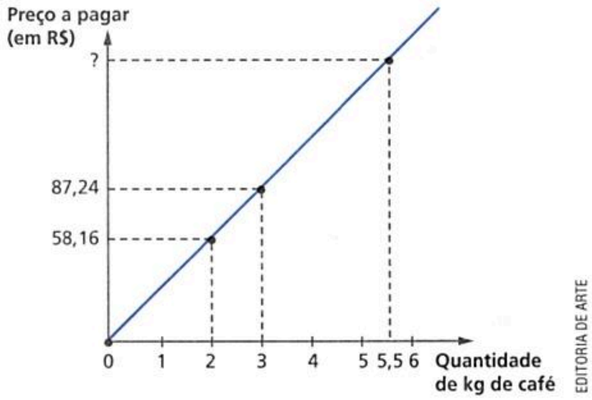
a) Quanto cada acertador receberá, se o prêmio for dividido entre 5 ganhadores?

b) E se fossem 6 ganhadores?

c) Faça um quadro relacionando as quantidades 1, 2, 5 e 6 de acertadores e o valor do prêmio correspondente.

d) Conforme o número de acertadores aumenta, o que acontece com o valor do prêmio?

6. Observe o gráfico a seguir:



Analisando as informações presentes no gráfico, responda:

a) Qual o preço de 2 kg de café?

b) Qual o valor pago por 5,5 kg de café?

7. A tarifa de táxi é composta de um valor fixo, chamado de bandeirada, adicionado ao valor pago por quilômetro rodado.

Sabendo que o valor da bandeirada é de R$ 5,12 e o valor por quilômetro rodado é de R$ 2,49, responda às perguntas:

a) O valor a ser pago em um táxi e a quantidade de quilômetros rodados são duas grandezas proporcionais? Explique.

b) Paola pegou um táxi em Recife às 10 h da manhã. Fez um percurso de 12 quilômetros. Qual o valor pago por ela?

CAPÍTULO 2

ALGUMAS RAZÕES ESPECIAIS

Velocidade média

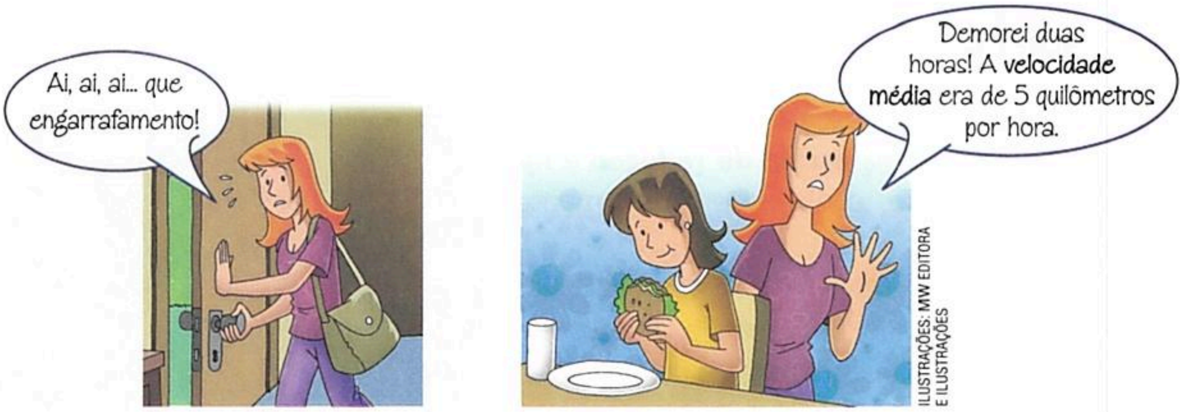

STEFANO GARAU/SHUTTERSTOCK.COM

Felipe Massa: Vencedor do GP Brasil 2006 e 2008

O piloto brasileiro Felipe Massa triunfou no Grande Prêmio do Brasil de Fórmula 1, em 2006. Ele foi o quinto brasileiro a conquistar a primeira colocação em pistas brasileiras.

Felipe Massa conquistou a vitória no GP Brasil 2006 com a velocidade média de 199,732 km/h e foi o terceiro colocado na classificação final do campeonato mundial de 2006. No GP Brasil 2008, chegou ao 1º lugar com a velocidade média de 194,885 km/h e foi o 2º colocado na classificação final do campeonato mundial de 2008.

Informações obtidas em: NEW SUPER SPEEDWAY. **Próximos eventos dos esportes a motor.** Disponível em: <www.superspeedway.com.br/f_um/hist/interlagos.asp>. Acesso em: 9 mar. 2015.



ILUSTRAÇÕES: MW EDITORA E ILUSTRAÇÕES

Denomina-se **velocidade média** a razão entre a distância total percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$$

Considere esta situação:

1 Um trem percorreu a distância de 453 km em 6 horas. Qual foi a velocidade média do trem nesse percurso?

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{453\text{ km}}{6\text{ h}} = 75{,}5\text{ km/h}$$

A velocidade média do trem foi de 75,5 km/h. Lê-se: 75,5 quilômetros por hora.

FÓRUM

Vias congestionadas são um dos problemas atuais que mais afetam as grandes cidades do mundo. O trânsito é responsável, entre outras coisas, por ser um dos fatores que pioram a qualidade de vida da população, pois diminui o tempo para descanso e lazer e para se dedicar à saúde e aumenta o estresse.

Uma pesquisa divulgada em 2016, que estudou áreas metropolitanas com mais de 1,6 milhão de habitantes, situou os tráfegos das cidades do Rio de Janeiro e de São Paulo como o sexto e sétimos piores tráfegos do mundo, respectivamente.

Essa combinação, tráfego intenso com estresse, resulta em um dado divulgado pela Associação Brasileira de Medicina do Tráfego (Abramet) de que entre 13% e 17% dos motoristas brasileiros apresentam algum distúrbio comportamental no trânsito, de tal forma que esses distúrbios podem acarretar brigas, discussões, acidentes e até mesmo mortes.

Dessa forma, os Departamentos Estaduais de Trânsito (Detran) buscam conscientizar os motoristas para que estes pratiquem a gentileza no trânsito, lembrando sempre que as ruas são um espaço coletivo.

Informações obtidas em: DETRAN dá dicas de como evitar o estresse no trânsito. **Semana On**. Disponível em: <http://www.semanaon.com.br/conteudo/4135/detran-da-dicas-de-como-evitar-o-estresse-no-transito> e ABAD LIÑÁN, J. M.; ALAMEDA, D.; GALÁN, J. Trânsito piora nas grandes cidades latino-americanas. **El País**. Disponível em: <http://brasil.elpais.com/brasil/2016/09/15/tecnologia/1473950908_051813.html>. Acessos em: 22 mar. 2017.

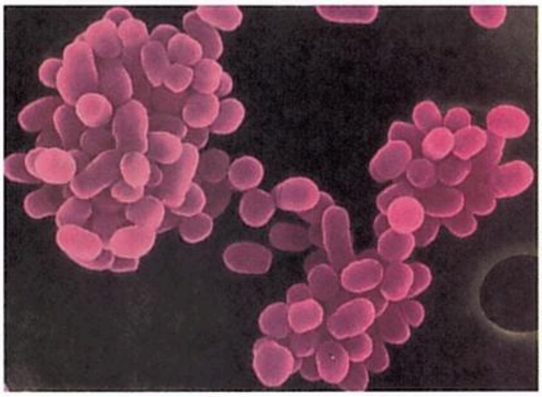
- Debata com seus colegas possíveis soluções para a redução dos tráfegos das grandes cidades.
- Faça uma pesquisa sobre o estresse, suas causas e consequências, e técnicas de como tratar esse problema no cotidiano.

Escala

Uma das aplicações da ideia de razão entre duas grandezas encontra-se na **escala de redução** e **na escala de ampliação**, conhecidas simplesmente como **escala**.

Profissionais de diversas áreas usam uma determinada escala de redução, por exemplo, ao construir a maquete de um prédio, fazer a planta de um imóvel ou desenhar um novo modelo de carro.

