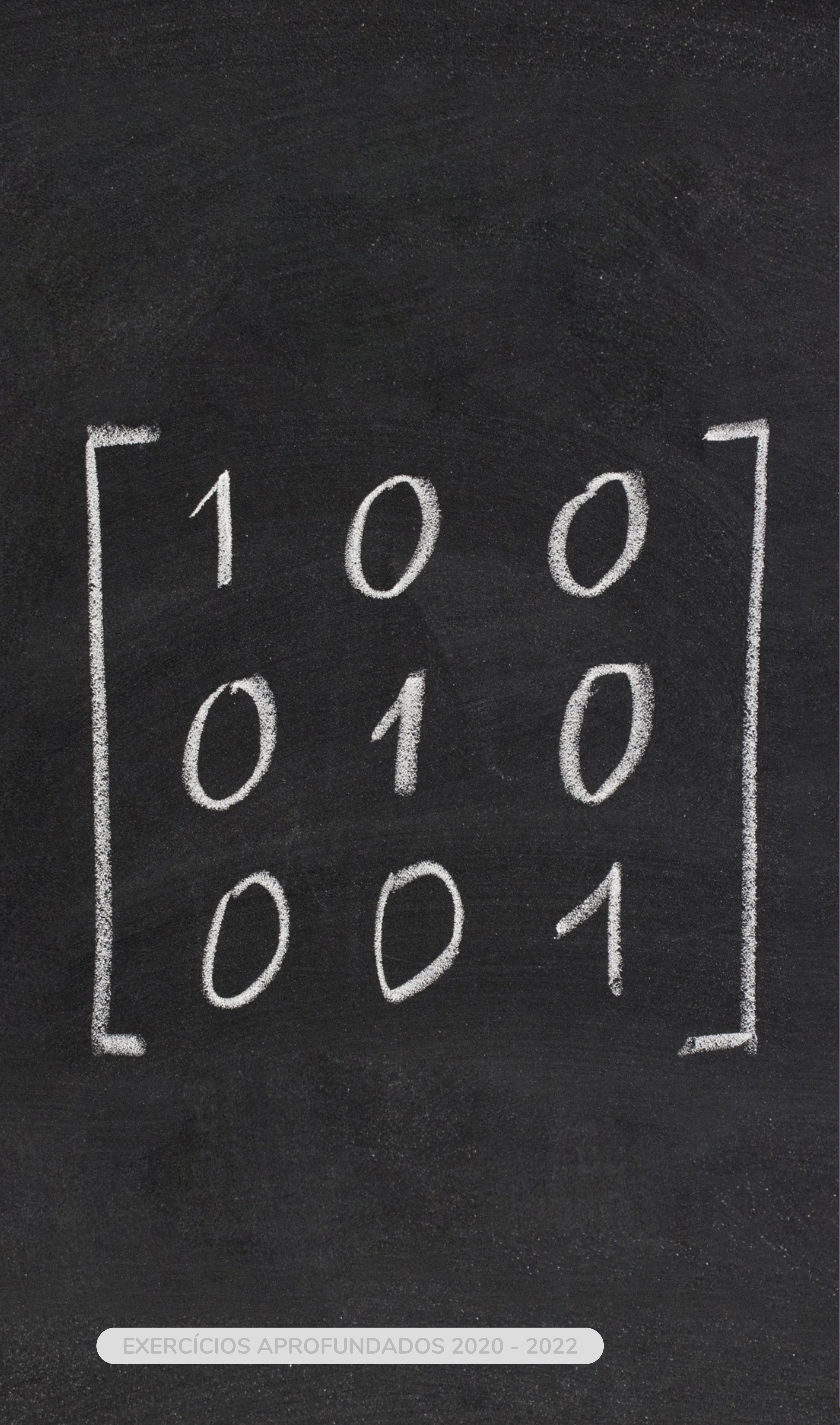


MATRIZES

EXERCÍCIOS APROFUNDADOS 2020 - 2022

MATRIZES

Aqui você aprenderá os conceitos iniciais de matrizes, aprenderá a operar matrizes e a calcular seus determinantes.
Esta subárea é composta pelo módulo:

MATRIZES E DETERMINANTES

1. (UFSC 2018) É correto afirmar que:

01. Se as matrizes $A = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ comutam em relação à multiplicação de matrizes, então $m+n=4$.

