CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

ÍNDICE

Lei do Direito Autoral nº 9.610, de 19 de Fevereiro de 1998: Proíbe a reprodução total ou parcial desse material ou divulgação com fins comerciais ou não, em qualquer meio de comunicação, inclusive na Internet, sem autorização do AlfaCon Concursos Públicos.

Geometria plana

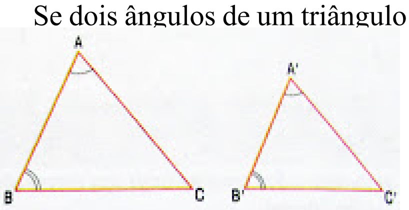
Casos de semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo

Não é necessário conferir se todos os ângulos de dois triângulos são congruentes e se todos os lados deles são proporcionais para saber se ambos são semelhantes; basta que eles apresentem algumas das condições necessárias.

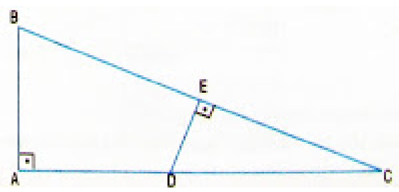
Estudaremos, a seguir, três casos que facilitam determinar quando triângulos são semelhantes.

Casos de Semelhança de Triângulos

Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro, os dois triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \widehat{A'} \\ \\ \hat{B} \cong \widehat{B'}\end{array}\right\} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



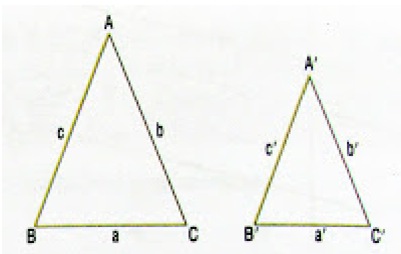
$$\left.\begin{array}{l}\hat{E} \cong \hat{A} \text{ (retos)} \\ \\ \hat{C} \text{ é comum}\end{array}\right\} \Delta EDC \sim \Delta ABC$$

A partir deste caso de semelhança, podemos perceber que todos os triângulos retângulos e isósceles são semelhantes, já que sempre terão os ângulos congruentes de 90º, 45º e 45º.

Caso LLL (Lado, Lado, Lado)

Se todos os lados de um triângulo forem proporcionais aos lados de outro, os dois triângulos são semelhantes.

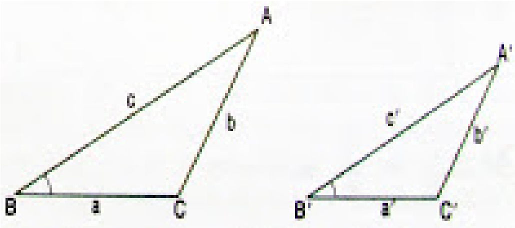
$$\left.\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right\} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



Caso LAL (Lado, Ângulo, Lado)

Lei do Direito Autoral nº 9.610, de 19 de Fevereiro de 1998: Proíbe a reprodução total ou parcial desse material ou divulgação com fins comerciais ou não, em qualquer meio de comunicação, inclusive na Internet, sem autorização do AlfaCon Concursos Públicos.

Se dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais, os dois triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \cong \widehat{B'} \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{a}{a'}\end{array}\right\} \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

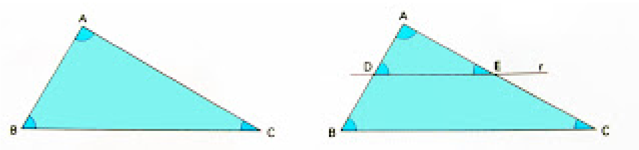
<u>Propriedades da Semelhança de Triângulos</u>

A seguir iremos estudar as propriedades que a Semelhança de Triângulos possui, as quais nos auxiliam expressivamente na resolução de exercícios sobre o conteúdo.

Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos

"*Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro*." (DANTE 2002, p. 167)

Por exemplo, no triângulo ABC abaixo, foi traçada uma reta r paralela ao lado BC, que corta AB no ponto D e o lado AC no ponto E.

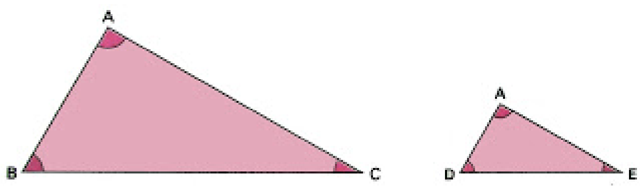


$$\hat{B} \cong \hat{D}$$

$$\text{Como r} \, // \, \overline{BC} \rightarrow \hat{C} \cong \hat{E}$$

$$\hat{A} \cong \hat{A}$$

Separando os triângulos, obtemos: ΔABC ~ ΔADE



Já que os triângulos são semelhantes,

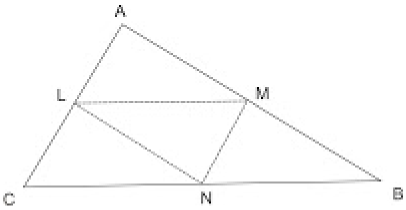
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Mais propriedades

1) Quando a constante de proporcionalidade entre dois triângulos for k, a razão entre:
- suas alturas é k;
- suas medianas é k;
- seus perímetros é k;
- dois elementos lineares e homólogos é k;
- os raios das circunferências inscritas é k;
- os raios das circunferências circunscritas é k.

Lei do Direito Autoral nº 9.610, de 19 de Fevereiro de 1998: Proíbe a reprodução total ou parcial desse material ou divulgação com fins comerciais ou não, em qualquer meio de comunicação, inclusive na Internet, sem autorização do AlfaCon Concursos Públicos.