Denomina-se escala de um desenho a razão entre o comprimento considerado nele e o correspondente comprimento real, medidos com a mesma unidade. Em geral, utilizamos as medidas em centímetro para determinar uma escala.



DENNIS KUNKEL/PHOTOTAKE/GLOW IMAGES

A escala de ampliação é um dado importante em análises científicas. Na foto, a bactéria *Brucella abortus*. Aumento aproximado de 14 160 vezes e colorido artificial.

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento de um desenho}}{\text{comprimento real}}$$

No mapa, vemos que a escala é de 1 : 50 000 000.

Considere a seguinte situação:

- A distância entre duas cidades é de 6 cm. Sabendo a escala e a distância no mapa, qual é a distância real entre as cidades?

comprimento no desenho: 6 cm

escala: 1 : 50 000 000

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento de um desenho}}{\text{comprimento real}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{50000000} = \frac{6}{x}$$

$x = 300000000 \text{ cm} \Rightarrow x = 3000 \text{ km}$

A distância entre os dois pontos é 3 000 km.

Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar.** Rio de Janeiro, 2007. p. 94.

A escala 1 : 50 000 000 significa que 1 cm no desenho corresponde a 50 000 000 cm no real, ou seja, a 500 km. Assim, se a distância entre duas cidades no mapa é de 2,5 cm, a distância real entre essas cidades é de 1 250 km (2,5 · 500).

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Um automóvel percorreu uma distância de 455 km em 7 horas. Qual foi a velocidade média desse automóvel nesse percurso?

2. Leia as informações:

A distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente, 150 000 000 km; A luz do Sol, para atingir a Terra, leva em torno de 500 segundos.

Responda:

a) Qual é a velocidade da luz no vácuo?

b) Quantos minutos a luz do Sol leva para chegar à Terra?

3. A Praça de Tian'anmen, na China, é mundialmente conhecida pelo seu enorme tamanho. Ela foi representada, em uma folha de papel, com 5,5 cm de comprimento por 3,125 cm de largura. Sabendo que a escala utilizada foi 1 : 16 000, determine as dimensões reais da praça.

4. (ENEM/2015) Na construção de um conjunto habitacional de casas populares, todas serão feitas num mesmo modelo, ocupando, cada uma delas, terrenos cujas dimensões são iguais a 20 m de comprimento por 8 m de largura. Visando a comercialização dessas casas, antes do início das obras, a empresa resolveu apresentá-las por meio de maquetes construídas numa escala de 1 : 200. As medidas do comprimento e da largura dos terrenos, respectivamente, em centímetros, na maquete construída, foram de

a) 4 e 10.
b) 5 e 2.
c) 10 e 4.
d) 20 e 8.
e) 50 e 20.

POR TODA PARTE

Responda às questões no caderno.

1. A tabela a seguir mostra as distâncias aproximadas entre algumas cidades brasileiras.

Distâncias aproximadas entre algumas cidades

Cidade (partida)	Cidade (chegada)	Distância (em km)
Aracaju (SE)	Anápolis (GO)	1783
Araraquara (SP)	Rio de Janeiro (RJ)	678
Palmas (TO)	Barbacena (MG)	1695
Caruaru (PE)	Fortaleza (CE)	761
São Luís (MA)	Campina Grande (PB)	1508
Chuí (RS)	Florianópolis (SC)	966
Boa Vista (RR)	Governador Valadares (MG)	5250
Foz do Iguaçu (PR)	Cuiabá (MT)	1446
Brasília (DF)	Picos (PI)	1601
Mossoró (RN)	Vitória (ES)	2005

Fonte: Distância entre cidades. Disponível em: <http://www.distanciasentrecidades.com/>. Acesso em: 1º nov. 2018.

a) Qual é a velocidade média aproximada de um carro, em quilômetros por hora, que foi de:

- Caruaru a Fortaleza em 11 horas?
- Brasília a Picos em 21 horas?
- Aracaju a Anápolis em 22 horas e 30 minutos?

b) Sabendo que **consumo médio** de combustível é a razão entre a distância percorrida e a quantidade de litros de combustível consumidos para percorrê-la, determine o consumo médio, em quilômetros por litro, aproximado, de um automóvel que gastou:

- 420 L de combustível para ir de Boa Vista a Governador Valadares.
- 50 L de combustível para ir de Araraquara ao Rio de Janeiro.
- 152 L de combustível para ir de Mossoró até Vitória.

c) Um caminhão (cegonheiro) carregando automóveis levou 30 horas para ir de São Luís a Campina Grande. Qual foi a velocidade média, aproximada, em quilômetros por hora, desse caminhão?

d) Qual é a escala de um mapa em que a distância entre Mossoró e Vitória é representada por 10,0 cm?

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Caminhão-cegonha.

Densidade de um corpo

Para calcular a **densidade** de um corpo, também se aplica a ideia de razão entre duas grandezas. Assim, a densidade de um corpo é dada pela razão entre a massa e o volume desse corpo.

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}}$$

Consideremos a seguinte situação:

1 Uma escultura de bronze tem 3,5 kg de massa e volume de 400 cm^3. Qual é a densidade dessa escultura?

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}} = \frac{3{,}5 \text{ kg}}{400 \text{ cm}^3} = \frac{3500 \text{ g}}{400 \text{ cm}^3} = 8{,}75 \text{ g/cm}^3$$

Logo, a densidade dessa escultura de bronze é 8,75 g/cm^3.

PARA QUEM QUER MAIS

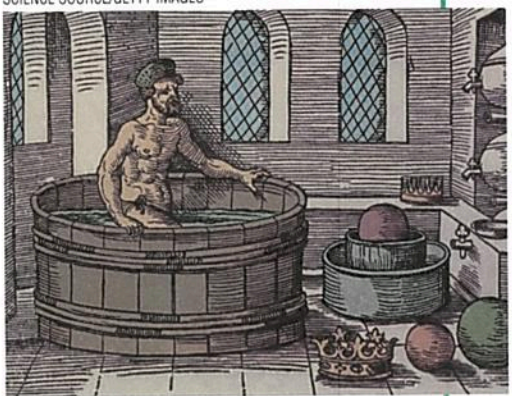
Eureka! Eureka!

Arquimedes nasceu em Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), na ilha da Sicília. Era filho do astrônomo Fídias e desfrutava de prestígio junto ao rei Hierão II, que lhe permitiu estudar em Alexandria, templo do saber da época.

Há várias histórias pitorescas sobre Arquimedes. Uma delas diz respeito à coroa de ouro que um ourives teria moldado para o rei. Suspeitando que pudesse haver prata oculta em meio ao ouro e não querendo desmanchar a coroa, Hierão encaminhou a questão para Arquimedes.

Conta-se que, quando estava em um banho público, Arquimedes observara a elevação da água à medida que mergulhava seu corpo e percebera que esse fato poderia resolver o problema da coroa. Feliz com a descoberta, Arquimedes teria se esquecido de que estava nu e correra para casa gritando: "Eureka! Eureka!" ("Achei! Achei!").

SCIENCE SOURCE/GETTY IMAGES



Arquimedes saindo da água, em xilogravura de 1547, de autoria desconhecida.

Veja como ele fez:

1 Mergulhou em um recipiente cheio d'água uma massa de ouro puro, igual à massa da coroa, e recolheu a água que transbordou.

2 Retomando o recipiente cheio d'água, mergulhou nele uma massa de prata pura, também igual à massa da coroa, recolhendo a água que transbordou.

3 Finalmente, mergulhou no recipiente cheio d'água a coroa do rei e constatou que o volume de água recolhido tinha um valor intermediário entre aqueles recolhidos na 1ª e 2ª operações. Ficou, então, constatado que a coroa não era totalmente de ouro puro!

- Pesquise e anote no caderno os valores correspondentes às densidades do ouro e da prata.

