Aula 06

FUNÇÃO QUADRÁTICA

EPCAR - 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

1 – Introdução

A Função Quadrática é uma das funções mais importantes da nossa querida Matemática. Ressalto que seu gráfico descreve uma curva chamada de parábola, que serve, por exemplo, para descrever um lançamento de um objeto lançado obliquamente no ar.

Para sua prova, reconhecer uma função quadrática é muito importante, pois são nelas que se faz necessário os cálculos de máximos e mínimos da função.

2 –Função Quadrática

1 - Conceito

Uma função de reais em reais $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ é dita quadrática quando sua lei de formação é definida por:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Onde a,b,c são coeficientes, com $a\neq 0$.

Destaco que a função quadrática também pode ser chamada de função polinomial do 2º grau e que seu gráfico é representado por uma parábola.

Lembra da Função Afim? Pois é! Ela tem uma ligação direta com a equação do 1º grau.

A função quadrática, por sua vez, tem uma ligação direta com a equação do 2º grau. Assim, a solução de uma função quadrática também utiliza a fórmula de “Báskara” para encontrar as raízes.

$$f(x)=ax^2+bx+c \therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a};\Delta=b^2-4ac$$

2 – Raízes da Função Quadrática

Para encontrarmos as raízes de uma função quadrática da forma $f(x)=ax^2+bx+c,$ com $a\neq 0$, devemos fazer $f(x)=0$

Assim: $ax^2 + bx + c = 0$

Utilizando a fórmula de "Báskara", temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo:

a) Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Comentário:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4.(1).(6)$$
$$\Delta = 25 - 24$$
$$\Delta = 1$$

Logo:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2}$$

$x_1 = 3; x_2 = 2$

Perceba que, como o Δ possui valor maior que ZERO, a função terá duas raízes distintas.

---

b) Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Comentário:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(1)$$
$$\Delta = 4 - 4$$
$$\Delta = 0$$

Logo:

$$x = \frac{-(-2) \pm 0}{2}$$
$$x_1 = \frac{2-0}{2}$$

$$x_2 = \frac{2+0}{2}$$

$x_1 \ e \ x_2 = 2$

Perceba que, como o Δ possui valor igual a ZERO, a função terá suas raízes iguais.

---

c) Encontre as raízes da função $f(x) = x^2 + x + 3$

Comentário:

$$f(x) = x^2 + x + 3 = 0$$
$$x^2 + x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.(1).(3)$$
$$\Delta = 1 - 12$$
$$\Delta = -11 \ (negativo)$$

Logo:

A função não possui raiz real.

RELEMBRANDO ALGUNS PONTOS!

Existem algumas relações entre raízes que podem ser achadas utilizando os coeficientes da equação do 2º grau. Este tema cai muito em sua prova, então, **DECORE!!!**

Dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

- ✓ **Soma das raízes** $(x_1 + x_2)$

$$S = \frac{-b}{a}$$

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, possui como soma de raízes:

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow -\frac{-5}{1} = 5$$

Logo:

$x_1 + x_2 = 5$

- ✓ **Produto das raízes** $(x_1.x_2)$

$$P = \frac{c}{a}$$

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, possui como produto das raízes:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{6}{1} = 6$$

Logo:

$x_1.x_2 = 6$

- ✓ **Diferença das raízes** $(x_1 - x_2)$

$$D = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$$

O resultado estando em módulo significa que a diferença é sempre positiva, ou seja, da maior raiz para a menor raiz.

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, possui como diferença entre as raízes:

$$D=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{(-5)^2-4.(1).(6)}}{1}\right|\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{25-24}}{1}\right|\Rightarrow\frac{1}{1}=1$$

Logo: $|x_1-x_2|=1$

✓ **Média aritmética das raízes** $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

$$M_A=\frac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow\frac{-b}{2a}$$

Exemplo:

$x^2-5x+6=0,$ possui como média das raízes:

$$M_A=\frac{-b}{2a}\Rightarrow\frac{-(-5)}{2.(1)}\Rightarrow\frac{5}{2}=2,5$$

Logo:

$$M_A=2,5$$

✓ **Média geométrica das raízes** $(\sqrt{x_1.x_2})$

$M_G=\sqrt{x_1.x_2}\Rightarrow\sqrt{P},$ sendo $"P"$ o produto das raízes, ou seja, $P=\dfrac{c}{a}$

Exemplo:

$x^2-5x+6=0,$ possui como média geométrica das raízes:

$$M_G=\sqrt{P}\Rightarrow\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{6}{1}}=\sqrt{6}$$

Logo:

$$M_G=\sqrt{6}$$

✓ Soma dos inversos das raízes $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$

$$S_i=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}\Rightarrow\frac{S}{P}$$

Onde:

"S" é a soma e "P" é produto das raízes

Exemplo:

$x^2-5x+6=0,$ possui como soma dos inversos das raízes:

$$S_i=\frac{S}{P}\Rightarrow\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{a}.\frac{a}{c}=\frac{-b}{c}=\frac{-(-5)}{6}=\frac{5}{6}$$

Logo:

$$S_i=\frac{5}{6}$$

Soma dos inversos é DIFERENTE do inverso das somas, pois:

Inverso da soma:

$$\frac{1}{x_1+x_2}\Rightarrow\frac{1}{\frac{-b}{a}}\Rightarrow\frac{-a}{b}$$

Desta forma, temos como exemplo:

$x^2-5x+6=0$, possui como inverso da soma:

$$I_s=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{-a}{b}=\frac{-(1)}{-5}=\frac{1}{5}$$

É impossível descrever todas as possibilidades de cobrança de prova, no entanto, para quaisquer outras você já poderá intuitivamente encontrar a fórmula, a partir das operações soma / subtração / produto, combinadas com produtos notáveis e fatoração.

3 – Forma Fatorada da Função Quadrática

Uma função da forma $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$, que possua, por exemplo raízes x_1 e x_2, pode ser escrita na forma fatorada da seguinte maneira:

$$f(x)=a.(x-x_1).(x-x_2)$$

$f(x)\rightarrow$ função quadrática

$x\rightarrow$ variável real

$x_1,x_2\rightarrow$ raízes

Exemplo:

a) Escreva a função quadrática $f(x)=2x^2-6x+4$ na forma fatorada.