02. O valor do determinante da inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ é $det(M^{-1})=24$.

04. Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$.

08. Se $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+ka & h+kb & i+kc \end{pmatrix}$ são matrizes reais, então $det(B)=k\ det(A)$, para todo valor real de k.

16. Se o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=3 \\ 4x+4y-z=4 \end{cases}$ for escrito na forma matricial $A\cdot X=B$, sendo A a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes, então a solução desse sistema é $X=A^{-1}\cdot B$.

32. A soma e o produto de duas matrizes triangulares superiores são matrizes triangulares superiores.

2. (UEM 2017) Considere as matrizes $A=[x\ \ y\ \ 1]$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -1 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ a transposta de A denotada por A^t e um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Considerando esses dados, é **correto** afirmar que

01. o produto AB é uma matriz linha.

02. o produto BA^t é uma matriz linha.

04. A^t é uma matriz coluna.

08. a equação $ABA^t=0$ é equivalente à equação $4x^2+9y^2-16x-12=0$.

16. a equação $ABA^t=0$ é a equação de uma cônica em xOy.

3. (IFSC 2015) Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{p\times q}$ matrizes com $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$. Sabe-se que m é a idade de Pedro, n a idade de João, p a idade de Mariana e q a idade de Marcos.

Com base na situação exposta no enunciado, assinale a soma da(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. Se é possível realizar o produto $B\cdot A$, então Pedro e Marcos têm a mesma idade.

02. Se B tem um determinante associado a ele, então Mariana e Marcos têm a mesma idade.

04. Se Pedro e João têm a mesma idade, então a matriz A é inversível.

08. Se João e Mariana têm a mesma idade, então $A+B$ é uma operação possível.

16. Se $A+B$ e $A\cdot B$ são operações possíveis, então Pedro e João têm a mesma idade.

4. (UFPE 2013) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$. Indique $|a|+|b|+|c|+|d|$.

5. (IME 2017) Seja M uma matriz real 2×2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$.

Encontre todas as matrizes simétricas 2×2 reais na qual $M^2=f(M)$.

6. (UNICAMP 2020) Sabendo que p é um número real, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ e sua transposta A^T. Se $A+A^T$ é singular (não invertível), então

a. $p=0$.

b. $|p|=1$.

c. $|p|=2$.

d. $p=3$.

7. (UECE 2019) Considere as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} p & q \\ u & v \end{bmatrix}$. Se $M \cdot N=N \cdot M$, é correto afirmar que o determinante da matriz N é igual a

a. $\dfrac{2p^2-3q^2}{3}$.

b. $\dfrac{3p^2-2q^2}{3}$.

c. $\dfrac{3p^2-2q^2}{2}$.

d. $\dfrac{2p^2-3q^2}{2}$.

8. (ITA 2019) Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n \times n$ inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|det(A)|=1$.

II. $A^T=A^{-1}$.

III. $A+A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a. apenas I.

b. apenas III.

c. apenas I e II.

d. apenas I e III.

e. todas.

9. (IME 2017) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $det(A^2-2A+I)=16$. A soma dos valores de que satisfazem essa condição é:

Obs.: $det(X)$ denota o determinante da matriz X

a. 0

b. 1

c. 2

d. 3

e. 4

10. (UDESC 2017) Sejam A, B, X e Y matrizes quadradas de ordem 2 tais que, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

A soma dos determinantes das matrizes X e Y sabendo que $2X-2Y=A \cdot B$ e $-X+2Y=A^T$ é igual a:

a. -4

b. -72

c. -144

d. -24

e. -102

11. (MACKENZIE 2017) Para a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & sen17° \\ 1 & 1 & 1 \\ sen28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$ o valor do determinante de M^{10} é

a. $\frac{1}{16}$
b. $\frac{1}{32}$
c. $\frac{1}{64}$
d. $\frac{1}{128}$
e. $\frac{1}{256}$

12. (UEPG 2017) Sendo M uma matriz quadrada inversível, de ordem 3 assinale o que for correto.