Densidade demográfica

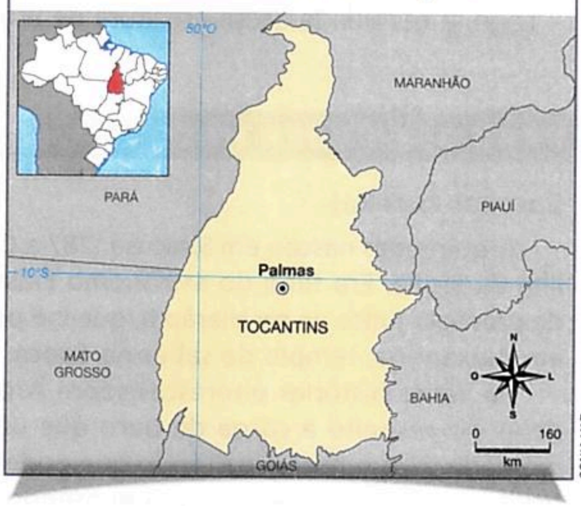
O cálculo da **densidade demográfica** também é uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa o número de habitantes por quilômetro quadrado de uma região. Assim, densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes e a área da região ocupada, ou seja:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área de região ocupada}}$$

Considere a seguinte situação:

1 O estado de Tocantins, situado na região Norte e criado em 5 de outubro de 1988, ocupa uma área de 277 621 km². De acordo com o Censo 2010, Tocantins tinha uma população de 1 383 445 habitantes. Qual era, então, a densidade demográfica aproximada desse estado nesse ano?

Tocantins: localização



Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar.** 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

De acordo com os dados apresentados, temos:

$$\text{densidade demográfica} = \frac{1\,383\,445 \text{ hab}}{277\,621 \text{ km}^2} = 4{,}9 \text{ hab/km}^2$$

Logo, a densidade demográfica do estado de Tocantins era de 4,9 hab./km², aproximadamente.

SAIBA QUE

A cada 10 anos, o IBGE faz o Censo Demográfico ou Recenseamento Demográfico, que é uma pesquisa realizada para reunir informações sobre a população brasileira. Essas informações são importantes para que o governo possa criar políticas públicas mais eficientes para atender às necessidades da sociedade.

O primeiro Censo brasileiro ocorreu no ano de 1872, mas a ideia de recensear a população para, por meio de uma pesquisa, obter informações sobre a sociedade não é nova, ao contrário, os romanos já faziam censos séculos antes de Cristo.

O próximo Censo Demográfico no Brasil será no ano 2020, quando se atualizarão todos os dados sobre a população brasileira.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Um bloco maciço de madeira tem 14 kg de massa e ocupa um volume de 35 dm^3. Qual a densidade desse bloco?

2. Um fio de platina ocupa um volume de 0,2 cm^3. Sabendo que a massa do fio é de 4,3 g, determine a densidade desse metal.

3. A água-marinha é uma das pedras semipreciosas mais admiradas em todo o mundo. Suponha que uma água-marinha tenha 8,1 g de massa e ocupe um volume de 3 cm^3. Qual é a densidade dessa pedra?

HEMERA

Pedras de água-marinha.

4. Uma região do interior do Brasil tem uma população de 64 200 habitantes e ocupa uma área de 15 000 km^2. Qual é a densidade demográfica dessa região?

5. A Grécia, país situado no continente europeu, tem cerca de 132 000 km^2 de área e, em 2010, tinha uma população aproximada de 11 200 000 habitantes. Qual era a densidade demográfica aproximada da Grécia nesse ano?

ANGELOS TZORTZINIS/AFP/GETTY IMAGES

Vista da Acrópole de Atenas, na Grécia. Foto tirada em fevereiro de 2015.

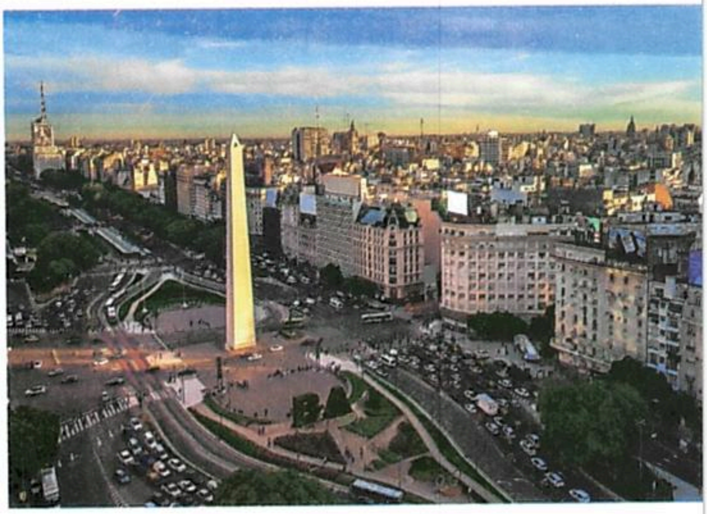
6. Dois bairros de uma cidade, Água Branca e Pedra Azul, têm os seguintes dados aproximados para população e área:

Bairro	População	Área (em km^2)
Água Branca	125 000	36
Pedra Azul	85 000	30

Qual dos dois bairros apresenta maior densidade demográfica?

7. A Argentina ocupa uma área de cerca de 2 800 000 km^2. Em 2010, a população argentina era de aproximadamente 40 100 000 habitantes. Determine a densidade demográfica da Argentina em 2010.

DIEGO GRANDI/SHUTTERSTOCK.COM



Buenos Aires, Argentina. Foto tirada em março de 2014.

8. No Rio Grande do Norte, o turismo é a atividade que mais gera empregos no estado. Entre seus inúmeros atrativos podemos citar a deslumbrante beleza natural, o artesanato (cerâmica, cestaria, rendas e bordados) e a comida típica. O estado possui cerca de 3 168 027 habitantes (dados do Censo do IBGE de 2010) e área de 52 810 km^2. Determine a densidade demográfica desse estado.

CAPÍTULO 3

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Considere as seguintes situações:

1 Para adubar um pomar de área igual a 15 000 m^2, utilizam-se 30 kg de fertilizante. Vamos calcular a quantidade de fertilizante necessária para adubar um pomar de 32 000 m^2.
Essa situação relaciona duas grandezas proporcionais: área (em m^2) e quantidade de fertilizante (em kg).

Para responder à pergunta proposta, vamos organizar os dados em um quadro:

Área do pomar (em m²)	Quantidade de fertilizante (em kg)
15 000	30
32 000	x

Como as grandezas são proporcionais, para encontrar a quantidade de fertilizante para adubar uma área de 1 000 m^2, vamos utilizar a relação:

$$\frac{15\,000}{32\,000} = \frac{30}{x} \Rightarrow 15\,000 \cdot x = 30 \cdot 32\,000 \Rightarrow x = 64$$

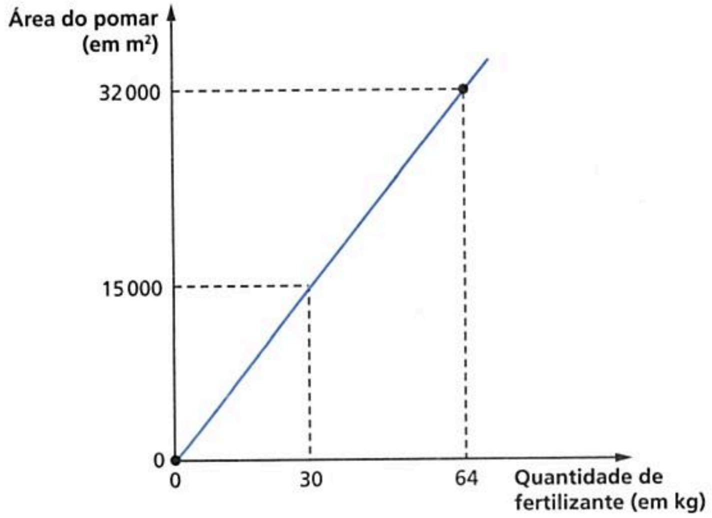
Dessa maneira, 32 000 m^2 necessitarão de 64 kg de fertilizante.

Percebemos que, quanto maior a área do pomar, maior a quantidade de fertilizante, na mesma proporção. Dizemos assim que as grandezas área e quantidade de fertilizante são diretamente proporcionais.

