

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# OPERAÇÕES COM MATRIZES

Da mesma forma que é possível operar números, faz sentido nos perguntarmos: é possível realizar operações entre matrizes?

A resposta para a pergunta é **sim** e esse é o tema desta apostila. As operações entre matrizes que veremos a seguir são: igualdade, adição, subtração, multiplicação por escalar, multiplicação de matrizes, potência de matriz e matriz inversa.

## IGUALDADE DE MATRIZES

Sabemos que dois números são iguais quando esses números são iguais, ou seja, sabemos que, por exemplo,  $2=2$  e  $2\neq 3$ .

Podemos seguir o mesmo pensamento para matrizes: duas matrizes são iguais quando elas são iguais. Mas o que significa duas matrizes serem iguais?

Duas matrizes são iguais quando possuem a mesma ordem e seus termos, ordenadamente, são iguais.

### Exemplos:

1. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 15 \\ 2 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 17 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 15 \\ 2 & 8 & 16 \\ 3 & 10 & 17 \end{bmatrix}$ . Estas matrizes são iguais?

**Solução:** Para as matrizes serem iguais, elas precisam obedecer aos critérios citados acima.

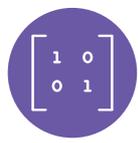
Percebemos que ambas as matrizes possuem ordem 3, então este critério é satisfeito.

Analisando todos os termos das matrizes percebemos que  $a_{32}=9$  e  $b_{32}=10$ , sendo assim, como  $a_{32}\neq b_{32}$ , as matrizes possuem 1 termo diferente e concluímos que as matrizes não são iguais.

2. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 15 \\ 3 & 10 & 17 \end{bmatrix}$ . Estas matrizes são iguais?

**Solução:** Percebemos que a matriz  $A$  possui ordem  $3\times 2$  e a matriz  $B$  possui ordem  $2\times 3$ . Assim, as matrizes não são iguais.

3. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & x \\ x+y & 10 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 15 & 17 \\ 3 & y+z \end{bmatrix}$ . Quais são os valores que  $x, y$  e  $z$  devem satisfazer para que ocorra  $A=B$ ?



**Solução:** Como queremos que ocorra a igualdade entre as matrizes, primeiro analisemos a ordem de cada uma delas.

Percebemos que ambas as matrizes são retangulares de ordem  $3 \times 2$ , então a primeira condição para a igualdade é satisfeita.

Nos resta descobrir os valores procurados. Para isso, igualamos as matrizes e impomos restrições para os valores dos termos, veja abaixo:

$$A=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & x \\ x+y & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 15 & 17 \\ 3 & y+z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ x + y = 3 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

Resolvendo essas equações chegamos em:

$$x=17, y=-14 \text{ e } z=24$$

Portanto, os valores acima fazem com que a igualdade ocorra.

Agora que já aprendemos sobre igualdade, vamos às outras operações.

## ADIÇÃO DE MATRIZES

Outra operação bastante conhecida nos números é a adição (ou soma). E com matrizes, como essa operação funciona?

No caso das matrizes, só podemos realizar a adição quando as matrizes possuem a **mesma ordem**. Nesse caso, a adição é feita **termo a termo** e dessa forma encontramos uma terceira matriz, correspondente à soma das outras matrizes.

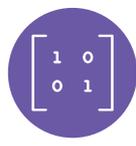
Em outras palavras, se adicionarmos as matrizes  $A$  e  $B$ , sendo  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ , obtemos uma matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ , em que cada elemento dessa matriz  $C$  será a soma dos elementos correspondentes em  $A$  e  $B$  ( $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ). Ou seja:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Veja abaixo um exemplo:

Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 12 & 1 & -8 \end{bmatrix}$ . Então:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 12 & 1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2 & (-1)+6 & 0+5 \\ 2+12 & 3+1 & 8+(-8) \end{bmatrix}$$



Ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 14 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, imagine que queremos somar as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ .  
Como procedemos?

Neste caso, se tentarmos fazer a soma temos:  $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Aí surge a pergunta: a matriz  $B$  só tem uma coluna, enquanto a matriz  $A$  tem duas. Com qual coluna de  $A$  somamos a coluna de  $B$ ?

**Resposta: nenhuma!** Não existe a soma de matrizes nesse caso, justamente por  $A$  e  $B$  possuírem ordens diferentes.

