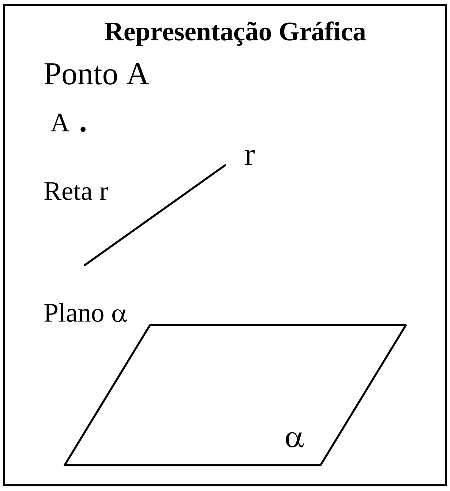
GEOMETRIA

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA GEOMETRIA

1. INTRODUÇÃO

A Geometria Plana estuda as figuras planas. Entendemos por figura plana todo subconjunto, não vazio, de pontos de um plano. Quando dizemos que uma figura é plana, estamos afirmando que ela está totalmente contida num plano.

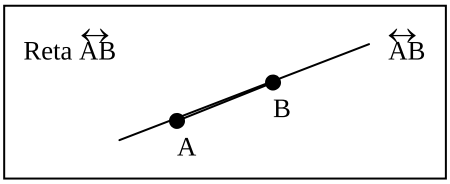
O conjunto universo da geometria plana, será, pois, o plano



2. PONTO, RETA E PLANO

São idéias primitivas, entes que não possuem definição. Conhecemos **imagens** de ponto, por exemplo, como a ponta do giz marcando o quadro-negro, um lápis tocando o papel, sendo no entanto, apenas imagens, pois não há dimensão para tanto. Analogamente, possuímos a intuição de reta e plano.

Notação:
Costuma-se indicar:
a) os pontos com letras maiúsculas A, B, C, ...
b) as retas com letras minúsculas r, s, t, ...
c) os planos com letras do alfabeto grego α, β, γ,...
d) como dois pontos distintos determinam uma reta, pode-se indicar a reta por dois de seus pontos.

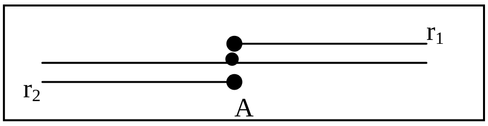


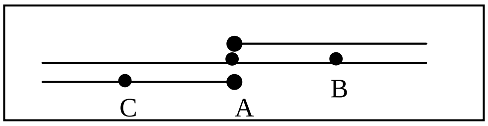
3. SEMI-RETA

Um ponto A de uma reta R divide a mesma em dois subconjuntos chamados **semi-retas.**

O ponto A é origem das semi-retas e pertence a ambas. Representa-se por Ar_1 e Ar_2.

A semi-reta pode ser também, indicada por dois pontos. AB indica a semi-reta com origem A, que contém o ponto B e AC indica a semi-reta com origem A, que contém o ponto C.



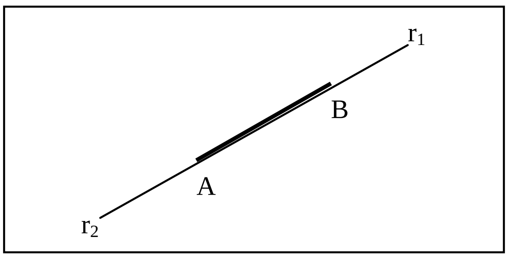


4. SEGMENTO DE RETA

Podemos definir segmento de reta como sendo a intersecção de duas semi-retas, cada uma contendo a origem de outra. Representa-se por AB.

Simbolicamente:

$$\boxed{\overline{AB} = \overrightarrow{Ar_1} \cap \overrightarrow{Br_2}}$$

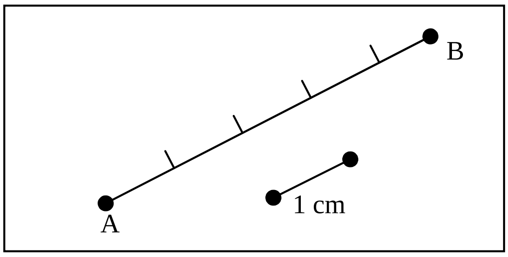


5. MEDIDAS

Medida de um ente geométrico é um número real positivo, obtido pela comparação deste ente com outro escolhido como unidade. Ao escolhermos esta unidade, estamos estabelecendo um sistema de medidas.

A medida do segmento AB em centímetros é 5 e pode ser representada por:

AB = 5cm ou med (AB) = 5cm



6. CONGRUÊNCIA

O termo **congruência** não será definido. A idéia intuitiva de congruência entre dois entes geométricos, está associada às suas medidas. Dois entes serão congruentes quando suas medidas forem iguais.

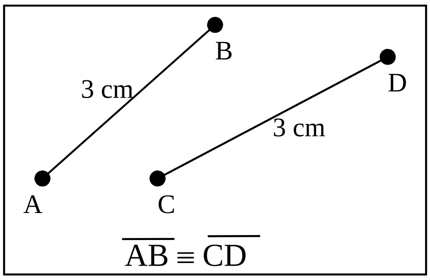
Para indicarmos a congruência entre dois entes geométricos utilizaremos o símbolo ≅.

7. CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS DE RETA

Dois segmentos de reta AB e CD serão congruentes se, e somente se, tiverem mesma medida.

Simbolicamente:

$$\boxed{\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}}$$

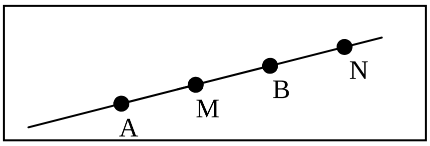


8. SEGMENTOS COLINEARES

São aqueles que são subconjuntos da mesma reta.

Exemplos:

$\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{AN}$, $\overline{AM}$, etc...

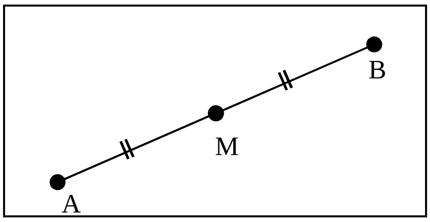


9. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

M será ponto médio de um segmento AB se, e somente se, M pertencer ao segmento AB e AM for congruente com BM.

Assim,

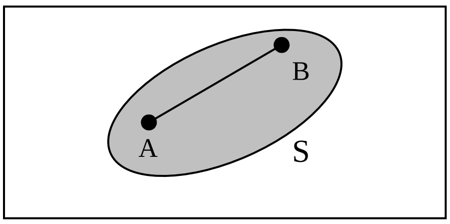
M é o ponto médio de AB $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{M} \in \overline{\mathbf{AB}} \\ \overline{\mathbf{AM}} \cong \overline{\mathbf{BM}} \end{cases}$



10. REGIÃO CONVEXA

Um conjunto de pontos S é uma região convexa se, e somente se, para qualquer par de pontos A e B de S, o segmento AB for subconjunto de S.

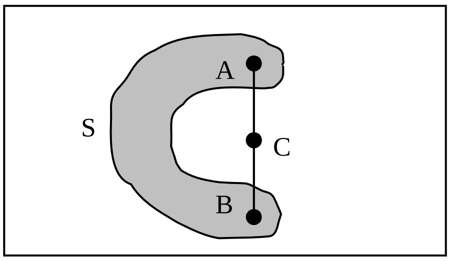
Assim, $\boxed{\textbf{S é convexa} \Leftrightarrow \forall\ \mathbf{A} \in \mathbf{S},\ \forall\ \mathbf{B} \in \mathbf{S},\ \overline{\mathbf{AB}} \subset \mathbf{S}}$



Quando existirem dois pontos A e B de S, de tal forma, que AB não é um subconjunto de S, a região é dita côncava ou não convexa.

Assim,

$$\textbf{S é não convexa} \Leftrightarrow \exists\, A \in S \text{ e } \exists\, B \in S \text{ tal que } \overline{AB} \not\subset S$$

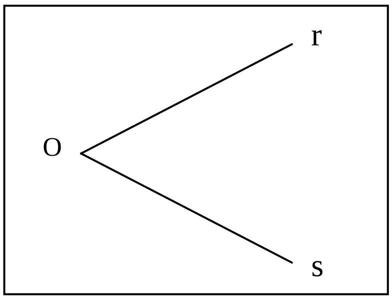


11. ÂNGULOS

Ângulo é a união de duas semi-retas de mesma origem.

Simbolicamente:

$$r\hat{O}s = \overrightarrow{Or} \cup \overrightarrow{Os}$$

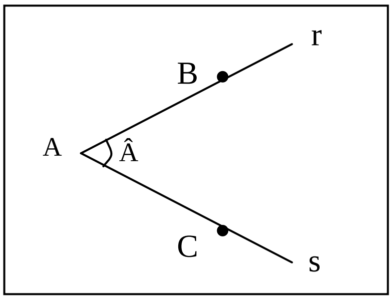


O ponto O é o vértice do ângulo e as semi-retas Or e Os são os lados do ângulo.

Notação:

O ângulo determinado pelas semi-retas Ar e As será indicado por:

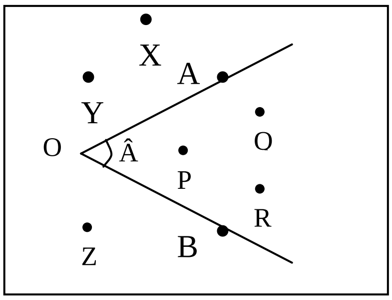
$$r\hat{A}s \text{ ou } B\hat{A}C \text{ ou } \hat{A}$$



12. REGIÃO ANGULAR

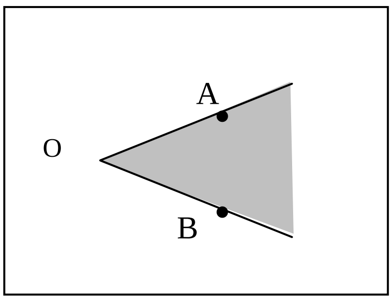
Observe que o ângulo **geralmente** determina no plano três conjuntos:

1. pontos "interiores"(P; Q; R; ...)
2. pontos do ângulo (O; A; B; ...)
3. pontos "exteriores" (X; Y; Z; ...)



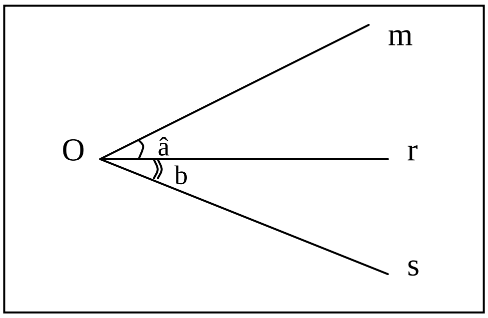
Região angular é a região determinada pela união do conjunto dos pontos do ângulo como conjunto dos pontos "interiores".

Observação:
A região angular é sempre uma região convexa.



13. ÂNGULOS CONSECUTIVOS

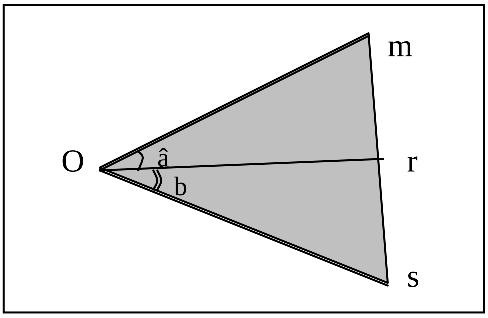
Dois ângulos são consecutivos quando tem mesmo vértice e pelo menos lado em comum.



Os ângulos mÔr e rÔs são consecutivos pois admitem o lado $\overrightarrow{Or}$ em comum.

14. ÂNGULOS ADJACENTES

Dois ângulos consecutivos serão **adjacentes** quando a intersecção entre seus conjuntos de pontos interiores for **vazia**.



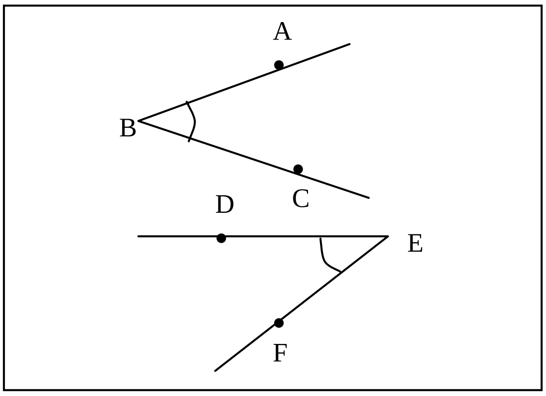
Observação:

Dois ângulos adjacentes são sempre dois ângulos consecutivos, porém dois ângulos consecutivos nem sempre são adjacentes.

16. CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS

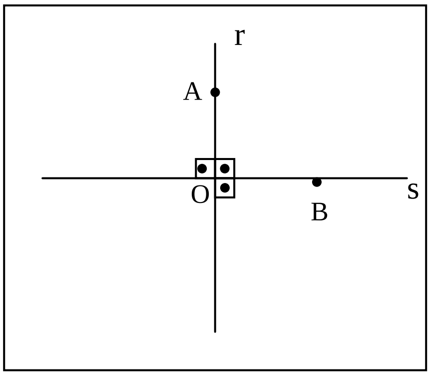
Dois ângulos são congruentes se, e somente se, eles têm a mesma medida.

Simbolicamente:



15. ÂNGULO RETO

Duas retas são chamadas, **concorrentes** se, e somente se, elas possuem um único ponto em comum.
Observe que, duas retas concorrentes determinam quatro regiões angulares adjacentes.
Quando duas dessas **regiões angulares adjacentes** forem **congruentes**, dizemos que qualquer delas define uma **região de ângulo reto.**



Observação:

Quando duas retas r e s são concorrentes e determinam ângulos adjacentes congruentes elas são chamadas de perpendiculares. Simbolicamente r ⊥ s.

16. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÂNGULO

Sistema Graus

Ângulo de um grau (1^0) é o ângulo cuja medida é 1/90 de um ângulo reto.
O grau admite dois submúltiplos, o minuto e o segundo.
Ângulo de um minuto (1') é o ângulo cuja medida é 1/60 de 1º.
Ângulo de um segundo (1") é o ângulo cuja medida 1/60 de 1'.

Oberve que:

1 reto → 90º

1º → 60 minutos

1 minuto → 60 segundos

Sistema Radianos

A medida de um ângulo no sistema radianos, é a razão entre o arco que este ângulo determina sobre qualquer circunferência de centro no vértice do ângulo, e o raio da referida circunferência.

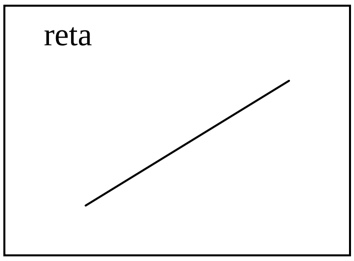
EXERCÍCIOS

Exercícios de 1 a 4.

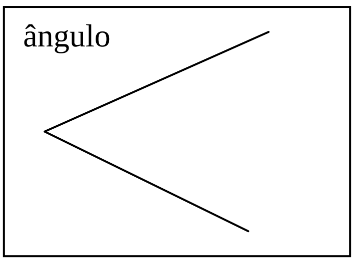
Represente graficamente os seguintes entes geométricos apresentando sua notação.

a) Reta r determinada por dois pontos A e B.
b) Semi-reta determinada por dois pontos A e B, que tem origem no ponto A e contém o ponto B.
c) Segmento de reta determinado por dois pontos A e B.
d) Ângulo de lados AO e OB e vértice O.
e) Classifique as regiões a seguir em convexa e não convexa.

