OPERAÇÕES COM MATRIZES

Da mesma forma que é possível operar números, faz sentido nos perguntarmos: é possível realizar operações entre matrizes?

A resposta para a pergunta é **sim** e esse é o tema desta apostila. As operações entre matrizes que veremos a seguir são: igualdade, adição, subtração, multiplicação por escalar, multiplicação de matrizes, potência de matriz e matriz inversa.

IGUALDADE DE MATRIZES

Sabemos que dois números são iguais quando esses números são iguais, ou seja, sabemos que, por exemplo, $2=2$ e $2\neq3$.

Podemos seguir o mesmo pensamento para matrizes: duas matrizes são iguais quando elas são iguais. Mas o que significa duas matrizes serem iguais?

Duas matrizes são iguais quando possuem a mesma ordem e seus termos, ordenadamente, são iguais.

Exemplos:

1. Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 15\\ 2 & 8 & 16\\ 3 & 9 & 17\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 7 & 15\\ 2 & 8 & 16\\ 3 & 10 & 17\end{bmatrix}$. Estas matrizes são iguais?

Solução: Para as matrizes serem iguais, elas precisam obedecer aos critérios citados acima.

Percebemos que ambas as matrizes possuem ordem 3, então este critério é satisfeito.

Analisando todos os termos das matrizes percebemos que $a_{32}=9$ e $b_{32}=10$, sendo assim, como $a_{32}\neq b_{32}$, as matrizes possuem 1 termo diferente e concluímos que as matrizes não são iguais.

2. Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & 8\\ 3 & 10\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 7 & 15\\ 3 & 10 & 17\end{bmatrix}$. Estas matrizes são iguais?

Solução: Percebemos que a matriz A possui ordem 3×2 e a matriz B possui ordem 2×3. Assim, as matrizes não são iguais.

3. Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & x\\ x+y & 10\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 15 & 17\\ 3 & y+z\end{bmatrix}$. Quais são os valores que e x,y e z devem satisfazer para que ocorra $A=B$?

Solução: Como queremos que ocorra a igualdade entre as matrizes, primeiro analisemos a ordem de cada uma delas.

Percebemos que ambas as matrizes são retangulares de ordem 3x2, então a primeira condição para a igualdade é satisfeita.

Nos resta descobrir os valores procurados. Para isso, igualamos as matrizes e impomos restrições para os valores dos termos, veja abaixo:

$$A{=}B \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & x \\ x+y & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 15 & 17 \\ 3 & y+z \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 17 \\ x + y = 3 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

Resolvendo essas equações chegamos em:

$$x{=}17,\ y{=}-14 \text{ e } z{=}24$$

Portanto, os valores acima fazem com que a igualdade ocorra.

Agora que já aprendemos sobre igualdade, vamos às outras operações.

ADIÇÃO DE MATRIZES

Outra operação bastante conhecida nos números é a adição (ou soma). E com matrizes, como essa operação funciona?

No caso das matrizes, só podemos realizar a adição quando as matrizes possuem a **mesma ordem**. Nesse caso, a adição é feita **termo a termo** e dessa forma encontramos uma terceira matriz, correspondente à soma das outras matrizes.

Em outras palavras, se adicionarmos as matrizes A e B, sendo $A{=}\,[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B{=}\,[b_{ij}]_{m\times n}$, obtemos uma matriz $C{=}\,[c_{ij}]_{m\times n}$, em que cada elemento dessa matriz C será a soma dos elementos correspondentes em A e B ($c_{ij}{=}a_{ij}{+}b_{ij}$). Ou seja:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Veja abaixo um exemplo:

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 12 & 1 & -8 \end{bmatrix}$. Então:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 12 & 1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2 & (-1)+6 & 0+5 \\ 2+12 & 3+1 & 8+(-8) \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 14 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, imagine que queremos somar as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Como procedemos?

Neste caso, se tentarmos fazer a soma temos: $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Aí surge a pergunta: a matriz B só tem uma coluna, enquanto a matriz A tem duas. Com qual coluna de A somamos a coluna de B?

Resposta: nenhuma! Não existe a soma de matrizes nesse caso, justamente por A e B possuírem ordens diferentes.

Voltando a pensar na soma dos números reais, sabemos que existem algumas propriedades satisfeitas. No que diz respeito à adição de matrizes, essa operação também possui algumas **propriedades**. Vamos à elas:

1. COMUTATIVIDADE

A soma de matrizes é comutativa: $A+B=B+A$

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 17 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$$

2. ASSOCIATIVIDADE

A soma de matrizes é associativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 17 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$$

3. ELEMENTO NEUTRO

O elemento neutro da soma de matrizes é a matriz nula: $A+0=0+A=A$

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix}2 & 7\\9 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\9 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\9 & 1\end{bmatrix}$$

4. ELEMENTO OPOSTO (SIMÉTRICO)

O elemento oposto de A é a matriz $-A$: $A+(-A)=-A+A=0$

A matriz $-A$ é a matriz oposta de A, cujos elementos são os opostos dos elementos de A.