01. Se $det(M)=5$ e $det(2\cdot M^{-1}\cdot M)=x+1$, então $x=7$.

02. Se $det(M)=4$ e se k é um número real tal que $det(k\cdot M)=108$, então $k=9$.

04. Se $det\left(\frac{1}{2}\cdot M\right) = 24$, então $det(M^t)=3$.

08. Se $det(M)=2x+6$ e $det(M^t)=x+10$, então $det(M\cdot M^t)=16$.

16. Se $det(M)=x+2$ e $det(M^{-1})=x-8$, então o produto dos possíveis valores de x é -17.

13. (EPCAR (AFA) 2015) Considere as seguintes simbologias em relação à matriz M:

M^t é a matriz transposta de M

M^{-1} é a matriz inversa de M

$det\ M$ é o determinante da matriz M

Da equação $(X^t)^{-1}=A\cdot(B+C)$, em que A e $(B+C)$ são matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, afirma-se que

I. $X=(A^{-1})^t\cdot[(B+C)^{-1}]^t$

II. $det\ X = \dfrac{1}{det\ A\cdot det\ (B+C)}$

III. $X^{-1}=(B^t+C^t)\cdot A^t$

São corretas

a. apenas I e II
b. apenas II e III
c. apenas I e III
d. I, II e III

14. (ESC. NAVAL 2015) Uma função $y=f(x)$ é definida pelo determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} x^2 & x-1 & x & -2 \\ x^3 & x & x & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ em cada $x\in\mathbb{R}$ tal que A é invertível. É correto afirmar que o conjunto imagem de f é igual a

a. $(-\infty,\ 4]$
b. $\mathbb{R}-\{0,\ 4\}$
c. $(-\infty,\ 4]-\{0\}$
d. $(-\infty,\ 4)$
e. $[4,+\infty)$

15. (ITA 2014) Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

a. Apenas I.
b. Apenas I e II.
c. Apenas I e III.
d. Apenas II e III.
e. Todas.

GABARITO

1. 01 + 32 = 33.

Analisando as afirmativas uma a uma:

[01] CORRETA. Calculando:

$A \cdot B = B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2m+n & -3m+4n \\ 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & 2n-12 \\ m & n+16 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} m = 4 \\ n = 0 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow m + n = 4$$

[02] INCORRETA. Calculando:

$$\det M = 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot (12 + 4 - 6 - 16) = 24$$

$$\Rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{24}$$

[04] INCORRETA. Calculando:

$(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

[08] INCORRETA. $detB = detA$.

[16] INCORRETA. O sistema é impossível e não tem solução.

[32] CORRETA. É uma propriedade da matriz triangular.

2. 01 + 04 + 16 = 21.

[01] VERDADEIRO. Sim, será uma matriz do tipo 1×3.

[02] FALSO. Não é possível fazer tal multiplicação.

[04] VERDADEIRO. Sim, será uma matriz do tipo 3×1

[08] FALSO. Calculando:

$ABA^t = 0$

$$AB = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -1 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x - y + 8 & x + 9y + 2 & 8x - 2y + 12 \end{bmatrix}$$

$$ABA^t = \begin{bmatrix} 4x - y + 8 & x + 9y + 2 & 8x - 2y + 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (4x - y + 8) \cdot x + (x + 9y + 2) \cdot y + (8x - 2y + 12)$$

$4x^2 + 9y^2 + 16x + 12 = 0$

[16] VERDADEIRO. A equação $4x^2 + 9y^2 + 8x + 2y + 18 = 0$ representa uma cônica.

3. 01 + 02 + 16 = 19.

[01] Correta. Para que o produto de matrizes seja possível é necessário que $n = p$.

[02] Correta. Para que uma matriz $p \times q$ tenha determinante, devemos ter $p = q$.

[04] Incorreta. Uma matriz é inversível quando seu determinante for diferente de zero.

[08] Incorreta, pois $A + B$ existirá quando $m = p$ e $n = q$.

[16] Correta, pois $m = p$ e $p = n \Rightarrow m = n$.