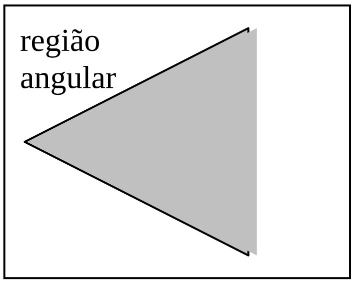
a)



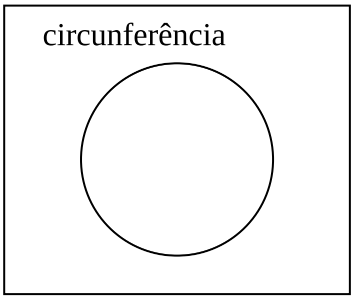
b)



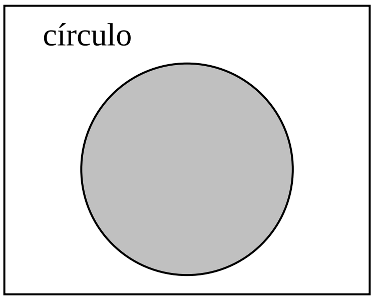
c)



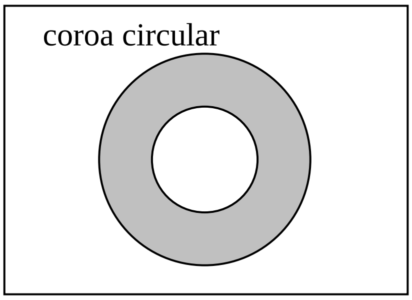
d)



e)



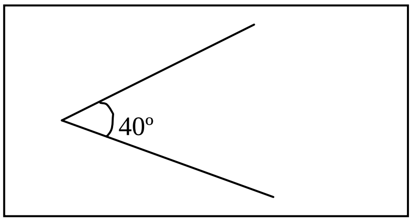
f)



f) Calcular:
1. 83º 20' 43" + 21º 32'54"
2. 92º 43' - 47º 30
3. 41º 23' - 17º 21' 43"
4. 38º : 3

ÂNGULOS

1. ÂNGULOS AGUDO, OBTUSO E RASO



Ângulo agudo
Um ângulo é **agudo**, quando sua medida é **menor** do que a medida de um ângulo reto, ou seja, menor que 90º.

Ângulo obtuso
Um ângulo é **obtuso**, quando sua medida é **maior** do que a medida de um ângulo reto, ou seja, maior que 90º.

Ângulo raso
Um ângulo é **raso**, quando seus lados são semi-retas opostas.
A medida de um ângulo raso é dois retos ou 180º.

2. SOMA DE ÂNGULOS
A soma de dois ângulos ABC e DEF é um ângulo PQR tal que:

3. BISSETRIZ DE UM ÂNGULO
A bissetriz de um ângulo é a semi-reta com origem no vértice do ângulo, e que o divide em dois ângulos congruentes.

4. ÂNGULOS COMPLEMENTARES
Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é um ângulo reto. Um dos ângulos é chamado complemento do outro.

Lembrete

O **complemento** de um ângulo de medida **x** é:

$$\boxed{90^\circ - \mathbf{x}}$$

5. ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é dois ângulos retos. Um dos ângulos é chamado suplemento do outro.

Lembrete

O **suplemento** de um ângulo de medida **x** é:

$$\boxed{180^\circ - \mathbf{x}}$$

6. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

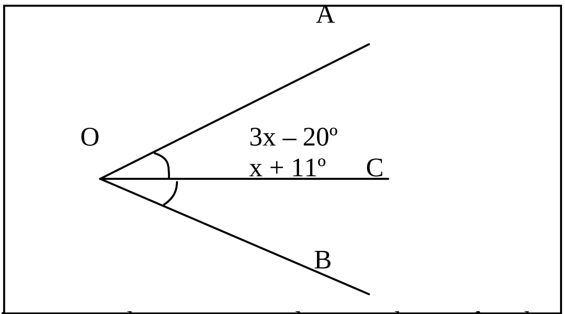
Ângulos opostos pelo vértice são aqueles em que os lados de um são semi-retas opostas aos lados do outro.

Teorema:

Se dois ângulos são opostos pelo vértice então eles são **congruentes**.

EXERCÍCIOS DA AULA

Calcular x na figura sabendo-se que OC é bissetriz do ângulo AÔB.



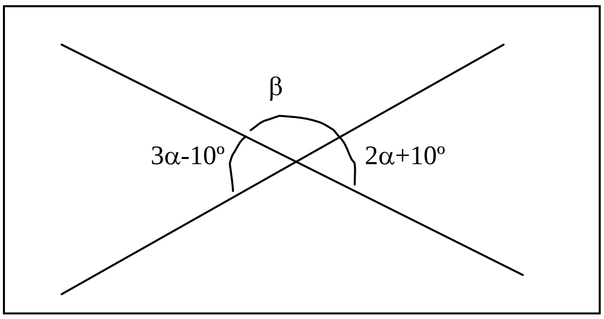
Determinar o complemento e o suplemento de uma ângulo cuja medida é x.

3. O complemento de um ângulo de 75º mede:
a) 105º b) 90º c) 75º d) 25º e) 15º

4. Calcule o complemento de 69º 51'22".

5. A medida de um ângulo é igual à metade da medida do seu suplemento. O complemento desse ângulo mede:
a) 60º b) 90º c) 120º d) 30º e) 45º

6. Com os dados da figura, calcule β



PARALELISMO

1. NOMENCLATURA

Dadas, num plano, duas retas r e s e uma transversal t, obtemos oito ângulos com as designações

correspondentes: $\{$ â e $\hat{\alpha}$; $\hat{b}$ e $\hat{\beta}$; $\hat{d}$ e $\hat{\delta}$; $\hat{c}$ e $\hat{\gamma}$

alternos externos: $\{$ â e $\hat{\gamma}$; $\hat{b}$ e $\hat{\delta}$

alternos internos: $\{$ $\hat{c}$ e $\hat{\alpha}$; $\hat{d}$ e $\hat{\beta}$

colaterais externos: $\{$ â e $\hat{\delta}$; $\hat{b}$ e $\hat{\gamma}$

colaterais internos: $\{$ $\hat{c}$ e $\hat{\beta}$; $\hat{d}$ e $\hat{\alpha}$

2. RETAS PARALELAS

Duas retas são paralelas se, e somente se, são coplanares com intersecção vazia ou são coincidentes. Representa-se r // s.

Ângulos correspondentes

Duas retas paralelas distintas formam com uma transversal ângulos correspondentes congruentes e reciprocamente.

Ângulos alternos

Duas retas paralelas distintas formam com uma transversal ângulos alternos congruentes reciprocamente.

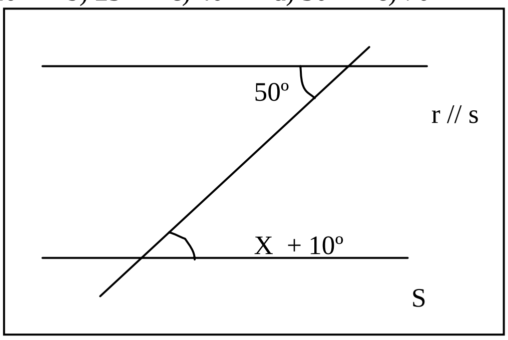
Ângulos colaterais

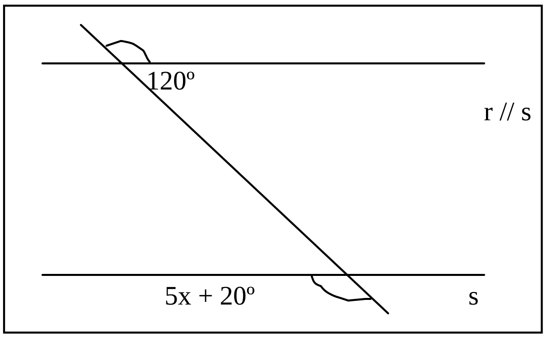
Duas retas paralelas distintas formam com uma transversal ângulos colaterais suplementares e reciprocamente.

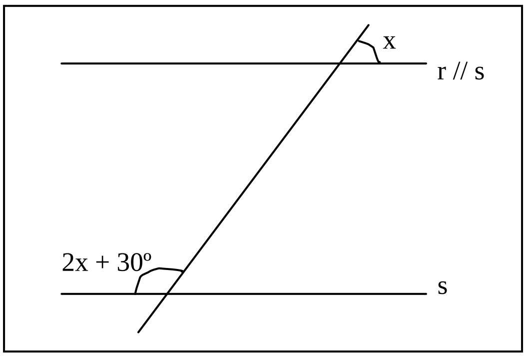
EXERCÍCIOS DA AULA

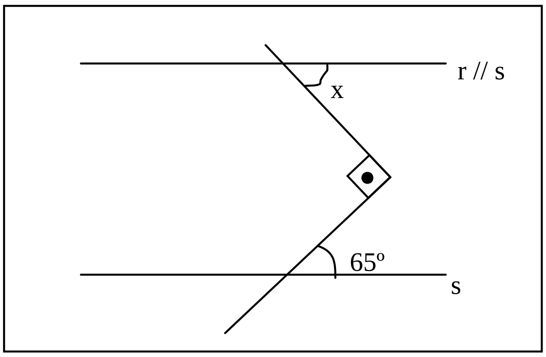
Nos exercícios de 1 a 5, determinar o valor de x, associado com:

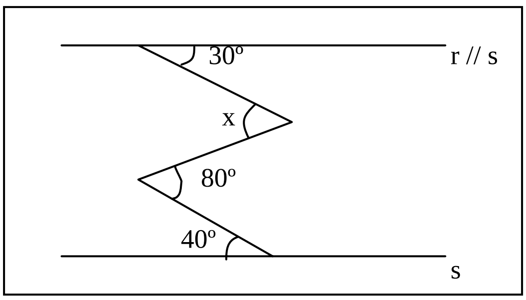
a) 20º b) 25º c) 40º d) 50º e) 70º

1.


2.


3.


4.


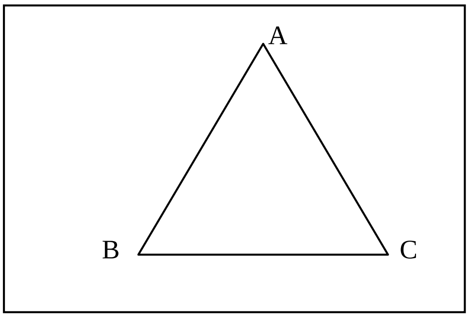
5.


6. Demonstre que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

TRIÂNGULOS

1. DEFINIÇÃO

Dados três pontos não colineares A, B e C, chama-se triângulo a união dos três segmentos AB, AC e BC.

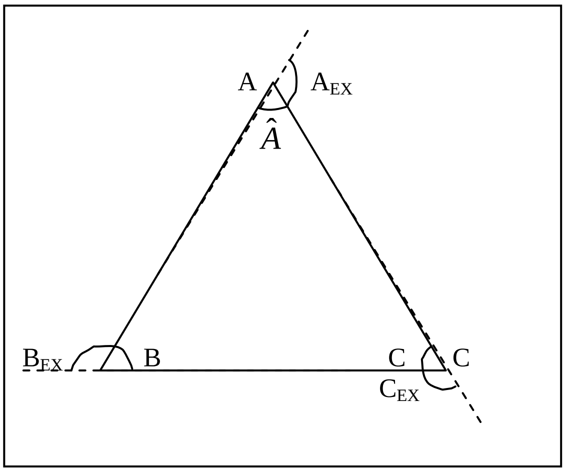


Simbolicamente:

$$\boxed{\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}}$$

2. ELEMENTOS DO TRIÂNGULO

a) Os pontos A, B e C são vértices do triângulo.
b) Os segmentos AB, AC e BC são os lados do triângulo.
c) Os ângulos BAC=A, ABC=B e ACB=C são os ângulos internos do triângulo.
d) Ângulo externo é o ângulo suplementar do ângulo interno. Na figura A_{Ex}, B_{Ex} e C_{Ex} são os ângulos externos dos vértices A, B e C respectivamente.



3. PROPRIEDADES

Soma dos ângulos internos

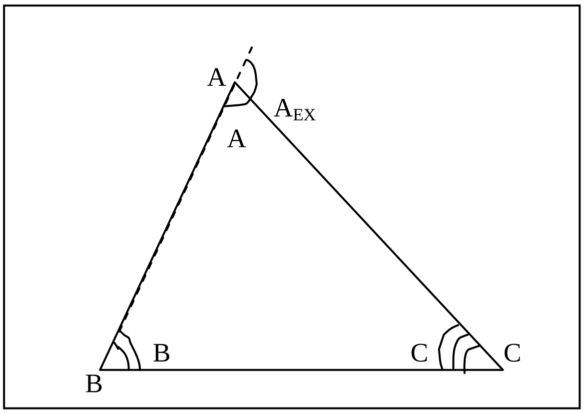
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.

Como $\beta \cong \hat{B}, \gamma \cong \hat{C}, \hat{A} + \beta + \gamma = 180^0, temos:$

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0}$$

Teorema do ângulo externo

Em qualquer triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.



$$\left.\begin{array}{l} A + A_{EX} = 180^0 \\ A + B + C = 180^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\hat{A}_{EX} = \hat{B} + \hat{C}}$$

Observação:
De forma análoga, provamos que:

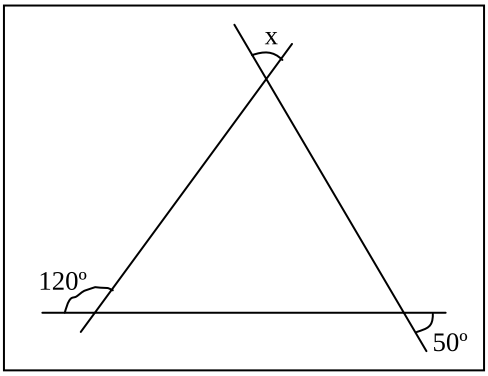
$\boxed{\hat{B}_{EX} = \hat{A} + \hat{C}}$ e $\boxed{\hat{C}_{EX} = \hat{A} + \hat{B}}$

4. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS
Classificação quanto aos lados
Os triângulos são classificados quanto aos lados em:
1. equilátero, quando têm os três lados congruentes.
2. isósceles, quanto têm dois lados congruentes.
3. escaleno, quando dois lados quaisquer não são congruentes.

Classificação quanto aos ângulos
Os triângulos são classificados quanto aos ângulos em:
a) retângulo, quando possui um ângulo reto.
b) Acutângulo, quando possui os três ângulos agudos.
c) Obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso.

EXERCÍCIOS DA AULA

Nos exercícios calcule x, associado com:
a) 40º b) 60º c) 70º d) 90º e) 100º
1.



2. Classifique os triângulos quanto aos lados.

3. Classifique os triângulos quanto aos ângulos.

4. Assinale a afirmação falsa:
a) Todo triângulo equilátero é acutângulo.
b) Todo triângulo equilátero é equiângulo.
c) Todo triângulo equilátero é isósceles.
d) Todo triângulo acutângulo é equilátero.
e) Nenhum triângulo retângulo é eauilátero.

ELEMENTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

1. PROPRIEDADES DOS ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO (RESUMO)

Num triângulo ABC qualquer temos:

$$\hat{A} + \hat{A}_{EX} = \hat{B} + \hat{B}_{EX} = \hat{C} + \hat{C}_{EX} = 180^0$$

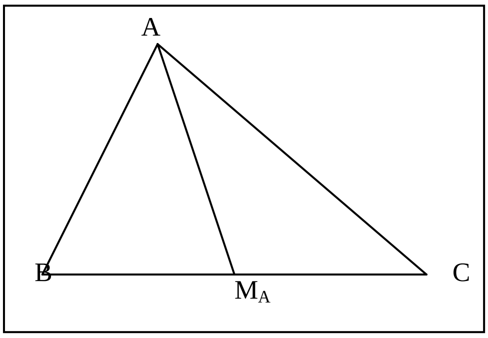
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$$

$$\hat{A}_{EX} = \hat{B} + \hat{C}; \hat{B}_{EX} = \hat{A} + \hat{C} \text{ e } \hat{C}_{EX} = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\hat{A}_{EX} + \hat{B}_{EX} + \hat{C}_{EX} = 360^0$$

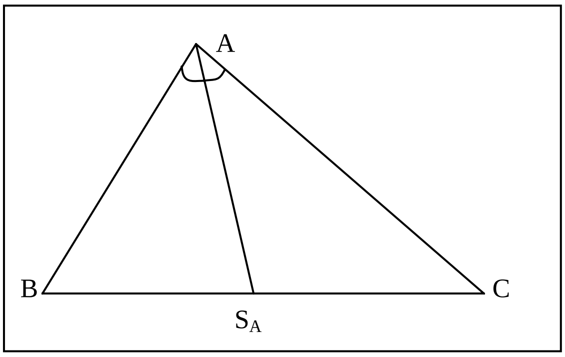
2. MEDIANA

Mediana de um triângulo é o segmento de reta que tem uma extremidade num dos vértices do triângulo e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice.



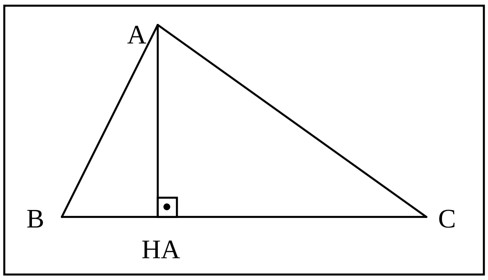
3. BISSETRIZ

Bissetriz de um triângulo é o segmento de reta determinado por um vértice do triângulo e pela intersecção do lado oposto a esse vértice com a bissetriz do ângulo interno desse vértice.