Exemplo: Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 7\\9 & 1\end{bmatrix}$, a sua matriz oposta é $-A=\begin{bmatrix}-2 & -7\\-9 & -1\end{bmatrix}$ e, assim,

$$\begin{bmatrix}2 & 7\\9 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -7\\-9 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -7\\-9 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\9 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Novamente, se existe subtração de números, vamos estudar agora como essa operação funciona com matrizes.

Assim como na adição, só podemos realizar a subtração (ou diferença) quando as matrizes possuem a **mesma ordem**. A subtração é feita **termo a termo** e dessa forma encontramos uma terceira matriz, correspondente à subtração das outras matrizes.

A diferença entre duas matrizes A e B é a matriz obtida pela soma da matriz A com a oposta da matriz B.

Generalizando, para subtrairmos as matrizes A e B, sendo $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, somamos a matriz A com a matriz $-B$ e obtemos uma matriz $C=[c_{ij}]_{m\times n}$, em que cada elemento desta matriz C será a soma dos elementos correspondentes em A e $-B(c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij}))$. Ou seja:

$$C=A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n}\\-b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\-b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n}\\a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn}\end{bmatrix}$$

Exemplo: Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & 8 & 1\\7 & 4 & 9\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 1\\2 & 6 & 4\end{bmatrix}$ a diferença será:

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}3 & 8 & 1\\7 & 4 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -5 & -1\\-2 & -6 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\5 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ

O produto de um número real qualquer, o chamado **escalar**, por uma matriz A é obtido através da multiplicação desse número por **todos** os elementos da matriz.

Generalizando, sendo $k\in\mathbb{R}$ e $A_{m\times n}$ temos:

$$k\cdot A=\begin{bmatrix}k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1n}\\k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \cdots & k\cdot a_{mn}\end{bmatrix}$$

Exemplo: Produto do número 5 pela matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$:

$$5A = 5 \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-2) & 5 \cdot 6 & 5 \cdot 3 & 5 \cdot 9 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 8 & 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot (-6) & 5 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 30 & 15 & 45 \\ 5 & 10 & 40 & 25 \\ 0 & 20 & -30 & 35 \end{bmatrix}$$

Observação: Perceba agora que na subtração de matrizes, a oposta da matriz $(-B)$ nada mais é do que $(-1) \cdot B$, ou seja, para encontrarmos a matriz oposta de uma matriz, basta multiplicarmos a matriz pelo escalar $k=-1$.

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Até agora, as operações entre as matrizes só ocorriam quando as duas matrizes tinham a mesma ordem. O caso da multiplicação será um pouco diferente.

O produto de matrizes não obedece à condição de multiplicar termo a termo os elementos das matrizes, o produto possui um outro critério:

O produto entre duas matrizes só poderá ser feito quando o **número de colunas da primeira** matriz for igual ao **número de linhas da segunda** matriz. Dessa forma encontramos uma terceira matriz, correspondente à multiplicação das outras duas.

A condição anterior expressa matematicamente é a seguinte:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Perceba pela expressão acima que a dimensão da matriz C é $m \times p$, ou seja, **a matriz produto possui o número de linhas igual ao número de linhas da primeira matriz e número de colunas igual ao número de colunas da segunda matriz**. Vejamos um exemplo:

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

É possível calcular o produto $A \cdot B$ pois a matriz A tem 3 colunas, que é o mesmo número de linhas da matriz B.

Assim, a matriz C será da forma: $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$.

Precisamos agora encontrar o valor dos elementos. Para encontrar o elemento c_{11}, multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha de A pelo primeiro elemento da primeira linha de B, o segundo elemento da primeira linha de A pelo primeiro elemento da segunda linha de B, o terceiro elemento da primeira linha de A pelo primeiro elemento da terceira linha de B e somamos. Para encontrar os demais elementos c_{ij} da matriz, multiplicamos sempre a linha i da matriz A pela coluna j da matriz B e somamos essas multiplicações. Observe abaixo:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Seus elementos serão então:

$c_{11} = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 26$

$c_{12} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 0$

$c_{13} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 9 + 1 \cdot 3 = 52$

$c_{14} = 2 \cdot 8 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 48$

$c_{21} = 7 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 5$

$c_{22} = 7 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 36$

$c_{23} = 7 \cdot 2 + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 26$

$c_{24} = 7 \cdot 8 + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 64$

Portanto, $C = \begin{bmatrix} 26 & 0 & 52 & 48 \\ 5 & 36 & 26 & 64 \end{bmatrix}$.