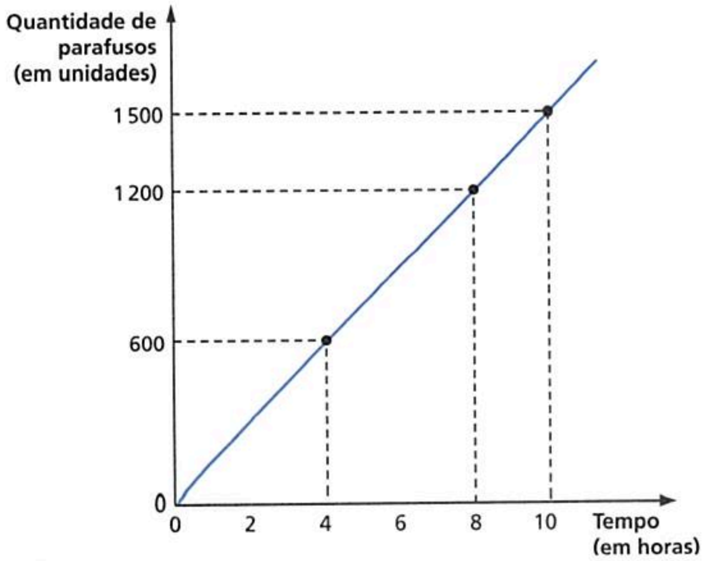
Veja no material audiovisual o vídeo sobre o desperdício de água causado por uma torneira pingando.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando variam sempre na mesma razão, ou seja, uma aumenta e a outra aumenta na mesma proporção ou, quando uma diminui, a outra diminui na mesma proporção.

Graficamente, podemos representar a área a ser adubada com relação à quantidade de quilogramas de fertilizante usado.



2 Uma empresa que fabrica parafusos decidiu verificar a relação entre a quantidade de parafusos produzida (em unidades) e o tempo de funcionamento da máquina que produz essa quantidade. Observe o gráfico que representa essa relação.



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

Analisando o gráfico, percebemos que essas grandezas são diretamente proporcionais, pois as duas aumentam na mesma razão. Observe:

- quando a produção de parafusos passa de 600 unidades para 1 200 unidades, varia na razão de $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$.
- quando o tempo passa de 4 horas (produção de 600 unidades) para 8 horas (produção de 1 200 unidades), varia na razão de $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Assim, conseguimos determinar, por exemplo, o tempo para a produção de 4200 unidades de parafusos:

$$\frac{600}{4200} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 28 \rightarrow 28 \text{ horas}$$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Copie e complete o quadro a seguir, considerando que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

Quantidade de garrafas de água	1	4	5		16
Preço a pagar (em R$)		19,20		43,20	

2. O tempo de cozimento de um frango depende de sua massa em quilogramas. Sabe-se que um frango de 2,5 kg leva 1h15min para assar. Maria tem 60 min para assar um frango. Qual a massa máxima de frango que ela poderá comprar?

3. Uma panificadora produz 230 pães franceses a cada 40 min. Em uma jornada de 8 h, quantos pães são produzidos?

4. Duas bolachas de água e sal possuem 64 calorias. Marina diariamente consome 5 bolachas de água e sal em seu café da manhã. Quantas calorias de bolachas de água e sal Marina consome por dia?

5. Um automóvel percorre uma estrada com velocidade constante de 110 km/h.

a) Que distância terá percorrido após 3h30min?

b) Uma viagem de 473 km demoraria quanto tempo, mantendo-se essa velocidade?

6. A maquete de um novo empreendimento imobiliário foi construída na escala de 1 : 390. Sabendo que esse edifício terá 26 andares e que, em média, cada andar tem 3 m de altura, determine a medida da altura desse edifício na maquete.

7. Um caminhão pode levar 600 sacos de cimento ou 7 290 tijolos. Se o veículo já foi carregado com 100 sacos de cimento, quantos tijolos ainda podem ser colocados no caminhão?

8. Converta as velocidades dadas em m/s para km/h:

a) 20 m/s

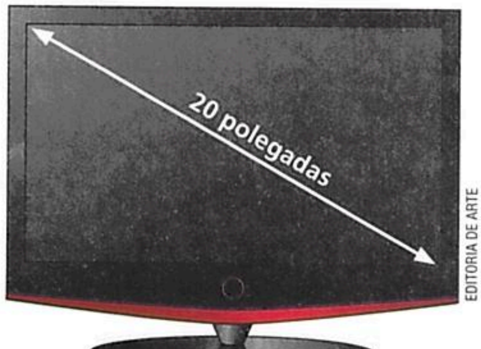
b) 100 m/s

c) 55 m/s

9. O cachorro de Amanda pesa 4,5 kg. Para tratar uma infecção nas vias urinárias, o veterinário receitou um antibiótico cuja dosagem é de 6 mL a cada 10 kg de peso corporal.

Quantos mL de antibiótico Amanda dará a seu cachorro?

10. (Encceja) As telas dos televisores são medidas em polegadas. Quando dizemos que um televisor tem 20 polegadas, isso significa que a diagonal da tela mede 20 polegadas (aproximadamente 51 cm).



Se a diagonal da tela de uma televisão mede 35,7 cm, podemos concluir que se trata de um aparelho de:

a) 12 polegadas.

b) 14 polegadas.

c) 16 polegadas.

d) 18 polegadas.

CAPÍTULO 4

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Considere as seguintes situações.

1 Um ônibus faz o percurso do terminal até o centro da cidade e depois volta ao terminal. Um fiscal registrou as velocidades médias do ônibus e o tempo gasto nos percursos de ida até o centro em um determinado dia.

ALAN CARVALHO

Observe o quadro com essas informações.

Velocidade (em km/h)	Tempo (em min)
52	80
65	64
104	40

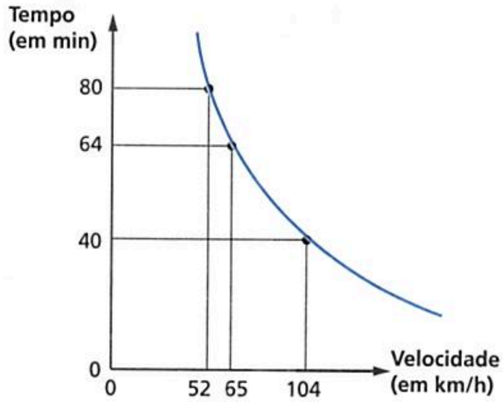
Observe que, à medida que a velocidade aumenta, o tempo gasto para percorrer o mesmo percurso diminui.

$$\left.\begin{aligned}\frac{52}{65} &= \frac{4}{5}\\ \frac{80}{64} &= \frac{5}{4}\end{aligned}\right\}\ \frac{4}{5} \text{ e } \frac{5}{4} \text{ são razões inversas} \quad \text{e} \quad \left.\begin{aligned}\frac{52}{104} &= \frac{1}{2}\\ \frac{80}{40} &= \frac{2}{1}\end{aligned}\right\}\ \frac{1}{2} \text{ e } 2 \text{ são razões inversas.}$$

Dizemos, assim, que a velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando uma varia na razão inversa da outra, ou seja, quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção, ou quando uma diminui, a outra aumenta na mesma proporção.

Graficamente, podemos representar a relação entre a velocidade média e o tempo gasto nos percursos de ida e volta do ônibus.



EDITORIA DE ARTE

SAIBA QUE

A curva que representa grandezas inversamente proporcionais é chamada **hipérbole**.

2 Todo ano uma empresa faz um desafio aos seus funcionários. Um prêmio em dinheiro, no valor de R$ 15 000,00, é dividido igualmente para quem acertar a pergunta do desafio. Observe o quadro com a relação entre a quantidade de premiados e o valor que cada um recebeu nos últimos três anos.