4. ALTURA

Altura de um triângulo é o segmento de reta determinado por um vértice e pela intersecção da reta que contém o lado oposto a esse vértice, com a perpendicular a ela, traçada por esse vértice.

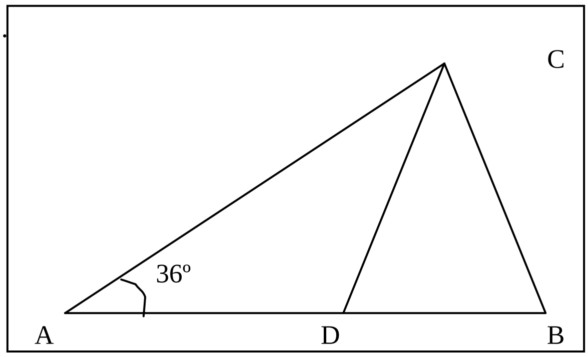


EXERCÍCIOS DA AULA

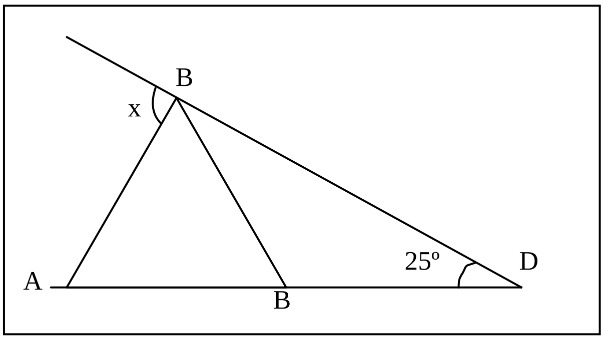
a) (FUVEST) - Um avião levanta vôo para ir da cidade A à cidade B, situada a 500 km de distância. Depois de voar 250 km em linha reta o piloto descobre que a rota está errada e, para corrigi-la, ele altera a direção do vôo de um ângulo de 90º. Se a rota não tivesse sido corrigida, a que distância ele estaria de B após ter voado os 500 km previstos?

b) (FUVEST) - Na figura abaixo AB = AC, CB = CD e Â = 36º.

1. Calcule os ângulos DCB e ADC.
2. Prove que AD = BC



c) Calcule x, com os dados da figura seguinte, onde AB = BC = CD e med (CDB) = 25º.



d) Na figura seguinte tem-se AB = BC = CD = DE = EF. Determine a medida do ângulo CAB, dado que a medida do ângulo DEF é igual a 20º.

e) Sendo O o centro da circunferência da figura seguinte, prove que a medida do ângulo ABC é igual a 90º.

TRIÂNGULO RETÂNGULO E CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

1. PROPRIEDADE IMPORTANTE DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Se um triângulo está **inscrito** numa circunferência e um de seus lados é um **diâmetro** então o triângulo é **retângulo**.

a) $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$ (raio da circunferência)

b) $A\hat{B}O \cong B\hat{A}O$ pois ΔAOB é isóscles

c) $A\hat{C}O \cong C\hat{A}O$ pois ΔAOC é isósceles

d) no triângulo ABC temos:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^0 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^0 \Rightarrow \boxed{B\hat{A}C = 90^0}$$

2. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO TRIÂNGULO

A condição necessária e suficiente para existir um triângulo é que a medida de cada um de seus lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois.

Se **a**, **b** e **c** forem, respectivamente, as medidas dos lados BC, AC e AB do triângulo ABC então:

$$\boxed{\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}}$$

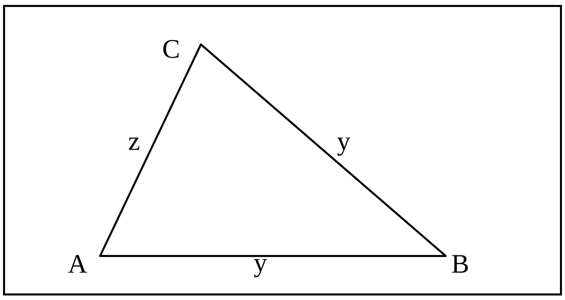
EXERCÍCIOS DA AULA

a) Um triângulo retângulo é tal que um de seus ângulos agudos mede 20º. Determinar o ângulo entre a altura e a mediana relativa à hipotenusa do triângulo.

b) A altura e a mediana relativas à hipotenusa de um triângulo retângulo formam um ângulo de 40º. Calcular o ângulo agudo entre esta altura e a bissetriz do maior ângulo agudo do triângulo.

c) No triângulo ABC da figura seguinte tem-se:
AB = x, BC = y, e AC= z.
Qual das afirmações abaixo é falsa?

1. x < y + z
2. y < x + z
3. z < x + y
4. | y - z | < x < y + z
5. x + y < z



d) Se $x \in \mathbb{N}$ e os números x - 1, 2x + 1 e 10 são as medidas dos lados de um triângulo, então o número de possíveis valores de x é:
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

e) As medidas dos três lados de um triângulo estão em P.A. de razão r > 0. Se **a** é a medida do menor lado, então:

a) r= 3a b) r = 2a c) r = a d) r < a e) r > a

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

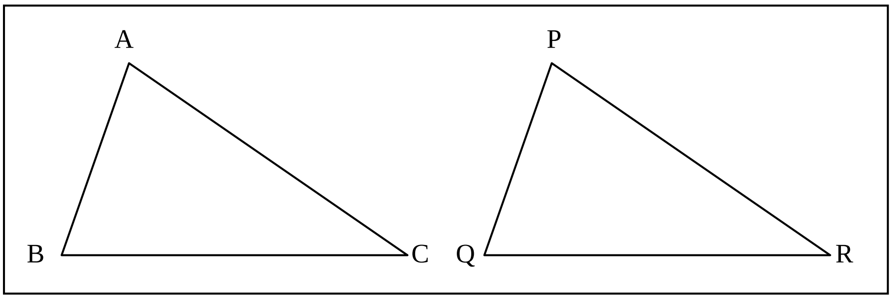
1. DEFINIÇÃO

Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de um e os do outro, de modo que os lados e os ângulos correspondentes sejam, respectivamente, congruentes.

2. CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA

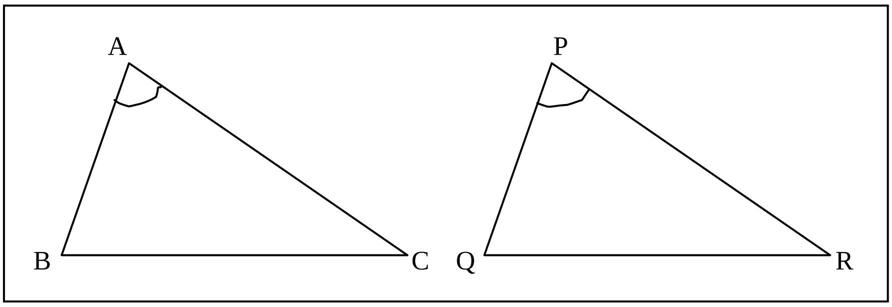
A definição de congruência exige a congruência dos seis elementos, enquanto que os critérios de congruência nos permitem concluir que dois triângulos são congruentes, a partir da congruência dos três elementos convenientes.
Temos quatro critérios de congruência de triângulos:

1º Critério: LLL
Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \overline{BC} \cong \overline{QR}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

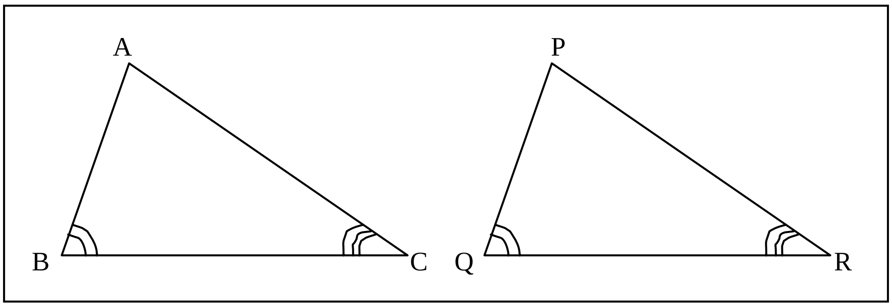
2º Critério: LAL
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo entre eles, respectivamente, congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

3º Critério: ALA

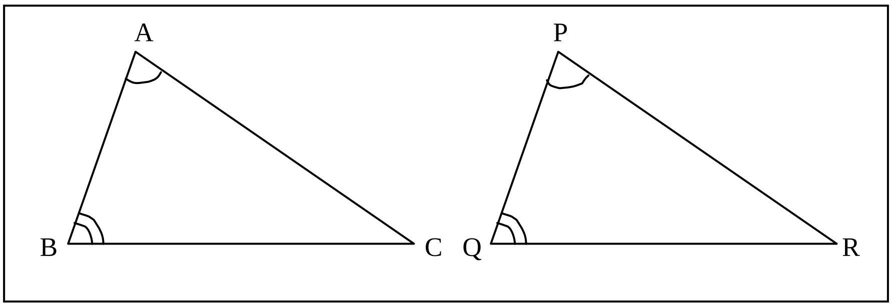
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois ângulos e o lado entre eles, respectivamente, congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{C} \cong \hat{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

4º Critério: LAAo

Dois triângulos são congruentes quando possuem um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente, congruentes.

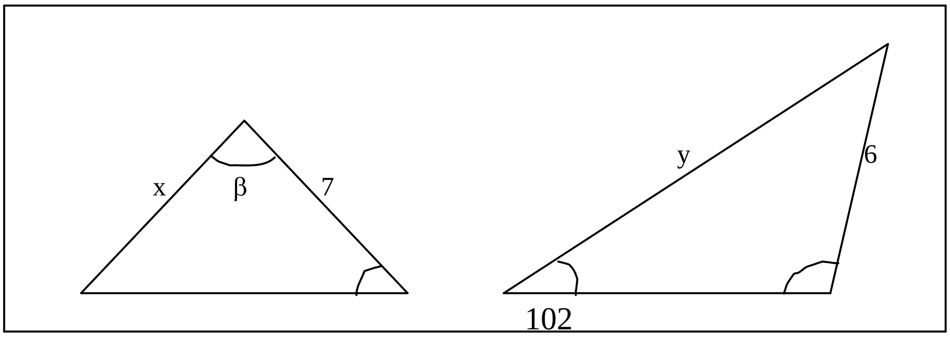


$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{PQ} \\ \overline{AC} \cong \overline{PR} \\ \hat{A} \cong \hat{P}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$$

EXERCÍCIOS DA AULA

a) Cite os critérios de congruência de triângulos.

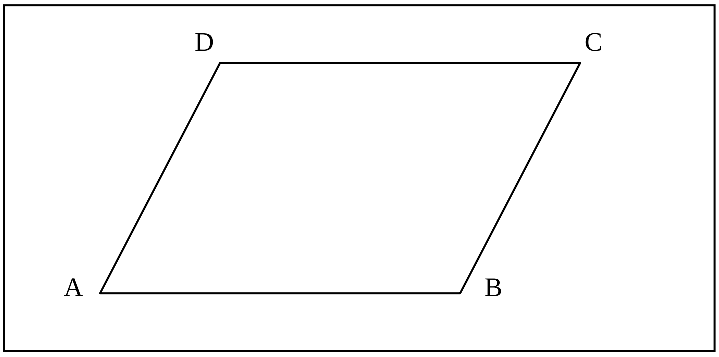
b) Com os dados da figura seguinte calcule x e y.



α α β
7

c) Demonstre que num triângulo isósceles os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.

d) No quadrilátero ABCD da figura seguinte tem-se:
$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$. Prove que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.



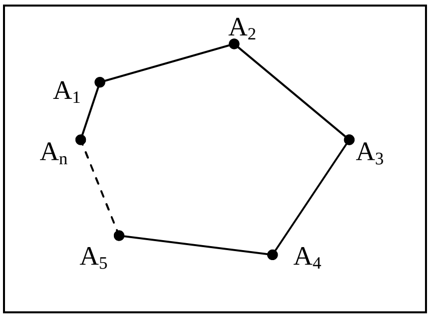
POLÍGONOS

1. DEFINIÇÃO

Consideraremos, num plano, **n** pontos ($n \geq 3$), $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, ordenados de modo que três consecutivos não sejam colineares.

Chama-se polígono $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ à figura formada pela união dos **n** segmentos consecutivos:

$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup ... \cup \overline{A_nA_1}$$



Região Poligonal
É a região determinada pela união do polígono com os pontos de sua região interior.

Polígono convexo
É o polígono cuja região poligonal é convexa.

Observação:
Estudaremos somente polígonos convexos.

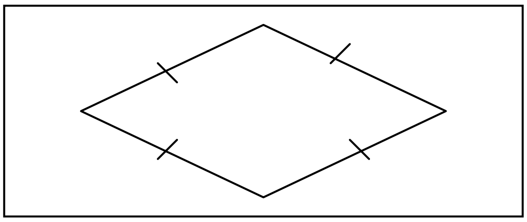
2. NOMENCLATURA

De acordo com o número de lados, temos:

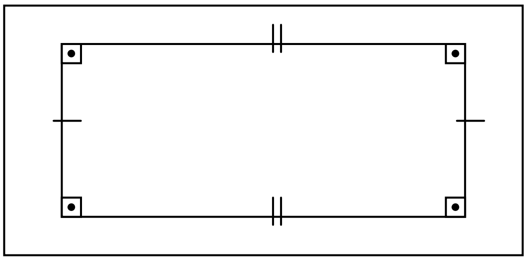
triângulo	-	3 lados
quadrilátero	-	4 lados
pentágono	-	5 lados
hexágono	-	6 lados
heptágono	-	7 lados
octógono	-	8 lados
eneágono	-	9 lados
decágono	-	10 lados
undecágono	-	11 lados
dodecágono	-	12 lados
pentadecágono	-	15 lados
icoságono	-	20 lados

Genericamente utiliza-se o termo polígono de n lados.

3. CLASSIFICAÇÃO



Polígono eqüilátero
É o polígono que tem todos os lados congruentes.
Exemplos:
Losango, quadrado, etc.



Polígono eqüiângulo
É o polígono que tem todos os ângulos internos congruentes.
Exemplos:
Retângulo, quadrado, etc.

Polígono regular
É o polígono que é eqüilátero e eqüiângulo simultaneamente.
Exemplo:
Quadrado.

4. NÚMERO DE DIAGONAIS

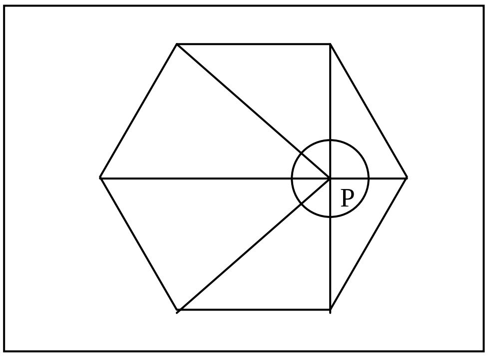
Chama-se diagonal de um polígono a todo segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos.
Num polígono de **n** lados:

1. cada vértice dá origem a **(n - 3)** diagonais.
2. os n vértices dão origem a **n . (n - 3)** diagonais.
3. com este raciocínio, cada diagonal foi contada duas vezes, pois cada uma delas é determinada por dois vértices.

Assim, sendo **d** o número de diagonais do polígono temos:

$$\boxed{d = \frac{n.(n-3)}{2}}$$

5. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS



Seja um polígono de n lados e P um ponto interno. Ligando P aos vértices obtemos n triângulos cuja soma dos ângulos internos é 180ºn.
Assim, sendo S_i a soma dos ângulos internos do polígono, temos

$$S_i = 180^o . n - 360^o \Rightarrow \boxed{S_i = (n-2).180^0}$$

6. SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

Sejam, num polígono de **n** lados, a_i e a_e, respectivamente, as medidas de um ângulo interno e do ângulos externo adjacente a ele, S_i a soma dos ângulos internos e S_e a soma dos ângulos externos.
Sendo $a_i + a_e = 180^o$, para cada um dos vértices do polígono, temos:

$$S_i + S_e = 180^o . n \Leftrightarrow S_e = 180^o . n - S_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_e = 180^o . n - (n - 2) . 180^o \Leftrightarrow \boxed{S_e = 360^o}$$

Se o polígono for eqüiângulo, todos os ângulos internos são congruentes e todos os ângulos externos são congruentes e portanto

$$\boxed{a_i = \frac{S_i}{n}} \quad \text{e} \quad \boxed{a_e = \frac{S_e}{n}}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule o número de diagonais de um eneágono convexo.