Voltando a pensar na soma dos números reais, sabemos que existem algumas propriedades satisfeitas. No que diz respeito à adição de matrizes, essa operação também possui algumas **propriedades**. Vamos à elas:

### 1. COMUTATIVIDADE

A soma de matrizes é comutativa:  $A+B=B+A$

**Exemplo:** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ , então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 17 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$$

### 2. ASSOCIATIVIDADE

A soma de matrizes é associativa:  $A+(B+C)=(A+B)+C$

**Exemplo:** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ , então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$\left( \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 17 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$$

### 3. ELEMENTO NEUTRO

O elemento neutro da soma de matrizes é a matriz nula:  $A+0=0+A=A$

**Exemplo:** Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ , então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4. ELEMENTO OPOSTO (SIMÉTRICO)

O elemento oposto de  $A$  é a matriz  $-A$ :  $A + (-A) = -A + A = 0$

A matriz  $-A$  é a matriz oposta de  $A$ , cujos elementos são os opostos dos elementos de  $A$ .

**Exemplo:** Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ , a sua matriz oposta é  $-A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$  e, assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Novamente, se existe subtração de números, vamos estudar agora como essa operação funciona com matrizes.

Assim como na adição, só podemos realizar a subtração (ou diferença) quando as matrizes possuem a **mesma ordem**. A subtração é feita **termo a termo** e dessa forma encontramos uma terceira matriz, correspondente à subtração das outras matrizes.

A diferença entre duas matrizes  $A$  e  $B$  é a matriz obtida pela soma da matriz  $A$  com a oposta da matriz  $B$ .

Generalizando, para subtrairmos as matrizes  $A$  e  $B$ , sendo  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ , somamos a matriz  $A$  com a matriz  $-B$  e obtemos uma matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ , em que cada elemento desta matriz  $C$  será a soma dos elementos correspondentes em  $A$  e  $-B$  ( $c_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij})$ ). Ou seja:

$$C = A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & -b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplo:** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$  a diferença será:

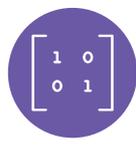
$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

### MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ

O produto de um número real qualquer, o chamado **escalar**, por uma matriz  $A$  é obtido através da multiplicação desse número por **todos** os elementos da matriz.

Generalizando, sendo  $k \in \mathbb{R}$  e  $A_{m \times n}$  temos:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$



**Exemplo:** Produto do número 5 pela matriz  $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ :

$$5A = 5 \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 6 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 9 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 8 & 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot (-6) & 5 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 30 & 15 & 45 \\ 5 & 10 & 40 & 25 \\ 0 & 20 & -30 & 35 \end{bmatrix}$$

**Observação:** Perceba agora que na subtração de matrizes, a oposta da matriz  $(-B)$  nada mais é do que  $(-1) \cdot B$ , ou seja, para encontrarmos a matriz oposta de uma matriz, basta multiplicarmos a matriz pelo escalar  $k=-1$ .

## MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Até agora, as operações entre as matrizes só ocorriam quando as duas matrizes tinham a mesma ordem. O caso da multiplicação será um pouco diferente.

O produto de matrizes não obedece à condição de multiplicar termo a termo os elementos das matrizes, o produto possui um outro critério:

O produto entre duas matrizes só poderá ser feito quando o **número de colunas da primeira** matriz for igual ao **número de linhas da segunda** matriz. Dessa forma encontramos uma terceira matriz, correspondente à multiplicação das outras duas.

A condição anterior expressa matematicamente é a seguinte:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Perceba pela expressão acima que a dimensão da matriz  $C$  é  $m \times p$ , ou seja, **a matriz produto possui o número de linhas igual ao número de linhas da primeira matriz e número de colunas igual ao número de colunas da segunda matriz**. Vejamos um exemplo:

Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

É possível calcular o produto  $A \cdot B$  pois a matriz  $A$  tem 3 colunas, que é o mesmo número de linhas da matriz  $B$ .

Assim, a matriz  $C$  será da forma:  $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$ .

Precisamos agora encontrar o valor dos elementos. Para encontrar o elemento  $c_{11}$ , multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha de  $A$  pelo primeiro elemento da primeira linha de  $B$ , o segundo elemento da primeira linha de  $A$  pelo primeiro elemento da segunda linha de  $B$ , o terceiro elemento da primeira linha de  $A$  pelo primeiro elemento da terceira linha de  $B$  e somamos. Para encontrar os demais elementos  $c_{ij}$  da matriz, multiplicamos sempre a linha  $i$  da matriz  $A$  pela coluna  $j$  da matriz  $B$  e somamos essas multiplicações. Observe abaixo:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Seus elementos serão então:

$$c_{11} = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 26$$

$$c_{12} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 0$$

$$c_{13} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 52$$

$$c_{14} = 2 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 48$$

$$c_{21} = 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 5$$

$$c_{22} = 7 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 36$$

$$c_{23} = 7 \cdot 2 + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 26$$

$$c_{24} = 7 \cdot 8 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 64$$

Portanto,  $C = \begin{bmatrix} 26 & 0 & 52 & 48 \\ 5 & 36 & 26 & 64 \end{bmatrix}$ .