4. Se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 11b = 1 \\ a + 4b = 0 \\ 3c + 11d = 0 \\ c + 4d = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = -11 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Portanto,

$|a| + |b| + |c| + |d| = |4| + |-1| + |-11| + |3| = 19.$

5. Como queremos M simétrica, pode-se escrever:

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$f(M)=\begin{pmatrix} b & a \\ c & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} a^2+b^2=b \\ ab+bc=a \\ ab+bc=c \\ b^2+c^2=b \end{cases}$$

Logo $c=a$, portanto:

$$\begin{cases} a^2+b^2=b \\ 2ab=a \end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{l} a=0\rightarrow\left(\begin{array}{l} b=1 \\ ou \\ b=0 \end{array}\right. \\ ou \\ b=\dfrac{1}{2}\rightarrow a=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Assim,

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

6. [B]

Tem-se que

$$A+A^t=\begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p & 0 \\ 2 & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2p & 2 \\ 2 & 2p \end{bmatrix}.$$

Desse modo, como $A+A^t$ é singular, vem

$$\begin{vmatrix} 2p & 2 \\ 2 & 2p \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 4p^2-4=0 \Leftrightarrow p^2=1 \Leftrightarrow |p|=1.$$

7. [D]

Tem-se que

$$M\cdot N=N\cdot M\Leftrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p & q \\ u & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & q \\ u & v \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} p+2u & q+2v \\ 3p+u & 3q+v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p+3q & 2p+q \\ u+3v & 2u+v \end{bmatrix}$$

Logo, vem

$$p+2u=p+3q\Leftrightarrow u=\frac{3q}{2}$$

e

$q+2v=2p+q\Leftrightarrow v=p.$

Desse modo, encontramos

$$N=\begin{bmatrix} p & q \\ \frac{3q}{2} & p \end{bmatrix}.$$

A resposta é

$$\begin{vmatrix} p & q \\ \frac{3q}{2} & p \end{vmatrix}=p^2-\frac{3q^2}{2}=\frac{2p^2-3q^2}{2}.$$

8. [A]

[I] Como os elementos das matrizes A e A^{-1} são todos números inteiros, $det\ A$ e $det\ A^{-1}$ são números inteiros.

$det\ A^{-1}=\dfrac{1}{det\ A}$, logo, $det\ A=det\ A^{-1}=1$ ou $det\ A=det\ A^{-1}=-1$.

Em ambos os casos,

$|det\ A|=1$

Portanto, a afirmação [I] é verdadeira.

[II] Seja

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\text{ e }A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$A^T\neq A^{-1}$

Portanto, a afirmação [II] é falsa.

[III] Do item anterior,

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$A+A^{-1}$ não é uma matriz diagonal.

Portanto, a afirmação [III] é falsa.

Dessa forma, apenas a afirmação [I] é verdadeira.

9. [D]

$det(A^2-2A+I)=16$

$A^2-2A+I=X\rightarrow(A-I)^2=X$

$det(A-I)=\pm4$

$$A-I=\begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$det(A-I) = 8a - 12$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 8a - 12 = 4 \to a = 2 \\ ou \\ 8a - 12 = -4 \to a = 1 \end{cases}\right\} 2 + 1 = 3$$

10. [B]

De $2X-2Y=AB$ e $-X+2Y=A^T$,

$$\begin{cases} X - Y = \frac{1}{2}AB \\ -X + 2Y = A^T \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{2}AB + A^T$$

De $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Então,

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Substituindo $Y = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ na equação $-X+2Y=A^T$,

$$-X + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 13 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$det\,X + det\,Y = \begin{vmatrix} -1 & 13 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$det\,X + det\,Y = (-1) \cdot (-4) - 13 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) - 8 \cdot 3$$

$$det\,X + det\,Y = -72$$

11. [B]

De $M = \begin{bmatrix} cos\,17° & 0 & sen17° \\ 1 & 1 & 1 \\ sen28° & 0 & cos\,28° \end{bmatrix}$,

$$detM = \begin{vmatrix} cos\,17° & 0 & sen17° \\ 1 & 1 & 1 \\ sen28° & 0 & cos\,28° \end{vmatrix}.$$

Pela regra de Sarrus,

$$detM = (cos\,17° \cdot 1 \cdot cos\,28° + 0 \cdot 1 \cdot sen28° + sen17° \cdot 1 \cdot 0)$$
$$-(sen17° \cdot 1 \cdot sen28° + cos\,17° \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot cos\,28°)$$
$$det\,M = cos\,17° cos\,28° - sen17° sen28°$$
$$det\,M = cos(17° + 28°)$$
$$det\,M = cos\,45°$$
$$det\,M = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então,

$$det\,M^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$$

$$det\,M^{10} = \frac{2^5}{2^{10}}$$

$$det\,M^{10} = \frac{1}{32}$$

12. 01 + 16 = 17.

