



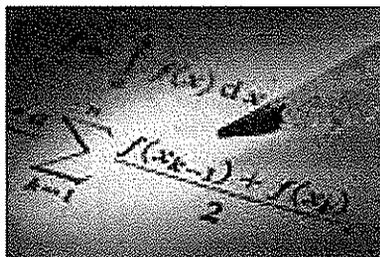
CURSO PREPARATÓRIO
CIDADE
www.cursocidade.com.br

SCLN 113, Bloco "C" - Salas 207 a 210 - Telefones: (61) 3340-0433 / 8175-4509 / 9975-4464 - E-mail: cursocidade@iic.pro.br

ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO EXÉRCITO

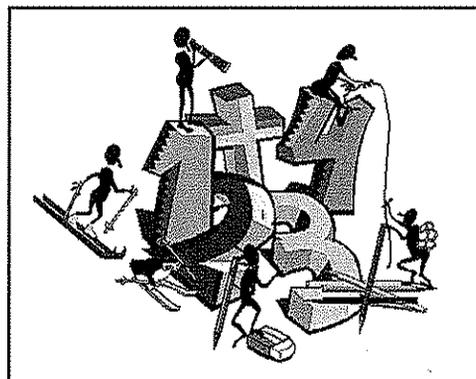
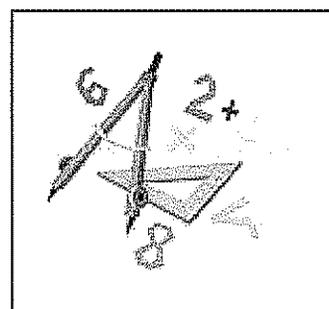


MATEMÁTICA



MATEMÁTICA 1

CADERNO 1



E Q U I P E

Diretor Geral
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Diretora Executiva
Clara Marisa May

Diretor de Artes
Fabiano Rangel Cidade

Coordenação Geral dos Cursos Preparatórios
Francisco Gerden

Coordenação dos Cursos de Idiomas EAD
Dr. Daniel Soares Filho

Secretaria
Mariana Ramos

Editoração Gráfica
Edilva de Lima

Fonoaudióloga e Psicopedagoga
Mariana Fernandes Ramos – CRFa 12482-RJ/T-DF

Assessoria Jurídica
Luiza May Schmitz – OAB/DF – 24.164

Assessoria de Línguas Extranjeiras
Cleide Thieves (Poliglota-EEUU)
João Jorge Gonçalves (Poliglota-Europa)

Equipe de Professores

Idiomas
Luiz Cidade – Espanhol
Daniel Soares Filho – Espanhol (EAD)
Cleide Thieves – Inglês, Francês, Espanhol, Alemão (EAD)
João Jorge Gonçalves – Inglês, Francês Espanhol e Português
Leonardo dos Santos – Espanhol
Diego Fernandes – Espanhol
Márcia Mattos da Silva – Francês (EAD)
Marcos Henrique – Francês
Maristella Mattos Silva – Espanhol (EAD)
Monike Rangen Cidade – Espanhol (EAD)
Cacilda Leal do Nascimento – Espanhol
Mariana Ramos – Inglês (EAD)

Concursos
Cassia Braga – Português
Maria Antônia – Redação
Murilo Roballo – Matemática
Sormany Fernandes – História do Brasil
Francisco Roges – Geografia
Gerdean – Química
Gustavo Porto – História
Luiz Fernando – Português
Thiago Magalhães – Física

Os direitos autorais desta obra são reservados e protegidos pela Lei nº 9.610, de 19 Fev 98.
É proibida a reprodução de qualquer parte deste livro, sem autorização prévia expressa por escrito do Autor e da Editora, por quaisquer meios empregados, sejam eletrônicos, mecânicos, videográficos, fonográficos, reprográficos, microfilmicos, fotográficos, gráficos ou outros. Essas proibições aplicam-se também à editoração da obra, bem como às suas características gráficas.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, meu agradecimento especial e minha consideração a dois professores extraordinários – aqueles que me levaram a gostar de ensinar com excelência - Tide e Euzébio Cidade. (Olá, Mamãe e Papai!)

Um agradecimento sincero aos meus queridos alunos e minha excelente e dedicada equipe de professores, profissionais de qualidade ímpar que reúnem as qualidades de verdadeiros líderes na arte de educar, com desempenhos de incomensuráveis valores pedagógicos, reconhecidos por todos os alunos que passaram por nossa escola.

Finalizando um agradecimento muito especial a professora Márcia Mattos, que com dedicação e esmero auxiliou na confecção deste caderno de Prática Auditiva em Francês que apresenta as questões necessárias e fundamentais para um adestramento simples, rápido e eficaz para a prova de Credenciamento Linguístico. Esperamos que utilize esta obra, exercitando com dedicação cada item apresentado e pesquisando àqueles que apresentaram maior grau de dificuldade. Traga para a aula as questões cuja resposta não consiga encontrar ou envie-as por e-mail para seu tutor, caso seja aluno do curso presencial.

Aceite nossa companhia nesta viagem de treinamento rumo à seu Credenciamento Linguístico.

Bons Estudos!!

Luiz Cidade
Diretor

1 - Potencias e Raízes	7
2 - Fatoração	12
3 - Conjuntos	17
4 - Conjuntos numéricos	23
5 - Funções	30
6 - Composição de funções	41
7 - Função afim	47
8 - Função quadrática	55
9 - Inequações	64
10 - Gabarito	74

1.1 Potenciação

Seja um número real a e um número natural n , com $n \geq 2$, $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$ em que, a é a base e n é o expoente o resultado é a potência e a operação é a potenciação.

1.2 Propriedades da potenciação.

a) $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

b) $a^1 = a$

c) $1^n = 1$

d) $0^n = 0$ ($a \neq 0$)

e) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ($m, n \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$)

f) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ($a \neq 0$)

g) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

h) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)

i) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

j) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)

1.3 Raiz n - ésima

A raiz n -ésima de um número x , é definido com um número a , tal que $a^n = x$ em que $n \geq 1$ e natural,

$$\sqrt[n]{x} = a \Leftrightarrow a^n = x$$

O número x é o radicando, n é o, índice, x e o valor da raiz e a operação é a radiciação.

exs:

$$\sqrt{121} = 11$$

$$\sqrt[3]{0,001} = 0,1$$

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

1.4 Propriedades da radiciação.

a) $\sqrt[n]{a^n} \begin{cases} a, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ |a|, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

ex: $\sqrt{a^2} = |a|$

b) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

c) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$, $a > 0$ e $b > 0$

d) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

e) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

f) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$



Exercícios Comentados

01 Calcule o valor da expressão

$$E = \frac{3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 + 3^{-1}}{(-3)^3 + (-3)^2 + (-3)^1 + (-3)^0 + (-3)^{-1}}$$

Resolução:

$$E = \frac{27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3}}{-27 + 9 - 3 + 1 - \frac{1}{3}}$$

$$E = \frac{40 + \frac{1}{3}}{-20 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{120 + 1}{3}}{\frac{-60 - 1}{3}} = \frac{\frac{121}{3}}{\frac{-61}{3}}$$

$$E = -\frac{121}{61}$$

02 Sendo n inteiro, calcule o valor da expressão:
 $E = (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+3} + (-1)^{n(n+1)}$

Resolução:

$2n$ é par: $2n + 1$ e $2n + 3$ são ímpares e $n(n+1)$ é par pois é o produto de dois inteiros consecutivos (um dos fatores é par) e todo produto de inteiros que tem pelo menos um fato par é par.

$$E = (-1)^{par} + (-1)^{impar} + (-1)^{impar} + (-1)^{par}$$

$$E = 1 - 1 - 1 + 1$$

$$E = 0$$

03 (Ibmec-SP) Os astrônomos estimam que, no universo visível, existem aproximadamente 100 bilhões de galáxias, cada uma com 100 bilhões de estrelas. De acordo com estes números, se cada estrela tiver, em média, 10 planetas a sua volta, então existem no universo visível aproximadamente

- a) 10^{12} planetas
- b) 10^{17} planetas
- c) 10^{23} planetas
- d) 10^{121} planetas
- e) 10^{220} planetas

Resolução:

De acordo com o enunciado, o número visível de planetas no universo é aproximadamente 10 vezes 100 bilhões vezes 100 bilhões =

$$= 10 \cdot 10^2 \cdot 10^9 \cdot 10^2 \cdot 10^9 = 10^{23}$$

04 (Fuvest-SP) Calcule $\sqrt[3]{\frac{2^{28} + 2^{30}}{10}}$

Resolução:

$$\sqrt[3]{\frac{2^{28} + 2^{28} \cdot 2^2}{10}} = \sqrt[3]{\frac{2^{28}(1+4)}{10}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2^{28} \cdot 5}{10}} = \sqrt[3]{\frac{2^{28}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{2^{27}} = 2^9 = 512$$

05 Calcule a quantidade de algarismo do número $2^{100} \cdot 5^{96}$

Resolução: $2^{96} \cdot 2^4 \cdot 5^{96}$

$$2^4 \cdot 2^{96} \cdot 5^{96}$$

$$16 \cdot 10$$

$$16 \underbrace{00 \dots 0}_{96 \text{ zeros}}$$

96 zeros

Logo, o número possui 98 algarismos.



Exercícios de Sala

01 Simplificar a expressão:

$$E = \frac{x^{3^2} - x^{2^3} + (x^2)^3 + (x^3)^2}{x^3 - x^2 + 2}$$

02 Qual dentre os números a seguir é o maior?

- a) 3^{45}
- b) 9^{20}
- c) 27^{14}
- d) 243^9
- e) 81^{12}

03 (Unesp-BA) O diâmetro de certa bactéria é $2 \cdot 10^{-6}$ metros. Enfileirando-se x dessas bactérias, obtém-se o comprimento de 1 mm. O número x é igual a:

- a) 10.000
- b) 5.000
- c) 2.000
- d) 1.000
- e) 500

04 Se x e y são dois números inteiros, estritamente positivo e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um inteiro ímpar?

- a) $2x + 3y$
- b) $3x + 2y$
- c) $xy + 1$
- d) $2xy + 2$
- e) $x + y + 1$

05 (Mackenzie-SP) Qualquer que seja o natural n ,

$(2^{n+1} + 2^n) \cdot (3^{n+1} - 3^n) \div 6^n$ é sempre igual a:

- a) 6^n
- b) 6^{n+1}
- c) $\frac{1}{6}$
- d) 1
- e) 6

06 (FGV - SP) Sendo $a^{2x} = 3$, o valor da expressão

$$A = \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} \text{ é:}$$

a) $\frac{7}{5}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{3}{2}$

07 (UFPB) A expressão $2\sqrt{27} - \sqrt{75} + 3\sqrt{12}$ é igual a:

a) $2\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{12}$

c) $4\sqrt{27}$

d) $7\sqrt{3}$

e) nenhuma das respostas

08 (Vunesp) A expressão $\sqrt{0,25} + 16^{\frac{3}{4}}$ equivale a:

a) 1,65

b) 1,065

c) 0,825

d) 0,625

e) 0,255

09 (Fuvest - SP)

a) Qual a metade de 2^{22} ?

b) Calcule $\frac{2}{8^3} + 9^{0,5}$.

10 (Fuvest - SP) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é igual a:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$



Exercícios de Casa

01 Escreva numa só potência:

a) $5^2 \cdot 5^7 \cdot 5^4$

b) $\frac{3^{12}}{3^{17}}$

c) $(2^2)^3$

d) 2^{2^3}

e) $(2^3)^2$

f) 2^{3^2}

g) $\frac{3^5 \cdot 3^7}{2 \cdot 2^{11}}$

h) $\frac{4^5 \cdot 8^5}{16^3}$

i) $\frac{(3a^2)^5 \cdot (9a^4)^2 \cdot (b^3)^5}{(27a^2)^3 \cdot (b^5)^3}$

02 (F.Osvaldo Cruz - SP) Se k é um número inteiro e positivo, então $y = (-1)^k + (-1)^{k+1}$ é:

a) 2

b) 1

c) 0

d) -1

e) dependente de k

03 (UFPel - RS) Simplificando-se $(2^4)^{3^2}$ obtém-se:

a) 8^6

b) 2^{24}

c) 16^9

d) 2^{35}

e) 2^{12^2}

04 (PUC - SP) O número de elementos distintos na sequência $2^4; 4^2; 4^{-2}; (-4)^2; (-2)^4; (-2)^{-4}$ é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

05 Simplificando expressas $\frac{2^{21} + 2^{18}}{9}$, obtemos:

- a) $2^{39} \cdot 3^{-2}$
- b) 6^{37}
- c) $4^{18} \cdot 3^{-2}$
- d) 2^{21}
- e) 2^{18}

06 Simplificando a expressão

$$E = \frac{(4a^2)^3 (32a^3)^2 (b^3)^7}{a^{2^3} (16a^2)^3 (a^{-2})^2 (b^7)^3}$$

- a) 1
- b) ab
- c) $16a^2$
- d) $8a^2$
- e) $32a^4$

07 (FGV - SP) Se $x = 3.200.000$ e $y = 0,00002$, então $x \cdot y$ vale:

- a) 0,64
- b) 6,4
- c) 64
- d) 640
- e) 6.400

08 (PUC - SP) Se N é o número que resulta do cálculo de $2^{19} \cdot 5^{15}$, então o total de algarismo que compõem N é:

- a) 17
- b) 19
- c) 25
- d) 27
- e) > 27

09 (Enem) Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Especiais mostram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20.000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto:

O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos.

Considerando que um ano tem aproximadamente 32×10^6 s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km² (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de:

- a) 10.000 km², e a comparação dá a idéia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.
- b) 10.000 km², e a comparação dá a idéia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.
- c) 20.000 km², e a comparação retratada exatamente o ritmo da destruição.
- d) 40.000 km², e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
- e) 40.000 km² e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

10 (UFF - RJ) A expressão:

$$\frac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}}$$
 é equivalente a:

- a) $1 + 10^{10}$
- b) $\frac{10^{10}}{2}$
- c) 10^{-10}
- d) 10^{10}
- e) $\frac{10^{10} - 1}{2}$

11 Calcule o valor de

- a) $\sqrt{16} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{-1}$
- b) $\left(\sqrt[5]{2^{22}} - \sqrt[5]{128} \right) : \sqrt[5]{4}$

12] O valor da expressão $\frac{\sqrt{50} + \sqrt{18}}{\sqrt{8}}$ é:

- a) $\sqrt{\frac{68}{8}}$
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) $\sqrt{18}$

13] A expressão $E = \frac{\sqrt{128} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}}{\sqrt{2^{13}} + \sqrt{8} - \sqrt{162}}$ é igual a:

- a) $\sqrt{2}$
- b) 13
- c) $\frac{5}{8}$
- d) $\frac{7}{57}$
- e) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

14] O valor da expressão $\frac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$ é,

- a) 1
- b) 2^{n+1}
- c) $\frac{3}{83}$
- d) $\frac{82}{3}$
- e) n

15] (Fuvest - SP) O valor da expressão $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ é:

- a) $\sqrt{2}$
- b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- c) 2
- d) $\frac{1}{2}$
- e) $\sqrt{2} + 1$

16] (UFC-CE) Seja $A = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, então, A+B é igual a:

- a) $-2\sqrt{2}$
- b) $3\sqrt{2}$
- c) $-2\sqrt{3}$
- d) $3\sqrt{3}$
- e) $2\sqrt{3}$

17] (Fuvest - SP) Qual é o valor da expressão

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

- a) $\sqrt{3}$
- b) 4
- c) 3
- d) 2
- e) $\sqrt{2}$

18] Se $m = \sqrt[5]{9}$ então m^{-1} corresponde a:

- a) $-\sqrt[5]{9}$
- b) $\frac{2}{3^5}$
- c) $\frac{\sqrt[5]{27}}{3}$
- d) $\frac{\sqrt[5]{3}}{3}$
- e) $\frac{\sqrt[5]{9}}{9}$

19] (Vune - SP) Se $m = \frac{0,00001 \cdot (0,01)^2 \cdot 1.000}{0,001}$, então:

- a) $m = 0,1$
- b) $m = (0,1)^2$
- c) $m = (0,1)^3$
- d) $m = (0,1)^4$
- e) $m = (0,1)^5$

20] (Unifor - CE) Seja x, y e z números reais tais que

$$x = \frac{0,3}{0,025}, y = \sqrt[3]{\sqrt{512}} \text{ e } z = 8^{0,666\dots}. \text{ É correto afirmar que:}$$

- a) $x < y < z$.
- b) $z < y < x$.
- c) x é um número racional não-inteiro.
- d) y é um número irracional maior que 3.
- e) z é um número racional negativo.

2. 1. Produtos notáveis

- a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 d) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
 e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 g) $(x+a)(x+b) = x^2 + Sx + P$, em que $S = a+b$
 $P = ab$

2. 2. Casas de fatoração

- a) Fator comum (colocar em evidência)

ex: $x^3 + x^4 + x^5 = x^3 (1 + x + x^2)$

- b) Agrupamento

ex: $ax + bx - ay - by$
 $x(a+b) - y(a+b)$
 $(a+b)(x-y)$

- c) Diferença de quadrados

ex: $9x^4 - 1 = (3x^2 - 1)(3x^2 + 1)$

- d) Trinômio quadrado perfeito

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

ex: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

- e) Trinômio do 2º grau

$$x^2 - Sx + P = (x-a)(x-b) \text{ em que}$$

$$S = a + b$$

$$P = a b$$

ex: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

- f) Soma de cubos.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

ex: $27x^3 + 1 = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$

- g) Diferença de cubos

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

ex: $8a^3 + 121 = (2a-5)(4a^2 + 10a + 25)$



Exercícios Comentados

- 01) Calcule o valor da expressão $\frac{a^3 - ab^2}{b-a}$ para $a = 3,8$ e $b = 1,2$.

Resolução:

$$\frac{a^3 - ab^2}{b-a} = \frac{a(a^2 - b^2)}{b-a} = \frac{a(a+b)(a-b)}{b-a} = -a(a+b)$$

para os valores de a e b dados, temos:

$$-a(a+b) = -3,8 \overbrace{(3,8+1,2)}^5 = -19$$

- 02) (Fuvest-SP) A diferença entre os quadrados de dois números naturais é 21. Um dos possíveis valores da soma dos quadrados desses dois números é:

- a) 29
 b) 97
 c) 132
 d) 184
 e) 252

Resolução:

Seja a e b números naturais tais que $a^2 - b^2 = 21$.

Temos então $(a+b)(a-b) = 21$.

Como a e b são naturais, há duas possibilidades:

$$a + b = 21$$

e $a - b = 1$ ou $a + b = 7$ e $a - b = 3$ e portanto:

$$a = 11 \text{ e } b = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 221 \text{ ou}$$

$$a = 5 \text{ e } b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 29$$

- 03) (Vunesp) Se $x + \frac{1}{x} = \lambda$, calcule, em função de λ :

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

Resolução:

a) $x + \frac{1}{x} = \lambda$ (elevando ao quadrado)

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \lambda^2$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lambda^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \lambda^2 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \lambda^2 - 2$$

b) (elevando ao cubo)

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \lambda^3$$

$$x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \lambda^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \frac{(x + \frac{1}{x})}{\lambda} = \lambda^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \lambda^3 - 3\lambda$$

04 (Fuvest - SP) A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

Resolução:

$$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a + b)$$

Conclusão: o resultado é necessariamente múltiplo de 3 (pois a e b são inteiros), logo, letra c

05 Calcule o valor da expressão $\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2 + 3ab}$ para

$$a = 2,136 \text{ e } b = -1,864.$$

Resolução:

$$\frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2 + 3ab} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 - 2ab + b^2 + 3ab} =$$

$$= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = a - b$$

$$\text{para } a = 2,136 \text{ e } b = -1,864$$

$$a - b = 4$$



Exercícios de Sala

01 Fatore as expressões:

a) $ax^2 + bx^2 + cx^2$

b) $2x^4 + 4x^2 + 6x$

c) $3a^2b^3 + 6a^3b - 12a^2b^4$

02 Transforme em produto:

a) $ax^3 + bx^2 + ax + b$

b) $2x^3 + 5x^2 + 4x + 10$

03 a) Fatore o polinômio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

b) Resolva a equação cúbica $p(x) = 0$

04 Fatore:

a) $x^6 - y^6$

b) $x^4 - 9$

c) $(a + b)^2 - c^2$

d) $a^{2m} - b^{2n}$

05 Fatore:

a) $x^2 - y^2 - x - y$

b) $2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

06 O valor da expressão $(99999^2 - 99998^2)$ é

a) 1

b) 0

c) 199997

d) 199999

e) 399997

07 (Cesgranrio - RJ) O valor de

$$\frac{3,135^3 - 1,635^3}{3,135^2 + 3,135 \cdot 1,635 + 1,635^2}$$

- a) 4,77
- b) 5,13
- c) 7,16
- d) 1,50
- e) 2,39

08 (Fuvest - SP) Se (x, y) é a solução do sistema

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} = 4 \end{cases} \text{ então } \left(\frac{x}{y}\right) \text{ é igual a:}$$

- a) 1
- b) -1
- c) $\frac{1}{3}$
- d) $-\frac{3}{2}$
- e) $\frac{2}{3}$

09 (Fuvest - SP) A soma dos quadrados de dois números positivos é 4 e a soma dos inversos de seus quadrados é 1. Determine:

- a) o produto dos números;
- b) a soma dos dois números.

10 (ITA - SP) Sobre o número $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

- a) $x \in]0, 2[$
- b) x é racional
- c) $\sqrt{2x}$ é irracional
- d) x^2 é irracional
- e) $x \in]2, 3[$



Exercícios de Casa

01 Fatore cada expressão:

- a) $a^2 + 6a + 9$
- b) $x^2 - 2x + 1$
- c) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
- d) $-3x^2 + 6x - 3$
- e) $a^4 - 2a^2b + b^2$
- f) $x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$
- g) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

02 Fatore as expressões:

- a) $x^2 - 5xy - 6y^2$
- b) $x^4 + 4x^2 + 4$
- c) $x^4 + 4$

03 (UEL-PR) A expressão $\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}^{-1}$ é equivalente a:

- a) -1
- b) $\sqrt{2} - 2$
- c) $\sqrt{2} + 2$
- d) $\sqrt{2} - 1$
- e) $\sqrt{2} + 1$

04 Simplificando a expressão $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{4}{x-1}$, com $x > 1$, encontramos:

- a) $x+1$
- b) $\sqrt{x}-1$
- c) 1
- d) 2
- e) x

05 (Fatec - SP) Se a, x, y, z são números reais tais

que $z = \frac{2x-2y+ax-ay}{a^3-a^2-a+1} : \frac{2+a}{a^2-1}$, então z é igual a:

- a) $\frac{x-y}{a-1}$ d) $\frac{x+y}{a-1}$
 b) $\frac{x-y}{a^2-1}$ e) $\frac{(x-y)(a+1)}{a-1}$
 c) $\frac{x+y}{a+1}$

06 (Fatec - SP) A expressão $\frac{2+2y-x-xy}{4-x^2}$ para

$x \neq \pm 2$ é equivalente a:

- a) $\frac{y-1}{2-x}$
 b) $\frac{y-1}{x+2}$
 c) $\frac{y}{x}$
 d) $\frac{y+1}{x+2}$
 e) $\frac{y-1}{2-x}$

07 Utilize a fatoração e demonstre que $2^{32} - 1$ é divisível por 3; 5 e 17.

08 (U. São Francisco - SP) O valor da

$\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{x-y}$, para $x=1,25$ e $y=-0,75$

- a) - 0,25
 b) - 0,125
 c) 0
 d) 0,125
 e) 0,25

09 (PUC-Campinas-SP) Simplificando a expressão

$\frac{1}{1+\frac{1}{a}} - \frac{1}{1-\frac{1}{a}}$, com $a \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$, obtém-se:

- a) $\frac{-2a}{1-a^2}$ d) $\frac{2}{1-a}$
 b) $\frac{2a}{1-a^2}$ e) $\frac{-2a}{1+a^2}$
 c) $\frac{-2}{1-a}$

10 (FGV - SP) Sabendo-se que $x + \frac{1}{x} = 3$, então pode-

se afirmar que $x^2 + \frac{1}{x^2}$ vale:

- a) 5
 b) 6
 c) 7
 d) 8
 e) 9

11 A diferença entre o quadrado da soma e a soma dos quadrados de dois números naturais a e b , sendo

$a, b \in \mathbb{N}^*$ e $a \neq b$:

- a) zero
 b) um número ímpar.
 c) 1.
 d) um número par > 2 .
 e) um Número primo

12 (PUC - Campinas - SP) Fatorando -se a expressão

$9x^2 - 16y^2 - 8y - 1$, obtém -se:

- a) $(3x-4y+1)(3x+4y-1)$
 b) $(3x-4y+1)(3x-4y+1)$
 c) $(3x-4y-1)(3x+4y-1)$
 d) $(3x-4y-1)(3x-4y+1)$
 e) $(3x+4y+1)(3x-4y-1)$

13 (UFC - CE) O valor exato de

$\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}}$ é:

- a) 12
 b) 11
 c) 10
 d) 9
 e) 8

14 (UEL - PR) Se o polinômio

$$f = 2x^2 - 12\sqrt{2}x + 4k$$

é um quadrado perfeito, então a constante real k é um número:

- a) quadrado perfeito
- b) cubo perfeito.
- c) irracional.
- d) divisível por 8.
- e) primo.

15 (PUC/Campinas - SP) Seja x um número real diferente de 2 e de -2. Efetuando-se

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{2-7x}{x^2-4},$$

obtem-se:

- a) $\frac{x+1}{2(x-2)}$
- b) $\frac{x+1}{x-2}$
- c) $\frac{x-2}{x+2}$
- d) $-4x-1$
- e) $\frac{x^2-7x+4}{x^2+4}$

16 (Mackenzie-SP) Se $\frac{1}{a^2} + a \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$, então $a+a^{-1}$

vale:

- a) $\frac{82}{9}$
- b) $\frac{100}{82}$
- c) $\frac{16}{9}$
- d) $\frac{100}{9}$
- e) $\frac{82}{3}$

17 Calcule o valor da expressão $A = \frac{a^{3x} + a}{a^x + a^{-x}}$ sendo

$$a^{2x} = 3$$

- a) 7/5
- b) 5/3
- c) 7/3
- d) 4/3
- e) 3/2

18 (F. M. Itajubá - MG) Simplificando a expressão

$$\frac{(9-x^2)}{(x^2-5x+6)},$$

com $x \neq 2$, obtém-se:

- a) $-\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$
- b) $\left(\frac{3+x}{x-2}\right)$
- c) 1
- d) $\left(\frac{3-x}{x-2}\right)$

19 (PUC/Campinas-SP) Se os números reais x e y são

$$\text{tais que } y = \frac{x^4 - 16x^2}{x^2 + 10x + 24},$$

então y é equivalente a:

- a) $\frac{x^2(x-4)}{x+6}$
- b) $\frac{x^2(x+2)}{x-1}$
- c) $\frac{x-2}{x+1}$
- d) $\frac{x^2(x-4)}{x-5}$
- e) $\frac{(x+4)}{x-6}$

20 (U. São Francisco-SP) O valor da expressão

$$\frac{x^2 - y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x-y}$$

para $x = 1,25$ e $y = -0,75$ é:

- a) -0,25
- b) -0,125
- c) 0
- d) 0,125
- e) 0,25

A- Representação de um conjunto:

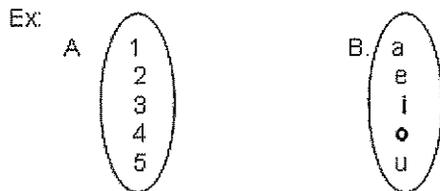
Os conjuntos são representados por letras de forma maiúsculas (A, B, C, D, ...)

I- Tabular: os elementos são representados entre chaves e separados por vírgulas.

Ex: $A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

II-Diagrama de Venn: os elementos são representados por pontos interiores a uma região plana, limitada por uma linha fechada simples.



III- Através de uma Propriedade: Que é comum a todos os elementos de um conjunto e somente esses elementos possuem essa propriedade.

Ex: $A = \{x / x \text{ é país da Europa}\}$

$B = \{x / x \text{ é mamífero}\}$

B- Relação de Pertinência:

$\in \Rightarrow$ pertence

$\notin \Rightarrow$ não pertence

É utilizado para relacionar elemento com conjunto.

Ex: Dados $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$e \in A$

$e \notin B$

C- Tipos de Conjuntos:

I- Conjunto unitário: formado por um único elemento.

Ex: $A = \{2\}$

II-Conjunto vazio: não possui nenhum elemento.

Ex: $\{ \}$ ou \emptyset

III- Conjunto finito: formado por um número de elementos que se pode contar.

IV- Conjunto infinito: formado por um número de elementos que não se pode contar.

D- Conjunto Universo: (U)

É o conjunto ao qual pertencem todos os elementos em estudo.

E- Subconjuntos:

Sendo A e B dois conjuntos, diz-se que A é subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A pertence a B.

A é subconjunto de B

$A \subset B$ (A está contido em B)

$A \supset B$ (B contém A)

É utilizado para relacionar conjunto com conjunto.

Propriedade:

a) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$\emptyset \subset A, \forall A.$

F- União de Conjuntos:

$A \cup B = \{x / x \in a \text{ ou } x \in B\}$

Propriedades:

a) $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$

b) $A \cup B = B \cup A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

G- Intersecção de Conjuntos:

$A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$

Dois conjuntos são disjuntos quando a intersecção entre eles for o conjunto vazio.

Propriedades:

a) $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

H- Conjunto Diferença:

$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Propriedades:

- a) $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \emptyset$
- b) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$
- c) $A \neq B \Leftrightarrow A - B \neq B - A$

I-Conjunto Complementar:

${}^C_B A \Rightarrow$ Complementar de A com relação a B.

$$A \subset B \Leftrightarrow {}^C_B A = \{x / x \in B \text{ e } x \notin A\} = B - A$$

Propriedades:

- a) ${}^C_A A = \emptyset$
- b) ${}^C_A \emptyset = A$
- c) ${}^C_U A = \bar{A} = A^C$
- d) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- e) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Leis de Morgan:

- a) $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$
- b) $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$



Exercícios Comentados

01 (PUC) Para os conjuntos $A = \{a\}$ e $B = \{a, \{a\}\}$ podemos afirmar:

- a) $B \not\subset A$
- b) $A = B$
- c) $A \notin B$
- d) $A \in B$
- e) $\emptyset \in A$

Resolução:

Como o conjunto A é um elemento do conjunto B, a opção correta é a D.

02 Um crime o correu e a polícia prendeu 5 suspeitos. O delegado irá interrogá-los de todas as formas possíveis individualmente ou em grupos, quantos interrogatórios poderão ser feitos?

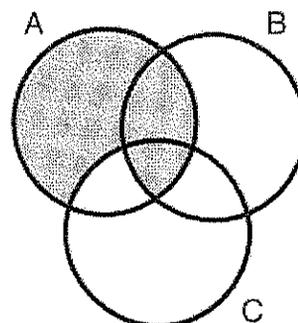
- a) 10
- b) 16
- c) 31
- d) 32
- e) 64

Resolução:

Os elementos do conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ representa as pessoas a serem interrogadas. Logo é necessário calcular o número de subconjuntos de A e subtrair 1, pois o conjunto vazio não significa nenhum interrogatório.

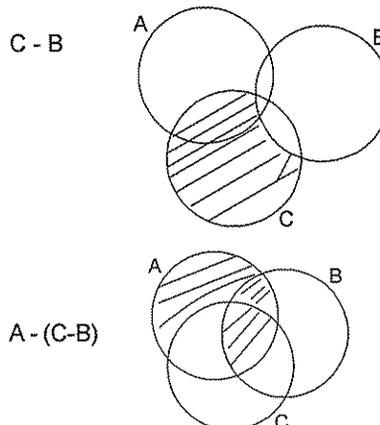
$$2^5 - 1 = 31.$$

03 (F.M. Itajubá- MG) Com relação à parte sombreada da do diagrama, é correto afirmar que:



- a) $A - (B - C)$
- b) $A - (B \cup C)$
- c) $A - (B \cap C)$
- d) $A - (C - B)$

Resolução:

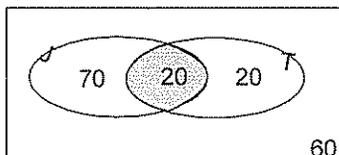


04 Num grupo de 170 pessoas, 90 usam calça jeans e 40 usam tênis, determine:

- a) Quantos usam tênis e não usam calça jeans?
b) Quanto não usam jeans nem tênis?

Resolução:

Vamos montar o diagrama (começando pela intersecção).



Com base no diagrama, temos: 20 pessoas usam tênis e não usam calça jeans.

05 Numa enquete sobre atividades aeróbicas realizada com 700 pessoas, constatou-se que:

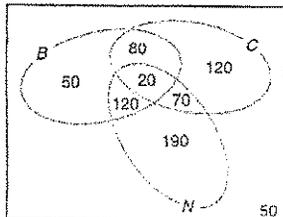
- 400 pessoas praticam natação;
- 270 praticam ciclismo;
- 290 praticam corrida;
- 140 praticam natação e ciclismo;
- 90 praticam natação e corrida;
- 100 praticam ciclismo e corrida;
- 20 praticam os três esportes pesquisados.

Pergunta-se:

- a) Quantas pessoas praticam somente natação?
b) Quantas pessoas não praticam nenhum dos esportes citados?

Resolução:

Inicialmente, vamos montar o diagrama a partir da intersecção dos três conjuntos e completar "de dentro para fora".



Com base no diagrama, respondemos: 190 pessoas praticam somente natação.

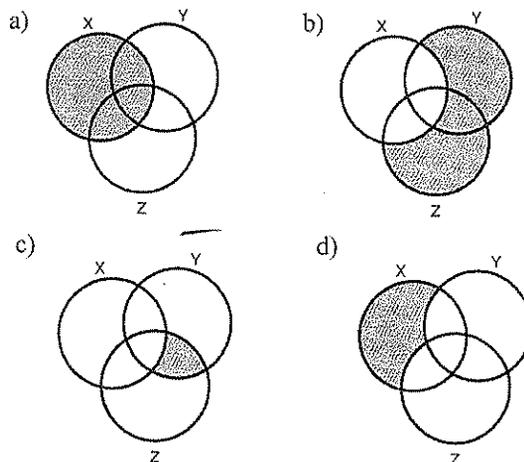


Exercícios de Sala

01 (F.I. Anápolis -GO) Dados os conjuntos:
 $A = \{0; 1; 3; 5\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$ e $C = \{3; 8; 9\}$, o conjunto $M = B - (A \cup C)$ é:

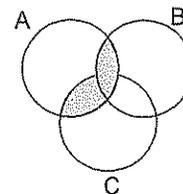
- a) $\{1; 3; 5\}$
b) $\{7\}$
c) $\{7; 5; 9\}$
d) $\{0; 8; 9\}$
e) $\{1; 5; 7\}$

02 (UFRN) As figuras seguintes representam diagramas de Venn dos conjuntos X, Y e Z. Marque a opção em que a região destacada representa o conjunto $Y \cap Z - X$.



03 A parte hachurada da figura abaixo, onde U é o conjunto universo e A, B, C são conjuntos, representa:

- a) $A \cup B \cup C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
d) $(A \cup B) \cup (A \cup C)$
e) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$



04 Sejam A, B e C subconjunto do números reais. Então podemos afirmar que:

- a) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
b) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$
c) Se $A \subset B$ então $A^c \subset B^c$
d) $(A \cap B) \cup C^c = (A^c \cup C)^c \cap (B^c \cup C)^c$
e) $A \cup (B \cup C)^c = (A \cup B^c) \cap (A \cup C^c)$

05 Se 70% da população gostam de samba, 75% de choro, 80% de bolero e 85% de rock, quantos por cento da população no mínimo, gostam de samba, choro, bolero e rock?

- a) 5%.
b) 10%.
c) 20%.
d) 45%.
e) 70%.

06 Os alunos de uma escola foram convocados a responder duas perguntas. As únicas respostas possíveis eram *sim* ou *não* para cada pergunta. Sabendo-se que 128 alunos responderam pelo menos um *sim*, 75 alunos responderam *sim* às duas perguntas, 137 alunos responderam pelo menos um *não* e 99 alunos responderam *não* à segunda pergunta, é válido afirmar-se que:

- a) 212 alunos foram consultados.
- b) 64 alunos responderam *sim* à primeira pergunta.
- c) 54 alunos responderam *sim* à segunda pergunta.
- d) 84 alunos responderam *não* à primeira pergunta.
- e) 49 alunos responderam *sim* à primeira pergunta.

07 Sejam A, B e C conjuntos com exatamente 4 elementos cada um e, sabendo-se que

$A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ tem, respectivamente, 7, 3, 2 e 1 elementos, então o número de elementos de $(A \cap B) \cup C$ é igual a

- a) 5.
- b) 8.
- c) 6.
- d) 7.

08 (AFA) Assinale a afirmativa correta.

- a) A intersecção de conjuntos infinitos pode ser finita.
- b) A intersecção infinita de conjuntos não vazios é vazia.
- c) A reunião infinita de conjuntos não vazios tem infinitos elementos.
- d) A intersecção dos conjuntos A e B possui sempre menos elementos do que o A e do que o B.

09 Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo.

Marca	Número de consumidores
A	105
B	200
C	160
A e B	25
B e C	40
A e C	25
A, B e C	5
Nenhuma das 3	120

Determine o número de pessoas consultadas.

10 (UF - Uberlândia) Num grupo de estudantes, 80% estudam Inglês, 40% estudam Francês e 10% não estudam nenhuma dessas duas línguas. Nesse grupo, a porcentagem de alunos que estudam ambas as línguas é:

- a) 25%
- b) 50%
- c) 15%
- d) 33%
- e) 30%



Exercícios de Casa

01 (FEI) Se n é o número de subconjuntos não-vazios do conjunto formado pelos múltiplos estritamente positivos de 5, menores do que 40, então o valor de n é:

- a) 127
- b) 125
- c) 124
- d) 120
- e) 110

02 No último clássico Corinthians x Flamengo, realizado em São Paulo, verificou-se que só foram ao estádio paulistas e cariocas e que todos eles eram só corintianos ou só flamenguistas. Verificou-se também que, dos 100.000 torcedores, 85.000 eram corintianos, 84.000 eram paulistas e que apenas 4.000 paulistas torciam para o Flamengo. Pergunta-se:

- a) Quantos paulistas corintianos foram ao estádio?
- b) Quantos cariocas foram ao estádio?
- c) Quantos não-flamenguistas foram ao estádio?
- d) Quantos flamenguistas foram ao estádio?
- e) Dos paulistas que foram ao estádio, quantos não eram flamenguistas?
- f) Dos cariocas que foram ao estádio, quantos eram corintianos?
- g) Quantos eram flamenguistas ou cariocas?
- h) Quantos eram corintianos ou paulistas?
- i) Quantos torcedores eram não-paulistas ou não-flamenguistas?

03 (ESAL) Foi consultado um certo número de pessoas sobre as emissoras de TV que habitualmente assistem. Obteve-se o resultado seguinte: 300 pessoas assistem ao canal A, 270 pessoas assistem o canal B, das quais 150 assistem ambos os canais A e B e 80 assistem outros canais distintos de A e B. O número de pessoas consultadas foi:

- a) 800
- b) 720
- c) 570
- d) 500
- e) 600

04 (VUNESP) Uma população utiliza 3 marcas diferentes de detergente: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado colheram-se os resultados tabelados abaixo:

Marcas	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	Nenhuma delas
Número de Consumidores	109	203	162	25	28	41	5	115

Pode-se concluir que o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas é:

- a) 99
- b) 94
- c) 90
- d) 84
- e) 79

05 (UF - Viçosa) Fez-se em uma população, uma pesquisa de mercado sobre o consumo de sabão em pó de três marcas distintas A, B e C. Em relação à população consultada e com o auxílio dos resultados da pesquisa tabelados abaixo:

Marcas	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	Nenhuma delas
Número de Consumidores	109	203	162	25	28	41	5	115

Determine:

- a) O número de pessoas consultadas.
- b) O número de pessoas que não consomem as marcas A ou C.
- c) O número de pessoas que consomem pelo menos duas marcas.
- d) A porcentagem de pessoas que consomem as marcas A e B mas não consomem a marca C.
- e) A porcentagem de pessoas que consomem apenas a marca C.

06 Numa pesquisa, realizada em alguns colégios, sobre a preparação dos alunos para o vestibular, foram obtidos os seguintes resultados:

Tipo de preparação	Número de alunos
Cursoi pré vestibular	3.580
Contratou professor particular	1.100
Ambas as situações anteriores	540
Nenhuma das situações anteriores	360

Com base nesses dados, o número de alunos consultados foi:

- a) 3.780
- b) 4.140
- c) 4.500
- d) 5.100
- e) 5.140

07 (Cesgranrio) Em uma universidade são lidos dos jornais, A e B; exatamente 80% dos alunos lêem o jornal A e 60%, o jornal B. Sabendo que todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, qual é o percentual de alunos que lêem ambos?

08 (PUC-MG) Em uma classe de 45 meninas, cada uma delas ou tem cabelos pretos ou olhos castanhos, 35 têm cabelos pretos e 20 tem olhos castanhos. O número de meninas que têm cabelos pretos e olhos castanhos é:

- a) 5
- b) 10
- c) 15
- d) 20
- e) 25

09 Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações: Helena, Senhora e A Moreninha. Para isso, efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que em cada 1.000 pessoas consultadas:

- ___ 600 leram A Moreninha;
- ___ 400 leram Helena;
- ___ 300 leram Senhora;
- ___ 200 leram a Moreninha e Helena;
- ___ 150 leram a Moreninha e Senhora;
- ___ 100 leram Senhora e Helena;
- ___ 20 leram as três obras

Com base nessa pesquisa, responda:

- a) Qual é o número de pessoas que não leu nenhuma das três obras?
- b) Qual é o número de pessoas que leu apenas uma das três obras?
- c) Qual é o número de pessoas que leu duas ou mais obras?

10 Numa prova constituída de dois problemas, 300 alunos acertaram somente um dos problemas, 260 acertaram o segundo, 100 alunos acertaram os dois e 210 erraram o primeiro. Quantos alunos fizeram a prova?

11 Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 4\}$$

Determine o conjunto $A \cap B$.

12 (UFU) Seja X o subconjunto dos números inteiros dado por $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Quantos pares distintos (A, B) de subconjuntos A e B de X existem tais que $A^c - B = \{0, 1\}$, em que A^c denota o complementar de A em X ?

- a) 16
- b) 14
- c) 10
- d) 12
- e) 18

13 (UFU) Considere dois conjuntos de números A e B com 12 e 15 elementos, respectivamente. Então, sempre se pode afirmar que

- a) $A \cap B$ terá, no mínimo, 12 elementos.
- b) $A \cup B$ terá, no mínimo, 15 elementos.
- c) o número máximo de elementos de $A \cup B$ é igual ao número máximo de elementos de $A \cap B$.
- d) o número mínimo de elementos de $A \cup B$ é igual ao número máximo de elementos de $A \cap B$.

14 (FUVEST) Durante uma viagem choveu 5 vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve 6 manhãs e 3 tardes sem chuvas. Quantos dias durou a viagem:

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10

15 (ITA) Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B - A) \cup P(\emptyset)$ é igual a

- a) 8
- b) 16
- c) 20
- d) 17
- e) 9

16 (FMTM) Em uma amostra de indivíduos, 40% foram afetados pela doença A , 20% foram afetados pela doença B e 5% foram afetados por ambas as doenças. Dos indivíduos da amostra que não foram afetados nem por A nem por B , 2% morreram. A porcentagem de indivíduos da amostra que morreram sem terem sido afetados por quaisquer das duas doenças analisadas é de

- a) 0,7%.
- b) 0,8%.
- c) 0,9%.
- d) 1,0%.
- e) 1,1%.

17 (UNIP) O número dos conjuntos X que satisfazem: $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ é:

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

18 (OSEC) Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$ e $C = \{a, c, d, e\}$, o conjunto $(A - C) \cup (C - B) \cup (A \cap B \cap C)$ é:

- a) $\{a, b, c, e\}$
- b) $\{a, c, e\}$
- c) A
- d) $\{b, d, e\}$
- e) $\{a, b, c, d\}$

19 (UFJF) Sejam A , B e C conjuntos quaisquer num universo U .

Assinale a afirmativa correta:

- a) Se $A \cap B = A \cap C$, então $B = C$.
- b) Se A possui m elementos e B possui n elementos, então $A \cup B$ possui $m + n$ elementos;
- c) Se $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, então $\emptyset \in A$ e $\emptyset \subset A$;
- d) $C_U(A - B) = (C_U A) \cup B$, onde $C_U X$ é o complementar do conjunto X em relação a U ;
- e) Se A possui 7 elementos, então o conjunto formado por todos os subconjuntos não vazios de A possui 128 elementos.

20 (EFOA) Em uma cidade com 40.000 habitantes há três clubes recreativos: Colina, Silvestre e Campestre. Feita uma pesquisa, foram obtidos os seguintes resultados: 20% da população frequenta o Colina; 16% o Silvestre; 14% o Campestre; 8% o Colina e o Silvestre; 5% o Colina e o Campestre; e 4% o Silvestre e o Campestre.

Somente 2% frequentam os três clubes. O número de habitantes que não frequentam nenhum destes três clubes é:

- 26000
- 30000
- 28000
- 32000
- 34000

4 - CONJUNTO NUMÉRICOS

1-Conjunto dos Números Naturais (N):

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$N^* = N - \{0\}$$

Propriedades:

- A soma de dois números naturais é um número natural;
- O produto de dois números naturais é um número natural;
- Se k é um número natural, então $k+1$ é um número natural tal que:

- k e $k+1$ são números naturais consecutivos;
- k é o antecessor de $k+1$;
- $k+1$ é o sucessor de k .

2-Conjunto dos Números Inteiros (Z):

$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$Z^* = Z - \{0\} \text{ (inteiros não-nulos)}$$

$$Z^+ \text{ (inteiros positivos)}$$

$$Z^+ \text{ (inteiros não-negativos)}$$

$$Z^- \text{ (inteiros negativos)}$$

$$Z_- \text{ (inteiros não-positivos)}$$

Propriedades:

- Todo número natural é inteiro ($N \subset Z$)
- A soma de dois números inteiros é um número inteiro
- A diferença entre dois números inteiros é um número inteiro
- O produto de dois números inteiros é um número inteiro;
- Se k é um número inteiro, então $k+1$ é um número inteiro tal que:

- k e $k+1$ são números inteiros consecutivos;
 - k é o antecessor de $k+1$;
 - $k+1$ é o sucessor de k .
- Todo número inteiro possui sucessor e antecessor;
 - Para todo número inteiro x existe o inteiro y denominado "oposto de x ", tal que: $y+x=x+y=0$

Indica-se o oposto de x por $-x$.

3-Conjunto dos Números Racionais (Q):

Pode ser representado pela razão entre dois números inteiros.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z \text{ e } b \in Z^* \right\}$$

$$Q^* \text{ (racionais não-nulos)}$$

$$Q_+^* \text{ (racionais positivos)}$$

$$Q_+ \text{ (racionais não-negativos)}$$

$$Q_-^* \text{ (racionais negativos)}$$

$$Q_- \text{ (racionais não-positivos)}$$

Propriedades:

- Todo número inteiro é racional ($Z \subset Q$);
- A soma de dois números racionais é um número racional;
- A diferença entre dois números racionais é um número racional;
- O produto de dois números racionais é um número racional;
- O quociente de dois números racionais, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional;
- Dados dois números racionais p e q , com $p < q$, existe um número racional m tal que $p < m < q$.
- Para todo número racional x existe o racional y denominado "oposto de x ", tal que $y+x=x+y=0$.
Indica-se o oposto de x por $-x$.
- Para todo número racional r , $r \neq 0$, existe o racional s , denominado "inverso ou recíproco de r ", tal que $r \cdot s = s \cdot r = 1$.

Indica-se o inverso de r por $\frac{1}{r}$.

4-Conjunto dos Números Irracionais (Q^o):

Os números irracionais não podem ser representados como a razão entre dois números inteiros. Portanto são as dízimas não-periódicas.

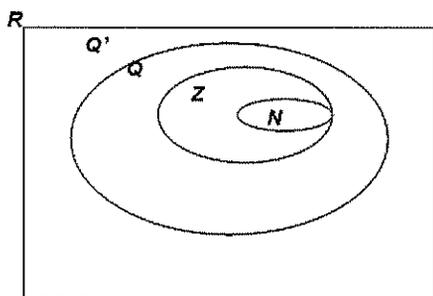
Propriedades:

- a) Se o número $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$, não é inteiro, então é irracional;
- b) A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional;
- c) A diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional;
- d) O produto de um número racional, não-nulo, por um número irracional é um número irracional;
- e) O quociente de um número racional, não nulo, por um número irracional é um número irracional.

5-Conjunto dos Números Reais (R):

É qualquer número racional ou irracional.

$$R = Q \cup Q'$$



Propriedades:

- a) A soma de dois números reais é um número real;
- b) A diferença entre dois números reais é um número real;
- c) O produto de dois números reais é um número real;
- d) O quociente entre dois números reais quaisquer, com divisor diferente de zero, é um número real;
- e) Para todo número real x , existe o real y , denominado "oposto de x ", tal que $y+x=x+y=0$.
Indica-se o oposto de x por $-x$.
- f) Para todo número real não-nulo r , existe o real s , denominado "inverso ou recíproco de r ", tal que $r \cdot s = s \cdot r = 1$.

Indica-se o inverso de r por $\frac{1}{r}$.

- g) Se n é natural ímpar e $a \in \mathbb{R}$, então $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$;
- h) Sendo n um número natural par diferente de zero e a um número real, tem-se que.

K-Quantidade de elementos de conjuntos finitos:

1-Dados dois conjuntos A e B:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dados três conjuntos A, B e C:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Intervalos

Usaremos com frequência alguns subconjuntos de \mathbb{R} chamados intervalos, que podem ser escritos de três maneiras:

Por compreensão

Por exemplo: $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$

Representação gráfica

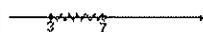
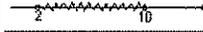
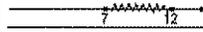
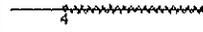
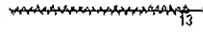


A bolinha cheia (●) no extremo de um intervalo significa que o número associado a esse extremo pertence ao intervalo, e a bolinha vazia (○) indica que o número associado a esse extremo não pertence ao intervalo.

Notação de intervalo

No exemplo: [3; 7[

O colchete voltado para o número significa que esse número pertence ao intervalo ___ o intervalo é fechado nesse extremo. Acompanhe o exemplo:

Representação por compreensão	Representação gráfica	Notação de intervalo	Leitura
$\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7\}$		[3; 7[Intervalo de extremos 3 e 7, fechado em 3 e aberto em 7.
$\{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 10\}$	]2; 10]	Intervalo de extremos 2 e 10, aberto em 2 e fechado em 10.
$\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 3\}$		[1; 3]	Intervalo de extremos 1 e 3, fechado nos dois extremos.
$\{x \in \mathbb{R} / 7 < x < 12\}$	]7; 12[Intervalo de extremos 7 e 12, aberto nos dois extremos.
$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$		[4; +∞[Intervalo infinito à direita e de origem fechada em 4.
$\{x \in \mathbb{R} / x < 13\}$	] - ∞; 13[Intervalo infinito à esquerda e de origem aberta em 13.



Exercícios Comentados

01 Classifique as sentenças a seguir em verdadeira (V) ou falsa (F):

- a) $() -4 \in \mathbb{N}$ (F)
 b) $() -5 \in \mathbb{Z}$ (V)
 c) $() 0 \in \mathbb{R}^*$ (F)
 d) $() \frac{3}{5} \in \emptyset$ (V)
 e) $() 1,23 \in \emptyset$ (V)
 f) $() -\frac{1}{7} \in \mathbb{Z}$ (F)
 g) $() \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$ (V)
 h) $() \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (V)
 i) $() \sqrt{9} \notin \mathbb{Q}$ (F)
 j) $() 0,222... \in \mathbb{Q}$ (V)

Resolução:

j) $x = 0,222... (.10)$

$$\frac{10x = 2,000...}{9x = 2}$$

$$x = \frac{2}{9}$$

Assim, $0,222... = x = \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}$

02 Sejam: $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 7\}$ e

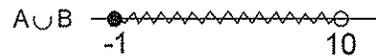
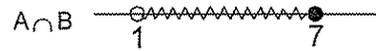
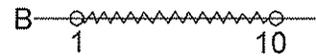
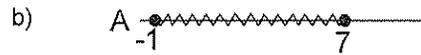
$$B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 10\}$$

- a) Escreva A e B utilizando a notação de intervalo:
 b) Determine $A \cap B$ e $A \cup B$:

Resolução:

$$A = [-1; 7]$$

a) $B =]1; 10[$



$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 7\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 10\}$$

03 (Fuvest - SP) Os números x e y são tais que $5 \leq x \leq 10$ e $20 \leq y \leq 30$. O maior valor possível de $\frac{x}{y}$ é:

- a) $\frac{1}{6}$
 b) $\frac{1}{4}$
 c) $\frac{1}{3}$
 d) $\frac{1}{2}$
 e) 1

Resolução:

$$\text{Se } x = 5 \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Se } x = 5 \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Se } x = 10 \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x = 10 \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

Logo, o maior valor é $\frac{1}{2}$

04 Sendo $A = \{x \in \mathbb{Z} / \frac{30}{x} = n, \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* / x = 3m, \text{ com } m \in \mathbb{N}^*\}$, determine o conjunto $A \cap B$.

Resolução:

$$A = D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$B = M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$$

$$A \cap B = \{3, 6, 15, 30\}$$

05 (EspCEX) Quaisquer que sejam o número irracional a e o número racional b , pode-se afirmar que, sempre:

- $a \cdot a$ é irracional.
- $a^2 + b$ é racional.
- $a \cdot b$ é racional.
- $b - a + \sqrt{2}$ é irracional.
- $b + 2a$ é irracional.

Resolução:

$$a \in \mathbb{I} \text{ e } b \in \mathbb{Q}$$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$ (errado)

b) $a^2 + b \in \mathbb{Q}$

a^2 pode ser irracional, logo,

$a^2 + b \in \mathbb{I}$ (errado)

c) $a \cdot b \in \mathbb{Q}$

Como $a \in \mathbb{I}$, $a \cdot b \in \mathbb{I}$ (errado)

d) $(b - a + \sqrt{2}) \in \mathbb{I}$

Se $a = \sqrt{2}$, $b - a + \sqrt{2} = b \in \mathbb{Q}$ (errado)

e) $b + 2a \in \mathbb{I}$

Como $a \in \mathbb{I}$, $(2a) \in \mathbb{I}$, logo, sempre

$$b + 2a \in \mathbb{I}$$



Exercícios de Sala

01 (EsPCEX) É correto afirmar que:

- A soma e a diferença de dois números naturais é sempre um número natural.
- O produto e o quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- A soma de dois números racionais é sempre um número racional.
- A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
- O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

02 (EsPCEX) Se $A = [-5, 1]$ e

$$B = \left] -\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5} \right[, \text{ então os conjuntos } A-B \text{ e}$$

$A \cap B$ são, respectivamente:

a) $\left[-5, -\frac{\sqrt{2}}{3} \right]$ e $\left] -\frac{\sqrt{2}}{3}, 1 \right[$

b) $\left[-5, -\frac{\sqrt{2}}{3} \right]$ e $\left] -\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5} \right[$

c) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1 \right]$ e $\left] -\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5} \right[$

d) $\left[1, \sqrt{5} \right]$ e $\left] -5, -\frac{\sqrt{2}}{3} \right[$

e) $\left] -\frac{\sqrt{2}}{3}, 1 \right[$ e $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1 \right]$

03 (EsPCEX) Dados os conjuntos:

- $R = \{x / x \text{ é um número real}\}$
 $Q = \{x / x \text{ é um número racional}\}$
 $N = \{x / x \text{ é um número natural}\}$
 $P = \{x / x \text{ é um número primo}\}$

E considerando as afirmações:

- (I) $P \subset Q$
 (II) $R \subset Q$
 (III) $P \supset Q$
 (IV) $6 \in (R \cap Q \cap N \cap P)$
 (V) $5 \in (Q \cap P)$

Estão corretas as afirmações:

- a) I e III
 b) II e V
 c) III e IV
 d) IV e V
 e) I e V

04 (EsPCEX) Seja f uma função real, de variável real,

definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ for irracional} \end{cases}$. Assim,

pode-se afirmar que:

- a) $f(\sqrt{2}) = f(2)$
 b) $f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) = f(1)$
 c) $f(3,14) = 0$
 d) $f(\pi)$ é irracional
 e) $\sqrt{f(x)}$ é racional para todo x real

05 (EsPCEX) Dados os números $a = \sqrt{3} - 1$,

$b = \sqrt{3} + 1$ e $c = 0,1333\dots$, pode-se afirmar que:

- a) $a \cdot b$ é um número irracional.
 b) $(a - b) \cdot c$ é um número irracional.
 c) $(a + b) \cdot c$ é um número racional.
 d) $b \cdot c$ é um número racional.
 e) $a \cdot b \cdot c$ é um número racional.

06 (UNESP) Uma faixa retangular de tecido deverá ser totalmente recortada em quadrados, todos de mesmo tamanho e sem deixar sobras. Esses quadrados deverão ter o maior tamanho (área) possível. Se as dimensões da faixa são 105 cm de largura por 700 cm de comprimento, o perímetro de cada quadrado, em centímetros, será:

- a) 28.
 b) 60.
 c) 100.
 d) 140.
 e) 280.

07 (UFMG) No sítio de Paulo, a colheita de laranjas ficou entre 500 e 1500 unidades. Se essas laranjas fossem colocadas em sacos com 50 unidades cada um, sobriam 12 laranjas e, se fossem colocadas em sacos com 36 unidades cada um, também sobriam 12 laranjas. Assim sendo, quantas laranjas sobriam se elas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um?

- a) 4
 b) 6
 c) 7
 d) 2

08 (UERJ) - Ao analisar as notas fiscais de uma firma, o auditor deparou-se com a seguinte situação:

Quantidade	Mercadoria	Preço unitário(R\$)	Total (R\$)
★ Metros	Cetim	21,00	★ 56,00

Não era possível ver o número de metros vendidos, mas sabia-se que era um número inteiro. No valor total, só apareciam os dois últimos dos três algarismos da parte inteira.

Com as informações acima, o auditor concluiu que a quantidade de cetim, em metros, declarada nessa nota foi:

- a) 16
 b) 26
 c) 36
 d) 46

09 (UFMG) - Três fios têm comprimentos de 36 m, 48 m e 72 m. Deseja-se cortá-los em pedaços menores, cujos comprimentos sejam iguais, expressos em números inteiros de metros e sem que haja perda de material. O menor número total possível de pedaços é:

- a) 7
 b) 9
 c) 11
 d) 13
 e) 20

10 (UnB) - Um investigador, em busca de informações precisas, encontrou uma velha nota fiscal, na qual estava registrada a aquisição de 72 itens de uma mesma mercadoria por um valor total de R\$ x67,9y, sendo que o primeiro e o último algarismos x e y estavam ilegíveis. Sabendo que é possível achar o valor exato da nota fiscal, determine o produto xy.



Exercícios de Casa

01 (UERJ) - Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:

- a) 150
- b) 160
- c) 190
- d) 200

02 (Fuvest) - Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2m e 5m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?



03 (UFU) - Os irmãos José e Maria visitam regularmente seu avô Pedro. José visita-o a cada 8 dias e Maria a cada 6 dias, ambos, rigorosamente, sem nunca falharem. Se José e Maria visitaram simultaneamente o avô no primeiro dia do ano de 2004, quantas vezes mais eles fizeram a visita simultânea até o dia 31 de dezembro de 2006?

Obs.: Considere cada ano com 365 dias.

- a) 48
- b) 44
- c) 46
- d) 45

04 As cidades do porto Seguro, Blumenau e Dourados realizaram grandes festas periódicas, sendo a de Porto Seguro de 9 em 9 meses, a de Blumenau de 12 em 12 meses e a Dourados de 20 em 20 meses. Se em janeiro de 2007 as festa coincidiram, quando será a próxima vez que irão coincidir?

05 (Vunesp) Três viajantes partem num mesmo dia de uma cidade A exatamente a cada 30, 48 e 72 dias, respectivamente. O número mínimo de dias transcorridos para que os três viajantes estejam juntos novamente na cidade A é:

- a)144
- b)240
- c)360
- d)480
- e)720

06 (PUC-RJ) A editora de livro como ser aprovado no vestibular recebeu os seguintes pedidos, de três livrarias:

Livraria	Número de exemplares
A	1.300
B	1.950
C	3.900

A editora deseja os três pedidos em n pacotes iguais de tal forma que n seja o menor possível. Calcule o número n.

07 (Vunesp) Sejam $x = 180$ e $y = 100$.

- a)Descomponha x e y em fatores primos.
- b)Determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de x e y.

08 (Mackenzie- SP) Se um número natural n é múltiplo de 9 e de 15, então, certamente, n é:

- a)Múltiplo de 27
- b)Múltiplo de 30
- c)Múltiplo de 27
- d)Múltiplo de 90
- e)Múltiplo de 135

09 (Fuvest-SP) Duas rodas-gigantes começam a girar, num mesmo instante, com uma. A primeira dá uma volta em 30 segundos e a segunda dá uma volta em 35 segundos. As duas pessoas estarão ambas novamente na posição mais baixa após:

- a) 1 minuto e 10 segundos
- b) 3 minutos
- c) 3 minutos e 30 segundos
- d) 4 minutos e 30 segundos

10 (Vunesp) Uma concessionária vendeu no mês de outubro n carros do tipo A e m carros do tipo B, totalizando 216 carros.

Sabendo-se que o número de carros vendidos de cada tipo foi maior do que 20, que foram vendidos menos carros do tipo A do que do tipo B, isto é, $n < m$, e que $\text{MDC}(n, m) = 18$, os valores de n e m são, respectivamente:

- a) 18, 198.
- b) 36, 180.
- c) 90, 126.
- d) 126, 90.
- e) 162, 54.

11 (UFMG) Em relação aos números naturais, a única alternativa falsa é:

- a) Todo número divisível pelo produto de dois ou mais é divisível por qualquer um deles.
- b) Se um número divide o produto de dois outros, ele divide um deles.
- c) Um divisor comum de dois números divide a soma deles.
- d) Se um número divide dois outros, ele divide o máximo divisor comum deles.
- e) Se um número múltiplo comum deles.