Comentário:

O primeiro passo deve ser achar as raízes. Logo:

$$2x^2-6x+4=0$$

$$\Delta=(-6)^2-4.(2).(4)$$
$$\Delta=36-32$$
$$\Delta=4$$

Assim:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{4}$$

$$x_1 = \frac{6-2}{4}$$

$$x_2 = \frac{6+2}{4}$$

$x_1 = 1; x_2 = 2$

Assim, a função $y = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada, é:

$$f(x) = 2(x-1).(x-2)$$

Nunca esqueça do coeficiente do termo dominante, ou seja, do “a”.

Outro ponto importante é que, ao colocar as raízes na forma fatorada, o sinal delas sempre irá trocar.

4 – Gráfico da Função Quadrática

Já sabemos que o gráfico de uma função polinomial do 2º grau é uma parábola.

Vejamos agora suas características:

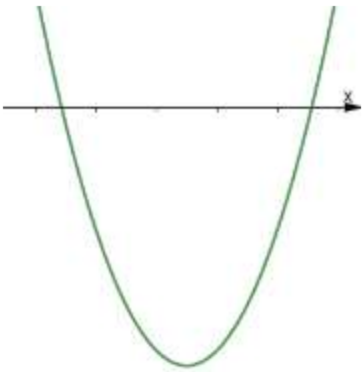
- ✓ **Concavidade da parábola:**

$a > 0$
$(positivo)$

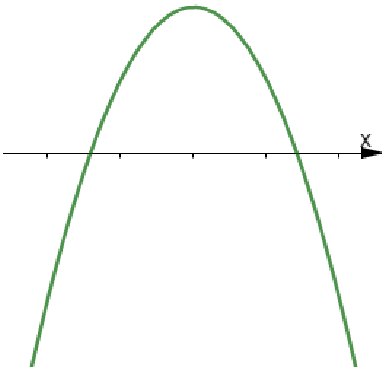
$a < 0$
$(negativo)$

✓ **Interseção do gráfico com o eixo OX:**

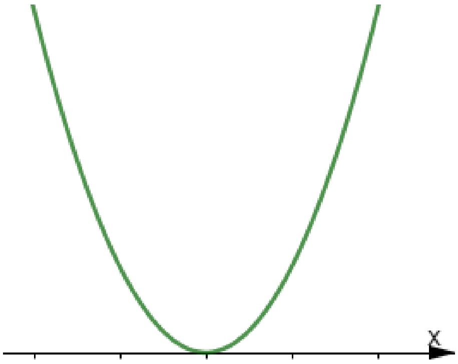
A quantidade de pontos de interseção será igual a quantidade de raízes reais da função. Veja:



$\Delta > 0; a > 0$
$(duas\ raízes)$

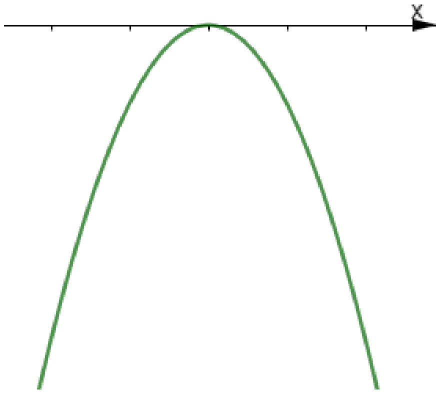


$\Delta > 0; a < 0$
$(duas\ raízes)$



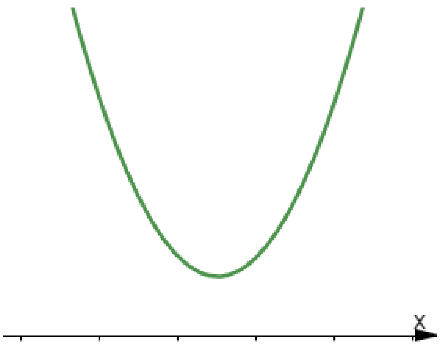
$\Delta = 0; a < 0$

$(uma\ raiz)$



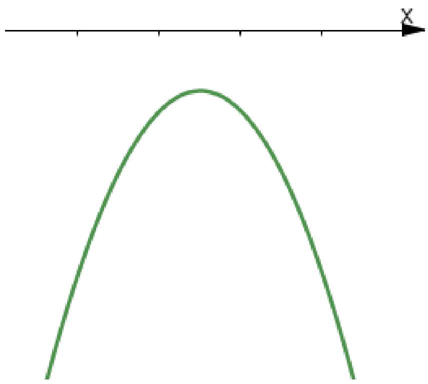
$\Delta = 0; a > 0$

$(uma\ raiz)$



$\Delta < 0; a > 0$

$(nenhuma\ raiz)$

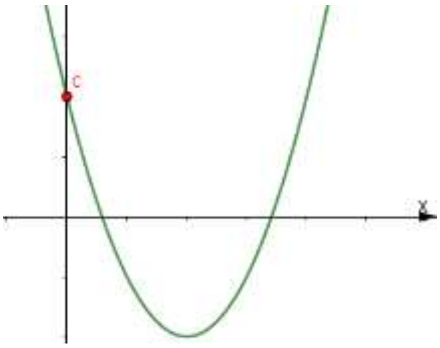


$\Delta < 0; a < 0$

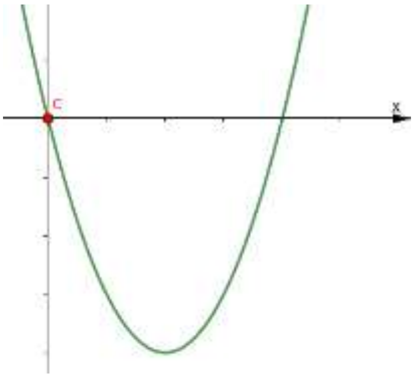
$(nenhuma\ raiz)$

✓ **Interseção do gráfico com o eixo OY:**

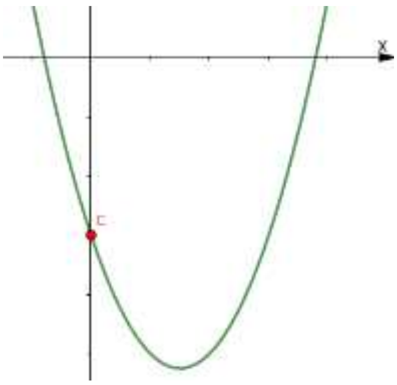
Esse ponto de interseção é responsável por representar o termo independente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ou seja, o "c". Veja:



$c > 0$



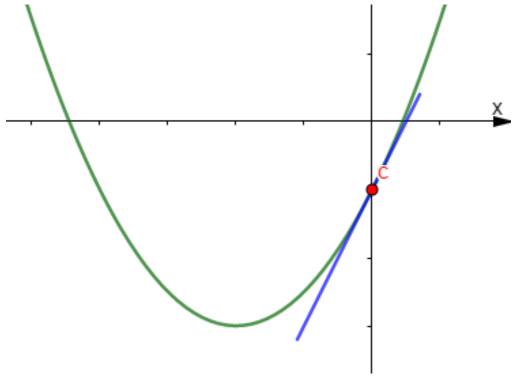
$c = 0$



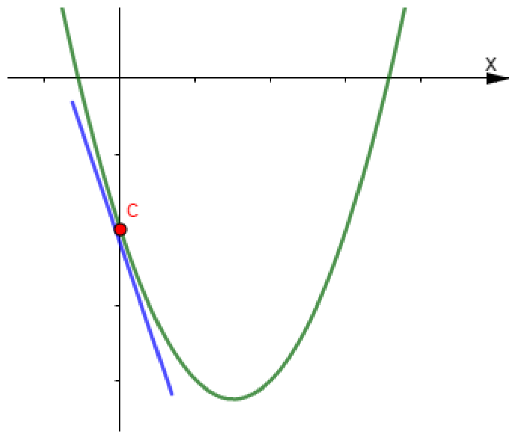
$c < 0$

✓ Sinal do coeficiente "b"

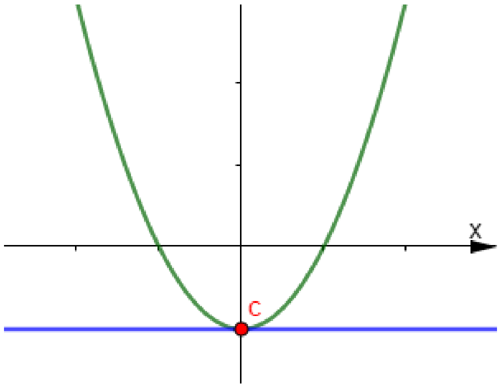
O sinal do coeficiente "b" está ligado à inclinação da reta tangente ao ponto "c". Veja:



Reta crescente, logo, $b > 0$



Reta decrescente, logo, $b < 0$

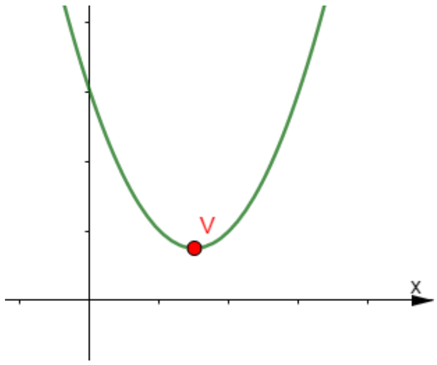


Reta sem inclinação, logo, $b = 0$

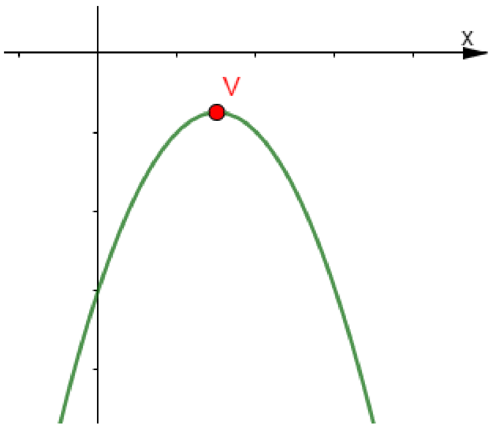
✓ **Vértice da parábola**

O vértice é o par ordenado mais baixo (se $a > 0$) e mais alto (se $a < 0$).

Observe:



$V \to$ ponto de mínimo $(a > 0)$

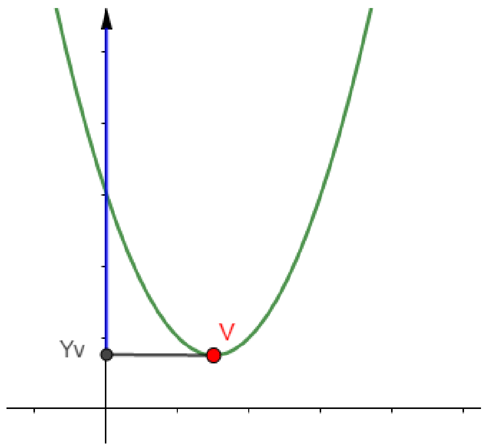


$V \to$ ponto de máximo $(a < 0)$

Perceba que se o $a > 0$, então a função possui um menor valor possível. Por outro lado, se $a < 0$, a parábola da função possuirá ponto de máximo, ou seja, a função possui valor maior possível.

5 – Valor de Máximo e Mínimo de Função

Se $a > 0$, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade voltada para cima. Nesse caso, é fácil constatar que existe um valor mínimo assumido por y, que coincide com a ordenada do vértice y_v. Essa ordenada é o valor mínimo da função.

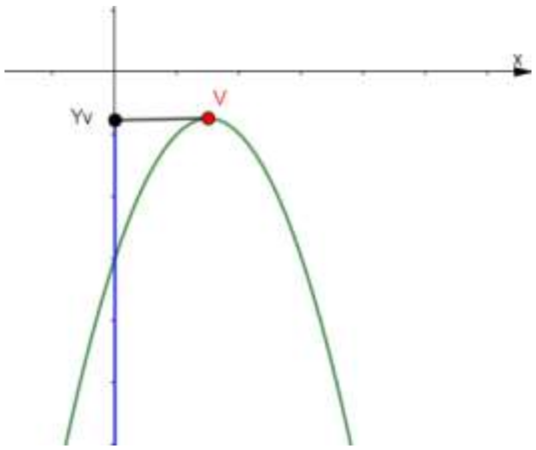


I) $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função.