2. Qual o polígono convexo cujo número de diagonais é o dobro do número de lados?

3. A soma dos ângulos internos de um heptágono convexo é:

   a) 360º b) 540º c) 1400º d) 900º e) 180º

4. Qual a medida do ângulo interno de um hexágono regular?

5. Cada um dos ângulos internos de um polígono regular mede 150º. Qual é o número de lados do polígono?

6. Cada um dos ângulos externos de um polígono regular mede 15º. Quantas diagonais tem esse polígono?

7. Quantos lados tem um polígono convexo, cujo número de diagonais é **d** e a soma dos ângulos internos é **180º . d**?

POLÍGONOS (Exercícios)

RESUMO

Num polígono convexo de **n** lados sejam: a_i e a_e, respectivamente, as medidas de um dos ângulos internos e do ângulo externo adjacente a ele, S_i a soma dos ângulos internos, S_e a soma dos ângulos externos e d o número de diagonais.

Assim:

a) $a_i + a_e = 180º$
b) $S_i = (n - 2) . 180º$
c) $S_e = 360º$
d) $d = \frac{n.(n-3)}{2}$
e) Se o polígono for equiângulo temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \text{ e } a_e = \frac{S_e}{n}$$

1. Num polígono convexo a soma dos ângulos internos é cinco vezes a soma dos ângulos externos. Calcule o número de diagonais desse polígono.

2. A soma dos ângulos internos de dois polígonos cujos números de lados são inteiros e consecutivos é 1620º. A soma das quantidades de diagonais destes polígonos é:
   a) 9 b) 13 c) 17 d) 20 e) 23

3. Num polígono regular ABCDE..., a diagonal ?? forma com o lado ?? um ângulo de 18º. Esse polígono possui:

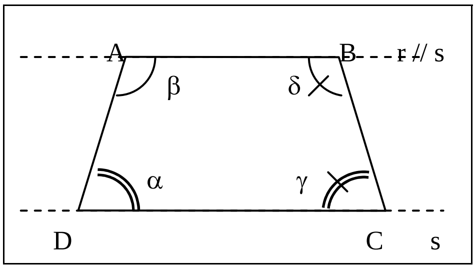
a) 20 diagonais b) 20 lados c) 40 diagonais
c) 18 lados e) 35 diagonais

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Alguns quadriláteros que possuem propriedades particulares são chamados quadriláteros notáveis.
Vamos estudar, a seguir, os quadriláteros notáveis e suas propriedades.

1. TRAPÉZIO

Trapézio é todo quadrilátero que possui dois lados paralelos.
Os lados AB e CD (AB // CD) são as bases do trapézio da figura.
Os lados AD e BC são chamados lados transversais ou lados transversos.
No trapézio, ângulos adjacentes a um mesmo lado transverso, são suplementares.



No trapézio da figura temos:

$\alpha + \beta = 180^o$ e $\gamma + \delta = 180^0$

Observação:

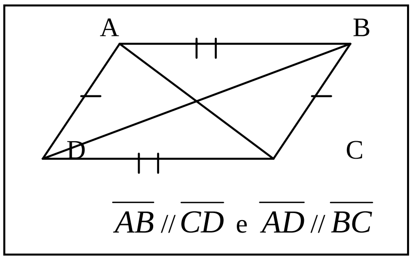
1. Trapézio isósceles é aquele que possui os lados transversais congruentes.
2. Trapézio retângulo é aquele que possui um ângulo reto.

2. PARALELOGRAMO

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui lados opostos paralelos.

Nos paralelogramos valem as seguintes propriedades:

a) os lados opostos são congruentes.
b) os ângulos opostos são congruentes.
c) as diagonais se cortam em seus respectivos pontos médios.

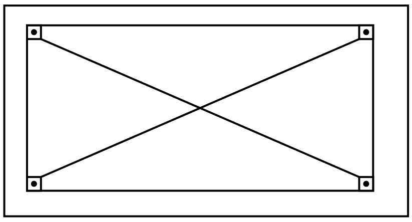


3. RETÂNGULO

Retângulo é todo paralelogramo que possui um ângulo reto.

Nos retângulos além das propriedades dos paralelogramos, valem as seguintes propriedades:

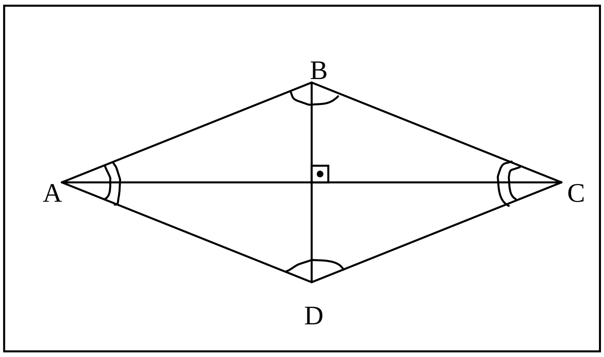
a) as diagonais são congruentes.
b) Os quatro ângulos são retos.



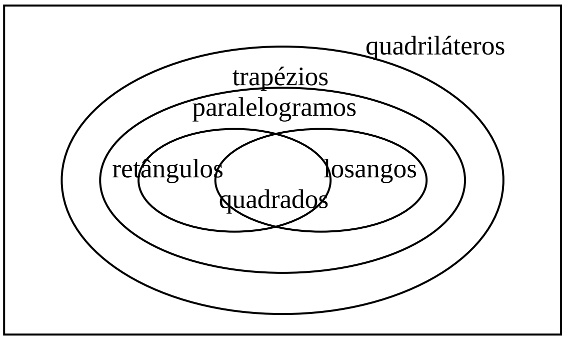
4. LOSANGO

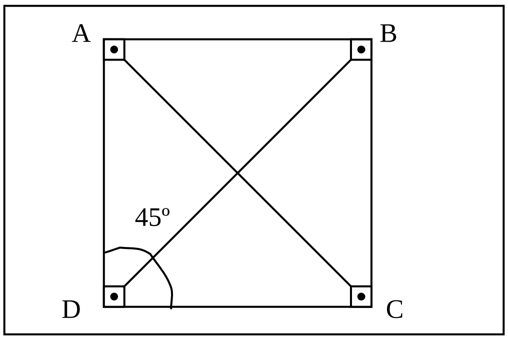
Losango é todo paralelogramo que possui dois lados adjacentes congruentes.
Nos losangos, além das propriedades dos paralelogramos, valem as seguintes propriedades:

1. as diagonais estão nas bissetrizes dos ângulos internos.
2. As diagonais são perpendiculares
3. Os quatro lados são congruentes.



5. QUADRADO
Quadrado é todo quadrilátero que é retângulo e losango ao mesmo tempo.
No quadrado valem todas as propriedades do retângulo e todas as propriedades do losango.
Relações de inclusão entre os conjuntos dos quadriláteros notáveis:





EXERCÍCIOS

a) Assinale a afirmação falsa.
a) todo quadrado é retângulo
b) todo quadrado é losango
c) todo losango é um paralelogramo.
d) todo retângulo é um paralelogramo.
e) todo trapézio é um paralelogramo.

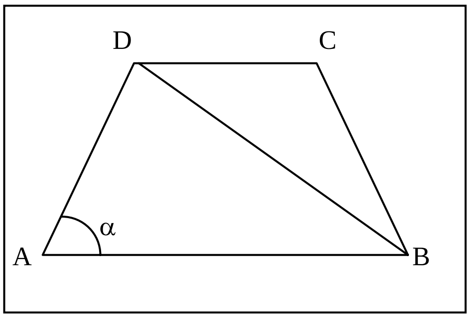
b) Assinale a afirmação falsa.
a) as diagonais de um paralelogramo interceptam-se no ponto médio.
b) as diagonais de um losango são perpendiculares.
c) as diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos internos.
d) as diagonais de um retângulo são congruentes.
e) as diagonais de um paralelogramo são congruentes.

c) (PUC) - Num teste de múltipla escolha, propõe-se um problema que se refere a quadriláteros. As opções do teste são:
a) paralelogramo b) losango c) retângulo
d) quadrado e) nenhuma das anteriores

Um candidato descobre que a opção (e) é incorreta e que o teste possui uma única opção correta. Logo, o candidato, para acertar o teste, deverá assinalar a opção:
a) a b) b c) c d) d e) e

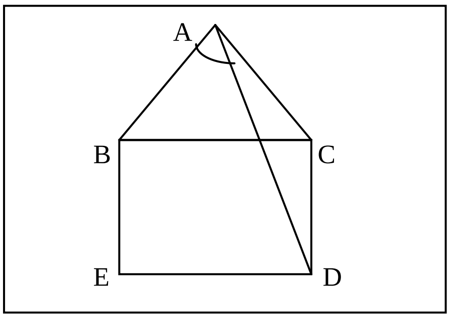
d) Determinar o menor ângulo de um paralelogramo, cuja diferença entre dois ângulos internos seja 64º.

e) No trapézio ABCD da figura seguinte, tem-se AB = BD e BC = CD = DA. A medida α do ângulo BAD assinalado é igual a:
a) 75º b) 72º c) 60º d) 45º e) 36º

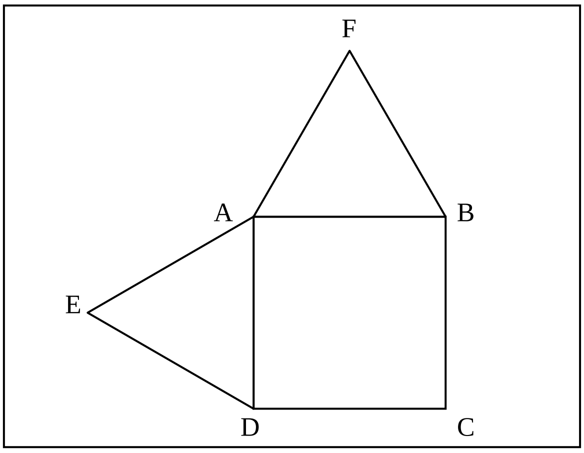


EXERCÍCIOS

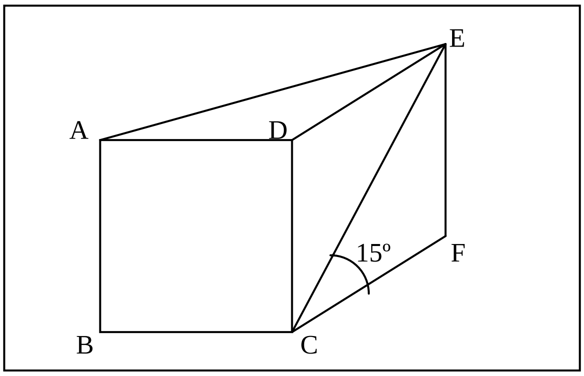
1. Calcule a medida do ângulo BAD assinalado na figura seguinte, onde ABC é um triângulo equilátero e BCDE é um quadrado.



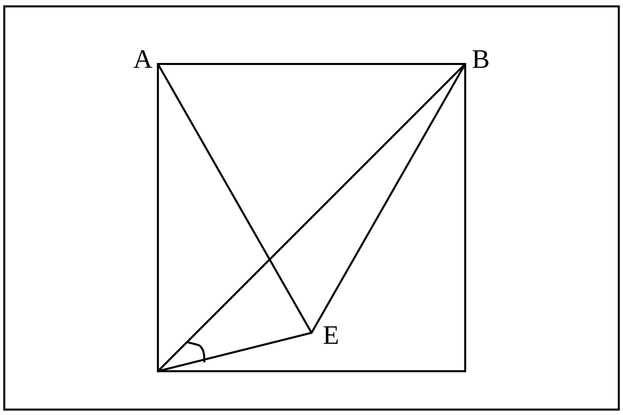
2. Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e os triângulos ADE e ABF são eqüiláteros. A medida do ângulo FEA é:
   a) 5º b) 10º c) 15º d) 20º e) 25º



3. Na figura, ABCD é um quadrado e CDEF um losango.
   Se ECF mede 15º, a medida do ângulo AEF é:
   a) 15º b) 30º c) 45º d) 60º e) 75º



4. Com os dados da figura seguinte, onde ABCD é um quadrado e ABE é um triângulo equilátero, calcule a medida do ângulo BDE.



D C

5. (MACK) - Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede 190º. O maior dos ângulos formado pelas bissetrizes internas dos dois ângulos mede:
a) 105º b) 100º c) 90º d) 95º e) 85º

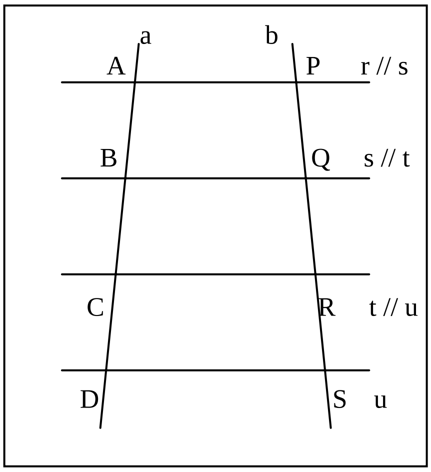
LINHAS PROPORCIONAIS

1. FEIXE DE RETAS PARALELAS
É todo conjunto de três ou mais retas coplanares e paralelas entre si.

2. TRANSVERSAL
É qualquer reta que intercepta todas as retas de um feixe de paralelas.

3. SEGMENTOS CORRESPONDENTES
Dois segmentos são chamados correspondentes, quando são determinados pela intersecção de duas transversais com um mesmo par de retas paralelas de um feixe de paralelas.

4. TEOREMA DE TALES
Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.



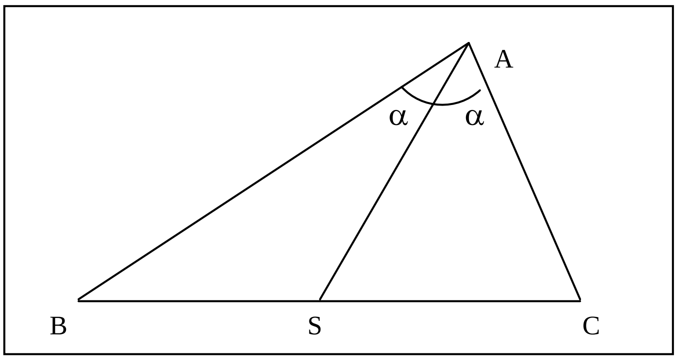
Assim, na figura, temos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS} \; ou \; \frac{AC}{BD} = \frac{PR}{QS} \; ou \; \frac{AD}{AB} = \frac{PS}{PQ} \; ou...$$

5. TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA
"Em todo triângulo, a bissetriz de um ângulo interno, determina no lado oposto dois segmentos proporcionais aos lados desse ângulo."

Na figura, temos:

$$\boxed{\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}}$$

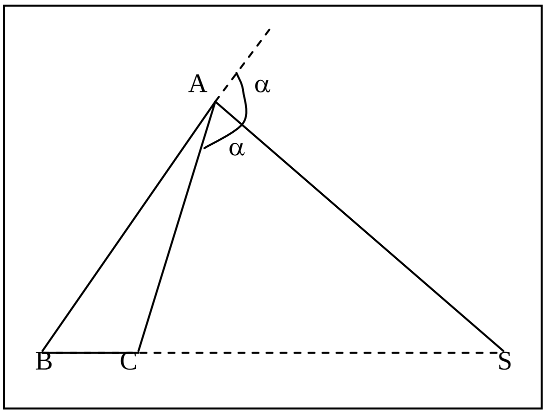


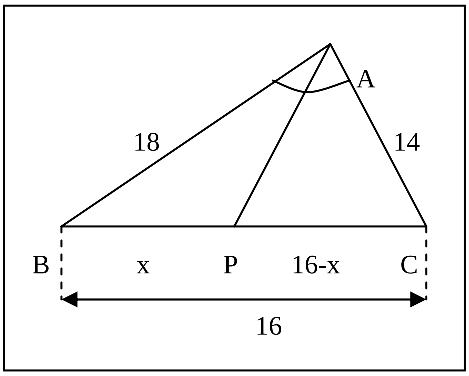
6. TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

Quando a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, ficam determinados nesta reta, dois segmentos proporcionais aos lados desse ângulo.