12 (UFRN) Duas escolas, X e Y, decidiram organizar uma gincana estudantil na qual os alunos devem formar todas as equipes com o mesmo número de componentes. Foram selecionados 49 alunos da escola X e 63 alunos da escola Y. Cada aluno deve participar de apenas uma equipe.

Assim o número de equipe participantes das escolas X e Y será, respectivamente,

- a) 7 e 9
- b) 6 e 9
- c) 8 e 9
- d) 7 e 8

13 (Unicamp-SP) Uma sala retangular medindo 3m por 4,25 m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados iguais. supondo que não haja espaço entre ladrilhos vizinhos, pergunta-se:

- a) Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros, de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho?
- b) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

14 (UFSC-SP) Considere as seguintes informações:
♦ O máximo divisor comum entre dois números também é um divisor da diferença entre esses números;
♦ Se o máximo divisor comum entre dois números a e b é igual a 1, M. D. C. $(a, b) = ab$.

- a) prove que o máximo divisor comum entre dois números consecutivos é igual a 1;
- b) determine dois números consecutivos, sabendo que positivos e o mínimo múltiplo comum entre eles é igual a 156.

15 (Unirio) Considerando que: $A = [a; b]$ e $B = [c; d]$, em que $a < c < b < d$, assinale a opção correta.

- a) $A \cap B [c; b]$
- b) $B \subset \bigcap_R^A [c; b]$
- c) $c \subset A \cap B$
- d) $[a; d] \in \bigcap_R^B$
- e) $b \in A - B$

16 (U.F. Juiz de Fora-MG) Dados os intervalos:

$$A = [-1; 3], B = [1; 4], C = [2; 3], D = (1; 2] \text{ e } E = (0; 2]$$

considerando o conjunto $P = [(A \cup B) - (C \cap D)] - E$. Marque a alternativa incorreta:

- a) $P \subset [-1; 4]$
- b) $(3; 4] \subset P$
- c) $2 \in P$
- d) $0 \in P$

5- Funções

5.1 Relações

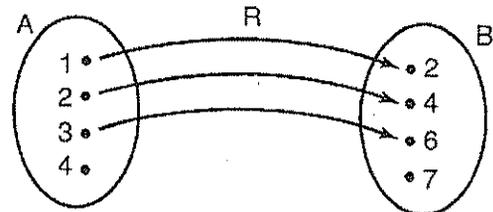
Dados dois conjuntos, A e B, denomina-se relação R de A em B qualquer subconjunto de $A \times B$.

Exemplo:

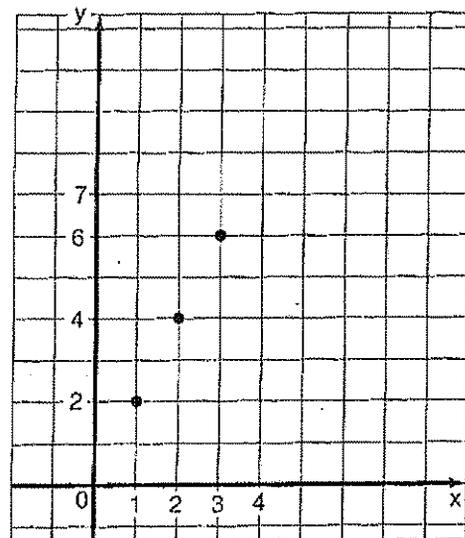
Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$. Então, temos:

◆ Representação na forma de conjunto:
 $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

◆ Representação por flechas (diagrama de Euler-Venn):



◆ Representação no plano cartesiano:



DOMÍNIO

Domínio da relação R é o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par da relação.

$$D(R) = \{1, 2, 3\}$$

IMAGEM

Imagem da relação R é o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par da relação.

$$Im(R) = \{2, 4, 6\}$$

17) Dados os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 17\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \leq x \leq 18\}$$

Determine a soma dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$.

18) (UFF-RJ) Em relação aos conjuntos:

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq \sqrt{7}\}$$

$$Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 0,333\dots\}$$
 afirma-se:

I. $P \cup Q = P$

II. $Q - P = \{0\}$

III. $P \subset Q$

IV. $P \cap Q = Q$

Somente são verdadeiras as afirmativas:

- a) I e III
- b) I e IV
- c) II e III
- d) II e IV
- e) III e IV

19) (U. E. Santa Cruz-BA) Sejam A e B conjuntos tais que:

$$A = \{x; x = 3n, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq 0\} \text{ e}$$

$$B = \{x; x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ é ímpar}\}.$$

Se o conjunto X é tal que

$$X \subset A \cap B \text{ e } A \cap B - X = \{3; 15; 21\}, \text{ Então } X \text{ é}$$

igual a:

- a) \emptyset
- b) $\{3; 15; 21\}$
- c) $\{9; 27\}$
- d) $\{0; 6; 12; 18; 24; 27; 30\}$
- e) $\{0; 1; 5; 6; 7; 11; 12; 13; 18; 23; 24; 25; 27; 29; 30\}$

20) (UFMS) Quantos são os elementos do conjunto

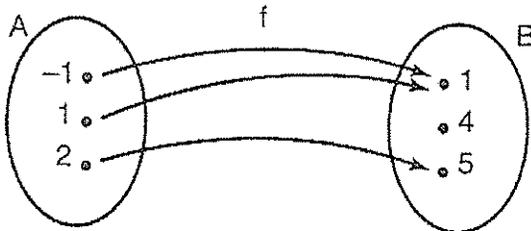
$$\{x \in \mathbb{N} \mid 10\pi < x < \pi + 30\}?$$

- a) 2
- b) 1
- c) 3
- d) infinitos
- e) o conjunto é vazio

5.2 Funções

Dados dois conjuntos, A e B, denomina-se aplicação ou função f de A em B toda relação que a cada elemento de A associa um e só um elemento de B.

Exemplo:



Numa função f de A em B, temos os conjuntos:

- ◆ Domínio
 $D(f) = \{-1, 1, 2\}$: o conjunto A
- ◆ Imagem
 $Im(f) = \{1, 4\}$
- ◆ Contradomínio
 $CD(f) = \{1, 4, 5\}$: o conjunto B

Representado por x e y , respectivamente, os elementos de A e B, podemos escrever:

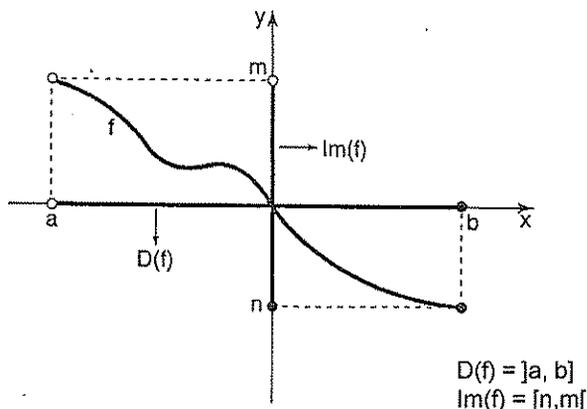
$$f: A \rightarrow B \text{ ou } y = f(x).$$

Em que:

x é a variável independente
 y é a variável dependente

5.3 Cálculo do domínio e da imagem através do gráfico

Observe o gráfico da função f .



Dado o gráfico de uma função, podemos achar o domínio e a imagem da seguinte forma:

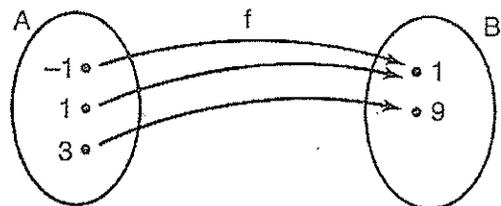
◆ O domínio da função é o conjunto de todos os pontos do eixo das abscissas, que são obtidos pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

◆ A imagem da função é o conjunto de todos os pontos do eixo das ordenadas, que são obtidas pelas projeções dos pontos do gráfico de f sobre o referido eixo.

5.4 Classificação das funções

a) Função sobrejetora

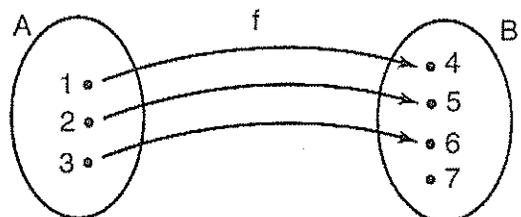
Dizemos que uma função f de A em B é sobrejetora, quando o conjunto imagem for igual ao contradomínio da função.



$$Im(f) = CD(f) = \{1, 9\}$$

b) Função injetora

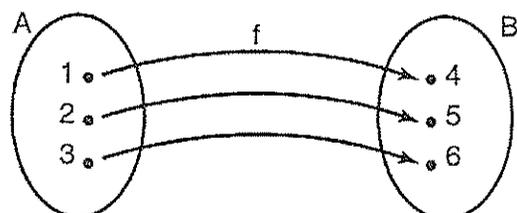
Dizemos que uma função f de A em B é injetora se quaisquer dois elementos diferentes do seu domínio têm imagens diferentes.



$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

c) Função bijetora

É toda função f de A em B que é simultaneamente injetora e sobrejetora.



5.5 Função crescente e função decrescente

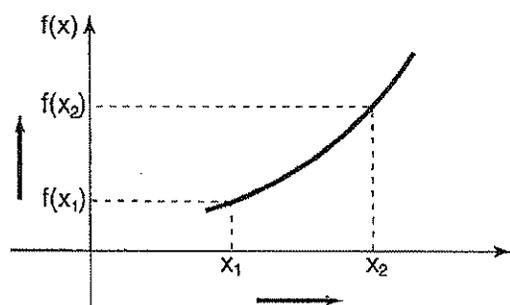
a) Função crescente

Se $A \subset D(f)$

f é crescente em $A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1), \forall x_1, x_2 \in A$$

Isto é, a um maior valor de x corresponde um maior valor de $f(x)$.



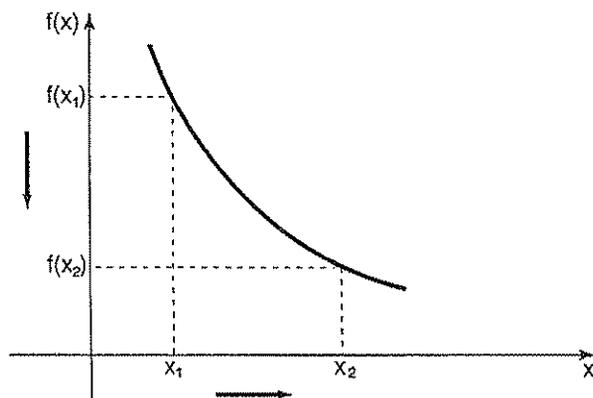
b) Função decrescente

Se $A \subset D(f)$

f é decrescente em $A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1), \forall x_1, x_2 \in A$$

Isto é, um maior valor da variável x corresponde um menor valor de $f(x)$.



5.6 Função par

Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é par se, e somente se:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

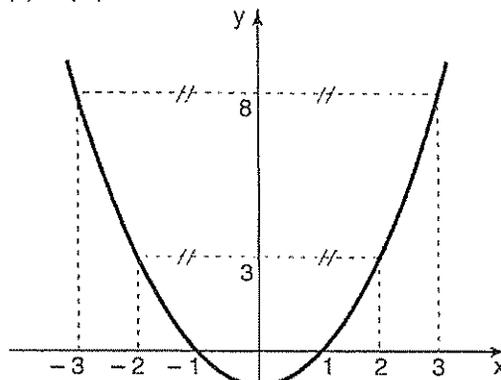
Isto é, elementos opostos quaisquer de A têm imagens iguais.

Observação:

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo vertical.

Note que:

$$f(2) = f(-2) = 3$$



5.7 Função ímpar

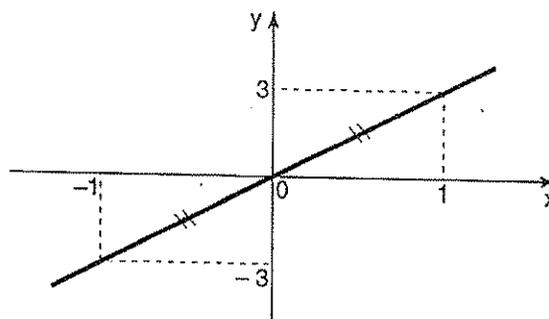
Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é ímpar se, e somente se:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

Isto é, elemento oposto quaisquer de A têm imagens opostas.

Observação:

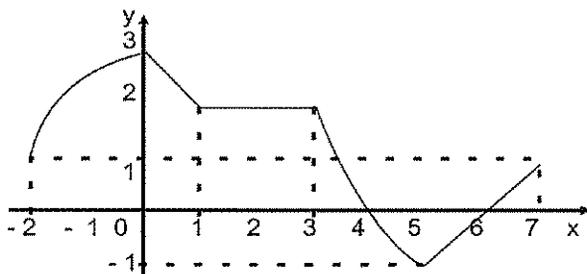
O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.





Exercícios Comentados

01 O gráfico abaixo representa a função $y = f(x)$.



Determine:

- $f(-2)$
- $f(0)$
- $f(\sqrt{2})$
- x , de modo que $f(x) = -1$
- o conjunto-solução da inequação $f(x) > 0$
- o conjunto-solução da inequação $f(x) \leq 0$
- o domínio dessa função
- o conjunto-imagem

Resolução

- $a) = 1$
- $b) = 3$
- $c) = 2$
- $d) \Rightarrow x = 5$
- $e) S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 4 \text{ ou } 6 < x \leq 7\}$
- $f) S = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x \leq 6\}$
- $g) D = [-2; 7]$
- $h) Im = [-1; 3]$

02 Sendo $f(x+3) = x^2 - 3x$ então $f(7)$ é igual a:

- 28
- 18
- 10
- 4
- 0

Resolução:

$$\begin{aligned} x+3 &= 7 \Rightarrow x = 4 \\ f(4+3) &= 4^2 - 3 \cdot 4 \\ f(7) &= 4 \end{aligned}$$

03 O gráfico da função $f(x) = x^2 + mx + n$ passa pelos pontos $(-1, 6)$ e $(3, 2)$. Calcule o valor de $f(4)$

Resolução:

$$\begin{aligned} (-1, 6) &\Rightarrow (-1)^2 + m \cdot (-1) + n = 6 \\ &\Rightarrow -m + n = 5 \Rightarrow n = 5 + m(I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3, 2) &\Rightarrow 3^2 + m \cdot 3 + n = 2 \\ &\Rightarrow 3m + n = -7(II) \end{aligned}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$3m + 5 + m = -7 \Rightarrow m = -3$$

$$Em(I): n = 5 - 3 \Rightarrow n = 2$$

$$Logo, f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\therefore f(4) = 6$$

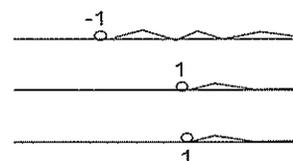
04 O domínio da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ é

- $(1, +\infty)$
- $(-1, +\infty)$
- $(-1, 1)$
- \emptyset
- $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Resolução:

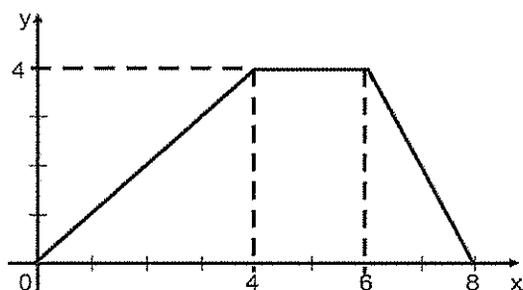
$$\begin{aligned} \text{Condições: } x+1 &> 0 \text{ e } x-1 > 0 \\ &\Rightarrow x > -1 \quad x > 1 \end{aligned}$$

Fazendo a interseção



$$D = (1, +\infty) \text{ Letra A.}$$

05] O gráfico da função f está representado na figura:



Sobre a função f é falso afirmar que:

- a) $f(1) + f(2) = f(3)$
- b) $f(2) = f(7)$
- c) $f(3) = 3f(1)$
- d) $f(4) - f(3) = f(1)$
- e) $f(2) + f(3) = f(5)$

Resolução:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 & f(4) &= 4 \\ f(2) &= 2 & f(5) &= 4 \\ f(3) &= 3 & f(7) &= 2 \end{aligned}$$

Logo, a opção errada é E.



Exercícios de Sala

01] Sendo $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x + 3 & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ 10 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Calcule o valor de expressão

$$E = f(-2) + f(-1) + f(1) + f(2) + f(267)$$

02] Dê o domínio da função:

a) $f(x) = 5x + 7$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

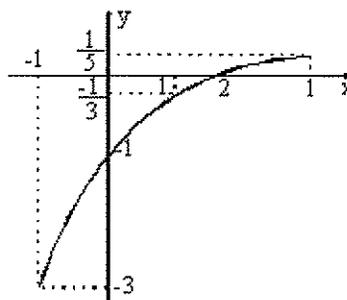
d) $f(x) = \sqrt{x+3}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$

f) $f(x) = \sqrt{13-x} + \frac{x^2+1}{\sqrt{x+5}}$

03] (FUVEST) A figura abaixo representa o gráfico de

uma função da forma $f(x) = \frac{x+a}{bx+c}$, para $-1 \leq x \leq 3$.



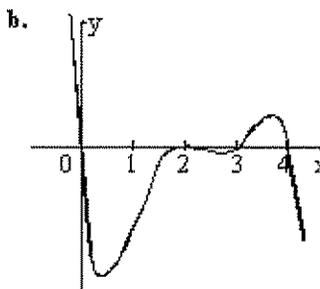
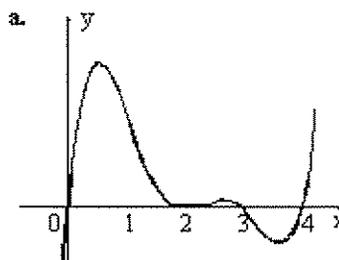
Pode-se concluir que o valor de b é:

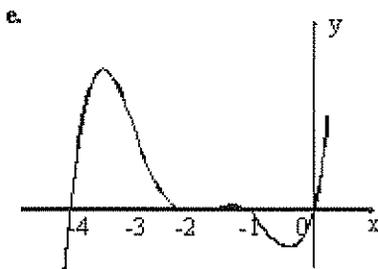
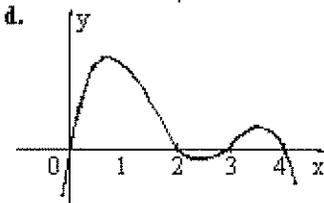
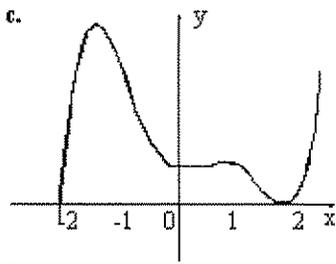
- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) 2

04] (FUVEST) Dado o polinômio

$$p(x) = x^2(x-1)(x^2-4),$$

o gráfico da função $y = p(x-2)$ é melhor representada por:





05 (MACK) Se $[-1; 2]$ é o conjunto imagem de uma função $f(x)$, então o conjunto imagem de $g(x) = 2f(x) + 1$ é:

- a) $[-1; 2]$
- b) $[-2; 1]$
- c) $[-1; 5]$
- d) $[0; 4]$
- e) $[-4; -1]$

06 (MACK) Considere as funções $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = 3x^2 + 2x - 4$, $h(x) = x - x^2$ e o número real

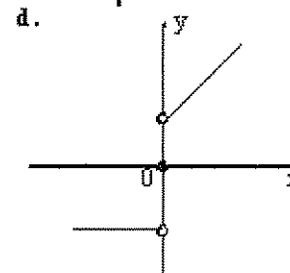
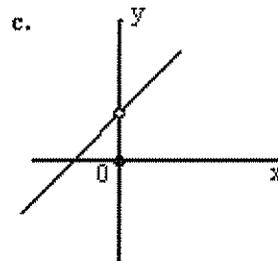
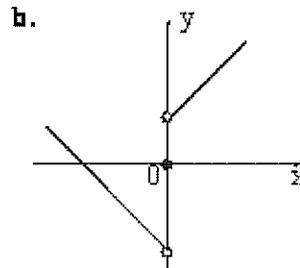
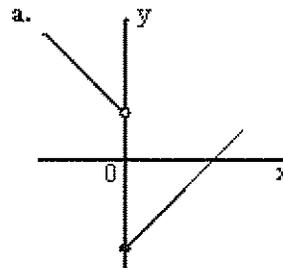
$$A = \left| \frac{f(0)}{g(-1)} \right| \cdot \left| \frac{g(-1)}{h(2)} \right|. \text{ Então } 5A^{-1} \text{ vale:}$$

- a) $\frac{1}{6}$
- b) 6
- c) -6
- d) 5
- e) $\frac{1}{5}$

07 (MACK) Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}. \text{ O melhor esboço gráfico da}$$

função $g(x) = (x+1) \cdot f(x)$ é:

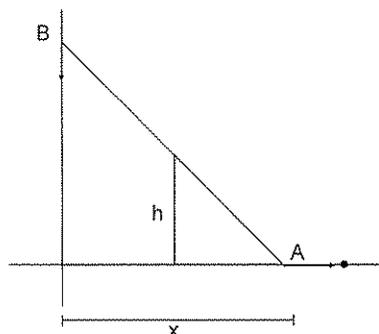


08) Considerando os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 2, 3\}$:

- a) Determine os pares ordenados da seguinte relação:
 $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 - 1\}$
 b) Calcule o domínio e o conjunto imagem de R_1

09) Um homem sobe numa escada de 5 metros de comprimento, encostada em um muro vertical. Quando ele está num degrau que dista 3 metros do pé da escada, esta escorrega, de modo que a extremidade A se desloca para a direita, conforme a seta da figura, e a extremidade B desliza para baixo, mantendo-se aderente ao muro.

Encontre a fórmula que expressa a distância h , do degrau em que está o homem até o chão, em função da distância x , do pé da escada ao muro.



10) (PUC-SP) A produção diária de um certo produto, realizado por um determinado operário, é avaliada por $P_{\text{produção}} = 8 \cdot x + 9 \cdot x^2 - x^3$ unidades, x horas após as 8 horas da manhã, quando começa o seu turno.

- a) Qual é a sua produção até o meio-dia?
 b) Qual é a sua produção durante a quarta hora de trabalho?

11) Durante um percurso de x km, um veículo faz cinco paradas de 10 minutos cada uma. Se a velocidade média desse veículo em movimento é de 60 km/h, a expressão que permite calcular o tempo, em horas, que ele leva para percorrer os x km é:

- a) $\frac{6x+5}{6}$
 b) $\frac{x+50}{60}$
 c) $\frac{6x+5}{120}$
 d) $\frac{x}{60} + 50$
 e) $x + \frac{50}{6}$

12) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x+1) = 2f(x) - 5 \text{ e } f(0) = 6. \text{ O valor de } f(2) \text{ é:}$$

- a) 0
 b) 3
 c) 8
 d) 9
 e) 12

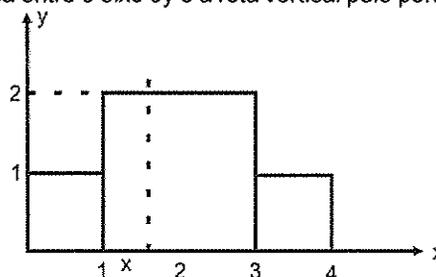
13) Uma função real de variável real f é tal que

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ e } f(x+1) = x \cdot f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \text{ O valor}$$

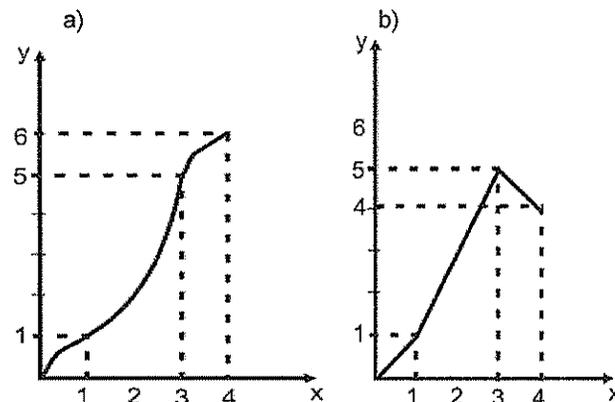
de $f\left(\frac{7}{2}\right)$ é:

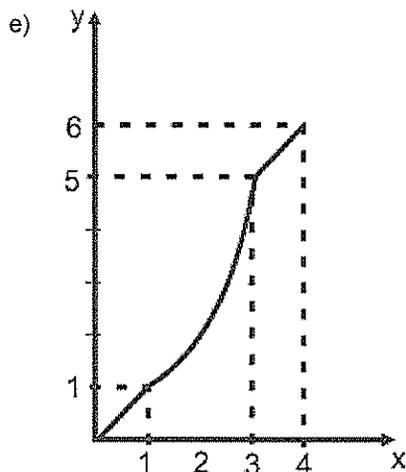
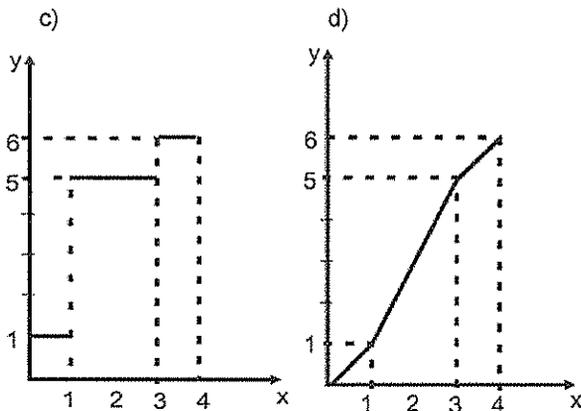
- a) π
 b) $7\sqrt{\pi}$
 c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
 d) $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
 e) $\frac{\pi\sqrt{7}}{15}$

14) Considere, na figura seguinte, a área $A(x)$ da região interior à figura formada pelos três quadrados e compreendida entre o eixo Oy e a reta vertical pelo ponto $(x; 0)$



Então o gráfico da função $y = A(x)$, para $0 \leq x \leq 4$, é:





15) Sobre a função real, de variável real, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$, pode-se afirmar corretamente:

- (01) O domínio da f é \mathbb{R} .
 (02) O domínio da f intercepta o eixo Ox no ponto $(-1;0)$.
 (04) $\frac{2f(-2)}{f(1)} = 6$
 (08) Se $f(x) = 3$, então $x \in \{-2; 2; 5\}$.
 (16) $f(x)$ e $g(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 3x}$ são funções iguais.

Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.



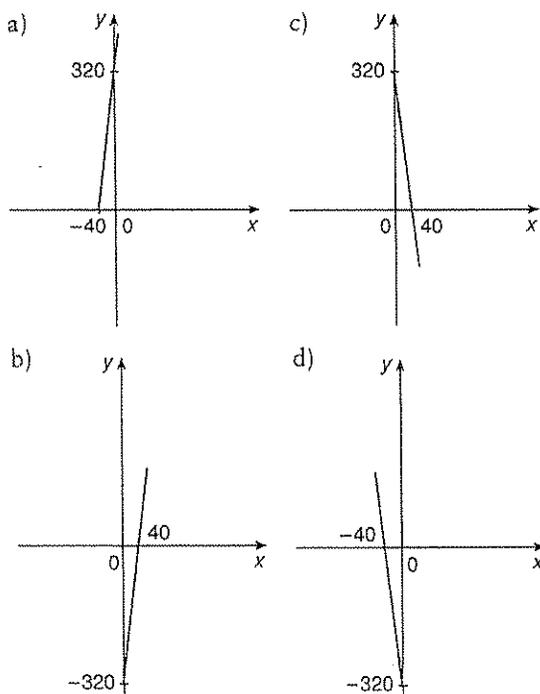
Exercícios de Casa

- 01) Considere as funções $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = 2x + 3$. Calcule $f(g(1))$.
- 02) Considere a função $f(x) = ax + b$. Determine as constantes a e b sabendo que $f(2) = -2$ e que 3 é raiz de $f(x)$.
- 03) De acordo com a Lei de Poiseuille, a velocidade do sangue num ponto a r cm do eixo central de um vaso sanguíneo é dada pela função: $v(r) = C(R^2 - r^2)$ em cm/s, onde C é uma constante e R é o raio do vaso. Supondo para um determinado vaso que $C = 1,8 \cdot 10^4$ e $R = 10^{-2}$ cm, calcule
- a) a velocidade do sangue no eixo central do vaso sanguíneo;
 b) a velocidade do sangue no ponto médio entre a parede do vaso e o eixo central.
- 04) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 2x + 1$, resolva a equação: $\frac{f(1) - g(x)}{f[g(2)]} = \frac{f(2)}{f(0)}$
- 05) Considerando a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x + 2$, calcule a e b sabendo que $f(a) = b$ e $f(b) = 36a + 1$.
- 06) (UFSC) Considere a função $f(x)$ real, definida por $f(1) = 43$ e $f(x + 1) = 2f(x) - 15$. Determine o valor de $f(0)$.
- 07) (PUC-RS) Se $f(x + 1) = x^2 + 2$, então $f(3)$ é igual a:
- a) 2
 b) 4
 c) 6
 d) 11
 e) 18

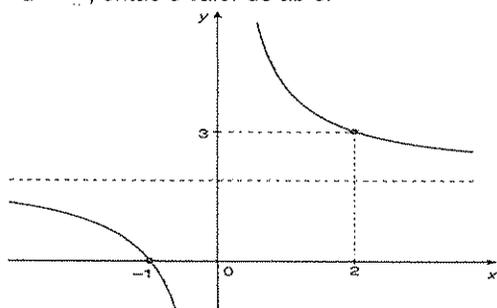
08 (Fuvest-SP) A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor de x de uma mercadoria é:

- a) $f(x) = x - 3$
- b) $f(x) = 0,97x$
- c) $f(x) = 1,3x$
- d) $f(x) = -3x$
- e) $f(x) = 1,03x$

09 (UFRN) Um comerciante decidiu fabricar camisetas de malha para vendê-las na praia, ao preço de R\$8,00 a unidade. Investiu no negócio R\$320,00. Sabendo que o lucro (y) obtido é função da quantidade de unidades vendidas (x), o gráfico que mais se aproxima da representação dessa função é



10 (Mackenzie-SP) Se a curva dada é o gráfico da função $y = a + \frac{b}{x}$, então o valor de ab é:



- a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- b) $\sqrt{3}$
- c) 2
- d) 4
- e) $\frac{1}{4}$

11 (Faap-SP) Durante um mês, o número y de unidade produzidas de um determinado bem em função do número x de funcionários empregados de acordo com a lei $y = 50\sqrt{x}$. Sabendo que 121 funcionários estão empregados, o acréscimo de produção com a admissão de 48 novas funcionários é:

- a) 550
- b) 250
- c) 100
- d) 650
- e) 200

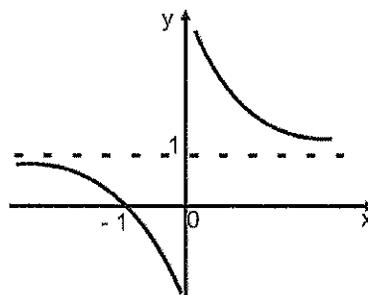
12 Se $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ são funções definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 \text{ e } g(x) = x^2, \text{ Julgue verdadeiro (V) ou falso (F) os itens.}$$

() $g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1.$

() A função g admite inversa.

() O esboço do gráfico de f é:



13 Seja $f(x)$ Uma função cujo domínio é o conjunto dos números inteiros e que associa a todo inteiro ímpar o valor zero e a todo inteiro par o triplo de seu valor.

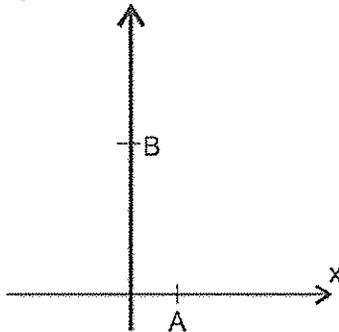
O valor da soma $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2k - 1)$ é:

- a) k^2
- b) $3k(k-1)$
- c) $2k - 1$
- d) $3k - 3$
- e) $3k^2$

14 A função $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}$

- a) é sempre positiva.
- b) nunca assume o valor $-\frac{1}{2}$
- c) apresenta gráfico que não intercepta o eixo dos x.
- d) é sempre crescente.
- e) assume todos os valores reais.

15 (Observe esta figura:



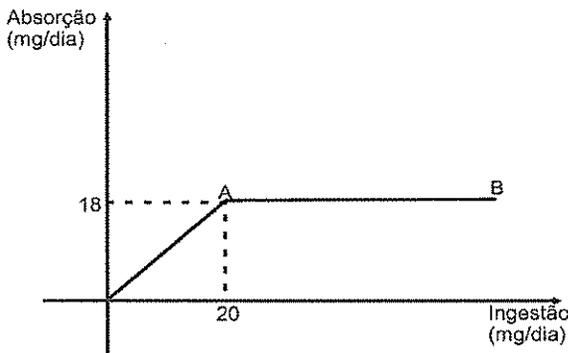
Nessa figura estão representados o ponto A, cuja abscissa é 1, e o ponto B, cuja ordenada é 5. Esses dois pontos pertencem ao gráfico da função

$f(x) = (x+1)(x^3 + ax + b)$, em que a e b são números reais.

Assim sendo, o valor de $f(4)$ é:

- a) 65
- b) 115
- c) 170
- d) 225

16 Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.

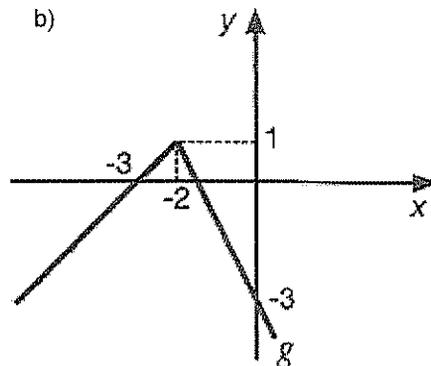
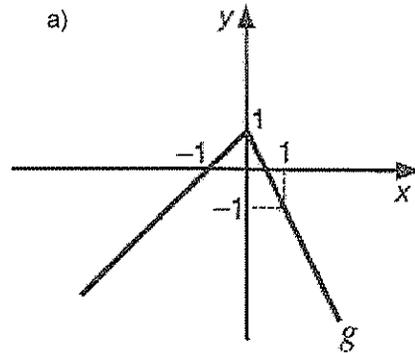
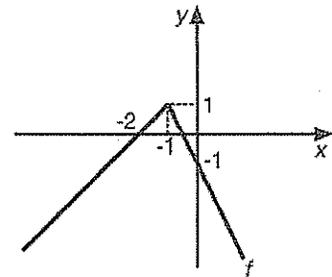


Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo coposto, em mg/ dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia.

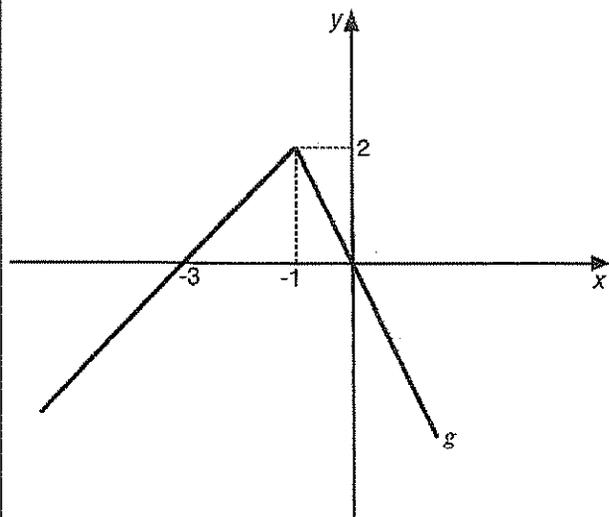
A única afirmativa falsa relativa ao gráfico é:

- a) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
- b) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/ dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/ dia
- c) Para ingestão acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
- d) Para ingestões de até 20 mg/ dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

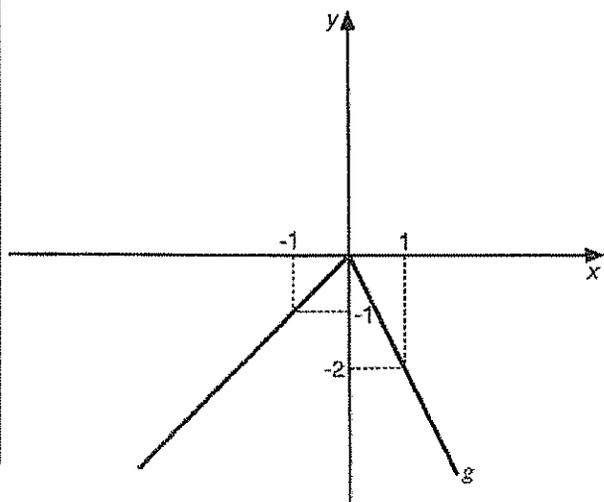
17 Se f é uma função cujo gráfico é dado abaixo, então o gráfico da função g , tal que $g(x) = f(x-1)$ será dado por:



c)



d)



18) Considere as afirmações seguintes:

I. A função f , de \mathbb{R}^* em \mathbb{R}^* , dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ é igual à sua inversa.

II. O domínio da função real definida por $f(x)$

$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ é o intervalo $[1; +\infty[$.

III. A função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por $f(x) = x^3$, é ímpar. É verdade que somente:

- a) I é verdadeira.
- b) II é verdadeira.
- c) III é verdadeira.
- d) I e III são verdadeiras.
- e) II e III são verdadeiras.

19) Considere a função de domínio $\mathbb{R} - \{-3\}$ dada por

$$f(x) = \frac{3-x}{x+3}. \text{ Essa função tem apenas valores positivos se } x \text{ pertence ao intervalo:}$$

- a) $] -3; 3[$
- b) $] -\infty; -3[$
- c) $] 3; +\infty[$
- d) $] -\infty; 3[$
- e) $] 0; +\infty[$

20) Considere a função $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Podemos afirmar que:

(01) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

(02) O domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de zero.

(04) $f(x) > 0$ se $x < -1$

(08) O gráfico de $f(x)$ é uma reta que passa ponto de coordenadas $(1; 0)$.

(16) Se $-1 < x < 0$, então $f(x) > 0$

Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.

21) Sendo $f(x) = 3x + \sqrt{-(x^2 - 5x + 6)^2}$, então a imagem da função é:

- a) $\{6; 9\}$
- b) $\{2; 3\}$
- c) $\{0; 2\}$
- d) $\{0; 3\}$
- e) $\{3; 0\}$

22) O domínio da função $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4+x}} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^3}$ é igual a:

- a) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -1\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$

23] Considere a função $f: R \rightarrow R$ tal que para todo x real se tem $f(5x) = 5f(x)$. Se $f(15) = 20$, então o valor de $f(75)$ é igual a:

- a) 50
- b) 100
- c) 150
- d) 200
- e) 250

24] A função $f: R \rightarrow R$ satisfaz a igualdade de $f(2x+1) = 10 \cdot f(x) - 3$, para todo x real. Se $f(31) = 0$, então o valor de $f(0)$ é igual a:

- a) 0,33333
- b) 0,3333
- c) 0,333
- d) 0,33

25] Sejam f e g funções de R em R definidas por:
 $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Determine a soma dos números associados à (s) proposição(ões) verdadeiras(s).

(01) A reta que representa a função f intercepta o eixo das ordenadas em $(0;3)$.

(02) f é uma função crescente.

(04) -1 e $+1$ são os zeros da função g .

(08) $\text{im}(g) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$.

(16) A função inversa da f é definida por $f^{-1}(x) = -x + 3$.

(32) O valor de $g(f(1))$ é 3.

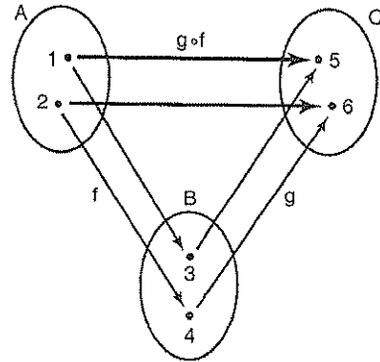
(64) O vértice do gráfico de g é o ponto $(0;0)$.

Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.

6. Composição de Funções

Dadas duas funções, f e g , podemos obter uma outra função, que se representa por $g \circ f$ (lê-se g após f) e se chama função composta de g com f .

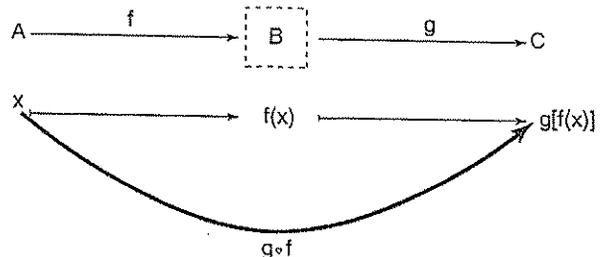
Em que: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$



A imagem de um elemento qualquer x de A por meio da função composta $g \circ f$ é determinada em duas etapas:

◆ a primeira transforma o elemento x de A no elemento $f(x)$ de B ;

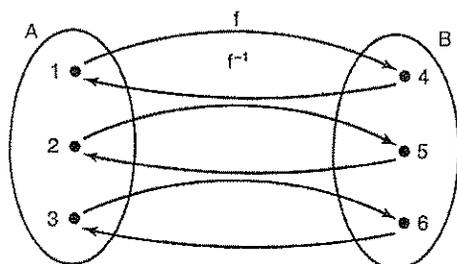
◆ a segunda transforma o elemento $f(x)$ de B no elemento $g[f(x)]$ de C .



A função composta faz sozinha o que f e g fazem juntas.

6.2 Função inversa

Denomina-se função inversa da função bijetora $f: A \rightarrow B$ a função $f^{-1}: B \rightarrow A$ que se obtém trocando de posição os elementos de todos os pares ordenados da função f .



$$f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$$

$$f^{-1} = \{(4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

Observação:

Para se obter a inversa de uma função, devemos proceder da seguinte forma:

- 1°. troca-se x por y e y por x ;
- 2°. coloca-se o novo y em função do novo x .



Exercícios Comentados

01 Dadas as funções: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 = 4x$ e

$$h(x) = \sqrt{x}, \text{ determine}$$

- a) $g \circ f$
- b) $f(g(x))$
- c) $g \circ f \circ h(4)$
- d) o domínio de $h(g(x))$

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{a) } g \circ f &= g(f(x)) = (2x + 3)^2 - 4(2x + 3) \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 8x - 12 \\ &= 4x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(g(x)) = 2(x^2 - 4x) + 3$$

$$\text{c) } g \circ f \circ h(4) = 21$$

$$h(4) = \sqrt{4} = 2$$

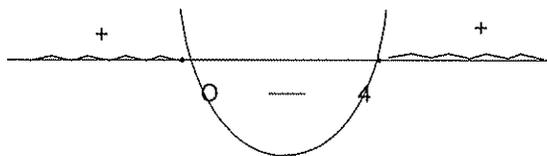
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$g(7) = 7^2 - 4 \cdot 7 = 21$$

$$\text{d) } h(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$\text{Dom: } x^2 - 4x \geq 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 4$$



$$\text{Dom} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}.$$

02 Dada a função $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, determine:

$$\text{a) } f^{-1}(x)$$

$$\text{b) } f^{-1}(3)$$

Resolução:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$x = \frac{2y-1}{x+3}$$

$$xy + 3x = 2y - 1$$

$$2y - xy = 3x + 1$$

$$y = \frac{3x+1}{2-x} \quad f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$$

$$\text{b) } f^{-1}(3) : x = 3, y = ?$$

$$\text{Na função } f(x) : y = 3 \text{ e } x = ?$$

$$\text{Logo, } \frac{2x-1}{x+3} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3x + 9 = 2x - 1$$

$$x = -10. \therefore f^{-1}(3) = -10.$$

03 Sejam as funções $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = \frac{x-1}{x+2}$. Determine $g(x)$

$$\text{Resolução: } f(g(x)) = 2g(x) - 3 = \frac{x-1}{x+2}$$

$$2g(x) = \frac{x-1}{x+2} + 3$$

$$g(x) = \frac{4x+5}{2x+4}$$

04 Sejam as funções $g(x) = \frac{x+1}{1-2x}$ e

$$f(g(x)) = 2x^2 - 3x + 5. \text{ Calcule } f(1)$$

Resolução

$$f(g(x)) = f(1) \Rightarrow g(x) = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{1-2x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Logo, } f(g(0)) = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 5$$

$$f(1) = 5$$

05 Determine a inversa em cada caso:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

Resolução:

$$x = \frac{2y-1}{y+2} \therefore xy + 2x = 2y - 1$$

$$2y - xy = 2x + 1$$

$$y = \frac{2x+1}{2-x} \therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{2-x}$$

b) $f: R\{x \geq -2\} \rightarrow \{y \geq -7\} f(x) = x^2 + 4x - 3$

Resolução:

$$x = y^2 + 4y - 3$$

$$y^2 + 4y + 4 - 4 = x + 3$$

$$(y+2)^2 = x+7$$

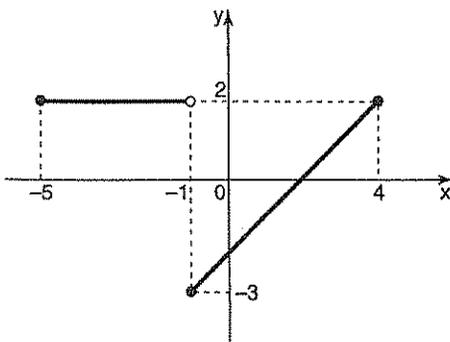
$$y = \pm \sqrt{x+7} - 2$$

Im $f^{-1} = Df = y \geq -2$. Logo, $f^{-1}(x) = \sqrt{x+7} - 2$



Exercícios de Sala

01 Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $[-5, 4]$ pelo gráfico dado. Então o valor de $f(f(-3))$ é:



- a) -2
b) 0
c) -1
d) 1
e) 2

02 A função real definida por $f(x) = kx + m$ é ímpar, tal que $k \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{R}$ e $f(-1) = 3$.

Então, a soma das raízes da equação

$$f(f(x)) = f\left(\frac{-x^2}{3}\right) \text{ é:}$$

- a) 3
b) -3
c) 0
d) -9
e) 9

03 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $y = f(x)$. Sabendo-se que $f(0) = 3$, $f(1) = 2$ e $f(3) = 0$, o valor de x tal que $f(f(x+2)) = 3$

- a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

04 Dadas as funções reais $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = 2x + k$, o valor de k , de modo que $f[g(x)] = g[f(x)]$, é:

- a) -3
b) -1

c) $-\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3}$

- e) 1

05 Dadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere $h = f \circ g$. Então, podemos afirmar que:

- a) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente;
b) h é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente;

c) h é estritamente crescente mas não é necessariamente inversível;

d) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente;

e) n. d. a.

06] Se f^{-1} é a função inversa da função f , com \mathbb{R} em \mathbb{R} , definida por $f(x) = 3x - 2$, então $f^{-1}(-1)$ é igual a:

a) -1

b) $-\frac{1}{3}$

c) $-\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{3}$

07] Seja f uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2x + 1$. Se f^{-1} é a função inversa de f , então

$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) - f^{-1}(5)$ é igual a:

a) $f(1)$

b) $f(-2)$

c) $2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $3 \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)$

e) $\frac{1}{2} \cdot f(-1)$

08] Sejam as funções f e g , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = kx + t$. A função g será a inversa de f se, e somente se:

a) $k : t = \frac{1}{4}$

b) $k - t = 1$

c) $k = 2t$

d) $k + t = 0$

e) $k = t = \frac{1}{2}$

09] Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função da forma

$$f(x) = ax + b \text{ e } (f \circ f)(x) = x + 4 \text{ para todo } x \text{ real,}$$

então a inversa de f é:

a) $f^{-1}(x) = -x - 2$

b) $f^{-1}(x) = x + 2$

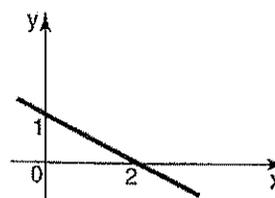
c) $f^{-1}(x) = x^2 + 8x + 16$

d) $f^{-1}(x) = x - 8$

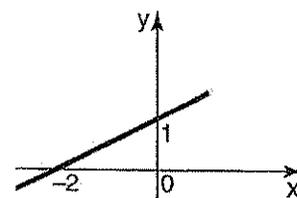
e) $f^{-1}(x) = x - 2$

10] Dada a função $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, o gráfico de sua inversa $f^{-1}(x)$ é

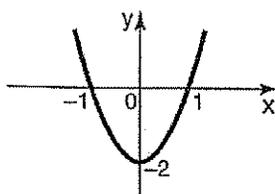
a)



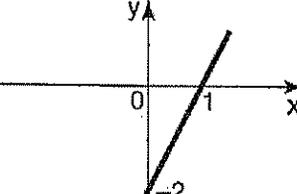
d)



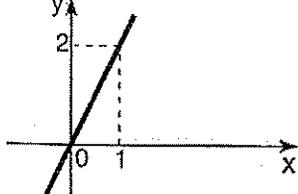
b)



e)



c)





Exercícios de Casa

01 Considerando as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 3 - x$, determine:

- $f(g(x))$
- $g(f(x))$
- $g(f(h(x)))$

02 Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^2 - x - 10$ e $g(x) = 3x - t$. Sabendo que $f(g(1)) = 2$, calcule t .

03 Sabendo que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, calcule $g(f(x))$.

04 (UFU-MG) Se $f(x) = 2x + k$ e $g(x) = mx + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, determine os valores de k e m para que $g \circ f$ seja a função identidade.

05 Determine a inversa das funções:

- $f(x) = 4x - 1$
- $y = \frac{2x + 3}{x - 5}$, com $x \neq 5$

06 Determine a inversa:

- $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$
- $f(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$

07 Se $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ calcule $f^{-1}(3)$

08 Se $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ é a inversa de $g(x) = \frac{3x + 4}{x - 1}$ calcule $g(a + b + c + d)$.

09 Dada a função $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3} (x \neq 3)$, determine:

- $f(f(f(x)))$
- x para que $f(f(f(x))) = 1$

10 As funções f e g , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , são definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 3x + m$. Se $f(g(x)) = g(f(x))$, então $f(m)$ é um número:

- primo;
- negativo;
- cubo perfeito;
- menor que 18;
- múltiplo de 12.

11 Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3$. É correto afirmar que a função $f \circ g$, composta de g e f , é:

- bijetora;
- ímpar;
- par;
- decrescente, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- injetora e não sobrejetora.

12 Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = 3x + 6$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Então o valor de f em zero é:

- 1
- 0
- 3
- 2
- 1

13 Consideraremos as seguintes afirmações sobre uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq f(-x)$, então f não é ímpar.
- Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(-x) = -f(x)$, então f não é ímpar.
- Se f é par e ímpar, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$.
- Se f é ímpar, então $f \circ f$ (f composta com f) é ímpar.

Podemos afirmar que estão corretas as afirmações de números:

- 1 e 4
- 1, 2 e 4

- c) 1 e 3
- d) 3 e 4
- e) 1, 2 e 3

14) Dados as funções a seguir: $g(x) = 3x + 2$

$$(g \circ f)(x) = 6x - 4$$

$$h(x+1) = h(x) + x$$

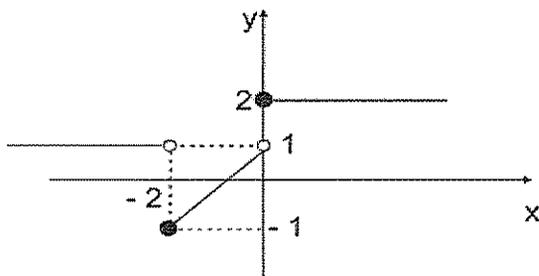
$$t(2x) = 2t(x)$$

$$t(6) = 18$$

Calcular o valor da expressão $f(4) + h(6) - h(4) + t(3)$

- a) 18
- b) 24
- c) 22
- d) 16

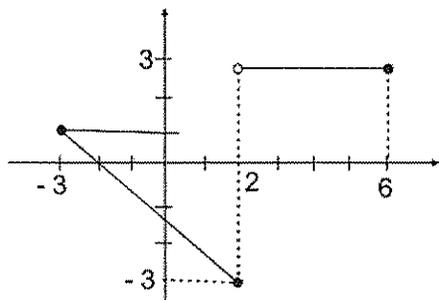
15) Com respeito a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado a seguir, é correto afirmar:



- a) $(f \circ f)(-2) = 1$
- b) $(f \circ f)(-1) = 2$
- c) $(f \circ f)(-2) = -2$
- d) $(f \circ f)(-1) = 0$
- e) $f(-2) = 1$

16) Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $[-3; 6]$ conforme indicado no gráfico.

Desde modo, o valor de $f(f(2))$ é:



- a) -3
- b) $-\frac{1}{2}$
- c) 1
- d) 3
- e) 0

17) Dadas as funções reais:

$$f(x) = 2x + 3 \text{ e } g(x) = ax + b,$$

se $f[g(x)] = 8x + 7$, o valor de $a + b$ é:

- a) 13
- b) 12
- c) 15
- d) 6
- e) 5

18) Dadas as funções:

$$f(x) = \frac{2x-3}{5}$$

$g(x) = x^2 + 4x - 8$, e $h(x) = 2x$, a alternativa incorreta é:

a) $f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{5}$

b) As três funções são crescente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

c) O vértice de $g(x)$ é ponto $V(-2; -12)$.

d) A imagem de $h(x)$ é $\mathbb{R} > 0$.

e) O domínio das três funções é \mathbb{R}

19) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) verdadeira(s).

(01) O domínio da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x - 6} \text{ é}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\} - \{6\}.$$

(02) A função inversa da função $g(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ é

definida por $g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.

(04) Sejam h e k duas funções, dadas por $h(x) = 2x - 1$ e $k(x) = 3x + 2$. Então $h(k(1))$ é igual a 9.

(08) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$, é uma função decrescente.

(16) A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 + 1$, é uma função par.

(32) O conjunto-imagem da função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = |x^2 - 4x + 3|$ é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$.

Dê, como resposta, a soma dos números dos itens corretos.

20) Determine o valor real de a para que

$f(x) = \frac{x+1}{2x+a}$ possua como inversa a função

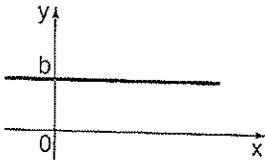
$$f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2x-1}$$

7.1 Função constante

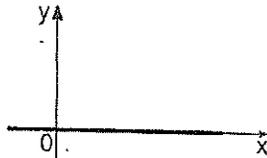
Denomina-se função constante toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$ com $b \in \mathbb{R}$ pra todo x real. O gráfico da função constante é uma reta paralela ou coincidente com o eixo x .

Podemos ter os casos:

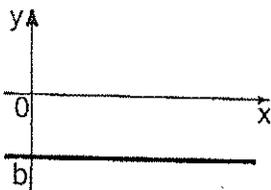
a) $b > 0$



b) $b = 0$



c) $b < 0$



7.2 Função do 1º grau

a) Definição

Denomina-se função do 1º grau toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

b) Gráfico

O gráfico da função do 1º grau é uma reta. Podemos ter os casos:

$a > 0$	$a < 0$
<p>função crescente</p>	<p>função decrescente</p>

c) Raiz ou zero

A raiz de uma função do 1º grau é o valor de x que torna $f(x) = 0$.

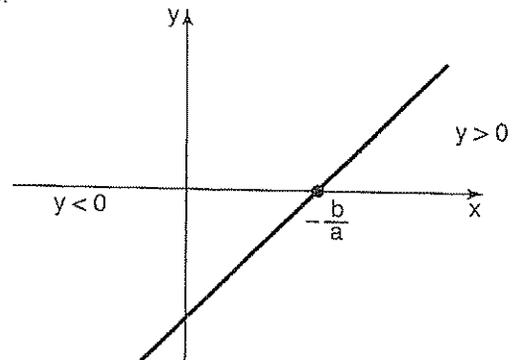
$$f(x) = ax + b \Rightarrow 0 = ax + b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

└─ raiz de $f(x)$

d) Estudo do sinal

1º caso: $a > 0$

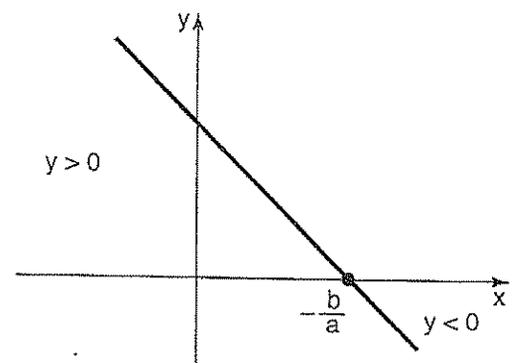


$$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow y > 0$$

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow y = 0$$

$$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow y < 0$$

2º caso: $a < 0$



$$x > -\frac{b}{a} \Rightarrow y < 0$$

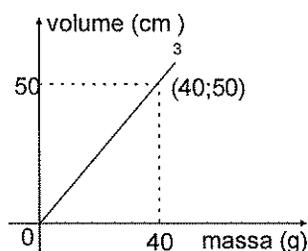
$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow y = 0$$

$$x < -\frac{b}{a} \Rightarrow y > 0$$



Exercícios Comentados

01 (Vunesp) Apresetamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.



Baseando-se nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico.

Resolução:

a) O gráfico da função é, $x > 0$, uma reta que passa pelos pontos $(0;0)$ e $(40; 50)$.

Temos: $y = ax + b$

$$(0;0) \Rightarrow a \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow b=0$$

$$(40; 50) \Rightarrow a \cdot 40 + b = 50$$

$$40a = 50 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$\text{Logo: } y = \frac{5}{4}x$$

a) A massa (em grama) de 30 cm³ de álcool.

b) Para um volume $y = 30$ cm³ de álcool, temos:

$$30 = \frac{5}{4}x \Rightarrow x=24$$

Logo, a massa para um volume igual a 30 cm³ de álcool é 24 g.

02 A função representada pelo gráfico

é:

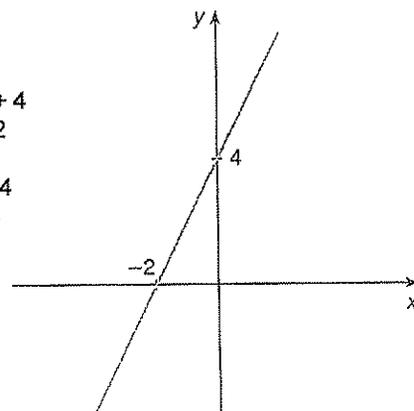
a) $y = -2x + 4$

b) $y = 4x - 2$

c) $y = 2x$

d) $y = 2x + 4$

e) $y = 2x - 4$



Resolução:

O gráfico da função é uma reta que passa pelos pontos $(-2,0)$ e $(0,4)$.

$$f(x) = ax + b$$

$$(0, 4) \Rightarrow a \cdot 0 + b = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$(-2, 0) \Rightarrow a \cdot (-2) + b = 0 \Rightarrow -2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{Logo, } f(x) = 2x + 4.$$

03 (Vunesp) Um operário ganha 3,00 por hora de trabalho de sua jornada semanal regular de trabalho, que é de 40 horas. Eventuais horas extras são pagas com um acréscimo de 50%. Encontre uma forma algébrica para expressar seu salário bruto semanal S , para as semanas em que trabalhar h horas, com $h \geq 40$.

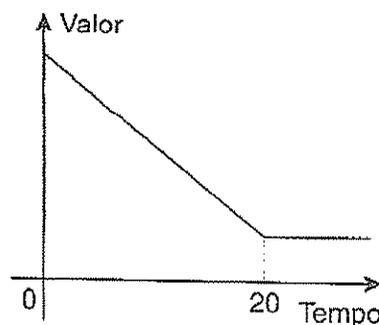
$$\text{Resolução: } S = 3x 40 + 3 \times 1,5 \times (h-40)$$

$$S = 120 + 4,5 (h-40)$$

$$S = 120 + 4,5 h - 180$$

$$S = 4,5h - 60$$

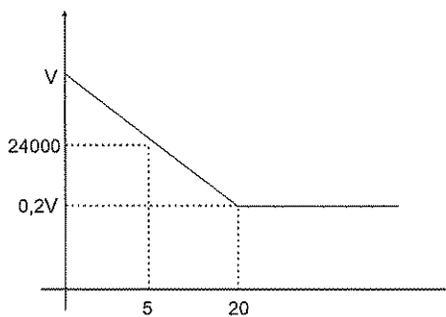
04 (PUC-SP) Um veículo de transporte de passageiros tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sofre desvalorização constante por ano. Veja a figura:



Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dono, após 5 anos de uso, R\$ 24.000,00. Sabendo-se que o valor comercial do veículo atinge seu valor mínimo após 20 anos de uso e que esse valor mínimo corresponde a 20% do valor que tinha quando era novo, então qual é esse valor mínimo?

- a) R\$ 3.000,00
- b) R\$ 12.000,00
- c) R\$ 7.500,00
- d) R\$ 6.000,00
- e) R\$ 4.500,00

Resolução:



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{20}{5} = \frac{v - 0,2v}{v - 24.000}$$

$$4(v - 24.000)$$

$$v - 24.000 = 0,2v$$

$$0,8v = 24.000$$

$$v = \frac{24.000}{0,8}$$

$$v = 30.000 \text{ mínimo: } 0,2 \cdot 30.000 = 6000$$

05 (Fuvest) A tabela abaixo mostra a temperatura das águas do oceano Atlântico (ao nível do Equador) em função da profundidade:

Profundidade	Temperatura
superfície	27 °C
100 m	21 °C
500 m	7 °C
1.000 m	4 °C
3.000 m	2,8 °C

Admitindo que variação de temperatura seja aproximadamente linear entre cada duas medições feitas para a profundidade, a temperatura prevista para a profundidade de 400 m é:

- a) 16 °C
- b) 14 °C
- c) 12,5 °C
- d) 10,5 °C
- e) 8 °C

Resolução: $y = a x + b$

x = profundidade
 y = temperatura

$$(100, 21) \Rightarrow \begin{cases} 100a + b = 21 & (-1) \\ 500a + b = 7 \end{cases}$$

$$-100a - b = -21$$

$$\frac{500a + b = 7}{400a = -14}$$

$$400a = -14$$

$$a = -\frac{7}{200}$$

$$b = 21 - 100 \left(-\frac{7}{200} \right)$$

$$b = 21 + \frac{7}{2} = 24,5$$

$$y = \frac{7}{200} x + 24,5$$

$$p1 \ x = 400 \ y = \frac{-7}{200} \cdot 400 + 24,5$$

$$y = 10,5$$



Exercícios de Sala

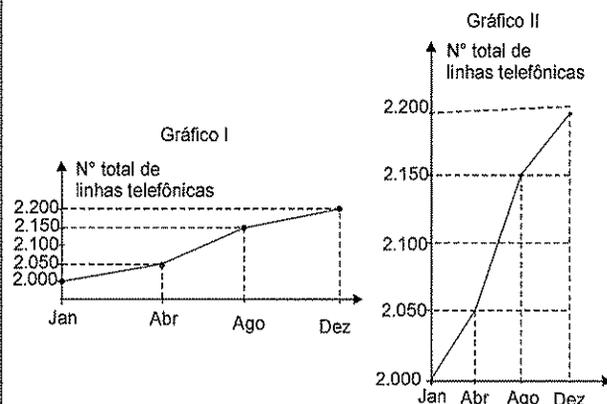
01 (UFMG) Determine m e n , de modo que pontos $(-2; -1)$ e $(-1; -2)$ pertençam ao gráfico da função definida por $y = nx + m$.