Quantidade de premiados	Valor do prêmio (em reais)
3	5 000
5	3 000
8	1 875

No quadro, é possível observar que, quando a quantidade de pessoas premiadas aumenta, o valor do prêmio recebido diminui, proporcionalmente.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{5000}{3000} = \dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \dfrac{3}{5} \text{ e } \dfrac{5}{3} \text{ são razões inversas e } \left.\begin{array}{l} \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{3000}{1875} = \dfrac{8}{5} \end{array}\right\} \dfrac{5}{8} \text{ e } \dfrac{8}{5} \text{ são razões inversas.}$$

Assim, dizemos que as grandezas quantidade de premiados e valor do prêmio são inversamente proporcionais.

PENSE E RESPONDA

Observe as representações gráficas da página 263 e o gráfico desta página. Como podemos relacionar as representações gráficas com os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais?

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Uma impressora a jato de tinta imprime 100 páginas em 20 min. Quatro impressoras iguais a essa imprimirão essa mesma quantidade de folhas em quanto tempo?

2. Um cano, com área de 6 cm^2, esvazia uma caixa-d'água em 4,5 min. Outro cano, com área de 10 cm^2 e com a mesma vazão por minuto, esvaziará a mesma caixa-d'água em quanto tempo?

3. Para fazer uma viagem escolar até uma cidade próxima, a escola de Maria precisa alugar um ônibus. O custo desse aluguel será distribuído equitativamente entre os alunos que participarão da viagem. A direção avisa que, se 15 alunos participarem da viagem, cada um terá de pagar R$ 25,00 pelo aluguel do ônibus. Se 30 alunos participarem da viagem, quanto cada um pagará?

4. Cinco homens levam 20 dias para recapear um trecho de estrada. Esse mesmo serviço seria realizado em quantos dias, se fossem 8 homens no total?

5. Um ciclista viaja 48 km em uma hora e meia.

a) Qual é sua velocidade média nesse percurso?

b) Mais tarde, ele faz o mesmo percurso, porém com uma velocidade média de 38,4 km/h. Quanto tempo ele gasta?

6. 38 professores foram convocados para corrigir um vestibular bastante concorrido. Estimam que levarão 14 dias para concluir a tarefa, trabalhando 8 h/dia. Se forem contratados mais 18 professores, mantendo o mesmo ritmo de trabalho, em quantos dias conseguirão finalizar o trabalho de correção?

7. Um livro tem 150 páginas, e cada página tem 36 linhas. Um editor resolveu colocar apenas 30 linhas em cada página. Qual será a nova quantidade de páginas do livro?

8. Um grupo de 15 amigos parte para uma trilha, com alimentação contabilizada para 20 dias. Passados 5 dias, um novo grupo de 10 aventureiros, sem mantimentos, se junta ao anterior. Quantos dias durarão os mantimentos, contados a partir da chegada do novo grupo?

9. Caio dividiu certo número em parcelas inversamente proporcionais aos números 2, 5 e 4. A primeira parcela que ele obteve foi 200. Qual foi o número que Caio dividiu?

a) 380
b) 360
c) 400
d) 420
e) 390

10. Um terreno retangular tem 80 m de comprimento por 35 m de largura. Se diminuirmos 10 m na largura, em quantos metros deverá ser aumentado o comprimento para que a área do terreno seja mantida?

a) 20 m
b) 24 m
c) 25 m
d) 32 m
e) 40 m

DESAFIO

Agora, junte-se a um colega para resolver a próxima questão.

11. (OBM) Anita imaginou que levaria 12 minutos para terminar a sua viagem, enquanto dirigia à velocidade constante de 80 km/h, numa certa rodovia. Para sua surpresa, levou 15 minutos. Com qual velocidade constante essa previsão teria se realizado?

a) 90 km/h
b) 95 km/h
c) 100 km/h
d) 110 km/h
e) 120 km/h

CAPÍTULO 5

REGRA DE TRÊS

Regra de três simples

A regra de três simples é uma estratégia para o cálculo de valores desconhecidos em problemas que relacionam grandezas diretamente, ou inversamente, proporcionais. Recebe esse nome, pois são conhecidos três valores em uma situação-problema e deseja-se determinar o quarto valor.

Observe as situações a seguir:

1 Camila pagou R$ 3,50 por 2,5 kg de laranjas. Pedro quer comprar 1,8 kg de laranjas. Quanto Pedro pagará?

Para resolver essa situação, vamos organizar os dados do problema em um quadro, que relaciona as grandezas envolvidas (quantidade de laranjas e preço a pagar).

Quantidade de laranjas (em kg)	Preço a pagar (em R$)
2,5	3,50
1,8	x

Sabendo que as grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{2{,}5}{1{,}8} = \frac{3{,}5}{x} \Rightarrow 2{,}5 \cdot x = 1{,}8 \cdot 3{,}5 \Rightarrow x = \frac{6{,}3}{2{,}5} \Rightarrow x = 2{,}52$$

Assim, Pedro deverá pagar R$ 2,52 por 1,8 kg de laranjas.

2 Um automóvel, trafegando em uma estrada à velocidade constante de 90 km/h, faz uma viagem em 2,5 h. A viagem de volta é feita a uma velocidade constante de 75 km/h. Qual é o tempo de duração dessa viagem?

Para resolver essa situação, vamos, novamente, organizar os dados do problema em um quadro.

Velocidade (em km/h)	Tempo (em h)
90	2,5
75	x

Nesse caso, como se trata de grandezas inversamente proporcionais, temos que:

$$\frac{90}{75} = \frac{1}{\frac{2{,}5}{x}} \Rightarrow \frac{90}{75} = \frac{x}{2{,}5} \Rightarrow 75 \cdot x = 90 \cdot 2{,}5 \Rightarrow 75 \cdot x = 225 \Rightarrow x = 3$$

A viagem de volta, a uma velocidade constante de 75 km/h, demorará 3 horas.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

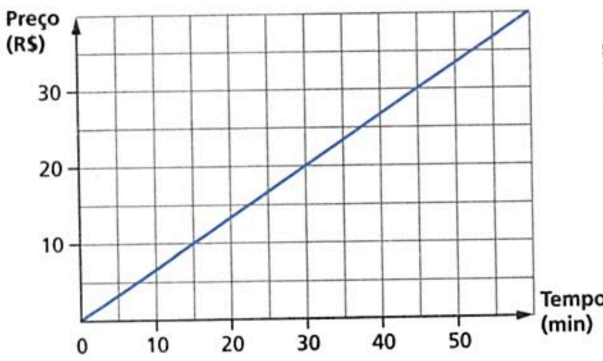
1. Para construir um muro de 16 metros, Antônio utilizou 2 240 tijolos. Caso o muro tivesse 27 metros, quantos tijolos seriam necessários?

2. Um cano, com área de 6 cm², despeja 7,5 L de água por minuto. Outro cano, com área de 10 cm², despejará quantos litros de água por minuto?

3. Para pintar uma parede, um pintor mistura tinta branca e tinta vermelha. Para cada 2,5 L de tinta branca, ele mistura 1,7 L de tinta vermelha. A quantidade de tinta branca e a de tinta vermelha são proporcionais. Para 3,5 L de tinta branca, quanto ele deverá misturar de tinta vermelha?

4. Uma empresa de pintura de fachadas acaba de ganhar um grande contrato. O diretor da empresa pensou em colocar 2 funcionários para fazer o serviço, mas isso demoraria 80 horas. Pelo contrato firmado, a obra precisa ser concluída em 16 horas. Quantos pintores serão necessários para cumprir essa meta?

5. O gráfico abaixo apresenta, para uma operadora de telefonia, o preço pago, em R$, de acordo com o tempo de ligações utilizado.



EDITORIA DE ARTE

a) Esse gráfico ilustra uma situação de proporcionalidade? Explique.

b) Qual é o preço a pagar por 25 minutos de comunicação?

c) Quantos minutos, aproximadamente, é possível falar, com um crédito de R$ 20,00?

6. Um carro consome em média 4,9 litros de gasolina a cada 10 km percorridos. Quantos litros de combustível são necessários para viajar 96 km?

7. Um motorista dirige a uma velocidade constante. Sabendo que ele viaja 120 km em 1h30min, calcule a distância que ele viaja em:

a) 1 hora.

b) 2h20.

8. Um filtro de ar retém 0,7 grama de poeira para cada 100 m³ de ar filtrado. Quantos gramas de poeira são retidos para 15 000 m³ de ar filtrado?

9. Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Nos primeiros 15 dias, apenas 20 alunos aceitaram a tarefa e arrecadaram 180 kg de alimentos. Nos últimos 15 dias da campanha, 30 novos alunos juntaram-se ao grupo e mantiveram constante o ritmo da coleta. Nessas condições, quantos quilogramas de alimentos foram arrecadados nesses últimos 15 dias?

10. Com certa quantidade de arame pode-se fazer uma tela de 50 m de comprimento por 1,20 m de largura. Aumentando a largura em 1,80 m, qual será o comprimento de outra tela feita com a mesma quantidade de arame usado na tela anterior?

Regra de três composta

A regra de três composta também é uma estratégia para o cálculo de valores desconhecidos em problemas que relacionam três ou mais grandezas diretamente, ou inversamente, proporcionais.

Acompanhe as seguintes situações.

1 Um trator, ao ser puxado por cinco homens durante 20 minutos, percorre uma distância de 120 metros. Em quanto tempo o mesmo trator percorrerá a distância de 150 metros ao ser puxado por quatro homens?

Inicialmente, vamos organizar as grandezas envolvidas no problema em um quadro. Nesse caso, temos: quantidade de homens, tempo (dado em minutos) e distância, em metros.

Quantidade de homens	Tempo (em min)	Distância (em m)
5	20	120
4	x	150

- Fixando a grandeza "quantidade de homens", vamos relacionar as grandezas "tempo" e "distância".

  Aumentando a distância, o tempo para percorrê-la também aumenta. Podemos dizer que as grandezas "tempo" e "distância" são diretamente proporcionais.

- Fixando a grandeza "distância", vamos relacionar as grandezas "quantidade de homens" e "tempo".

  Quanto maior a quantidade de homens puxando o trator, menor o tempo gasto para isso.

  Assim, podemos dizer que as grandezas "quantidade de homens" e "tempo" são inversamente proporcionais.

Então, a grandeza "tempo" é diretamente proporcional à grandeza "distância" e inversamente proporcional à grandeza "quantidade de homens". Assim, podemos montar a seguinte equação:

$$\underbrace{\frac{20}{x}}_{\text{tempo}} = \underbrace{\frac{120}{150}}_{\text{distância}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{5}{4}}_{\text{quantidade de homens}}}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{120}{150} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{480}{750}$$

$$480 \cdot x = 20 \cdot 750$$

$$x = 31,25$$

Portanto, o trator levará 31,25 min (31 minutos e 15 segundos) para percorrer a distância de 150 metros ao ser puxado por 4 homens.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Em uma fábrica de chocolates, trabalham 21 funcionários na produção. Juntos, eles fazem, ao longo da jornada de trabalho de 6 h diárias, 420 barras de chocolate. Próximo de datas comemorativas, como Páscoa, Dia dos Namorados e Natal, a fábrica costuma aumentar a jornada de trabalho para 8 h/dia e faz novas contratações, pois tem como meta a produção de 960 barras de chocolate por dia. Quantos funcionários precisam estar na produção para que essa meta seja atingida?

2. Três crianças constroem 5 castelos de areia em 2 h. Cinco crianças construirão 6 castelos de areia em quanto tempo?

LÉO FANELLI/ GIZ DE CERA

3. Para preparar 3 receitas de bolo, 5 cozinheiras utilizam 12 xícaras de farinha de trigo. Quantas receitas de bolo serão feitas por 14 cozinheiras, usando 45 xícaras de farinha de trigo?

4. Elabore uma situação envolvendo três grandezas, que possa ser resolvida com regra de três composta. Em seguida, troque com um colega e resolva o problema elaborado por ele.

5. Com um automóvel a uma velocidade média de 60 km/h, Beto roda 8 horas por dia e leva 6 dias para fazer certo percurso. No mesmo carro, mas mantendo uma velocidade média de 80 km/h e rodando 9 horas por dia, em quanto tempo ele faria o mesmo percurso?

6. (IFPE) Numa fazenda há 5 cavalos que consomem 300 kg de ração em 6 dias. Suponha que todos eles consomem por dia a mesma quantidade de ração. Com apenas 240 kg de ração, por quantos dias 12 cavalos iguais aos dessa fazenda seriam alimentados?

7. (Fuvest) A fábrica do Sr. Eusébio possui 12 máquinas, de mesmo tipo e capacidade, que usualmente executam determinada tarefa em 16 dias, funcionando 6 horas por dia. Como quatro dessas máquinas ficaram inutilizadas, as restantes passaram a ser colocadas em funcionamento 8 horas por dia. Nessas condições, a mesma tarefa será executada em

a) 18 dias.
b) 19 dias.
c) 20 dias.
d) 21 dias.
e) 22 dias.

8. (ENEM/MEC) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 9

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Interpretando os significados das informações

Todo o tempo deparamos com informações que são resultados de pesquisas estatísticas; por isso é tão importante compreendê-las. Os conceitos que você aprendeu até aqui irão ajudá-lo a responder às questões a seguir.

1. Veja alguns resultados obtidos em uma pesquisa sobre amizade no trabalho, realizada por uma empresa norte-americana:

> **I.** A amizade entre colegas aumenta a satisfação do funcionário com o emprego em até 50%.
>
> **II.** Menos de uma, entre cinco pessoas, considera-se amiga do chefe.
>
> **III.** Apenas 18% dos entrevistados afirmam trabalhar em empresas que estimulam a amizade entre funcionários.
>
> Informações obtidas em: DIAS, A. S. **Relações interpessoais.** <www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/k210742.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2018.

De acordo com esses resultados, responda às questões no caderno.

a) Explique o significado da informação III. Se o número de entrevistados fosse 300 000, quantos fariam tal afirmação?

b) Em um grupo de 55 pessoas, quantas se considerariam amigas do chefe?

FIZKES/SHUTTERSTOCK.COM

c) Os gerentes de uma empresa fizeram uma pesquisa, com seus funcionários, sobre o nível de satisfação com o emprego. Cada funcionário deu uma nota de 1 a 10 para a empresa. A nota média foi de 6,0. No ano seguinte, promoveram atividades para estimular a amizade entre os colaboradores e repetiram a pesquisa. Qual é a nota média máxima que os gerentes da empresa esperariam obter?