Na figura, temos:

$$\boxed{\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}}$$





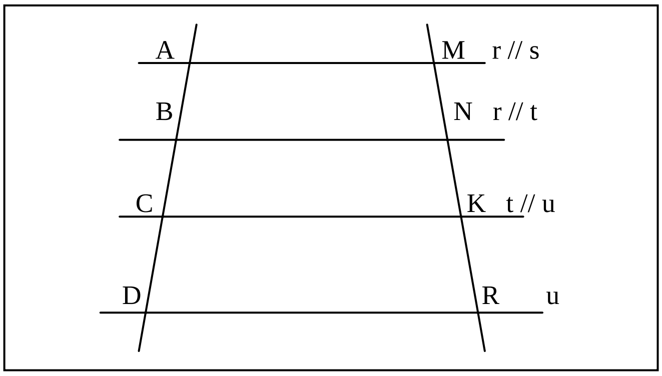
Do teorema da Bissetriz interna temos:

$$\frac{18}{x} = \frac{14}{16-x} \Rightarrow x = 9km$$

EXERCÍCIOS

- Com os dados da figura, e de acordo com o Teorema de Tales, complete:

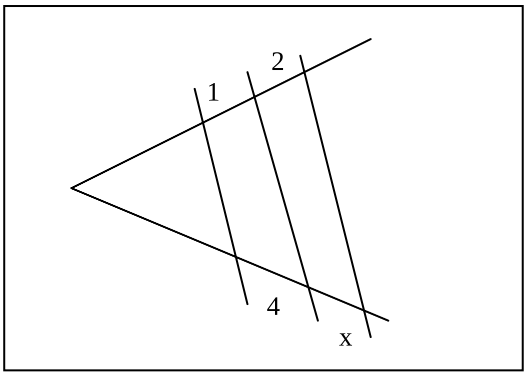
  $\frac{AB}{CD} =$ ___ , $\frac{AC}{BD} =$ ___ , $\frac{AB}{AD} =$ ___



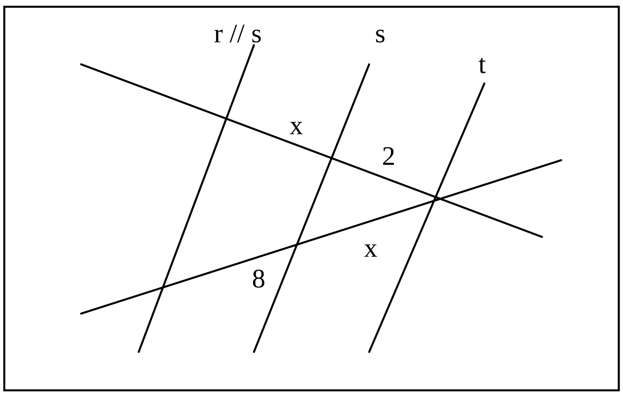
Nos exercícios de 2 a 4, de acordo com os dados das figuras, calcule x em cada caso e associe com:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

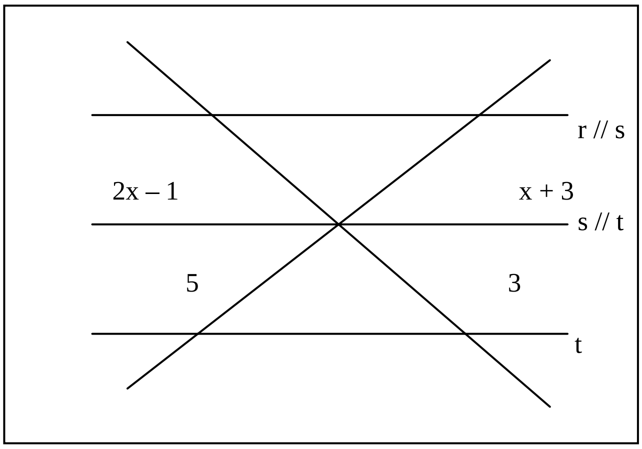
2.



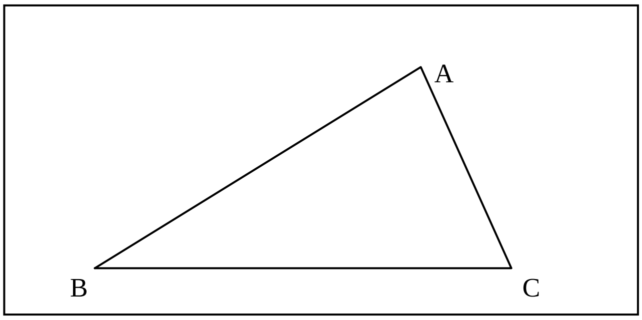
3.



4.



5. Enuncie e demonstre o teorema da bissetriz para um ângulo interno do triângulo ABC da figura.



6. Num triângulo ABC temos AB = 8 cm, BC = 7 cm e AC = 6 cm. Sendo S o ponto de intersecção de BC com a bissetriz do ângulo interno A, determine BS.

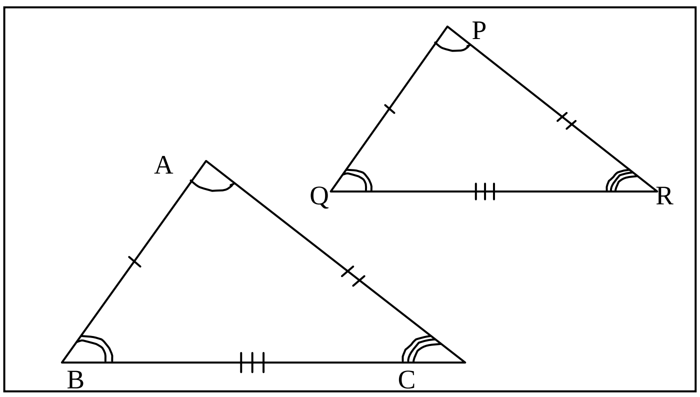
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1. DEFINIÇÃO

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

A semelhança entre os triângulos ABC e PQR será simbolicamente indicada por:

$$\boxed{\Delta ABC \approx \Delta PQR}$$



Assim, temos:

$$\Delta ABC \approx \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{P}; \hat{B} \cong \hat{Q}; \hat{C} \cong \hat{R} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR} = k \end{cases}$$

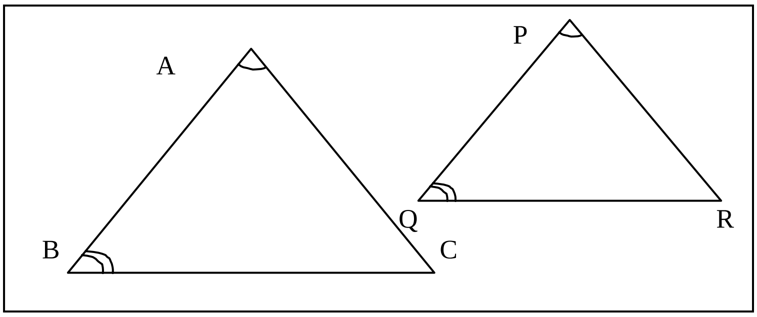
O número K é determinado razão de semelhança dos triângulos.
Se k = 1, então os triângulos são congruentes.

2. CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

Os critérios de semelhança, permitem concluir que dois triângulos são semelhantes a partir de duas ou três condições apenas.

1º Critério (AA~)

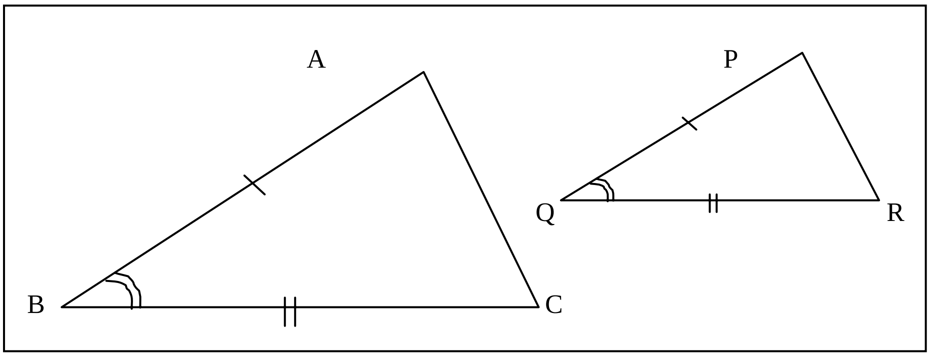
"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{B} \cong \hat{Q}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

2º Critério (LAL~)

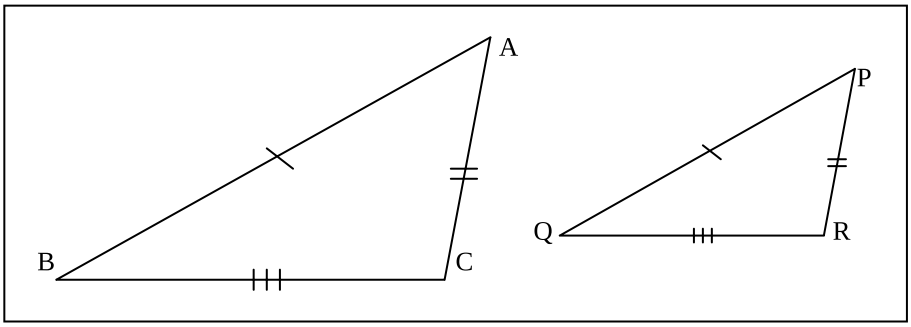
"Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e o ângulo compreendido entre esses lados congruente, então, os triângulos são semelhantes."



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \cong \hat{Q} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

3º Critério (LLL~)

"Se dois triângulos têm os três lados correspondentes ordenadamente proporcionais, então são semelhantes."



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

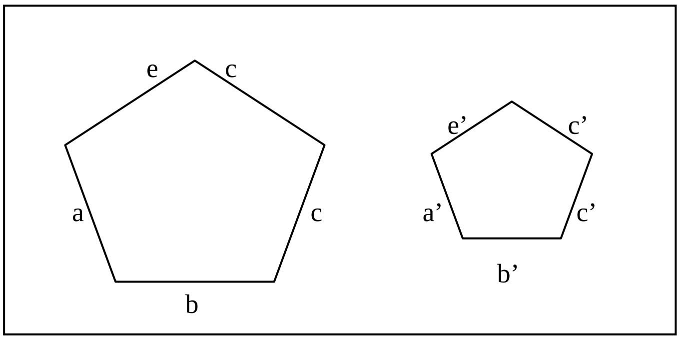
Observação: Se a razão de semelhança de dois triângulos é **k**, então a razão entre dois elementos lineares correspondentes quaisquer é **k**. Exemplo:

Se a razão de semelhança de dois triângulos é 2, então a razão entre as medidas correspondentes é 2, a razão entre as alturas correspondentes é 2, etc.

3. POLÍGONOS SEMELHANTES

Dois polígonos são semelhantes quando possuem o mesmo número de lados e é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices tal que os ângulos correspondentes sejam côngruos e os lados correspondentes proporcionais.

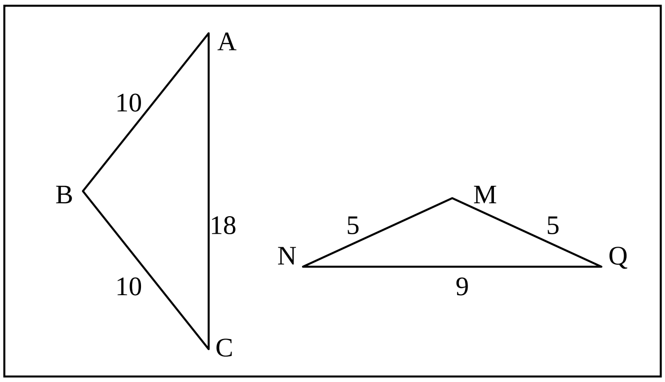
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = ... = \frac{e}{e'} = k$$



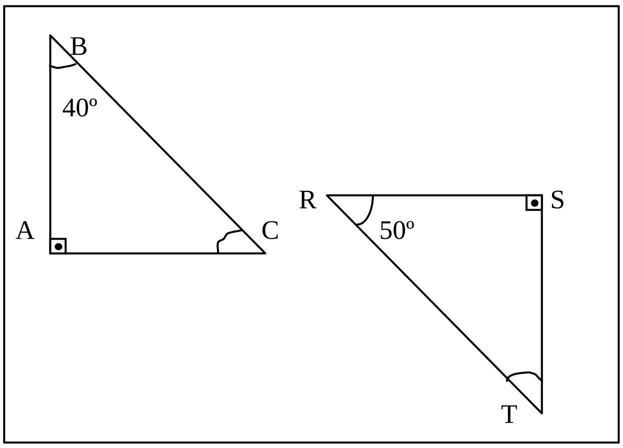
EXERCÍCIOS

- Defina semelhança de triângulos.
- Cite os critérios de semelhança de triângulos.
- Escreva a semelhança dos triângulos apresentando os critérios de semelhança.

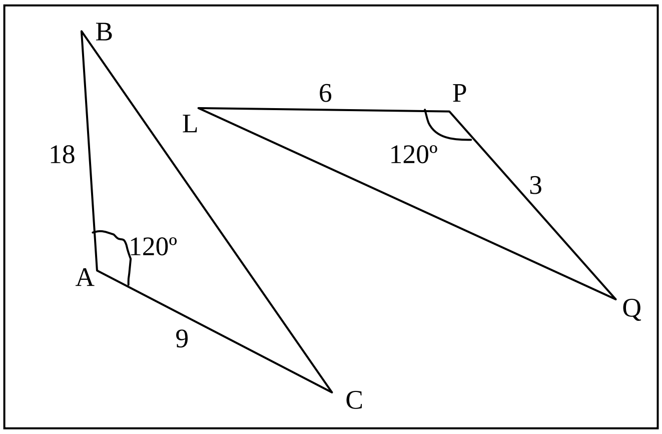
a)



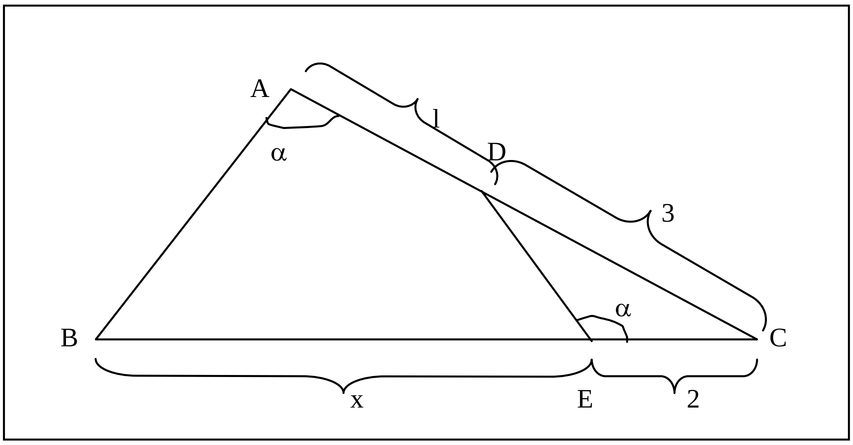
b)



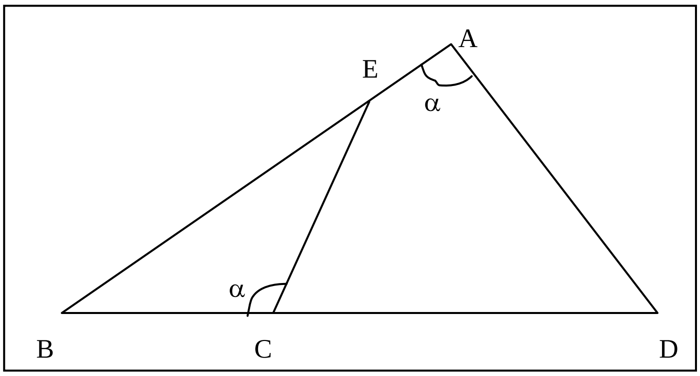
c)



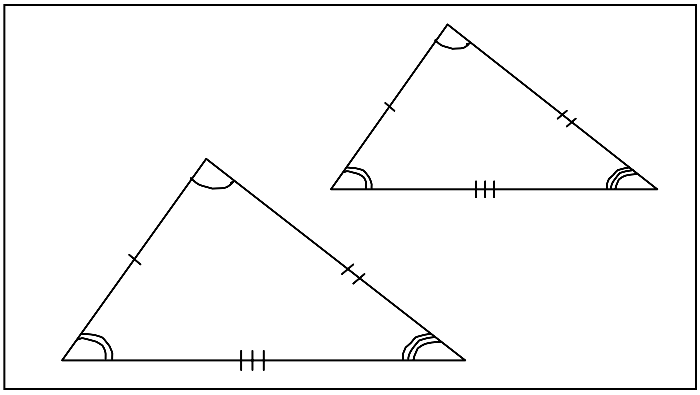
- Com os dados da figura, determine x.