02 (Unicamp-SP) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeira custa R\$0,44 e cada quilômetro rodado custa R\$ 0,86, calcule:

- a) o preço de uma corrida de 11 km.
- b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R\$ 21,50 pela corrida.

03 (UFMG) Para alimentar seus pássaros um criador compra, mensalmente, ração e milho num total de 1.000 kg. A ração custa R\$ 40,00 o quilo, e o milho R\$ 25,00. Se x (sendo $0 < x < 1.000$) representa a quantidade, em quilograma, de ração comprada, determine a expressão da função-gasto ($g(x)$) em reais.

04 (Enem-MEC) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de inhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, representado a seguir. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, com o qual pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 nova linhas telefônicas.

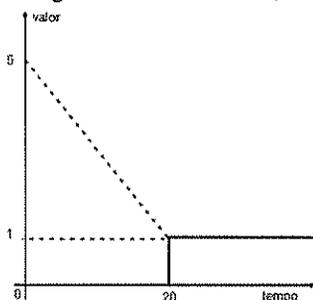


Analisando os gráficos, pode-se concluir corretamente que:

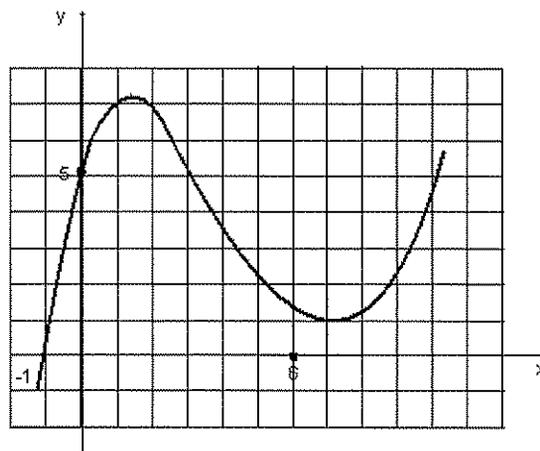
- o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.
- o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.
- o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.
- a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
- os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

05 (PUC) Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $[-3;6]$ conforme indicado no gráfico. Desse modo, o valor de $f(f(2))$ é:

- 3
- $-\frac{1}{2}$
- 1
- 3
- 0



06 (UFMG) Nesse plano cartesiano, está representado o gráfico do polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sendo a, b, c e d número reais.



Considere as afirmativas referentes a esse polinômio:

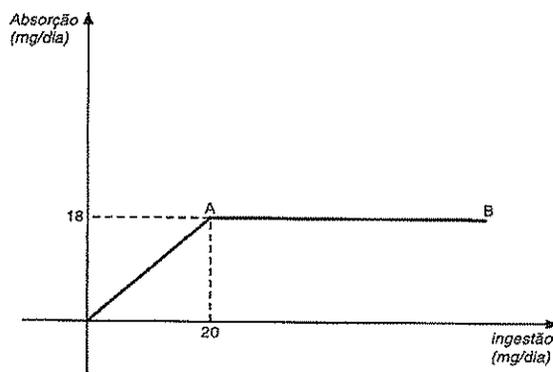
- $A - b + c - 5 = 0$; e
 - $P(p(6)) > p(6)$
- Então, é correto afirmar que:

- Nenhuma das afirmativas é verdadeira.
- Apenas a afirmativa I é verdadeira.
- Apenas a afirmativa II é verdadeira.
- Ambas as afirmativas são verdadeiras.

07 (Unifei) Dadas as funções reais: $F(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 8x + 7$, o valor de $a+b$ é:

- 13
- 12
- 15
- 6
- 5

08 (UFMG) Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.

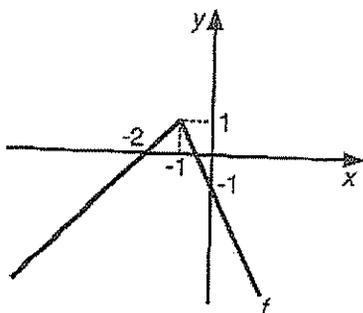


Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia.

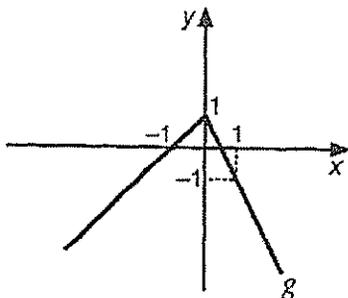
A única afirmativa falsa relativa ao gráfico é:

- a) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
- b) A absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.
- c) Para ingestão acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
- d) Para ingestão de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

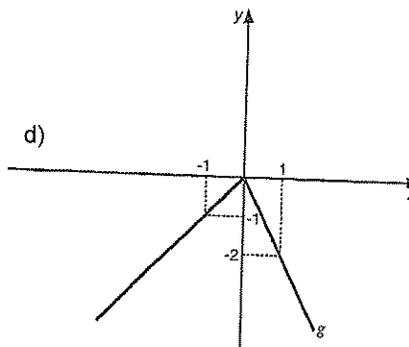
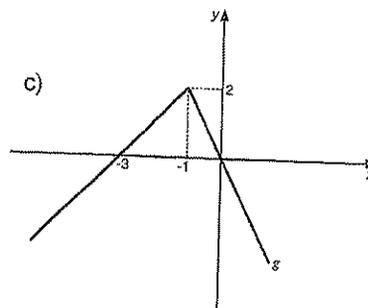
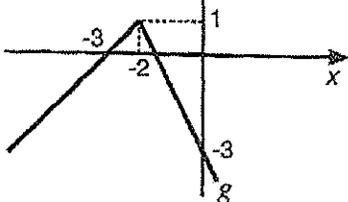
09 (U.F. Uberlândia) Se f é uma função cujo gráfico é dado abaixo, então o gráfico da função g , tal que $g(x) = f(x - 1)$ será dado por:



a)



b)

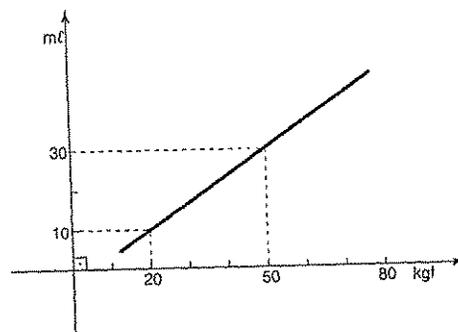


10 A reta do gráfico abaixo indica a quantidade de soro (em $m\ell$) que uma pessoa deve tomar, em função de seu peso (dado em kgf), num tratamento de imunização.

A quantidade total de soro a ser tomada será dividida em dez injeções idênticas.

Quantos $m\ell$ de soro receberá em cada aplicação um indivíduo de 80 kgf ?

- a) 40
- b) 45
- c) 50
- d) 55
- e) 60



Exercícios de Casa

01 Se $f(x+1) = \frac{3x+5}{2x+1}$, calcule $f(x)$.

02 (UFC) Seja f uma função real, de variável real, definida por

$f(x) = ax + b$. Se $f(1) = -9$ e $b^2 - a^2 = 54$, calcule o valor de $a - b$.

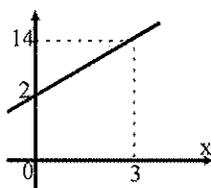
03 (UFSC) Sabendo que a função $f(x) = mx + n$ admite 5 como raiz e $f(-2) = -63$, o valor de $f(16)$ é:

04 Uma função f real, do 1º grau, é tal que $f(0) = 1 + f(1)$ e $f(-1) = 2 - f(0)$.

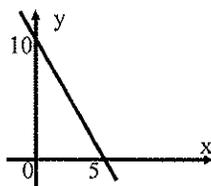
Determine $f(3)$.

05 Determine a função correspondente aos gráficos:

a)



b)



06 (Fatec- SP) Para uma certa máquina, o custo total na produção de um lote de x peças é de y unidades monetárias, com $y = 100 + 0,01x + 0,001x^2$. A diferença de custo entre a produção de um lote de 500 peças e um de 498 peças, em unidades monetárias, é de:

- a) 0,024
- b) 2,016
- c) 100,024
- d) 129,7804
- e) 507,984

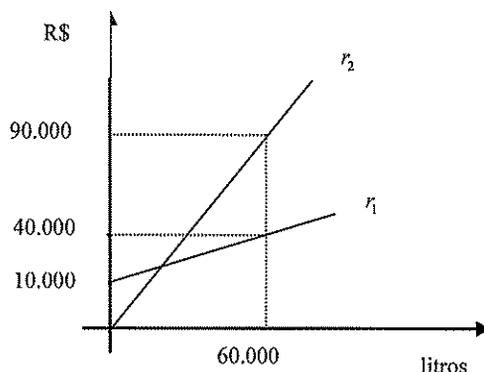
07 Uma pessoa vai trocar o óleo de seu carro e encher o tanque de álcool. O custo de troca de óleo é R\$ 60,00 e o preço do litro de álcool é R\$ 2,19. Sendo $g(x)$ o gasto dessa pessoa para trocar o óleo e encher o tanque com x litros de álcool,

- a) escreva $g(x)$.
- b) calcule $g(50)$.

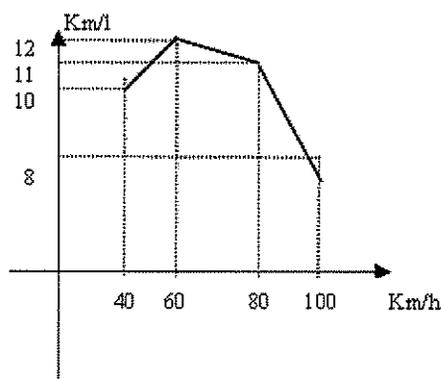
08 (EspCEx) Uma fábrica produz óleo sob encomenda, de modo que toda produção é comercializada. O custo da produção é composto de duas parcelas. Uma parcela fixa, independente do volume produzido, correspondente a gastos com aluguel, manutenção de equipamentos, salários, etc; a outra parcela é variável, depende da quantidade de óleo fabricado. No gráfico abaixo,

fora de escala, a reta r_1 representa o custo de produção, e a reta r_2 descreve o faturamento da empresa, ambos em função do número de litros comercializados. O valor da parcela fixa do custo e o volume mínimo de óleo a ser produzido para que a empresa não tenha prejuízo são, respectivamente:

- a) R\$ 10.000,00 , 10.000 litros
- b) R\$ 15.000,00 , 18.000 litros
- c) R\$ 15.000,00 , 15.000 litros
- d) R\$ 20.000,00 , 10.000 litros
- e) R\$ 10.000,00 , 15.000 litros



09 (EspCEx) Os dados obtidos nas pesquisas de desempenho de um determinado automóvel foram organizados segundo o gráfico a seguir, que relaciona o número de quilômetros rodados por litro de combustível, com a velocidade desenvolvida por esse automóvel. Com base nas informações acima pode se concluir que:



- a) maior consumo de combustível por quilômetro rodado se dá aos 60 km/h.
- b) para velocidade entre 40 km/h e 60 km/h, o aumento da velocidade implica aumento do combustível.
- c) para velocidade entre 60 km/h e 100 km/h, o aumento do consumo de combustível é diretamente proporcional ao aumento da velocidade.
- d) Na velocidade de 100 km/h o automóvel consome menos combustível que a 40 km/h.
- e) Para velocidade acima de 60 km/h o consumo de combustível aumenta sempre que a velocidade aumenta.

10 (EsPCEEx) Sejam as funções reais $f(x)$ e $g(x)$. Se

$f(x) = x + 2$ e $f(g(x)) = \frac{x}{2}$, pode-se afirmar que a função inversa de $g(x)$ é:

a) $g^{-1}(x) = \frac{f(x)}{2}$

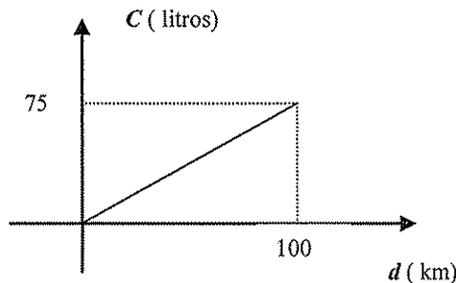
b) $g^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

c) $g^{-1}(x) = f(x)$

d) $g^{-1}(x) = 2f(x)$

e) $g^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$

11 (EsPCEEx) A quantidade de combustível gasto por um veículo blindado, por quilômetro rodado, está indicada pelo gráfico abaixo. Qual a função que representa o consumo $C(d)$ em relação à distância d percorrida?



a) $C(d) = 0,75d$

b) $C(d) = 0,25d$

c) $C(d) = 1,75d$

d) $C(d) = 0,25d$

e) $C(d) = 1,20d$

12 (EsPCEEx) A análise do solo de certa região revelou a presença de $37,5ppm$ (partes por milhão) de uma substância química. Se a densidade do solo analisado é de 1,2 toneladas por metro cúbico, então a quantidade dessa substância, presente em 1 ha do solo, considerando uma camada de 30 cm de profundidade é:

Dados:

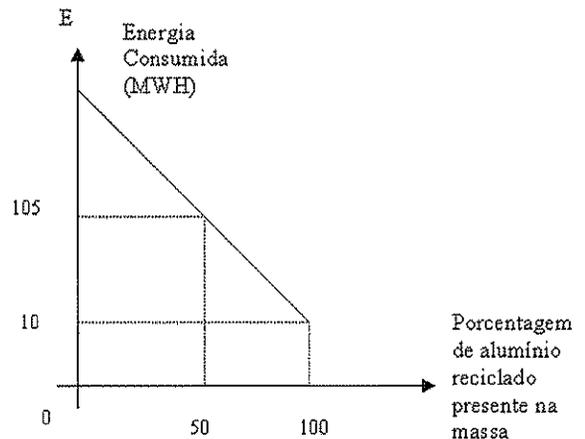
1 tonelada vale 1000 kg

1ha (hectare) é 10000 m²

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

- a) 125 kg
- b) 135 kg
- c) 1250 kg
- d) 1350 kg
- e) 3750 kg

13 (EsPCEEx) A questão da reciclagem de alumínio ganha cada vez mais importância nos dias atuais, principalmente pelo fato de que a quantidade de energia necessária para se produzir 1 kg de alumínio por meio de reciclagem corresponde a apenas 5% da energia necessária para obter-se esse mesmo kg de alumínio a partir do minério. O gráfico a seguir mostra a quantidade de energia necessária para obter-se certa massa de alumínio em função do percentual de alumínio reciclado existente nessa massa. Identificando a energia consumida por E e a porcentagem de alumínio reciclado por P , pode-se afirmar que a função que representa esse processo, seu domínio e sua imagem são, respectivamente:



a) $E = -\frac{19}{10}P + 200; [0, 100]; [10, 200]$

b) $E = -\frac{21}{10}P + 200; [0, 100]; [10, 200]$

c) $E = -\frac{19}{10}P + 200; [0, 100]; [10, 210]$

d) $E = -\frac{21}{10}P + 200; [0, 100]; [10, 210]$

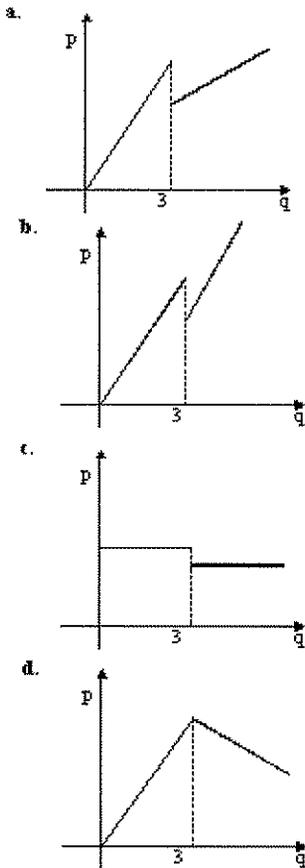
e) $E = -\frac{21}{10}P + 200; [0, 210]; [0, 100]$

14 (EsPCEEx) Dada uma função do 1º grau $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b; a \neq 0; a, b \in \mathbb{R}$. A função f é decrescente e seu gráfico corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 4)$. Sabendo-se que a região delimitada pelos eixos coordenados e a representação gráfica de f tem área

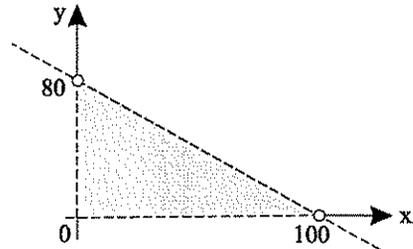
igual a 20 unidades de área, a soma de $a + b$ é igual a:

- a) $-\frac{2}{5}$
- b) 0
- c) $\frac{12}{5}$
- d) $\frac{16}{5}$
- e) $\frac{18}{5}$

15 (UFJF) Um açougue está fazendo a seguinte promoção na venda de alcatra: 25% de desconto sobre o preço total da compra de 3 quilos ou mais. O esboço de gráfico que melhor representa o total pago (p) em função da quantidade comprada (q) é:



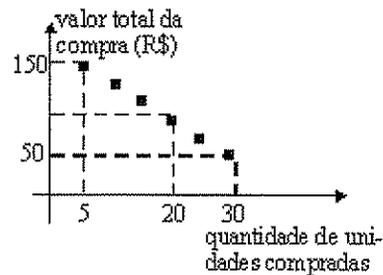
16 (FMTM) João gasta exatamente R\$ 100,00 na compra de x latas de refrigerante Kigelo e y latas de refrigerante Kissabor em um supermercado onde o preço da lata de refrigerante Kigelo é R\$ 1,00. Sabe-se que o par ordenado (x,y) que define a compra feita por João pertence à região sombreada do gráfico



Pode-se concluir que o preço da lata de refrigerante Kissabor nesse supermercado, necessariamente,

- a) é menor do que R\$ 0,80.
- b) é igual a R\$ 0,80.
- c) está entre R\$ 0,80 e R\$ 1,25.
- d) é igual a R\$ 1,25.
- e) é maior do que R\$ 1,25.

17 (UERJ) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.

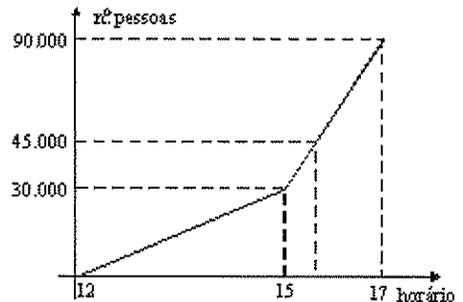


Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, o equivalente a:

- a) 4,50
- b) 5,00
- c) 5,50
- d) 6,00

18 (UERJ) Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até as 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.

Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico abaixo:



Quando o número de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

- a) 20 min
- b) 30 min
- c) 40 min
- d) 50 min

19 (UERJ) Observe o gráfico:



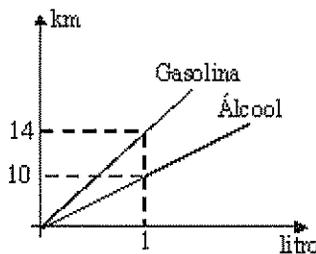
Fontes: Product Audit/Expend

(Veja, 01/09/99)

Se o consumo de vinho branco alemão, entre 1994 e 1998, sofreu um decréscimo linear, o volume total desse consumo em 1995, em milhões de litros, corresponde a:

- a) 6,585
- b) 6,955
- c) 7,575
- d) 7,875

20 (UERJ) Analise o gráfico e a tabela:



COMBUSTÍVEL	PREÇO POR LITRO (em Reais)
Gasolina	1,50
Álcool	0,75

De acordo com esses dados, a razão entre o custo do consumo, por km, dos carros a álcool e a gasolina é igual a:

- a) 4/7
- b) 5/7
- c) 7/8
- d) 7/10

8 - Função Quadrática

8.1 Definição

Chama-se função do 2º grau, ou função quadrática, toda função definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Os números reais a, b e c são os coeficientes do trinômio $ax^2 + bx + c$. Observe que:

♦ o coeficiente a tem que ser diferente de zero para garantir que $ax^2 + bx + c$ seja do 2º grau.

8.2 Raízes da função do 2º grau

As raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x que satisfazem a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Como já vimos anteriormente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

♦ $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ A função admite duas raízes reais e distintas.

♦ $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ A função admite duas raízes reais e iguais (uma raiz dupla ou de multiplicidade dois).

♦ $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ A função não admite raízes reais.

Além disso, se x_1 e x_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$♦ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$♦ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$♦ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

8.3 Gráfico da função do 2º grau

Demonstra-se que o gráfico da função definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} por $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) é uma parábola.

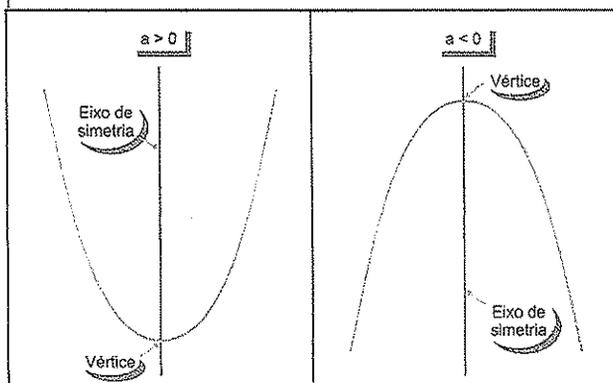
Essa curva pode ser observada, por exemplo, quando lançamos uma pedra obliquamente para cima: sua trajetória é *parabólica*. Quando acendemos o farol do carro, os raios de luz provenientes da lâmpada incidem num espelho *parabólico* e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria.

A definição e o estudo analítico detalhado da curva denominada *parábola* serão estudados em Geometria Analítica.

Por enquanto, é importante saber que o gráfico

$f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola que pode ter sua concavidade voltada para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$) e apresenta um eixo de simetria paralelo ao eixo de simetria é denominado vértice.

Veja as figuras:



Como o gráfico de uma função real intercepta o eixo Ox nos pontos cujas abscissas são as raízes reais dessa função, no caso da função do 2º grau, há três situações possíveis:

◆ $a > 0$

A parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos.

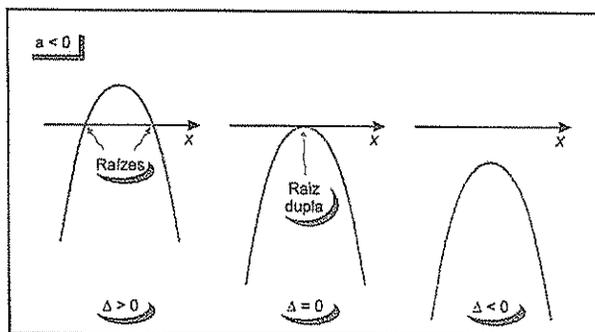
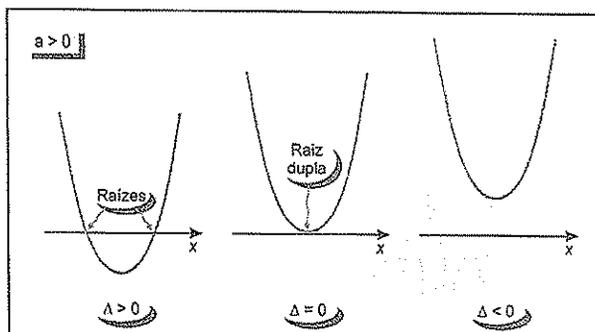
◆ $a = 0$

A parábola tangencia o eixo Ox.

◆ $a < 0$

A parábola não intercepta o eixo Ox.

Considerando os sinais de a e Δ , e desenhado somente o eixo Ox, são estas as possibilidades para o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$



8.4 Vértice

Em todos os casos, o vértice da parábola

$y = ax^2 + bx + c$ é o ponto V de

abscissa $x_v = -\frac{b}{2a}$ e ordenada $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

Observe que $x_v = -\frac{b}{2a}$ é consequência direta da simetria da parábola e, para obter y_v , basta lembrar que $y_v = f(x_v)$:

$$y_v = a \cdot x_v^2 + bx_v + c = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c =$$

$$= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{b^2 + 4ac}{4a}$$

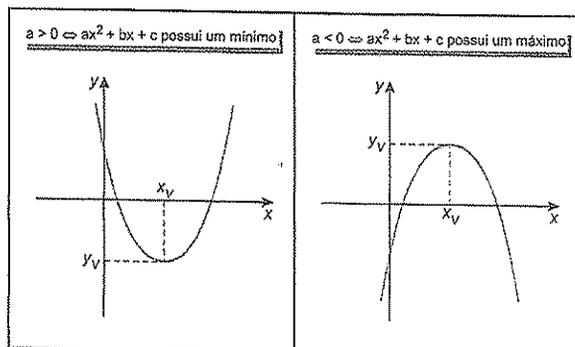
$$\therefore y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

8.5 Intersecção com o eixo Oy

A parábola $y = ax^2 + bx + c$ intercepta o eixo Oy no ponto (0,c).

8.6 Máximo e Mínimo

Toda função do 2º grau, de \mathbb{R} em \mathbb{R} , possui um máximo ou um mínimo, dependendo do sinal do coeficiente a . o vértice da parábola.



Observações

◆ Se $a > 0$, então, para $x = x_v = -\frac{b}{2a}$, a função

assume seu valor mínimo, dado por: $y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}$.

◆ Se $a < 0$, então para $x = x_v = -\frac{b}{2a}$, a função

assume seu valor máximo, dado por: $y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}$.



Exercícios Comentados

01] Faça o gráfico e determine o conjunto imagem da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Resolução:

Inicialmente, repare que a concavidade da parábola estará voltada para cima, pois $a > 0$. Além disso, a parábola "corta" o eixo Oy no ponto de ordenada 8.

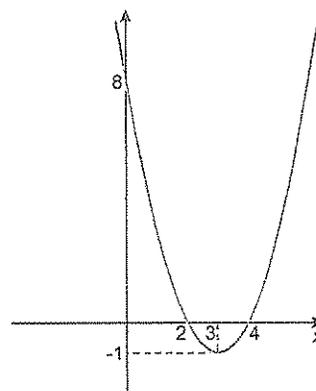
Raízes: $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Vértice: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_v = 3$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_v = -1$$

Gráfico:



Conjunto imagem: $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -1\}$.

02] Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a função do 2º grau, $y = (m-5)x^2 + (m+1)x + m-3$, admita valor máximo igual a 2.

Resolução:

Para que uma função do 2º grau admita um valor máximo, o coeficiente do termo em x^2 deve ser negativo. Devemos ter $m - 5 < 0 \Rightarrow m < 5$. Como o valor máximo é 2, temos:

$$y_v = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 2$$

$$\frac{[(m+1)^2 - 4(m-5)(m-3)]}{4(m-5)} = 2$$

$$-(m^2 + 2m + 1 - 4m^2 + 32m - 60) = 8(m-5)$$

$$m^2 - 14m + 33 = 0$$

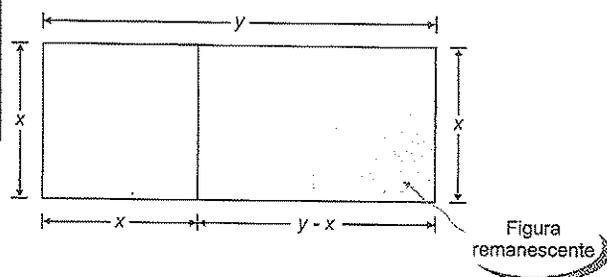
Resolvendo a equação, encontramos $m = 3$ ou $m = 11$. Como $m < 5$, temos $m = 3$.

03 (Fuvest-SP) De um retângulo de perímetro 31 e lados x e y , com $y > x$, retira-se um quadrado do lado x .

- Calcule a área da figura remanescente em função de x .
- Determine x para essa área seja a maior possível.

Resolução:

a) Perímetro = 32 $\Rightarrow (\div 2) x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$



A área da figura remanescente é:

$$S = x(y - x) = x(16 - x - x)$$

$$S = x(16 - 2x)$$

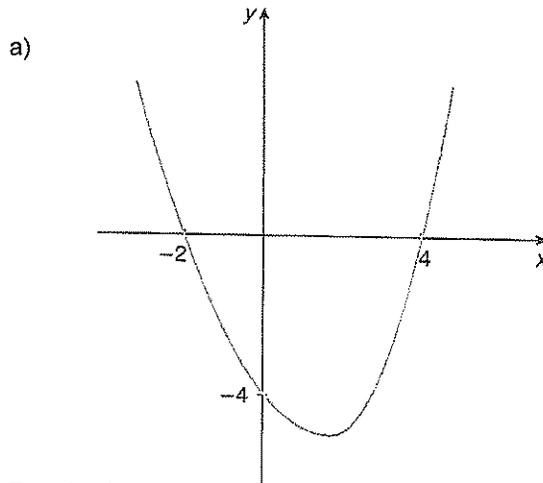
$$S = -2x^2 + 16x.$$

b) A função que representa a área em função de x é do 2º grau. Como $a < 0$, essa função admite um máximo, que ocorre para $x = x_v = -\frac{b}{2a} = 4$.

Observe que a área máxima da figura é obtida substituído x por 4:

$$S_{\text{máx}} = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32$$

04 Determine a função representada pelo gráfico a seguir:



Resolução:

$$y = ax^2 + bx + c$$

É imediato concluir que $c = -4$ e as raízes da função são -2 e 4 .

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -2 + 4 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -2a$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -2 \cdot 4 = \frac{-4}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

05 Um professor oferece aulas particulares de redação e dispõe de uma sala com 20 lugares para essa função. Um grupo de estudantes pretende contratar os serviços da professora e combina que cada um pagará, por aula, R\$ 8,00 e mais R\$2,00 por cada lugar não preenchido pelo grupo. Por exemplo, se o grupo tiver 17 alunos, além dos R\$8,00, cada um pagará mais R\$ 6,00 por aula, pois haverá 3 vagas não preenchidas. Essa é uma forma que a professora utiliza para estimular os estudantes a formar grupos que preencham as 20 vagas. Sendo n o número de alunos no grupo, e V a quantia (em reais) que a professora receberá por aula.

a) Escreva V em função de n .

Resolução:

a) O valor que a professora deverá receber por aula dada é:

$$V = 8n + n \cdot 2 \cdot (20 - n)$$

$$V = 8n + 40n - 2n^2$$

$$V = 48n - 2n^2 \quad (0 \leq n \leq 20)$$

b) Para que número de alunos essa quantia será máxima?

Resolução:

$$b) n = x_v = -\frac{48}{2 \cdot (-2)} = 12$$

Assim, com 12 alunos a quantia recebida pela professora será a maior possível.



Exercícios de Sala

01 (Cesgranrio - RJ) Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$.

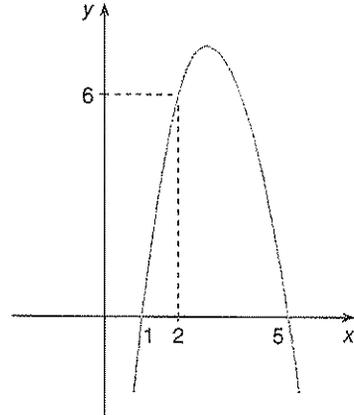
Do ponto p de coordenadas $(4, 10)$ deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada -6 . A distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de p e Q) é:

- a) 12
- b) 4
- c) 6
- d) 3
- e) 5

02 (IME - RJ) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são as raízes e que $f(1) = -8$.

- a) Determinar a, b e c .
- b) Calcule $f(0)$.
- c) Verificar se $f(x)$ apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta.
- d) Determinar as coordenadas do ponto extremo.

03 Determine a função representada pelo gráfico a seguir:



04 (Fuvest - SP) Os pontos $(0, 0)$ e $(2, 1)$ estão no gráfico de uma função quadrática f . O mínimo valor de f é

assumido no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{4}$. Logo, o valor de $f(1)$ é:

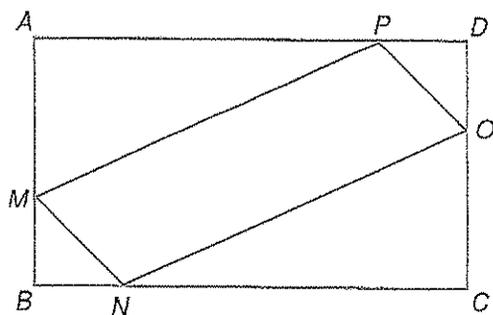
- a) $\frac{1}{10}$
- b) $\frac{2}{10}$
- c) $\frac{3}{10}$
- d) $\frac{4}{10}$
- e) $\frac{5}{10}$

05 Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por

$h = -2t^2 + 14t$, onde h é a altura atingida pela bola (em metros) e t é o tempo (em segundo).

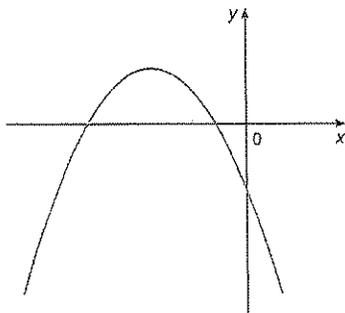
- a) Esboce um gráfico que representa a situação descrita.
- b) Após quantos segundos a bola atinge a altura máxima?
- c) Qual a altura máxima atingida pela bola?
- d) Após quantos segundos a bola retorna ao chão?

06 (PUC-SP) Na figura abaixo tem-se o retângulo ABCD, cujas dimensões são $AB = 6$ cm e $BC = 10$ cm. Tomando-se sobre os seus lados os pontos M, N, o e p, distintos dos vértices e tais que $MB = BN = OD = DP = x$.



- a) Escreva a área do quadrilátero MNOP em função de x .
b) Determine x de modo que essa área seja máxima.

07 (UFMG) O trinômio $y = ax^2 + bx + c$ está representado na figura.



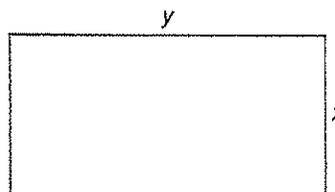
A afirmativa certa é:

- a) $a > 0, b > 0, c < 0$
b) $a < 0, b < 0, c < 0$
c) $a < 0, b > 0, c < 0$
d) $a < 0, b > 0, c > 0$
e) $a < 0, b < 0, c > 0$

08 (Unifor-CE) O consumo de combustível de um automóvel é função da sua velocidade média. Para certo automóvel, essa função é dada por $y = 0,03x^2 - 2x + 20$, segundo y o consumo de combustível, em mililitros por quilômetro, e x a velocidade média, em quilômetro por hora. Nessas condições, qual das velocidades médias dadas abaixo corresponde a um consumo de 120 ml/km?

- a) 50 km/h
b) 60 km/h
c) 80 km/h
d) 90 km/h
e) 100 km/h

09 (Vunesp) Em um acidente automobilístico, foi isolada uma região retangular, como mostrado na figura.

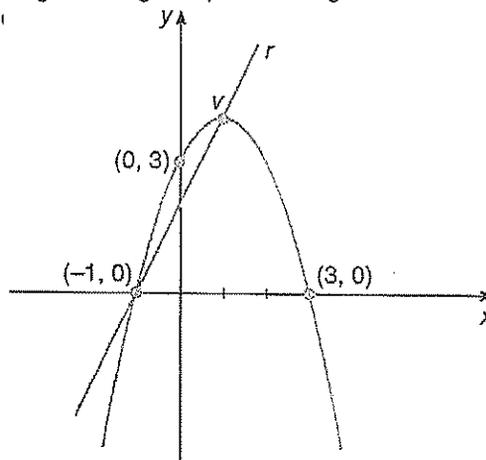


Se 17 m de corda (esticada e sem sobras) foram suficientes para cercar 3 lados da região, a saber, os dois lados menores de medida x e um lado maior de medida y , dados em metros, determine:

a) A área (em m^2) da região isolada, em função do lado menor.

b) A medida dos lados x e y da região retangular, sabendo-se que a área da região era de $36 m^2$ e a medida do lado menor era um número inteiro.

10 (UFSC, adaptada) Assinale a única proposição correta. A figura a seguir representa o gráfico de uma parábola:



A equação da reta r é:

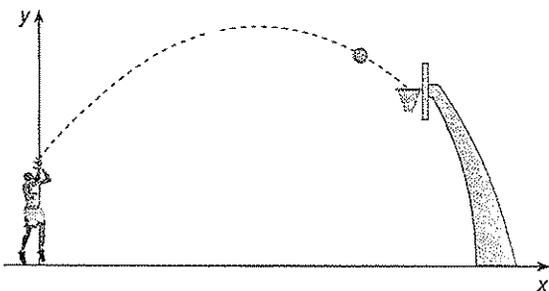
- a) $y = -2x + 2$
b) $y = x + 2$
c) $y = 2x + 1$
d) $y = 2x + 2$
e) $y = -2x - 2$



Exercícios de Casa

01 (UFRJ) Oscar arremessa uma bola de basquete cujo centro segue uma trajetória plana vertical de equação $y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x + 2$, na qual os valores de x e y são

dados em metros. Oscar acerta o arremesso, e o centro da bola passa pelo centro da cesta, que está a 3 m de altura. Determine a distância do centro da cesta ao eixo y .



02 (UFPE) Na (s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses (V) se for verdadeira ou (F) se for falso. Identifique cada afirmativa como verdadeira ou falsa.

Se a é um número real positivo, então o gráfico de

$$y = a(x^2 + 2x), x \in \mathbb{R}:$$

- () É uma parábola que passa pela origem $(0,0)$.
- () É simétrico em relação à reta $x = -1$.
- () É uma parábola cujo vértice é o ponto $(-1, a)$.
- () Está contido na reunião dos 3 (três) primeiros quadrantes.
- () Não intercepta a reta $y = -a$.

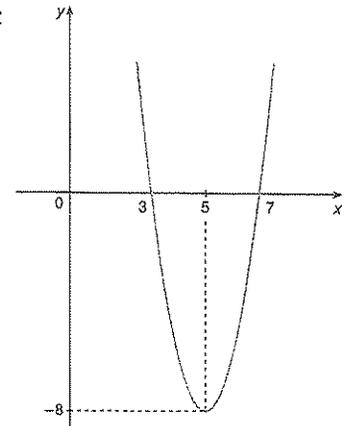
03 (Unirio-RJ) Em uma fábrica, o custo de produção de x produtos é dado por $c(x) = -x^2 + 22x + 1$. Sabendo-se que cada produto é vendido por R\$ 10,00, o número de produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R\$ 44,00 é:

- a) 3
- b) 10
- c) 12
- d) 13
- e) 2

04 Parte do gráfico do trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$ é o da figura a seguir:

O valor de $a + b + c$ é:

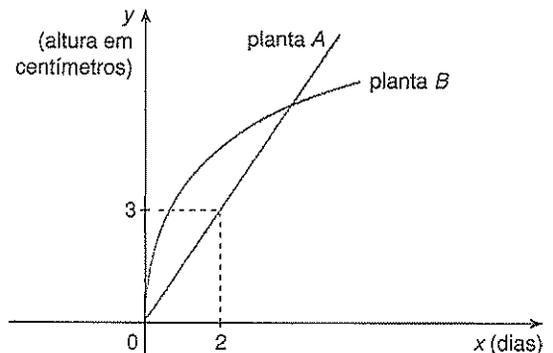
- a) 6
- b) 12
- c) 24
- d) -6
- e) -12



05 (Vunesp) Duas plantas de mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por $(2,3)$ e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei matemática

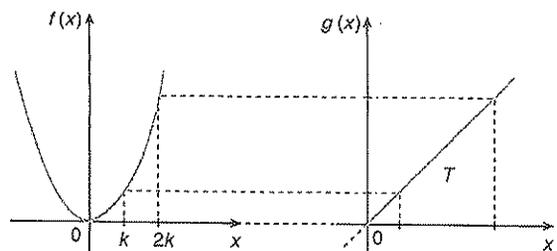
$$y = \frac{24x - x^2}{12}. \text{ Um esboço desses gráficos está}$$

apresentado na figura abaixo.



- a) A equação da reta.
- b) O dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

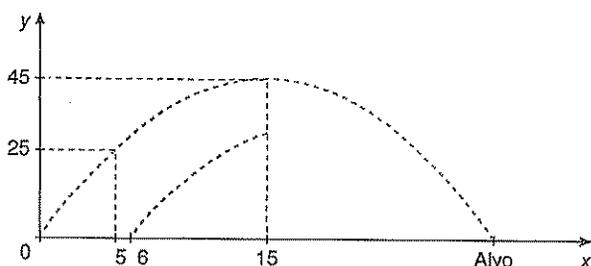
06 (UFSCar-SP) A figura representa, em sistemas coordenados com a mesma escala, os gráficos das funções reais f e g , com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.



Sabendo que a região poligonal T demarca um trapézio de área igual a 120, o número real k é:

- a) 0,5
- b) 1
- c) $\sqrt{2}$
- d) 1,5
- e) 2

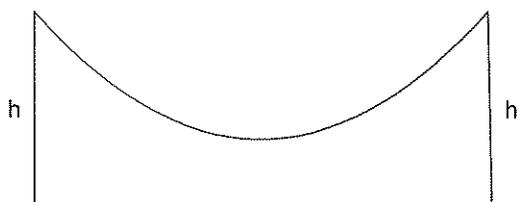
07 (Vunesp) Suponha que um projétil de ataque partiu da origem do sistema de coordenadas cartesianas descrevendo uma parábola, conforme a figura.



a) Sabendo-se que o vértice da parábola do projétil de ataque é dado pelas coordenadas (15, 45) e baseado nos dados da figura, calcule a equação da parábola do projétil de ataque.

b) Um projétil de defesa é lançado a partir das coordenadas (6, 0) e sua trajetória também descreve uma parábola segundo a equação $y = -0,25x^2 + 9x - 45$. Considerando-se que o projétil de defesa atingirá o projétil de ataque, calcule as coordenadas onde isso ocorrerá e diga se o alvo estará a salvo do ataque.

08 (Fuvest-SP) Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h , situadas à distância d (ver figura), assumia a forma de uma parábola.



Suponha também que: d

- (I) A altura mínima do fio ao solo seja igual a 2.
- (II) A altura do fio sobre um ponto no solo que dista

$\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$. Se $h = \frac{3}{8}d$, então d vale:

- a) 14
- b) 16
- c) 18
- d) 20
- e) 22

09 (U.Caxias do Sul) Ao preço de R\$1,50 uma loja tem como vender por mês 500 unidades de uma mercadoria que custa 70 centavos cada. Para cada centavos que a loja reduz no preço, pode aumentar a quantidade a ser vendida em 25 unidades. Dessa forma, o lucro mensal total em função do número x de centavos reduzidos no preço é dado por $L(x) = (80 - x)(500 + 25x)$.

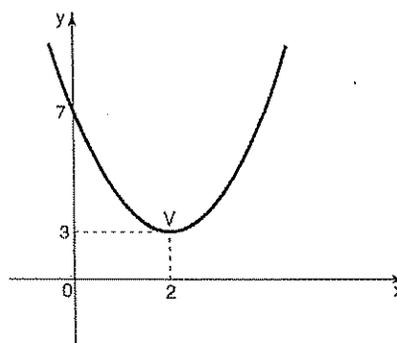
O preço por unidade que maximizaria o lucro mensal com a venda dessa mercadoria é, em reais, igual a:

- a) 1,20
- b) 1,50
- c) 3,00
- d) 12,00
- e) 30,00

10 Dada a função $y = 16 - x^2$, determine:

- a) Os valores de x que anulam y ;
- b) O ponto de máximo de y ;
- c) Os valores de x para os quais a função é crescente.

11 Determine a função correspondente ao gráfico. O ponto V representa o vértice da parábola.

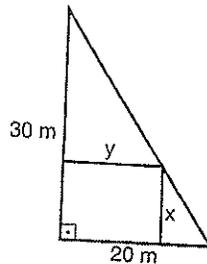


12 Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ dada pela expressão $f(x) = -3x^2 + 7x + 6$. Determine \mathbb{B} para que ela seja sobrejetora e diga se ela é bijetora.

13 (Unicamp) Determine o número m de modo que a gráfico da função $y = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo dos x . Faça o gráfico da função (ou das soluções) que você encontrar par O problema.

14 (Fuvest) Num terreno, na forma de um triângulo com catetos de medidas 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y , como indicado na figura.

- a) Exprima y em função de x .
b) Para que valores de x e de y a área ocupada pela casa será máxima?

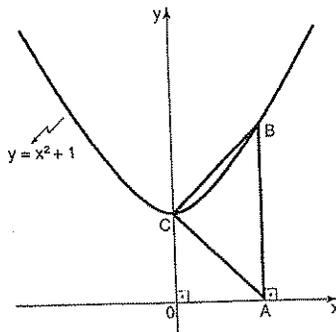


15 (UFGO) Um homem-bala é lançado de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola. Considerando que no instante do lançamento ($t=0$) ele está a 2 metros do solo, 1 segundo após ele atinge a altura de 5 metros e 2 segundos após o lançamento ele atinge o solo, pede-se:

- a) a equação $h(t)$ da altura em relação ao tempo, descrita pela sua trajetória;
b) o espaço do gráfico de $h(t)$;
c) quais os instantes após o lançamento ele atinge

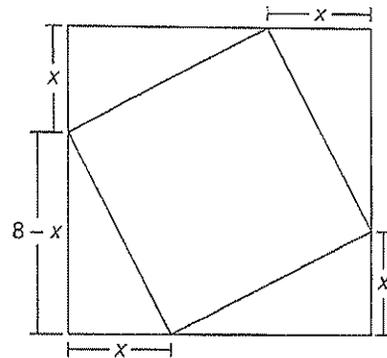
$\frac{9}{2}$ metros?

16 Na figura abaixo, a área do trapézio $OABC$ é 11 vezes a área do triângulo OAC . Determine a abscissa do ponto OAC . Determine a abscissa do ponto A .



17 Dada a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, definida para $x \geq 1$, obtenha a expressão da sua função inversa e faça um gráfico de ambas.

18 (PUC-Campinas-SP) Na figura a seguir tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado. Pode-se calcular a área do quadrado interno, subtraindo-se da área do quadrado externo as áreas dos 4 triângulos. Feito isso, verifica-se que A é uma função da medida x .



O valor mínimo de A é:

- a) 16 cm^2
b) 24 cm^2
c) 28 cm^2
d) 32 cm^2
e) 48 cm^2

19 (Covest-PE) Uma malharia familiar fabrica camisetas a um custo de R\$ 2,00 por peças e tem um adesepeza fixa semanal de R\$ 50,00. Se são vendidas a camisetas

por semana ao preço de $\left(\frac{22}{3} - \frac{x}{30}\right)$ reais a unidade, quantas camisetas devem ser vendidas por semana para obter o maior lucro possível?

- a) 50
b) 60
c) 65
d) 90
e) 80

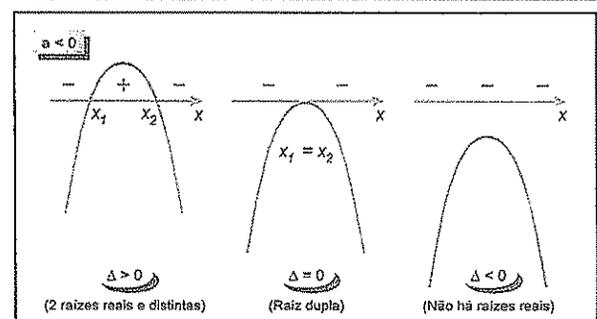
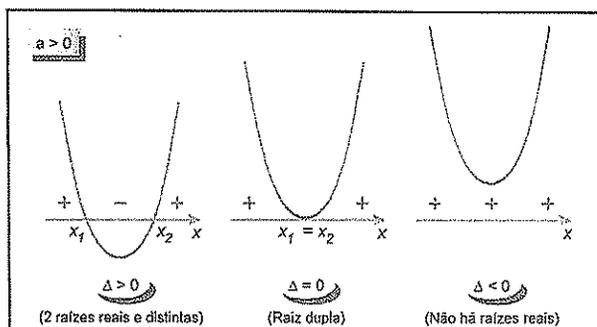
20 Ao fretar um ônibus, um grupo deromeiros e uma empresa de transportes combinaram que cada passageiros pagaria R\$ 80,00 e mais uma taxa de R\$ 3,00 para cada lugar desocupado, sendo que no ônibus havia 50 lugares.

- a) Quanto a empresa de ônibus receberia se houvesse 50 passageiros?
b) e se houvesse 44?
c) Com que número de passageiros a empresa teria uma receita máxima?

9 - Inequações

Sinais de $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Para estudar os sinais da função do 2º grau, basta fazer um esboço de seu gráfico (desenhado apenas o eixo Ox). Devemos observar o coeficiente a (que determina se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo) e verificar quantas raízes reais ela admite (0 ou 1 ou 2), sabendo assim o número de vezes que a parábola intercepta o eixo Ox. Se houver raízes reais, devemos indicá-las.



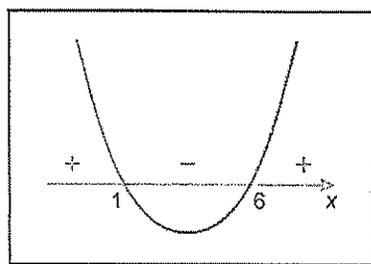
Vamos, por exemplo, estudar os sinais da função
 $f(x) = x^2 - 7x + 6$

Resolução

Raízes: $x^2 - 7x + 6 = 0$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 \quad x = \frac{7 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Como $a > 0$, o gráfico é assim:



Conclusão:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 6$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ou $x > 6$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6$

9.1 Inequações do 2º grau

São do tipo:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 & \quad f(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 & \quad f(x) \leq 0 \end{aligned}$$

com $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Para resolvê-las, basta estudar os sinais de $f(x)$.

Exercícios resolvidos

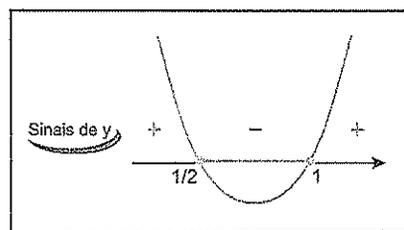
1. Resolva a inequação $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$.

Resolução

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

Queremos $y \leq 0$

Raízes: $2x^2 - 3x + 1 = 0 \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$



Resposta: $\left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}$

2. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que tenhamos $x^2 - 2x + m > 0$, para todo x real.

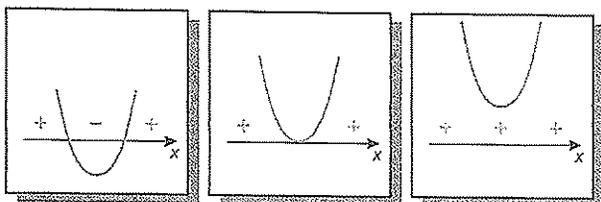
Resolução

$$y = x^2 - 2x + m$$

Queremos $y > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Sinais de y :

Ⓘ Se $\Delta > 0$ Ⓜ Se $\Delta = 0$ ⓓ Se $\Delta < 0$



Como queremos $y > 0$ para todo x real, deve ocorrer ⓓ.

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1$$

Resolução $m > 0$.

9.2 Sistema de Inequações

Para resolver um sistema formado por duas ou mais inequações, devemos proceder da seguinte forma:

- 1) Resolver cada inequação separadamente.
- 2) Fazer a intersecção das soluções encontradas.

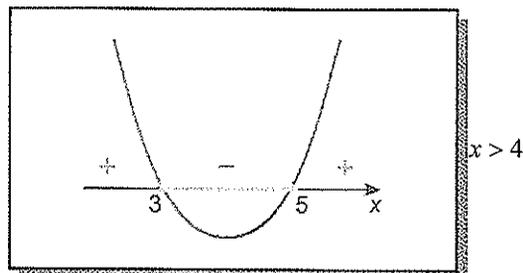
Essa intersecção é a solução do sistema.

Exercício resolvido

$$a) \begin{cases} x^2 - 8x + 15 \leq 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$$

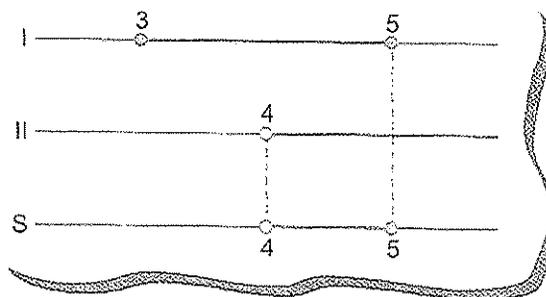
Resolução

$$(I) x^2 - 8x + 15 \leq 0 \quad x - 4 > 0$$



Fazendo a intersecção:

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / 4 < x \leq 5\}$

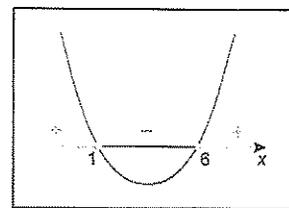
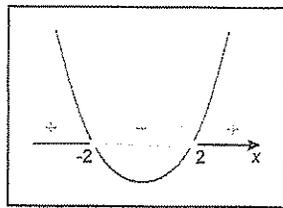


$$b) \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ 7 - x < 0 \end{cases}$$

Resolução

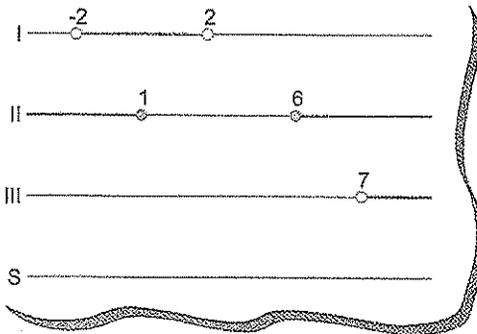
$$(I) x^2 - 4 < 0$$

$$(II) x^2 - 7x + 6 \geq 0$$



$$(III) \begin{cases} 7 - x < 0 \\ -x < -7 \\ x > 7 \end{cases}$$

Fazendo a intersecção



Resposta: $S = \emptyset$.

9-3 Inequações-produto

Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se inequação-produto toda inequação definida por

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) < 0$$

ou

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

Para resolver tais inequações, estudaremos os sinais de $f(x)$ e $g(x)$, determinando, a partir desse estudo, os sinais do produto $f(x) \cdot g(x)$

9.4 Inequações-quociente

Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se inequação-quociente toda inequação do tipo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ ou } \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

ou

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ ou } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Para resolvê-las, usamos o mesmo procedimento usado em inequações-produto, tomando o cuidado de lembrar que o denominador deve ser diferente de zero.

Exercício resolvido

Resolver a inequação:

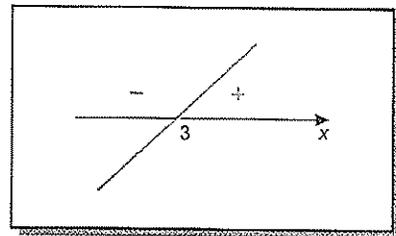
a) $(x-3)(x^2 - 6x + 8) > 0$

Resolução

Inicialmente, vamos estudar os sinais de cada um dos fatores do produto.

$$y_1 = x - 3$$

Raiz: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

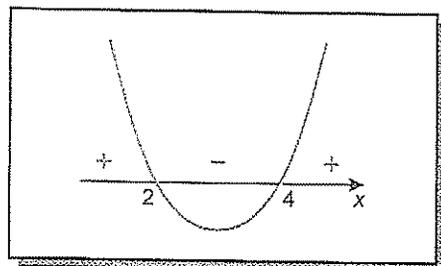


$$y_2 = x^2 - 6x + 8$$

Raízes: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$

$x = 2$
 $x = 4$



Colocando as raízes em ordem crescente, montamos o quadro de sinais:

		2		3		4	
y_1	-		-	○	+		+
y_2	+	○	-		-	○	+
$y_1 \cdot y_2$	-	○	+		-	○	+
		2		3		4	

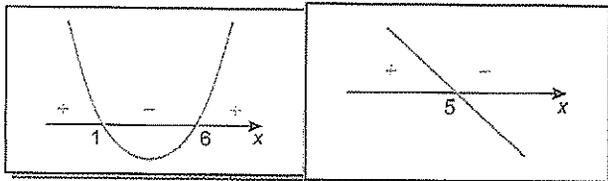
Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3 \text{ ou } x > 4\}$

$$b) \frac{x^2 - 7x + 6}{5 - x} \leq 0$$

Resolução

$$y_1 = x^2 - 7x + 6$$

$$y_2 = 5 - x$$



Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 5 \text{ ou } x \geq 6\}$.

Sinais de $[f(x)]^n$

Dada a função $f(x)$ e o número natural n ($n \geq 2$), então:

♦ $[f(x)]^n$ tem a mesma variação de sinais de $f(x)$, se n é IMPAR.

♦ $[f(x)]^n$ é sempre maior ou igual a zero, se n é PAR.

		1		5		6	
y_1	+	○	-	○	-	○	+
y_2	+		+	○	-		-
y_1/y_2	+	○	-	○	+	○	-
		1		5		6	

OUTRO MÉTODO

Multiplicidade

Considere a equação $(x-3)^4 = 0$.

Podemos reescrevê-la assim:

$$(x-3)(x-3)(x-3)(x-3) = 0$$

Como um produto vale zero se um de seus fatores for igual a zero e os fatores são iguais,

$$(x-3)^4 = 0 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Logo, 3 é raiz da equação $(x-3)^4 = 0$.

Como o fator $(x-3)$ aparece 4 vezes, dizemos que 3 é raiz de multiplicidade 4 da equação.

A equação $(x+3) \cdot (x-5)^2 \cdot (x-7)^5 = 0$ apresenta as raízes:

- - 3 (raiz simples ou multiplicidade 1)
- 5 (Multiplicidade 2)
- 7 (multiplicidade 5)

Um outro modo de resolver uma inequação-quociente

Podemos determinar os sinais de um produto (ou quociente) de funções polinomiais baseando-nos nas seguintes propriedades:

- Se α é raiz de multiplicidade *ímpar*, ao "passar" por α o produto muda de sinal
- Se α é raiz de multiplicidade *par*, ao "passar" por α o produto *não* muda de sinal.

Vamos, por exemplo, determinar os sinais de

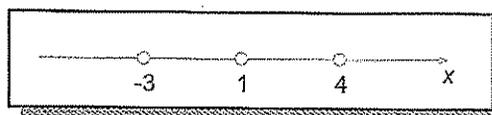
$$y = (x-1)(x+3)(x-4).$$

$$\text{Raízes: } x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Todas as raízes são simples (multiplicidade 1). Colocando as raízes em ordem crescente:



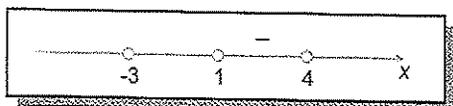
Observe que temos quatro intervalos, e que, ao "passar" por cada uma das raízes, mudando de um intervalo para outro, y muda de sinal.

Assim, para determinar a variação de sinais de y , basta determinar o seu sinal em um dos intervalos.

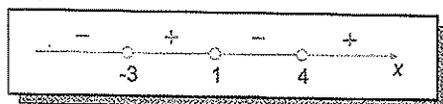
Para isso, vamos atribuir um valor arbitrário para x (diferente das raízes)

$$x = 2 \Rightarrow y = (2-1)(2+3)(2-4) \Rightarrow y \text{ é negativo}$$

Como 2 está entre 1 e 4, temos:



Completando os sinais de y :



Conclusão

- $y = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4$
- $y > 0 \Rightarrow -3 < x < 1 \text{ ou } x > 4$
- $y < 0 \Rightarrow x < -3 \text{ ou } 1 < x < 4$

Exercício resolvido

Resolva a inequação:

$$a) (x+5)(x^2-9)(x-2) > 0$$

Resolução

$$y = (x+5)(x^2-9)(x-2)$$

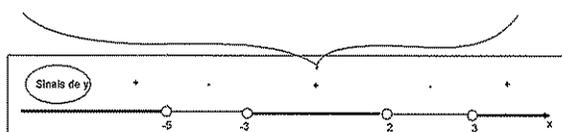
Queremos $y > 0$

$$\text{Raízes: } x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0+5)(0^2-9)(0-2) \Rightarrow y \text{ é positivo}$$



Resposta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -5 \text{ ou } -3 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$$

$$b) (x+3)(x^2-7x+6)(x-7)^2 \leq 0$$

Resolução

$$y = (x+3)(x^2-7x+6)(x-7)^2$$

Queremos $y \leq 0$

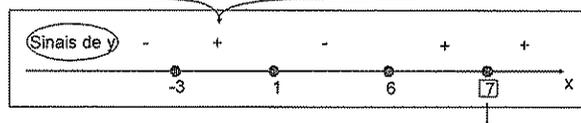
$$\text{Raízes: } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$(x-7)^2 = 0 \Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$$

(raiz de multiplicidade 2)

$$x = 0 \Rightarrow y = (0+3)(0^2-7 \cdot 0+6)(0-7)^2 \Rightarrow y \text{ é positivo}$$



Resposta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3 \text{ ou } 1 \leq x \leq 6 \text{ ou } x = 7\}$$



Exercícios Comentados

01 Resolver em \mathbb{R} :

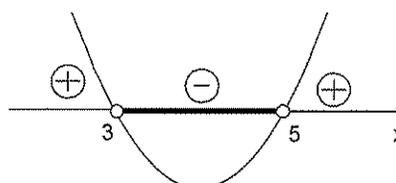
$$a) x^2 - 8x + 15 < 0$$

$$b) x^2 - 6x + 9 > 0$$

Resolução

a) Seja $y = x^2 - 8x + 15$ queremos $y < 0$.