II) A imagem (Im) da função é dada por:

$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

Se $a < 0$, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui convavidade voltada para baixo. Nesse caso, verificamos que existe um valor máximo assumido por y e, analogamente, dizemos que a ordenada do vértice y_v é o valor máximo da função.



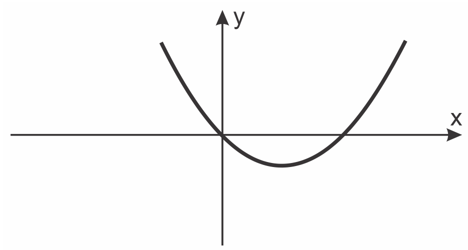
I) $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função.

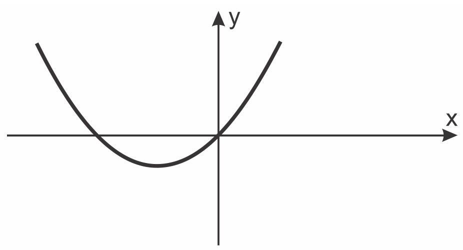
II) A imagem (Im) da função é dada por:

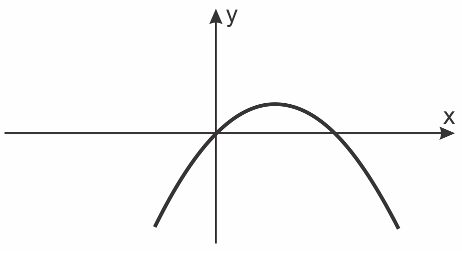
$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,/\, y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

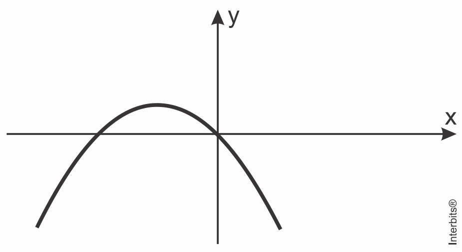
3 – Lista de Questões

1. (Unicamp 2019) Sejam a e b números reais positivos. Considere a função quadrática $f(x) = x(ax + b)$, definida para todo número real x. No plano cartesiano, qual figura corresponde ao gráfico de $y = f(x)$?

a) 

b) 

c) 

d) 

---

2. (Uemg 2017) Seja $p(x)$ um polinômio do 2º grau, satisfazendo as seguintes condições:

- -1 e 4 são raízes de $p(x)$.
- $p(5) = -12.$

O maior valor de x para o qual $p(x) = 8$ é
a) $0.$
b) $3.$
c) $6.$
d) $12.$

---

3. (Eear 2017) Seja a função $f(x) = 2x^2 + 8x + 5.$ Se $P(a, b)$ é o vértice do gráfico de $f,$ então $|a + b|$ é igual a
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

---

4. (col. naval 2017) Seja o número real x tal que $W = \frac{2x^2}{9} - \frac{\sqrt{6}}{6}x + 21.$ Sendo assim, qual o valor de x para que W seja mínimo?

a) $3\sqrt{6}$

b) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

c) $7\sqrt{9}$

d) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

e) $6\sqrt{6}$

---

5. (Fgv 2017) Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio.

Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é:

a) $430\ m^2$

b) $440\ m^2$

c) $460\ m^2$

d) $470\ m^2$

e) $450\ m^2$

---

6. (Ufjf-pism 1 2017) É correto afirmar sobre a função quadrática $y = -x^2 + 3x - 1$ que:

a) $f(x)$ é decrescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}.$

b) A concavidade é para cima.

c) $f(x)$ possui três zeros diferentes.

d) $f(x)$ tem como vértice o ponto $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right).$

e) O valor máximo de $f(x)$ é $\frac{5}{4}.$

---

7. (Ueg 2017) A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10,$ com x dado em horas.

A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de

a) $0\ °C$

b) $10\ °C$

c) $12\ °C$

d) $22\ °C$

e) $24\ °C$

---

8. (Pucrs 2017) O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c,$ com a base da montanha no eixo das abscissas.

Para que fique mais adequada essa representação, devemos ter

a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

e) $a < 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

---

9. (Ifal 2017) Em uma partida de futebol, um dos jogadores lança a bola e sua trajetória passa a obedecer à função $h(t) = 8t - 2t^2,$ onde h é a altura da bola em relação ao solo medida em metros e t é o intervalo de tempo, em segundos, decorrido desde o instante em que o jogador chuta a bola. Nessas condições, podemos dizer que a altura máxima atingida pela bola é

a) $2\ m.$

b) $4\ m.$

c) $6\ m.$

d) $8 \text{ m}.$

e) $10 \text{ m}.$

---

10. (Efomm 2016) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625

b) 781150

c) 1000

d) 250

e) 375

---

11. (Espm 2016) O lucro (em reais) obtido com a produção e venda de x unidades de um certo produto é dado pela função $L = k \cdot (x + 10) \cdot (x - 50)$, onde k é uma constante negativa. Podemos avaliar que o maior lucro possível será obtido para x igual a:

a) 24

b) 22

c) 15

d) 20

e) 18

---

12. (Ifal 2016) Analisando a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x + 12$, podemos afirmar que seu valor mínimo é

a) $12.$

b) $4.$

c) $0.$

d) $-4.$

e) $-12.$

---

13. (Ufjf-pism 1 2016) Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valor máximo igual a $2,$ em $x = 3.$ Sabendo-se que 0 é raiz da função $f,$ então $f(5)$ é igual a:

a) $-\frac{2}{9}$

b) 0

c) 1

d) $\frac{10}{9}$

e) $\frac{4}{3}$

---

14. (Ifsul 2016) Considere o movimento de um corpo atirado ou jogado verticalmente para cima, sendo modelado de acordo com a equação $y = -20x^2 + 50x,$ em que y representa a altura, em metros, alcançada por esse corpo em x segundos depois de ser arremessado.