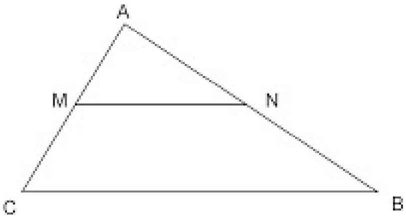
2) Em qualquer triângulo, unindo-se por meio de segmentos de reta os três pontos médios de seus lados, obtemos outro triângulo semelhante ao primeiro e com perímetro igual à metade do perímetro do primeiro.



Na figura, L, M e N são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AC}, \overline{AB}\ e\ \overline{BC}$.

Portanto: ΔLMN ~ ΔABC e $(2P_{LMN}) = \frac{1}{2}(2P_{ABC})$, em que 2P é o perímetro.

3) Em qualquer triângulo, unindo-se por meio de um segmento de reta os pontos médios de dois lados, obtemos um segmento paralelo ao terceiro lado e de medida igual à metade da medida do terceiro lado.

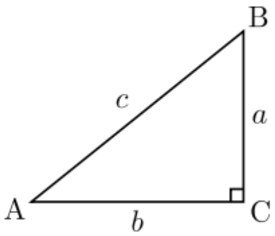


Na figura, M e N são, respectivamente, pontos médios de $\overline{AC}\ e\ \overline{AB}$.

Logo: $\overline{MN} // \overline{BC}$ e $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

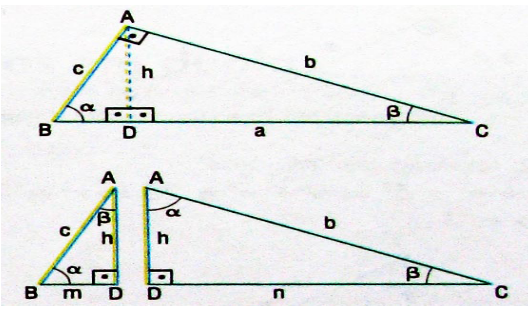
- O triângulo retângulo e suas relações métricas

Denomina-se triângulo retângulo o triângulo que tem um de seus ângulos retos, ou seja, um de seus ângulos mede 90°. O triângulo retângulo é formado por uma hipotenusa e dois catetos, a hipotenusa é o lado maior, o lado oposto ao ângulo de 90°, e os outros dois lados são os catetos.



Na figura podemos observar o triângulo retângulo de vértices A,B e C, e lados a ,b e c. Como o ângulo de 90° está no vértice C, então a hipotenusa do triângulo é o lado c, e os catetos são os lados a e b.

Assim, podemos separar um triângulo em dois triângulos semelhantes,



Neste segundo triângulo podemos observar uma perpendicular à hipotenusa até o vértice A, essa é a altura h

Lei do Direito Autoral nº 9.610, de 19 de Fevereiro de 1998: Proíbe a reprodução total ou parcial desse material ou divulgação com fins comerciais ou não, em qualquer meio de comunicação, inclusive na Internet, sem autorização do AlfaCon Concursos Públicos.

do triângulo, separando assim a hipotenusa em dois segmentos, o segmento m e o segmento n, separando esses dois triângulos, obtemos dois triângulos retângulos, o triângulo $\Delta ABD \; e \; \Delta ADC$. Como os ângulos dos três triângulos são congruentes, então podemos dizer que os triângulos são semelhantes.

Com essa semelhança, ganhamos algumas relações métricas entre os triângulos:

- $\Delta ADB \sim \Delta CAB$

  $\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$

  $$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Longrightarrow c^2 = am$$

- $\Delta DAB \sim \Delta ACB$

  $\frac{DA}{AC} = \frac{AB}{CB}$

  $$\frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Longrightarrow ah = bc$$

- $\Delta ADC \sim \Delta BAC$

  $$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CA}$$

  $$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Longrightarrow b^2 = an$$

- $\Delta ADB \sim \Delta CDA$

  $\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA}$

  $$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Longrightarrow h^2 = mn$$

Somando a primeira e terceira equação, obtemos:

$c^2 + b^2 = am + an = a(m + n)$

Como vimos na figura que $m + n = a$, então temos,

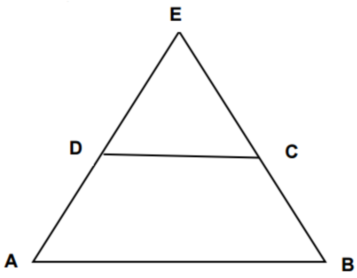
$c^2 + b^2 = aa = a^2$

ou seja, o Teorema de Pitágoras.

EXERCÍCIO

01. Na figura a seguir, o quadrilátero de vértices ABCD é um trapézio de base maior medindo 25 cm, sua altura mede 30 cm e a medida de sua base menor é 125/8 cm . Se o triângulo de vértices AEB foi obtido prolongando-se os lados AD e BC do trapézio ABCD, então é CORRETO afirmar que a medida da altura do triângulo AEB, em centímetros, é igual a:

Lei do Direito Autoral nº 9.610, de 19 de Fevereiro de 1998: Proíbe a reprodução total ou parcial desse material ou divulgação com fins comerciais ou não, em qualquer meio de comunicação, inclusive na Internet, sem autorização do AlfaCon Concursos Públicos.



a) 50

b) 60

c) 80

d) 90

GABARITO

1. C

Lei do Direito Autoral nº 9.610, de 19 de Fevereiro de 1998: Proíbe a reprodução total ou parcial desse material ou divulgação com fins comerciais ou não, em qualquer meio de comunicação, inclusive na Internet, sem autorização do AlfaCon Concursos Públicos.