[01] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} det(2 \cdot M^{-1} \cdot M) = x + 1 &\Leftrightarrow 2^3 \cdot det(M^{-1} \cdot M) = x + 1 \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 8 \cdot det(I) \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 8 \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow x = 7. \end{aligned}$$

[02] Falsa. Tem-se que

$$\begin{aligned} det(k \cdot M) = 108 &\Leftrightarrow k^3 \cdot det(M) = 108 \\ &\Leftrightarrow k^3 \cdot 4 = 108 \\ &\Leftrightarrow k = 3. \end{aligned}$$

[04] Falsa. Na verdade, temos

$$\begin{aligned} det\left(\frac{1}{2} \cdot M\right) = 24 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot det(M) = 24 \\ &\Leftrightarrow det(M) = 192 = det(M^t). \end{aligned}$$

[08] Falsa. De imediato, vem

$$\begin{aligned} det(M) = det(M^t) &\Leftrightarrow 2x + 6 = x + 10 \\ &\Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Assim, temos $det(M)=det(M^t)=14$ e, portanto, $det(M \cdot M^t)=det^2(M)=196$.

[16] Verdadeira. Tem-se que

$$\begin{aligned} det(M) \cdot det(M^{-1}) = 1 &\Leftrightarrow (x + 2)(x - 8) = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x - 17 = 0. \end{aligned}$$

Em consequência, das Relações de Girard, podemos concluir que o produto das raízes dessa equação é igual a -17.

13. [D]

[I] Verdadeira. Com efeito, temos

$$\begin{aligned}(X^t)^{-1} = A\cdot(B+C) &\Leftrightarrow [(X^t)^{-1}]^{-1} = [A\cdot(B+C)]^{-1}\\ &\Leftrightarrow X^t = (B+C)^{-1}\cdot A^{-1}\\ &\Leftrightarrow (X^t)^t = [(B+C)^{-1}\cdot A^{-1}]^t\\ &\Leftrightarrow X = (A^{-1})^t\cdot[(B+C)^{-1}]^t.\end{aligned}$$

[II] Verdadeira. De fato, segue que

$$\begin{aligned}det(X^t)^{-1} = det\,A\cdot(B+C) &\Leftrightarrow \frac{1}{det(X^t)} = det\,A\cdot(B+C)\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{det\,X} = det\,A\cdot(B+C)\\ &\Leftrightarrow det\,X = \frac{1}{det\,A\cdot(B+C)}.\end{aligned}$$

[III] Verdadeira. Com efeito, pois

$$\begin{aligned}(X^t)^{-1} = A\cdot(B+C) &\Leftrightarrow (X^{-1})^t = A\cdot(B+C)\\ &\Leftrightarrow [(X^{-1})^t]^t = [A\cdot(B+C)]^t\\ &\Leftrightarrow X^{-1} = (B+C)^t\cdot A^t\\ &\Leftrightarrow X^{-1} = (B^t+C^t)\cdot A^t.\end{aligned}$$

14. [C]

Sendo $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{vmatrix} x^2 & x-1 & x & -2\\ x^3 & x & x & 1-x\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ x & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}\\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ x^3 & x & x & 1-x\\ x^2 & x-1 & x & -2\\ x & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}\\ &\overset{Chió}{=} -\begin{vmatrix} x & x & 1-x\\ x-1 & x & -2\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1\\ x-1 & x & -2\\ x & x & 1-x\end{vmatrix}\\ &\overset{Chió}{=} \begin{vmatrix} x & x-3\\ x & 1\end{vmatrix}\\ &= x\begin{vmatrix} 1 & x-3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ &= 4-(x-2)^2.\end{aligned}$$

Como A é invertível, segue que $D=\mathbb{R}^*-\{4\}$. Logo, o conjunto imagem de f é $(-\infty,\ 4]-\{0\}$.