Dessa forma, a altura máxima atingida por esse corpo e o tempo em que permanece no ar, respectivamente, são

a) $31,25\text{ m}$ e $2,5\text{ s}.$

b) $1,25\text{ m}$ e $2,5\text{ s}.$

c) $31,25\text{ m}$ e $1,25\text{ s}.$

d) $2,5\text{ m}$ e $1,25\text{ s}.$

---

15. (Ifce 2016) A soma dos quadrados das coordenadas do vértice da parábola de equação $y = x^2 - 6x + 8$ é igual a

a) 10.

b) 20.

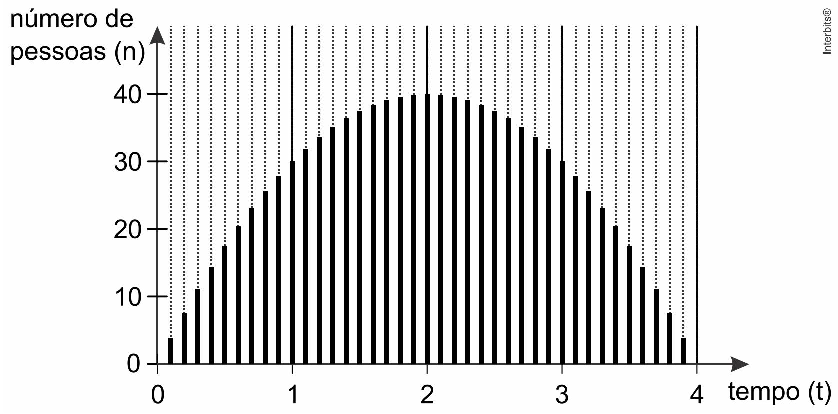
c) 2.

d) 36.

e) 14.

---

16. (Insper 2015) O número n de pessoas presentes em uma festa varia ao longo do tempo t de duração da festa, em horas, conforme mostra o gráfico a seguir.



Das opções abaixo, aquela que melhor descreve a função $n(t)$ é

a) $n(t) = -10t^2 + 4t + 50.$

b) $n(t) = -10t^2 + 40t + 50.$

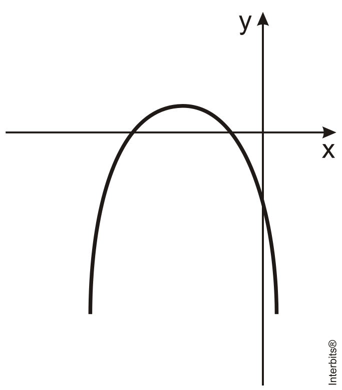
c) $n(t) = -10t^2 + 4t.$

d) $n(t) = -t^2 + 40t.$

e) $n(t) = -10t^2 + 40t.$

---

17. (Unifor 2014) Na figura abaixo, temos a representação geométrica do gráfico de uma parábola, cuja equação é $y = ax^2 + bx + c.$



Para esta parábola representada no gráfico abaixo, os sinais dos produtos $a \cdot b$, $a \cdot c$ e $b \cdot c$ são, respectivamente

a) negativo, negativo e positivo.

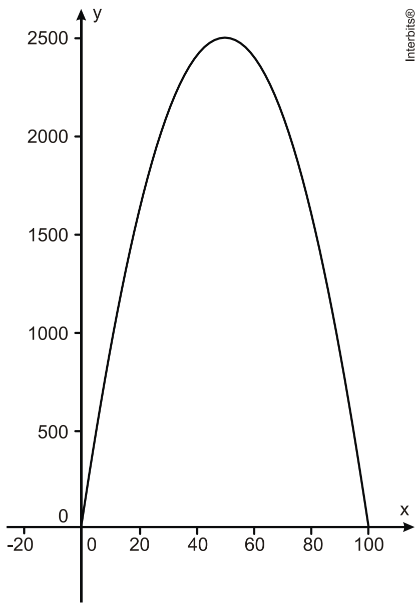
b) negativo, positivo e negativo.

c) negativo, negativo e negativo.

d) positivo, positivo e positivo.

e) positivo, negativo e negativo.

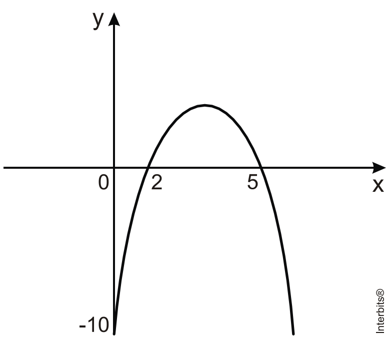
18. (Ifsc 2012) A receita obtida pela venda de um determinado produto é representada pela função $R(x) = -x^2 + 100x$, onde x é a quantidade desse produto. O gráfico da referida função é apresentado abaixo.



É **CORRETO** afirmar que as quantidades a serem comercializadas para atingir a receita máxima e o valor máximo da receita são, respectivamente,

a) 50 e 2.000.
b) 25 e 2.000.
c) 100 e 2.100.
d) 100 e 2.500.
e) 50 e 2.500.

19. (Uern 2012) Seja uma função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico está representado a seguir.



A soma dos coeficientes dessa função é

a) – 2.
b) – 3.
c) – 4.
d) – 6.

---

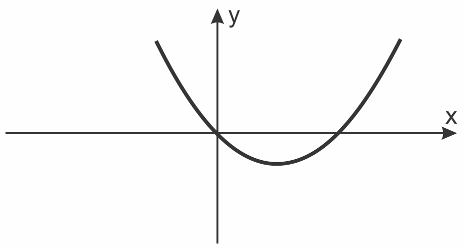
20. (Cftmg 2012) Na função $f:\{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x^2 + 2x - 5$,
a) o domínio de f(x) é $\mathbb{Z}$.
b) a imagem de x = –1 é igual a –2.
c) o conjunto imagem de f(x) é {0, 1, 2, 3}.
d) o conjunto imagem de f(x) é {–5, –2, 3, 10}.