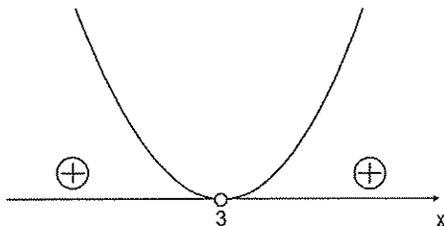
$$\text{Raízes: } x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 5$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

b) Seja $y = x^2 - 6x + 9$, queremos $y > 0$.

Raízes: $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ (raiz dupla)



$$S = \mathbb{R} - \{3\}$$

02 (Vunesp) Os valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 3x < 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

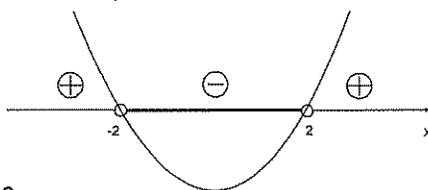
São tais que:

- a) $1 < x < 2$
- b) $-3 < x < -2$
- c) $0 < x < 2$
- d) $2 < x < 3$
- e) $-2 < x < 0$

Resolução

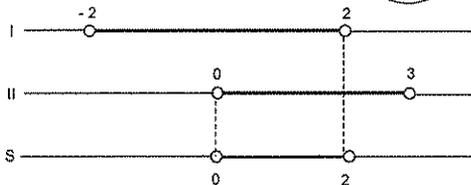
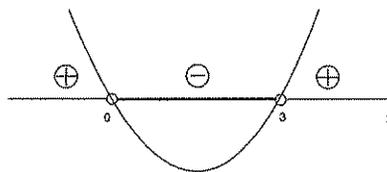
(I) $x^2 - 4 < 0$

Raízes: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$



(II) $x^2 - 3x < 0$

Raízes: $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$$

03 Determine o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 8} + \frac{x^3 + 7}{\sqrt{9 - x}}$$

Resolução

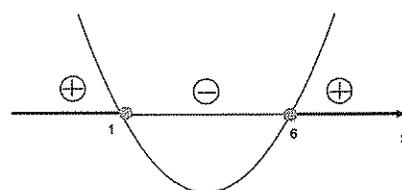
C. E.: $x^2 - 7x + 8 \geq 0$ (I)

$9 - x > 0$ (II)

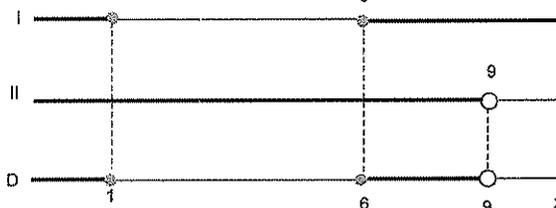
(I) $x^2 - 7x + 8 \geq 0$

Seja $y = x^2 - 7x + 8$ queremos $y \geq 0$

Raízes: $x^2 - 7x + 8 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 6$



(II) $9 - x > 0 \Rightarrow -x > -9 \Rightarrow x < 9$



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } 6 \leq x < 9\}$$

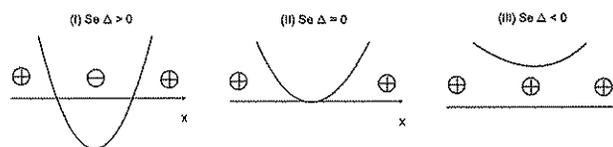
04 Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais temos $x^2 - 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Resolução

Seja $y = x^2 - 4x + m$

Queremos $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Há três possibilidades para a variação de sinais de y :



Como queremos $y > 0$ para todo x real, deve ocorrer (III):

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \Rightarrow 16 - 4m < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -4m < -16 \Rightarrow 4m > 16 \Rightarrow m > 4 \end{aligned}$$

05 Resolva em \mathbb{R} :

a) $(x-3)(x^2-6x+5) < 0$

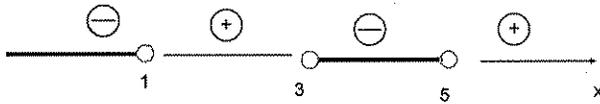
Resolução

Seja $y = (x-3)(x^2-6x+5)$; queremos $y < 0$.

Raízes: $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{cases} x=1 \\ \text{ou} \\ x=5 \end{cases}$$

$x=0 \Rightarrow y = (0-3)(0^2-6 \cdot 0+5) \Rightarrow y \text{ é negativo}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

b) $\frac{x^2-6x+8}{x-3} \leq 0$

Resolução

C. E.: $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

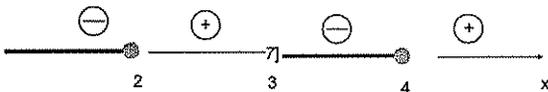
Satisfeita condição de existência a inequação acima é equivalente a $(x-3)(x^2-6x+8) = 0$

Seja $y = (x-3)(x^2-6x+8)$; queremos $y = 0$.

Raízes: $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ x=4 \end{cases}$$

$x=0 \Rightarrow y = (0-3)(0^2-6 \cdot 0+8) \Rightarrow y \text{ é negativo}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } 3 < x \leq 4\}$

c) $\frac{2x-7}{x-2} > 1$

Resolução

C. E.: $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$$\frac{2x-7}{x-2} > 1 \Rightarrow \frac{2x-7}{x-2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x-7-(x-2)}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{x-5}{x-2} > 0$$

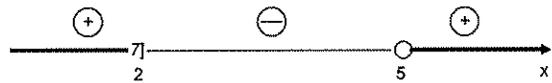
Satisfeita a condição de existência, a inequação acima é equivalente a $(x-2)(x-5) > 0$.

Seja $y = (x-2)(x-5)$; queremos $y > 0$

Raízes: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x-5=0 \Rightarrow x=5$

$x=0 \Rightarrow y = (0-2)(0-5) \Rightarrow y \text{ é positivo}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } > 5\}$



Exercícios de Sala

01 Sejam f e g funções definidas em \mathbb{R} , tais que:

$$f(x) = \frac{x}{2}(8-x) \text{ e } g(x) = \frac{x}{8}(8-x).$$

a) Determine o subconjunto A de \mathbb{R} , no qual $f(x) \geq g(x)$.

b) Esboce o gráfico da função $h: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = f(x) - g(x)$

02 Determine m para que o trinômio $y = (1-m)x^2 - (1+m)x + 2(m-4)$ seja negativo, qualquer que seja o valor de x .

03 Trace o gráfico da função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida

$$\text{pela seguinte lei: } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < -1 \\ x+1, & \text{se } -1 \leq x < 4 \\ x^2 - 4x, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

04 (Mackenzin-SP) A soma dos valores inteiros pertencentes ao domínio da função real definida por:

$$a(x) = \frac{2x}{\sqrt{2-\sqrt{x^2-3x}}} \text{ é:}$$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) -1
- e) -2

05 a) Construa sobre o mesmo sistema cartesiano ortogonal os gráficos das funções:

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3 \text{ e } g(x) = x^2 - 1$$

b) Calcule as coordenadas dos seus pontos de intersecção A e B.

c) Mostre que, qualquer que seja $m \neq -1$ A e B pertencem à curva representativa da função:

$$y = \frac{(m-1)x^2 + 2mx - 3m + 1}{m+1}$$

06 (Fuvest-SP) Para que a parábola $y = 2x^2 + mx + 5$ não intercepta a reta $y = 3$, devemos ter:

- a) $-4 < m < 4$
- b) $m < -3$ ou $m > 4$
- c) $m > 5$ ou $m < -5$
- d) $m = -5$ ou $m = 5$
- e) $m \neq 0$

07 Considerando a parábola da equação

$$y = x^2 + mx + 4m:$$

a) Ache a intersecção da parábola com o eixo x, quando $m = -2$;

b) Determine o conjunto dos valores de m para os quais a parábola não o eixo x.

08 (FGV-SP) Quantos números inteiros satisfazem a inequação $x^2 - 10x < -16$?

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

09 (UFPE) Se a equação $y = \sqrt{2x^2 + px + 32}$ define uma função real $y = f(x)$ cujo domínio é o conjunto dos reais, encontre o maior valor que p pode assumir.

10 Determine o domínio de

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{4 - x^2}$$



Exercícios de Casa

01 Resolva em \mathbb{R}

- a) $x^2 - 9x + 8 \geq 0$
- b) $x^2 - 2x + 10 \geq 0$
- c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
- d) $x^2 < 25$
- e) $x^2 + 1 \geq 0$
- f) $x^2 - 5x + 6 > x - 2$

02 (UFMG) O conjunto solução da desigualdade $(x-2)^2 > x-2$ é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

03 (UFPB) O domínio da função

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16} \text{ é:}$$

- a) $\mathbb{R} - \{0\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 0\}$
- e) \mathbb{R}

04 (Fatec-SP) A função f do 2º grau, definida por

$$f(x) = 3x^2 + mx + 1, \text{ não admite raízes reais se, e}$$

somente se, o número real m for tal que:

- a) $-12 < m < 12$
- b) $-3\sqrt{2} < m < 3\sqrt{2}$
- c) $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
- d) $m < -3\sqrt{2}$ ou $m > 3\sqrt{2}$
- e) $x > -1$ ou $m > 2\sqrt{3}$

05 (Vunesp) Todos os possíveis valores de m que satisfazem a desigualdade $2x^2 - 20x + 2m > 0$, para todo x pertencente ao conjunto dos reais, são dados por

- a) $m > 10$
- b) $m > 25$
- c) $m > 30$
- d) $m > 5$
- e) $m > 30$

06 Quantos números inteiros satisfazem o sistema de inequações a seguir?

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ 2x + 1 > x + 5 \end{cases}$$

07 (UFU-MG) O conjunto de todos os números reais m , diferentes de zero, para os quais a parábola $y = m x^2 - x + 1$ intercepta a reta $y = 3x + m$ em dois pontos é:

- a) $\left\{ m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{1}{8} \right\}$
- b) $\{ m \in \mathbb{R} \mid m > 3 \}$
- c) $\{ m \in \mathbb{R} \mid m \neq 0 \}$
- d) $\left\{ m \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{8} < m < 3 \right\}$
- e) $\{ m \in \mathbb{R} \mid m > 0 \}$

08 (Unitau-SP) A inequação $(x - 2)(x - 5) > 0$ é satisfeita para:

- a) \mathbb{R}
- b) $x < 5$
- c) $2 < x < 5$
- d) $x > 5$
- e) $x < 5$ e $x \neq 2$

09 (Cesgranrio-RJ) A solução da inequação $x > \frac{1}{x}$ é:

- a) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$
- b) $x < -1$ ou $x > 1$
- c) $x > 1$
- d) $x < 1$
- e) $x > -1$

10 (PUC-Campinas-SP) Considere as funções reais, de variáveis reais, dadas por

$$f(x) = x, g(x) = x^2 - 2x \text{ e } h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

A função h tem valores positivos para todos os valores de x tais que:

- a) $x > 0$
- b) $x > 2$
- c) $x < 0$
- d) $0 < x < 2$
- e) $-2 < x < 0$

11 (Unip-SP) O conjunto verdade da inequação

$$\frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 + x + 1} \leq 0 \text{ é:}$$

- a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3 \}$
- b) $\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3 \}$
- c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3 \}$
- d) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5 \}$
- e) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3 \}$

12 (Fuvest-SP) O conjunto das soluções, no conjunto

\mathbb{R} dos números reais, da inequação $\frac{x}{x+1} > x$ é:

- a) vazio
- b) \mathbb{R}
- c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \}$
- d) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \}$
- e) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \}$

13 (UEL-PR) O conjunto solução da inequação

$$\frac{(x+3)^4(x^3 - 2x^2)}{x^2 - 1} \geq 0, \text{ no universo } \mathbb{R}, \text{ é:}$$

- a) $[-1, 3]$
- b) $] -1, +\infty[$
- c) $] -1, 0[\cup] 0, 3]$
- d) $[-1, 3] \cup] 2, +\infty[$
- e) $] -1, 1[\cup] 2, +\infty[$

14 (FGV-SP) O maior número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{5}{x-3} > 3$ é:

- a) Um múltiplo de 2.
- b) Um múltiplo de 5.
- c) Um número primo.
- d) Divisível por 3.
- e) divisível por 7.

15 (UFMG) O conjunto solução da inequação

$$\frac{1}{x(1-x)} > \frac{1}{x} \text{ é:}$$

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ e } x \neq 0\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

16 (Mackenzie-SP) Se tem-se $f(x) = \frac{3x-2}{4x-3}$, $x \neq \frac{3}{4}$,

tem-se $f(x) \geq f(1)$ para:

- a) $-2 < x < -1$
- b) $-3 \leq x < -2$
- c) $-1 \leq x < -\frac{3}{4}$
- d) $x > 1$
- e) $\frac{3}{4} < x \leq 1$

17 (Mackenzie-SP) No intervalo $[-5, 5]$, os valores inteiros pertencentes ao domínio da função real definida

por $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}}$, são em número de:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

18 (UCSal-BA) Considere a inequação $\frac{x-2}{x^2-4x} \leq 0$.

Considerando os números inteiros que a satisfazem, é correto concluir que:

- a) Só dois deles são positivos.
- b) Um deles é zero.
- O produto de todos eles é 6.
- d) O menor deles é - 2
- e) O maior deles é 4.

19 (FGV-SP)

a) Dê o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-7x+12}}$.

b) Resolva a inequação: $\frac{2+3x}{1-x} \geq 4$.

20 (FEQ-CE) Sejam f e g função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , tais que $f(x) = -2x+3$ e $g(f(x)) = 4x$. Nessas condições, a função inversa de g é dada por:

a) $g^{-1}(x) = \frac{6+x}{2}$

b) $g^{-1}(x) = \frac{6-x}{2}$

c) $g^{-1}(x) = \frac{6+x}{4}$

d) $g^{-1}(x) = \frac{2}{6-2x}$

e) $g^{-1}(x) = \frac{2}{6+2x}$

Gabarito

1. Potencia e Raízes

Exercícios de sala

01. x^6
02. e
03. e
04. c
05. e
06. c
07. d
08. d
09. a) 2^{21} b) 7
10. d

Exercícios de casa

01. a) 5^{13} b) 3^5 c) 2^6 d) 2^8 e) 2^6 f) 2^9 g) $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ h) 2^{15} i) a^{12}

02. c
03. d
04. b
05. e
06. c
07. c
08. a
09. e
10. c
11. a) 7 b) 14
12. b
13. d
14. d
15. a
16. e
17. b
18. c
19. c
20. b

2. Fatoração

Exercícios de sala

01. a) $x^2(a + b + c)$
b) $2x(x^3 + 2x + 3)$
c) $3a^2b(b^2 + 2a - 4b^3)$
02. a) $(ax + b)(x^2 + 1)$
b) $(2x + 5)(x^2 + 2)$
03. a) $x - 3)(x^2 - 4)$
b) $\{-2, 2, 3\}$

04. a) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$
b) $(x^2 - 3)(x^2 + 3)$
c) $(a + b + c)(a + b - c)$
d) $(a^m + b^m)(a^m - b^m)$

05. a) $(x + y)(x - y - 1)$
b) $(2x - 3)(x^2 - 2)$

06. c
07. d
08. d
09. a) 2 b) $2\sqrt{2}$
10. b

Exercícios de sala

01. $(a + 3)^2$

02.) $(x - 6y)(x + y)$

03. d
04. d
05. a
06. d
07. Demonstração (lembre-se que $2^{32} - 1$ é diferença de dois quadrados).
08. e
09. b
10. c
11. d
12. e
13. c
14. a
15. c
16. a
17. c
18. a
19. a
20. e

3. Conjuntos

Exercícios de sala

01. b
02. c
03. c
04. e
05. b
06. a
07. c
08. a
09. 500
10. e

Exercícios de casa

01. a
02. a) 80.000
b) 16.000
c) 85.000
d) 15.000
e) 80.000
f) 5.000
g) 20.000
h) 89.000
i) 96.000

03. d
04. d
05. a) 500
b) 257
c) 84
d) (4%)
e) 19,6%
06. c
07. (40%)
08. b
09. a) 130 b) 460 c) 410
10. (450)
11. {1,2}
12. a
13. b
14. d
15. b
19. c
20. a

4. Conjuntos numéricos

Exercícios de sala

01. c
02. a
03. e
04. e
05. e
06. d
07. d
08. c
09. d
10. b

Exercícios de casa

01. d
02. {1,2,4,5,10,20,50,100}
03. b
04. 2022
05. e
06. 143
07. a) $x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y = $2^2 \cdot 5^2$
b) MDC = 20

MMC = 900

08. c
09. c
10. c
11. b
12. a
13. a) 25 cm
b) 204
14. a) demonstre
b) 12 e 13
15. b
16. c
17. (16)
18. b
19. c
20. a

5. Função

Exercícios de sala

01. 11
02. a) $D = \mathbb{R}$
b) $\{x \neq -5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$
d) $x \geq -3$
e) \mathbb{R}
f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 13\}$

03. c
04. b
05. b
06. a
07. e
08. a) $\{(-213), (-1,0), (1,0)\}$
b) $D = \{-2, -1, 1\}$
 $I_m = \{0,3\}$

$$09. h = \frac{3}{5\sqrt{25-x^2}}$$

10. a) 113 b) 34
11. b
12. d
13. a
14. d
15. 42

Exercícios de casa

01. 124
02. (a = 2 b = -6)
03. a) 1,8 b) 1,35

04. 1/2
05. $a = 1$ $b = 7$
06. 29
07. c
08. b
09. b
10. d
11. c
12. V.V.V.
13. b
14. b
15. d
16. d
17. a
18. d
19. a
20. 17
21. a
22. d
23. b
24. a
25. 61

6. Composição de funções

Exercícios de sala

01. b
02. e
03. b
04. c
05. a
06. e
07. a
08. e
09. e
10. e

Exercícios de casa

01. $2x^2 - 2x + 5$
 $4x^2 + 2x + 2$
02. $t = -1$ cm 6
03. $2x^2 + 3$
04. $m = 1/2$ $k = -2$
05. a) $x + 1/4$

b) $\frac{5x+3}{x-2}$

06. a) $\frac{= 2x-1}{x-2}$

b) $\frac{= x^3 - 5}{2}$

c) $\frac{x^2 + 1}{2x^2}$

07. = -7

08. $\frac{5}{4}$ ou $\frac{13}{2}$

09. $\frac{9x+8}{8x-31}$

10. d
11. c
12. c
13. a
14. b
15. b
16. c
17. d
18. b
19. 23
20. (a = 3)

7. Função afim

Exercícios de sala

01. ($m = -3$ $n = -1$)
02. a) 12,90 b) 21 km
03. $g(x) = 15x + 25.000$
04. d
05. b
06. c
06. d
08. a
09. a
10. $x - 10 = 40$

Exercícios de casa

01. $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$

02. 6
03. 99
04. 5/2
05. $y = 4x + 2$
 $y = -2x + 10$
06. b
07. a) $g(x) = 2,19x + 60$ b) 106,5
08. e
09. c
10. d
11. a
12. c
13. a
14. e
15. a
16. e
17. a
18. b
19. d
20. d

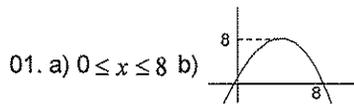
8. Função quadrática

Exercícios de sala

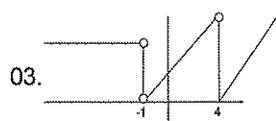
01. b
02. a) = -5

9. Inequações

Exercícios de sala



02. $\frac{11}{9} < m < 3$



04. c

05. $(-2, 3), (1, 0)$

06. a

07. a) $(-2, 0), (4, 0)$ b) $0 < m < 16$

08. c

09. 16

10. $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x = 2\}$

Exercícios de casa

01. a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1 \text{ ou } x \geq 8\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -5 \text{ ou } x \geq 2\}$

c) $S = \{1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 5\}$

e) $S = \mathbb{R}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

02. c

03. e

04. c

05. b

06. 2

07. b

08. d

09. a

10. b

11. a

12. e

13. e

14. a

15. b

16. e

17. e

18. a

19. a) $\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 3 \text{ ou } x > 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} | \frac{2}{7} \leq x < 1\}$

20. b

b) = -5

03. $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$

04. c

05. a) = 24,5

b) A bola atinge a altura máxima após 3,5 segundos.

c) A altura máxima atingida pela bola é de 24,5 metros.

d) A bola retorna ao chão 7 segundos após ser chutada.

06. a) $S = -2x^2 + 16x$ ($0 < x < 6$)

b) = 4

07. b

08. e

09. a) $A = 17x - 2x^2$

b) $x = 4m$ $y = 9m$

10. d

Exercícios de casa

01. 7m

02. v-v-f-v-f

03. e

04. c

05. a) $y = \frac{3}{2}x$

b) 6º dia

06. e

07. a) $y = -0,2x^2 + 6x$

b) (30,00), nos.

08. b

09. a

10. a) -4 ou 4

b) 16

c) $x \leq 0$

11. a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$

b) (0,2)

c) não

d) $1 \text{ cm} = y > 7/4$

12. $y \leq \frac{121}{12}$ não

13. $m = 4 \text{ cm}$ $m = -8$

14. a) $y = -x^2 + 20$

15. $-4t^2 + 7t + 2$

16. 3

17. $1 + \sqrt{x+4}$

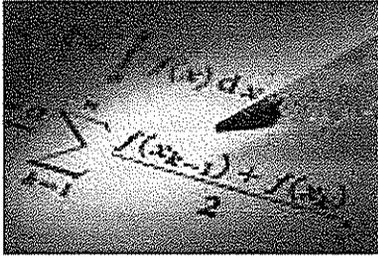
18. d

19. e

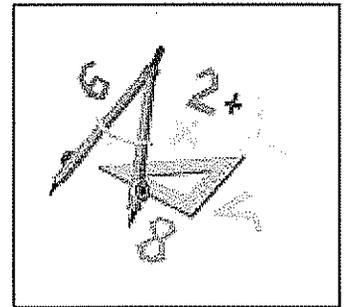
20. a) 4000

b) 4312

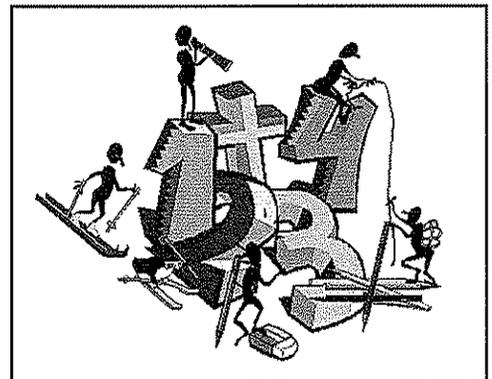
c) 38



MATEMÁTICA 2



CADERNO 1



11 -Porcentagem	80
12 -Equações e Problemas	85
13 - Progressão Aritimétrica	89
14- Progressão Geométrica	95
15 - Matrizes	101
16 - Determinantes	110
17 -Sistema Lineares	119
18 - Gabarito	127

Em nosso cotidiano, ao ler jornais, revistas ou assistir a um programa de TV, frequentemente nos deparamos com notícias tais como: "O segmento de carros populares é responsável por 70% das vendas de veículos"; "A Aids cresceu cerca de 200% entre adolescentes na década de 1990"; "O volume do reservatório atingiu 16% de sua capacidade total". Em todas as frases citadas aparece o símbolo %. Qual é o seu significado?

Matematicamente o símbolo p% é utilizado para

representar a fração $\frac{p}{100}$, ou seja:

$$p\% = \frac{p}{100}$$

Na primeira frase, o símbolo 70% pode ser interpretado como se a cada 100 veículos vendidos, 70 delas fossem do segmento dos chamados carros populares.

Quando se anuncia que a Aids cresceu 200% entre adolescentes, pode-se inferir que o número de casos triplicou na referida década.

Em outros casos, a porcentagem é usada para comparar dois números, por meio de um quociente. Veja este exemplo: "Após a liberação dos preços, os combustíveis sofreram um reajuste médio de 12%". Podemos concluir que o quociente do valor do aumento e o preço anterior, em média, é igual a 0,12; ou seja, 12%.



Exercícios Comentados

01 Um carnê de IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano) informa: "os pagamentos efetuados após a data de vencimento sofrerão acréscimo de 20%". E depois: "os pagamentos feitos até a data do vencimento receberão um desconto de 5%". Se o valor nominal da conta mensal é de R\$60,00, calcule os valores a serem pagos:

- a) o pagamento for feito até o dia do pagamento.
- b) o pagamento for feito após a data do vencimento.

Resolução:

a) O valor nominal é R\$ 60,00. Assim, se o pagamento for feito até a data do vencimento, sobre esse valor será aplicado um desconto de 5%. Ou seja:

$$60 - \frac{5}{100} \cdot 60 = (1 - 0,05) \cdot 60 = 0,95 \cdot 60 = R\$ 57,00$$

b) Se o pagamento for feito após a data do vencimento, haverá um acréscimo de 20%. Assim, temos:

$$60 + \frac{20}{100} \cdot 60 = (1 + 0,20) \cdot 60 = 1,20 \cdot 60 = R\$ 72,00$$

02 Após o anúncio da liberação dos preços dos combustíveis, notou-se que, de imediato, houve um aumento médio de 20% sobre os preços reajustados, que ficaram estabilizados nesse patamar.

Qual foi o reajuste efetivamente praticado?

Resolução:

Seja x o valor inicial de referência, temos:

Valor após o primeiro reajuste

$$x \cdot (+0,2) = 1,2x$$

O preço reajustado sofreu um recuo de 5%, assim:

$$x \cdot 1,2 \cdot (-0,05) =$$

$$= x \cdot 1,2 \cdot 0,95 =$$

$$= x \cdot 1,14$$

Concluimos, portanto, que o reajuste efetivo foi de 14%.

03 (Fuvest - SP) Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou por ela. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria:

- a) 40%
- b) 45%
- c) 50%
- d) 55%
- e) 60%

Resolução:

Seja: pv: Preço de venda nominal

pc: Preço de custo

De acordo com o enunciado, o preço de venda efetivo foi 0,80 . pv (desconto de 20%) e houve um lucro de 20% sobre o preço de custo (pc).

$$pv = pc + L$$

$$pv - 0,20pv = pc + 0,20pc$$

$$0,80pv = 1,20pc$$

$$pv = \frac{1,20}{0,80} pc = 1,50 pc$$

Se o desconto não fosse dado o lucro seria de 50% (sobre o custo).



Exercícios de Sala

04 Um comerciante aumenta seus produtos em 30%. Diante da queda acentuada das vendas, anuncia um desconto de 25% sobre os preços majorados. Explique qual foi a variação percentual devida aos dois reajustes, em relação ao valor anterior.

Resolução:

Seja x um valor de referência, após o aumento de 30% temos $x \cdot (1 + 0,3) = 1,3x$

Com o desconto de 25% (sobre o preço majorado) $1,3x(1 - 0,25) = 1,3 \cdot 0,75x = 0,975x$ (97,5% de x)

Houve uma queda de 2,5% sobre o valor anterior aos reajustes

05 (Vunesp) o preço de tabela de um determinado produto é de R\$ 1.000,00. O produto tem um desconto de 10% para pagamento à vista e um desconto de 7,2% para pagamento em 30 dias. Admitindo que o valor a ser desembolsado no pagamento à vista passa ser aplicado pelo comprador em uma aplicação de 30 dias com um rendimento de 3%, determine:

a) quanto o comprador teria ao final da aplicação?

b) Qual é a opção mais vantajosa para o comprador - pagar à vista ou aplicar o dinheiro e pagar em 30 dias? Justifique matematicamente sua resposta.

Resolução:

a) O preço à vista é:

$$(1 - 0,1) \cdot 1.000 = 0,9 \cdot 1.000 = 900,00$$

Aplicando 900,00 por 30 dias com remuneração de 3%, teremos:

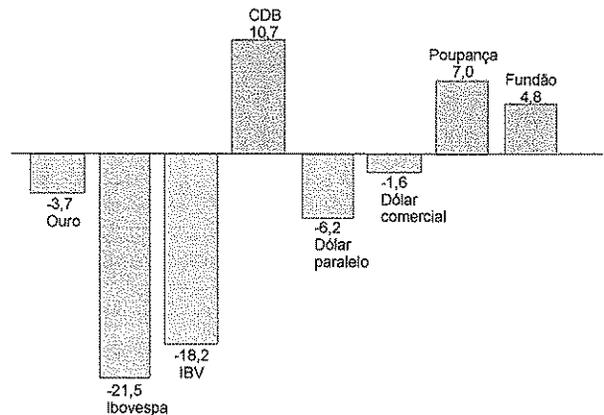
$$900(1 + 0,03) = 900 \cdot 1,03 = 927,00$$

b) Para pagamento em 30 dias, o desconto é de 7,2%. O preço fica então em:

$$1.000(1 - 0,072) = 928,00$$

Como o valor resgatado na aplicação de 30 dias é de R\$927,00, concluímos que é melhor pagar à vista.

01 (Vunesp) O quadro reproduzido na revista Veja (07/06/95) mostra quanto renderam os investimentos do início de 1995 a 31 de maio desse ano.



Considerando esses dados, suponhamos que uma pessoa, no primeiro dia útil de 1995, tenha investido na poupança metade das economias que possuía e investido no dólar paralelo a outra metade. Se o rendimento global obtido por ela no período for de R\$ 400,00, quanto investiu ao todo?

02 (UFMS) Em um determinado mês o dólar estava sendo cotado a R\$ 3,50 no mercado de câmbio, ou seja U\$1,00 = R\$ 3,50. Se houver uma desvalorização do real em relação ao dólar de 25%, então pode-se afirmar que

- o dólar sofrerá uma desvalorização de 25%
- o dólar sofrerá uma desvalorização de 20%
- o dólar sofrerá uma desvalorização de 30%
- a cotação do dólar passará a ser de R\$2,62
- a cotação do dólar passará a ser de R\$ 3,00

03 (Enem-MEC) Nas últimas eleições presidenciais de um determinado país, em que 9% dos eleitores votaram em branco e 11% anularam o voto, o vencedor obteve 51% dos votos válidos. Não são considerados válidos os votos brancos e nulos. É correto afirmar que o vencedor, de fato, obteve de todos os eleitores um percentual de votos da ordem de:

- 38%
- 41%
- 44%
- 47%
- 50%

04 (Unicamp - SP) Uma pessoa investiu R\$ 3.000,00 em ações. No primeiro mês, ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.

- a) Com quanto reais ela ficou após os dois meses?
b) Qual foi o prejuízo após os dois meses, em percentual, sobre o valor do investimento inicial?

05 (Fuvest - SP) Um comerciante compra calça, camisetas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30% respectivamente. O preço x que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia. Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisetas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.

- a) Quanto esse cliente pagou por sua compra em função de x ?
b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

06 (PUC-SP) Desconto sucessivos de 20% e 30% são equivalente a um único desconto de:

- a) 25%
b) 26%
c) 44%
d) 45%
e) 50%

07 (UEMA) Uma geladeira foi comprada a prazo em 3 prestações iguais de 238,00 após sofrer um aumento de 5% sobre seu preço para pagamento à vista. O preço dessa geladeira para pagamento à vista era:

- a) R\$ 720,00
b) R\$ 680,00
c) R\$ 560,00
d) R\$ 714,00
e) R\$ 749,00

08 (UFLA-MG) Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista com 20% de desconto sobre o preço de tabela ou pelo cartão de crédito com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que à vista custa R\$ 6.000,00, pelo cartão custará:

- a) R\$ 10.100,00
b) R\$ 4.800,00

- c) R\$ 7.700,00
d) R\$ 8.250,00
e) R\$ 6.600,00

09 (UFGO) O senhor José gasta hoje 25% do seu salário no pagamento da prestação de sua casa. Se a prestação for reajustada em 26%, e o salário somente em 5%, qual será a porcentagem do salário que ele deverá gastar no pagamento da prestação, após os reajustes?

10 (FUVEST - SP) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui de 30% em relação ao seu valor no ano anterior. Se v for o valor do carro no primeiro ano, então, seu valor no oitavo ano será de:

- a) $(0,7)^7v$
b) $(0,)^7v$
c) $(0,7)^8v$
d) $(0,3^8v$
e) $(0,3)^8v$



Exercícios de Casa

01 (Unesp) O lucro líquido mensal de um produtor rural com a venda de leite é de R\$ 2.580,00. O custo de produção de cada litro de leite, vendido por R\$ 0,52, é de R\$ 0,32. Para aumentar em exatamente 30% o seu lucro líquido mensal, considerando que os valores do custo de produção é do lucro, por litro de leite, permaneçam os mesmos, quantos litros a mais de leite o produtor precisa vender mensalmente?

- a) 16.770
b) 12.900
c) 5.700
d) 3.870
e) 3270

02 (Unifor-CE) Uma indústria tinha 2.625 funcionários. Em virtude de contenção de despesas, o número de funcionários de sexo masculino foi reduzido à metade e, assim, o número de mulheres passou a representar 60% do total de funcionários. Nessas condições, após as dispensas, o número de homens que continuaram a trabalhar nessa indústria era

- a) 1.680
b) 1.500
c) 920
d) 840
e) 750

03 (UFC - GO) A tabela abaixo descreve os valores gastos, no primeiro ano de vida, com cachorros e gatos.

O custo de dedicação

Preço do animal*	Consulta veterinária	Vacinas	Ração	Higiene	Acessórios	Total do 1º ano**
Cachorro 900 reais	80 reais	180 reais	1.080 reais	650 reais	130 reais	2.120 reais
Gato 1.000 reais	95 reais	150 reais	630 reais	630 reais	175 reais	1.230 reais

* preço das raças mais vendidas, com pedigree

** sem o preço do animal

Veja, São paulo, 27 jul. 2005, p. 118 (Adaptado).

De acordo com a tabela, para um cachorro é um gato, o gasto com ração, no primeiro ano, representa em relação ao custo total, incluindo o preço dos animais, a porcentagem de:

- a) 24%
- b) 32%
- c) 42%
- d) 48%
- e) 52%

04 (Fuvest - SP) Produção e vendas, em setembro, de três montadoras de automóveis:

Montadora	Unidades produzidas	Porcentagem vendida da produção
A	3.000	80%
B	2.000	60%
C	5.000	x%

Sabendo que neste mês as três montadoras venderam 7.000 dos 10.000 carros produzidos, o valor de x é:

- a) 30
- b) 50
- c) 65
- d) 68
- e) 100

05 (UFC - CE) Numa sala há 100 pessoas, das quais 97 são homens. Para que os homens representem 96% das pessoas contidas na sala, deverá sair que número de homens?

- a) 2
- b) 5
- c) 10
- d) 15
- e) 25

06 (Vunesp) Os dados publicados na revista Veja de 12/4/2000 mostram que, cada 100 pessoas com o ensino médio, apenas 54 conseguem emprego. Se num determinado grupo de 3.000 pessoas 25% têm ensino médio, o número provável de pessoas do grupo com ensino médio que, de acordo com os dados da pesquisa, irão conseguir emprego, é:

- a) 375
- b) 405
- c) 450
- d) 750
- e) 1.620

07 (PUC/Campinas-SP) Um vendedor tem um salário fixo mensal de R\$ 300,00 e uma comissão de 7% sobre o total de x reais de suas vendas no mês. Seu salário mensal total, em reais pode ser expresso por:

- a) $300 + 7x$
- b) $300 + 0,07x$
- c) $307 + x$
- d) $300,07x$
- e) $307x$

08 (UFRS) Numa competição esportiva, uma delegação de atletas obteve 37 medalhas. Sendo o número de medalhas de prata 20% superior ao das de ouro e o das de bronze 25% superior ao das de prata, o número de medalhas de bronze obtido por essa delegação foi de:

- a) 12
- b) 13
- c) 15
- d) 17
- e) 20

09 (U. F. São Carlos-SP, adaptada) Nas eleições de um certo ano, dos eleitores que compareceram às urnas em uma determinada cidade, 29% delas votaram para prefeito, no candidato U, 36% no candidato V, 25% no candidato W e os 20.000 eleitores restante votaram em branco ou anularam seu votos. Com base nesses dados, pode-se afirmar corretamente que o número de eleitores que votou no candidato V foi:

- a) 50.000
- b) 58.000
- c) 72.000
- d) 180.000
- e) 200.000

10 (Vunesp) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente desse banco deposita 1.000 reais nessa aplicação. Ao final de n anos, o capital em que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, é:

- a) $1.000 + 0,15 \cdot n$
- b) $1.000 \cdot 0,15 \cdot n$
- c) $1.000 \cdot 0,15^n$
- d) $1.000 + 1,15^n$
- e) $1.000 \cdot 1,15^n$

11 (FGV-SP) Carlos adquiriu um aparelho de TV em cores pagando uma entrada de R\$ 200,00 mais uma parcela de R\$ 450,00 dois meses após a compra. Sabendo -se que o preço à vista do aparelho é de R\$600,00, qual foi a taxa mensal de juros simples do financiamento?

12 (UFMT) Seis migos almoçaram em um restaurante e a despesa total foi de R\$ 1320,00. Sabendo que nessa despesa estão incluído os 10% da gorjeta do garçom, em que a mesma foi dividida igualmente pelos seis amigos, quantos reais cada um deu de gorjeta?

13 (Fuvest-SP) A diferença entre $\frac{1}{3}$ e seu valor aproximado 0,333 é igual a $x\%$ do valor exato. Então o valor de x é:

- a) 0,0001
- b) 0,001
- c) 0,01
- d) 0,1
- e) 0,3

14 (Fuvest-SP) Numa certa população 18% das pessoas são gordas, 30% dos homens são gordos e 10% das mulheres são gordas. Qual é a porcentagem de homens na população?

15 (UFRJ) A organização de uma festa distribuiu gratuitamente 200 ingressos para 100 casais. Outros 300 ingressos foram vendidos, 30% dos quais para mulheres. As 500 pessoas com ingresso foram à festa.

- a) Determine o percentual de mulheres na festa.
- b) Se os organizadores quisessem ter igual número de homens e mulheres na festa, quantos ingressos a mais eles deveriam distribuir apenas para pessoas do sexo feminino?

16 (Fuvest-SP) Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de importação de 30%. Em função disso, o seu preço para o importador é de R\$ 19.500,00. Supondo que tal imposto passe de 30% para 60%, qual será, em reais, o novo preço do carro, para o importador

- a) R\$ 22.500,00
- b) R\$24.000,00
- c) R\$ 25.350,00
- d) R\$31.200,00
- e) R\$39.000,00

17 (FUV-SP) Um indivíduo, ao engordar, passou a ter 38% a mais em seu peso. Se tivesse engordado de tal maneira a aumentar seu peso em apenas 15%, estaria pesando 18,4 kg a menos. Qual era seu peso original?

- a) 50 kg
- b) 60 kg
- c) 70 kg
- d) 80 kg
- e) 40 kg

18 (U. Santa Úrsula - RJ) Seja $W = \frac{xy}{z}$. Se x sofre um aumento de 25% e y um aumento de 40%, a alteração que sofre z para que W não se altere é:

- a) aumentar de 65%.
- b) diminuir de 65%.
- c) aumentar de 75%.
- d) diminuir de 75%.
- e) z não deve sofrer nenhuma alteração.

19 (UFMG) Uma empresa dispensou 20% de seus empregados e aumentou o salário dos restantes, fazendo que o valor de sua folha de pagamento diminuísse 10%. O salário médio da empresa - valor da folha de pagamentos dividido pelo número de empregados - teve um aumento percentual de:

- a) 12,5%
- b) 10%
- c) 17,5%
- d) 15%

20 (F. I. Vitória - ES) O salário mensal de um vendedor consiste em R\$ 150,00 mais a comissão de 6% sobre suas vendas. Se no mês de novembro ele teve um ganho total de 600,00, qual foi o valor de suas vendas nesse mês?

- a) R\$ 12.000,00
- b) R\$10.000,00
- c) R\$ 8.200,00

- d) R\$ 7.500,00
e) R\$4.500,00

11 - Equações e problemas

a) Equação do 1° grau.

$$a x + b = 0 \therefore x = -\frac{b}{a} \text{ (equação determinada)}$$

Caso $x = \frac{n}{o}$ equação impossível ($S = \emptyset$)

$$x = \frac{o}{o} \text{ equação indeterminada (} S = \mathbb{R} \text{)}$$

b) Equação do 2° grau.

$$a x^2 + b x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$x^2 - S x + P = 0, \text{ em que } S = -\frac{b}{a} \text{ (soma de raízes)}$$

$$e P = \frac{c}{a} \text{ (produto da raízes)}$$

Forma fatorada: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ em que x_1 e x_2 são as raízes.

Número de raízes reais;

- $\Delta > 0$: duas raízes reais distintos
- $\Delta = 0$: duas raízes reais iguais
- $\Delta < 0$: não possui raízes reais.
- $\Delta \geq 0$: possui raízes reais.



Exercícios Comentados

01 Na equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, os números a e c têm sinais contrários. Pode-se afirmar que:

- a) A equação tem duas raízes reais de sinais contrários.
- b) A equação tem duas raízes reais positivas.
- c) A equação tem duas raízes reais negativas.
- d) A equação pode não ter raízes reais.
- e) n. d. a.

Resolução:

Como $\rho = \frac{c}{a}$, logo $P < 0$. Como o produto é negativo, as raízes devem ter sinais contrárias.

02 A equação $mx^2 + 4x + m = 0$ não admite raízes reais se:

- a) $m = 0$
- b) $-2 < m < 2$
- c) $-4 < m < 4$
- d) $m < -2$ e $m > 2$
- e) $m < -2$ ou $m > 2$

Resolução:

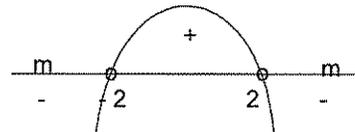
$$\Delta < 0:$$

$$16 - 4 m^2 < 0 \text{ (inequação do 2° grau)}$$

$$4 m^2 - 16 > 0$$

$$m^2 = 4$$

$$m = \pm 2$$



$$sc \{m \in \mathbb{R} / m < -2 \text{ ou } m > 2\}$$

03 (PUC) Um professor propôs aos seus alunos a resposta de certa equação do 2° grau. Um dos alunos copiou errado apenas o coeficiente do termo do 1° grau e encontrou as raízes 1 e -3; outro, copiou errado apenas o termo constante, encontrando as raízes -2 e 4. Resolva a equação original, proposta por aquele professor.

Resolução:

1° aluno errou o coeficiente b , logo, acertou o produto das raízes: $p = -3$.

2° aluno errou o coeficiente c , logo acertou a soma das raízes: $S = 2$.

Então a equação correta é:

$$x^2 - S x + \rho = 0, x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Resolvendo por S e P encontram -1 e 3.

04 (PUCCAMP) Se v e w são as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$, onde a e b são coeficientes reais, então $v^2 + w^2$ é igual a:

- a) $a^2 - 2b$
- b) $a^2 + 2b$

- c) $a^2 - 2b^2$
 d) $a^2 + 2b^2$
 e) $a^2 - b^2$

Resolução:

Sabe-se que: $v + \omega = -a$
 $v \cdot \omega = b$

Logo, $(v + m)^2 = (-a)^2$
 $v^2 + 2vm + m^2 = a^2$
 $v^2 + m^2 = a^2 - 2b$

05 (EPCAR) Uma aeronave voou no primeiro dia de uma viagem $\frac{3}{5}$ do percurso. No segundo dia, voou $\frac{2}{3}$ do que faltava e, no 3º dia, completou a viagem voando 800 km. O percurso total, em km, é um número:

- a) divisor de $12 \cdot 10^3$
 b) múltiplo de 10^4
 c) divisor de 10^3
 d) múltiplo de $20 \cdot 10^3$

Resolução:

1º dia = $\frac{3}{5}x$

2º dia = $\frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{3x}{5}\right)$
 $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{5} = \frac{4x}{15}$

3º dia = 800

Logo, $\frac{3x}{5} + \frac{4x}{15} + 800 = x$

$\frac{9x + 4x + 12000}{15} = 15x$

$2x = 12.000$

$x = 6.000$. Esse n° é divisor de $12 \cdot 10^3$



Exercícios de Sala

01 A idade de dona Helena é igual à soma dos números de filhos e netos que ela tem. Cada um de seus filhos tem tantos filhos quantos são seus irmãos. Sabendo-se que dona Helena tem entre 70 e 85 anos, podemos concluir que sua idade, em anos, é:

- a) 72
 b) 75
 c) 78
 d) 80
 e) 81

02 Uma pessoa colocou, em três montes alinhados, a mesma quantidade de bolinhas. Em seguida, fez as seguintes operações: retirou de cada um dos montes laterais 3 bolinhas e colocou-as no monte do meio. Depois, retirou do monte do meio tantas bolinhas quantas ficaram no monte da esquerda. Desse modo, o monte do meio ficou com:

- a) 9 bolinhas;
 b) 15 bolinhas;
 c) um número par de bolinhas;
 d) tantas quantas em cada monte lateral;
 e) não se pode determinar a quantidade, pois faltam dados.

03 Um estudante precisa de n dias para ler um livro de 270 páginas, lendo p páginas por dia. Se ele ler $p + 15$ páginas por dia, levará $n - 3$ dias na leitura. O valor de $n + p$ é:

- a) 35
 b) 39
 c) 54
 d) 42
 e) 72

04 (UNICID) O valor de m , para que uma das raízes da equação $x^2 + mx + 27 = 0$ seja o quadrado da outra é:

- a) -3
 b) -9
 c) -12
 d) 3
 e) 6

05 (EsSA) A soma dos inversos das raízes da equação $x^2 - 36x + 180 = 0$ é:

- a) $\frac{1}{5}$
 b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{30}$

d) $\frac{1}{36}$

e) $\frac{2}{15}$

06 (EsPCEEx) Sejam m e n dois números inteiros positivos tais que m e n são ímpares consecutivos, com $m.n = 483$. Nestas condições, o valor de $m + n$ é igual a:

- a) 64
- b) 52
- c) 46
- d) 44
- e) 32

07 (EPCAR) Numa prova de Matemática, havia dois problemas. Ao corrigi-la, o professor responsável determinou que não consideraria questões meio certas. Assim a cada prova só poderia ser atribuído **zero, 5** ou **10**. Dos alunos, 25 obtiveram nota 5, 10 alcançaram nota 10, 25 acertaram o segundo problema e 20 erraram o primeiro problema. O número de alunos que tiraram nota zero é

- a) 0
- b) 5
- c) 10
- d) 15

08 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a equação do segundo grau $x^2 - 4x + m = 0$ não admita raízes reais.

09 Determine $k \in \mathbb{R}$ sabendo que uma das raízes de equação do segundo grau $x^2 - 8x + k = 0$ é igual ao triplo da outra.

10 (Fuvest-SP) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $10x^2 + 33x - 7 = 0$. O número inteiro mais próximo do número $5x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)$ é:

- a) - 33
- b) - 10
- c) - 7
- d) 10
- e) 33



Exercícios de Casa

01 Resolva as equações:

- a) $(x + 3)(x + 1)(2x - 3) = 0$
- b) $x(x + 7)(x^2 - 5x + 6) = 0$
- c) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$
- d) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

02 (Fuvest-SP) Resolva a equação:

$$\frac{x+2}{2} + \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

03 (Fuvest-SP) Resolver a equação:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+2} = -1$$

04 (Unifei-SP) Sendo a e b as raízes da equação

$2x^2 - 5x + m = 3$, então, se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3}$, o valor de m é:

a) $\frac{3}{4}$

b) $-\frac{4}{3}$

c) $\frac{27}{4}$

d) 2

e) 1

05 (Fuvest-SP) A equação $x^2 - x + c = 0$, para um conveniente valor de c , admite raízes iguais a:

a) - 1 e 1

b) 0 e 2

c) - 1 e 0

d) 1 e - 3

e) - 1 e 2

06 Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $3x^2 - 11x + 5 = 0$, calcule o valor de $(x_1 + 3) \cdot (x_2 + 3)$.

07 (Fuvest-SP) A equação do 2º grau $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. A outra raiz é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) - 1
- e) - 2

08 (Vunesp) Um valor de m para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3mx + 5m = 0$ é o dobro da outra é:

- a) $-\frac{5}{2}$
- b) 2
- c) - 2
- d) 5
- e) $\frac{5}{2}$

09 (UFMG) Considere a equação $(x^2 - 14x + 38)^2 = 11^2$. O número de raízes reais distintas dessa equação é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

10 (Unifor-CE) No universo \mathbb{R} , a equação

$$\sqrt{2-x} = \frac{x-2}{2} \text{ admite:}$$

- a) uma única raiz, inteira e positiva
- b) uma única raiz, inteira e negativa
- c) uma única raiz, irracional e positiva.
- d) duas raízes opostas.
- e) duas raízes positivas.

11 Resolver em \mathbb{R} :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$$

12 (Unifor-CE) Um professor colocou no quadro negro uma equação do 2º grau e pediu que os alunos a resolvessem. Um aluno copiou errado o termo constante da equação e achou as raízes -3 e -2. Outro aluno copiou errado o coeficiente do termo do primeiro grau e achou as raízes 1 e 4. A diferença positiva entre as raízes da equação correta é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

13 Resolver em \mathbb{R} :
 $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

14 Resolver em \mathbb{R} :
 $(x^2 + x - 1)^2 - 6(x^2 + x - 2) - 1 = 0$

15 (UFPE) Em uma festa de aniversário cada convidado deveria receber o mesmo número de chocolates. Três convidados mais apressados se adiantaram e o primeiro comeu 2, o segundo 3 e o terceiro 4 chocolates além dos que lhe eram devidos, resultando no consumo da metade dos chocolates da festa. Os demais chocolates foram divididos igualmente entre os demais convidados e cada um recebeu um a menos do que lhe era devido. Quantos foram os chocolates distribuídos na festa?

- a) 20
- b) 24
- c) 28
- d) 32
- e) 36

16 (UFF-RJ) Cada filha de Luiz Antônio tem o número de irmãs igual à quarta parte do número de irmãos. Cada filho de Luiz Antônio tem o número de irmãos igual ao triplo do número do número de irmãs.

O total de filhas de Luiz Antônio é:

- a) 5
- b) 6
- c) 11
- d) 16
- e) 21

17 (U. E. Londrina - PR) Em uma cantina há fichas de R\$ 0,50 R\$1,00 R\$2,50. Amanda comprou 10 fichas e gastou R\$ 20,00. Quantas fichas de R\$ 1,00 Amanda comprou?

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

18 (PUC-RJ) A soma de minha idade com as de minhas duas filhas é 64. Eu tenho trinta anos mais do que uma delas, e a diferença de idade entre as duas é de cinco anos. Sabendo que já fiz quarenta anos, qual a minha idade?

19) Uma torneira enche um tanque em 2 horas e outra enche o mesmo tanque em 3 horas. Estando o tanque vazio e abrindo as duas torneiras simultaneamente, após quanto tempo o tanque estará cheio?

20) (F. I. Vitória-ES) Uma prova que vale 10 pontos é composta de 64 questões de mesmo valor. Se um aluno

acertou $\frac{2}{5}$ das questões nessa prova, então, o número de pontos que obteve foi:

- a) 2,5
- b) 3,0
- c) 4,0
- d) 5,2
- e) 6,4

12 - Progressão Aritimétrica (PA)

Vamos iniciar o estudo de um tipo particular de sequência, chamada progressão aritmética, que indicaremos P. A.

Chama-se **progressão aritmética** qualquer sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao seu antecessor uma constante **r**, chamada **razão** da P. A.

Assim, numa P. A.; temos:

$$a_n = a_{n-1} + r \quad (\text{para } n \geq 2)$$

Exemplos

- a) (1; 4; 7; 10; 13;...) P.A. de razão $r = 3$
- b) (12; 7; 2; -3;...) P.A. de razão $r = -5$
- c) (8; 8; 8; 8; ...) P.A. de razão $r = 0$

12.1 Classificação

- ◆ Se $r > 0$ a P.A. é crescente
- ◆ Se $r < 0$ a P.A. é decrescente
- ◆ Se $r = 0$ a P.A. é constante

12.2 Fórmula do termo geral da P.A.

Seja a P.A. de razão r :

$$(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots)$$

Da definição, resulta:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando-se, membro, essas n igualdades, obtemos:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + \dots + r}_{(n-1) \text{ parcelas}}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Essa última igualdade é chamada **fórmula do termo geral da P.A.**

Se quisermos obter a_n a partir de um termo a_p , qualquer da P.A., escrevemos:

$$a_n = a_p + (n-1) \cdot r$$

12.3 Uma propriedade importante

Se x , y e z são três termos consecutivos de uma P.A., então:

$$y = \frac{x+z}{2}$$

A demonstração é imediata, pois se $(x; y; z)$ estão em P.A. de razão r :

$$x+r = y \quad (I)$$

$$y+r = z \quad (II)$$

Efetuando $-(I) - (II)$, teremos:

$$x - y = y - z$$

ou ainda

$$2y = x + z$$

$$\therefore y = \frac{x+z}{2}$$

O termo central y é a média aritmética entre x e z .

12.4 Termos equidistantes dos extremos de uma P.A.

A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita é igual à soma dos extremos dessa sequência.

Sabemos que a_p e a_q são equidistantes dos extremos a_1 e a_n se o número de termos que antecedem a_p for igual ao número de elemento que sucedem a_q . Ou seja:

$$\underbrace{a_1; a_2; \dots; a_p; \dots; a_q; \dots; a_{n-1}; a_n}_{(p-1)\text{ termos} \qquad \qquad \qquad (n-q)\text{ termos}}$$

$$p-1 = n-q \Rightarrow$$

$$p+q = n+1$$

Vamos obter a_p e a_q :

$$a_p = a_1 + (p-1)r$$

$$a_q = a_1 + (q-1)r$$

Admando, membro a membro, as duas igualdades, teremos:

$a_p + a_q = 2a_1 + (p+q-2)r$ mas $p+q = n+1$, portanto:

$$a_p + a_q = 2a_1 + (n-1)r$$

$$a_p + a_q = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)r}_{a_n}$$

$$\therefore a_p + a_q = a_1 + a_n$$

12.5 Soma dos termos de uma P.A.

Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma P.A. finita.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (I)$$

Vamos escrever S_n em ordem invertida.

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \quad (II)$$

Somando, membro a membro, as igualdades (I) e (II), teremos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_n)$$

Conforme visto anteriormente,

$$(a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \dots = (a_1 + a_n)$$

Podemos escrever:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

e por fim:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Note que a soma $(a_1 + a_n)$ pode ser substituída pela soma $(a_p + a_q)$, sendo a_p e a_q equidistantes dos extremos.



Exercícios Comentados

01) Numa P.A. em que $a_1 = 3$ e $r = 2$, obtenha:

- o décimo primeiro termo.
- o trigésimo termo.
- a fórmula do termo geral dessa sequência.

Resolução:

a) $a_{11} = a_1 + (11-1) \cdot r$

$$a_{11} = 3 + 10 \cdot 2$$

$$\therefore a_{11} = 23$$

b) $a_{30} = a_1 + (30-1) \cdot r$

$$a_{30} = 3 + 29 \cdot 2$$

$$\therefore a_{30} = 61$$

c) $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$$

$$a_n = 3 + 2n - 2$$

$$\therefore a_n = 1 + 2n$$

- 02) Calcule a razão de uma P.A. em que:
 $a_{12} = 15$ $a_{21} = 60$

Resolução:

$$a_{21} = a_{12} + (21 - 12) \cdot r$$

$$60 = 15 + 9r$$

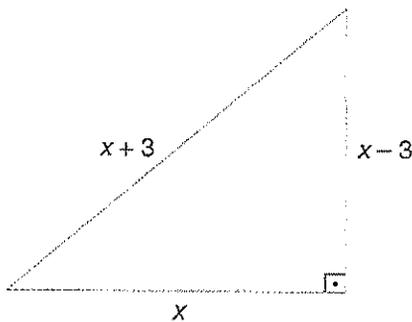
$$9r = 45$$

$$\therefore r = 5$$

- 03) Calcule as medidas dos lados de um triângulo retângulo sabendo que estão em P.A. de razão 3.

Resolução:

Vamos representar as medidas dos lados por $x - 3$; $x + 3$ (P.A. de razão $r = 3$)



Aplicando o teorema de Pitágoras, teremos:

$$(x+3)^2 = (x-3)^2 + x^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + x^2$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 12 \end{cases}$$

Como devemos ter $x > 3$, ficamos com $x = 12$.

As medidas são 9, 12 e 15.

- 04) A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 2n^2 + 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Calcule

- a) a_1
 b) S_{10}
 c) a_{10}

Resolução:

a) $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$

$$a_1 = 5$$

b) $S_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 = 230$

$$S_{10} = 230$$

c) $a_{10} = S_{10} - S_9$
 $S_9 = 2 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 = 189$

$$\therefore a_{10} = 230 - 189 \Rightarrow a_{10} = 41$$

- 05) Considere a sequência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

- a) Obtenha os 5 primeiros termos dessa sequência.
 b) Obtenha a fórmula de a_n em função de n .
 c) Obtenha seu 15º termo.

Resolução:

a) $a_2 = a_1 + 3 = 4$

$$a_3 = a_2 + 3 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 10$$

$$a_5 = a_4 + 3 = 13$$

$$(1; 4; 7; 10; 13)$$

Obs.: Note que temos uma P.A. com $a_1 = 1$ e $r = 3$

b) $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$a_n = 1 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n - 2 \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

c) $a_{15} = 3 \cdot 15 - 2 = 43$



Exercícios de Sala

- 01) Seja uma P.A. em que $a_9 = 21$ e $a_{21} = 9$;
- Calcule a razão da P.A.
 - obtenha a fórmula do termo geral dessa P.A.
- 02) Numa P.A. crescente a soma dos 3 primeiros termos é igual a 27 e o produto desses 3 termos vale 648. Determine-os:
- 03) Determine os valores de a de modo que a sequência $(a^2; 2a; 5-2a)$ seja uma P.A.
- 04) A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 2n^2 - n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
Calcule, da P.A.:
- o primeiro termo.
 - o sexto termo.
 - o sétimo termo.
 - o termo geral a_n .
- 05) (UFJF) Se os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética de razão 4, então o cosseno do maior ângulo agudo desse triângulo é:
- 0,6
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - 0,8
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 06) (PUC) A soma de três números naturais em progressão aritmética é trinta; a diferença entre o maior e o menor destes números é doze. O menor termo dessa progressão é igual a:
- 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
- 07) (EsPCEEx) Na tabela a seguir, em que os números das linhas 1 e 2 encontram-se em progressão aritmética, seja n o número da coluna em que pela

primeira vez o número b_n da linha 2 é maior que o a_n da linha 1.

	1	2	3	4	...	n
Linha 1	1000	1004	1008	1012	...	a_n
Linha 2	20	27	34	41	...	b_n

A soma dos algarismos de n é

- 13
 - 12
 - 11
 - 10
 - 9
- 08) (EsPCEEx) A sequência de números reais a, b, c, d forma nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma de seus termos é 110, a sequência de números reais a, b, e, f forma nessa ordem, uma progressão geométrica de razão 2. A soma $d + f$ é igual a:
- 96
 - 102
 - 120
 - 142
 - 132
- 09) (EsPCEEx) Numa modalidade de corrida, ganha a equipe que percorre uma determinada distância em menor tempo, revezando seus atletas a cada 800 metros. A equipe Verde utilizou a tática de organizar seus atletas na ordem crescente de seus atletas na ordem crescente de suas velocidades. Sabe-se que o atleta menor veloz dessa equipe gastou 5 minutos no revezamento e que a diferença de tempo entre dois atletas consecutivos foi sempre de 30 segundos. Sabendo que a equipe Verde realizou a prova em 26 minutos, a distância total percorrida foi de
- 4000 metros.
 - 4160 metros.
 - 6400 metros.
 - 10400 metros.
 - 20800 metros.
- 10) (EsPCEEx) Uma progressão aritmética tem razão $r = -10$, sabendo que seu 100º (centésimo) termo é zero, pode-se afirmar que seu 14º (décimo quatro) termo vale:
- 130
 - 870
 - 860
 - 990
 - 120



Exercícios de Casa

01 (UFJF) Se os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética de razão 4, então o cosseno do maior ângulo agudo desse triângulo é:

- a) 0,6
- b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
- c) 0,8
- d) $\sqrt{\frac{2}{2}}$

02 (EsPCEx) Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função definida

por $f(x) = 2x - 3$, então a soma

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$ é igual a:

- a) 9700.
- b) 9800.
- c) 9900.
- d) 9600.
- e) 10000.

03 (AFA) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (PA) é dada pela fórmula

$S_n = \frac{3n^2 + n}{2}$, então a soma do quarto com o sexto termo dessa PA é

- a) 25.
- b) 28.
- c) 31.
- d) 34.

04 (AFA) A soma dos três algarismos de um número é 15. Somando-se 396 ao número, obtém-se um outro com os mesmos algarismos, mas em ordem inversa. Determinar o número sabendo-se que seus algarismos estão em PA.

- a) par
- b) primo
- c) múltiplo de 7
- d) divisível por 13

05 (ITA) O valor de n que torna a sequência $2 + 3n, -5n, 1 - 4n$ uma progressão aritmética pertence ao intervalo

- a) $[-2, -1]$.
- b) $[-1, 0]$
- c) $[0, 1]$
- d) $[1, 2]$
- e) $[2, 3]$

06 (AFA) Os números inteiros positivos são agrupados em partes disjuntas, da seguinte maneira: $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 10\}$, $\{11, 12, 13, 14, 15\}$, Seja S a soma dos elementos que compõem o 12º conjunto desta sequência. A soma dos algarismos de S é um número

- a) primo.
- b) múltiplo de 7.
- c) múltiplo de 5
- d) quadrado perfeito menor que 36.

07 Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência $a_n = 2n - 1$ e $b_n = a_n - 1$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$.

08 (PUC-SP) Na sequência $(a_1; a_2; \dots)$ têm-se $a_1 = 1$ e

$a_{n+1} = \frac{2 + a_n^2}{2a_n}$. Qual dos números a seguir está mais

próxima de a_3 ?