- Na figura abaixo tem-se AE = 1 cm, BC = 3 cm e CD = 7 cm. A medida em cm de $\overline{BE}$ é:
  a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

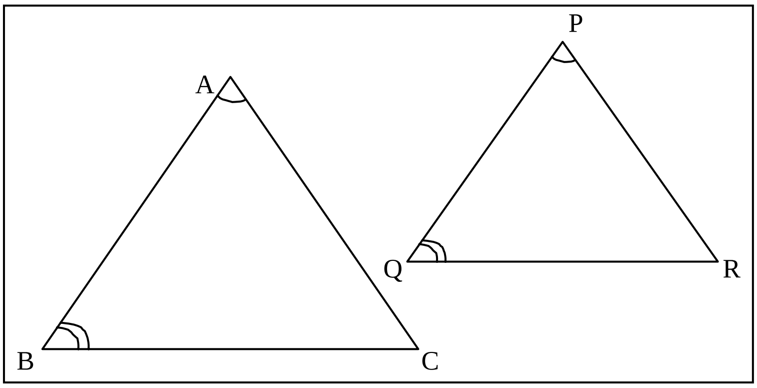


SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS (RESUMO)



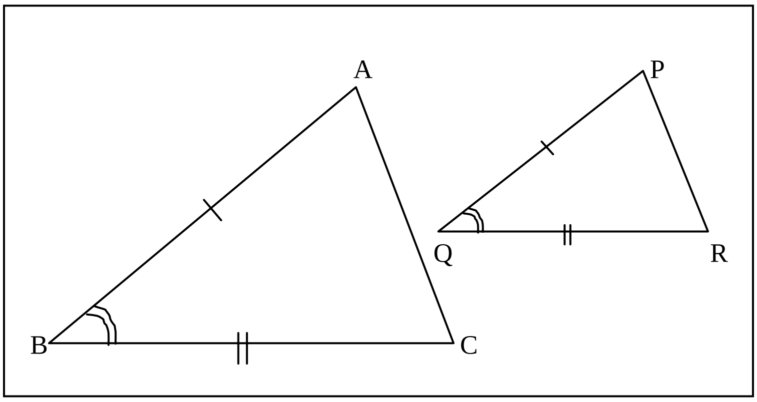
$$\Delta ABC \approx \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{P}; \hat{B} \cong \hat{Q}; \hat{C} \cong \hat{R} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR} = k \end{cases}$$

Critérios de semelhança
1º Critério (AA~)



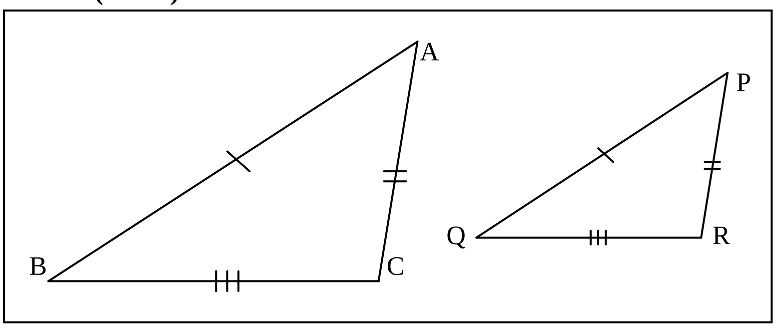
$$\left.\begin{matrix}\hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{B} \cong \hat{Q}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

2º Critério (LAL~)



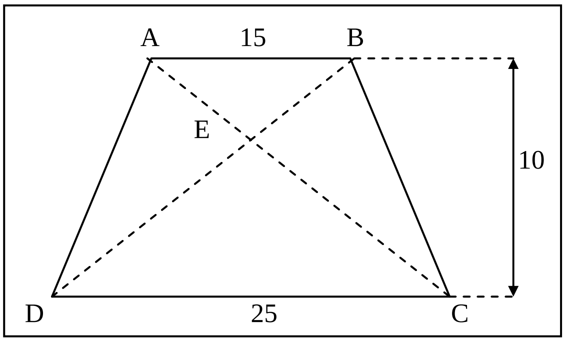
$$\left.\begin{matrix}\hat{B} \cong \hat{Q} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

3º Critério (LLL~)

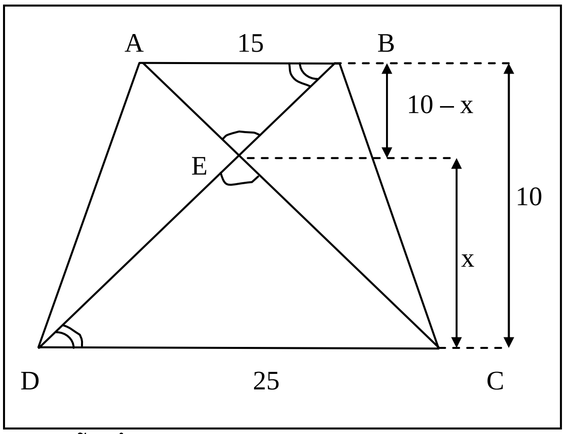


$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta PQR$$

Aplicação:
Calcular a altura relativa ao vértice E do triângulo ECD da figura, sabendo-se que o quadrilátero ABCD é um trapézio.



Resolução:



I) $\Delta ABC \approx \Delta CDE$

II) $\dfrac{x}{10-x} = \dfrac{25}{15} \Leftrightarrow \dfrac{x}{10-x} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 50 - 5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x = 50 \Leftrightarrow x = 6{,}25$

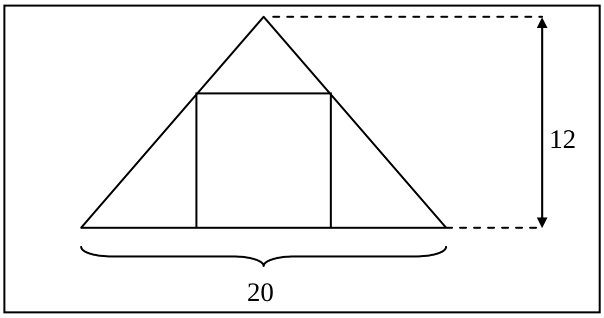
Resposta:
Altura relativa ao vértice E do triângulo ECD mede 6,25.

Observações importantes:

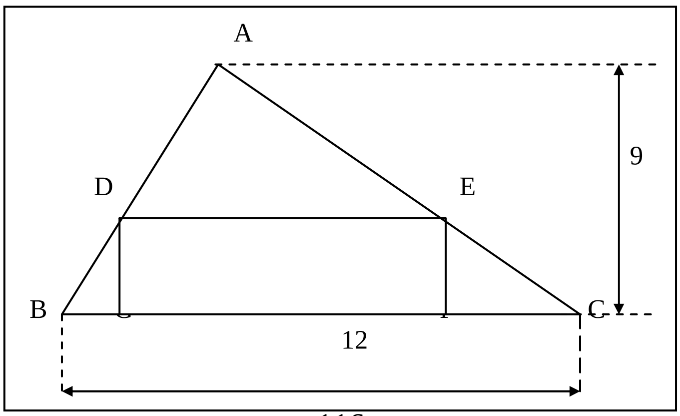
- Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes.
- Em polígonos semelhantes, todas as medidas de segmentos correspondentes estão na mesma razão de semelhança.
- A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual a razão de semelhança entre polígonos.

EXERCÍCIOS

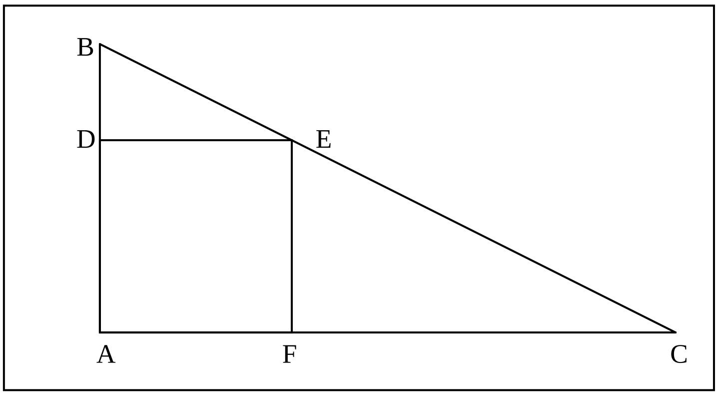
- A figura abaixo mostra um quadrado, inscrito num triângulo de base 20 cm e altura 12 cm. Calcule o lado desse quadrado.



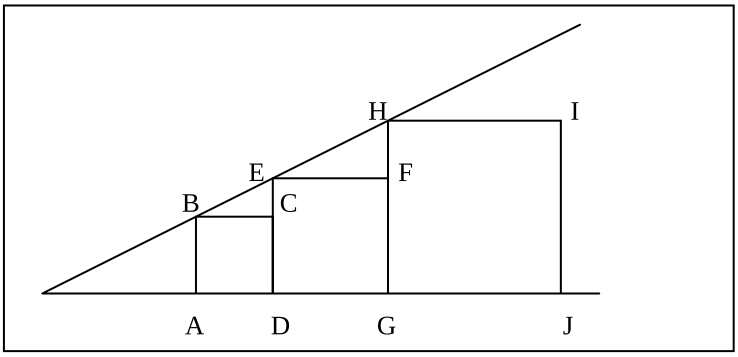
- Calcular a medida do lado GF do retângulo DEFG da figura abaixo, sabendo-se que GF = 2 . EF



- (FUVEST) - Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, AB = 1 e AC = 3.
  Quanto mede o lado do quadrado?
  a) 0,70 b) 0,75 c) 0,80 d) 0,85 e) 0,90



- Os lados dos quadrados DEFG e GHIJ da figura abaixo medem 6 cm e 9 cm, respectivamente. Calcular a medida do lado do quadrado ABCD.



- As bases de um trapézio ABCD medem 10 cm e 25 cm e a altura mede 70 cm. Determinar a distância do ponto de intersecção das diagonais à base maior.

EXERCÍCIOS

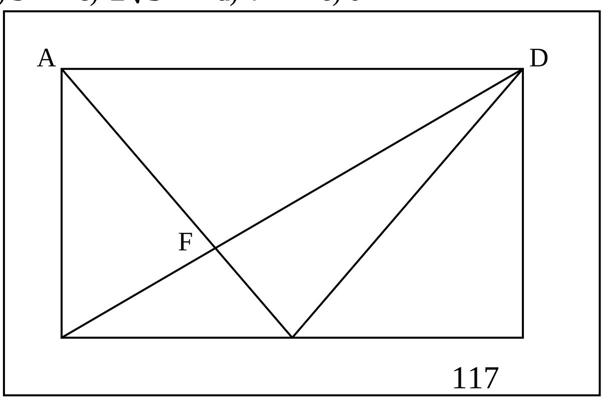
1. Demonstre que o segmento com extremos nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida deste terceiro lado.
2. As diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ de um quadrilátero medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm. O perímetro do quadrilátero com extremos nos pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD é:

a) 12 cm b) 16 cm c) 20 cm
d) 24 cm e) 28 cm

3. Num pentágono convexo ABCDE, a soma das medidas das diagonais é 48 cm. Calcular o perímetro do pentágono que tem como vértices os pontos médios dos lados do pentágono ABCDE.
4. Na figura seguinte ABCD é um retângulo, E é o ponto médio de $\overline{BC}$ e o triângulo ADE é equilátero.

Se BC= 12, então EF é igual a:

a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) 4 e) 6



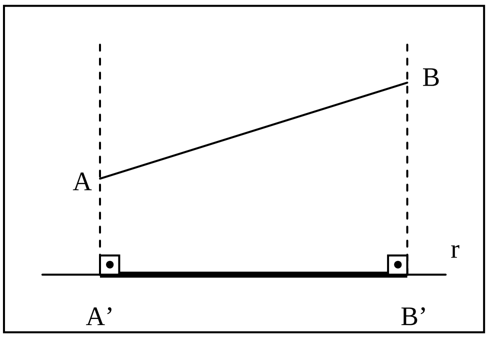
B E C

5. Num triângulo ABC, retângulo em A, os catetos medem 3 cm e 6 cm. A medida do raio da circunferência, com centro na hipotenusa e tangente aos catetos do triângulo é:
 a) 1 cm b) 1,5 cm c) 2 cm
 d) 2,5 cm e) 3 cm

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS

1. PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM SEGMENTO

Dados um segmento de reta $\overline{AB}$ e uma reta **r**, chama-se projeção ortogonal de $\overline{A'B'}$ sobre **r**, o segmento de reta $\overline{AB}$, determinado pela intersecção da reta **r**, com as retas que passam pelos pontos A e B e são perpendiculares a **r**.



2. ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

No triângulo retângulo ABC da figura, temos:

A, **B** e **C** são vértices;

a é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$;

b e c são as medidas dos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente;

h é a medida da altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa;

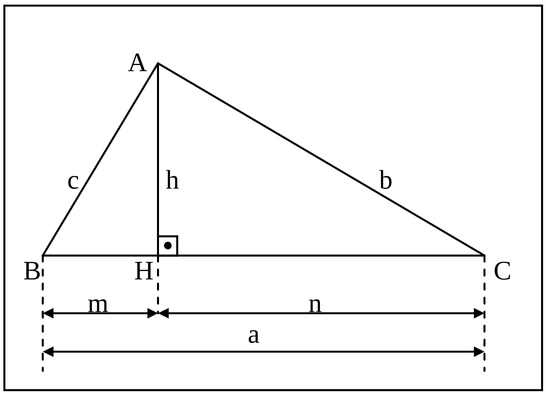
m é a medida da projeção ortogonal $\overline{BH}$ do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;

n é a medida da projeção ortogonal $\overline{CH}$ do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

3. RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

No triângulo retângulo ABC da figura temos:

- ΔAHB ~ ΔCAB pelo critério (AA~) pois o ângulo $\hat{B}$ é comum e $A\hat{H}B = C\hat{A}B = 90^0$.
- ΔAHC ~ΔBAC pelo critério (AA~) pois o ângulo $\hat{C}$ é comum e $A\hat{H}C = B\hat{A}C = 90^0$.



Da semelhança dos triângulos, obtem-se as seguintes relações:

1) O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal deste cateto sobre a hipotenusa **(Relação de Euclides).**

Assim, temos:

$$\boxed{c^2 = a.m} \quad \text{e} \quad \boxed{b^2 = a.n}$$

Demonstrações

I) $\Delta AHB \approx \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BH}{BA} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{c} \Rightarrow c^2 = a.m$

II) $\Delta AHC \approx \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CH}{CA} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{n}{b} \Leftrightarrow b^2 = a.n$

2) Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos **(Teorema de Pitágoras).**

Assim, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração

Vamos somar membro a membro as relações de Euclides obtidas anteriormente.

$$\frac{+\begin{cases} c^2 = a.m \\ b = a.n \end{cases}}{b^2 + c^2 = a.m + a.n} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a.(m+n) \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a.a \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

3) O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Assim, temos:

$$\boxed{h^2 = m.n}$$

Demonstração

$$\Delta AHB \approx \Delta CHA \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow h^2 = m.n$$

4) O produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos catetos.

Assim, temos: $\boxed{a.h = b.c}$

Demonstração

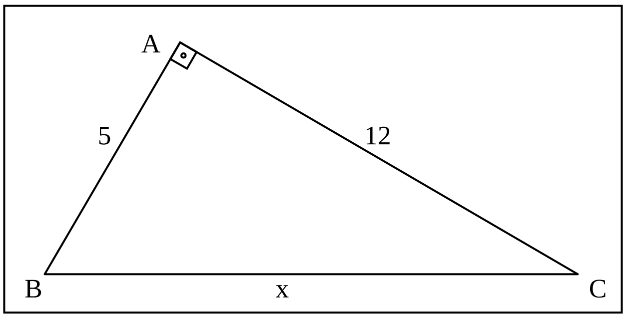
$$\Delta HAB \approx \Delta ACB \Rightarrow \frac{HA}{AC} = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a.h = b.c$$

EXERCÍCIOS

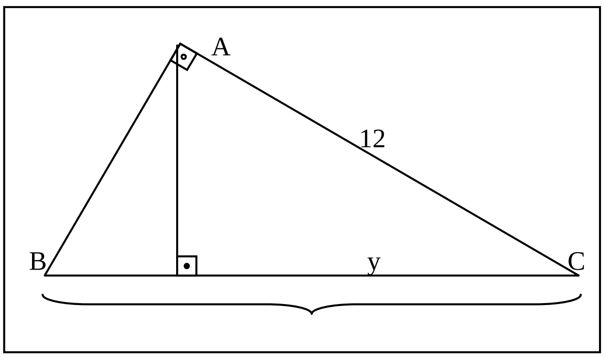
- Enuncie e demonstre o Teorema de Pitágoras.