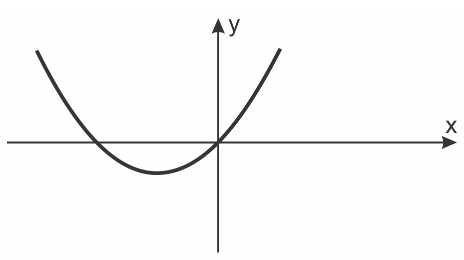
---

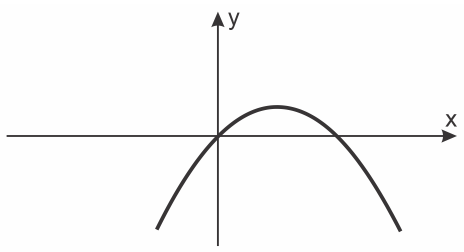
21. (Ifce 2011) Sabendo-se que a expressão $ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, é positiva, para qualquer x real, é correto afirmar-se que
a) $a > 0$ e $b^2 > 4ac$.
b) $a > 0$ e $b^2 < 4ac$.
c) $a < 0$ e $b^2 > 4ac$.
d) $a < 0$ e $b^2 < 4ac$.
e) $a < 0$ e $b^2 \leq 4ac$.

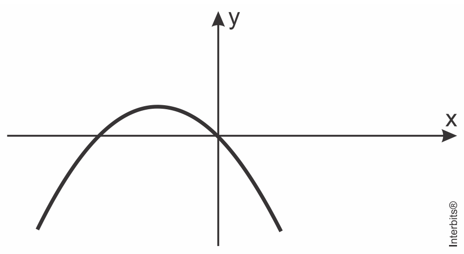
4 – Questões Comentadas

1. (Unicamp 2019) Sejam a e b números reais positivos. Considere a função quadrática $f(x) = x(ax + b)$, definida para todo número real x. No plano cartesiano, qual figura corresponde ao gráfico de $y = f(x)$?

a) 

b) 

c) 

d) 

Comentário:

Reescrevendo a lei de f, temos

$$f(x) = a(x-0)\left(x+\frac{b}{a}\right).$$

Sendo a e b reais positivos, podemos concluir que o gráfico de f tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em $x=0$ e $x=-\frac{b}{a}<0.$

A resposta é o gráfico da alternativa [B].

Gabarito: B

---

2. (Uemg 2017) Seja $p(x)$ um polinômio do 2º grau, satisfazendo as seguintes condições:

- -1 e 4 são raízes de $p(x).$
- $p(5)=-12.$

O maior valor de x para o qual $p(x)=8$ é

a) $0.$

b) $3.$

c) $6.$

d) $12.$

Comentário:

Tem-se que

$-12=a\cdot(5+1)\cdot(5-4)\Leftrightarrow a=-2.$

Desse modo, vem

$p(x)=-2\cdot(x+1)\cdot(x-4)=-2x^2+6x+8.$

Portanto, se $p(x)=8,$ então

$-2x^2+6x+8=8\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3.$

A resposta é $x=3.$

Gabarito: B

---

3. (Eear 2017) Seja a função $f(x)=2x^2+8x+5.$ Se $P(a,b)$ é o vértice do gráfico de $f,$ então $|a+b|$ é igual a

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

Comentário:

Escrevendo a lei de f na forma canônica, encontramos $f(x)=2(x+2)^2-3.$ Daí, vem $(a,b)=(-2,-3)$ e, portanto, $|a+b|=|-2-3|=5.$

Gabarito: A

---

4. (col. naval 2017) Seja o número real x tal que $W=\frac{2x^2}{9}-\frac{\sqrt{6}}{6}x+21.$ Sendo assim, qual o valor de x para que W seja mínimo?

a) $3\sqrt{6}$

b) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

c) $7\sqrt{9}$

d) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

e) $6\sqrt{6}$

Comentário:

Sabemos que w é uma função do segundo grau na variável x real, portanto, o valor de x para o qual w é mínimo será dado por:

$$x = -\frac{b}{2\cdot a} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{6}}{2\cdot\frac{2}{9}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{9}{4} = -\frac{3\cdot\sqrt{6}}{8}$$

Gabarito: B

---

5. (Fgv 2017) Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio.

Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é:

a) $430\ m^2$

b) $440\ m^2$

c) $460\ m^2$

d) $470\ m^2$

e) $450\ m^2$

Comentário:

Calculando:

$$y + 2x = 60 \Rightarrow y = 60 - 2x$$

$$S_{retângulo} = x\cdot y = x\cdot(60-2x) = 60x - 2x^2$$

$$x_{máx} = \frac{-60}{2\cdot(-2)} \Rightarrow x_{máx} = 15 \Rightarrow y_{máx} = 30$$

$$S_{retângulo} = 15\cdot 30 = 450\ m^2$$

Gabarito: E

---

6. (Ufjf-pism 1 2017) É correto afirmar sobre a função quadrática $y=-x^2+3x-1$ que:

a) $f(x)$ é decrescente para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

b) A concavidade é para cima.

c) $f(x)$ possui três zeros diferentes.

d) $f(x)$ tem como vértice o ponto $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

e) O valor máximo de $f(x)$ é $\frac{5}{4}$.

Comentário:

A função dada será uma parábola com concavidade para baixo, crescente até o vértice e com duas raízes. Seu vértice tem coordenadas:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \to x_V = \frac{3}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{3^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)}{4a} \to y_V = f_{máx}(x) = \frac{5}{4}$$

Gabarito: E

---

7. (Ueg 2017) A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12}+2x+10,$ com x dado em horas.

A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de

a) $0\,°C$

b) $10\,°C$

c) $12\,°C$

d) $22\,°C$

e) $24\,°C$

Comentário:

Reescrevendo a lei de f sob a forma canônica, vem

$$f(x) = -\frac{1}{12}(x^2-24x)+10 = -\frac{1}{12}(x-12)^2+22.$$

Portanto, segue que a temperatura máxima é atingida após 12 horas, correspondendo a $22\,°C$.

Gabarito: D

8. (Pucrs 2017) O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c,$ com a base da montanha no eixo das abscissas.