- a) 1
- b) 2
- c) $\sqrt{2}$
- d) $\sqrt{3}$
- e) $\sqrt{5}$

09 (Mackenzie-SP) O trigésimo primeiro termo de uma P.A. de primeiro termo 2 e razão 3 é:

- a) 63
- b) 65
- c) 92
- d) 95
- e) 98

10 (PUC-SP) O número de termos de uma P.A., cujo primeiro termo é $a_1 = 10x - 9y$, o último, $a_n = y$ e a razão $r = y - x$, é:

- a) 11
b) 10
c) 9
d) 8
e) 7

11 Qual é o número de múltiplos de 7 com 2 ou 3 algarismos?

12 (Mackenzie-SP) As progressões aritméticas (5; 8; 11;...) e (3; 7; 11;...) têm 100 termos cada um. O número de termos iguais nas duas progressões é:

- a) 15
b) 25
c) 1
d) 38
e) 42

13 (U.E. Londrina-PR) Interpolano-se 7 termos aritméticos entre os números 10 e 98, obtém-se uma P.A. cujo termo central é:

- a) 45
b) 52
c) 54
d) 55
e) 57

14 (Mackenzie-SP) Se os ângulos inteiros de um triângulo estão em P.A., e o menor deles é a metade do maior, então o maior mede:

- a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°

15 (Fuvest-SP) Em uma P.A. de termos positivos, os três primeiros termos são: $1 - a$; $-a$; $\sqrt{11 - a}$. O quarto termo dessa P.A. é:

- a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

16 (FGV-SP) Uma sequência é tal que

$a_1 = 8$ e $a_n = a_{n-1} + 12$ (sendo $n \geq 2$). A soma dos 20 primeiros termos é:

17 (PUC-SP) Um teatro tem 18 poltronas na primeira fila, 24 na segunda, 30 na terceira e assim por diante na mesma sequência, até a vigésima fila, que é a última. O número de poltrona desse teatro é:

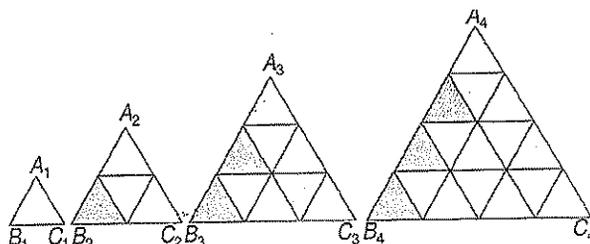
- a) 92
b) 132
c) 150
d) 1.320
e) 1.500

18 (FGV-SP) Numa progressão aritmética, sabe-se que $a_{14} = 3$ e $a_{16} = 11$. Calcule a soma dos seu 30 primeiros termos.

19 (Cesgranrio) A soma dos primeiros n números ímpares positivos maiores que 10 é:

- a) $n^2 + 10n$
b) $\frac{11}{4}(n+1)^2$
c) $n^2 + 11n$
d) $n^2 + 11n + 10$
e) n^2

20 (U. Católica-DF) Observe a sequência de triângulos $A_n B_n$, em que $n = 1, 2, 3, \dots$



No vigésimo triângulo da sequência acima, triângulo $A_{20} B_{20} C_{20}$, temos x triângulos não hachurados. Com base

Nessas informações, determine o valor da expressão

$$\text{são } \frac{x}{3} - 40$$

13 - Progressão Geométrica



Neste capítulo iremos iniciar o estudo de um outro tipo de sequência, a **progressão geométrica**, que abreviaremos por P.G.

13.1 Definição

Chama-se progressão geométrica toda sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual a seu antecessor multiplicado por um número constante q , chamado razão da P.G.

Exemplos

(5; 10; 20; 40; ...) P.G. de razão 2
 $\underbrace{\quad} \times 2 \quad \underbrace{\quad} \times 2 \quad \underbrace{\quad} \times 2$

(9; 3; 1; ...) P.G. de razão $\frac{1}{3}$
 $\underbrace{\quad} \times \frac{1}{3} \quad \underbrace{\quad} \times \frac{1}{3}$

$\times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3}$

(5; -5; 5; -5; ...) P.G. de razão -1
 $\underbrace{\quad} \times (-1) \quad \underbrace{\quad} \times (-1) \quad \underbrace{\quad} \times (-1)$

Observação

✓ Decorre da definição que em toda P.G. de razão $q \neq 0$, temos:

$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ (com $n \geq 2$) ou seja, o quociente entre um termo qualquer e o seu antecessor é uma constante q (razão da P.G.).

13.2 Fórmula do Termo Geral da P.G.

Seja a P.G.:

$(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n)$ com $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$

Da definição, decorre que:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned} \right\} (n-1) \text{ termos}$$

multiplicando essas igualdades, membro a membro, termos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = (a_1 \cdot q)(a_2 \cdot q) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} \cdot q)$$

$$\cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \dots \cdot \cancel{a_n} = \cancel{a_1} \cdot \cancel{a_2} \cdot \dots \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot 1 \cdot \underbrace{q^{n-1}}$$

simplificando, resulta:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Essa última igualdade é chamada **fórmula do termo geral da P.G.** e possibilita que se obtenha um termo qualquer da sequência desde que se conheça a_1 e q .

Podemos também obter a_n a partir de um termo a_p qualquer ($p \neq n$) pela expressão:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

13.3 Uma propriedade importante

Se x , y e z são, nessa ordem, três termos consecutivos de uma P.G., então:

$$y^2 = x \cdot z$$

ou seja, o termo central y é a média geométrica entre x e z .

A demonstração é imediata:

$$x \cdot q = y \text{ e } y \cdot q = z$$

Dividindo, membro a membro, as duas igualdades, termos:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$\therefore y^2 = x \cdot z$$

13.4 Soma dos termos de uma P.G. finita

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ uma P.G. finita, de razão q .

Representa por S_n a soma de seus n termos.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Podemos escrever S_n na forma:

$$S_n = a_1 + a_{1q} + a_{1q}^2 + \dots + a_{1q}^{n-1} \quad (I)$$

Multiplicando os dois membros da igualdade (I) pela razão q , teremos:

$$q \cdot S_n = a_{1q} + a_{1q}^2 + a_{1q}^3 + \dots + a_{1q}^n \quad (II)$$

Subtraindo a igualdade (I) da igualdade (II), teremos:

$$qS_n - S_n = a_{1q}^n - a_1$$

$$S_n(q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

E, portanto:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \quad (\text{para } q \neq 1)$$

Note que se $q = 1$, a fórmula acima não pode ser aplicada.

Entretanto, se $q = 1$, todos os termos da P.G. são iguais ao primeiro. Assim, temos:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ parcelas}}. \text{ Ou seja:}$$

$$S_n = n \cdot a_1 \quad (\text{para } q = 1)$$

13. 5 Limite da soma da P.G. infinita

Vamos, inicialmente, acompanhar um caso particular.

$$\text{Seja a P.G. infinita } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^n}; \dots \right).$$

Vamos obter a fórmula da soma dos n primeiros termos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_n = - \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma P.G. infinita com razão q , com $-1 < q < 1$, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{Se } n \text{ tende a infinito, } q^n \text{ tende a zero,}$$

assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$



Exercícios Comentados

01) Seja a P.G. $(9; 3; 1; \dots)$.

- Calcule seu sexto termo.
- Obtenha seu termo geral a_n em função de n .

Resolução:

$$a) (9; 3; 1; \dots) \text{ e } q = \frac{1}{3}$$

$$\times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

Vamos obter a_6

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \quad a_6 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{3^2}{3^5} = 3^{-3}$$

$$\therefore a_6 = \frac{1}{27}$$

$$b) a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3^{3-n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

02) Calcule a razão de uma P.G. sabendo que

$$a_4 + a_6 = 160 \text{ e } a_7 + a_9 = 1.280$$

Resolução:

Vamos expressar os termos envolvidos em função de a_1 e q

$$a_4 + a_6 = 160 \Rightarrow a_{1q}^3 + a_{1q}^5 = 160$$

$$a_1 \cdot q^3 (1 + q^2) = 160 \quad (I)$$

$$a_7 + a_9 = 1.280 \Rightarrow a_{1q}^6 + a_{1q}^8 = 1.280$$

$$a_1 \cdot q^6 (1 + q^2) = 1.280 \quad (II)$$

Dividindo-se a igualdade (II) pela (I), teremos:

$$\frac{a_{1q}^6 (1 + q^2)}{a_1 \cdot q^3 (1 + q^2)} = \frac{1.280}{160}$$

$$q^3 = 8 \quad \therefore \boxed{q = 2}$$

03) (FGV-SP) Os números x, y, z formam, nessa ordem, uma P.G. de soma 15. Os números $x, y + 1$ e $z + 5$ formam, nessa ordem, uma P.G. de soma 21. Sendo $0 \leq x \leq 10$, o valor de $3z$ é:

- a) 36
- b) 9
- c) -6
- d) 48
- e) 21

Resolução:

$$(x, y, z) \text{ é P.A. } ex + y + z = 15$$

$$(x, y + 1, z + 5) \text{ é P.G. e}$$

$$x + (y + 1) + (z + 5) = 21$$

Da P.A., temos: $x + z = 2y$

$$\therefore y = 5ex + z = 10$$

Da P.G., temos

$$(y + 1)^2 = x(z + 5)$$

$$36 = (10 - z) \cdot (z + 5)$$

$$36 = 10z + 50 - z^2 - 5z$$

$$z^2 - 5z - 14 = 0 \begin{cases} 7 \\ \text{ou} \\ -2 \end{cases}$$

Se $z = -2 \Rightarrow x = 12$ (não convém)

Se $z = 7 \Rightarrow x = 3$ (para $0 \leq x \leq 10$)

$$\text{Portanto } 3z = 21$$

04) Quantos termos da P.G. (1; 3; 9; ...) devem ser somados para que o resultado seja 3.280?

Resolução:

Na P.G., temos:

$$a_1 = 1; q = 3 \text{ e } S_n = 3.280$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$3.280 = \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1}$$

05) (Fuvest-SP) É dado um quadrado Q_1 cujo lado $\ell = 1$. Considere a sequência infinita de quadrados ($Q_1; Q_2; Q_3; \dots$) em que cada quadrado é obtido unindo-se os pontos médios dos lados do quadrado anterior. A soma das áreas de todos os quadrados da sequência é:

a) 4

b) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

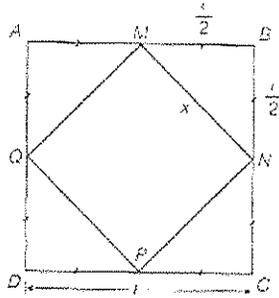
c) $\frac{4}{3}$

d) 2

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

Resolução:

inicialmente, observe que se um quadrado tem vértice nos pontos médios dos lados de um outro quadrado, sua área será igual metade da área deste.



$$S_{ABCD} = l^2$$

$$S_{MNPQ} = x^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{l^2}{2}$$

Assim, na sequência de quadrados propostos no problema, as áreas formam a seguinte P.G.:

$$\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots\right) \text{ A soma dos infinitos termos dessa P.G.}$$

é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore S = 2$$



Exercícios de Sala

01) Seja a P.G. (1; 2; 4; ...):

a) Calcule o 6º termo dessa sequência.

b) Obtenha a fórmula do termo geral dessa P.G.

c) Seja a_k , com $k \in \mathbb{N}^*$, o primeiro termo dessa P.G. tal que $a_k > 1.000$. Obtenha k e a_k .

02) Calcule a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (1; 2; 4; ...).

03) Calcule o limite da soma dos infinitos termos da P.G.

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots\right)$$

04) (PUC-RJ) Numa P.G., a diferença do 2º e o 1º termo é 9 e a diferença entre o 5º e o 4º termo é 576. O 1º termo dessa progressão é:

- a) 3
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 9

05) (Vunesp) No dia 1º de dezembro de certo ano, uma pessoa enviou pela internet uma mensagem para x pessoas. No dia 2, cada uma das x pessoas que recebeu a mensagem no dia 1º a enviou para outras duas novas pessoas. No dia 3, cada pessoa que recebeu a mensagem no dia 2 também enviou a mesma mensagem para outras duas novas pessoas e, assim, sucessivamente. Se, do dia 1º até o final do dia 6 de dezembro, 756 pessoas haviam recebido a mensagem, o valor de x é:

- a) 12
- b) 24
- c) 52
- d) 63
- e) 126

06) (Fuvest-SP) É dado um quadrado Q_1 cujo lado $l = 1$. Considere a sequência infinita de quadrados ($Q_1; Q_2; Q_3; \dots$) em que cada quadrado é obtido unindo-se os pontos médios dos lados do quadrado anterior. A soma das áreas de todos os quadrados da sequência é:

- a) 4
- b) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$
- c) $\frac{4}{3}$
- d) 2
- e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

07) (EspCEX) Os números a , b e c determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r ($r \neq 0$). Na ordem b , a , c determinam uma progressão geométrica (PG). Então a razão da PG é

- a) -3.
- b) -2.
- c) -1.
- d) 1.
- e) 2.

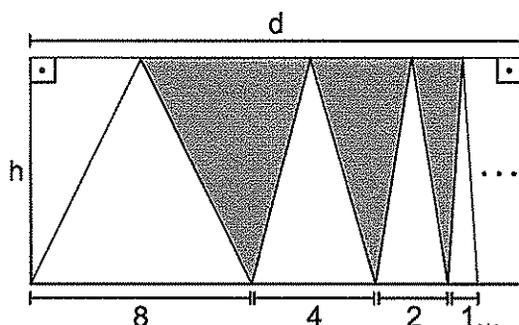
08 (EspCEx) O sexto termo de uma progressão geométrica é igual a b , e o sétimo termo é igual a c . Se o primeiro termo desta progressão é diferente de zero e a razão maior que um, então o primeiro termo é igual a:

- a) $\frac{c}{b}$.
 b) $\frac{b^3}{c^4}$.
 c) $\frac{b}{c}$.
 d) $\frac{b^6}{c^5}$.
 e) $\frac{b^4}{c^3}$.

09 (EspCEx) O valor de x que satisfaz a equação $x + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x + \frac{8}{27}x + \dots = 243$, em que o primeiro membro é uma P.G. infinita, é

- a) 27.
 b) 30.
 c) 60.
 d) 81.
 e) 90.

10 (FGV) A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetros, 8, 4, 2, 1, ...



Sabendo que a soma da área dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a:

- a) 68.
 b) 102.
 c) 136.
 d) 153.
 e) 192.



Exercícios de Casa

01 (Mackenze-SP) Se o oitavo termo de uma P.G. é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$, o primeiro termo dessa progressão é:

- a) 2^{-1}
 b) 2
 c) 2^6
 d) 2^8
 e) $\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$

02 (U. F. São Carlos-SP) Uma bola cai de uma altura de 30 m e salta, cada vez que toca o chão, dois terços da altura da qual caiu. Seja $h(n)$ a altura da bola no salto de número n . A expressão matemática para $h(n)$ é:

- a) $30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$
 b) $\frac{2}{3}(30)^n$
 c) $20 \cdot n$
 d) $\frac{2}{3} \cdot n$
 e) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

03 (Fesp-SP) A soma do segundo, quarto e sétimo termos de uma P.G. é 370; a soma do terceiro, quinto e oitavo termo é 740. Podemos afirmar corretamente que o primeiro termo e a razão da P.G. são:

- a) 3 e 2
 b) 4 e 2
 c) 5 e 2
 d) 6 e 1,5

04 (Fuvest-SP) Uma P.A. e uma P.G. têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se, ainda, que o segundo termo da P.A. excede o segundo termo da P.G. em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

- a) 10
- b) 12
- c) 14
- d) 16
- e) 18

057 A população atual de uma cidade é de 100.000 habitantes e tem sido observada uma taxa de crescimento anual de 3%. Se for mantida essa taxa, a expressão que permite estimar a população dessa cidade daqui a t anos é:

- a) $100.000 + 1,03t$
- b) $100.000 \cdot 0,03^t$
- c) $100.000 + 1,03t$
- d) $100.000 \cdot (1,03)^t$
- e) $100.000 + 3t$

06 (Cesgranrio) A soma $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{500}$ é igual a:

- a) $2^{500} + 1$
- b) $2^{501} - 1$
- c) $2(2^{500} - 1)$
- d) $2^{501} + 1$
- e) $2(2^{500} + 1)$

07 A soma dos n termos de uma P.G. cujos termos extremos são 1 e 243 vale 364. O quociente entre o número de termos e a razão dessa P.G. vale:

- a) 2
- b) 6
- c) 3
- d) 1
- e) 4

08 (Fuvest-SP) Uma P.G. tem primeiro termos igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39} , então o número de termos é:

- a) 12
- b) 13
- c) 14
- d) 15
- e) 16

09 (FGV-SP) Em um certo tipo de jogo, o prêmio pago a cada acertador é 18 vezes o valor de sua aposta. Certo apostador resolve manter o seguinte esquema de jogo: aposta R\$ 1,00 na 1ª tentativa e, nas seguintes, aposta sempre o dobro do valor anterior. Na 11ª tentativa ele acerta. Assinale a alternativa que completa a frase: "O apostador..."

- a) nessa tentativa apostou R\$ 1.000,00".
- b) investiu no jogo R\$ 2.048,00".

- c) recebeu de prêmio R\$ 18.430,00".
- d) obteve um lucro de R\$ 16.385,00".
- e) teve um prejuízo de R\$ 1.024,00".

10 (Vunesp) Seja $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$, com n natural diferente de zero. O menor número n tal que $S_n > 0,99$ é:

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8
- e) 9

11 (Mackenzie-SP) A soma dos termos da progressão $(3^{-1}; 3^{-2}; 3^{-3}; \dots)$ é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) 2
- c) $\frac{1}{4}$
- d) 4

12 (Fuvest-SP) Três números distintos formam uma P.A. cuja a soma é 3. Seus quadrados formam uma P.G. quais são esses números?

13 (Fuvest-SP) Seja S_n a soma dos n primeiros termos da seqüência infinita $10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; \dots$

- a) Calcule S_5 .
- b) Qual é o limite de S_n quando n tende a ∞ ?

14 (AFA) Uma P.A. cujo primeiro termo é zero e uma P.G. cujo primeiro termo é 1 possuem a mesma razão. O nono termo da P.G. é igual ao quadrado do nono termo da P.A.. Então

- a) uma das razões comum é -2 .
- b) a razão comum é -1 .
- c) a razão comum é 1.
- d) não existem as duas progressões.

15 (AFA) Quanto devemos adicionar a cada um dos números $k+3$, k , $k-2$ para que, nesta ordem, formem uma Progressão Geométrica?

- a) $6-k$.
- b) $6+k$.
- c) $1-6k$.
- d) $1+6k$.

14 - Matrizes

14. 1 Introdução

Neste capítulo, iremos estudar as matrizes, ou seja, tabelas numéricas cujos elementos serão dispostos em linhas e colunas. Acompanhe um exemplo:

Considere a tabela a seguir, onde estão registradas as médias bimestrais de um estudante em algumas disciplinas do curso colegial.

	Matemática	Biologia	História
1º bimestre	7,0	8,0	7,0
2º bimestre	8,0	9,0	7,0
3º bimestre	6,0	9,0	8,0
4º bimestre	7,0	8,0	9,0

Essa tabela apresenta 4 filas horizontais (linhas) e 3 filas verticais (colunas) e um total de $4 \cdot 3 = 12$ elementos. Tal tabela pode ser apresentada de forma simplificada, resultando na matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

14. 2 Definição: Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ (lê-se m por n) qualquer tabela com m elementos dispostos em m linhas e n colunas.

No exemplo que apresentamos no início, temos uma matriz do tipo (4×3) , onde os 12 elementos estão dispostos em 4 linhas e 3 colunas.

As matrizes podem ser representadas por uma destas três formas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Um elemento qualquer de uma matriz A será indicado por a_{ij} , onde:

- o índice i indica a linha;
- o índice j indica a coluna do elemento considerado.

Assim, por exemplo, na matriz:

16 (AFA) Se a seqüência de inteiros positivos $(2, x, y)$ é uma Progressão Geométrica e $(x+1, y, 11)$ uma Progressão Aritmética, então, o valor de $x+y$ é

- 11.
- 12.
- 13.
- 14.

17 (FMTM) Durante os dois primeiros minutos do lançamento de um foguete, ele consome 2% do combustível remanescente no tanque a cada 15 segundos. Se esse foguete foi lançado com q litros de combustível, após 2 minutos a quantidade de combustível em seu tanque, em litros, será igual a:

- $q \cdot 0,02^{0,125}$.
- $q \cdot 0,02^8$.
- $q \cdot 0,98^8$.
- $q \cdot 0,98^{15}$.
- $q \cdot 0,84$.

18 (UFOP) A seqüência $(x, xy, 2x)$, $x \neq 0$, é uma progressão geométrica. Então, necessariamente:

- x é um número racional.
- x é um número irracional.
- y é um número racional.
- y é um número irracional.
- y/x é um número racional.

19 (Integrado) O valor de mercado de um apartamento é alterado a cada mês com um acréscimo de 10% em relação ao mês anterior. A seqüência de valores do apartamento, a cada mês, forma uma progressão ...

- aritmética de razão 0,1
- aritmética de razão 1,1
- geométrica de razão 0,1
- geométrica de razão 1,1
- geométrica de razão 10

20 (FGV) Na equação $1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots = 2$ o 1º

membro é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. A soma das raízes da equação é:

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

temos:

$$a_{11} = 2; a_{12} = 4; a_{13} = -5$$

$$a_{21} = \sqrt{3}; a_{22} = 1; a_{23} = 0$$

14. 3 Representação genérica de uma matriz

Uma matriz A, do tipo (m x n), será representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou de forma implícita:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

14. 4 Matrizes Notáveis

Algumas matrizes têm nomenclatura própria. Veja algumas delas:

• Matriz linha

É toda matriz do tipo (1 x n)

$$A = [12 - 1]_{(1 \times 3)}$$

• Matriz coluna

É toda matriz do tipo (n x 1)

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

• Matriz nula

É toda a matriz em que todos os elementos são nulos. Será denotada por $O_{m \times n}$.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

• Matriz quadrada

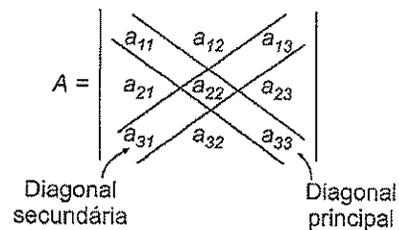
É toda matriz do tipo (n x n)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & \sqrt{3} & 10 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Em relação a uma matriz quadrada A, de ordem n, definimos:

- diagonal principal de A é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$.
- diagonal secundária de A é formada pelos elementos a_{ij} de A tais que: $i + j = n + 1$.



• Matriz diagonal

É toda matriz quadrada na qual $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

• Matriz identidade

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1. Será denotada por I_n .

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Matriz Transposta

Chama-se transposta de A e indica-se por A^t ou A' a matriz obtida, transformando-se, ordenadamente, cada linha de A em coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observação

✓ Se $A = A^t$, dizemos que A é simétrica.

• Matriz oposta

Chama-se oposta de A e indica-se por $-A$ a matriz obtida, trocando-se o sinal de cada um dos elementos de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Observação

✓ Se $A = -A^t$, dizemos que A é anti-simétrica.

14.5 Igualdade de Matrizes

Definição: Sejam A e B duas matrizes de mesmo tipo ($m \times n$). A e B são iguais se, e somente se, cada elemento de A for igual ao elemento correspondente de B.

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1; b = 0; c = 2 \text{ e } d = -1$$

14.6 Operações com Matrizes

Adição de matrizes

Definição: Seja A e B matrizes quaisquer do mesmo tipo $m \times n$. Chama-se soma de A com B e indica-se por $A + B$ a matriz C do tipo $(m \times n)$ em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes de A e B.

$$A + B = C$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

- Comutativa: $A + B = B + A$
- Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Elemento neutro: $A + 0 = A$
- Elemento oposto: $A + (-A) = 0$

Subtração de matrizes

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

O produto de um número real r por uma matriz A ($n \times m$) é a matriz rA ($n \times m$), obtida multiplicando-se cada elemento de A por r.

Exemplo:

$$2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriedades

- $1 \cdot A = A$
- $0 \cdot A = 0$
- $r(A + B) = rA + rB$
- $r(sA) = (rs)A$

14. 7 Produto de matrizes

Definição: Dadas duas matrizes $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$, o produto da matriz A pela matriz B, nessa ordem, é uma matriz $C_{m \times n}$, na qual cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se cada da linha i da matriz A pelo "correspondente" elemento da coluna j da matriz B e somando-se os produtos assim obtidos.

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

$$C_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Observações

Dos exemplos dados, pode-se inferir que:

✓ Os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são, em geral, distintos e, portanto, **não vale a propriedade comutativa**;

✓ A existência do produto $A \cdot B$ não implica a existência de $B \cdot A$ e vice-versa.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Supondo A, B e C matrizes compatíveis para as operações indicadas, são válidas as propriedades:

- Associativa

$$(AB) \cdot C = A(BC)$$

- Distributiva à esquerda

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

- Distributiva à direita

$$(B + C) \cdot A = BA + CA$$

- Elemento neutro

$$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A_{m \times n}$$

Observação

Da definição de produto e das propriedades vistas, decorre que, para matrizes, em geral, temos:

- $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

ou seja, as identidades usuais da álgebra que utilizam a propriedade **comutativa na multiplicação não pode ser usadas em matrizes**.

Embora a multilicação de matrizes não possua a propriedade comutativa, podem existir matrizes A e B tais que $A \cdot B = B \cdot A$. Nesse caso, dizemos que A e B comutam entre si para a multiplicação.

14. 8 Matriz inversa

Definição: Dada uma matriz A, quadrada, de ordem n, se existir a matriz B, de ordem n tal que:

$A \cdot B = B \cdot A = I_n$, então dizemos que a matriz A é inversível e que a matriz B é a inversa de A.

Observação

✓ A inversa de A será denotada por A^{-1} .

✓ Nem toda matriz A é inversível. Se não existira a inversa de A, dizemos que A é uma matriz singular.

✓ Demonstra-se que, se existir, a inversa de A é única.

✓ São válida, as propriedades:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

* Supondo existentes as matrizes envolvidas e compatíveis para as operações indicadas.



Exercícios Comentados

01 (PUC-SP) Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ então a}$$

matriz X, de ordem 2 tal que: $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C$, é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 24 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 25 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 30 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 22 & 3 \end{pmatrix}$

Resolução:

Isolando a matriz x na equação:

$$3(x - A) = 2(B + x) + 6C$$

$$3x - 3A = 2B + 2x + 6C$$

$$x = 3A = 2B + 6C$$

$$x = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & -6 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

02) Determine os valores de a, b e c modo que a matriz M seja simétrica.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b+1 \\ a & 2 & c-1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Para que seja simétrica é necessário que

$$A = -1$$

$$b + 1 = 3 \therefore b = 2 \quad C - 2 = 5$$

$$C = 6$$

03) Seja as matrizes:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 2}, a_{ij} = i - j$$

$$B = (b_{ij})_{2 \times 2}, b_{ij} = 2^{i+j}$$

Calcule:

a) $A \cdot B$

Resolução:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 8 & 0 \cdot 16 \\ 4 + 0 & 8 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

04) Determine os valores de x e y de modo que as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ sejam comutativa em relação ao produto.

Resolução:

$$AB = BA$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ xy & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= xy \quad x(1-y) = 0 \\ x &= 0 \text{ ou } y = 1 \end{aligned}$$

05) Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Resolução: $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{cases} 2a+7c=1 \\ a+4c=0 \end{cases} \begin{cases} 2b+7d=0 \\ b+4d=1 \end{cases} \text{ resolvendo os sistemas}$$

obtemos:

$$a = 4, c = -1, d = 2 \text{ e } b = -7$$

$$\text{Logo, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Exercícios de Sala

01) (FEI-SP) Se as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ estão assim definidas:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{ij} = 1, \text{ se } i + j = 4 \\ b_{ij} = 0, \text{ se } i + j \neq 4 \end{cases}$$

onde $1 \leq i, j \leq 3$, então a matriz $A + B$ é:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

02 (Unirio) Seja $X = (x_{ij})$ a matriz quadrada de ordem 2, em que

$$x_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{se } i=j \\ 1-j, & \text{se } i>j \\ 1, & \text{se } i<j \end{cases}$$

A soma de seus elementos vale:

- a) - 1
- b) 1
- c) 6
- d) 7
- e) 8

03 (UFPA) A matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ é definida de tal modo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & \text{se } i \neq j \\ 0, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Então A é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

04 (Cesgranrio) Multiplicando

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ obtemos } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

O produto dos elementos a e b da primeira matriz é:

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) 6

05 (FEI-SP) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \text{ A matriz } X \text{ de ordem } 2 \text{ tal}$$

que $A + BX = A^{-1}$, onde A^{-1} é a inversa de A , é:

a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

10 (UFRGS) A matriz $A = (a_{ij})$, de segunda ordem, é definida por $a_{ij} = 2i - j$. então, $A - A^t$ é:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

11 (PUC-SP) Dadas as matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB - BA$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

12 (UFPR) Dada a equação matricial

$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ y & z \end{bmatrix}$, o valor do produto xyz é igual a:

- a) 80
- b) 150
- c) 120
- d) 60
- e) 32

13 (FAAP-SP) Determine x e y de modo que as matri-

zes $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ comutem.

14 (MACK-SP) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = \sin \frac{\pi}{2} i, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = \cos \pi j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Então, A^2 é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

15 Determine a e y de modo que o produto das matrizes

$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ y & 1 \end{bmatrix}$ seja uma matriz

identidade

16 (FAAP-SP) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$, calcule a e b , sabendo

que $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$.

17 (PUC-RJ) Sejam A e B matrizes 2×2 . Se o produto $A \cdot B$ é nulo, então:

- a) $A = 0$
- b) $B = 0$
- c) $A = B = 0$
- d) $A = 0$ ou $B = 0$
- e) não se pode garantir que $A = 0$ ou $B = 0$

18 Sendo $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, obtenha as matrizes P^4 e P^{17} .

19 Em cada uma das afirmações a seguir, assinale verdadeira (V) ou falsa (F).

- a) () Se A e B são matrizes do mesmo tipo, então existe AB e existe BA.
 b) () Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então existe AB e existe BA.
 c) () Se A e B são matrizes tais que existe AB e existe BA, então $AB = BA$.
 d) () Se A e B são matrizes, podemos ter $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
 e) Se A, B e C são matrizes, então pode-se ter $AB = AC$ sem que B e C sejam iguais.

20 (VUNESP-SP) Considere três lojas, L_1 , L_2 e L_3 , e três tipos de produtos, P_1 , P_2 e P_3 . A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido em cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pelas lojas L_j , $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{matrix} & L_1 & L_2 & L_3 \\ \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix} & P_1 \\ & P_2 \\ & P_3 \end{matrix}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

- a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.
 b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.
 c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.
 d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pela loja L_i , $i = 1, 2, 3$ é 52.
 e) A soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

15 - Determinantes

1. Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem

Seja a matriz quadrada de 2ª ordem $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Denomina-se determinante associado à matriz A o número obtido pela diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária. Representa-se um determinante de 2ª ordem por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

↙ diagonal secundária ↘ diagonal principal

15.2 Determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem (regra de Sarrus)

Sejam a matriz $a = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Anote-se a matriz dada e repete-se, à direita, a 1ª e 2ª colunas, conforme o esquema abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ \ominus & \ominus & \ominus & \oplus & \oplus & \oplus & \end{array}$$

Multiplicando os elementos segundo cada diagonal e associando aos produtos o sinal indicado, temos:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Observação:

Esta regra prática muito simples só se aplica a determinantes de 3ª ordem.

15.3 Menor complementar e co-fator

Menor complementar

Chama-se menor complementar D_{ij} relativo a uma elemento a_{ij} da matriz A o determinante associado à matriz quadrada de 2ª ordem obtida em A , e que se obtém eliminando, em A , a linha e a coluna em que se encontra o elemento considerado.

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \text{eliminamos} \\ \text{a 1ª linha} \\ \text{e a 1ª coluna} \end{array} \\ D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \text{eliminamos} \\ \text{a 2ª linha} \\ \text{e a 3ª coluna} \end{array} \end{cases}$$

Co-fator

Chama-se co-fator de a_{ij} o número real que se obtém multiplicando $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar de a_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \text{ em que } A_{ij} \text{ é co-fator}$$

Da matriz anterior temos:

1ª linha 1ª coluna

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

15.4 teorema de Laplace

Seja a matriz quadrada de ordem n indicada a seguir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O determinante desta matriz é dado por:

$$\det = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

Em que $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{1n}$ são os co-fatores.

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n , $n \geq 2$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qual quer pelos respectivos co-fatores.

15.5 Combinações lineares

Quando tomamos duas ou mais filas (linhas ou colunas) paralelas de um determinantes e, por exemplo, somamos essas filas multiplicadas, respectivamente, por dois ou mais números reais, estamos efetuando uma **combinação linear** dessas filas.

Exemplos:

1º) $\begin{array}{l|l} a & 2a+4x & x \\ b & 2b+4y & y \\ c & 2c+4z & z \end{array}$ Observe que $C_2 = 2C_1 + 4C_3$, isto é: C_2 é combinação linear de C_1 e C_3 .

2º) $\begin{array}{l|l} a & a-x & x \\ b & b-y & y \\ c & c-z & z \end{array}$ Observe que $C_2 = C_1 - C_3$, isto é: C_2 é combinação linear de C_1 e C_3 .

3º) $\begin{array}{l|l} x+1 & x+2 & x+5 \\ x+3 & x+6 & x+9 \\ x+2 & x+4 & x+7 \end{array}$

Observe que

$$L_3 = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

15.6 Propriedades dos determinantes

1°) Casos em que um determinante é igual a zero.

- Quando todos os elementos de uma de suas filas são nulos.
- Quando possui duas filas paralelas proporcionais ou iguais.
- Quando uma de suas filas é uma combinação linear de outras filas paralelas.

2°) Transformações que não alteram um determinante.

Um determinante não se altera quando se trocam ordenadamente as linhas pelas co-lunas.

Um determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma fila os correspondentes elementos de uma fila paralela multiplicados por uma constante.

3°) Transformações que alteram um determinante.

Um determinante muda de sinal quando se trocam as posições de duas filas paralelas.

Quando se multiplica (ou se divide) uma fila de um determinante por um número, o novo determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número.

15.7 Propriedades complementares

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária diagonal principal

- Se numa matriz quadrada forem nulos todos os elementos situados em um mesmo lado da diagonal principal, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$$

- Se numa matriz quadrada forem nulo todos os elementos situados em um mesmo lado da diagonal secundária, o determinante da matriz será:

$$\det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \dots a_{n1}$$

- Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n, então:

$$\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

15.8 Diagonalização

O cálculo de um determinante de ordem maior que três, pelo teorema de Laplace, é muito trabalho.

Por isso, podemos transformá-lo em outro de mesmo valor utilizando as propriedades:

- multiplicar ou dividir uma linha ou uma coluna qualquer por um número real diferente de zero,
- trocar de posição duas linhas ou colunas paralelas,
- adicionar a uma linha ou coluna o produto de uma linha ou coluna paralela por uma constante.

Para diagonalizar um determinante, devemos proceder da seguinte forma:

- obter 1 no primeiro elemento da primeira linha;
- obter 0 nos elementos das linhas abaixo da primeira;
- obter 1 no segundo elemento da segunda linha;
- obter 0 nos elementos das linhas abaixo; e assim, sucessivamente, até se obter 0 em todos os elementos abaixo da diagonal principal.

15.9 Determinante de Vandermonde

Matriz de Vandermonde é uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ formada por potências sucessivas de 0 a $n-1$.

$$V = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & \dots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

O determinante de Vandermonde é igual ao produto de todas as diferenças que são obtidas subtraindo-se de cada elemento característico os elementos precedentes, isto é:

$$\det V = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$$

15. 10 Os determinantes no cálculo da matriz inversa

Matriz dos co-fatores

Denomina-se matriz dos co-fatores M' de uma matriz quadrada M , de ordem n , a matriz que se obtém de m , substituindo-se cada elemento a_{ij} de M pelo seu co-fator A_{ij} , isto é:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta

Denomina-se matriz adjunta \overline{M} de uma matriz quadrada M , de ordem n , a transposta da matriz dos co-fatores M'

$$\overline{M} = (M')^t$$

Se M é uma matriz quadrada de ordem n e $\det M \neq 0$, então a inversa de M é dada por:"

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}$$

Observações:

Se $\det M \neq 0$, então existe M^{-1} e a matriz M é dita inversível.

Se $\det M = 0$, então M^{-1} não existe, isto é, a matriz M não é inversível.

Neste caso a matriz M é dita matriz singular.



Exercícios Comentados

01 (Mackenzie) Na função real definida por

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ x & 3 & 9 \\ x & 4 & 16 \end{vmatrix}, f(0,001) \text{ vale:}$$

- a) 0,02
- b) 1000^{-1}
- c) 10^{-2}
- d) 500^{-1}
- e) 0,5

Resolução:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ x & 3 & 9 \\ x & 4 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} x \cdot 2 \\ x \cdot 3 = \\ x \cdot 4 \end{matrix}$$

$$= 48x + 18x + 16x - 12x - 36x - 32x \\ = 82x - 80x = 2x$$

$$f(x) = 2x$$

$$f(0,001) = 0,0002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500} = 500^{-1}$$

02 (Mackenzie) Se A é o conjunto de soluções reais

$$\text{da inequação } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} + 1 \leq 0, \text{ então } \mathbb{R} - A \text{ é}$$

o conjunto:

- a) \emptyset
- b) $] -2, -1]$
- c) $] -1, 0]$
- d) $] -3, 0]$
- e) $] -3, -2]$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)^3 \quad (x+2)^3 + 1 \leq 0$$

$$(x+2)^3 \leq -1$$

$$x+2 \leq -1 \quad x \leq -3$$

03 (FGV) A é uma matriz quadrada de ordem 2 e $\det(A) = 7$. Nessas condições, $\det(3A)$ e $\det(A^{-1})$ valem respectivamente:

a) 7 e -7.

b) 21 e $\frac{1}{7}$

c) 21 e -7.

d) 63 e -7.

e) 63 e

Resolução:

$$\det(3A) = 3^2 \cdot \det A$$

$$= 9 \cdot 7 = 63$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{7}$$

04 (EsPCEX) O conjunto solução da inequação

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -30 & -29 \\ 0 & x & -6 & 5 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$

a) [2, 4].

b) [1, 3].

c) [1, 2].

d) [2, 3].

e) [1, 4].

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -30 & -29 \\ 0 & x & -6 & 5 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$

$$\begin{vmatrix} x & -6 & 5 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$$\begin{matrix} 5S = 5 \\ P = 6 \end{matrix} \left. \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}$$



05 Se $\begin{bmatrix} P & 2 & 2 \\ P & 4 & 4 \\ P & 4 & 1 \end{bmatrix} = -18$ então $\begin{bmatrix} P & -1 & 2 \\ P & -2 & 4 \\ P & -2 & 1 \end{bmatrix}$ vale;

a) -9

b) -6

c) 3

d) 6

e) 9

Resolução:

$$\begin{bmatrix} P & 2 & 2 \\ P & 2 & 4 \\ P & 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\div 2}{=} 2 \cdot \begin{bmatrix} P & 1 & 2 \\ P & 2 & 4 \\ P & 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{x(-1)}{=} -2 \cdot \begin{bmatrix} P & -1 & 2 \\ P & -2 & 4 \\ P & -2 & 1 \end{bmatrix} = -18$$

$$\begin{bmatrix} P & -1 & 2 \\ P & -2 & 4 \\ P & -2 & 1 \end{bmatrix} = 9$$



Exercícios de Sala

01 (Uniform) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ O determinante da}$$

matriz A . B é:

a) 64

b) 8

c) 0

d) -8

e) -64

02 Sabendo-se que o determinante associado à

$$\text{matriz } \begin{bmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{bmatrix} \text{ é nulo, concluímos que essa matriz}$$

tem:

a) duas linhas proporcionais;

b) duas colunas proporcionais;

c) elementos negativos;

- d) uma fila combinação linear das outras duas filas paralelas;
e) duas filas paralelas iguais.

03 (UESP) Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ é

igual a 10, então o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k+4 & k+3 & k-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ é igual a:}$$

- a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

04 Para que $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$, devemos ter:

- a) $x > 2$
b) $0 < x < 5$
c) $x < -2$
d) $x > 5$
e) $1 < x < 2$

05 (MACK) O valor de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é:

- a) -4
b) -2
c) 0
d) 1
e) 1131

06 (UFU) Se A e B são matrizes inversíveis de mesma

ordem, então $\frac{\det(A^{-1}BA)}{\det B}$ é igual a

- a) 1
b) -1
c) $\det A + \det B$
d) $\det (AB)$

07 (EspCEEx) Para todo x e y reais, com $x \neq \pm y$, o quociente entre os determinantes

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & x & x^2+y^2 \end{vmatrix} \text{ é equivalente a:}$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}$$

a) $\frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$

b) $\frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$

c) $\frac{x^2 - xy - y^2}{x - y}$

d) $\frac{x^2 + xy + y^2}{x - y}$

e) $\frac{x^2 - xy - y^2}{x + y}$

08 (EspCEEx) Sendo $\{a, b\} \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ e o determinante

$$\begin{vmatrix} a^2 & -4b & b^2 \\ a & 2 & a \\ b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = 128a - 128b$$
, pode-se dizer que:

- a) $a + b = 4$
b) $a + b = 8$
c) $a + b = 2\sqrt{2}$
d) $a + b = 4\sqrt{2}$
e) $a + b = 2$

09 (AFA) É dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, onde a e b

são números reais. Se $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}$, então o determinante de A vale

- a) $2a^2$.
b) $-2a^2$.
c) zero.
d) $2a + 2b$.

10 (Mackenzie) Se $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, o triplo do determinante da matriz A é igual a

- a) 3
- b) 6
- c) 9
- d) 12
- e) 15



Exercícios de Casa

01 (PUC) A matriz $A = (a_{ij})$ é quadrada de ordem 2

$$\text{com } \begin{cases} a_{ij} = 2i - j & \text{para } i = j \\ a_{ij} = 3i - 2j & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

O determinante de A é igual a:

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5
- e) 6

02 (Med. Santo André) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se o determinante de AB é igual a zero, então, necessariamente, devemos ter:

- a) $ab + cd = 0$
- b) $a = 0$ e $b = 0$
- c) $ad - bc = 0$
- d) $a + c = 0$ e $b + d = 0$
- e) $a = b = c = d = 0$

03 (Osec) O determinante $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

- a) só é estritamente positivo se $x < 1$
- b) só é estritamente positivo se $x > 0$
- c) é estritamente positivo para $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$
- d) é estritamente positivo para $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$
- e) é estritamente positivo para $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$

04 (Mackenzie) Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $A \cdot B = I$, então o determinante da matriz A^2 é

- a) 1
- b) 4
- c) 9
- d) 16
- e) 25

05 (UFU) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad e$$

$$D = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$$

Se o determinante da matriz A é $K \neq 0$, então $\det(B) + \det(C) + \det(D)$ é igual a:

- a) 10 K
- b) 8 K
- c) 6 K
- d) 4 K
- e) 2 K

06 (UFU) Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e

$$B = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}. \text{ Se } \det A = 5, \text{ considere as matrizes } C = 3A$$

e $D = B^{-1}$. Então, $\det C + \det(CD)^4$ é:

- a) 90
- b) 18
- c) 210
- d) 162
- e) 54

07 (UFES) Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, com

$k \notin \{-1, 0, 1\}$, então o determinante da matriz BAB^{-1} é

- a) -1
b) 0
c) 1
d) k
e) 1/k

08 (Unifesp) Dada a matriz, 3×3 , $A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, a

distância entre as retas r e s de equações, respectivamente, $\det(A) = 0$ e $\det(A) = 1$ vale:

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\sqrt{2}$
c) 2
d) 3
e) $3\sqrt{2}$

09 (MACK-SP) A soma das raízes de equação

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 2 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = 2 \text{ é:}$$

- a) -2
b) 0
c) -1
d) 0
e) 2

10 (PUC-SP) Seja a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que

$$a_{ij} \begin{cases} \cos \frac{7\pi}{i} \text{ se } i = j \\ \sin \frac{7\pi}{j} \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

O determinante da matriz A é igual a:

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) -1
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11 (UFBA) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 13 & x \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix}$ para todo x pertencente a:

- a) {1, 6}
b) {1, 7}
c) {1, -7}
d) {-1, 7}
e) {-1, -7}

12 (UFRGS) Na equação seguinte

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \\ \cos^2 x + \sin^2 x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$
 um possível valor x é:

- a) 0
b) $\frac{\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{2}$

13 (MACK-SP) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos x, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ o determinante da matriz } A \text{ é}$$

sempre igual a:

- a) $2 \sin^2 x$
b) $\cos x$
c) $\sin x$
d) $-\cos^2 x$
e) $-\sin^2 x$

14 (MACK-SP) A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ k & 3 \end{bmatrix}$ é igual à transposta.

Então, o $\det(k^2 \cdot A)$ é igual a:

- a) 64
b) 32
c) 16
d) 8
e) 4

15 (UFRGS) O determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b+1 & b+2 & b+3 \end{pmatrix} \text{ é nulo}$$

- a) Para qualquer valor de a e b.
- b) apenas se a = 0
- c) apenas se b = 0
- d) somente se a = b
- e) somente quando $1 + 2a + (b + 3) = 0$

16 (FATEC-SP) Os valores reais de x que satisfazem a

equação $\begin{vmatrix} 2^x & 4^x & 8^x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ são números:

- a) pares.
- b) irracionais.
- c) inteiros consecutivos.
- d) inteiros negativos.
- e) racionais não inteiros.

17 (MACK-SP) Para que a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ seja

inversível, devemos ter:

- a) $x = 1$
- b) $x \neq 1$
- c) $x = 2$
- d) $x \neq 2$
- e) $x \neq 0$

18 (Fuvest-SP) O determinante da inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ é:}$$

- a) $-\frac{52}{5}$
- b) $-\frac{48}{5}$
- c) $-\frac{5}{48}$

d) $-\frac{5}{52}$

e) $-\frac{5}{48}$

19 (MACK-SP) Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & k \\ -k & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, se $M^{-1} = M^t$,

então k pode ser:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

20 (Fuvest-SP) Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $AB = BA$, pode-se afirmar que:

- a) A é inversível
- b) $\det A = 0$
- c) $c = 0$
- d) $c = 0$
- e) $a = d = 1$

Utilizando a regra de Cramer, temos:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Possível e determinado (admite uma única solução)

⇓

$$D \neq 0$$

possível e indeterminada (admite infinitas soluções)

⇓

$$D = 0 \text{ e } D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$$

impossível
(não admite solução)

⇓

$D = 0$ e pelo menos um D_i diferente de zero ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$)

16.7 Discussão de um sistema de equações lineares homogêneo

Um sistema de equações lineares é dito homogêneo quando os termos independentes são todos nulos.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo é sempre possível, pois admite a solução $(0, 0, \dots, 0)$, chamada solução trivial. As soluções não triviais são chamadas **soluções próprias**.

Portanto, para a discussão de um sistema linear homogêneo, é suficiente o estudo do determinante dos coeficientes das incógnitas:

Determinado $\Rightarrow D \neq 0$
indeterminado $\Rightarrow D = 0$

16.8 Sistema escalonado

Denomina-se sistema escalonado o sistema que tem uma **matriz completa** da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Observe que os coeficientes a_{ij} , com $i > j$, são nulos.

16.9 Resolução de sistemas lineares (método do escalonamento)

Para determinar o conjunto verdade de um sistema de equações lineares, podemos utilizar as seguintes transformações elementares:

- troca de posição duas equações quaisquer do sistema.
- multiplicar ou dividir uma equação do sistema por um número diferente de zero.
- efetuar uma combinação linear entre as equações para obter outra equivalente.

Com a matriz completa, podemos escalonar um sistema linear por meio das transformações elementares.



Exercícios Comentados

01 (Fuvest) Carlos e sua irmã Andréia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andréia pesam 123 kg e
- Andréia e Bidu pesam 66 kg.

Podemos afirmar que:

- Cada um deles pesa menos que 60 kg.
- Dois deles pesam mais de 60 kg.
- Andréia é a mais pesada dos três.
- O peso de Andréia é a média aritmética dos pesos de Carlos e Bidu.
- Carlos é mais pesado que Andréia e Bidu juntos.

Resolução:

$$\begin{cases} \text{Carlos: } x & x + y = 87 \text{ (I)} \\ \text{Andreia: } y & x + y = 123 \\ \text{cos: } z & y + z = 66 \end{cases}$$

$$x + y = 123 \Rightarrow x = 123 - y$$

$$y + z = 66 \Rightarrow z = 66 - y \text{ substituido em (I)}$$

$$123 - y + 66 - y = 87$$

$$-2y = 87 - 189$$

$$-y = -102$$

$$y = 51 \quad x = 123 - 51 = 72$$

$$z = 66 - 51 = 15$$

02 (EspCEx) Num curso de Matemática, cada bimestre teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Alves, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 6 na terceira, obteve, no final, um total de 57 pontos. Tadeu acertou 3, 6 e 6 questões, respectivamente na 1ª, 2ª e 3ª provas, totalizando 54 pontos. Por sua vez, João acertou 2, 7 e 3 questões, respectivamente na 1ª, 2ª e 3ª provas, atingindo a soma de 40 pontos no final. Sabendo que Xavier fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira, o total de pontos de Xavier foi

- a) 49
- b) 50
- c) 51
- d) 52
- e) 53

Resolução:

$$\begin{cases} 6x + 5y + 6z = 57 \\ 3x + 6y + 6z = 54 \quad +3 \\ 2x + 7y + 3z = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 5y + 6z = 57 \text{ (I)} \\ x + 2y + 2z = 18 \text{ (II)} \\ 2x + 7y + 3z = 40 \text{ (III)} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 6 & 65 \\ 1 & 2 & 2 & 12 \\ 2 & 7 & 3 & 27 \end{vmatrix} = 36 + 20 + 42 - 24 - 84 - 15 = -25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 57 & 5 & 6 & 57 & 5 \\ 18 & 2 & 2 & 18 & 2 \\ 40 & 7 & 3 & 40 & 7 \end{vmatrix} = 342 + 400 + 756 - 480 - 798 - 270 = -50$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-50}{-25} = 2$$

Substituido em (II) e (III)

$$2 + 2y + 2z = 18 \Rightarrow 2y + 2z = 16 \Rightarrow y + z = 8 \text{ (-3)}$$

$$4 + 7y + 3z = 40 \Rightarrow 7y + 3z = 36 \quad \emptyset$$

$$\begin{array}{r} -3y - 3z = -24 \\ 7y + 3z = 36 \\ \hline 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \text{ e } z = 5 \end{array}$$

Logo, Xavier fez: $2 \times 5 + 8 \times 3 + 3 + 5$

$$10 + 25 + 15 = 49$$

03 (Ufscar) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R\$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R\$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja

- a) R\$ 30,50.
- b) R\$ 31,40.
- c) R\$ 31,70.
- d) R\$ 32,30.
- e) R\$ 33,20.

Resolução:

$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 42,1 \text{ (-1) (I)} \\ 4x + 10y + z = 47,3 \text{ (-1) + (II)} \end{cases}$$

$$x + 3y = 5,2$$

$$x = 5,2 - 3y \text{ substituido em (I)}$$

$$3(5,2 - 3y) + 7y + z = 42,1$$

$$15,6 - 9y + 7y + z = 42,1$$

$$z = 2y + 26,5$$

Logo: $x + y + z = 5,2 - 3y + y + 2y + 26,5 = 31,7$

04 (Fei) Se as retas de equações:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ ax - y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

São concorrentes em um mesmo ponto, então:

- a) $a \neq 4$ ou $a \neq 2/3$
- b) $a \neq -3/2$ ou $a \neq 2/3$
- c) $a \neq 2$ ou $a \neq -3/2$
- d) $a \neq 1$ ou $a \neq 4$
- e) $a \neq 0$ ou $a \neq 5$

Resolução:

Logo, o sistema deve ser determinado, ou seja, $D \neq 0$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2a \\ a & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -a \end{vmatrix} = a - 12 + 4a^2 - 4a - 6 + 2a^2$$

$$= 6a^2 - 3a - 18$$

$$6a^2 - 3a - 18 \neq 0$$

$$2a^2 - a - 6 \neq 0 \therefore a \neq 2 \text{ ou } a \neq -\frac{3}{2}$$

05 (EsPCEX) Dado o sistema linear $\begin{cases} a^2x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$, onde

a é uma constante real, pode-se afirmar que:

- a) o sistema é possível e determinado para $a = -1$
- b) um único valor de a que torna o sistema possível e indeterminado
- c) existe o sistema é possível e determinado somente se $a \neq -1$
- d) o sistema é possível e determinado $\forall a \in \mathbb{R}$
- e) o sistema é impossível $\forall a \in \mathbb{R}$

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 1$$

$$SPI \Rightarrow D \neq 0$$

$$a^2 - 1 \neq 0 \therefore a \neq 1 \text{ ou } a \neq -1$$

$$SPF \Rightarrow D = 0 \quad D_x = 0 \text{ e } D_y = 0$$

$$a = 1$$

$$SI \Rightarrow D_x \neq 0 \text{ ou } D_y \neq 0 \text{ e } D = 0$$

$$a \neq 1 \text{ e } a = -1$$



Exercícios de Sala

01 (PUC-MG) Todos os alunos de uma turma vão ao laboratório de informática. Se em cada computador ficarem 2 alunos, 8 ficarão sem computador. Porém, se em cada computador ficarem 3 alunos, haverá 4 computadores sobrando. O número de alunos dessa turma é:

- a) 42
- b) 48
- c) 54
- d) 60

02 (UFPB) Fernando foi a um caixa eletrônico e fez um saque em cédulas de três tipos diferentes: R\$ 20,00, R\$ 10,00 e R\$ 5,00. Sabe-se que ele retirou 14 cédulas e que a quantia retirada foi a mesma para cada tipo de cédula. A quantia sacada por Fernando foi:

- a) R\$ 120,00
- b) R\$ 150,00
- c) R\$ 180,00
- d) R\$ 210,00
- e) R\$ 240,00

03 (ITA) Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 quatro números reais (com $a_1 \neq 0$), formando nessa ordem uma progressão geométrica. Então, o sistema em x e y

$$\begin{cases} a_1x + a_3y = 1 \\ a_1a_2x + a_1a_4y = a_1 \end{cases}$$

é um sistema

- a) impossível.
- b) possível determinado.
- c) possível indeterminado.
- d) possível determinado apenas para $a_1 > 1$.
- e) possível determinado apenas para $a_1 < -1$.

04 (Fei) Se o sistema linear a seguir, é impossível,

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

então:

- a) $a = 0$
- b) $a = -14/3$
- c) $a = 3/4$
- d) $a = 1$
- e) $a = 28$

05 (Fuvest) Existem dois valores de m para os quais tem solução única o sistema:

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

A soma desses dois valores de m é:

- a) -2
- b) $-2\sqrt{2}$
- c) 0
- d) 2
- e) $2\sqrt{2}$

06 (Unesp) Seja $(1, 1, 1)$ uma solução particular do sistema linear

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ 2x + by - az = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x , y e z . Nessas condições, o conjunto solução do sistema é;

- a) $\{(x, -x+2, 3x-2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- b) $\{(1, 1, 1)\}$.
- c) $\{(x, x-2, 3x-2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- d) $\{(-y+2, y, 5y-4) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
- e) $\{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

07 (Faap) Seja o sistema linear

$$\begin{bmatrix} k & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A única alternativa correta é;

- a) se $k = 1$ a única solução é $x = y = z = 0$
- b) o sistema é impossível
- c) o sistema tem infinitas soluções para qualquer k
- d) somente se $k = 0$ o sistema é impossível
- e) não é possível investigar o sistema com os dados disponíveis

08 (Pucsp) Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas x e y :

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma única solução para certo número real k que é um

- a) quadrado perfeito.
- b) número primo.
- c) número racional não inteiro.
- d) número negativo.
- e) múltiplo de 5.

09 (EsPCEx) Os valores de K para que o sistema

$$\text{linear } \begin{cases} Kx + 2y + 2z = 5 \\ 2x + Ky + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases} \text{ seja possível e tenha uma única}$$

solução são

- a) $K = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$
- b) $K = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- c) $K = \mathbb{R} - \{1, 2\}$
- d) $K = \mathbb{R} - \{3, 4\}$
- e) $K = \mathbb{R} - \{1, -2\}$

10 (EsPCEx) Sabendo que (x, y, z) é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}, \text{ o valor de } x^2 + y^2 + z^2 \text{ é:}$$

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 9
- e) 10



Exercícios de Casa

01 (Pucmg) Para atender uma encomenda de fantasias, certa costureira comprou 3 m do tecido A e 2 m do tecido B, pagando R\$ 25,50; depois, pagou R\$ 46,50 na compra de 5 m do tecido A e 4 m do tecido B. Finalmente, para retocar a costura, comprou mais 1 m de cada um desses tecidos. Sabendo-se que, pela mão-de-obra,

essa costureira cobrou a mesma quantia gasta na compra dos tecidos, pode-se afirmar que o valor a ser pago pela encomenda, em reais, foi:

- a) 144,00
- b) 151,00
- c) 165,00
- d) 172,00

02 (Ufes) Por ocasião do Natal, uma empresa gratificará seus funcionários com um certo número de cédulas de R\$ 50,00. Se cada funcionário receber 8 cédulas, sobrarão 45 delas; se cada um receber 11 cédulas, faltarão 27.

O montante a ser distribuído é

- a) R\$ 9.600,00
- b) R\$ 10.550,00
- c) R\$ 11.850,00
- d) R\$ 13.250,00
- e) R\$ 15.000,00

03 (Ufpe) Perguntado sobre a idade de seu filho Júnior, José respondeu o seguinte: "Minha idade quando somada à idade de Júnior é igual a 47 anos; e quando somada à idade de Maria é igual a 78 anos. As idades de Maria e Júnior somam 39 anos." Qual a idade de Júnior?

- a) 2 anos
- b) 3 anos
- c) 4 anos
- d) 5 anos
- e) 10 anos

04 (Uel) Considere o seguinte sistema de equações nas incógnitas x e y :

$$\begin{cases} 3kx + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma e uma só solução se o número real k for diferente de

- a) 1/5
- b) 1/4
- c) 2/5
- d) 1/3
- e) 3/2

05 (Fgv) Se a terna ordenada (a, b, c) , de números reais, é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

então a soma $a + b + c$ é igual a

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

06 (Uel) Numa loja, os artigos A e B, juntos, custam R\$ 70,00, dois artigos A mais um C custam R\$ 105,00 e a diferença de preços entre os artigos B e C, nessa ordem, é R\$ 5,00. Qual é o preço do artigo C?

- a) R\$ 20,00
- b) R\$ 25,00
- c) R\$ 30,00
- d) R\$ 35,00
- e) R\$ 40,00

07 (Unaerp) Dado o sistema:

$$\begin{cases} mx + 3y - mz = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

para $m = 3$, o sistema é:

- a) determinado
- b) possível
- c) possível e determinado
- d) impossível
- e) indeterminado

08 (UFOP) Dado o sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$, então

$x^2 + y^2 + z^2$ vale:

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

09 (EsPCEX) Na resolução do sistema

$$\begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{dos} \\ \text{coeficientes} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{sabe-se que a matriz}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é a inversa da matriz dos coeficientes. Nes-}$$

nas condições, os valores de x , y e z são, respectivamente

- a) 1, 2, 3.
- b) 1, 3, 2.
- c) 2, 1, 3.
- d) 3, 2, 1.
- e) 2, 3, 1.

10 (EsPCEEx) O valor de m , para que o sistema

$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ 4x + my - 10z = 0 \end{cases} \text{ admita soluções além da solução}$$

trivial, é:

- a) 1
- b) 3
- c) 5
- d) 7
- e) 9

11 (EsPCEEx) A soma dos valores de x , y e z que tornam

$$\text{o sistema } \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = -2 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

verdadeiro é:

- a) 1
- b) 3
- c) 2
- d) 5
- e) 4

12 (EsPCEEx) Dado o sistema linear $\begin{cases} a^2x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$, onde

a é uma constante real, pode-se afirmar que:

- a) o sistema é possível e determinado para $a = -1$
- b) um único valor de a que torna o sistema possível e indeterminado
- c) existe o sistema é possível e determinado somente se $a \neq -1$
- d) o sistema é possível e determinado $\forall a \in \mathbb{R}$
- e) o sistema é impossível $\forall a \in \mathbb{R}$

13 (EsPCEEx) O sistema $\begin{cases} 3x + ky + z = 0 \\ 5x + 4y + 5z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$

admite mais de uma solução se, e somente se:

- a) $k = \frac{7}{6}$
- b) $k = \frac{7}{5}$ ou $k = 2$
- c) $k = 7$ ou $k = -2$
- d) $k = \frac{2}{3}$ ou $k = \frac{1}{2}$
- e) $k = 0$

14 (EsPCEEx) A soma das soluções do sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + y + z = 5 \\ x + 2y - z = -8 \end{cases} \text{ é:}$$

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

15 (EsPCEEx) A soma dos valores reais de a que tor-

nam o sistema $\begin{cases} 3^{2a+1}x + y = 1 \\ x + y = 0 \\ (10 \cdot 3^a - 3)x + y = 1 \end{cases}$ possível e determi-

nado é:

- a) 0.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 5.
- e) 6.

16 (Fuvest) Um caminhão transporta maçãs, pêras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, pêras e laranjas, tem, respectivamente 50 maçãs, 60 pêras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, pêras e laranjas estão sendo transportadas.

17 (UnB) Para que valor inteiro de λ o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda z = 0 \\ (\lambda + 1)x + y - z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Admite solução própria (não nula).