- Sendo retângulos os triângulos das figuras, determine os valores de x, y e z.

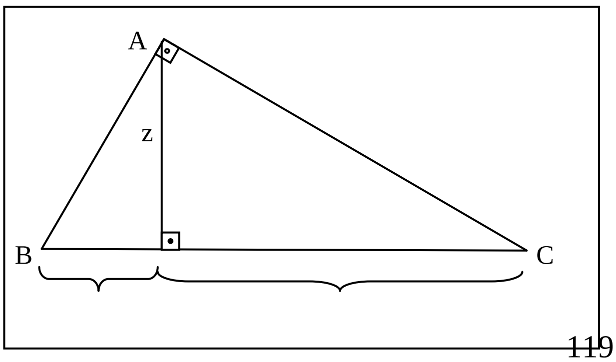
a)



b)



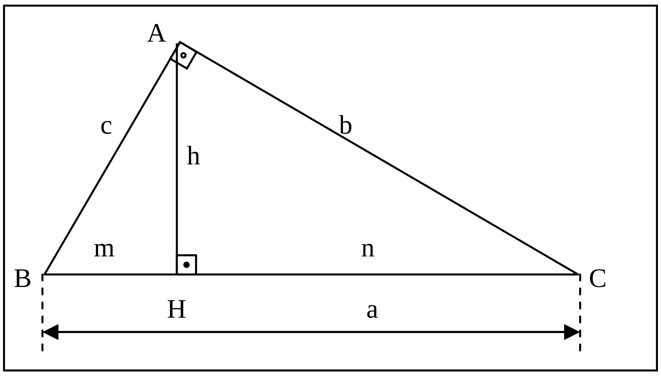
c)



16 25

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Elementos:



$\overline{BC}$ é a hipotenusa,
$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos,
$\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa,
$\overline{BH}$ e $\overline{CH}$ são, respetivamente, as projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Relações:
I) Os triângulos HBA e ABC são semelhantes pelo critério (AA~).
Assim:

$$\frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \boxed{c^2 = a.m}$$

II) Os triângulos HCA e ACB são semelhantes pelo critério (AA~).
Assim:

$$\frac{HC}{AC} = \frac{CA}{CB} \Leftrightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \boxed{b^2 = a.n}$$

O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos (**Teorema de Pitágoras**).

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Os triângulos HBA e HAC são semelhantes pelo critério (AA~)
Assim:

$$\frac{HB}{AC} = \frac{HA}{HC} \Leftrightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Leftrightarrow \boxed{h^2 = m.n}$$

Os triângulos HBA e ABC são semelhantes pelo critério (AA~).
Assim:

$$\frac{HA}{AC} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \boxed{a.h = b.c}$$

Natureza dos Triângulos

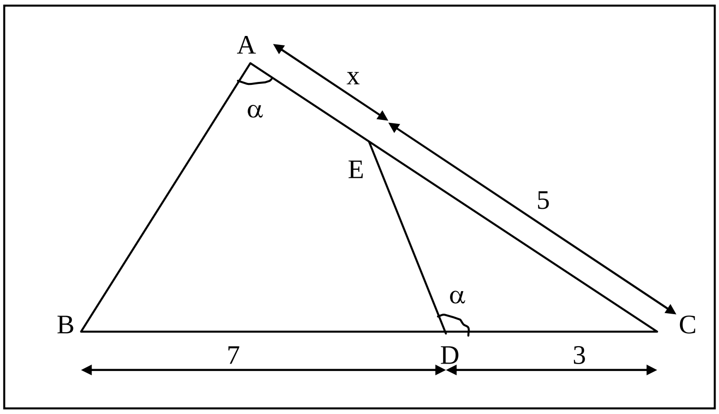
Sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e "a" a maior delas, tem-se:

a) $a^2 < b^2 + c^2$ => triângulo acutângulo
b) $a^2 = b^2 + c^2$ => triângulo retângulo

c) $a^2 > b^2 + c^2$ => triângulo obtusângulo

EXERCICIOS

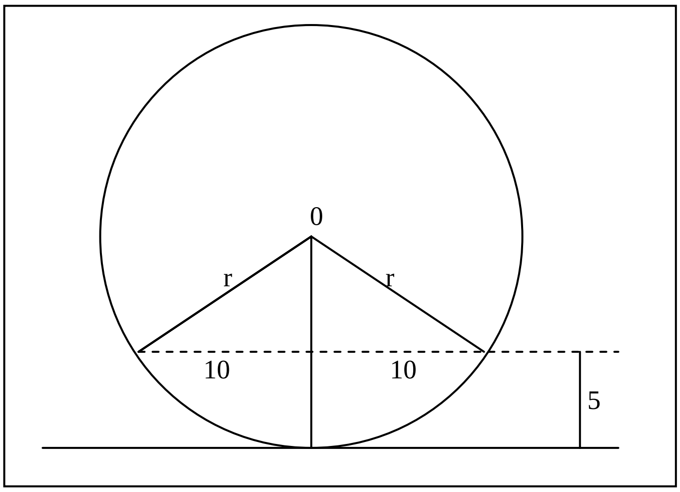
1- Com os dados da figura calcule x.



2- (FUVEST). Dois pontos materiais A e B deslocam-se com velocidades constantes sobre uma circunferência de raio r = $\sqrt{8}$, partindo de um mesmo ponto O, Se o ponto A se desloca no sentido horário com o triplo da velocidade de B, que se desloca no sentido anti-horário, então o comprimento da corda que liga o ponto de partida ao ponto do primeiro encontro é:

1 m b) 2 m c) 3 m d) 4 m e) 5 m

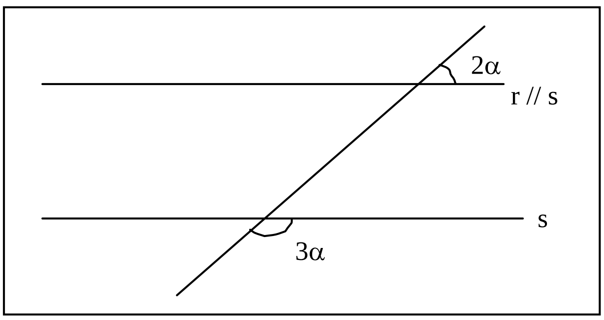
3- (FATEC) O valor do raio da circunferência da figura é:



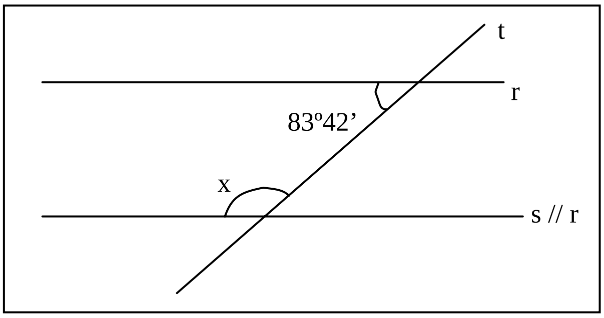
7,5
14,1
12,5
9,5
10,0

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Determine o valor de α.

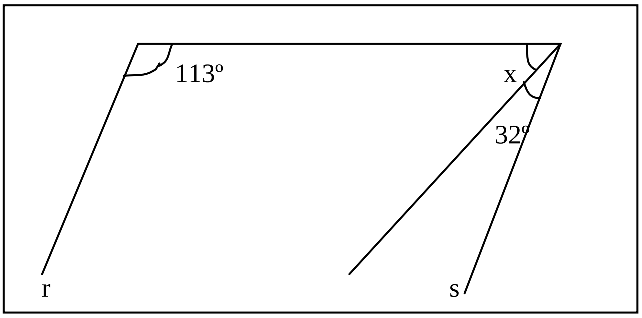


Na figura, calcular a medida x.

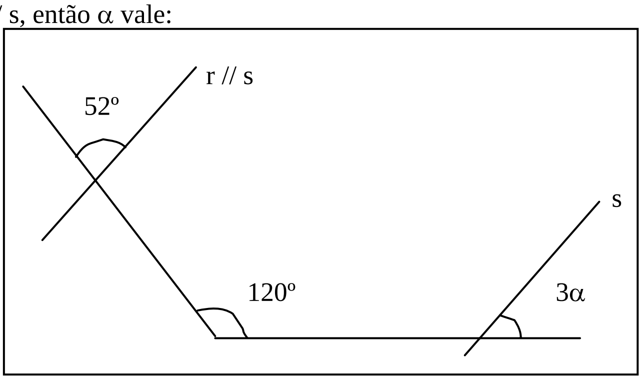


Se r // s, então x valerá:

a) 32º b) 33º c) 65º d) 43º e) n.d.a.

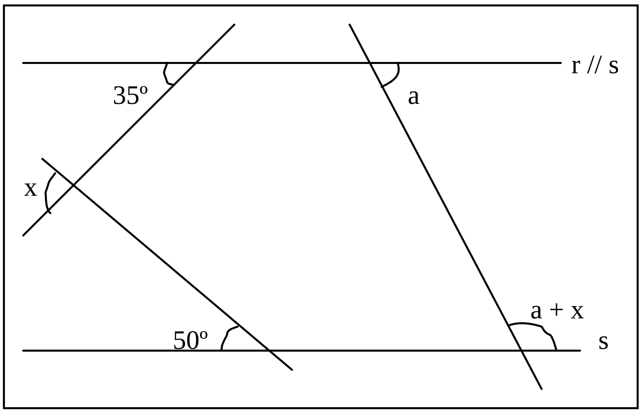


Se r // s, então α vale:

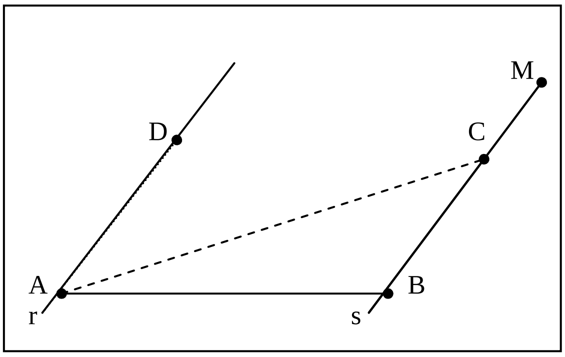


a) 90º b) 100º c) 110º d) 120º e) 22º40'

Com os dados fornecidos na figura abaixo, determine a medida de "a".

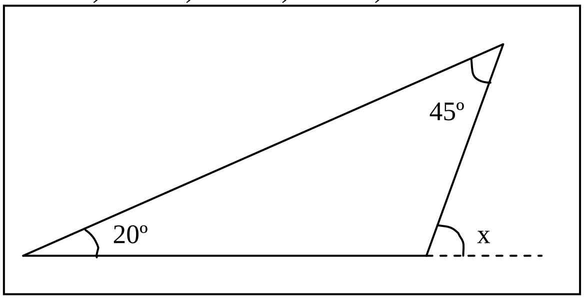


(SANTA CASA) Na figura, $\overleftrightarrow{r} \,//\, \overleftrightarrow{s}$ e DAB = 60º. $\overrightarrow{AC}$ é bissetriz de DAB. A medida ACM é:
a) 40º b) 50º c) 60º d) 150º e) 120º

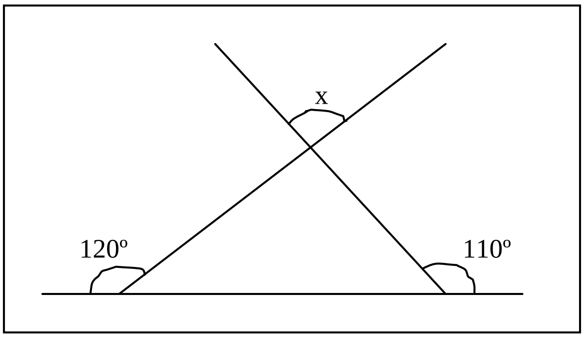


Os ângulos de um triângulo medem respectivamente: 3x, 4x e 5x. Então, x vale em graus:
a) 125º b) 55º c) 35º d) 65º e) 15º

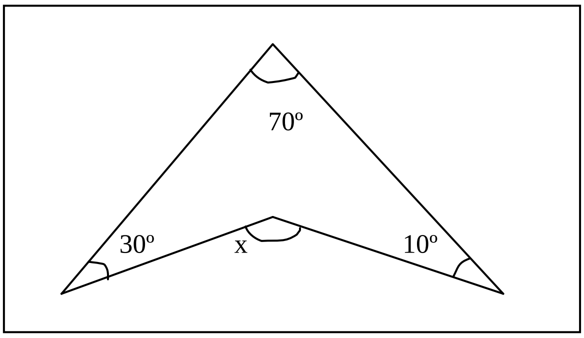
Determine o valor de x e associe com as alternativas abaixo:
a) 44º b) 65º c) 70 d) 150º e) n.d.a.



Calcule x na figura abaixo:

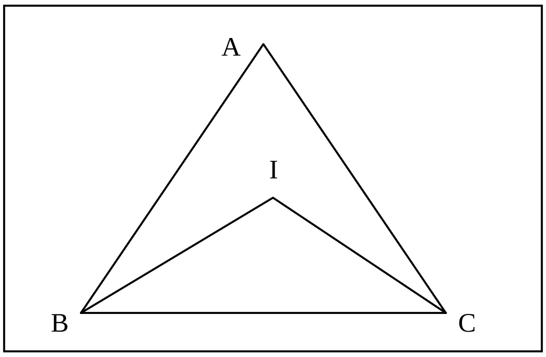


Determine o valor de x na figura abaixo.



No triângulo ABC da figura abaixo, BI e CI são bissetrizes dos ângulos internos B e C, e a medida do ângulo A é 40º. A medida do ângulo BIC é:

a) 80º b) 90º c) 10º d) 110º e) 120º



ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

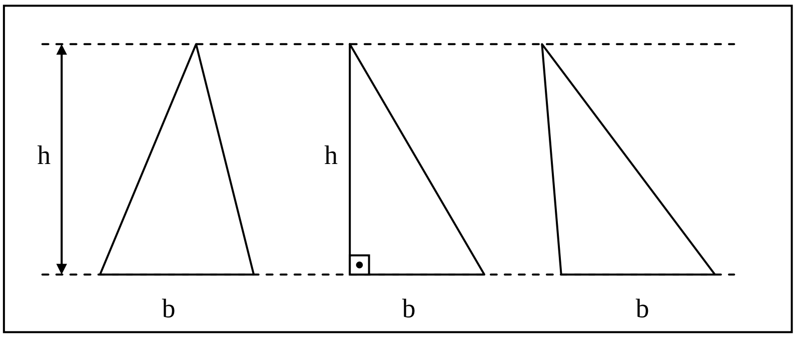
DEFINIÇÃO

Área de uma figura é um número, associado à sua superfície que exprime a relação existente entre esta e a superfície de um quadrado de lado unitário.

Dizemos que duas superfícies são equivalentes quando possuem a mesma área.

ÁREA DO TRIÂNGULO

Em função da base e da altura.