Assim como a adição, a multiplicação também possui **propriedades** interessantes:

- ▶ **Associatividade:**  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- ▶ **Distributividade:**  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  e  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- ▶ **Comutatividade não é válida** na multiplicação de matrizes, pois geralmente  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .
- ▶ **Elemento Neutro:** a matriz identidade ( $I_n$ ) é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, pois qualquer matriz multiplicada pela identidade resulta nela mesma ( $A \cdot I_n = A$ ). Lembre-se que a identidade é uma matriz quadrada, então para existir a multiplicação, o número de colunas da matriz  $A$  de interesse deve ser igual à ordem da matriz identidade. Veja abaixo um exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## POTÊNCIA DE MATRIZ

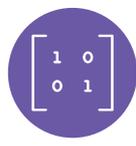
Já sabemos o que é a potência de um número real. Por exemplo,  $3^2 = 3 \cdot 3$ ,  $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$  e assim por diante.

No caso de potência de matrizes, a ideia é a mesma. Dessa forma, nesta operação encontramos uma matriz correspondente à matriz original elevada na potência de interesse.

Antes de continuarmos, vale ressaltar que potência de uma matriz **não** significa elevar cada termo da matriz ao expoente. Vejamos um exemplo:

Vamos elevar  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  ao quadrado.

Se fizéssemos  $A^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 4^2 \\ 0^2 & (-2)^2 \end{bmatrix}$ , chegaríamos em  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .



Porém, essa não é a forma correta de fazer a operação. Fazendo pelo processo correto, temos:

$A^2 = A \cdot A$ , ou seja:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se estivermos interessados agora em  $A^3$ , basta fazer  $A \cdot A \cdot A$  ou  $A^2 \cdot A$ .

Como já temos  $A^2$ , basta multiplicá-la pela matriz  $A$ :

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

## MATRIZ INVERSA

Estamos também acostumados a trabalhar com o inverso dos números reais, por exemplo, o inverso do número 5 é  $\frac{1}{5} = 5^{-1}$  pois  $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ . Agora, como estamos trabalhando com matrizes, como é que se calcula a inversa de uma matriz? Para responder à questão anterior, consideremos uma matriz **A quadrada de ordem n**.

Dizemos que  $A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$  se, e somente se,  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ .

### Observações:

- ▶ Perceba que só falamos de inversa para **matrizes quadradas!**
- ▶ Perceba também que a igualdade ocorre com  $I_n$  justamente por essa matriz ser o elemento neutro da multiplicação de matrizes, assim como o 1 é o elemento neutro da multiplicação de números reais.
- ▶ A matriz  $A^{-1}$  tem a mesma ordem da matriz  $A$ .
- ▶ A expressão  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$  pode ser traduzida em palavras como: **qualquer matriz multiplicada pela sua inversa, resulta na matriz identidade.**

Vamos a alguns exemplos:

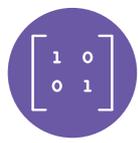
**1.** Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  e a matriz  $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , verificar se  $B$  é matriz inversa de  $A$ .

**Solução:** Para descobirmos se  $B$  é a matriz inversa de  $A$ , precisamos testar as igualdades:

$$A \cdot B = I_2 \text{ e } B \cdot A = I_2$$

Se essas igualdades forem satisfeitas, podemos dizer que  $B = A^{-1}$ . Vamos aos testes:

**1º.**  $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



$$2^\circ. B \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como as igualdades foram satisfeitas, concluímos que  $B=A^{-1}$ .

$$2. \text{ Determinar a matriz inversa de } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** Chamemos de  $A^{-1}$  a matriz procurada. Como  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 2, temos que  $A^{-1}$  também será uma matriz quadrada de ordem 2. Como não conhecemos os seus elementos, escrevemos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Precisamos agora encontrar os valores de  $a, b, c$  e  $d$  e, para isso utilizamos a condição  $A \cdot A^{-1} = I$ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela multiplicação de matrizes chegamos em:

$$\begin{bmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 7a + 5c & 7b + 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, por igualdade de matrizes temos:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 7a + 5c = 0 \\ 3b + 2d = 0 \\ 7b + 5d = 1 \end{cases}$$

Observe que ficamos com 4 equações de primeiro grau, sendo que duas das equações possuem incógnitas iguais ( $a$  e  $c$  nas duas primeiras equações e  $b$  e  $d$  nas duas últimas). Separando essas 4 equações em dois sistemas de equações, temos:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 7a + 5c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 7b + 5d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo cada um dos sistemas separadamente chegamos aos valores:

$$a=5, b=2, c=-7 \text{ e } d=-3$$

Sendo assim, a matriz inversa de  $A$  é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

### Observações:

► Se a matriz  $A$  tivesse ordem 3 ou mais, o processo para encontrar a sua inversa seria o mesmo, só teríamos mais incógnitas no sistema.