18 (Cesgranrio) Calcule a para que o sistema a seguir seja determinado.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + ay + az = a^2 \end{cases}$$

- a) $a \neq -1$
- b) $a = -2$
- c) $a \neq 1$ e $a \neq -1$
- d) $a = 1$ ou $a = -2$
- e) $a = 1$

19 Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + \log_3 a^2 y + z = 0 \\ 2x + 2y + \left(\log_3 \frac{27}{a}\right) z = 0 \end{cases}$$

é indeterminado, então

- a) $S \subset [-3, 3]$
- b) S é vazio
- c) $S \subset [2, 4]$
- d) $S \subset [1, 3]$
- e) $S \subset [0, 1]$

20 (Unesp-SP) Seja $(1, 1, 1)$ uma solução particular do sistema linear

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ 2x + by - az = 0 \end{cases}, \text{ nas incógnitas } x, y \text{ e } z. \text{ Nessas}$$

condições, o conjunto solução do sistema é:

- a) $\{(x, -x + 2, 3x - 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- b) $\{(1, 1, 1)\}$
- c) $\{(x, x - 2, 3x - 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- d) $\{(-y + 2, y, 5y - 4) \mid y \in \mathbb{R}\}$
- e) $\{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

GABARITO

10. PORCENTAGEM

Exercícios de sala

01. R\$ 100.000,00
02. b
03. b
04. a) R\$ 2.160,0
b) 28%
05. a) 4,17x
b) 14%
06. c
07. b
08. d
09. 30%
10. a

Exercícios de casa

01. d
02. e
03. a
04. d
05. e
06. b
07. b
08. c
09. c
10. e
11. 6,25%
12. 02
13. d
14. 40%
15. a) 38%
b) 120
16. b
17. d
18. c
19. a
20. d

11. EQUAÇÕES E PROBLEMAS

Exercícios de sala

01. e
02. a
03. b
04. c
05. a
06. d
07. b
08. $m > 4$
09. 12
10. b

Exercícios de casa

$$01.a) S = \left\{ -3; -1; \frac{3}{2} \right\}$$

$$b) S = \{0; 3; 4\}$$

$$c) S = \{0; 3; 4\}$$

$$d) S = \{1; -3, 3\}$$

$$02. S = \{-2; 1\}$$

$$03. S = \{0\}$$

$$04. c$$

$$05. e$$

$$06. \frac{65}{3}$$

$$07. e$$

$$08. e$$

$$09. c$$

$$10. a$$

$$11. \{5\}$$

$$12. c$$

$$13. \{-1, 1, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$$

$$14. \{-3, -2, 1, 2\}$$

$$15. e$$

$$16. a$$

$$17. c$$

$$18. 43$$

$$19. 1h 12 min$$

$$20. c$$

12. PROGRESSÃO ARITIMETICA

Exercícios de sala

$$01. a) a_{21} = a_9 + (21-9)r$$

$$9 = 1 + 12r$$

$$\therefore r = -1$$

$$b) a_1 = 29$$

$$a_n = 30 - n$$

$$02. (6; 9; 12)$$

$$03. a = 1 \text{ ou } a = 5$$

$$04. a) S_1 = a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

$$b) a_6 = S_6 - S_5$$

$$S_6 = 2 \cdot 6^2 - 6 = 66$$

$$S_5 = 2 \cdot 5^2 - 5 = 45$$

$$a_6 = 66 - 45 = 21$$

$$c) a_7 = S_7 - S_6$$

$$a_7 = (2 \cdot 7^2 - 7) - 21$$

$$a_7 = 91 - 21 = 70$$

$$d) a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = 2n^2 - n - [2(n-1)^2 - (n-1)]$$

$$a_n = 4n - 3, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

$$05. c$$

$$06. c$$

07. c
08. d
09. b
10. a

Exercícios de casa

01. a
02. b
03. b
04. a
05. b
06. d
07. (1; 3; 5; 7; 9)
(; 2; 4; 6; 8)
08. c
09. c
10. a
11. 141
12. b
13. c
14. e
15. b
16. e
17. e
18. 270
19. a
20. 87

13. PROGRESSÃO GEOMETRICA

Exercícios de sala

01. a) (1; 2; 4; ...) $a_1 = 1$ e $q = 2$
 $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 1 \cdot 2^5 = 32$

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
 $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

c) $a_k = 2^{k-1}$

$a_k > 1.000$

$2^{k-1} > 1.000$

Como $2^9 < 1.000 < 2^{10}$

Concluímos que o menor k , para $k \in \mathbb{N}^*$, é tal que:

$2^{k-1} = 2^{10} \therefore k = 11$

e então: $a_k = 2^{11-1} = 1.024$

02. $\therefore S_{10} = 1.023$

03. $S = \frac{1}{2}$

04. a

05. a

06. $n = 9$ e $a_n = 256$

07. a

08. c

09. b

10. c

Exercícios de casa

01. c
02. a
03. c
04. d
05. d
06. c
07. a
08. b
09. d
10. c
11. a
12. $(1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2})$
13. a) 0,11111
b) 0,11
14. b
15. c
16. b
17. c
18. d
19. d
20. a

14. MATRIZES

Exercícios de sala

01. d
02. d
03. a
04. c
05. a
06. e

07. $m = \begin{bmatrix} 10 & 110 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

08. d
09. d
10. a

Exercícios de casa

01. b
02. e
03. c
04. c
05. d
06. b
07. b
08. b
09. d
10. b
11. b
12. c
13. $x = 4y = 0$
14. e

15. $x = 1$ $y = 0$
16. $a = 4$ $b = -3$
17. e

18. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e p

19. FVFW
20. e

15. DETERMINANTES

Exercícios de sala

01. d
02. d
03. c
04. c
05. c
06. c
07. a
08. b
09. b
10. b

Exercícios de casa

01. e
02. c
03. e
04. a
05. a
06. b
07. e
08. a
09. c
10. a
11. d
12. a
13. e
14. b
15. a
16. c
17. b
18. c
19. e
20. d

16. SISTEMA LINEARES

Exercícios de sala

01. b
02. a
03. a
04. b
05. c
06. a
07. a

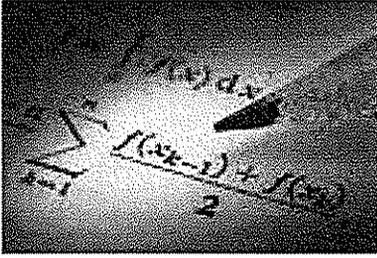
08. a
09. c
10. d

Exercícios de casa

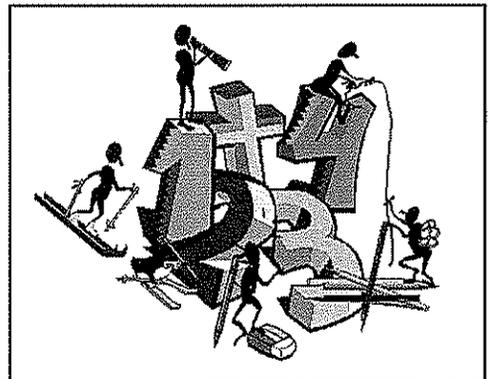
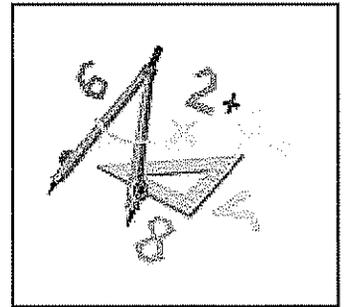
01. c
02. c
03. c
04. d
05. a
06. b
07. d
08. c
09. e
10. c
11. a
12. b
13. d
14. c
15. d
16. (2000,03000 e 6000)

17. $\lambda = 2$ e $\lambda = -\frac{5}{3}$

18. c
19. a
20. d



MATEMÁTICA 2-1





Diretor Geral
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Diretora Executiva
Clara Marisa May

Diretor de Artes
Fabiano Rangel Cidade

Coordenação Geral dos Cursos Preparatórios
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Coordenação dos Cursos de Idiomas EAD
Dr. Daniel Soares Filho

Secretaria
Priscilla Teotônio

Editoração Gráfica
Edilva de Lima

Fonoaudióloga e Psicopedagoga
Mariana Fernandes Ramos – CRFa 12482-RJ/T-DF

Assessoria Jurídica
Luíza May Schmitz – OAB/DF – 24.164

Assessoria de Línguas Extranjeiras
Cleide Thieves (Poliglota-EEUU)
João Jorge Gonçalves (Poliglota-Europa)

Equipe de Professores

Idiomas

Luiz Cidade – Espanhol
Daniel Soares Filho – Espanhol (EAD)
Cleide Thieves – Inglês, Francês, Espanhol, Alemão (EAD)
João Jorge Gonçalves – Inglês, Francês Espanhol e Português
Leonardo dos Santos – Espanhol
Diego Fernandes – Espanhol
Márcia Mattos da Silva – Francês (EAD)
Marcos Henrique – Francês
Maristella Mattos Silva – Espanhol (EAD)
Monike Rangen Cidade – Espanhol (EAD)
Cacilda Leal do Nascimento – Espanhol
Mariana Ramos – Inglês (EAD)

Concursos

Albert Eglésia – Português
Maria Antônia – Redação
Murilo Roballo – Matemática
Sormany Fernandes – História do Brasil
Francisco Roges – Geografia
Francisco Gerdean – Química
Gustavo Porto – História Geral
Luís Kleber Neves – Física
Thiago Magalhães – Física

EQUIPE

Os direitos autorais desta obra são reservados e protegidos pela Lei nº 9.610, de 19 Fev 98.

É proibida a reprodução de qualquer parte deste livro, sem autorização prévia expressa por escrito do Autor e da Editora, por quaisquer meios empregados, sejam eletrônicos, mecânicos, videográficos, fonográficos, reprográficos, microfilmicos, fotográficos, gráficos ou outros. Essas proibições aplicam-se também à editoração da obra, bem como às suas características gráficas.

Apostila 2 parte 1

01. Função Modular	7
02. Função Exponencial	14
03. Função Logarítmica	20
04. Trigonometria Parte I	26
05 Trigonometria Parte II	36
06. Trigonometria Parte III	43
07. Equações e Inequações Trigonométricas IV	53
08. Função Trigonométrica e Função Trigonométrica Inversas V	61
Gabarito	73

1.1 Conceito de módulo:

Sejam **A** e **B** dois pontos do eixo real com abscissas x_A e x_B , respectivamente, tal que $x_B \geq x_A$. Chama-se distância entre os pontos **A** e **B** e indica-se por d_{AB} ou d_{BA} , a diferença $x_B - x_A$.

Considerando-se no eixo real de origem **O** um ponto **A** de abscissa x , chama-se módulo de x a distância entre os pontos **A** e **O**:

$$|x| = d_{OA}$$

1.2 Propriedades:

- 1) $|x| \geq 0, \forall x, x \in R$
- 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 3) Sendo $d \in R_+$, tem-se $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$
- 4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset R$
- 5) $|x^n| = |x|^n \Leftrightarrow n \text{ é par}, \forall x, x \in R \text{ e } \forall n, n \in N$
- 6) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset R \text{ e } y \neq 0$
- 7) $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a, \forall \{x, a\}, \{x, a\} \subset R$
- 8) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a, a \in R_+$
- 9) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \forall a, a \in R_+$
- 10) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a, \forall a, a \in R_+$
- 11) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a, \forall a, a \in R_+$

Definição $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Exs: $|5| = 5$
 $|-3| = 3$

$$|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$$

$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = |x^2 - x| + 6 = \begin{cases} x^2 - x + 6 & \text{se } x^2 - x \geq 0 \\ -x^2 + x + 6 & \text{se } x^2 - x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 2 - |1 - x| = \begin{cases} 2 - 1 + x & \text{se } 1 - x \geq 0 \\ 2 + 1 - x & \text{se } 1 - x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + x & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Exercícios Comentados

01 (EsPCEX) O valor da soma entre o menor e o maior valor assumido pela expressão $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{2xy}{|xy|}$, quando x e y variam no conjunto de todos os números reais não nulos, é:

- a) -6
- b) -2
- c) 2
- d) 4
- e) 6

Resolução:

Sabe-se que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ -y & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

$$|xy| = \begin{cases} xy & \text{se } xy \geq 0 \\ -xy & \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

Logo:

$$\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} \text{ ou } \frac{x}{-x} = 1 \text{ ou } -1$$

$$\frac{y}{|y|} = \frac{y}{y} \text{ ou } \frac{y}{-y} = 1 \text{ ou } -1$$

$$\frac{2xy}{|xy|} = \frac{2xy}{xy} \text{ ou } \frac{2xy}{-xy} = 2 \text{ ou } -2$$

O maior valor da expressão será: $1 + 1 + 2 = 4$
O menor valor será quando $x > 0$ e $y < 0$ ($xy < 0$)

$$+1 - 1 - 2 = -2$$

$$\text{Eutes: } 4 - 2 = 2.$$

02 (EsPCEX) Dada a equação $|2x-3| + |x| - 5 = 0$ a soma de todas as suas soluções é igual a:

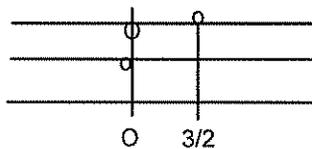
- a) 3
- b) $\frac{8}{3}$
- c) 2
- d) $\frac{4}{3}$
- e) $\frac{2}{3}$

Resolução:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } x \geq 3/2 \\ -2x+3 & \text{se } x < 3/2 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} -2x & +3 & 3/2 & 2x-3 \\ -x & & & x \\ -3x+3 & -x+3 & 3x & -3 \end{array}$$



Logo:

$$\begin{cases} -3x+3-5 & \text{se } x < 0 \\ -x+3-5 & \text{se } 0 \leq x < 3/2 \\ 3x-3-5 & \text{se } x \geq 3/2 \end{cases}$$

1) $0 \leq x < 0$

$$-3x + 3 - 5 = 0$$

$$x = \frac{-2}{3} \left(\frac{-2}{3} < 0 \right)$$

2) *Qdo* $0 \leq x < 3/2$

$$-x + 3 - 5 = 0$$

$$x = -2 \text{ (não convém)}$$

3) *Qdo* $x \geq 3/2$

$$3x - 3 - 5 = 0$$

$$x = \frac{8}{3} \left(\frac{8}{3} > \frac{3}{2} \right)$$

Logo: $\frac{-2}{3} + \frac{8}{3} = 2$.

03) (EsPCEX) O número de raízes reais distintas da equação $x|x| - 3x + 2 = 0$ é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

Resolução:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1) Se $x \geq 0$

$$x - x - 3x + 20 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$S = 3 > 2$$

$$P = 2 > 1$$

2) Se $x < 0$

$$x(-x) - 3x + 2 = 0$$

$$-x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

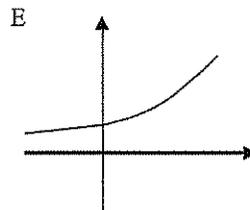
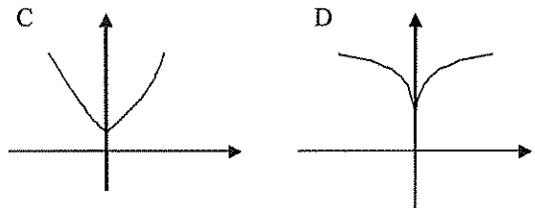
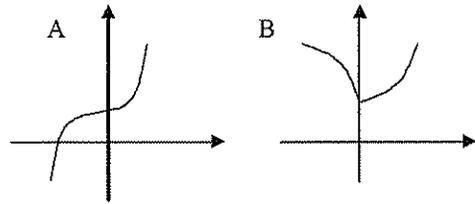
$$\Delta = 9 - 4(-2) = 17$$

$$\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} > 0 \text{ (não contém)}$$

$$\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

$$s = \left\{ 1, 2, \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \right\}$$

04) (EsPCEX) O gráfico que melhor representa a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2^{|x|}$ é:



Resolução:

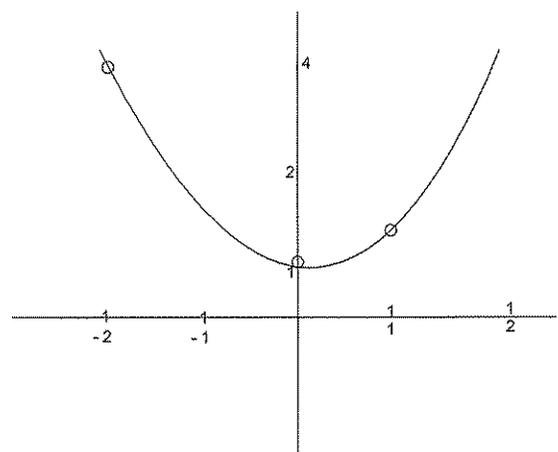
$$f(x) = 2^{|x|}$$

1) Se $x \geq 0$ $f(x) = 2^x$

x	y
0	1
1	2
2	4

2) Se $x < 0$ $f(x) = 2^{-x}$

x	y
-1	2
-2	4
-3	8



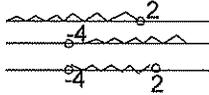
05) Resolva: $|2x - 1| < 5 - x$

Resolução: $\begin{cases} 2x - 1 < 5 - x & \textcircled{1} \\ 2x - 1 > -5 + x & \textcircled{2} \end{cases}$

① $3x < 6 \quad x < 2$

② $x > -4$

Logo: $S = S_1 \cap S_2$



$S = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x < 2\}$



Exercícios de Sala

01) (Ufsc) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |2x + 5|$

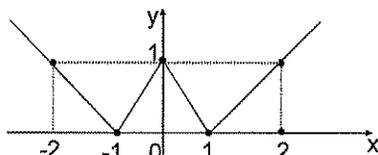
Julgue os itens:

- a) f é injetora.
- b) o valor mínimo assumido por f é zero.
- c) o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto de coordenadas $(0,5)$.
- d) o gráfico de f é uma reta.
- e) f é uma função par.

02) (Fgv) Relativamente a função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , dada por $f(x) = |x| + |x - 1|$, é correto afirmar que:

- a) o gráfico de f é a reunião de duas semi-retas.
- b) o conjunto imagem de f é o intervalo $[1, +\infty[$.
- c) f é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.
- d) f é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$.
- e) o valor mínimo de f é 0.

03) (Ufes)



O gráfico acima representa a função

- a) $f(x) = ||x| - 1|$
- b) $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2$
- c) $f(x) = ||x| + 2| - 3$
- d) $f(x) = |x - 1|$
- e) $f(x) = ||x| + 1| - 2$

04) (EsPCEx) A soma dos quadrados de todas as raízes da equação $x^2 + 4x - 2|x + 2| + 4 = 0$ é igual a:

- a) 16
- b) 20
- c) 24
- d) 28
- e) 36

05) (EsPCEx) Analise os itens abaixo para a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

I - Se $f(x) + f(-x) = 0$, então f é uma função par.

II - Se $f(x)$ é uma função constante, então f é uma função par.

III - Se $|f(x)| = f(x)$, então $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$.

IV - Se $|f(x)| = f(x)$, então é função bijetora.

São corretas as afirmativas:

- a) I e II
- b) II e IV
- c) II e III
- d) I e III
- e) III e IV

06) (EsPCEx) Sejam x e y números reais não nulos. Dadas seguintes afirmações:

I - Se $|x| = |y|$ então $x = y$

II - $|x + y| \geq |x| + |y|$

III - Se $0 < x < 1$ então $x^2 < x$

IV - Se $x < 0$ então $x = \sqrt{x^2}$

Pode-se concluir que:

- a) todas são verdadeiras
- b) somente a IV é falsa
- c) somente I e III são verdadeiras
- d) somente II e IV são falsas
- e) somente a III é verdadeira

07) Resolva a equação: $|x^2 - 4x - 1| = 4$

08 (UFGO) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + |x|$ e faça o que se pede:

- a) Mostre que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
 b) Resolva a equação: $f(x + 2) - x = 3$

09 Resolva a inequação: $|x^2 - x| \geq 2$

10 Resolva em \mathbb{R} : $|x - 1| + |x - 2| > 1$



Exercícios de Casa

01 (Vunesp) Resolva a equação $x^2 - 3|x| + 2 = 0$, tomando como universo o conjunto \mathbb{R} dos números reais.

02 Resolva em \mathbb{R} a seguinte equação: $|x^2 + 2x - 3| + 1 - x = 0$

03 Resolva a equação: $|x - 1| + |x + 5| = 6$

04 (FUV) Seja $f(x) = |2x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$. Determinar os valores de x para os quais $f(x) < 1$.

05 Resolva a inequação: $|x^2 - 4| < x + 2$

06 Determine o conjunto solução da inequação: $|x + 3| - |x - 2| \geq 9$

07 Considere em \mathbb{R} a função: $f(x) = |4x - 7| - 3$
 Determine os valores de x , tais que:

- a) $f(x) = f(x - 2)$
 b) $f(x) < f(2)$
 c) $f(x) \geq f(x + 1)$

08 Sendo $3 < x < 7$, simplifique a expressão:

$$E = \sqrt{(x^2 + 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2} + \sqrt{(x - 3)^2}$$

09 Faça o gráfico da função:

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = x + |x| + 1$

c) $f(x) = |x| + 2$

d) $f(x) = |x| - 3$

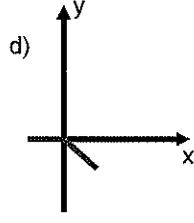
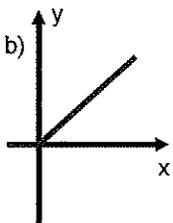
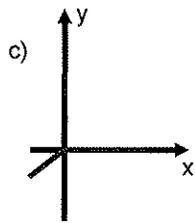
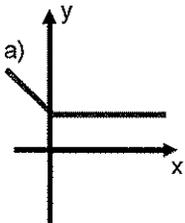
e) $f(x) = -|x| + 1$

$$f) f(x) = \sqrt{(x-5)^2}$$

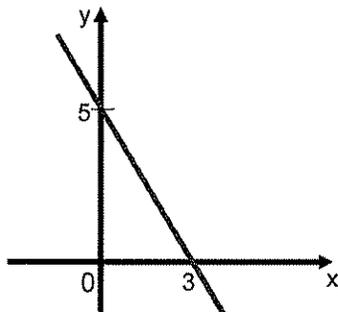
$$g) f(x) = |x^2 - 9|$$

10 (AFA-SP) O gráfico que melhor representa a função

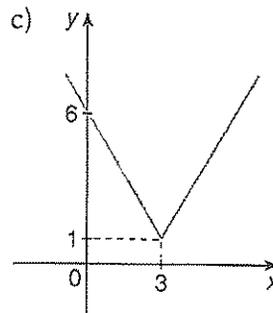
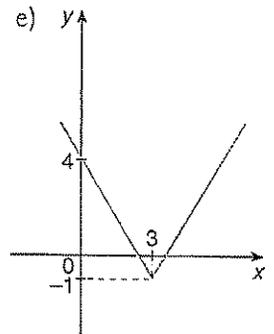
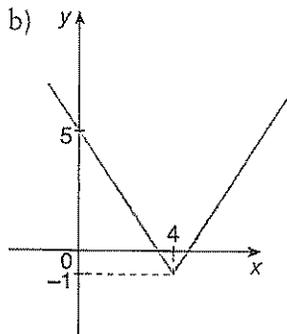
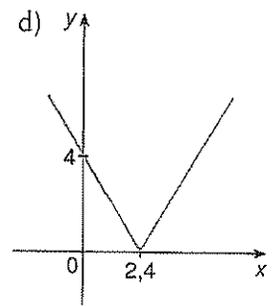
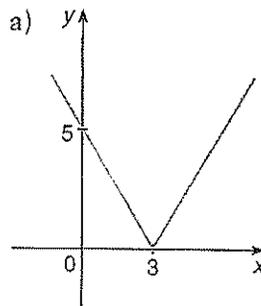
$$f(x) = \frac{1}{2}(x - |x|)$$



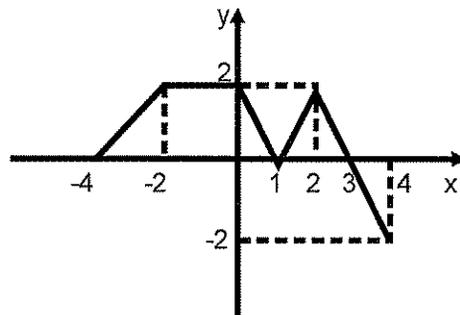
11 (Unificado-RJ)



No gráfico dado está representada a função do 1º grau $f(x)$. O gráfico que melhor representa $g(x) = |f(x)| - 1$.



12 (UFPE) Na figura a seguir temos o gráfico de uma função $f(x)$ definida no intervalo fechado $[-4, 4]$. Com respeito à função $g(x) = f(|x|)$ é incorreto afirmar:



- a) O ponto $(-4, -2)$ pertence ao gráfico de g .
- b) O gráfico de g é simétrico com relação ao eixo Oy das ordenadas.
- c) $g(x)$ se anula para x igual a $-3, -1, 1$ e 3 .
- d) $g(-x) = g(x)$ para todo x no intervalo $[-4, 4]$.
- e) $g(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[-4, 4]$.

13 Sabendo que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:

- a) $a = 1$ e $b = 6$
- b) $a = 0$ e $b = -6$
- c) $a = 1$ e $b = -6$
- d) $a = 0$ e $b = -9$
- e) não existem a e b tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

14 (Cesgranrio-RJ) O número de raízes reais da equação $|2x - 1| = |1 - x|$ é:

- a) 0
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 6

15 (Fatec-SP) O conjunto solução $|3x^2 - 4| = x^2 - 4$, em \mathbb{R} , é:

- a) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
- b) $\{0\}$
- c) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$
- d) \mathbb{R}
- e) \emptyset

16 (PUC-SP) O número de soluções da equação $||x| - 1| = 1$, no universo \mathbb{R} , é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

17 (Concurso de Ingresso ao Magistério-SP) O número de soluções inteiras do sistema de inequações

$$\begin{cases} |x - 2| \geq 3 \\ |2x + 3| < 5 \end{cases}$$

- a) 5
- b) 3
- c) 1
- d) 0

18 (UFC - CE) O valor mínimo da função $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) 1
- c) $\frac{3}{2}$
- d) 2

19 (Fuvest - SP) Sendo x um número real, $(1 + x)(1 - |x|) \geq 0$ se, e somente se:

- a) $|x| \leq 1$
- b) $x \leq 1$
- c) $|x| \geq 1$
- d) $x \geq 1$
- e) $x \leq -1$

20 (UFGO) O conjunto solução da inequação

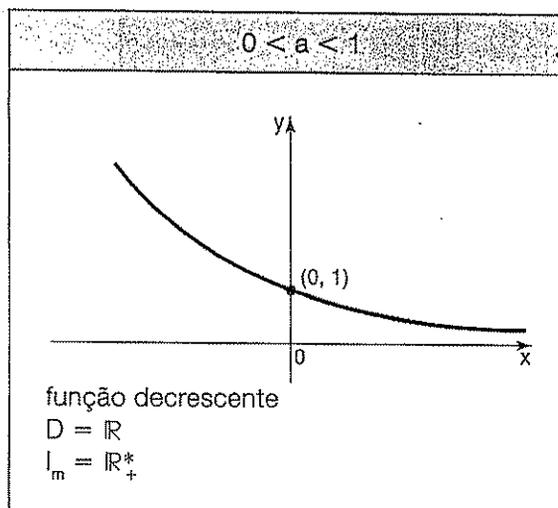
$$\left| \frac{2x + 4}{x - 2} \right| \leq 0 \text{ é:}$$

- a) $\{x \in \mathbb{R}, x = 2\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R}, x = 2\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}$

2. Função Exponencial

2.1 Função exponencial

Toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, é denominada função exponencial de base a .



2.2 Equação Exponencial

Uma equação é denominada equação exponencial quando a incógnita aparece no expoente.

Exemplo: $2^{x+1} = 128$

Em alguns casos a resolução de uma equação exponencial é baseada na propriedade:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

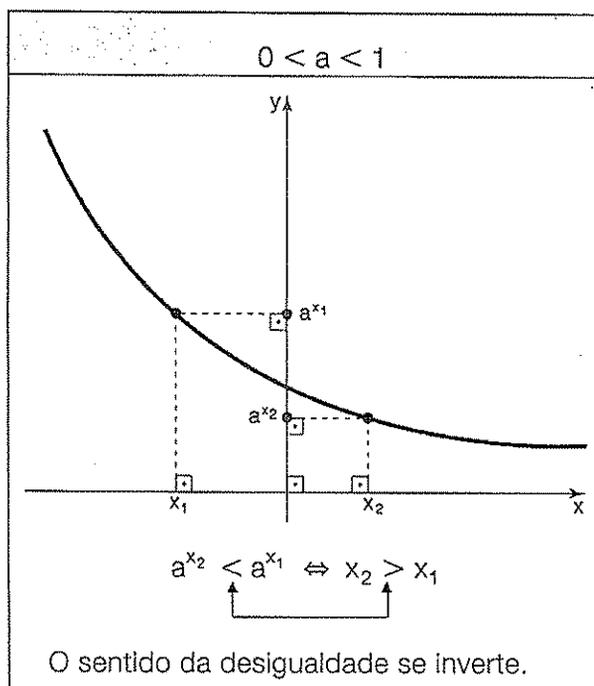
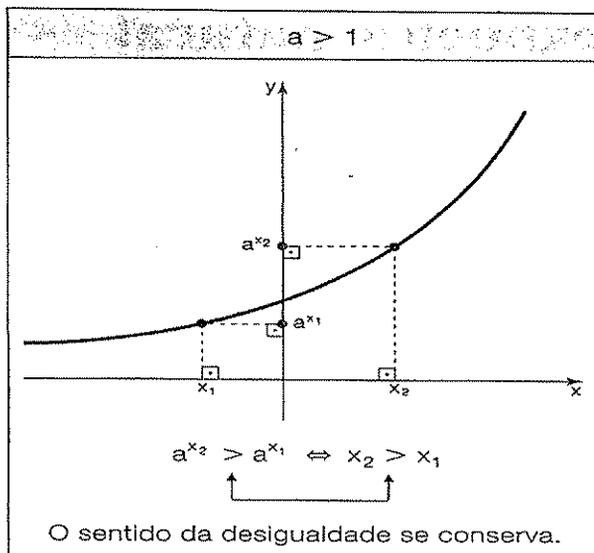
Com $1 \neq a > 0$

2.3 Inequação exponencial

Denominamos inequação exponencial toda desigualdade que possui variável no expoente.

Exemplo: $3^{x^2-1} > 27$

A resolução de uma inequação exponencial é baseada nas propriedades:





Exercícios Comentados

01 (EsPCEX) Uma pequena empresa expande suas vendas em 20% ao ano. Se num determinado ano ela vendeu 500 unidades, t anos após, era vendido:

- a) $500 \cdot (0,2)^t$
- b) $500 \cdot (1,2)^t$
- c) $500 \cdot (0,02)^t$
- d) $500 \cdot 2^t$
- e) $500 \cdot (1,02)^t$

Resolução

Hoje $\rightarrow 500$

$t = 1 \rightarrow 500 \times 1,2$

$t = 2 \rightarrow 500 \times 1,2 \times 1,2 = 500 \times (1,2)^2$

$t = 3 \rightarrow 500 \times (1,2)^3$

.

.

.

$t \rightarrow 500 \times (1,2)^t$

02 (EsPCEX) O produto dos elementos do conjunto

solução da equação exponencial $2^{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1024}{2^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$ é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Resolução

Chamando-se $x + \frac{1}{x} = a$ (I)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

Então: $2^{a^2 - 2} = \frac{1024}{2^a}$. Igualando-se

as base:

$$2^{a^2 - 2} = 2^{10 - a}$$

$$a^2 - 2 = 10 - a$$

$$a^2 + a - 12 = 0$$

$a = 3$ ou $a = -4$
voltando em (I)

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 + 1 = 3x$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$, logo, o produto de raízes é 1

$$x + \frac{1}{x} = 14$$

$$x^2 + 1 = -4x$$

$x^2 + 4x + 1 = 0$, logo o produto de raízes é 1

Então, $1 \cdot 1 = 1$

03 Suponha que o crescimento de uma cultura de bactérias obedece à lei

$$n(t) = m \cdot 2^{\frac{t}{2}}$$

na qual N representa o número de bactérias no momento t , medido em horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, ao fim de 8 horas o número delas era

- a) 3 600
- b) 3 200
- c) 3 000
- d) 2 700
- e) 1 800

Resolução

momento

inicial: $t = 0 \rightarrow n(0) = 200$

$$n(0) = m \cdot 2^0 = m$$

$$m = 200$$

$$\begin{aligned} t = 8; n(8) &= 200 \cdot 2^{\frac{8}{2}} \\ &= 200 \cdot 16 \\ &= 3200 \end{aligned}$$

04 (UFV) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$.
Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x+1) + f(-x+4) = 36$.

Resolução

$$3^{x+1} + 3^{-x+4} = 36$$

$$3^x \cdot 3 + 3^{-x} \cdot 3^4 = 36$$

Colocando-se $3^x = a$

$$3a + \frac{81}{a} = 36$$

$$3a^2 + 81 = 36a$$

$$3a^2 - 36a + 81 = 0 \quad \div 3$$

$$a^2 - 12a + 27 = 0$$

$$a = 3 \text{ ou } a = 9$$

$$3^x = 3 \quad \therefore x = 1 \quad S = \{1, 2\}$$

$$3^x = 9 \quad \therefore x = 2$$

05 (Vunesp) Seja a , $0 < a < 1$, um número real dado.
Resolver a inequação exponencial.

$$a^{2x+1} > \left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$$

Resolução

$$a^{2x+1} > \left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$$

$$a^{2x+1} > a^{-x+3}$$

Como $0 < a < 1$, $1 = 2x + 1 < -x + 3$

$$3x < 2$$

$$x < 2/3$$

$$S = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$$



Exercícios de Sala

01 (Fuvest)

a) Qual a metade de 2^{22} ?

b) Calcule $\frac{2}{8^3} + 9^{0,5}$.

02 Calcule o valor de A , sabendo que

$$A = \frac{0,0001 \cdot (0,01)^3 \cdot 100}{0,0001}$$

03 Sabendo que $2^x = a$ e $2^y = b$, determine o valor de $(0,25)^{-3x+y}$ em função de a e b

04 Simplifique a expressão: $\frac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$

05 (Fuvest)

a) Esboce, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2x$.

b) Baseado nos gráficos da parte a, resolva a inequação $2^x \leq 2x$.

c) Qual é o maior: $2^{\sqrt{2}}$ ou $2\sqrt{2}$? Justifique brevemente sua resposta.

06 Resolva as equações

a) $27^x = \sqrt{3}$

b) $(0,5)^{x^2+x-12} = 1$

07 Ache as raízes da equação: $x - \sqrt[3]{3^{2x+1}} = 3^{3x-1}$

08 Resolva a equação: $16^x \cdot 4^{x+3} - 8^{x+2} = 0$

09 Resolva a equação: $\sqrt[3]{3^{x+1}} \cdot x + 2\sqrt[3]{3^{x-1}} = 4\sqrt[4]{2187}$

10 Determine o conjunto solução da inequação:

$$(64^{a+1})^{a-2} \geq (16^{a-3})^{a+1}$$

11 Devido à desintegração radioativa, uma massa m_0 de carbono-14 é reduzida a uma massa m em t anos. As duas massas estão relacionadas pela fórmula $m = m_0$

$\cdot 2^{\left(\frac{-t}{5400}\right)}$. Nestas condições, em quantos anos 5 g da substância serão reduzidos a 1,25 g?

12 O número N de decibéis e a potência I de um som médio em watts por centímetro quadrado estão

relacionados pela fórmula $I = 10^{-16} \cdot 10^{\frac{N}{10}}$. Determine o número de decibéis correspondente ao som provocado por tráfego pesado de veículos, cuja potência é estimada em 10^{-8} watts por centímetro quadrado.

13 A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador por meio do seguinte modelo matemático

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t}$$

com t em segundos, $h(t)$ em metros e

$0 \leq t \leq T$. Qual o intervalo de tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto?

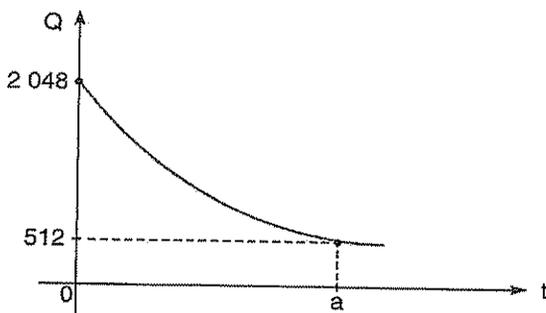
14 O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t , dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18°C . Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0°C após 90 minutos e chegou a -16°C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β .

b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)^\circ\text{C}$ superior à temperatura ambiente.

15 Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K \cdot 2^{-0,5t}$, onde K é uma constante, t indica o tempo (em gramas) no instante t .

Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e a .



Exercícios de Casa

01 Ache o conjunto solução da equação: $4^x - 2 \cdot 6^x + 9^x = 0$

02 Resolva a equação: $2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x = 20$

03 Resolva a equação: $3^x + 3^{1-x} = 4$

04 Resolva a equação: $\frac{6^{x-1} + 6^{x-2}}{6^{1-x} + 6^{2-x}} = 1$

05 Ache o conjunto verdade da equação: $2^{8x} - 4 \cdot 2^{4x} - 32 = 0$

06 Determine o conjunto solução da equação: $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 4^{x+1} = 92$

07 Determine os valores de a e b no sistema:

$$\begin{cases} 4^a + b = \frac{1}{16} \\ 2^a + 2 + 2^b - 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

08 Resolva a inequação: $(0,1)^{x^2-x} \geq 1$

09 Ache o conjunto solução da inequação: $2^{x+2} + 2^{x-1} > 3^{x-1} + 3^x$

10 Resolva a inequação: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{x-1}{x-2}} \geq 8^{\frac{x-1}{x}}$

11 Determine o conjunto solução da inequação:

$$x - \sqrt{5x+1} \cdot \sqrt{5x-1} \geq \sqrt{125}$$

12 (Pucmg 2004) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função

$$n(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

Nessas condições, pode-se afirmar que a população será de 51.200 bactérias depois de:

- a) 1 dia e 3 horas.
- b) 1 dia e 9 horas.
- c) 1 dia e 14 horas.
- d) 1 dia e 19 horas.

13 (Pucmg) Uma cultura tem, inicialmente, 125 bactérias. Sabendo-se que essa população dobra a cada 2 horas, o tempo necessário, em horas, para que o número de bactérias chegue a 256.000, é igual a:

- a) 14
- b) 18
- c) 22
- d) 26

14 (EsPCEx) O conjunto solução da inequação

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 3) > -1 \text{ é:}$$

- a) $S = \{x \in R / x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
- b) $S = \{x \in R / x < 0 \text{ ou } x > 4\}$

- c) $S = \{x \in R / 0 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
 d) $S = \{x \in R / x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
 e) $S = \{x \in R / 0 < x < 1 \text{ ou } 4 < x < 5\}$

15 (EsPCEX) A soma das soluções reais de $x^{x^2+2x-8} = 1$ é:

- a) -2
 b) -1
 c) 0
 d) 1
 e) 2

16 (EsPCEX) Se os números inteiros x e y satisfazem a equação $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, então $x+y$ é:

- a) 1
 b) 2
 c) 3
 d) 4
 e) 5

17 (EsPCEX) Supondo $x \in R$, com $x > 0$ e $x \neq 1$, a inequação $x^{2x-1} < x^3$ tem como solução:

- a) $0 < x < 1$
 b) $x > 2$
 c) $x > 1$
 d) $1 < x < 2$
 e) $2 < x < 3$

18 (EsPCEX) Se n é um número inteiro positivo, então o valor de $(-2)^n + (-2)^{n+1}$ será sempre igual a:

- a) zero
 b) 2
 c) 2^n , para todo n
 d) $(-2)^n$, se n for ímpar
 e) -2^n , se n for par

19 (EsPCEX) A quantidade de números inteiros ímpares que pertencem ao intervalo que satisfaz a inequação

exponencial $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 4$ é de:

- a) um número ímpar
 b) dois números ímpares
 c) três números ímpares
 d) quatro números ímpares
 e) cinco números ímpares

20 (EsPCEX) O valor de revenda de um carro é dado por $V(t) = V_0(0,8)^t$, em que V_0 é o valor inicial de

$V(t)$ é o valor após t anos de uso. A alternativa que mais se aproxima do percentual de desvalorização desse carro, em relação ao valor inicial, após 3 anos exatos de uso, é:

- a) 24%
 b) 47%
 c) 49%
 d) 50%
 e) 51%

21 Chama-se meio-vida de uma substância radioativa o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Tomemos hoje 16 gramas de uma substância radioativa, cuja meia-vida é de 5 anos. A massa dessa substância é uma função do tempo, contado a partir de

hoje, dada por $M(n) = 16 \cdot 2^{-\frac{n}{5}}$. Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, qual o valor de n ?

22 Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dada pela expressão

$$Q = 700 - 400e^{-0,6t}, \text{ onde}$$

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário;

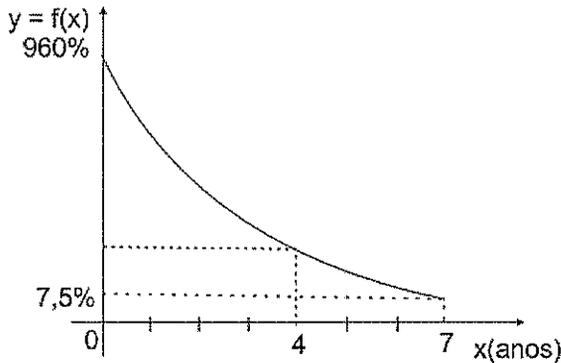
t = meses de experiência;

$$e = 2,7183.$$

a) De acordo com esta expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir mensalmente

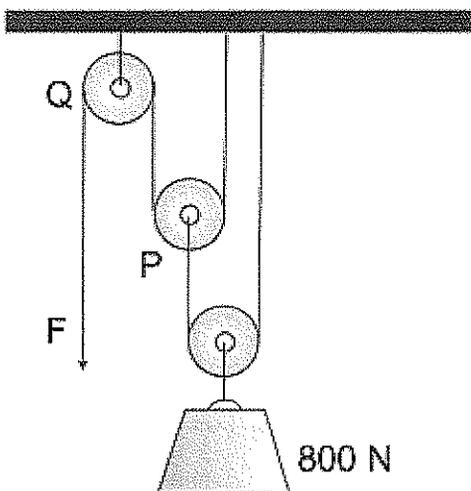
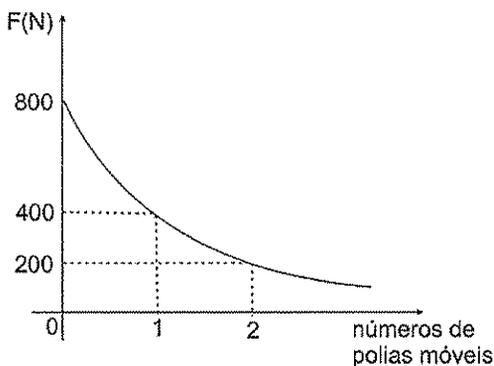
b) E um funcionário sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente? Compare este resultado com o resultado do item a. Há coerência entre eles?

23 A inflação anual de um país decresceu no período de sete anos. esse fenômeno pode ser representado por um a função exponencial do tipo $f(x) = a \cdot b^x$, conforme o gráfico abaixo.



Determine a taxa de inflação desse país no quarto ano de declínio.

24 A figura a seguir mostra uma associação de polias, chamada "Talha Exponencial", que facilita o representa a força $F = a \cdot b^n$ necessária para suspender uma carga de 800N de peso, em função do número de polias móveis n utilizadas.



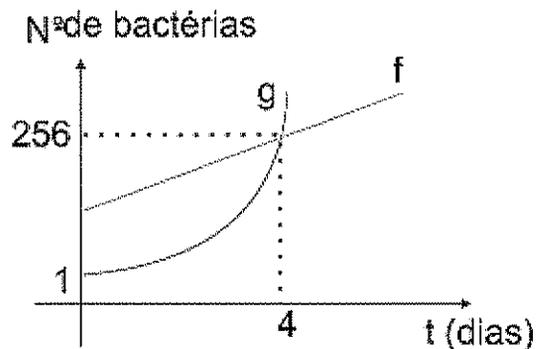
- Determine os valores de a e b .
- Quantas polias móveis devemos usar para levantar essa carga exercendo uma força $F = 25N$?

25 Durante a ocorrência de um surto de dengue em certo Estado, notou-se que o número $P(t)$, de pessoas infectadas t dias após a primeira observação ($t = 0$), po-

deria ser obtido pela expressão $P(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$. Quantos dias, no mínimo, serão necessários, até que o número de pessoas infectadas ultrapasse 32 000?

26 Um cientista está estudando um determinado tipo de doença provocada or bactérias. O cientista percebe que se o crescimento no número de bactéria for exponencial, ele será representado pela função $g(t) = a^t + b$ e se o crescimento for linear, ele será representado pela função $f(t) = at + c$, onde t é o tempo de observação. Através do grafico, pode-se afirmar que, para que o crescimento seja linear, o número inicial de bactérias deve ser de:

- 240
- 242
- 244
- 246
- 248



27 Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo t , em horas, de acordo com a fórmula $m = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$. Assim sendo, qual o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar este material antes que ele se volatilize totalmente?

3 - Função Logarítmica

1 Definição

Denomina-se logaritmo do número b na base a o expoente x ao qual se deve elevar a para se obter b .

$$b = a^x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x$$

forma exponencial forma logarítmica

A operação por meio da qual obtemos x é chamada de logaritmização.

Nomenclatura

Elementos	Operação	Potenciação	Logaritmização
a		base	base do logaritmo
b		potência	logaritmando ou antilogaritmo
x		expoente	logaritmo

Ao escrevermos $\log b$ fica subentendido que a base é 10. Os logaritmos de base 10 são chamados logaritmos decimais.

2. Consequências da definição

A partir da definição, sempre que existirem os logaritmos envolvidos, temos:

- 1°.) $\log_a 1 = 0$
- 2°.) $\log_a a = 1$
- 3°.) $\log_a a^n = n$
- 4°.) $a^{\log_a b} = b$
- 5°.) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

3. Condição de existência (equações logarítmicas)

Na definição de logaritmo aparecem restrições para os valores de a e b .

Lembre-se de que:

$$\exists \log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

4. Propriedades dos logaritmos

Sempre que existirem os logaritmos envolvidos, temos:

◆ logaritmo de um produto

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

◆ logaritmo de um potência

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

◆ logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

◆ logaritmo de uma raiz

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

6. Mudança de base

Efetuamos a mudança de um logaritmo de base a para um logaritmo de base c , através da fórmula:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Em que:
 $b > 0$
 $0 < a \neq 1$
 $0 < c \neq 1$

Consequências:

$$1^\circ.) \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

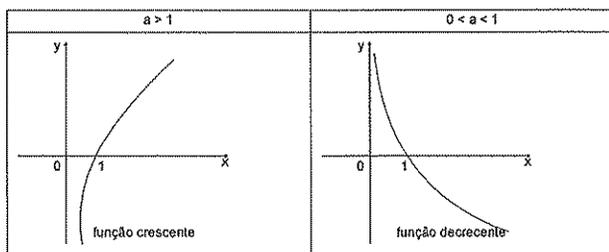
$$2^\circ.) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

7. Função logarítmica

Toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$ é denominada função logarítmica de base a . Gráficos

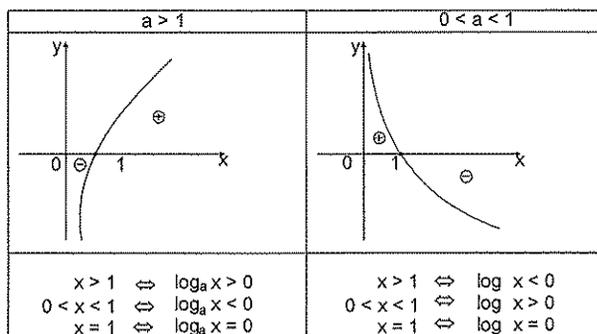


Exercícios Comentados



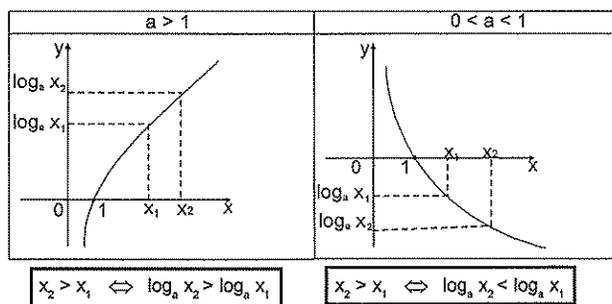
8. Sinal do logaritmo

O estudo do sinal do logaritmo de um número numa certa base é feito através dos gráficos:



9. Comparação de logaritmos (inequações logarítmicas)

Podemos comparar dois logaritmos indicados numa base através dos seguintes gráficos:



(O sentido da desigualdade se conserva.)

(O sentido da desigualdade se inverte.)

01 (Fei) Considere $a > 1$ e a expressão

$$x = \log_{\frac{1}{2}} a + \log_a a^2$$

então o valor de x é:

- a) 2
- b) 3/2
- c) 5/2
- d) 2/5
- e) 1

Resolução:

$$x = \log_{\frac{1}{2}} a + \log_a a^2$$

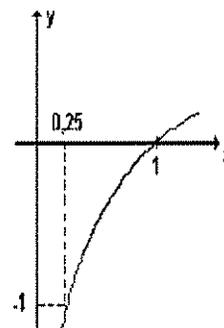
$$x = \frac{1}{2} \log_a a + 2 \log_a a$$

$$x = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

02 (Fuvest) A figura a seguir mostra o gráfico da função logaritmo na base b .

O valor de b é:

- a) 1/4.
- b) 2.
- c) 3.d) 4.
- d) 4
- e) 10.



Resolução

$$f(x) = \log_b x$$

como a função passa pelo ponto $(0,25 ; -1)$
 $\log_b 0,25 = -1$

$$b - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{4} \therefore b = 4$$

03 (Uece) Seja k um número real positivo e diferente de 1. Se

$$(2^{k-1})^3 = (\log_{\sqrt{5}} k) \log_k 5,$$

então $15k + 7$ é igual a:

- a) 17
- b) 19
- c) 27
- d) 32

Resolução

$$\log_{\sqrt{5}} k = \log_{5^{1/2}} k = 2 \log_5 k$$

$$(2^{k-1})^3 = 2 \log_5 k \cdot \log_k 5 \text{ . como } (\log_5 k = \frac{1}{\log_k 5})$$

$$(2^{k-1})^3 = 2$$

$$3k - 3 = 1$$

$$k = \frac{4}{3}; \text{ Então } 15 \cdot \frac{4}{3} + 7 = 27$$

04 (EsPCEX) A equação $5^{2x+1} = 15$ pode ser resolvida dispondo-se de uma tabela de logaritmos decimais. O valor de x que a satisfaz é:

a) $\frac{2 \log 5}{\log 3}$

b) $\frac{\log 5}{2 \log 3}$

c) $\frac{2 \log 3}{\log 5}$

d) $\frac{\log 15}{\log 3}$

e) $\frac{\log 3}{2 \log 5}$

Resolução

$$5^{2x+1} = 15$$

$$5^{2x} \cdot 5 = 15$$

$$5^{2x} = 3$$

$$\log 5^{2x} = \log 3$$

$$2x \log 5 = \log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{2 \log 5}$$

05 (EsPCEX) O conjunto solução da inequação

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 4x + 3) > -1 \text{ é:}$$

- a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
- b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 4\}$
- c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
- d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 3 < x > 3\}$
- e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 4 < x < 5\}$

Resolução

Condição de existência:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = 3$$



$$x < 1 \text{ ou } x > 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 4x + 3) > -1$$

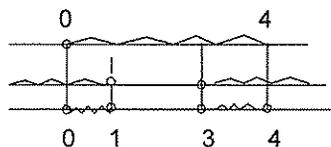
$$x^2 - 4x + 3 < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$x^2 - 4x + 3 < 3$$

$$x^2 - 4x < 0$$



$$0 < x < 4$$





Exercícios de Sala

01 (EsPCEEx) A função $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$ tem por

domínio:

- a) $] -2, 1[$
- b) $R - \{-2\}$
- c) $R - \{-2, 1\}$
- d) $] -\infty, -2[\cup] 1, +\infty[$
- e) R

02 (EsPCEEx) Há números reais para os quais o quadrado do seu logaritmo decimal é igual ao logaritmo decimal de seu quadrado. A soma dos números que satisfazem essa igualdade é:

- a) 90
- b) 99
- c) 100
- d) 101
- e) 201

03 (EsPCEEx) Acrescentando 48 unidades a um número, seu logaritmo na base 5 aumenta de 2 unidades. Esse número é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 6
- e) 12

04 (EsPCEEx) O número real x que satisfaz a equação $\log_2(12 - 2^x) = 2x$ é:

- a) $\log_3 2$
- b) $\log_2 3$
- c) $\log_3 4$
- d) $\log_4 3$
- e) $\log_4 2$

05 (EsPCEEx) O logaritmo de um número natural n , $n > 1$, coincidirá com o próprio n se a base for:

- a) n^n
- b) $\frac{1}{n}$
- c) n^2
- d) n
- e) $n^{\frac{1}{n}}$

06 (EsPCEEx) Se $\log_3 4 = a$ e $\log_4 5 = b$, então o valor de $\log_3 5$ em função de a e b é:

- a) $\frac{1}{a+b}$
- b) $\frac{b}{a}$
- c) $\frac{1}{ab}$
- d) $\frac{a}{b}$
- e) ab

07 (EsPCEEx) O conjunto solução da equação $\frac{1}{2} \log_{10}(x+2) + \log_{100}(x-2) = 1$ é:

- a) $S = \{2\sqrt{6}\}$
- b) $S = \{-2\sqrt{26}\}$
- c) $S = \{-2\sqrt{6}\}$
- d) $S = \{2\sqrt{26}\}$
- e) $S = \{2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\}$

08 (EsPCEX) Se o gráfico da função $f(x) = \log_b x$

passa pelo ponto $\left(\frac{1}{8}, -3\right)$, então o valor da expressão

$$\frac{1}{\frac{3}{b^2} - 1}$$
 é igual a:

- a) 3
b) 2

c) $\frac{1}{3}$

d) $-\frac{1}{2}$

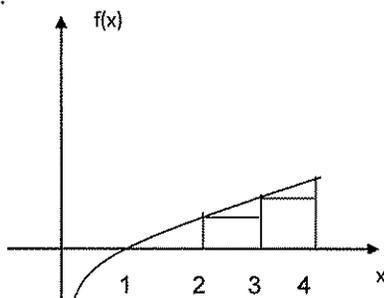
e) -4

09 (EsPCEX) Um satélite será levado ao espaço por um foguete que tem seu consumo de combustível calculado pela função $C(t) = \log_2(t^2 + 7)^2 + 2\log_2 \frac{1}{7}$, em

que C é o consumo em toneladas e t é o tempo em horas. Para colocar o satélite em órbita, o foguete deverá percorrer uma distância de 56.000 Km a uma velocidade média de 8.000 Km/h. Com base nessas informações, o físico responsável pelo cálculo chegou a conclusão de que o foguete, para cumprir a missão, terá um consumo de combustível igual a:

- a) 1 tonelada
b) 2 toneladas
c) 6 toneladas
d) 7 toneladas
e) 8 toneladas

10 (EsPCEX) A curva da figura representa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$. Dados: $\log_{10} 2 \cong 0,30$ e $\log_{10} 12 \cong 1,08$. Com base nesses dados, a soma das áreas dos dois retângulos hachurados é, aproximadamente:



- a) 1,60
b) 2,10
c) 2,08
d) 2,60
e) 3,60

11 Numa plantação de espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:

altura: $H(t) = 1 + (0,8) \cdot \log_2(t + 1)$ diâmetro do

tronco: $D(t) = (0,1) \cdot \frac{t}{2^7}$ com H(t) e D(t) em metros e t em anos.

a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas.

b) a altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetros.

12 Suponha que o total de sapatos produzidos por uma pequena indústria é dado, aproximadamente, pela função $S(t) = 1000 \log_2(1 + t)$, onde t é o número de anos e S o número de sapatos produzidos, contados a partir do início de atividade da indústria. Determine:

a) o número de sapatos produzidos no primeiro ano de atividades da indústria;

b) o tempo necessário para que a produção total seja o triplo da produção do primeiro ano.

13 Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $4^{\log x} = 1$

b) $3^2 + \log_5 x = 81$

14 Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação:

$$T = T_0 + k e^{-ct}$$

Nesta relação, T é medida na escala Celsius, t é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e k e c são constantes a serem determinadas. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100 °C, colocada numa sala de temperatura 20 °C vinte minutos depois, a temperatura do café passa de 40 °A.

a) calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b) Considerando $\ln 2 = 0,7$ e $\ln 3 = 1,1$, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu à metade.

15 Estudos de demografia indicam que se a população de um país no ano zero é P_0 , decorridos t anos a população será aproximadamente $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, sendo k o número e a base dos logaritmos neperianos e

k uma constante real. Numa população para a qual $K = \frac{3}{100}$, quantos anos devem decorrer até que ela duplique (ou seja, até que $P(t) = 2 P_0$)?

Nos seus cálculos, use $\log_2 = 0,69$.

16 Um grupo de estudantes resolveu repetir a medição da altura do Pico da Neblina feita na década de 60. Para isso, escalaram essa montanha e levaram um barômetro. chegando ao cume da montanha, efetuaram várias medições da pressão atmosférica no local e obtiveram o valor médio de 530 mmHg. A pressão atmosférica $P(h)$ a uma dada altura h (em metros, em relação ao nível do mar) é fornecida pela função

$$P(h) = P_0 \cdot e^{\alpha h}$$

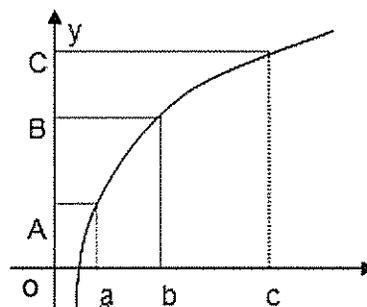
sendo e a base do sistema de logaritmos neperianos, $P_0 = 760$ mmHg a pressão atmosférica no nível do mar, e α um número que depende principalmente da temperatura média no local de medição.

Sabendo-se que, nas condições desse experimento, $\alpha = -0,00012$ e que os estudantes usaram os valores aproximados $\ln(760) = 6,63$ e $\ln(530) = 6,27$, qual foi a altura que encontraram para o Pico da Neblina?



Exercícios de Casa

01 (EsPCEx) A figura abaixo representa o gráfico $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_a x$, onde $a > 1$.

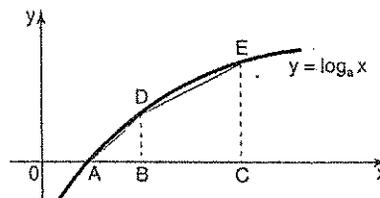


estão locados no gráfico os logaritmos de três abscisas: "a" (que é a própria base), "b" e "c". Sabendo que $AO = BC$, podemos afirmar que:

- a) $\log_a b$
- b) $a^c = b$
- c) $ab = c$
- d) $a + b = c$
- e) $10^a + 10^b = 10^c$

02 (Unesp) A curva da figura representa o gráfico da função $y = \log_a x$ ($a > 1$). Dos pontos $B = (2, 0)$ e $C = (4, 0)$ saem perpendiculares ao eixo das abscissas, as quais interceptam a curva em D e E , respectivamente. Se a área do trapézio retangular $BCED$ vale 3, prova que a

área do triângulo ABD , onde $A = (1, 0)$, vale $\frac{1}{2}$.



03 (Vunesp) Seja $p > 0$, $p \neq 1$, um número real. Dada a

reação $\frac{p^{-y}}{1 + p^{-y}} = x$ determinar y em função de x e o domínio da função assim definida.

04 (Unicamp) Calcule o valor da expressão $\log_n(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}})$, onde n é um número inteiro, $n \geq 2$. Ao fazer o cálculo, você verá que esse valor é um número que não depende de n .

05 Calcule o valor da expressão: $\log_5 1 + 4 \log_4 5 + \log_3 \log_5 125$

06 Calcule A , sendo $A = 49^{\log_7 2} - 25^{\log_5 3}$

07 Determine o domínio da função $y = \log_{x-1}(x^2 - 5x)$

08 Resolva a equação: $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 4) = 0$

09 Calcule $x \in \mathbb{Z}$, tal que: $\frac{\log x}{\log x + 1} + \frac{\log x + 4}{\log x - 2} = \frac{24}{5}$

10 Ache o conjunto verdade da equação:

$$\log_4[\log_2(\log_3 x)] = \frac{1}{2}$$

11 Sabendo que $\log a = 2$, $\log b = 3$ e $\log c = -6$,

Calcule: $\log \sqrt[5]{\frac{a^2 b^2}{c^3}}$

12 Sabendo que $\log_a x = 2$, $\log_b x = 4$ e $\log_c x = 5$, calcule $\log_{abc} x$.

13 Resolva a equação:
 $\log_{10} x + 2 \log_x 10 = 3$

14 Resolva a equação:
 $\log_2 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$

15 Resolva a equação:
 $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$

16 Resolva as inequações:

a) $\log_5(4x - 1) < \log_5 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(-x + 4) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x - 2)$

17 Ache o conjunto da inequação:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x) \geq -3$$

18 Resolva a inequação:
 $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) < 1$

19 Determine o conjunto verdade da desigualdade:

$$\log_2[\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1)] < 0$$

20 Resolva as inequações:

a) $2(\log x)^2 - \log x > 6$

b) $(\log_x 5x^2) - (\log_5 x)^2 \geq 1$

c) $(16 - x^2) \cdot \log_3(x - 2) > 0$

21 O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+],$$

em que $[\text{H}^+]$ indica a concentração, em mol/l, de íons de Hidrogênio na solução e \log , o logaritmo na base 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de Hidrogênio era $[\text{H}^+] = 5,4 \cdot 10^{-8}$ mol/l.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para $\log 2$, e de 0,48, para $\log 3$. dessa solução foi:

a) 7,26

b) 7,32

c) 7,58

d) 7,74

22

Um petroleiro encalhou em um recife e sofreu uma avaria no casco. Em função disso, começou a derramar petróleo. Admita que às t horas do dia seguinte ao do acidente, a área, em km^2 , da mancha do óleo espalhado sobre o oceano é dada por:

$$A(t) = 16 \cdot e^{0,1t}; t \in [0, 24]$$

Admita que a mancha do óleo é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou e que este local encontra-se a 4 km da costa, então a mancha de óleo atingirá a costa no dia seguinte ao do acidente a que horas? Adote $\ell \cap \pi = 1,1$.

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 13
- e) 14

23 Um pesquisador constata que, em um dado instante, existem 400 tartarugas da espécie A e 200 tartarugas da espécie B em uma reserva marinha. Nessa reserva, a população de tartarugas da espécie A diminui a uma taxa de 20% ao ano, enquanto a população da espécie B aumenta a uma taxa de 10% também ao ano.