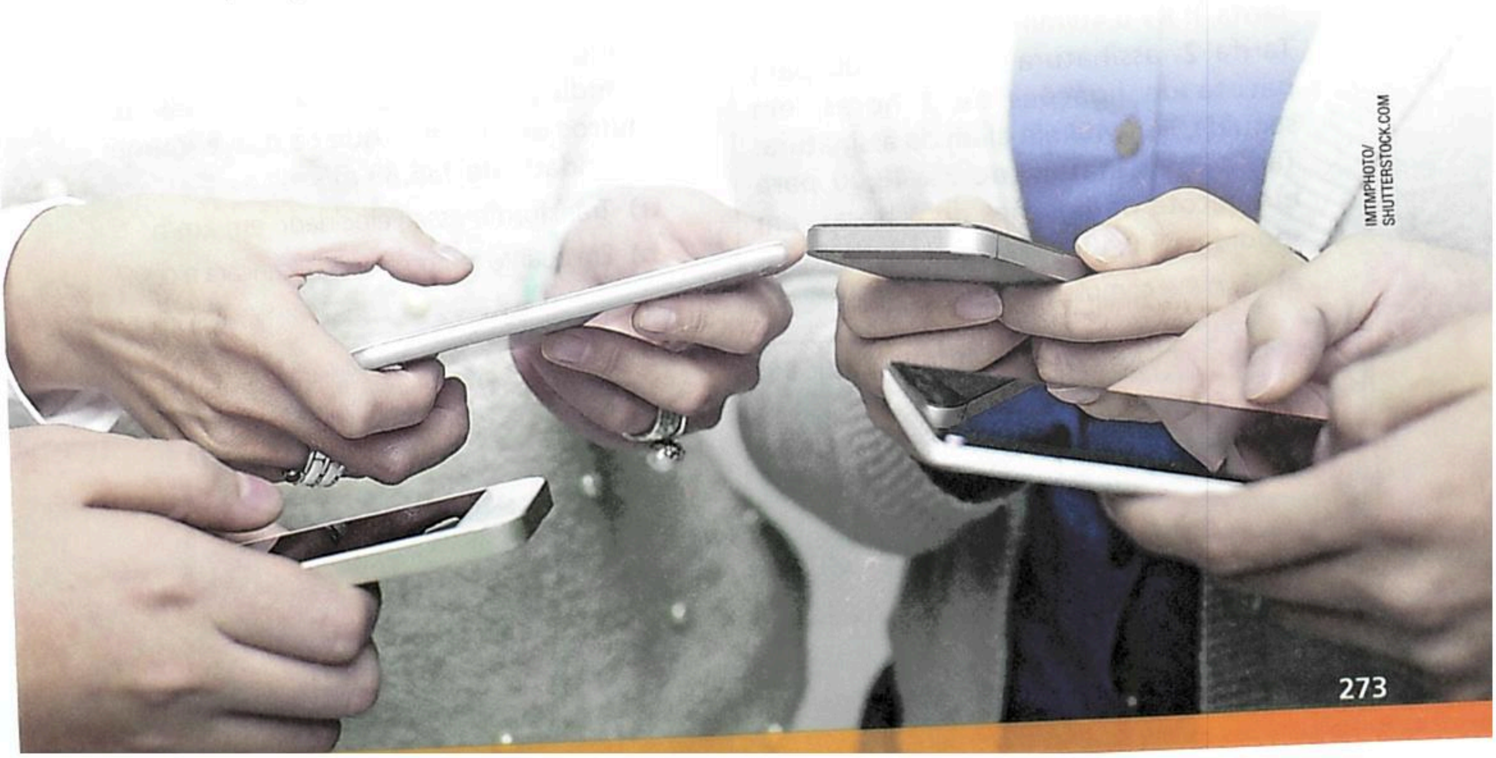
2. Considere as informações sobre o uso de telefone celular e responda às questões a seguir no caderno.

> **Pesquisa revela que, em 2016, o brasileiro fica conectado, em média, 194 minutos por dia com o celular.**
>
> Informações obtidas em: AMARAL, B. do Brasileiro usa celular por mais de três horas por dia. **Exame.** <https://exame.abril.com.br/tecnologia/brasileiro-usa-celular-por-mais-de-tres-horas-por-dia/>. Acesso em: 11 nov. 2018.

> **Para carregar, simultaneamente, 100 milhões de celulares, seriam consumidos 315 megawatts-hora, o equivalente ao consumo mensal de 1 260 residências, habitadas por 5 600 pessoas.**
>
> Informações obtidas em: 100 000 000 de celulares. **Veja.** São Paulo, ed. 1991, ano 40, n. 2, 17 jan. 2007.

a) Em média, quanto tempo (em horas) três brasileiros falam ao celular durante 5 meses?

b) De acordo com as informações anteriores, o consumo de megawatts-hora para carregar 2 bilhões de celulares é equivalente ao consumo mensal de quantas residências? Considere que a proporção entre o número de residências e de habitantes se mantém a mesma.



IMTMPHOTO/ SHUTTERSTOCK.COM

RETOMANDO O QUE APRENDEU

Responda às questões no caderno.

1. A distância entre duas casas de um vilarejo, na escala 1 : 15 000, é representada por um segmento de reta de 1,6 cm. Qual é a distância real entre essas duas casas?

2. Calcule a área do estado do Paraná, sabendo que sua população, no Censo 2010, era de 10 444 526 pessoas e sua densidade demográfica, na época, era de 52,40 hab./km^2.

3. (ENEM/MEC) Num mapa com escala 1 : 250 000, a distância entre as cidades *A* e *B* é de 13 cm. Num outro mapa, com escala 1 : 300 000, a distância entre as cidades *A* e *C* é de 10 cm. Em um terceiro mapa, com escala 1 : 500 000, a distância entre as cidades *A* e *D* é de 9 cm. As distâncias reais entre a cidade *A* e as cidades *B*, *C* e *D* são, respectivamente, iguais a *X*, *Y* e *Z* (na mesma unidade de comprimento). As distâncias *X*, *Y* e *Z*, em ordem crescente, estão dadas em

a) X, Y, Z.
b) Y, X, Z.
c) Y, Z, X.
d) Z, X, Y.
e) Z, Y, X.

4. Uma operadora de telefonia oferece as três tarifas a seguir:

Tarifa 1: R$ 0,40/min sem assinatura.

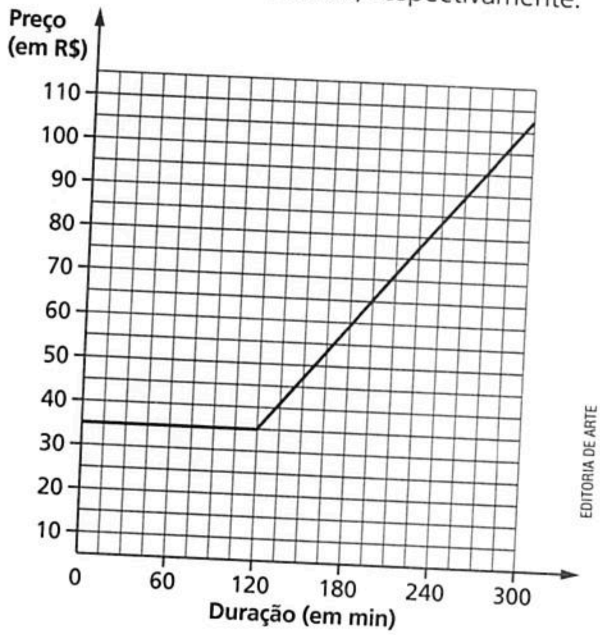
Tarifa 2: assinatura de R$ 35,00 para pacote de ligações de 2 horas, em seguida, R$ 0,40/min além da assinatura.

Tarifa 3: assinatura de R$ 48,00 para um pacote de ligações de 4 horas, em seguida, R$ 0,40/min além da assinatura.

a) Copie e complete o quadro abaixo:

Duração, em minutos	60	150	200	250	300
Preço a ser pago pela Tarifa 1					
Preço a ser pago pela Tarifa 2					
Preço a ser pago pela Tarifa 3					

b) A tarifa 2 foi representada no gráfico abaixo em preto. Copie o gráfico em uma folha de papel quadriculado e, em seguida, represente as tarifas 1 e 3, usando as cores azul e verde, respectivamente.



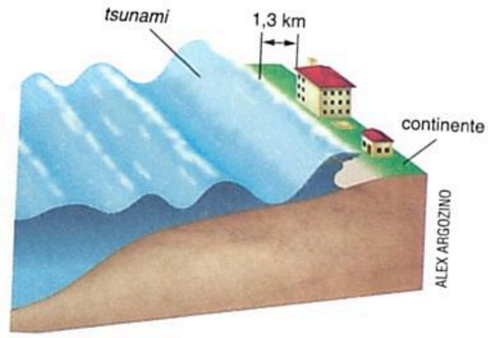
c) Por quanto tempo é melhor escolher a tarifa 2?

d) Qual é a tarifa mais barata para 210 minutos de ligações?

5. A explosão de um vulcão localizado no mar provoca a formação de um *tsunami* – onda gigante, de várias dezenas de metros de altura –, que se move a uma velocidade de 138,89 m/s.

a) Transforme essa velocidade em km/h.

b) Em quanto tempo a onda alcançará a casa?



c) Qual a distância percorrida pela onda em 1 s?

d) Assumindo que a onda leva 18 minutos para chegar à costa, a que distância estava localizada?

6. (Fuvest-SP) Uma família de 6 pessoas consome em 2 dias 3 kg de pão. Quantos quilos serão necessários para alimentá-las durante 5 dias, estando ausentes 2 pessoas?

a) 3 quilos
b) 2 quilos
c) 4 quilos
d) 6 quilos
e) 5 quilos

7. (ENEM/2015) Na imagem, a personagem Mafalda mede a circunferência do globo que representa o planeta Terra.