Para que fique mais adequada essa representação, devemos ter

a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

e) $a < 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

Comentário:

Desde que a parábola apresenta concavidade para baixo e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, temos $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0.$

Gabarito: D

9. (Ifal 2017) Em uma partida de futebol, um dos jogadores lança a bola e sua trajetória passa a obedecer à função $h(t) = 8t - 2t^2,$ onde h é a altura da bola em relação ao solo medida em metros e t é o intervalo de tempo, em segundos, decorrido desde o instante em que o jogador chuta a bola. Nessas condições, podemos dizer que a altura máxima atingida pela bola é

a) $2\text{ m}.$

b) $4\text{ m}.$

c) $6\text{ m}.$

d) $8\text{ m}.$

e) $10\text{ m}.$

Comentário:

Para obter a altura máxima basta obter o valor do vértice y_V da função $h(t)$. Logo,

$$V=(x_V;y_V)=\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$$
$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$$
$$\Delta=8^2-4\cdot(-2)\cdot(0)$$
$$\Delta=64$$
$$V=\left(\frac{-8}{2\cdot(-2)};\frac{-64}{4\cdot(-2)}\right)=(2;8)$$

A altura máxima é 8 m.

Gabarito: D

---

10. (Efomm 2016) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L=R-C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x)=x^2-500x+100$ e a receita representada por $R(x)=2000x-x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625
b) 781150
c) 1000
d) 250
e) 375

Comentário:

De acordo com as informações, temos:

$$L(x)=2000x-x^2-(x^2-500x+100)$$
$$=-2x^2+2500x-100.$$

Por conseguinte, o lucro é máximo quando $x=-\dfrac{2500}{2\cdot(-2)}=625.$

Gabarito: A

---

11. (Espm 2016) O lucro (em reais) obtido com a produção e venda de x unidades de um certo produto é dado pela função $L = k \cdot (x + 10) \cdot (x - 50)$, onde k é uma constante negativa. Podemos avaliar que o maior lucro possível será obtido para x igual a:

a) 24
b) 22
c) 15
d) 20
e) 18

Comentário:

Desde que $x = -10$ e $x = 50$ são as raízes da função L, podemos afirmar que o maior lucro possível será obtido para x igual a $\frac{-10 + 50}{2} = 20.$

Gabarito: D

---

12. (Ifal 2016) Analisando a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x + 12$, podemos afirmar que seu valor mínimo é

a) 12.
b) 4.
c) 0.
d) -4.
e) -12.

Comentário:

O valor mínimo da função é igual à coordenada y do vértice, pois $a > 0$, ou seja:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left((-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12\right)}{4 \cdot 1} = \frac{-16}{4} \rightarrow y_V = -4$$

Gabarito: D

---

13. (Ufjf-pism 1 2016) Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valor máximo igual a 2, em $x = 3$. Sabendo-se que 0 é raiz da função f, então $f(5)$ é igual a:

a) $-\frac{2}{9}$
b) 0
c) 1

d) $\frac{10}{9}$

e) $\frac{4}{3}$

Comentário:

A forma canônica de f é $f(x) = a \cdot (x-k)^2 + m,$ com (k, m) sendo as coordenadas do vértice do gráfico de $f.$ Logo, temos $0 = a \cdot (0-3)^2 + 2,$ implicando em $a = -\frac{2}{9}.$ Portanto, a resposta é $f(5) = -\frac{2}{9} \cdot (5-3)^2 + 2 = \frac{10}{9}.$

Gabarito: D

---

14. (Ifsul 2016) Considere o movimento de um corpo atirado ou jogado verticalmente para cima, sendo modelado de acordo com a equação $y = -20x^2 + 50x,$ em que y representa a altura, em metros, alcançada por esse corpo em x segundos depois de ser arremessado.

Dessa forma, a altura máxima atingida por esse corpo e o tempo em que permanece no ar, respectivamente, são

a) $31{,}25\text{ m}$ e $2{,}5\text{ s}.$

b) $1{,}25\text{ m}$ e $2{,}5\text{ s}.$

c) $31{,}25\text{ m}$ e $1{,}25\text{ s}.$

d) $2{,}5\text{ m}$ e $1{,}25\text{ s}.$

Comentário:

Calculando:

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \cdot (-20)} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \rightarrow 1{,}25\text{ s para subir} + 1{,}25\text{ s para descer} = 2{,}5\text{ s no ar}$$

$$y_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{50^2 - 4 \cdot (-20) \cdot 0}{4 \cdot (-20)} = \frac{2500}{80} = \frac{250}{8} = 31{,}25\text{ m}$$

Gabarito: A

---

15. (Ifce 2016) A soma dos quadrados das coordenadas do vértice da parábola de equação $y = x^2 - 6x + 8$ é igual a

a) 10.

b) 20.

c) 2.

d) 36.

e) 14.

Comentário:

$$x_V = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{(-6)}{2\cdot 1} = 3$$
$$y_V = -\frac{\Delta}{4\cdot a} = -\frac{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 8}{4\cdot 1} = -\frac{4}{4} = -1$$

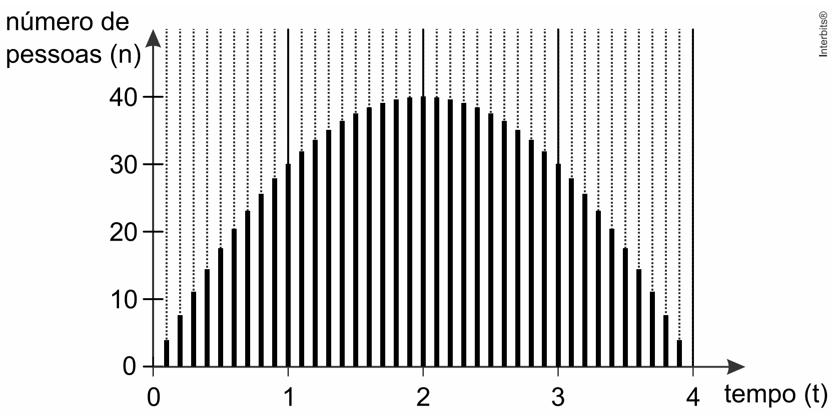
Portanto,

$$(x_V)^2 + (y_V)^2 = 3^2 + (-1)^2 = 10$$

Gabarito: A

---

16. (Insper 2015) O número n de pessoas presentes em uma festa varia ao longo do tempo t de duração da festa, em horas, conforme mostra o gráfico a seguir.