Assim como a adição, a multiplicação também possui **propriedades** interessantes:

- **Associatividade:** $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- **Distributividade:** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ e $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- **Comutatividade não é válida** na multiplicação de matrizes, pois geralmente $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- **Elemento Neutro:** a matriz identidade (I_n) é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, pois qualquer matriz multiplicada pela identidade resulta nela mesma ($A \cdot I_n = A$). Lembre-se que a identidade é uma matriz quadrada, então para existir a multiplicação, o número de colunas da matriz A de interesse deve ser igual à ordem da matriz identidade. Veja abaixo um exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

POTÊNCIA DE MATRIZ

Já sabemos o que é a potência de um número real. Por exemplo, $3^2 = 3 \cdot 3$, $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ e assim por diante.

No caso de potência de matrizes, a ideia é a mesma. Dessa forma, nesta operação encontramos uma matriz correspondente à matriz original elevada na potência de interesse.

Antes de continuarmos, vale ressaltar que potência de uma matriz **não** significa elevar cada termo da matriz ao expoente. Vejamos um exemplo:

Vamos elevar $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ao quadrado.

Se fizéssemos $A^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 4^2 \\ 0^2 & (-2)^2 \end{bmatrix}$, chegaríamos em $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Porém, essa não é a forma correta de fazer a operação. Fazendo pelo processo correto, temos:

$A^2 = A \cdot A$, ou seja:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se estivermos interessados agora em A^3, basta fazer $A \cdot A \cdot A$ ou $A^2 \cdot A$.

Como já temos A^2, basta multiplicá-la pela matriz A:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Estamos também acostumados a trabalhar com o inverso dos números reais, por exemplo, o inverso do número 5 é $\frac{1}{5} = 5^{-1}$ pois $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$. Agora, como estamos trabalhando com matrizes, como é que se calcula a inversa de uma matriz? Para responder à questão anterior, consideremos uma matriz $\boldsymbol{A}$ **quadrada de ordem** $\boldsymbol{n}$.

Dizemos que A^{-1} é a matriz inversa de A se, e somente se, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Observações:

- Perceba que só falamos de inversa para **matrizes quadradas**!
- Perceba também que a igualdade ocorre com I_n justamente por essa matriz ser o elemento neutro da multiplicação de matrizes, assim como o 1 é o elemento neutro da multiplicação de números reais.
- A matriz A^{-1} tem a mesma ordem da matriz A.
- A expressão $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ pode ser traduzida em palavras como: **qualquer matriz multiplicada pela sua inversa, resulta na matriz identidade**.

Vamos a alguns exemplos:

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, verificar se B é matriz inversa de A.

Solução: Para descobrirmos se B é a matriz inversa de A, precisamos testar as igualdades:

$$A \cdot B = I_2 \text{ e } B \cdot A = I_2$$

Se essas igualdades forem satisfeitas, podemos dizer que $B = A^{-1}$. Vamos aos testes:

1º. $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2º. $B \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Como as igualdades foram satisfeitas, concluímos que $B{=}A^{-1}$.

2. Determinar a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução: Chamemos de A^{-1} a matriz procurada. Como A é uma matriz quadrada de ordem 2, temos que A^{-1} também será uma matriz quadrada de ordem 2. Como não conhecemos os seus elementos, escrevemos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Precisamos agora encontrar os valores de a, b, c e d e, para isso utilizamos a condição $A{\cdot}A^{-1}{=}I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela multiplicação de matrizes chegamos em:

$$\begin{bmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 7a + 5c & 7b + 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, por igualdade de matrizes temos:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 7a + 5c = 0 \\ 3b + 2d = 0 \\ 7b + 5d = 1 \end{cases}$$

Observe que ficamos com 4 equações de primeiro grau, sendo que duas das equações possuem incógnitas iguais (a e c nas duas primeiras equações e b e d nas duas últimas). Separando essas 4 equações em dois sistemas de equações, temos:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 7a + 5c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 7b + 5d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo cada um dos sistemas separadamente chegamos aos valores:

$$a{=}5,\ b{=}2,\ c{=}-7 \text{ e } d{=}-3$$

Sendo assim, a matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

Observações:

- Se a matriz A tivesse ordem 3 ou mais, o processo para encontrar a sua inversa seria o mesmo, só teríamos mais incógnitas no sistema.