Determine, usando duas casas decimais, para que as populações sejam iguais. (Considere: $\log_{10} 11 = 1,04$ e $\log_{10} 2 = 0,30$)

24 Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e p(t), o preço após t anos, pede-se:

- a) A expressão para p(t).
- b) O tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se necessário, use $\log 2 \approx 0,301$ e $\log 3 \approx 0,477$.

25 As populações de duas cidades A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8(1 + t)_6$ e $B(t) = \log_2(4t + 4)$, onde a variável t representa o tempo em anos.

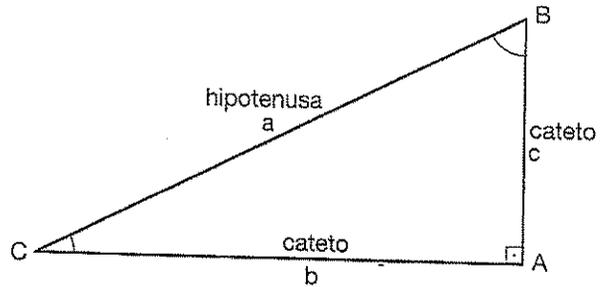
- a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?
- b) Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante t e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

4. Trigonometria 1

4.1 Triângulo retângulo e qualquer

1. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo retângulo da figura:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{B} &= \frac{b}{a} & \cos \hat{B} &= \frac{c}{a} & \operatorname{tg} \hat{B} &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{sen} \hat{C} &= \frac{c}{a} & \cos \hat{C} &= \frac{b}{a} & \operatorname{tg} \hat{C} &= \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Seno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Cosseno de um ângulo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

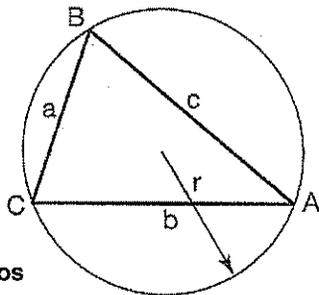
Tangente de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente.

Uma tabela importante:

Ângulos	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4.2 Relações trigonométricas num triângulo qualquer

Considere o triângulo da figura:



4.3 Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Num triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado.

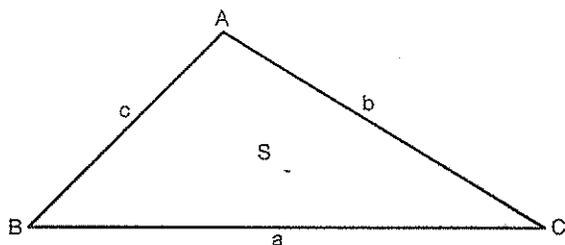
4.4 Lei dos senos

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r$$

Em todo triângulo, as medidas dos seus lados são proporcionais aos senos dos lados opostos.

4.5 Área de um triângulo

Num triângulo qualquer, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.



$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{C}}{2}$$

ou

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \sin \hat{B}}{2}$$

ou

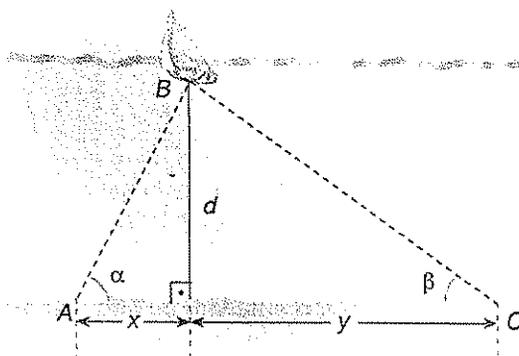
$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2}$$



Exercícios Comentados

01 Na figura a seguir, no ponto B há um barco de pescadores atracado próximo à praia, percorrer a distância AC = 260 m e mede os ângulos

$$\hat{BAC} = \alpha \text{ e } \hat{BCA} = \beta.$$



Se $\text{tg } \alpha = \frac{5}{2}$ e $\text{tg } \beta = \frac{3}{4}$, qual é a distância do barco à praia?

Resolução:

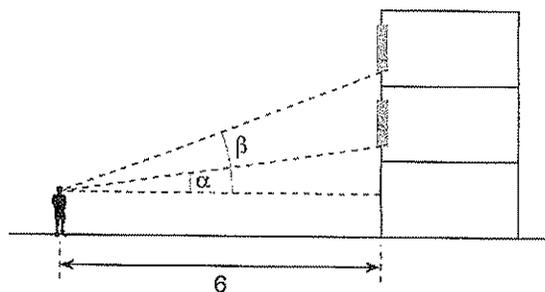
A distância é igual a 150 m.

$$\text{tg } \alpha = \frac{d}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{2d}{5}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{d}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{4d}{3}$$

Como $x+y=260$, temos:

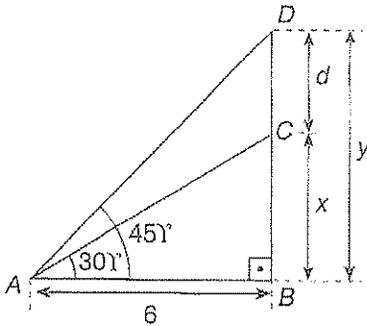
02 (UFC-CE) Parada a uma distância de 6 m de um prédio, uma pessoa observa os parapeitos de duas janelas, respectivamente sob os ângulos $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 45^\circ$, conforme a figura a seguir:



Considerando $\sqrt{3} = 1,7$ a distância entre os paralelos das janelas é de:

- a) 2,4 m
- b) 2,6 m
- c) 2,8 m
- d) 3,0 m
- e) 3,4 m

Resolução:



$$\Delta ABC : \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore x = 2\sqrt{3}$$

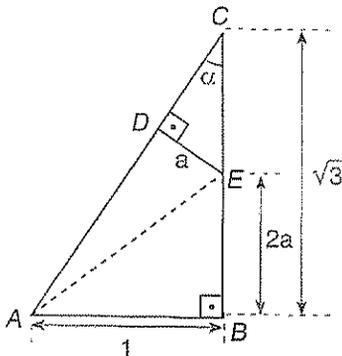
Ou seja, $x = 2 \cdot 1,7 \Rightarrow x = 3,4 \text{ m}$

$$\Delta ABD : \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{y}{6} = 1 \therefore y = 6 \text{ m}$$

Por fim,

$$d = 6 \text{ m} - 3,4 \text{ m} \therefore d = 2,6 \text{ m}$$

03 (Fuvest-SP) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$ e $BE = 2DE$. Logo, a medida de \overline{AE} é:



a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Resolução:

$$\Delta ABC : \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore \alpha = 30^\circ$$

$$\Delta CDE : \operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{EC} \Rightarrow \operatorname{sen} 30^\circ \frac{a}{EC} = \frac{1}{2} \therefore EC = 2a$$

Logo, $EC = BE$, isto é, E é o ponto médio de \overline{BC} .

Portanto,

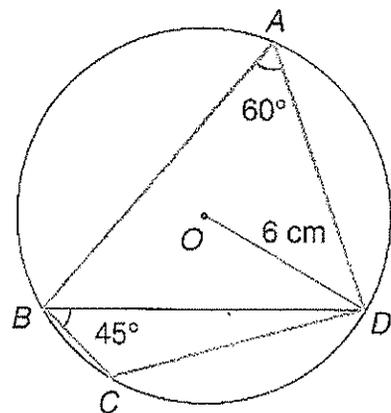
$$BC = \sqrt{3} \Rightarrow BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por fim, no triângulo ABE, temos

$$(AE)^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$(AE)^2 = \frac{7}{4} \therefore AE = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

04 A figura abaixo mostra um quadrilátero inscrito numa circunferência de raio $R = 6 \text{ cm}$. Se $\hat{A} = 60^\circ$ e $\hat{C}BD = 45^\circ$, calcule BD e CD.



Resolução:

A circunferência circunscrita ao quadrilátero é também a circunferência circunscrita aos triângulos ABC e BCD. Então, pela lei dos cossenos, temos:

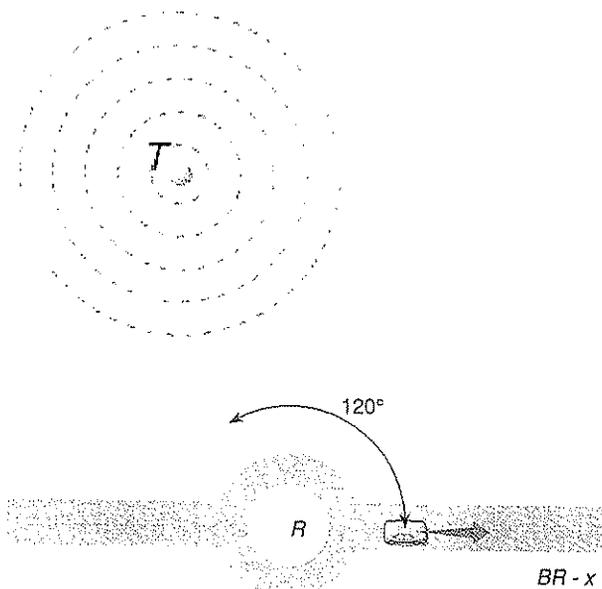
$\triangle ABD$:

$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{BD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12 \Rightarrow BD = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$\triangle BCD$:

$$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{CD}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12 \Rightarrow CD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

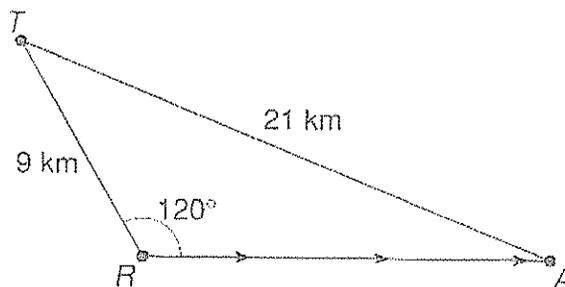
05. A figura a seguir mostra um trecho da planta de uma cidade. No ponto T, há uma torre de transmissão da rádio Lúpus, que pode ser captada com nitidez num raio de 21 km. Um automóvel segue pela rodovia BR-x, no sentido indicado, e sintoniza a rádio Lúpus no momento em que passa pela rotatória situada em R. A distância TR é igual a 9 km e a rodovia pode ser considerada retilínea.



Qual é a distância, a partir de R, que o automóvel pode percorrer sintonizando com nitidez a rádio Lúpus?

- a) 13 km
- b) 14 km
- c) 15 km
- d) 16 km
- e) 17 km

Resolução:



$$21^2 = d^2 + 9^2 - 2 \cdot d \cdot 9 \cdot \cos 120^\circ$$

$$441 = d^2 + 81 - 18 \cdot d \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

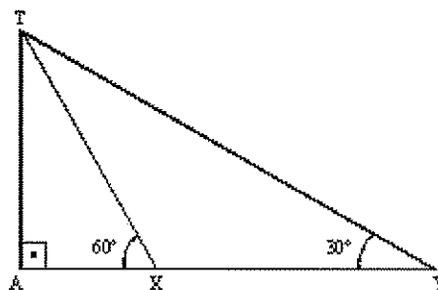
$$\therefore d^2 + 9d - 360 = 0 \begin{cases} d = 15 \\ d = -24 (\text{n\~{a}o conv\~{e}m}) \end{cases}$$

$$d = 15 \text{ km}$$



Exercícios de Sala

01. (PUC) Em uma rua plana, uma torre AT é vista por dois observadores X e Y sob ângulos de 30° e 60° com a horizontal, como mostra a figura abaixo:



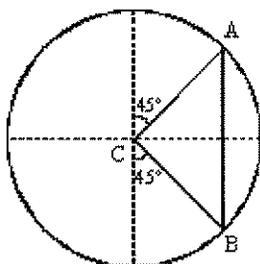
Se a distância entre os observadores é de 40m, qual é aproximadamente a altura da torre? (Se necessário, utilize $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$).

- a) 30m
- b) 32m
- c) 34m
- d) 36m
- e) 38m

02 (PUC MG) Quando $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } \theta = \frac{1}{3}$, a igualdade de $\text{sen } 2\theta = \frac{m\sqrt{2}}{9}$ é verdadeira. Nessas condições, o valor de m é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

03 (PUC MG) Na figura, o raio da circunferência mede r . A função f que expressa a medida da área do triângulo de vértices A, B e C em função de r é:

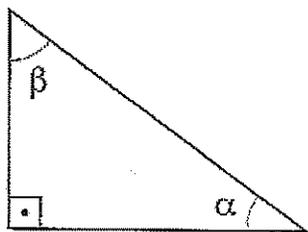


- a) $f(x) = \frac{1}{4} r^2$
- b) $f(r) = \frac{1}{3} r^2$
- c) $f(r) = \frac{1}{2} r^2$
- d) $f(r) = r^2$
- e) $f(r) = 2r^2$

04 Se α e β são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então a expressão

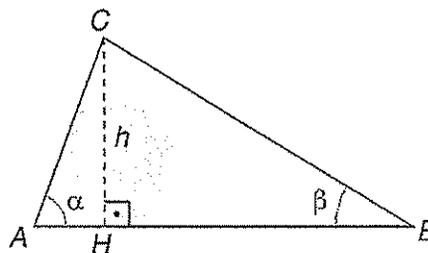
$$\frac{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\text{sen } \alpha \cos \beta}$$
 equivale a:

- a) 1
- b) 2
- c) $\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta$
- d) $\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta$
- e) $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \beta}$

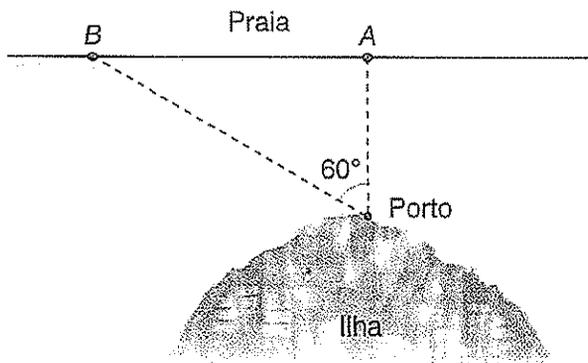


05 Calcule a altura h do triângulo ABC, sabendo que

$$AB = 20, \text{tg } \alpha = \frac{3}{4}, \text{tg } \beta = \frac{1}{2}.$$



06 Uma lancha parte de um ponto situado numa ilha e segue uma trajetória retilínea e perpendicular à praia, dirigindo-se a um ponto A da mesma. Ela navega à velocidade constante de 20 km/h e leva 15 min para chegar ao seu destino. Uma segunda lancha parte do mesmo porto e segue também uma trajetória retilínea, a qual forma um ângulo de 60° com a que a primeira lancha percorreu (veja a figura). A segunda chega a um ponto B da praia após 20 min da partida. Nesse trecho, a praia pode ser considerada retilínea.



Calcule:

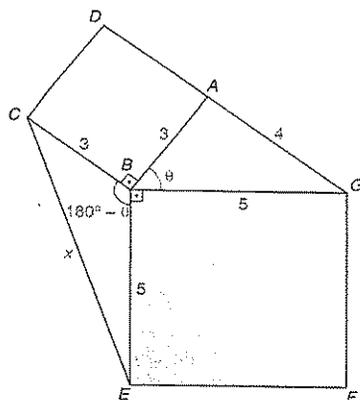
- a) a distância percorrida pela primeira lancha.
- b) a distância entre A e B.
- c) a velocidade média da segunda lancha.

07 Num triângulo ABC, tem-se $AB = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm e $\hat{C} = 30^\circ$. Pode-se concluir corretamente que ABC é:

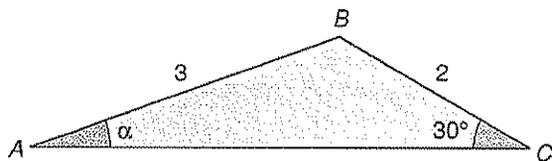
- a) retângulo.
- b) acutângulo.
- c) isóceles.
- d) retângulo ou isóceles.
- e) acutângulo ou retângulo.

- 08 O triângulo ABG desta figura é retângulo em A, $AB = 3$ cm, $AG = 4$ cm e $BG = 5$ cm.

Além disso, ABCD e BEFG são quadrados. Calcule CE.

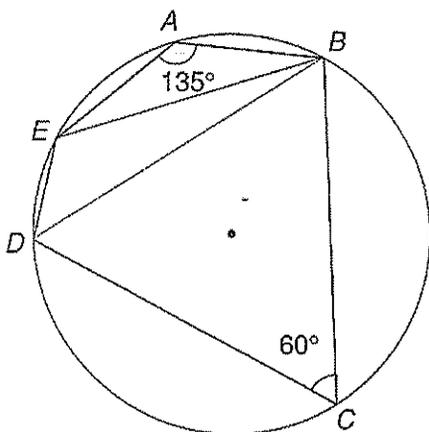


- 09 (UFRS) Na figura, $AB = 3$ e $BC = 2$. A $\text{cosec } \alpha$ é:



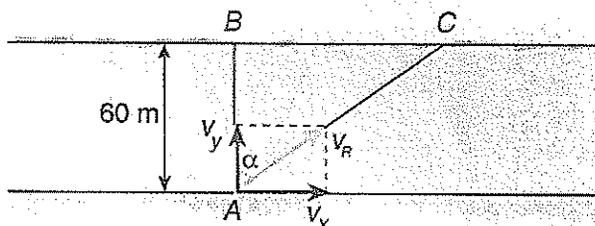
- a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 b) $\sqrt{2}$
 c) $\sqrt{3}$
 d) 2
 e) 3

- 10 O pentágono ABCDE da figura seguinte está inscrito na circunferência. Calcule o comprimento da diagonal BE, sabendo que $BD = 5\sqrt{3}$ cm, $A = 135^\circ$ e $\hat{C} = 60^\circ$



Exercícios de Casa

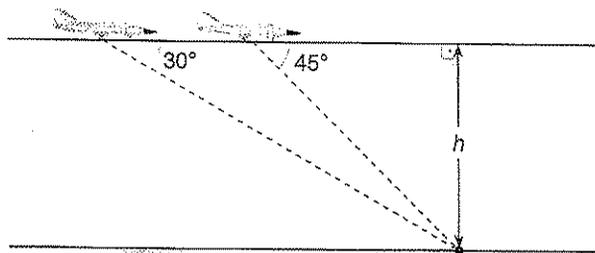
- 01 (Unesp) Um rio de largura 60 m, cuja velocidade da correnteza é $v_x = 5\sqrt{3}$ m/s, é atravessado por um barco, de velocidade $v_y = 5$ m/s, perpendicular às margens do rio, conforme a figura.



O ângulo α do movimento em relação à perpendicular da correnteza, a velocidade resultante V_R e a distância CB do ponto de chegada em relação ao ponto onde o barco chegaria caso não houvesse correnteza são, respectivamente:

- a) 30° , 5 m/s, $20\sqrt{3}$ m/s.
 b) 30° , 5 m/s, $60\sqrt{3}$ m/s.
 c) 45° , $10\sqrt{3}$ m/s, $60\sqrt{3}$ m/s.
 d) 60° , 10 m/s, $60\sqrt{3}$ m/s.
 e) 60° , $10\sqrt{3}$ m/s, $60\sqrt{2}$ m/s.

- 02 (UFPB) Um caça localiza, por meio de seu radar, um alvo no solo que forma um ângulo de visão de 30° com a horizontal. Passados 2,5 segundos, o piloto do caça nota que este ângulo passa para 45° .



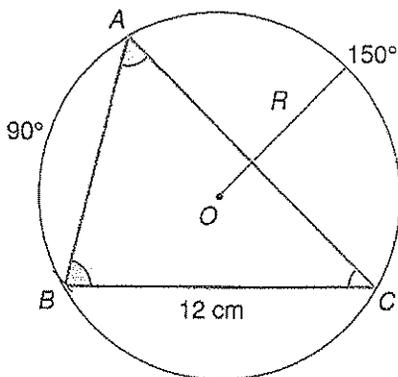
Considerando constantes a altura e a velocidade, a que altura está o caça se sua velocidade é de 400 m/s?

- a) $500(\sqrt{3} + 1) m$
- b) $600(\sqrt{3} - 1) m$
- c) $750\sqrt{3} m$
- d) 1.500 m
- e) 2.000 m

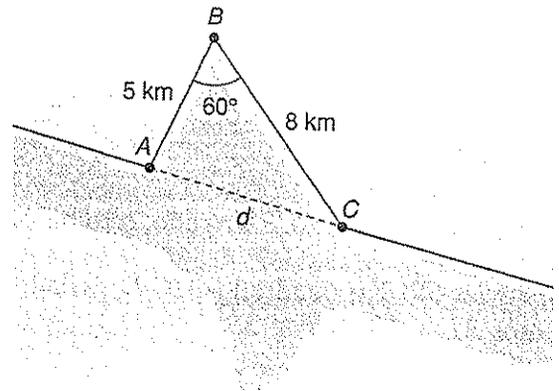
03 (Unesp) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30° . Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45° . A altura aproximada da torre, em metros, é:

- a) 44,7
- b) 48,8
- c) 54,6
- d) 60,0
- e) 65,3

04 ABC é um triângulo inscrito numa circunferência de raio R. Se $\widehat{AB} = 90^\circ$, $\widehat{AC} = 150^\circ$ e $\widehat{BC} = 12 \text{ cm}$, calcule AB e R.



05 As águas de um rio alagam uma região, como mostra a figura seguinte. Cortornando as águas por uma trilha pela margem esquerda, percorrem-se 5 km no trecho AB e 8 km em BC, sendo $\widehat{ABC} = 60^\circ$.



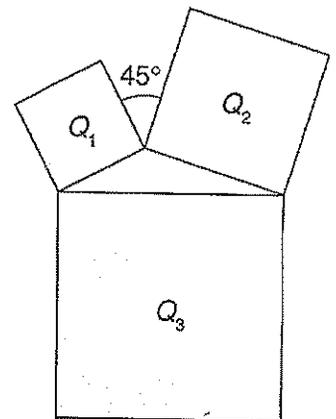
Com uma lancha percorre-se a distância AC, em linha reta, que equivale a:

- a) 5 km
- b) 6 km
- c) 7 km
- d) 9 km
- e) 10 km

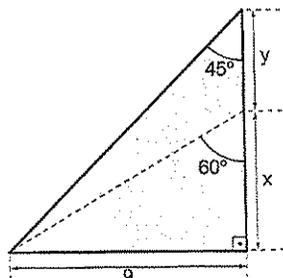
06 Os quadrados Q_1 e Q_2 da figura ao lado têm áreas iguais a 8 cm^2 e 16 cm^2 , respectivamente.

A área do quadrado Q_3 é:

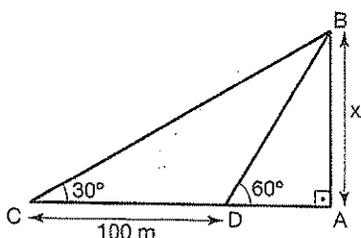
- a) 24 cm^2
- b) 28 cm^2
- c) 32 cm^2
- d) 36 cm^2
- e) 40 cm^2



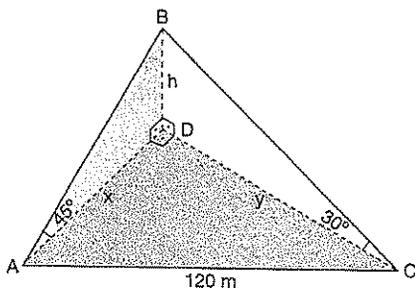
07 Calcule x e y da figura a seguir.



08 Calcule o valor de x , indicado na figura a seguir.



09 Para calcular a altura de uma montanha B desde um plano horizontal que passa por A, um observador mede o ângulo $\alpha = 45^\circ$, se desloca depois para C, distante 120 m de A, obtendo o ângulo $\beta = 30^\circ$. Calcule a altura h da montanha.

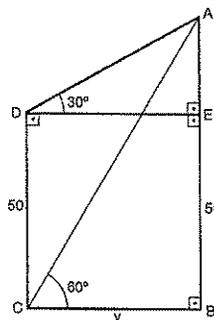


10 (Unicamp) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância $AB = 1200$ m. Quando em A, ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo $N\hat{A}B$ é de 60° ; quando em B, verifica que o ângulo $N\hat{B}A$ é de 45° .

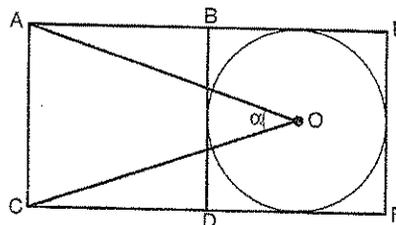
- Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
- Calcule a distância a que se encontra o navio da praia.

11 Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol L e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30^\circ$. Após navegar 4 milhas até B, verifica que o ângulo $L\hat{B}C = 75^\circ$. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

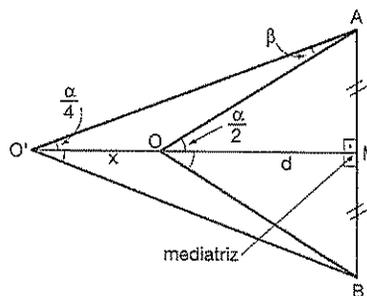
12 Determine o valor de \overline{AB} , indicado na figura ao lado.



13 Na figura a seguir os quadrados ABDC e ABEFD são iguais e a circunferência de centro O está inscrita no quadrado BEFD. Calcule o valor da $\text{tg } \alpha$.



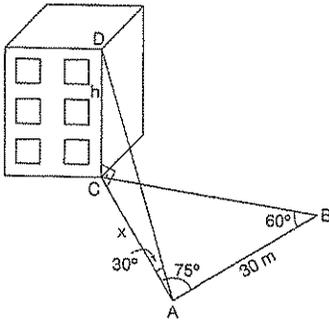
14 Um observador O, na mediatriz de um segmento \overline{AB} , vê esse segmento sob um ângulo α . O observador afasta-se do segmento ao longo da mediatriz até uma nova posição O' , de onde ele vê o segmento sob o ângulo $\frac{\alpha}{2}$. Expresse a distância $x = O'O$ em termo de α e d .



15 No triângulo ABC, reto em A, os catetos \overline{AB} e \overline{AC} medem $2 + \sqrt{3}$ e 1, respectivamente. Seja D um ponto de \overline{AB} tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$. Calcule $\text{tg}(\alpha + \beta)$, onde α e β são, respectivamente, as medidas dos ângulos \hat{ADC} e \hat{ABC} .

16 O ângulo sob o qual um observador vê uma torre duplica quando ele se aproxima 110 m e triplica quando se aproxima mais 50 m. Determine a altura da torre.

17 (UnB) Um observador, situado no ponto A, distante 30 m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de 30° , conforme a figura abaixo. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$.



Dados:

$$\overline{AB} = 30\text{m}$$

$$\hat{CAD} = 30^\circ$$

$$\hat{CAB} = 75^\circ$$

$$\hat{ABC} = 60^\circ$$

$$\hat{DCA} = 90^\circ$$

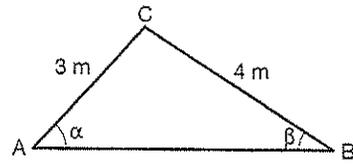
18 Os lados de um triângulo medem $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $3 + \sqrt{3}$. Determine o ângulo oposto ao lado que mede $\sqrt{6}$.

19 (Unicamp) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa d'água-bomba e caixa d'água-casa é de 60° . Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

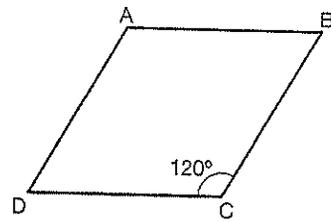
20 Num triângulo ABC temos $\overline{AC} = 3\text{ m}$, $\overline{BC} = 4\text{ m}$ e $\alpha = \hat{BAC}$.

a) Se $\overline{BC} = 3\text{ m}$, calcule $\cos \alpha$.

b) Se $\beta = \hat{ABC}$, oposto ao lado \overline{AC} , for 60° , calcule $\text{sen } \alpha$.



21 Um terreno tem a forma de figura a seguir, onde os quatro lados têm o mesmo comprimento de 40 m. O proprietário irá cercá-lo com uma cerca de dois fios e também irá dividi-lo, construindo outra cercado de dois fios unindo os pontos A e C. Quanto irá gastar de arame?



22 O triângulo isósceles ABC tem área de 36 m^2 e dois ângulo de medida α , para os quais $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Calcule:

a) o comprimento da base BC;

b) o comprimento da altura relativa a esta base.

23 Num triângulo retângulo ABC os ângulos \hat{B} e \hat{C} são agudos. Se a hipotenusa mede 3 cm e $\text{sen } \hat{C} = \frac{1}{2} \text{sen } \hat{B}$, calcule as medidas dos catetos.

24 As diagonais de um paralelogramo medem 10 m e 20 m e formam um ângulo de 60° . Ache a área do paralelogramo.

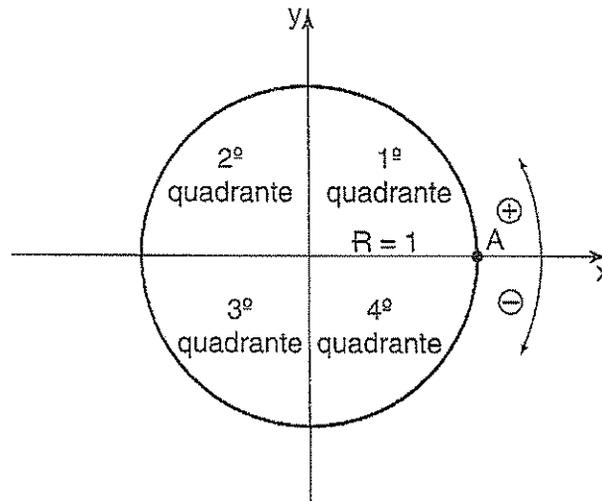
5 Trigonometria 2

Arcos e Ângulos, Ciclo trigonométrico e Relações Circulares no Ciclo

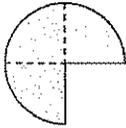
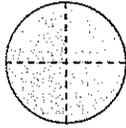
5. Ciclo (círculo) trigonométrico

Denomina-se **ciclo trigonométrico** uma circunferência de raio unitário, sobre a qual marcamos um ponto A (origem), e adotamos um sentido positivo de percurso (anti-horário).

Os eixos x e y dividem o círculo trigonométrico em quatro partes iguais denominados **quadrantes**.



5. 2. Medidas de ângulos e arcos

	Grau (°)	Radiano (rad)
	90	$\frac{\pi}{2}$
	180	π
	270	$\frac{3\pi}{2}$
	360	2π

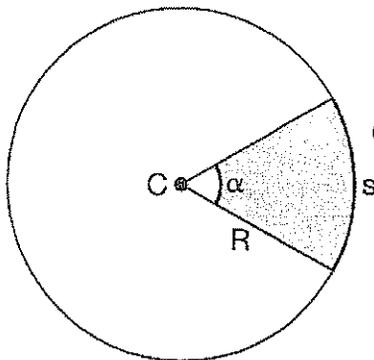
- Sistema sexagesimal: **graus**
- Sistema circular: **radianos**

As convenções entre os sistemas são feitas por meio de uma regra de três, utilizando-se os pares:

$$\boxed{\pi \text{ rad} \leftrightarrow 180^\circ}$$

3. Comprimento de um arco

Da circunferência da figura, obtemos a relação:



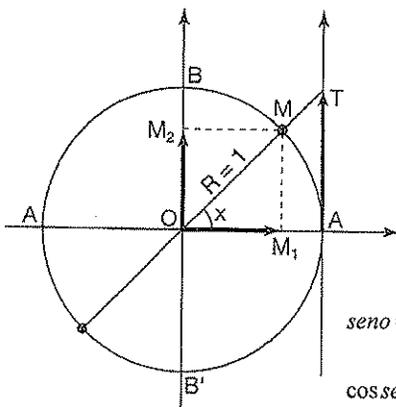
$$\alpha = \frac{s}{R} \Rightarrow \boxed{s = \alpha R}$$

Com α em radianos.

5. 4. Relações trigonométricas

Definições

Do ciclo trigonométrico da figura, definimos:



$$\begin{aligned} \text{sen } x &= \overline{OM_2} \\ \text{cos } x &= \overline{OM_1} \\ \text{tg } x &= \overline{AT} \end{aligned} \quad \square$$

Observação:

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{coseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan gente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$



Exercícios Comentados

01 Um ciclista utiliza nos seus treinos uma pista circular de raio igual a 100 m. Calcule:

a) o comprimento aproximado da pista em metros.

Resolução:

$$C = 2\pi \cdot R = 2\pi \cdot 100 = 200\pi$$

$$C \simeq 200 \cdot 3,14 \simeq 628 \text{ m}$$

b) O comprimento aproximado em metros de um

arco de $\frac{2\pi}{5}$ radianos.

Resolução:

$$\frac{2\pi}{5} = \frac{\ell}{100} \Leftrightarrow \ell = \frac{100 \cdot 2\pi}{5}$$

$$\ell = 40\pi \text{ m}$$

$$\ell \simeq 125,6 \text{ m}$$

c) O número de voltas completas que deve percorrer para atingir uma distância superior a 10 km. Adote $\pi \simeq 3,14$.

Resolução:

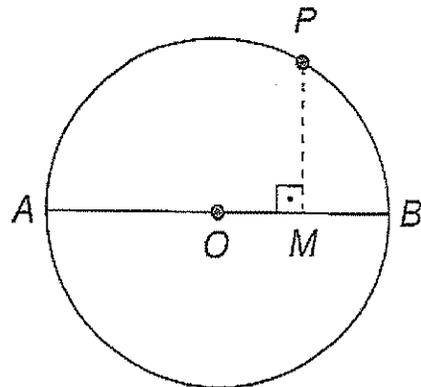
A cada volta são 628 m (aproximadamente) sendo n o número de voltas.

$$n \cdot 628 > 10.000$$

$$n > 15,9$$

Portanto, deve dar 16 voltas completas, no mínimo.

02 Na figura, temos uma circunferência de centro O e raio $r = 10$ cm. Se M é o ponto médio de OB, qual é o comprimento do arco AP, em centímetros?



$$\cos \alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ (sendo } 0 < \alpha < 90^\circ \text{)}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$P\hat{O}A = 180^\circ - \alpha = 120^\circ$$

$$P\hat{O}A = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\widehat{AP}}{10} \therefore \widehat{AP} = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}$$

$$\text{resposta: } \widehat{AP} = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}$$

03) Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2h e 18 min?

Resolução:

Nos 18 min decorridos entre 2 h e 2h e 18 min o ponteiro das horas percorre um ângulo de 9° .

30° em 60 min

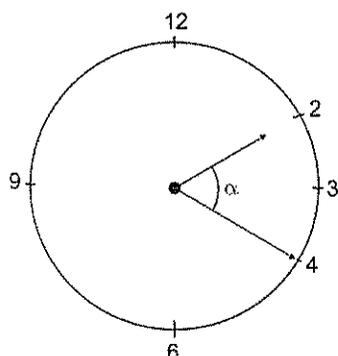
9° em 18 min

Da figura, tiramos:

$$9^\circ + \alpha + \overset{2 \text{ min}}{12^\circ} = 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 39^\circ$$

resposta: 39°



04) (Uece) Se $n = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}$ então

tão $n^2 + 1$ é igual a:

a) 2

b) $\frac{7}{3}$

c) 4

d) $\frac{19}{3}$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolução:

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} \quad n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}-3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

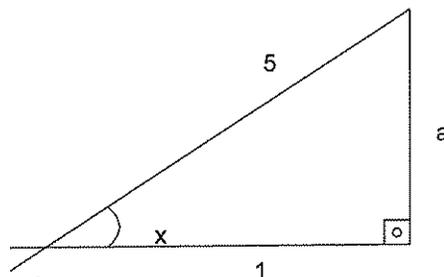
Logo, $n^2 + 1 = 2$ resposta: A

$$n = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3}-3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4} \cdot \frac{4}{2\sqrt{3}-2} = 1$$

05) Sabendo-se que $\cos x = \frac{1}{5}$, $x \in 4^\circ Q$, calcule

$\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{sec} x$.

Resolução:



$$a^2 + 1^2 = 5^2$$

$$a = 2\sqrt{6}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\operatorname{tg} x = -2\sqrt{6}$$

$$\operatorname{sec} x = 5$$

Logo,

$$-\frac{2\sqrt{6}}{5} - 2\sqrt{6} + 5 = \frac{25 - 11\sqrt{6}}{5}$$

Exercícios de Sala

01 (PUC-MG) Ao projetar muito altos, os engenheiros devem ter em mente o movimento da oscilação, que é típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais

alto de um edifício de 400 m descreve em arco de $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$,

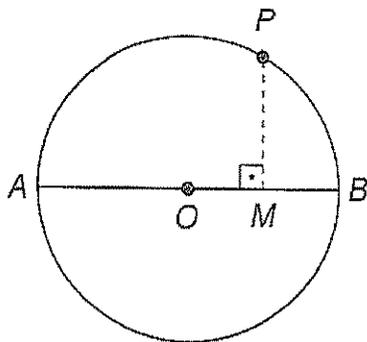
a medida do arco descrito por esse ponto, em metros, é:

- a) π
- b) $\frac{3\pi}{4}$
- c) $\frac{4\pi}{3}$
- d) $\frac{10\pi}{9}$
- e) $\frac{11\pi}{10}$

02 (Fuvest-SP) Quantos graus mede aproximadamente um ângulo de 0,105 rad?

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

03 Na figura, temos uma circunferência de centro O e raio $r = 10$ cm. Se M é o ponto médio de OB, Qual é o comprimento do arco AP, em centímetros?



04 (Fuvest-SP) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

- a) 27°
- b) 30°
- c) 36°
- d) 42°
- e) 72°

05 (Faap-SP) Dois ciclistas percorrem, no mesmo sentido, uma pista circular de 50 m de diâmetro. A cada volta, o primeiro percorre 2,5 m a mais que o segundo. Supondo que mantenham o mesmo ritmo, após quantas voltas o primeiro ciclista terá percorrido 1 radiano a mais do que o segundo?

- a) 20
- b) 15
- c) 10
- d) 5
- e) 2,5

06 (UFJF-MG) Um ângulo do segundo quadrante tem

seno igual a $\frac{12}{13}$. O cosseno desse ângulo é igual a:

- a) $\frac{5}{13}$
- b) $\frac{1}{13}$
- c) $-\frac{5}{13}$
- d) $-\frac{1}{13}$
- e) $-\frac{12}{13}$

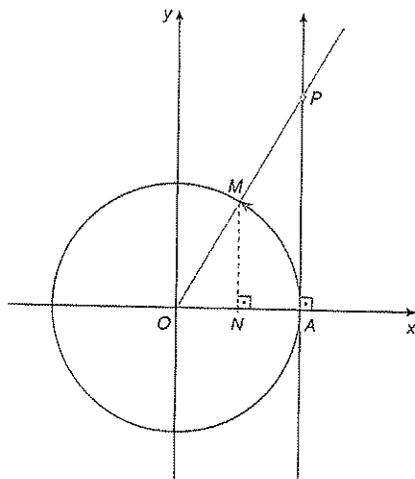
07 (PUC-SP) Na sequência de termo geral

$a_n = 5n + \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos 20 primeiros termos de ordem ímpar é igual a:

- a) 1.800
- b) 1.874
- c) 1.896
- d) 2.000
- e) 2.024

08 (Fatec-SP) Na circunferência trigonométrica abaixo

considere o arco AM, de medida $\frac{\pi}{3}$ radianos.



Então:

- a) $AP = 1$
- b) $MN = \sqrt{3}$
- c) $ON = \sqrt{2}$
- d) $AN = \frac{1}{3}$
- e) $OP = 2$

09 (Mackenzie-SP) Se $\cotg x = 2$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então

seu x vale:

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- c) $\sqrt{5}$
- d) $2\sqrt{5}$
- e) $3\sqrt{5}$

10 (UFF-RJ) Para $\theta = 89^\circ$, conclui-se corretamente que:

- a) $\text{tg } \theta < \text{sen } \theta < \text{cos } \theta$
- b) $\text{cos } \theta < \text{sen } \theta < \text{tg } \theta$
- c) $\text{sen } \theta < \text{cos } \theta < \text{tg } \theta$
- d) $\text{cos } \theta < \text{tg } \theta < \text{sen } \theta$
- e) $\text{sen } \theta < \text{tg } \theta < \text{cos } \theta$



Exercícios de Casa

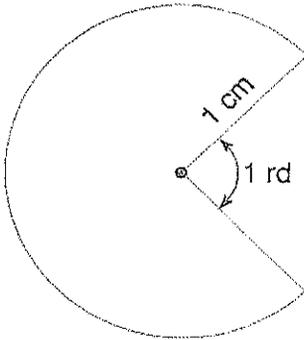
01 (Cesgranrio-RJ) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200 m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:

- a) 100
- b) 200
- c) 300
- d) 400
- e) 500

02 (UFPA) Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio de 50 minutos.

- a) $\frac{16\pi}{9}$
- b) $\frac{5\pi}{3}$
- c) $\frac{4\pi}{3}$
- d) $\frac{4\pi}{2}$
- e) $\frac{3\pi}{3}$

03 (Vunesp) Em um jogo eletrônico o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro" e o ângulo de abertura mede 1 radiano.



O perímetro do "monstro" em cm é:

- a) $\pi - 1$
- b) $\pi + 1$
- c) $2\pi - 1$
- d) 2π
- e) $2\pi + 1$

04 (Fuvest-SP) O perímetro de um setor circular de raio r e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado r . Então α é igual a:

- a) $\frac{\pi}{3}$
- b) 2
- c) 1
- d) $\frac{2\pi}{3}$
- e) $\frac{\pi}{2}$

05 (UFC-CE) Um relógio marca que faltam 15 minutos para as duas horas. Então, o ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos mede:

- a) $142^{\circ}30'$
- b) 150°
- c) $157^{\circ}30'$
- d) 135°
- e) $127^{\circ}30'$

06 (UFRGS-RS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte minutos. O ângulo entre os ponteiros é:

- a) 45°
- b) 50°
- c) 55°
- d) 60°
- e) 65°

07 (Unifor-CE) Em uma circunferência de raio 6 cm, um ângulo central de medida 15° , determina um arco cujo comprimento em centímetros é aproximadamente:

- a) 1,75
- b) 1,68
- c) 1,57
- d) 1,05
- e) 0,78

08 (UEL-PR) Seja x um número real pertencente ao intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ se $\sec x = \frac{3}{2}$, então $\operatorname{tg} x$ é igual a:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

09 (Vunesp) Se $\cos x \cdot \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine o único valor de:

- a) $\cos x$
- b) $\operatorname{sen} x + \cos x$

10 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio que marca 13h 15 min.

11 Determine a extremidade do arco de medida:

- a) 800°
- b) -01150°
- c) $\frac{25\pi}{4} \operatorname{rad}$
- d) $-\frac{9\pi}{2} \operatorname{rad}$

12] Represente no ciclo trigonométrico as extremidade dos arcos de medidas expressas em radianos por:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$$

13] Numa circunferência de raio igual a 18 cm, qual o comprimento de um arco determinado por um ângulo central de 120°?

14] (MACK SP) Num retângulo de lados 1 cm e 3 cm, o seno do menor ângulo formado pelas diagonais é:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{2}{3}$

15] (MACK SP) I. $\cos 225^\circ < \cos 215^\circ$

II. $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} > \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}$

III. $\operatorname{sen} 160^\circ > \operatorname{sen} 172^\circ$

Das afirmações acima:

a) todas são verdadeiras

b) todas são falsas

c) somente II e III são verdadeiras

d) somente II é verdadeira

e) somente I e II são verdadeiras

16] (EsPCEEx) Sendo $\operatorname{sen} \alpha = 3 \cos \alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, o

valor de $\operatorname{cosec} \alpha$ é:

a) $\frac{-\sqrt{10}}{3}$

b) $\frac{-\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$

d) $\sqrt{10}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

17] (EsPCEEx) O valor de $\operatorname{sen} \frac{53\pi}{6}$ é igual ao de:

a) $\cos 225^\circ$

b) $\cos 150^\circ$

c) $\cos 60^\circ$

d) $\operatorname{sen} 210^\circ$

e) $\operatorname{sen} 120^\circ$

18] (EsPCEEx) Os catetos de um triângulo retângulo medem $\operatorname{sen} \varphi$ e $\cos \varphi$, respectivamente. Se o perímetro

do triângulo vale $1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, o menor ângulo do triângulo mede:

a) 15°

b) 25°

c) 30°

d) 22°30'

e) 27°30'

19] (EsPCEEx) O número de arcos existentes entre 0° e 1560° cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

20] (EsPCEEx) Se y é a medida de um ângulo $0^\circ < y < 30^\circ$, o maior dentre os números $\operatorname{sen} y$, $\cos y$, $\operatorname{sen}^2 y$, $\cos^2 y$ e $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$ é:

a) $\operatorname{sen} y$

b) $\cos y$

c) $\operatorname{sen}^2 y$

d) $\cos^2 y$

e) $\operatorname{sen} y \cdot \cos y$

21] (EsPCEEx) Se $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, então o valor de $\operatorname{tg} \alpha$ é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

- c) $\frac{12}{13}$
 d) $\frac{12}{5}$
 e) $-\frac{12}{13}$

22 (EsPCEX) São arcos côngruos:

- a) -730° e $-\frac{\pi}{12} rad$
 b) 1640° e $-\frac{7\pi}{6} rad$
 c) 350° e $-\frac{\pi}{18} rad$
 d) 1235° e $\frac{5\pi}{6} rad$
 e) -2000° e $\frac{4\pi}{3} rad$

23 (EsPCEX) Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w , ambos pertencentes ao 1º quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertence ao intervalo:

- a) $[0^\circ, 15^\circ]$
 b) $[15^\circ, 30^\circ]$
 c) $[30^\circ, 45^\circ]$
 d) $[45^\circ, 60^\circ]$
 e) $[60^\circ, 90^\circ]$

24 (EsPCEX) O produto $\cot g x \cdot \cos x$ é positivo, portanto x pertence ao:

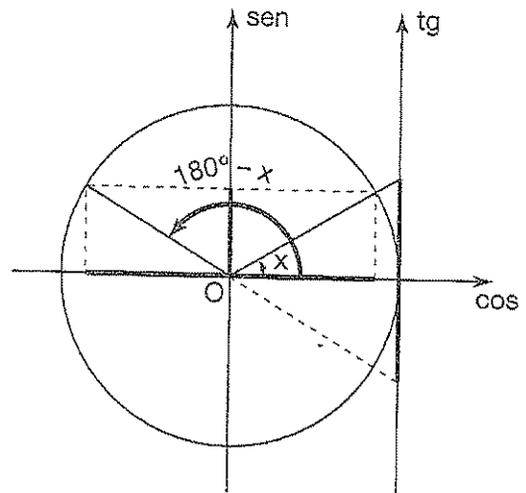
- a) 1º ou 2º quadrantes.
 b) 1º ou 4º quadrantes.
 c) 2º ou 3º quadrantes.
 d) 2º ou 4º quadrantes.
 e) 3º ou 4º quadrantes.

6. Trigonometria 3

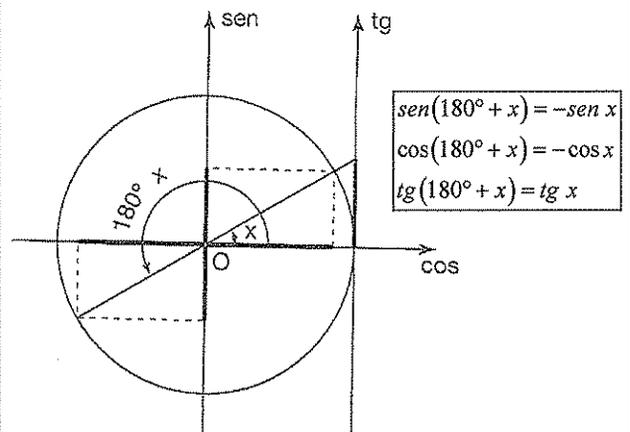
Redução ao 1º quadrante, Relações fundamentais e Transformações trigonométricas

6.1 Redução ao primeiro quadrante

Ângulos suplementares



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ - x) &= \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cos}(180^\circ - x) &= -\operatorname{cos} x \\ \operatorname{tg}(180^\circ - x) &= -\operatorname{tg} x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ + x) &= -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{cos}(180^\circ + x) &= -\operatorname{cos} x \\ \operatorname{tg}(180^\circ + x) &= \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

6.2 Relações fundamentais e auxiliares

$$\begin{aligned} &\bullet \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \\ &\bullet \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \\ &\bullet \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} \\ &\bullet \operatorname{sec}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ &\bullet \operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x \end{aligned}$$

6.3 Fórmulas da adição e da subtração

Dados dois arcos a e b, valem para eles as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cos} a \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cos} a \\ \operatorname{cos}(a+b) &= \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{cos}(a-b) &= \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} \\ \operatorname{tg}(a-b) &= \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} \end{aligned}$$

6.4 Arco duplo

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(2a) &= \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\operatorname{cos}^2 a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \\ \operatorname{sen}(2a) &= 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} a \\ \operatorname{tg}(2a) &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \end{aligned}$$

6.5 Transformação em produto

Dados dois arcos de medidas p e q, valem para eles as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q &= 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q &= 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{p+q}{2} \right) \\ \operatorname{cos} p + \operatorname{cos} q &= 2 \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \operatorname{cos} p - \operatorname{cos} q &= -2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right) \end{aligned}$$



Exercícios Comentados

01 Sendo dados

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

calcula:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

Resolução:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2 = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{36 + 20}{65} = \frac{56}{65}$$

b) $\operatorname{cos}(\alpha + \beta)$

Resolução:

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}$$

c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

Resolução:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{12}{5} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{12}{5} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{16}{63}$$

02] Calculando o valor numérico da expressão $E = \frac{\text{sen } 80^\circ \cdot \cos 35^\circ - \text{sen } 35^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\text{sen } 65^\circ \cdot \text{sen } 35^\circ + \cos 65^\circ \cdot \cos 35^\circ}$ encontramos:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

e) $\frac{3}{2}$

Resolução: $E = \frac{\text{sen } 80^\circ \cdot \cos 35^\circ - \text{sen } 35^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\text{sen } 65^\circ \cdot \text{sen } 45^\circ + \cos 65^\circ \cdot \cos 35^\circ} = \frac{\text{sen}(80^\circ - 35^\circ)}{\cos(65^\circ - 35^\circ)}$

$$E = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

03] Seja

$$f(x) = \text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 3x + \text{sen } 4x + \text{sen } 5x$$

Calcule $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Resolução:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{3} + \text{sen } \frac{2\pi}{3} + \text{sen } \frac{3\pi}{3} + \text{sen } \frac{4\pi}{3} + \text{sen } \frac{5\pi}{3}$$

Considerando que:

$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } \frac{2\pi}{3} = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{sen } \frac{3\pi}{3} = \text{sen } \pi = 0$$

$$\text{sen } \frac{4\pi}{3} = \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{sen } \frac{5\pi}{3} = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen } \frac{\pi}{3}$$

Temos:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{3} + \text{sen } \frac{\pi}{3} + \text{sen } \pi - \text{sen } \frac{\pi}{3} - \text{sen } \frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen } \pi = 0$$

04) Sendo $\sin x = a$, $\cos(-x) = b$ com $a \neq b$, a expressão

$$y = \frac{\sin(\pi + x) + \cos(-x) + \cos(2\pi - x) + \sin(-x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \text{ é igual a:}$$

- a) $a+b$
b) $2a+2b$
c) 0

d) $\frac{a+b}{a-b}$

- e) 2

Resolução:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x = -a \quad \cos(2\pi - x) = \cos x = b$$

$$\sin(-x) = -\sin x = -a \quad \cos(-x) = \cos x = b$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = b \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = a$$

substituindo na expressão:

$$y = \frac{-a + b + b - a}{b - a} = \frac{2b - 2a}{b - a} = 2$$

05) Resolva:

- a) Se $\sin x + \cos x = a$, calcule $\sin 2x$.

Resolução:

$$\sin x + \cos x = a$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = a^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = a^2$$

$$1 + \sin 2x = a^2$$

$$\sin 2x = a^2 - 1$$

- b) Se $\cos^4 x - \sin^4 x = b$, calcule $\cos 2x$.

Resolução:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = b$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = b$$

$$1 \cdot \cos 2x = b$$

06 Transforme em produto

a) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ$

Resolução:

$$2 \cdot \sin\left(\frac{35+25}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{35-25}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 5^\circ = \cos 5^\circ$$

b) $\sin 65^\circ - \sin 15^\circ$

Resolução:

$$2 \cdot \sin\left(\frac{65-15}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{65+15}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin 25^\circ \cdot \cos 40^\circ$$

c) $\cos 40^\circ + \cos 10^\circ$

Resolução:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{40+10}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{40-10}{2}\right) =$$

$$= 2 \cos 25^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

d) $\cos 20^\circ - \cos 12^\circ$

Resolução:

$$-2 \cdot \sin\left(\frac{20+12}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{20-12}{2}\right) =$$

$$= -2 \sin 16^\circ \cdot \sin 4^\circ$$



Exercícios de Sala

01 Dado $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Calcule o valor da expressão $\cos^2 x - \cos x$.

02 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que tenhamos simultaneamente $\sin x = m$ e $\cos x = \frac{m+1}{3}$.

03 (Esan-SP) Simplificando a expressão

$$y = \frac{\cos(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}{\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

a) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

b) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$

c) $y = \sin x \cdot \cos x$

d) $y = \sin x$

e) $y = \cos x$

04 Calculando $\sum_{i=1}^5 \operatorname{tg} \frac{(\pi i)}{3}$, encontramos:

a) 5

b) 0

c) $5\sqrt{3}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

e) 1

05 (Ufam) Quando simplificamos a expressão

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \text{ vamos obter:}$$

a) $2 \sec x$

b) $2 \operatorname{cosec} x$

c) $2 \sec^2 x$

d) $2 \cos x$

e) $\cos x$

06 (UFSCar-SP) O valor da expressão

$$\frac{2 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \text{ é:}$$

- a) -1
b) -2
c) 2
d) 1
e) 0

07 Se $\operatorname{tg} x = 3$, o valor da expressão $\frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x}$ é:

- a) 3
b) 2
c) 1
d) 0

e) $\frac{1}{2}$

08 (Ufam) Dado $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$, então $\operatorname{tg} x$ é igual a:

a) $-\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{4}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $-\frac{5}{3}$

09 Se $\lambda = \operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$, então λ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

e) 0

10 Simplifique a expressão: $\frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$



Exercícios de Casa

01 Calcule o valor de x que verifica, simultaneamente, as igualdades:

$$\operatorname{Sen} a = x + 2 \text{ e } \cos a = \sqrt{1 - x^2}$$

02 Calcule os valores de m que verificam, simultaneamente, as seguintes igualdades.

a) $\cos x = \frac{m-1}{2}$ e $\operatorname{cosec} x = \frac{4}{3m+3}$

b) $\operatorname{tg} y = \frac{1+m}{2}$ e $\sec y = \sqrt{m+2}$

03 (Unirio) As medidas dos ângulos A , B , C e D de um quadrilátero convexo estão em P. A. Sabendo-se que o menor ângulo é $A = 30^\circ$:

- a) encontre o maior ângulo;
b) calcule o valor da expressão:

04 Simplifique a expressão: $A = \frac{\operatorname{csc} x + \operatorname{sen} x}{\cos \operatorname{sec} x + \cos x}$

05 Sabendo que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, calcule:

$$A = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cosec} x}$$

(UFSC) Conhecendo o valor de $\operatorname{sen} x =$

06 $\frac{5}{5} e x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, Calcule o valor numérico da expressão:

$$\left(\frac{\sec^2 x \cdot \cot gx - \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{tg} x}{6 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosec}^2 x} \right)^{-1}$$

07 a) Demonstre a identidade: $\sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 2$

b) Demonstre a identidade $(\operatorname{tg} x - \operatorname{sem} x)^2 + (1 - \operatorname{cós} x)^2 = (\sec x - 1)^2$

08 Calcule o valor da expressão:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) + 2 \cos \left(\frac{9\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{3} \right)$$

09 Calcule:

a) $\operatorname{tg} 855^\circ$

b) $\operatorname{sen} \frac{19\pi}{6}$

10 Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\cos(3\pi - x) \cdot \operatorname{sen}(3\pi - x) \cdot \operatorname{tg}(6\pi - x)}{\operatorname{sen}(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + x)}$$

11 Sabendo que $\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \frac{1}{4}$ e que x pertence ao terceiro quadrante, calcule o valor da expressão:

$$\frac{2\operatorname{tg}(1260^\circ - x)}{\cos(-x) + 4\cos(180^\circ + x)}$$

12 (UFMS) Dado $\cos x = \frac{4}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor

$$\text{de } y = 12 \left(\frac{\sec x - \operatorname{cosec} x}{1 - \operatorname{cot} gx} \right).$$

13 (PUC) Dado $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$ e $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ calcule:

a) $\cos \theta$

b) $\operatorname{sen}(\theta + 30^\circ)$

14 Sabendo que $\cos x = -\frac{4}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule:

a) $\operatorname{sen}(x - 180^\circ)$

b) $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 x}$

15 (UEL-PR) Seja x a medida de um arco em radianos. O número real a que satisfaz as sentenças

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3-a} \text{ e } \cos x = \frac{a-2}{3} \text{ é tal que:}$$

a) $a \geq 7$

b) $5 \leq a < 7$

c) $3 \leq a < 5$

d) $0 \leq a < 3$

e) $a < 0$

16 (Fesp-Pe) Se $\operatorname{sen} x + \cos x = a$ e $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = b$, podemos afirmar corretamente que:

a) $a+b=1$

b) $a^2 + b^2 = 1$

c) $a^2 - 2b^2 = 1$

d) $a^2 - 2b = 1$

e) $b^2 - 2a = 1$

17 (FGV-SP) A expressão $\frac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{cox}^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ é igual a:

a) 1

b) $\operatorname{sen} x + \cos x$

c) $1 - \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

d) 2

e) $\frac{2}{\operatorname{sen} x}$

18 Se $\sec^2 x + \operatorname{tg} x = 7$, quais são os possíveis valores para $\cos^2 x$?

19 (PCU-MG) O arco que tem a medida x em radianos

é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$. O valor do seno de x é:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

20 (Unifor-CE) Para todo $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ a expres-

são $\frac{\operatorname{cosec} \theta + \cos \theta}{\sec \theta + \operatorname{sen} \theta}$ é equivalente a:

a) $-\operatorname{tg} \theta$

b) $\operatorname{tg} \theta$

c) $-\operatorname{cotg} \theta$

d) $\operatorname{cotg} \theta$

e) $\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta$

21 (Ufla-MG) Sabendo-se que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o valor de $\frac{\operatorname{cosec} x - \sec x}{\operatorname{cotg} x - 1}$ é:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{-3\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

e) 3

22 (Fuvest-SP) Se α é um ângulo tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

e $\operatorname{sen} \alpha = a$, então $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ é igual a:

a) $\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$

b) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

c) $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

d) $\frac{-\sqrt{1-a^2}}{a}$

e) $-\frac{1+a^2}{a}$

23 (Fuvest-SP) Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satis-

faz a equação $\operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$, então o valor de tangente de α é:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

24 (Unifor-CE) Se $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a$, então o valor de $\operatorname{sen}(3\pi + x)$ é:

a) $-a$

b) $-\frac{a}{2}$

c) $-\sqrt{a^2 + 1}$

d) $\frac{a}{2}$

25 (Unifesp) A expressão $\sin(x - y) \cos y + \cos(x - y) \sin y$ é equivalente a:

- a) $\sin(2x + y)$
- b) $\cos 2x$
- c) $\sin x$
- d) $\sin 2x$
- e) $\cos(2x + 2y)$

26 (Uece) Se $P = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} - \frac{\cos 40^\circ}{\cos 20^\circ}$ então $p^2 - 1$ é

igual a:

- a) $\sin^2 20^\circ$
- b) $\cos^2 20^\circ$
- c) $\operatorname{tg}^2 20^\circ$
- d) $\operatorname{cotg}^2 20^\circ$

27 (FGV-SP) A expressão $\sin x - \cos x$ é idêntica a:

- a) $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- c) $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- d) $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- e) $\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

28 (UFJF-MG, adaptada) Sendo $x + y = 60^\circ$, o valor de $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$ é:

- a) -2
- b) 0
- c) 1
- d) 2
- e) 3

29 (UFPA) Sendo a e b dois ângulos tais que $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$

e $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$, encontre, em graus, o valor de ângulo $a + b$.