Em uma aula de matemática, o professor considera que a medida encontrada por Mafalda, referente à maior circunferência do globo, foi de 80 cm. Além disso, informa que a medida real da maior circunferência da Terra, a linha do Equador, é de aproximadamente 40 000 km.

QUINO. **Toda Mafalda**. São Paulo: Martins Fontes, 2008 (adaptado).

A circunferência da linha do Equador é quantas vezes maior do que a medida encontrada por Mafalda?

a) 500
b) 5 000
c) 500 000
d) 5 000 000
e) 50 000 000

UM NOVO OLHAR

Nesta Unidade, estudamos grandezas proporcionais. Esse tema foi iniciado no 7º ano e aprofundado nesta Unidade.

Ao explorar o tema, observamos quando duas grandezas são proporcionais e quando não são. Vimos também a representação gráfica de grandezas diretamente proporcionais e de grandezas inversamente proporcionais.

Estudamos algumas razões especiais que são utilizadas no dia a dia, como a velocidade média (que é a razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto). Exploramos ainda a escala, uma relação matemática que existe entre as dimensões reais e aquelas dimensões da representação. E analisamos a densidade de um corpo, que pode ser calculada por meio da razão entre a massa de um corpo e o volume ocupado por ele.

Elaboramos também um trabalho com a regra de três simples e a regra de três composta, bem como suas aplicações.

Na abertura desta Unidade, você teve a oportunidade de conhecer um pouco sobre a aplicação do conceito de escala no dia a dia de arquitetos, engenheiros e profissionais que trabalham com representações de edificações.

Vamos agora refletir sobre as aprendizagens que tivemos nesta Unidade. Com base nas informações obtidas na abertura e ao longo da Unidade, responda às questões no caderno:

- Como você definiria grandezas diretamente proporcionais?
- Como você definiria grandezas inversamente proporcionais?
- O que caracteriza a representação gráfica de duas grandezas diretamente proporcionais?

Diversidade cultural

Você conhece o personagem Armandinho?

BECK, A. **Armandinho.** Disponível em: <https://tirasarmandinho.tumblr.com/search/respeito>. Acesso em: 17 jul. 2018.

1. Leia a tirinha e responda: Qual a relação entre o título desta seção e a fala de Armandinho?

Leia o texto a seguir.

> [...]
>
> Todas as culturas são diferentes, mas a humanidade é uma comunidade única, que compartilha valores, um passado e um futuro. Todas as pessoas são diferentes, e isso é uma força para todas as sociedades, para a criatividade e a inovação. Existem 7 bilhões de formas de "ser humano", mas nós estamos juntos como membros da mesma família, todos diferentes, mas igualmente buscando respeito aos direitos e à dignidade.
>
> [...]

UNESCO. **Mensagem da Unesco para o Dia Internacional da Tolerância.** Disponível em: <http://www.unesco.org/new/pt/brasilia/about-this-office/single-view/news/unesco_message_for_the_international_day_for_tolerance/>. Acesso em: 4 nov. 2018.

Para Audrey Azoulay, diretora-geral da Unesco (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura) "a tolerância não pode se resumir à indiferença". Ou seja, de acordo com a sua fala, pode-se entender que ser tolerante não pode significar ignorar o outro e as suas necessidades e lutas; é preciso aceitar e compreender essas necessidades como se fossem de todos.

Veja trecho de fala de Audrey sobre tolerância:

> A tolerância é um ato de humanidade, que cada um de nós deve alimentar e realizar todos os dias em nossas próprias vidas, para nos alegrarmos com a diversidade que nos torna fortes e com os valores que nos unem.

Fonte: ONU. **Em dia mundial, Unesco chama cidadãos a combater todas as formas de discriminação e ódio.** Disponível em: <https://nacoesunidas.org/em-dia-mundial-unesco-chama-cidadaos-a-combater-todas-as-formas-de-discriminacao-e-odio/>. Acesso em: 4 nov. 2018.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASOCIACIÓN DE MAESTROS ROSA SENSAT. **Didáctica de los números enteros**. Madrid: Nuestra Cultura, 1980.

BERLOQUIN, P. **100 jogos geométricos**. Tradução: Luís Filipe Coelho e Maria do Rosário Pedreira. Lisboa: Gradiva, 1991.

BORDENAVE, J. D.; PEREIRA, A. M. **Estratégias de ensino-aprendizagem**. 7. ed. Petrópolis: Vozes, 1985.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. v. 6. São Paulo: CAEM-USP, 1995. (Ensino Fundamental).

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais – Matemática**. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação; Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Fundamental**. Brasília, DF, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais gerais da educação básica**. Brasília, DF: SEB: Dicei, 2013.

BRUNER, J. S. **O processo da educação**. Tradução: Lobo L. de Oliveira. 4. ed. São Paulo: Nacional, 1974.

CAGGIANO, A. et al. **Problema não é mais problema**. v. 4. São Paulo: FTD, 1996.

CAMPOS, T. M. M. (Coord.). **Transformando a prática das aulas de Matemática**: textos preliminares. São Paulo: Proem, 2001.

CAZOLA, I.; SANTANA, E. (Org.). **Do tratamento ao levantamento estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

CENTURIÓN, M. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 1994.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMBROSIO, U. (execução do projeto); BASTOS, A. M. (Coord.). **Geometria experimental**: 5ª série. Rio de Janeiro: PREMEN – MEC/IMECC – UNICAMP, 1985.

__________. **Geometria experimental**: livro do professor. Rio de Janeiro: PREMEN – MEC/ IMECC – UNICAMP, 1985.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 1989.

DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática**. São Paulo: EPU, 1975.

__________. **Frações**. São Paulo: Helder, 1971.

__________. **Lógica y juegos lógicos**. Madrid: Distein, 1975.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **Conjuntos, números e potências**. São Paulo: EPU, 1974.

__________. **Exploração do espaço e prática da medição**. São Paulo: EPU, 1984.

DINIZ, M. I. de S. V.; SMOLE, K. C. S. **O conceito de ângulo e o ensino de Geometria**. v. 3. São Paulo: CAEM-USP, 1993. (Ensino Fundamental).

FUNBEC/CAPES. **Revista do Ensino de Ciências**. São Paulo, mar. 1985.

HAYDT, R. C. **Avaliação do processo ensino-aprendizagem**. São Paulo: Ática, 1988.

HOFFMANN, J. M. L. **Avaliação mediadora**: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Educação & Realidade, 1993.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução: Stella M. de Freitas Senra. 4. ed. São Paulo: Globo, 1992.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRJ. **Tratamento da informação**: explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais. Rio de Janeiro, 1997.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**. São Paulo: Cortez, 1990.

MATAIX, M. L. **Divertimientos lógicos y matemáticos**. Barcelona: Marcombo, 1979.

__________. **El discreto encanto de las matemáticas**. Barcelona: Marcombo, 1988.

__________. **Nuevos divertimientos matemáticos**. Barcelona: Marcombo, 1982.

OCHI, F. H. et al. **O uso de quadriculados no ensino de Geometria**. v. 1. São Paulo: CAEM-USP, 1992. (Ensino Fundamental).

PERELMÁN, Y. **Matemáticas recreativas**. Tradução: F. Blanco. 6. ed. Moscou: Mir, 1985.

PIAGET, J. **Fazer e compreender Matemática**. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RATHS, L. E. et al. **Ensinar a pensar**. São Paulo: Herder/Edusp, 1972.

ROCHA-FILHO, R. C. **Grandezas e unidades de medida**: o sistema internacional de unidades. São Paulo: Ática, 1988.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Revista do Professor de Matemática 33**. Rio de Janeiro, 1977.

SOUZA, E. R. et al. **A Matemática das sete peças do tangram**. São Paulo: CAEM-USP, 1995. (Ensino Fundamental).

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Lisboa: Antídoto, 1979.

ZARO, M.; HILLERBRAND, V. **Matemática instrumental e experimental**. Porto Alegre: Fundação para o Desenvolvimento de Recursos Humanos, 1984.