Das opções abaixo, aquela que melhor descreve a função $n(t)$ é

a) $n(t) = -10t^2 + 4t + 50.$

b) $n(t) = -10t^2 + 40t + 50.$

c) $n(t) = -10t^2 + 4t.$

d) $n(t) = -t^2 + 40t.$

e) $n(t) = -10t^2 + 40t.$

Comentário:

Seja $n: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a função dada por $n(t) = a\cdot(t - t_1)\cdot(t - t_2),$ com t_1 e t_2 sendo os zeros da função $n.$ Logo, sabendo que $t_1 = 0,$ $t_2 = 4$ e $(2, 40)$ pertence ao gráfico de $n,$ vem

$$40 = a\cdot(2-0)(2-4) \Leftrightarrow a = -10.$$

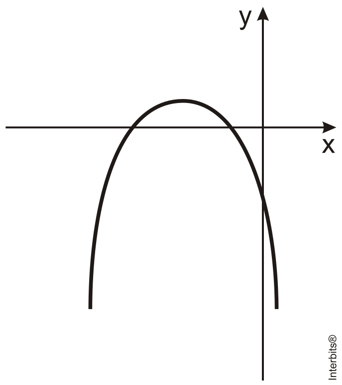
Portanto, a lei de n é

$n(t) = -10 \cdot (t-0)(t-4) = -10t^2 + 40t.$

Gabarito: E

---

17. (Unifor 2014) Na figura abaixo, temos a representação geométrica do gráfico de uma parábola, cuja equação é $y = ax^2 + bx + c.$



Para esta parábola representada no gráfico abaixo, os sinais dos produtos $a \cdot b$, $a \cdot c$ e $b \cdot c$ são, respectivamente

a) negativo, negativo e positivo.
b) negativo, positivo e negativo.
c) negativo, negativo e negativo.
d) positivo, positivo e positivo.
e) positivo, negativo e negativo.

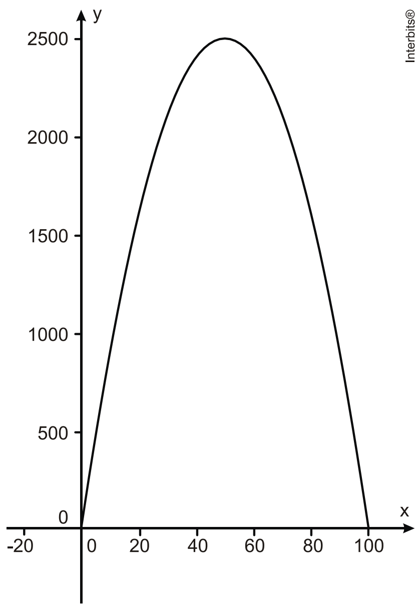
Comentário:

Como a parábola tem concavidade para baixo e intersecta o eixo das ordenadas em um ponto de ordenada negativa, temos $a < 0$ e $c < 0.$ Além disso, a abscissa do vértice também é negativa. Daí, só pode ser $b < 0.$ Em consequência, $a \cdot b > 0,$ $a \cdot c > 0$ e $b \cdot c > 0.$

Gabarito: D

---

18. (Ifsc 2012) A receita obtida pela venda de um determinado produto é representada pela função $R(x) = -x^2 + 100x$, onde x é a quantidade desse produto. O gráfico da referida função é apresentado abaixo.



É **CORRETO** afirmar que as quantidades a serem comercializadas para atingir a receita máxima e o valor máximo da receita são, respectivamente,

a) 50 e 2.000.

b) 25 e 2.000.

c) 100 e 2.100.

d) 100 e 2.500.

e) 50 e 2.500.

Comentário:

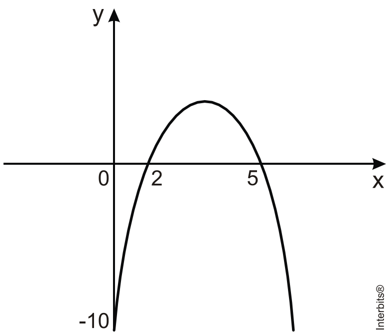
A quantidade comercializada para se ter a receita máxima é o x do vértice e a receita máxima corresponde ao y do vértice.

$$x_V = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{(-100)}{2 \cdot (-1)} = 50.$$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{100^2}{4 \cdot (-1)} = 2500.$$

Gabarito: E

19. (Uern 2012) Seja uma função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico está representado a seguir.



A soma dos coeficientes dessa função é

a) – 2.

b) – 3.

c) – 4.

d) – 6.

Comentário:

Do gráfico, temos que os zeros da função quadrática são 2 e 5. Logo, a lei da função é dada por $y = a \cdot (x-2) \cdot (x-5)$, com $a \in \mathbb{R}^*$. Então, como a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -10)$, segue que

$$-10 = a \cdot (0-2) \cdot (0-5) \Leftrightarrow a = -1.$$

Portanto, $y = -(x-2) \cdot (x-5)$ e a soma pedida é igual a $-(1-2) \cdot (1-5) = -4.$

Gabarito: C

---

20. (Cftmg 2012) Na função $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x^2 + 2x – 5$,

a) o domínio de f(x) é $\mathbb{Z}$.

b) a imagem de x = –1 é igual a –2.

c) o conjunto imagem de f(x) é {0, 1, 2, 3}.

d) o conjunto imagem de f(x) é {–5, –2, 3, 10}.

Comentário:

$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 – 5 = –5$

$f(1) = 1^2 + 21 – 5 = –2$

$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 3$

$f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10$

Logo, o conjunto imagem de f(x) é $\{-5, -2, 3, 10\}$.

Gabarito: D

21**.** (Ifce 2011) Sabendo-se que a expressão $ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, é positiva, para qualquer x real, é correto afirmar-se que

a) $a > 0$ e $b^2 > 4ac$.

b) $a > 0$ e $b^2 < 4ac$.

c) $a < 0$ e $b^2 > 4ac$.

d) $a < 0$ e $b^2 < 4ac$.

e) $a < 0$ e $b^2 \leq 4ac$.

Comentário:

Se $ax^2 + bx + c > 0$ para qualquer x real, então devemos ter $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$ e $a > 0$.

Gabarito: B