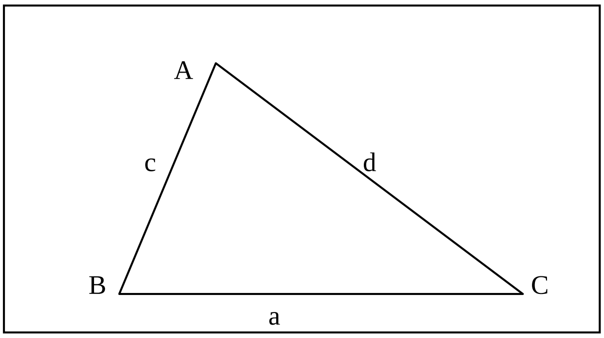
$$\boxed{S = \frac{b.h}{2}}$$

Em função dos lados

Sendo **a**, **b** e **c** as medidas dos lados de um triângulo qualquer, sua área é dada por:

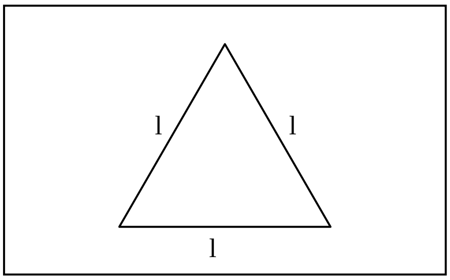
$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$ (Fórmula de HIERÃO)

sendo: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro)

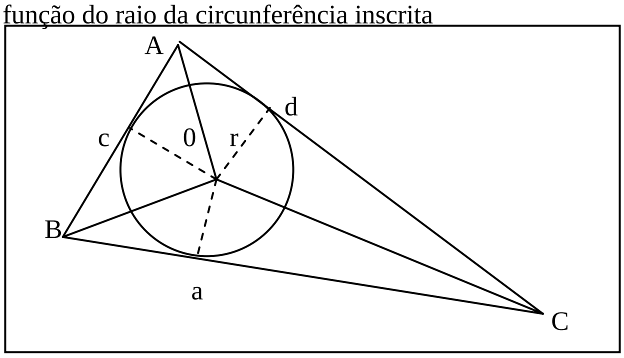


Se o triângulo é equilátero de lado *l*, então sua área é dada por:

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

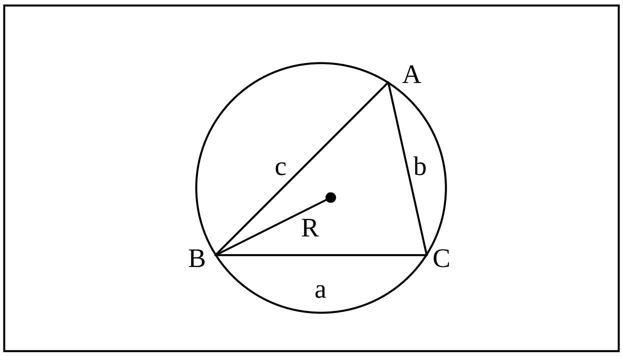


Em função do raio da circunferência inscrita



$$\boxed{S = p.r}$$

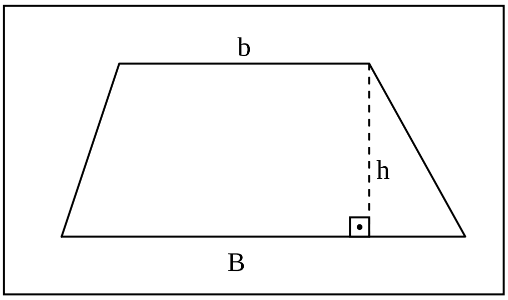
Em função do raio da circunferência circunscrita.



$$\boxed{S = \frac{a.b.c}{4R}}$$

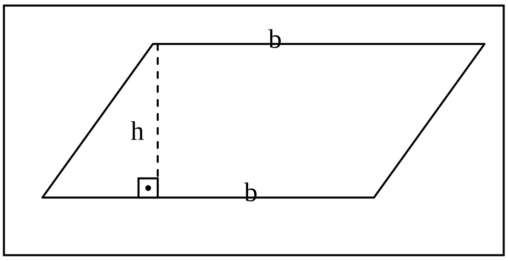
ÁREA DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

TRAPÉZIO



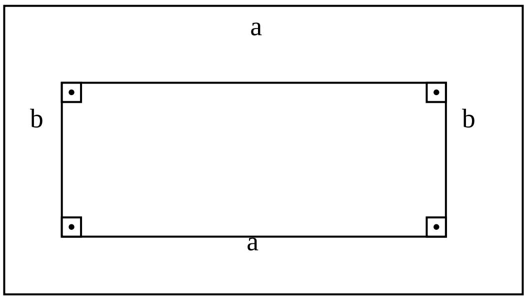
$$\boxed{S = \frac{(B+b).h}{2}}$$

PARALELOGRAMO



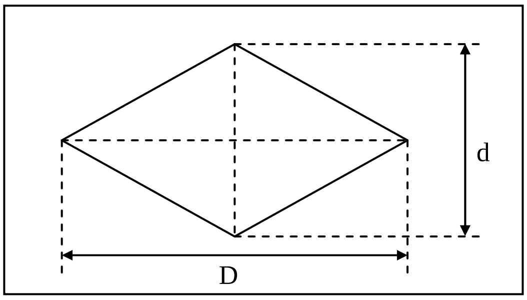
$$\boxed{S = b.h}$$

RETÂNGULO



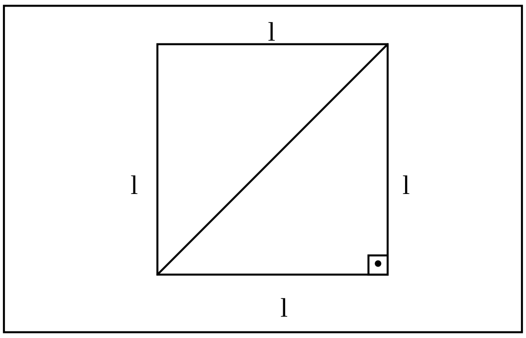
$$\boxed{S = a.b}$$

LOSANGO



$$\boxed{S = \frac{D.d}{2}}$$

QUADRADO



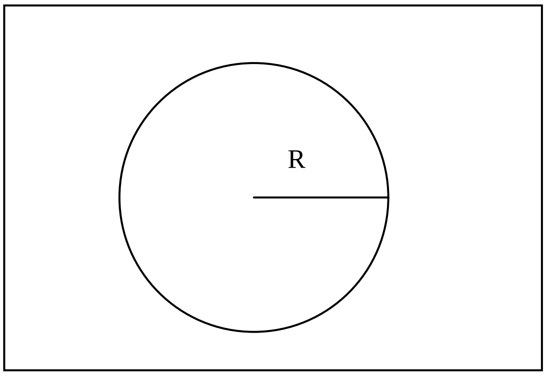
$$\boxed{S = l^2} \text{ ou } \boxed{S = \frac{d^2}{2}}$$

ÁREA DAS FIGURAS CIRCULARES

Área do Círculo

A área de um círculo de raio R é expressa por:

$S = \pi R^2$

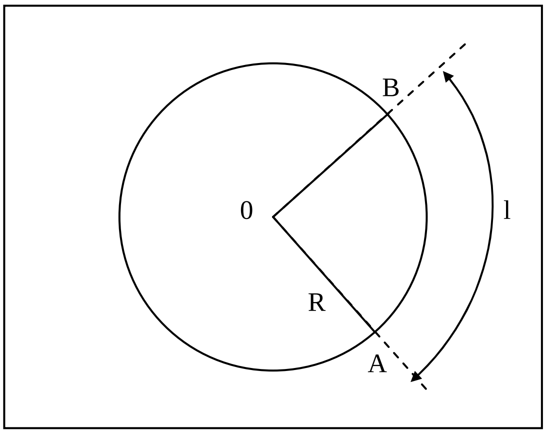


O comprimento da circunferência de raio R e dado por:

$C = 2\pi R$, onde $\pi \cong 3{,}1416$

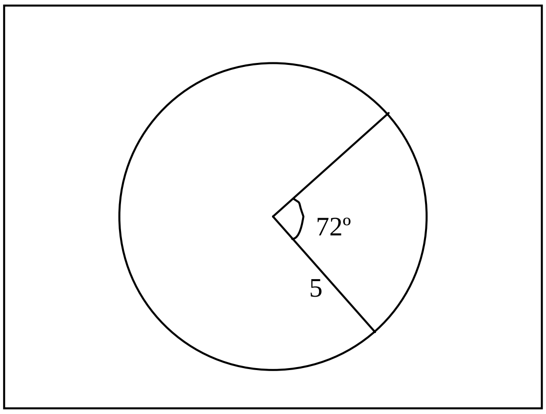
Área do Setor Circular

A área do setor circular de raio R limitado por um arco de comprimento *l* é dada por:



Obs: A área do setor circular é sempre uma "fração" da área do círculo no qual o setor está "contido".

Exemplo: A área do setor circular da figura abaixo é dado por:



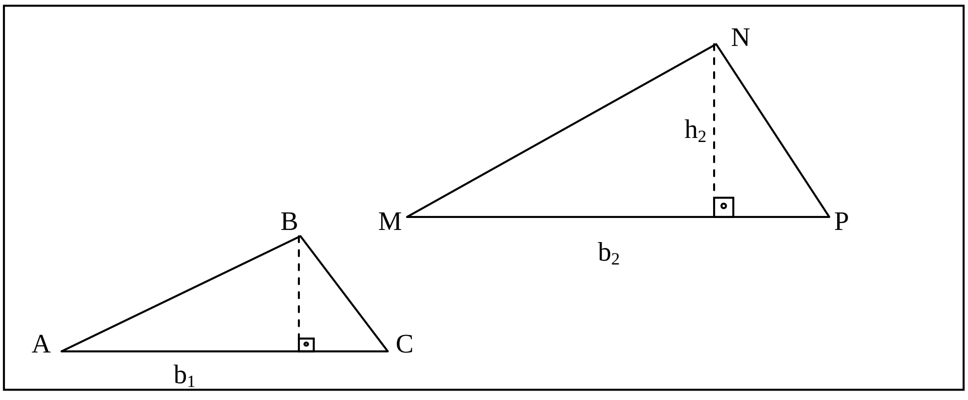
$$S = \frac{72^0}{360^0}.\pi.5^2 = 5\pi$$

IMPORTANTE !!!

RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

"A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança."

Exemplo: Se os triângulos ABC e MNP da figura forem semelhantes e tiverem áreas S_1 e S_2, respectivamente, então:



EXERCÍCIOS

(MACK) Dois lados de um triângulo medem 2 m, e $\sqrt{3}$ m, sendo de 60º o ângulo entre eles. A área desse triângulo, em m^2, vale:

a) 1 b) 3/2 c) 3 d) $\sqrt{3}$ e) 9

(FUVEST) O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda BC mede 6 cm. Então a área do triângulo ABC, em cm^2, vale:

a) 24 b) 12 c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ d) $6\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

POLÍGONOS REGULARES

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Polígono regular

É aquele cujos lados são respectivamente côngruos e cujos ângulos internos também são respectivamente côngruos.

Inscrição e Circunscrição

Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

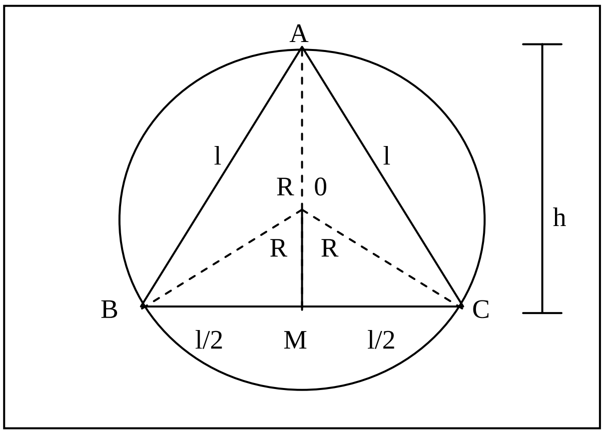
Obs. : O centro da circunferência inscrita (interna) e da circunscrita (externa) ao polígono são coincidentes.

Apótema do Polígono

É o segmento com extremos no centro e no ponto médio dos lados. Ele é perpendicularmente ao lado e é raio da circunferência inscrita.

TRIÂNGULO EQÜILÁTERO

Sendo R o raio da circunferência circunscrita, *l* o lado e **a** o apótema de um triângulo eqüilátero, temos:



$\overline{AM}$ é altura do triângulo eqüilátero

$$ABC \Rightarrow h = AM \Rightarrow h = \frac{l.\sqrt{3}}{2}$$

Como O é o baricentro do triângulo ABC, temos

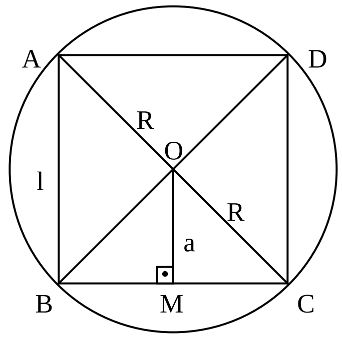
$$AO = 2.OM \Rightarrow R = 2.a \Rightarrow a = \frac{R}{2}$$

c) $AM = AO + OM \Rightarrow \frac{l.\sqrt{3}}{3} = 2a + a \Rightarrow a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

d) $AO = 2a.R \Rightarrow R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

QUADRADO

Sendo R o raio da circunferência circunscrita, *l* o lado e **a** o apótema do quadrado inscrito, temos:



a) $\overline{AC}$ é a diagonal do quadrado $ABCD \Rightarrow AC = l\sqrt{2} \Rightarrow 2R = l\sqrt{2} \Rightarrow l = R\sqrt{2}$

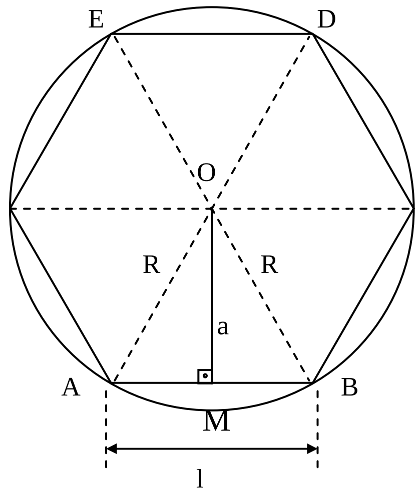
b) $OM = \frac{AB}{2} \Rightarrow a = \frac{l}{2}$

c) Como $a = \frac{l}{2}$ e $l = R\sqrt{2}$ temos: $a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

d) $R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$

HEXÁGONO REGULAR

Sendo R raio da circunferência inscrita, *l* o lado e **a** o apótema do hexágono regular inscrito, temos:



o triângulo ABO é eqüilátero $\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{OA} \Rightarrow l = R$

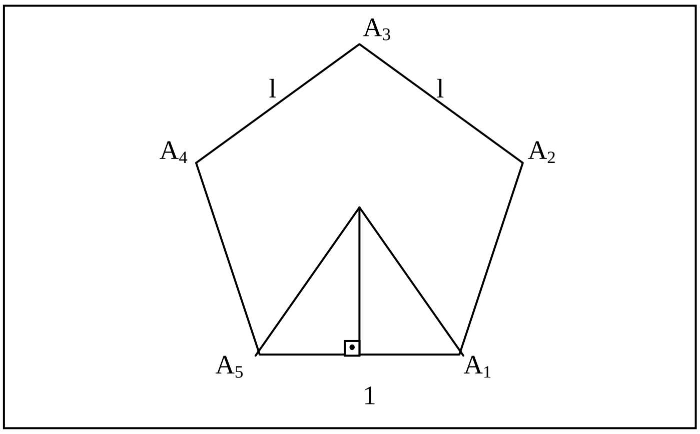
OM é altura do triângulo eqüilátero $\Rightarrow OM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$

ÁREA DOS POLÍGONOS REGULARES

Sendo *l* a medida do lado de um polígono regular de **n** lados, cujo apótema mede **a**, sobre cada lado podemos construir um triângulo de base *l* e altura **a** . Assim, a área do polígono será igual à soma das áreas dos triângulos assim construídos, ou seja:

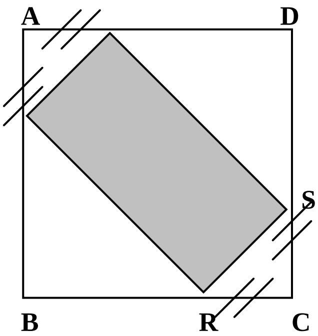
$$\boxed{S = p.a}$$

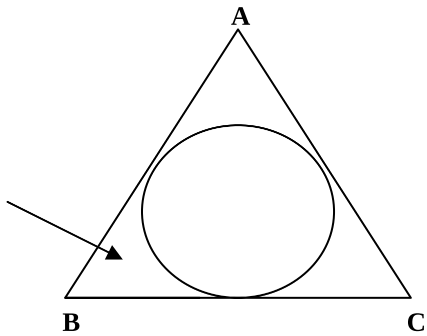
Sendo:
p ⇒ semi-perímetro
a ⇒apótema



EXERCÍCIOS

Calcule a área de um quadrado de 5m de lado.
Calcular lado de um quadrado de $64cm^2$ de área.
O diâmetro de um círculo vale 10m . calcular a área de um quadrado inscrito neste círculo.
O lado do hexágono regular inscrito em um círculo vale 8cm. Calcular a área do quadrado inscrito nesse círculo.
5- (UFSE) seja o retângulo PQRS inscrito no quadrado ABCD, conforme a figura abaixo.
Se $\overline{PS} = 2$, $\overline{PQ}$ e $\overline{AD} = 6$ cm, a área do retângulo PQRS é em cm^2 :





O triângulo ABC da figura acima é equilátero de lado 8cm. Determinar a área assinalada.

Resp.: 1) $25m^2$ 2) 8cm   3) $50m^2$ 4) C   5) $\frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{9}$