15. [C]

[I] **Verdadeira**. Como o produto é inversível concluímos que $det(A)\neq 0$ e $det(B)\neq 0$

Considerando que B é antissimétrica, temos:

$$det(B^t)=det(-1\cdot B)=(-1)^n\cdot det(B)$$

Ou seja,

$$(-1)^n = \frac{det(B^t)}{det(B)} = 1$$

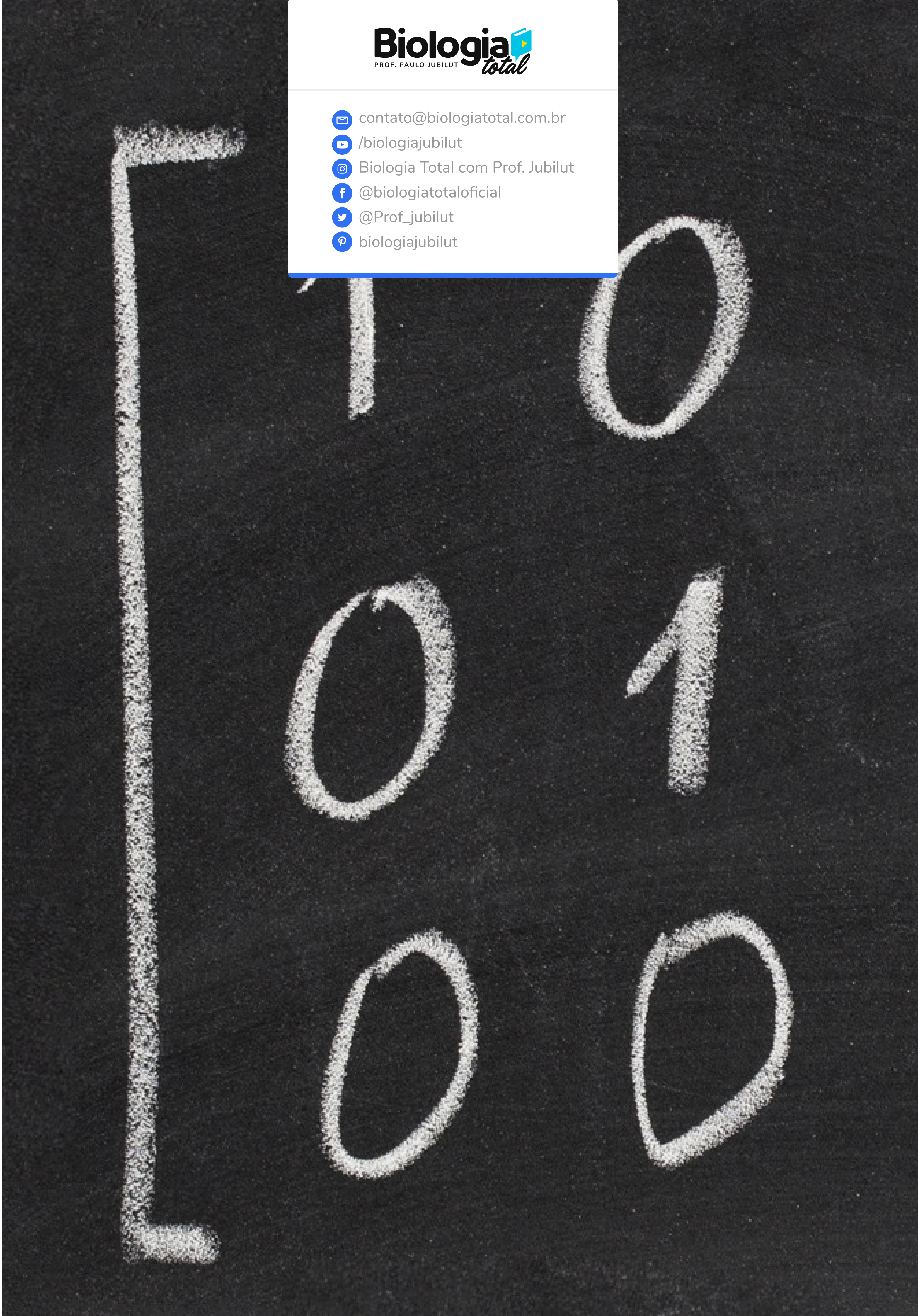
Portanto, n é par.

[II] **Falsa**. No exemplo $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ o produto AB é a matriz nula (não inversível) e $n=2$.

[III] **Verdadeira**. Se B for inversível, então o determinante de B é diferente de zero:

$(-1)^n = \dfrac{det(B^t)}{det(B)} = \dfrac{det(B)}{det(B)}1,$ portanto n é par.

ANOTAÇÕES


1 0
0 1
0 0