30 (Mackenzie-SP) Se $\sec x = 4$, com $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ então $\operatorname{tg}(2x)$ é igual a:

- a) $-\frac{4\sqrt{15}}{5}$
- b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$
- c) $-\frac{2\sqrt{15}}{7}$
- d) $\frac{\sqrt{15}}{16}$
- e) $-\frac{\sqrt{15}}{7}$

31 (UEL-PR) Se $\sin x = \frac{1}{2}$ e x é um arco do 2º quadrante, então $\cos 2x$ é igual a:

- a) 1
- b) $\frac{3}{4}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $-\frac{1}{2}$
- e) $-\frac{3}{4}$

32 (Vunesp) Se $\cos x = a$ para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e assumindo que $a \neq 0$ e $a \neq 1$, o valor de $\operatorname{tg} 2x$ é:

- a) $\frac{2a^2 - 1}{2a\sqrt{1 - a^2}}$
- b) $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$
- c) $2a\sqrt{1 - a^2}$

d) $\frac{2a\sqrt{1-a^2}}{2a^2-1}$

e) $2a^2-1$

33 (Mackenzie-SP) Se $\text{tg } \alpha = 2$, então $\cos 2\alpha$ é igual a:

a) $-\frac{3}{5}$

b) $-\frac{2}{5}$

c) $-\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

34 (UFF-RJ) Simplificando a expressão

$$\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}, \text{ para } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ obtém-se:}$$

- a) $\text{sen } x$
b) 2
c) 1
d) 0
e) $\cos x$

35 (Mackenzie-SP) O valor de $\text{sen} \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{23\pi}{12}$ é:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{2}$

36 Se $\cos 36^\circ = k$, $\text{sen}^2 42^\circ - \text{sen}^2 12^\circ$ é igual a:

- a) k
b) $-k$
c) $2k$
d) $\frac{k}{2}$

37 (Unifei-SP) Simplificando-se $\frac{\cos x - \cos 5x}{\text{sen } 5x - \text{sen } x}$

tem-se:

- a) $\text{tg} 3x$
b) $\text{sen } x$
c) $\cos x$
d) $-\text{tg } 3x$

38 (Mackenzie-SP) Simplificando-se $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$ tem-se:

- a) 0
b) $\text{sen } 20^\circ$
c) 1
d) $\frac{1}{2}$

39 (FGV-SP) Sabendo-se que

$$x + y = \frac{\pi}{3} \text{ e } x - y = \frac{\pi}{2}, \text{ então, } \text{sen } x + \text{sen } y \text{ é}$$

igual a:

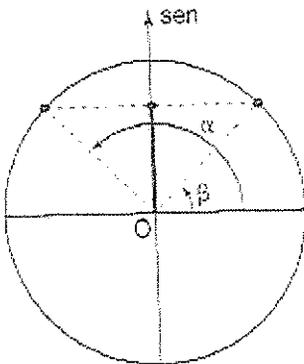
- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) 1
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\sqrt{2}$

40 (PUC-Campinas) Simplifique:

- a) $\frac{\cos a - \cos b}{\text{sen } a - \text{sen } b}$
b) $\frac{\cos 6x - \cos 2x}{\text{sen } 6x - \text{sen } 2x}$

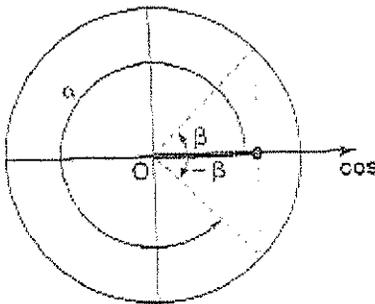
7. Trigonometria 4 Equações e Inequações Trigonométricas

1° Caso: $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$



$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2K\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2K\pi \end{cases}$$

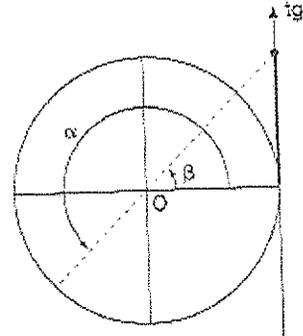
2° Caso: $\text{cos } \alpha = \text{cos } \beta$



$$\text{cos } \alpha = \text{cos } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2K\pi \\ \alpha = -\beta + 2K\pi \end{cases}$$

Observação: $\alpha = 2\pi - \beta = -\beta$

3° Caso: $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$

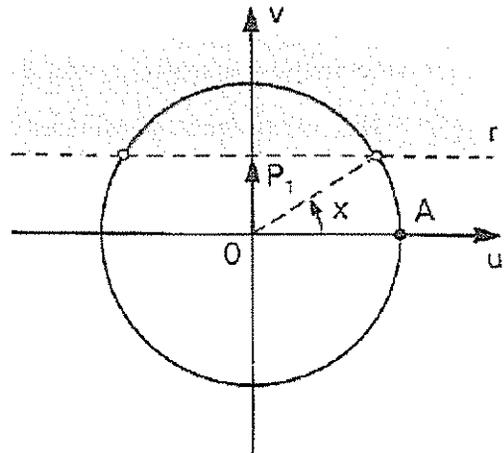


$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2K\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2K\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + K\pi$$

4° Caso: $\text{sen } x > m$

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $OP_1 = m$. Traçamos por a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\text{sen } x > m$ estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de r .

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais x pode pertencer, tomando o cuidado de partir de A e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.



Exemplo

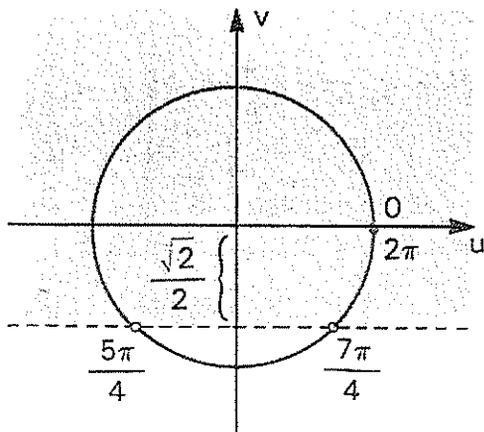
Resolver a inequação $\text{sen } x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em \mathbb{R} :

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2K\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2K\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2K\pi < x < 2\pi + 2K\pi$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / 0 + 2K\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2K\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2K\pi < x < 2\pi + 2K\pi \right\}$$

Notemos que escrever

$$\frac{7\pi}{4} + 2K\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2K\pi \text{ estaria errado pois,}$$

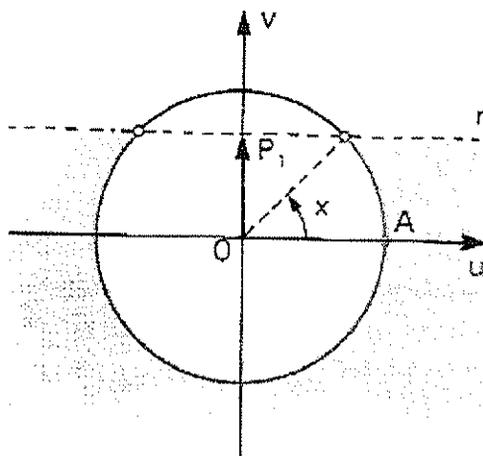
como $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$, não existe x algum neste intervalo.

5° Caso: $\sin x < m$

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal

que $OP_1 = m$. Traçamos por a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\sin x < m$ estão na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de r .

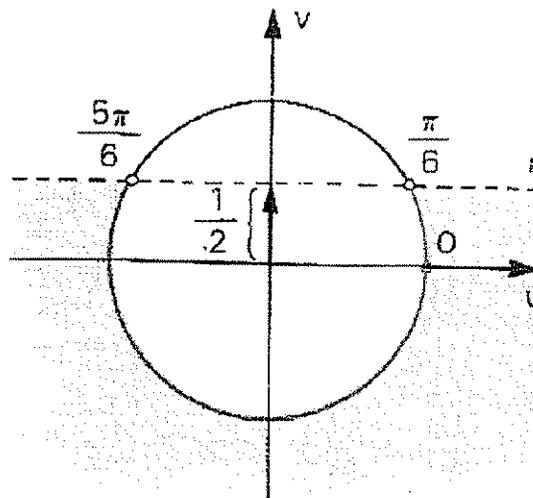
Finalmente, partindo de A e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convém ao problema.



Exemplo

Resolver a inequação $\sin x < \frac{1}{2}$, em \mathbb{R} .

Procedendo conforme foi indicado, temos:



$$0 + 2K\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2K\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2K\pi < x < 2\pi + 2K\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / 0 + 2K\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2K\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2K\pi < x < 2\pi + 2K\pi \right\}$$

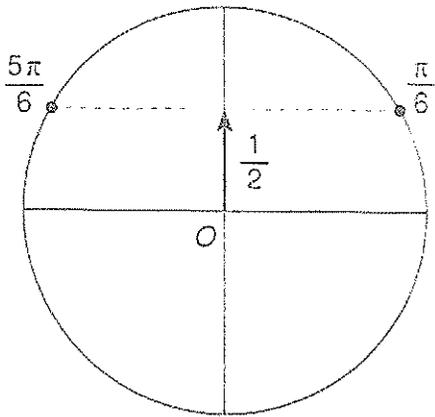


Exercícios Comentados

01 Resolva em \mathbb{R} cada equação:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

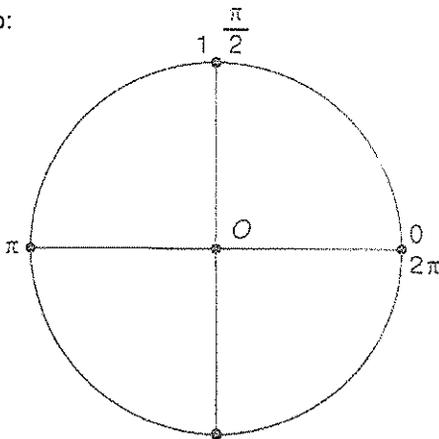
Resolução:



$$s = \left\{ x = \frac{\pi}{6} + K2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + K2\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\sin^2 x - \sin x = 0$

Resolução:



$$\sin x \cdot (\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow K\pi$$

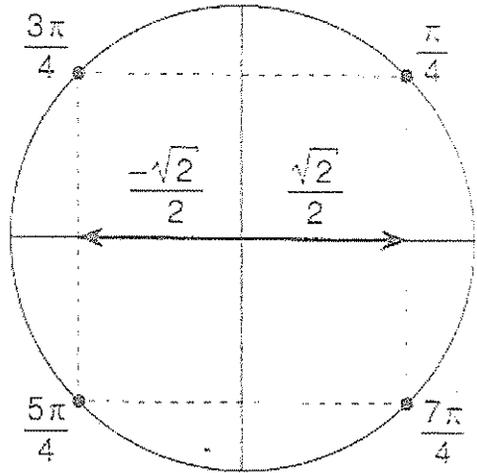
$$\sin x = 0 \text{ ou } \sin x = 1$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + K \cdot 2\pi$$

$$S = \left\{ x = K\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + K2\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $2 \cdot \cos^2 x = 1$

Resolução:



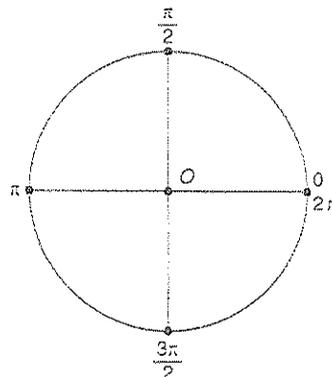
$$2 \cdot \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + \frac{K\pi}{2}; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $3 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$

Resolução:



$$\sin x = 0$$

ou

$$\cos x = 0$$

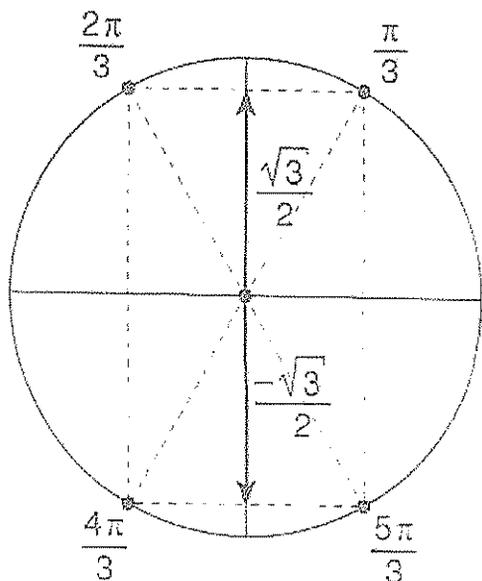
$$x = \frac{K\pi}{2}$$

$$s = \left\{ x = \frac{K\pi}{2}; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

02] Resolver a equação: $\cos 2x = 2 \cdot \text{sen}^2 x - 2$

a) no intervalo $[0, 3\pi]$

Resolução:



$$1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x = 2 \cdot \text{sen}^2 x - 2$$

$$4 \cdot \text{sen}^2 x = 3$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x \in [0, 3\pi]$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right\}$$

b) \mathbb{R}

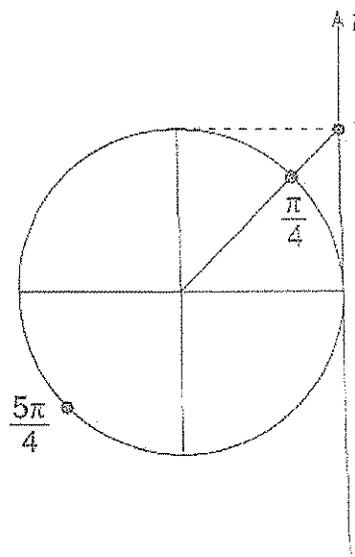
$$x \in \mathbb{R}$$

$$S = \left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + K\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

03] Resolva em \mathbb{R}

a) $\text{tg } x > 1$

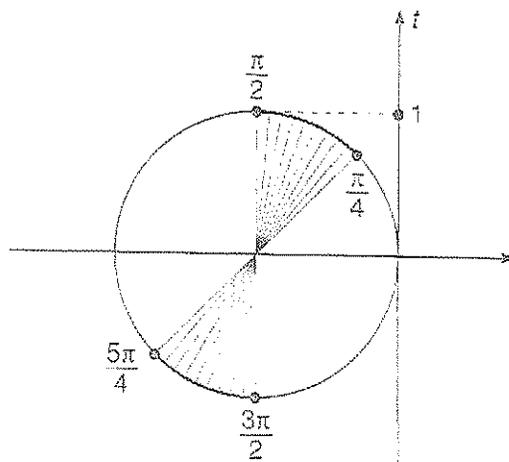
Resolução:



$$S = \left\{ x = \frac{\pi}{4} + K\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\text{tg } x > 1$

Resolução:



$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + K\pi < x < \frac{\pi}{2} + K\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$$

04) Encontrar as soluções reais da equação:

a) $\text{sen } x + \sqrt{3} \cos x = 1$

$$\text{sen } x + \sqrt{3} \cos x = 1 (\div 2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \text{sen } x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\overbrace{\cos \frac{\pi}{3}} \text{sen } x + \overbrace{\text{sen} \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + K2\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + K2\pi$$

ou

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + K2\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + K2\pi$$

$$S = \left\{ x = -\frac{\pi}{6} + K2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + K2\pi, K \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $4 \cos^2 x \text{sen } x + 2 \cos^2 x - 2 \text{sen } x - 1 = 0$ para $x \in [-\pi, \pi]$

$$4 \cos^2 x \text{sen } x + 2 \cos^2 x - 2 \text{sen } x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x (2 \text{sen } x + 1) - (2 \text{sen } x + 1) = 0$$

$$(2 \text{sen } x + 1) \cdot (2 \cos^2 x) - 1 = 0$$

$$2 \text{sen } x + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{2}$$

ou

$$2 \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

No intervalo $[-\pi, \pi]$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

No intervalo $[-\pi, \pi]$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

05) Determine o domínio da função real

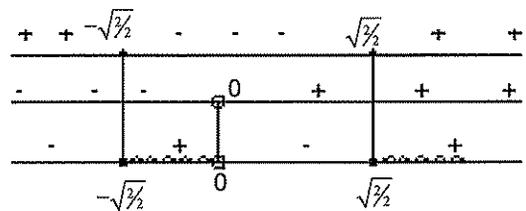
$$f(x) = \sqrt{\frac{\cos 2x}{\cos x}}, \text{ em } \mathbb{R} :$$

Resolução:

Deve-se ter $\frac{\cos 2x}{\cos x} \geq 0$ e $\frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} \geq 0$. Fazem-

do $\cos x = a, \frac{2a^2 - 1}{a} \geq 0$

Fazendo o quadro de sinais



Logo: $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$ em $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < 0$ (I)

ou

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (II)}$$

Resolvendo (I) obtemos $S_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + 2K\pi \\ \frac{5\pi}{4} + 2K\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2K\pi \end{array} \right.$

Resolvendo (II) obtemos $S_2 = \left\{ \begin{array}{l} 2K\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2K\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7\pi}{4} + 2K\pi \leq x \leq 2\pi + 2K\pi \end{array} \right.$

Como ,

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + 2K\pi \\ \text{ou} \\ \frac{5\pi}{4} + 2K\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2K\pi \\ \text{ou} \\ 2K\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2K\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7\pi}{4} + 2K\pi \leq x \leq 2\pi + 2K\pi \end{array} \right.$$



Exercícios de Sala

01) Resolva em \mathbb{R} cada equação:

a) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

b) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1$

c) $\text{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cdot \text{tg} x + \sqrt{3} = 0$

02) No intervalo $[0, 3\pi]$ a soma de todas as soluções da equação $(\text{sen} x + \cos x)^2 = 1$ é igual a:

a) 2π

b) $\frac{11\pi}{2}$

c) 7π

d) $\frac{21\pi}{2}$

e) 5π

03) (UFS) No universo $[-2\pi, 2\pi]$, conjunto solução da equação $\text{sen} x - \cos x = 0$ é:

a) $\left\{ -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

b) $\left\{ -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

c) $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

d) $\left\{ -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

e) $\left\{ -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

04) (Uece) A soma das soluções da equação $2 \cos^2 x - 2 \text{sen}^2 x - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) $\frac{11\pi}{6}$

b) 3π

c) 4π

d) $\frac{23\pi}{6}$

05) (UFPI) O número de solução da equação $\text{sen}^2 x + \cos^2 2x = 1$, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

06) (UFRGS-RS) O conjunto solução da equação $\text{sen} x + \cos x = 0$ é:

a) $\left\{ k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\left\{ k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $\left\{ 2k\pi + \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $\left\{ 2k\pi - \frac{3\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

e) $\left\{ \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

07) (Unifei-SP) Se $0 < x < 2\pi$ e $\text{sen} x > \cos x$, então:

a) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$

d) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$

08 (Fuvest-SP)

- a) Expresse $\sin 3\alpha$ em função de $\sin \alpha$.
b) Resolva a inequação $\sin 3\alpha > 2\sin \alpha$, para $0 < \alpha < \pi$

09 Resolva $\sin x + \cos x < 1$, $x \in [0, 2\pi]$

10 Resolva o sistema $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ \cos x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, em \mathbb{R} .



Exercícios de Casa

01 (MACK SP) A soma dos valores inteiros de k para que a equação $\sqrt{3} \sin x + \cos x = k - 3$ apresente soluções reais é:

- a) 7
b) 10
c) 13
d) 15
e) 20

02 (FMTM MG) No intervalo $[0, 2\pi]$, a equação

$|\cos x| = \frac{1}{2}$ tem um número de raízes igual a:

- a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

03 (MACK SP) Se $\sin(x + \pi) = \cos(\pi - x)$, então x pode ser:

- a) π
b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{3\pi}{4}$
d) $\frac{5\pi}{4}$
e) $\frac{7\pi}{4}$

04 (EsPCEx) Se $\sin^4 x = 1 + \cos^2 x$, então x pode pertencer ao intervalo:

- a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
b) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$
c) $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$
d) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$
e) $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

05 (EsPCEx) O número de soluções da equação $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \leq x < 2\pi$, é:

- a) infinito
b) 4
c) 2
d) 1
e) 0

06 Resolva as equações:

- a) $\sin x = \frac{1}{2}$
b) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\cos(2x) = -1$

07 Sabendo que $(2x - y)$ e $(3x + y)$ são arcos do primeiro quadrante, calcule x e y em graus, de modo que:

$$\begin{cases} \sin(2x - y) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}(3x + y) = \sqrt{3} \end{cases}$$

08 Resolva a equação: $\operatorname{sen}\left(6x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

09 Determine o conjunto-solução da equação:
 $\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x = -2$ no intervalo $0 \leq x < 2\pi$

10 (Vunesp) Determine todos os valores de x , $0 \leq x \leq 2\pi$, para os quais se verifica a igualdade: $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1$

11 Resolva a equação: $3 \operatorname{tg} x - 2 \cos x = 0$.

12 Resolva a equação: $\operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$ no intervalo $0 \leq x < 2\pi$

13 (UFGO) Encontre todos os valores de x tais que:
 $\log(2^{2\operatorname{sen} x} - 3 \cdot 2^{\operatorname{sen} x} + 3) = 0$

14 Resolva a equação: $\operatorname{cotg}^2(3x) + 4 \cos^2(3x) = 3$

15 Resolva a equação: $\operatorname{sen} x = \sec x - \cos x$.

16 Resolva a equação: $\sqrt{1 - \cos^2 x} + \operatorname{sen} x = 1$

17 Determine o conjunto solução da equação:
 $\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x - \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = -2$ no intervalo $[0; 2\pi]$

18 Calcule a e b pertencentes ao intervalo $[0; 2\pi]$, de modo que:

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen} a + 6 \cos b = 1 \\ 4\operatorname{sen} a - 2 \cos b = -5 \end{cases}$$

19 Determine o conjunto verdade da equação:
 $\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1$

20 Determine no intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, as raízes da equação:
 $4(\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x) = 5(\operatorname{sen} x - \cos x)$

21 Resolva o sistema: $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{2} \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases}$

22 Resolva a equação: $2 \operatorname{sen}^2 x + |\operatorname{sen} x| - 1 = 0$ no intervalo $0 < x < 2\pi$.

23 Resolva em \mathbb{R}

a) $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $|\operatorname{sen} x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $4 \cos^2 x < 3$

e) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$

e) $2 \operatorname{sen}^2 x < \operatorname{sen} x$

24 Resolva para $x \in [0, 2\pi]$

a) $\cos 2x + \cos x \leq -1$

b) $\cos 2x \geq \cos x$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

25 Resolva

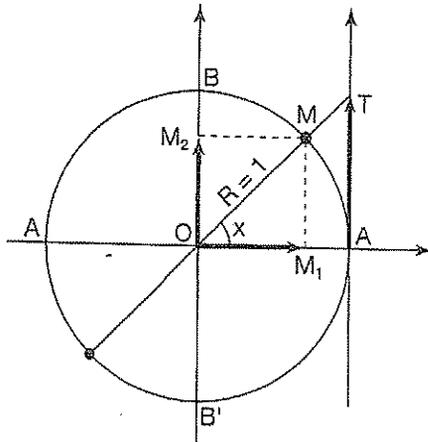
a) $\operatorname{tg}(2x + 30) \leq \sqrt{3}$

b) $\cos(3x - 15) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Trigonometria 5

Funções Trigonométricas e Funções Trigonométricas Inversas

Definições: Do ciclo trigonométrica da figura, definimos:



$\text{sen } x = \overline{OM_2}$
$\text{cos } x = \overline{OM_1}$
$\text{tg } x = \overline{AT}$

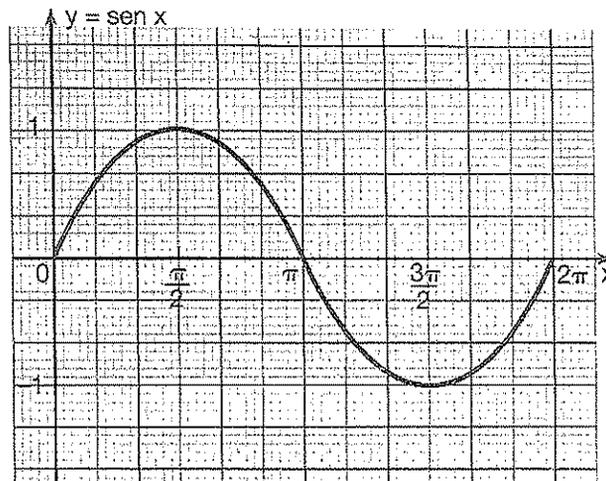
Observação:

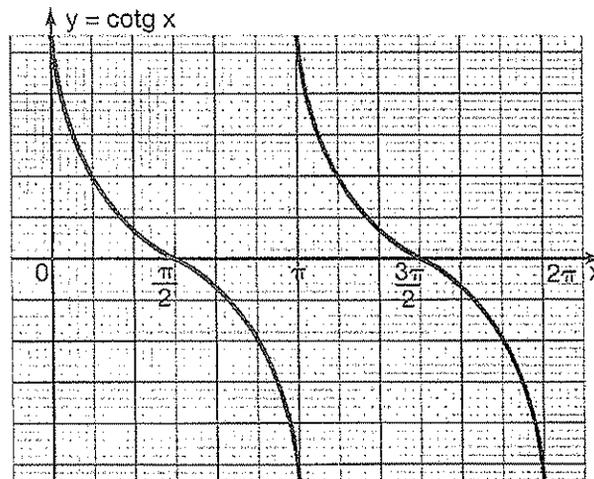
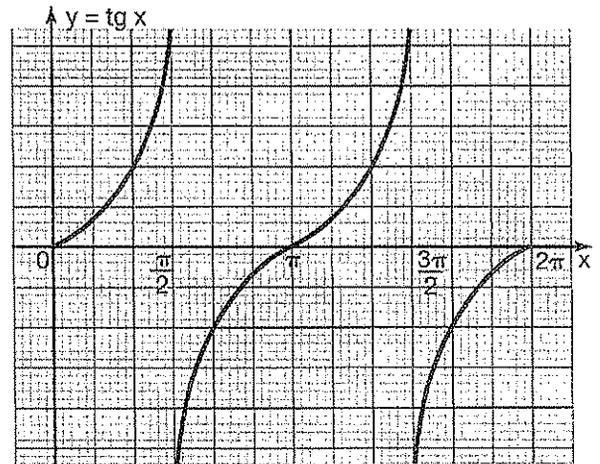
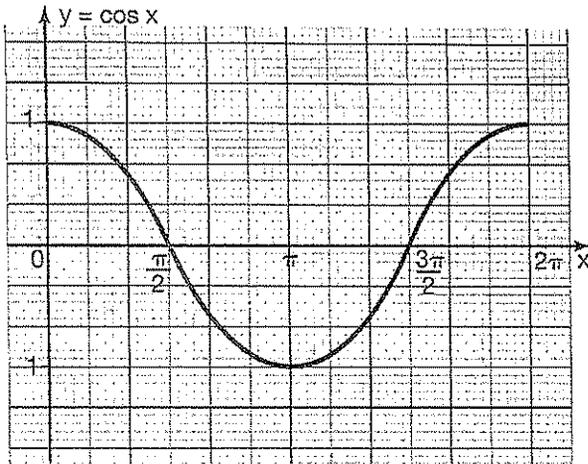
$$\text{seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos seno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

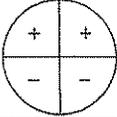
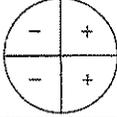
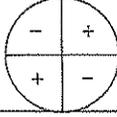
$$\text{tan gente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Gráficos





Paridade e periodicidade

Função	Par ou Ímpar	Período	Sinais	Domínio	Imagem
$\text{sen } x$	ímpar $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$	2π		\mathbb{R}	$[-1; 1]$
$\text{cos } x$	par $\text{cos } x = \text{cos}(-x)$	2π		\mathbb{R}	$[-1; 1]$
$\text{tg } x$	ímpar $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$	π		$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	\mathbb{R}

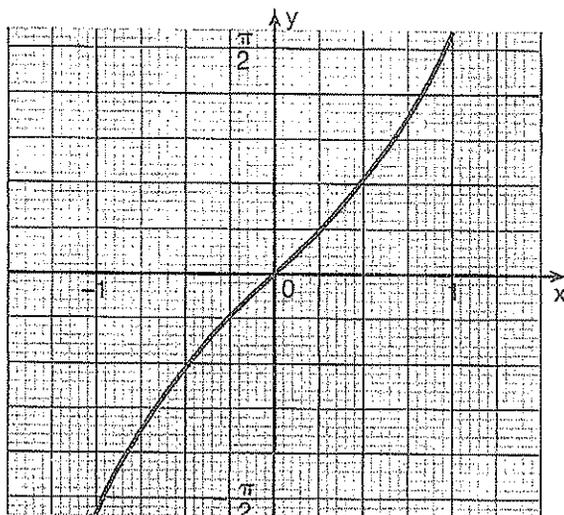
Funções Inversas

Função arco-seno

- Definição

$$y = \text{arc sen } x \Rightarrow \text{sen } y = x$$

- Gráfico



$$\text{Domínio} \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

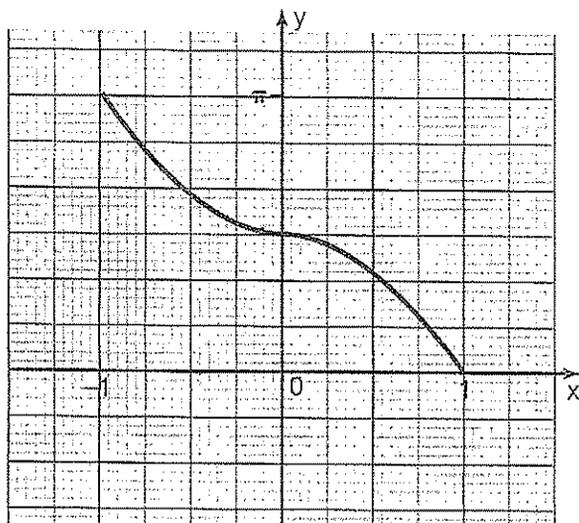
$$\text{imagem} \Rightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Função arco-cosseno

- Definição

$$y = \text{arc cos } x \Rightarrow \text{cos } y = x$$

- Gráfico



$$\text{Domínio} \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

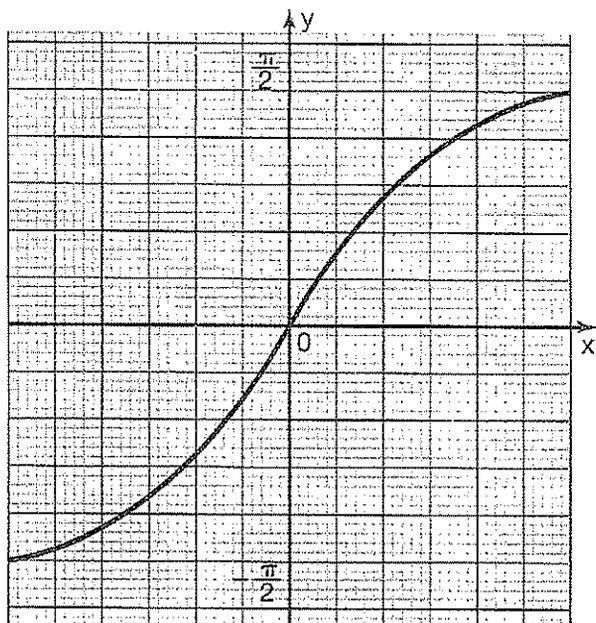
$$\text{imagem} \Rightarrow y \in [0; \pi]$$

Função arco-tangente

- Definição

$$y = \text{arc tg } x \Rightarrow \text{tg } y = x$$

- Gráfico



$$\text{Domínio} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

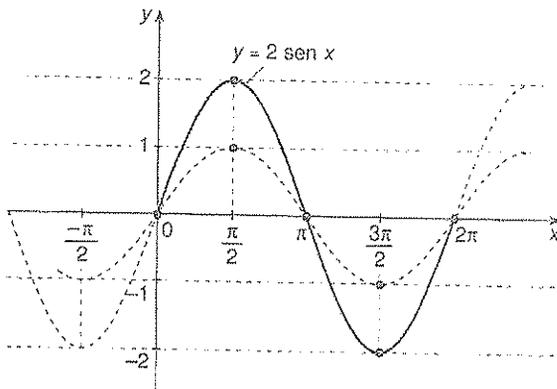
$$\text{imagem} \Rightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$



Exercícios Comentados

01 Esboce o gráfico de cada função e indique seu conjunto-imagem e período:
construa o gráfico de cada função e indique sua imagem e período:

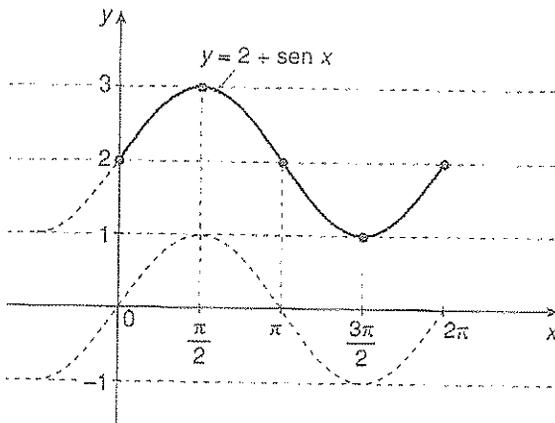
a) $y = 2 \cdot \text{sen } x$



$Im = [-2, 2]$

$P = 2\pi$

b) $y = 2 + \text{sen } x$



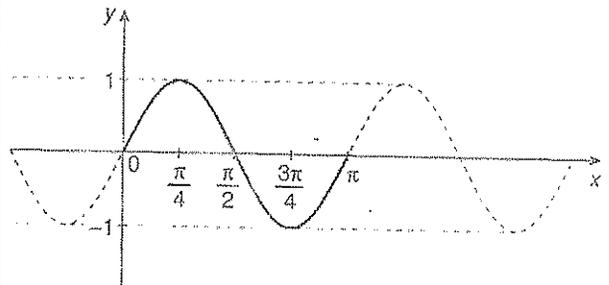
$Im = [1, 3]$

$P = 2\pi$

c) $y = \text{sen } (2x)$

$0 \leq 2x \leq 2\pi$

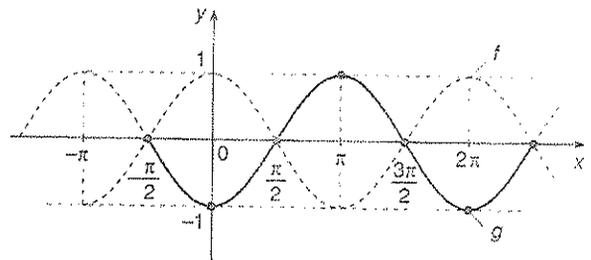
$0 \leq x \leq \pi$



$Im = [-1, 1]$

$P = \pi$

d) $y = -\text{cos } x$



$P = 2\pi$

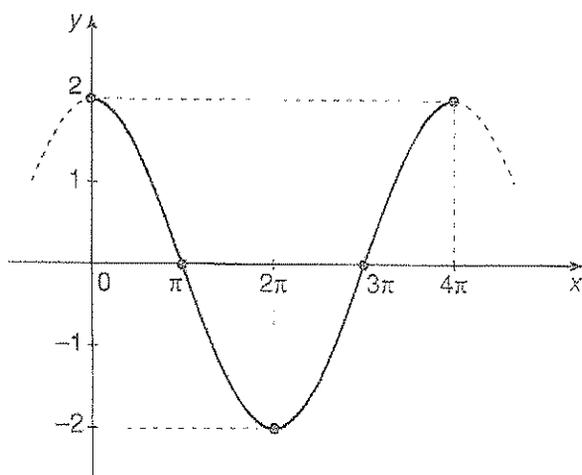
$Im = [-1, 1]$

e) $y = 2 \cdot \text{cos} \left(\frac{x}{2} \right)$

Se $0 < \frac{x}{2} < 2\pi \Rightarrow 0 < x < 4\pi$

Podemos construir a tabela:

$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$\text{cos} \frac{x}{2}$	1	0	-1	0	1
$2\text{cos} \frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2



$$P = 4\pi$$

$$Im = [-2, 2]$$

02 Determine o conjunto imagem e o período da função f cada por

$$f(x) = (3 \cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x)(2 \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x)$$

Resolução:

$$f(x) = 3 \cdot 2(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)\cos 2x - \operatorname{sen} 2x$$

$$f(x) = 6(\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x)$$

$$f(x) = 6 \cos 4x$$

Assim, temos

$$P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

03 Indique os valores máximo de cada função:

a) $f(x) = 5\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x$

Resolução

$$f(x) = 5\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x)$$

$$f(x) = 8\cos^2 x - 3$$

$$\text{Como } 0 \leq \cos^2 x \leq 1, -3 \leq f(x) \leq 5$$

Portanto:

· valor mínimo: -3

· valor máximo: 5

b) $f(x) = 4^{\operatorname{sen} x \cos x}$

$$f(x) = 2^{2 \operatorname{sen} x \cos x}$$

$$f(x) = 2^{\operatorname{sen} 2x}$$

Como $-1 \leq \operatorname{sen} 2x \leq 1, 2^{-1} \leq f(x) \leq 2^1$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$$

Portanto,

· valor mínimo: $\frac{1}{2}$

· valor máximo: 2

04 (Vunesp) No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, neste hospital, no ano de 2001, este número, de janeiro ($t = 0$) a dezembro ($t = 11$), seja dado aproximadamente pela expressão $S(t) = \lambda -$

$\cos \left[\frac{(t-1)\pi}{6} \right]$ com λ uma constante positiva, $S(t)$ em

milhares e t em meses, $0 \leq t \leq 11$. Determine:

a) A constante λ , sabendo que no mês de fevereiro houve duas mil doações de sangue.

Resolução:

2 mil doações $\rightarrow S(t) = 2$ (para $t = 1$)

Substituindo na expressão,

$$2 = \lambda - \underset{\downarrow}{\cos 0}$$

$$\therefore \lambda = 3$$

b) Em que meses houve três mil doações de sangue.

Resolução:

Para $S(t) = 3$, temos:

$$3 = 3 - \left[\cos \frac{(t-1)\pi}{6} \right]$$

$$\cos \left[\frac{(t-1)\pi}{6} \right] = 0$$

$$\frac{(t-1)\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \leq t \leq 11 \text{ e } k \in \mathbb{Z}$$

se $k = 0 \rightarrow t = 4$ (maio)

se $k = 1 \rightarrow t = 10$ (novembro)

Portanto, houve três mil doações nos meses de maio e novembro.

05 Calcule $\cos \left(\arcsen \frac{3}{5} + \arcsen \frac{5}{13} \right)$

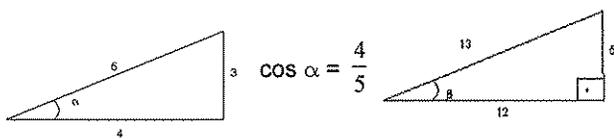
Resolução:

$$\alpha = \arcsen \frac{3}{5} \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\beta = \arcsen \frac{5}{13} \rightarrow \text{sen } \beta = \frac{5}{13}$$

Temos:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta.$$



$$\cos \beta = \frac{12}{13}$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{33}{65}$$



Exercícios de Sala

01 (Ufes) O período e a imagem da função

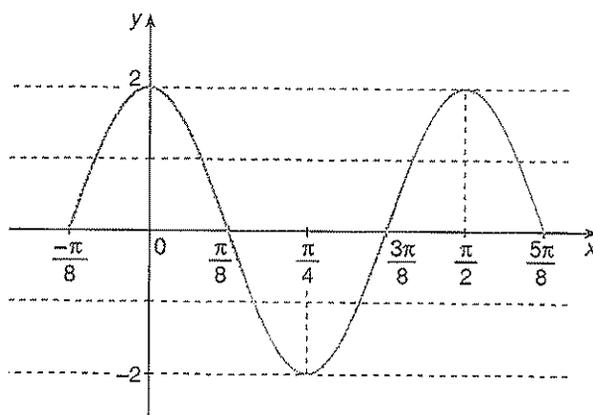
$$f(x) = 5 - 3\cos \left(\frac{x-2}{\pi} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{são, respectivamente:}$$

- a) $2\pi e[-1,1]$
- b) $2\pi e[2,8]$
- c) $2\pi^2 e[2,8]$
- d) $2\pi e[-3,3]$
- e) $2\pi^2 e[-3,3]$

02 (Ufam) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \cos 2x + \text{sen } 4x \text{sen } 2x$. Seu período em radianos é:

- a) $\frac{3\pi}{2}$
- b) $\frac{\pi}{2}$
- c) 2π
- d) π
- e) $\frac{\pi}{3}$

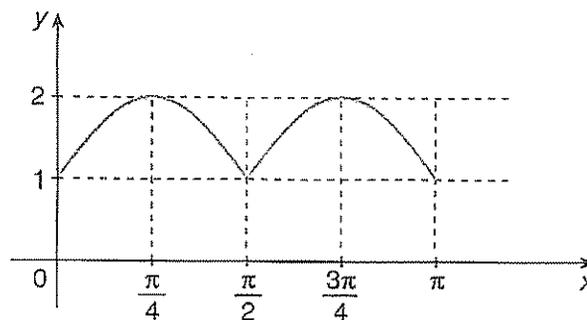
03 (FCC-SP) Na figura seguinte tem-se parte do gráfico da função definida por $y = a \cdot \cos bx$.



Os números a e b são tais que:

- a) $|b| = 2a$
- b) $a = 2b$
- c) $a + b = 3$
- d) $a \cdot b = 6$
- e) $a - b = 1$

04 (Fuvest - SP) A função que melhor se adaptar ao gráfico é:



a) $y = |1 + \sin x|$

b) $y = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$

c) $y = 1 + \cos 2x$

d) $y = \sin x + \cos x$

e) $y = 1 + |\sin 2x|$

05 (Uece) O conjunto imagem da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3\sin^2 x - 5\cos^2 x$, isto é, o conjunto $\{y \in \mathbb{R} = y = f(x), \text{ para algum } x \in \mathbb{R}\}$, é o intervalo:

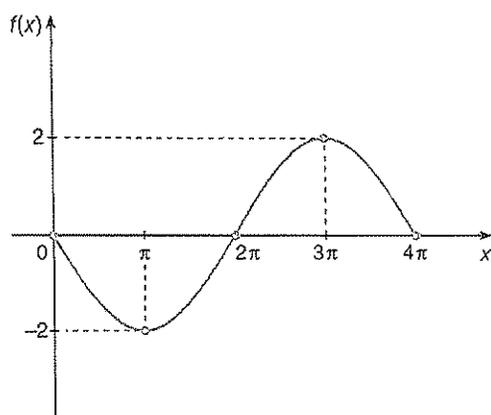
a) $[-6, 2]$

b) $[-5, 3]$

c) $[-5, 5]$

d) $[-2, 4]$

06 (UFRRJ) Analise o gráfico abaixo.



A função $f: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ter como gráfico o desenho acima é $f(x)$ igual a:

a) $-2\sin(2x)$

b) $4\sin(3x)$

c) $-3\sin(2x)$

d) $-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

07 (Mackenzie-SP) O menor valor que y pode assumir na igualdade $y = \cos x + \cos 2x$ é:

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{7}{8}$

c) -1

d) $-\frac{9}{8}$

e) $-\frac{7}{4}$

08 (Uerj) O preço dos produtos agrícolas oscila de acordo com a safra de cada um: mais baixo no período de colheita, mais alto na entressafra. Suponha que o preço aproximado p , em reais, do quilograma de tomates seja dado pela função

$$P(t) = 0,8 \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{360}(t - 101)\right] + 2,7, \text{ na qual } t \text{ é o}$$

número de dias contados de 1^{a} de janeiro até 31 de dezembro de um determinado ano. Para esse período, calcule:

a) O maior e o menor preço do quilograma de tomates.

b) Os valores de t para os quais p seja igual a R\$ 3,10.

09 (Vunesp) A temperatura, em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$) de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, é dada aproximadamente pela função

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right), 0 \leq t \leq 24, \text{ com } t \text{ dado em horas.}$$

Determine:

a) A temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas. (Use as aproximações $\sqrt{2} \approx 1,4$ e $\sqrt{3} \approx 1,7$.)

b) Em quais horários do dia a temperatura atingiu 0°C .

10 (Cefet-PR) A função real $f(x) = a + b \sin cx$ tem imagem igual a $[-7, 9]$ e seu período é $\frac{\pi}{2}$ rad. Assim, $a + b + c$ vale:

a) 8

b) -4

c) 10

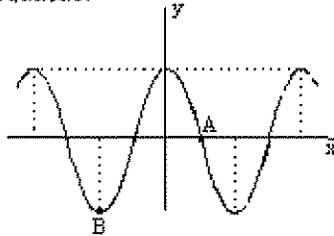
d) 13

e) 9



Exercícios de Casa

- 01 (PUC SP) Na figura a seguir tem-se parte do gráfico da função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definida por $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, no qual estão destacados os pontos A e B. Os pontos A e B pertencem à reta de equação:



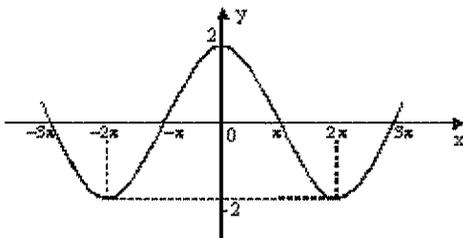
- a) $x - 3\pi y - \pi = 0$
 b) $x + 3\pi y - \pi = 0$
 c) $x - 3\pi y + \pi = 0$
 d) $2x + 3\pi y - \pi = 0$
 e) $2x - 3\pi y - \pi = 0$

- 02 (MACK SP) Relativamente à função real definida por $f(x) = 3 + 2 \sin 3x$, considere as afirmações:
 I. Não existe x tal que $f(x) < 0$
 II. O maior valor que $f(x)$ pode assumir é 5.
 III. O seu período é $\frac{2\pi}{3}$.
 IV. Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a soma das soluções reais da equação $f(x) = 3$ é $\frac{\pi}{3}$.

O número de afirmações corretas é:

- a) 0
 b) 1
 c) 2
 d) 3
 e) 4

- 03 (PUCCampinas SP) Na figura abaixo tem-se parte do gráfico da função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , dada por $f(x) = k \cdot \cos tx$.



- 04 Nessas condições, calculando-se $k - t$ obtém-se:

- a) $-\frac{3}{2}$
 b) -1
 c) 0
 d) $\frac{3}{2}$
 e) $\frac{5}{2}$

- 05 (EsPCEEx) O domínio e a imagem da função

$$f(x) = \frac{1}{5 - \sin x} \text{ são, respectivamente:}$$

- a) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $[-1, 1]$
 b) \mathbb{R} e $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$
 c) \mathbb{R} e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$
 d) \mathbb{R}^* e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$
 e) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$

- 06 (EsPCEEx) Se $z = \frac{2 - 3 \sin x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em:

- a) $-2 \leq z \leq -1$
 b) $-1 \leq z \leq -\frac{1}{4}$
 c) $-\frac{1}{4} \leq z \leq \frac{5}{4}$
 d) $0 \leq z \leq \frac{3}{2}$
 e) $\frac{1}{4} \leq z \leq 2$

- 07 (UNIUBE) Medindo-se t em horas e $0 \leq t < 24$, a sirene de uma usina está programada para soar em cada instante t , em que $\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ é um número inteiro. De quantas em quantas horas a sirene da fábrica soa?

- a) De seis em seis horas.
- b) De quatro em quatro horas.
- c) De três em três horas.
- d) De oito em oito horas.

07 (ITA) Seja S o conjunto de todas as soluções reais

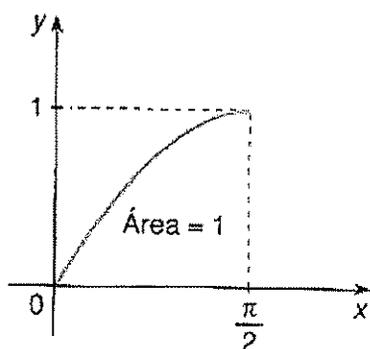
da equação $\sec \left[\arctg \frac{1}{1+e^x} - \arctg(1-e^x) \right] = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Então:

- a) $S = \emptyset$
- b) $S = \mathbb{R}$
- c) $S \subset [1, 2]$
- d) $S \subset [-1, 1]$
- e) $S = [-1, 2[$

08 (Uerj) O aluno que estudar cálculo poderá provar com facilidade, que a área da superfície plana limitada

pelo ráficos de $f(x) = \sin x$ e $f(x) = 0$, no intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, como ilustra o gráfico abaixo, é igual a 1

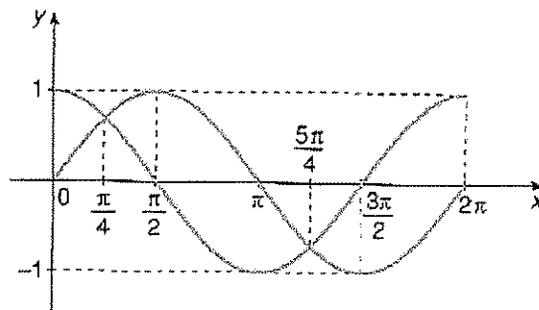


A partir dessa informação, pode-se concluir corretamente que a área limitada pelos gráficos de $f(x) = \cos x$ e $f(x) = 0$, no intervalo

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, é:

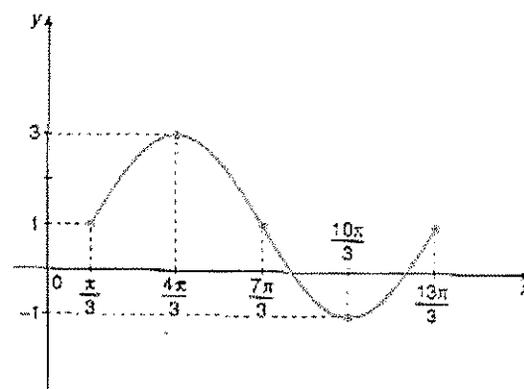
- a) 0
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

09 (UEPB) As funções seno e cosseno são representadas, respectivamente, por duas curvas chamadas de senóide e cossenóide. De acordo com o gráfico abaixo, os valores de x que satisfazem a desigualdade $\sin x > \cos x$ são:



- a) $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$
- b) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$
- c) $x < \pi$
- d) $x > \pi$
- e) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

10 (PUC-PR) A figura a seguir mostra parte de uma onda senoidal que foi isolada para uma pesquisa:



Qual das alternativas melhor representa a equação da onda para o período apresentado?

- a) $y = 1 + 2\text{sen} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$
- b) $y = 1 + 2 \text{sen} \left(\frac{x}{2} \right)$

c) $y = 1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

e) $y = 1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{6}\right)$

11 (UEPB) O período da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos 7x \cdot \cos 3x + \text{sen } 7x \cdot \text{sen } 3x$ é:

a) $\frac{2\pi}{7}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{8}$

12 (Mackenzie-SP) O período da função $y = (\cos 2x + \text{sen } 2x)\cos 2x - \text{sen } 2x$ é:

a) 2π

b) π

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{8}$

13 Calcule o domínio da função $y = \text{arc sen } \frac{x^2 - 1}{2}$.

14 (PUC-SP) Se $x = \text{arc tg } -\frac{\sqrt{3}}{3}$, então:

a) $x = \frac{11\pi}{6}$

b) $x = \frac{11\pi}{3}$

c) $x = -\frac{\pi}{6}$

d) $x = -\frac{\pi}{3}$

15 (Mack-SP) O valor de

$$\text{tg}\left(5 \text{arc tg } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \text{arc sen } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
 pode ser dado

por:

a) 0

b) 1

c) -1

d) $-\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

16 (FEI-SP) O valor de

$$\cos\left(\text{arc sen } \frac{1}{4} + \text{arc cos } \frac{1}{2}\right)$$
 é:

a) $\frac{2\sqrt{15} - \sqrt{13}}{16}$

b) $\frac{16 - \sqrt{3}}{2\sqrt{15}}$

c) $\frac{\sqrt{15} - 16}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$

e) n.r.a

17 (PUC-PR) Se $\text{arc tg}(x+2) + \text{arc tg } x = \frac{3\pi}{4}$,

então x^2 vale:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

18 (UEPG-PR) Os valores de x que satisfazem a igual-

dade $\text{arc sen} \left(\frac{\sqrt{3x-1}}{2} \right) = \text{arc tg } x$ são:

- a) 1 e 3
- b) -1 e 2
- c) 1 e 2
- d) 1 e -2

19 (Unifor-CE) Se $\alpha = 2 \text{ arc cos} \left(-\frac{1}{2} \right)$, então $\text{tg } \alpha$ é

igual a:

- a) $-\sqrt{3}$
- b) -1
- c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- e) $\sqrt{3}$

20 A função real, definida por $f(x) = k \cos(px)$. $K > 0$ e $p > 0$. tem período 7π e conjunto-imagem $[-7,7]$. então, $k \cdot p$ vale:

- a) 2
- b) $\frac{2}{7}$
- c) 14
- d) 7
- e) $\frac{7}{2}$

21 Seja a função definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. tal que $f(x) = \text{sen } x \cos x$. O conjunto-imagem de f é o intervalo:

- a) $[-1,1]$
- b) $[-2,2]$
- c) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$
- d) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$
- e) $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$

22 Relativamente à função real definida por $f(x) = 3 + 2 \text{ sen } 3x$, considere as afirmações:

I) Não existe x , tal que $f(x) < 0$

II) O seu período é $\frac{2\pi}{3}$

IV) Em $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, a soma das soluções reais da

equação $f(x) = 3$ é $\frac{\pi}{3}$

O número de afirmações corretas é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

23 Um objeto desloca-se de tal modo que sua posição x em função do tempo t é dada pela função

$x(t) = 4 \cos \left(2t + \frac{\pi}{2} \right)$, onde t é dado em segundos e

x , em metros. Acerca desse movimento são feitas as seguintes afirmações:

- I) No instante $t = 0$ o objeto ocupa a posição $x = 4$ m
- II) O valor máximo que a posição x pode assumir é 5 m
- III) O valor mínimo que a posição x pode assumir é -4 m
- IV) O móvel passa pela posição $x = 4$ nos tempos

$t = h\pi - \frac{\pi}{4}$, com $h = 1, 2, 3, \dots$

Estão corretas:

- a) I e III
- b) II e IV
- c) I e II
- d) II e III
- e) III e IV

24 Dada a função real de variável real definida por

$f(x) = \frac{\pi}{3} - 2 \text{ arc cos}(x+1)$

- a) determine o domínio e a imagem da função;
- b) resolva a equação $f(x) = 0$

25 Dado $y = \cos \left[2 \text{ arc sen} \left(\frac{3}{5} \right) \right]$, calcule o valor de 25 y .

Gabarito

1. Função Modelar

Sala

- 01. FV FVF
- 02. b
- 03. a
- 04. b
- 05. c
- 06. e
- 07. {-1, 1, 3, 5}
- 08. a) se $x < 10$ $f(x) = 0$
se $x \geq 0$ $f(x) = 2x$
{-1, -3}
- 09. $x \leq -1$ em $x \geq 2$
- 10. $1 < x < 3$

Casa

- 01. {-2, -1, 1, 2}
- 02. {1}
- 03. {1}
- 04. $-1 \leq x < 0$ ou $0 < x < 1$
- 05. $1 < x < 3$
- 06. $S = \emptyset$
- 07. a) $\{11/4\}$ b) $\frac{3}{2} < x < 2$ c) $x \leq 5/4$
- 08. $E = x^2 + 8$
- 09. a) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$
b) Se $x \geq 0$, $f(x) = x + x + 1 = 2x + 1$
Se $x \leq 0$, $f(x) = x - x + 1 = 1$

Portanto, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

- c)
- d)
- e)

f) $\begin{array}{c|c} x & y = x - 5 \\ \hline 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{array}$

$f(x) = |x - 5|$

inicialmente vamos fazer o gráfico de $y = x - 5$ e depois basta "rebrater" com simetria as partes do gráficos que estão abaixo do eixo Ox.

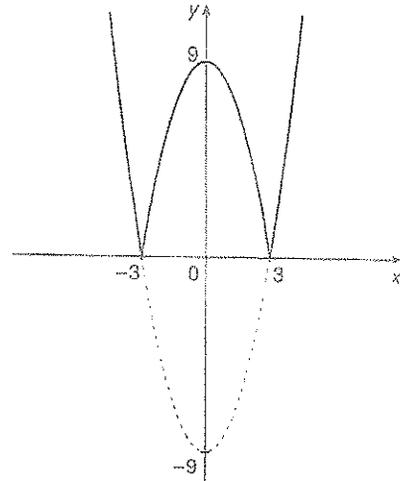
g)

Inicialmente, vamos fazer o gráfico de $y = x^2 - 9$.

Raízes: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Vértice: $x_V = 0$

$y_V = f(x_V) = f(0) = -9$



Depois de feito o gráfico de $y = x^2 - 9$ é só "rebrater" com simetria as partes do gráfico que estão abaixo do eixo Ox.

- 10. c
- 11. e
- 12. e
- 13. d
- 14. b
- 15. a
- 16. d
- 17. b
- 18. d
- 19. b
- 20. a

2. Função Exponencial

Sala

- 01. a) 2^4 b) 7
- 02. 10-5

03. $\frac{a^6}{b^2}$

04. $\frac{82}{3}$

- 05. a) $1 \leq x \leq 2$ b) $2\sqrt{2}$
- 06. a) $1/6$ b) -4,3
- 07. 0,2
- 8. 0
- 09. 2,4
- 10. $a \leq -1$ ou $a \geq 0$

11. 10800
12. 80
13. 10

14. a) $\alpha = 54$ $\beta = \frac{-1}{90}$

b) 360

15. a = 4
k = 2048

Casa

01. 0
02. 1
03. 0,1
04. 3/2
05. 384
06. 1
07. (-3,1), (-2,0)
08. $0 \leq x \leq 1$
09. $x < 3$
10. $0 < x \leq 1$ ou $\frac{12}{7} \leq x < 2$
11. $x > 1$
12. a
13. c
14. a
15. b
16. d
17. d
18. e
19. b
20. c
21. 575
22. a) 552
b) 300, sim
23. 60%
24. a) a = 800
b = 1/2
b) 5
25. 25
26. a
27. 2h

3. Função Logarítima

Sala

01. a
02. d
03. b
04. b
05. e
06. e
07. d
08. e
09. c
10. d
11. a) 1m, 10 cm
b) 20 cm

12. a) 1000
b) 7 anos
13. a) 22,5 °C
b) 15 min
14. 23 anos
15. 3000 m

Casa

01. c
02. cqd
03. $y = \log_p \frac{1-x}{x}$
04. -2
05. 6
06. -5
07. $x > 5$
08. 1,3
09. {10,000}
10. {81}
11. 28/5
12. $\frac{20}{19}$
13. {10,100}
14. \emptyset
15. {16}
16. a) $\frac{1}{4} < x < \frac{5}{4}$
b) $1 < x \leq 2$
17. $-2 \leq x < 0$ ou $0 < x \leq 4$
18. $3 < x < 4$
19. $0 < x < \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2} < x < 2$
20. a) $0 < x < \frac{\sqrt{10}}{100}$ ou $x > 100$
b) $1 \leq x \leq 25$
c) $2 < x < 4$
21. a
22. b
23. 15/7
24. a) $(t) = = F. (0,8)^t$
b) 15
25. a) $t = 1 \rightarrow A: 2000; B: 3000$
 $t = 7 \rightarrow A: 6000; B: 5000$
b) $t = 3$. cidade A

4. Trigonometria 1

01. c
02. c

03. c

04. b

05. 6

06. a) 5 km b) $5\sqrt{3}$ km c) 30km/h

07. d

08. $2\sqrt{13}$

09. e

10. $5\sqrt{2}$

Casa

01. d

02. a

03. c

04. $AB = 4\sqrt{6}$

$$R = 4\sqrt{3}$$

05. c

06. e

07. $x = 3\sqrt{3}$

$$y = 9 - 3\sqrt{3}$$

08. $50\sqrt{3}$

09. $h = 60$

10. $600(3 - \sqrt{3})$

11. $2\sqrt{2}$

12. 75

13. $\frac{3}{4}$

$$14. x = \frac{d}{\cos \frac{x}{2}}$$

15. $\sqrt{3}$

16. 88

17. 15

18. 30°

19. $10\sqrt{129}$ ou 70

20. a) $1/9$ b) Não existe

21. 400

22. a) $6\sqrt{3}$

$$b) 4\sqrt{3}$$

23. $\frac{3\sqrt{5}}{5} e \frac{6\sqrt{5}}{5}$

24. $50\sqrt{3}$

5. Trigonometria 2

Sala

01. $\frac{10\pi}{9}m$

02. c

03. c

04. c

05. c

06. c

07. d

08. e

09. b

10. b

Casa

01. d

02. b

03. e

04. b

05. a

06. b

07. c

08. d

09. a) $\sqrt{3}/3$

$$b) \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}$$

10. $52^\circ 30'$

11. a) 80 b) -70 c) $\pi/4$ d) $-\pi/2$

12. $\pi/3, 5\pi/6, \frac{4\pi}{3}, 4\pi/6$

13. 12π

14. b

15. c

16. a

17. c

18. a

19. d

20. b

21. a

22. c

23. e

24. a

6. Trigonometria 3

Sala

01. $5/16$

02. $m = 4/5$ ou -1

03. b

04. b

05. a

06. c

07. a

08. c
09. b
10. tg x

Casa

01. $x = -1$
02. a) $3/13$
b) -1 ou 3
03. a) 150°
b) $-1/4$
04. tg x

05. $\frac{\sqrt{2}}{72}$

06. 12
07. a) c7d
b) c 7 d

08. $\frac{1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$

09. a) -1
b) $-1/2$
10. $-\cot x$

11. $\frac{-8\sqrt{15}}{3}$

12. 15
13. a) $4/5$

b) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$

14. a) $3/5$
b) $-56/85$
15. d
16. d
17. c
18. $1/5$ e $1/10$
19. d
20. d
21. c
22. a
23. b
24. a
25. c
26. c
27. a
28. e

29. $\pi + \frac{\pi}{4}, k$

30. e
31. c
32. d
33. a

34. b
35. d
36. d
37. d
38. a
39. a

40. a) $-\text{tg} \left(\frac{a+b}{2} \right)$
b) $-\text{tg} 4x$

7. Trigonometria 4

Sala

01. c
02. c
03. d
04. c
05. a
06. a
07. d
08. b
09. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
10. $2k\pi + \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Casa

01. b
02. a
03. c
04. c
05. b
06. b
07. a) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + k\pi$
b) $\frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
08. a) $15 + 90k$
b) $20 + 120k$ ou $-10 + 120k$
09. $\frac{\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7}$ ou $\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{5}$
10. $\pi/2$

11. $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

12. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

13. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{1}, \frac{7\pi}{4}$

14. $\frac{\pi}{23} + 2k\pi$ ou $k\pi$

15. $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$

16. $k\pi$ ou $\frac{\pi}{4} + k\pi$

17. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

18. \emptyset

19. $a = 3\pi/2$
 $b = \pi/3$ ou $2\pi/3$

20. $2k\pi$ ou $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

21. $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}$

22.

23. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

24. $2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

25.

26.

8. Trigonometria 5

Função Trigonométrica e Função Trigonométrica

Inversas

Sala

01. c

02. d

03. a

04. e

05. b

06. d

07. c

08. a) R\$1,90 e R\$3,50

b) 131 ou 251 dias

09. a) 0,35 e $-0,7^\circ\text{C}$ respec. às 2h e 9h

b) 0,8, 16 e 24h
10. d

Casa

01. c

02. c

03. c

04. c

05. c

06. c

07. c

08. b

09. c

10. b

11. a

12. c

13. c

14. $D = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

15. c

16. c

17. d

18. c

19. c

20. d

20. a

21. c

22. e

23. e

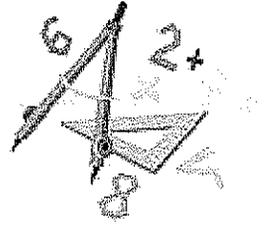
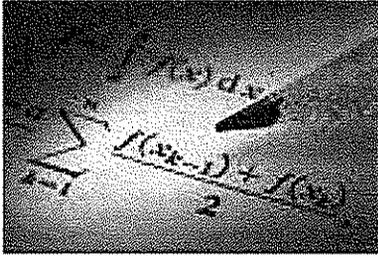
24. a) $\frac{-2\pi}{3}, -\pi$

$$D = [-2, 0]$$

b) $\text{Im} = \left[\frac{-5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$

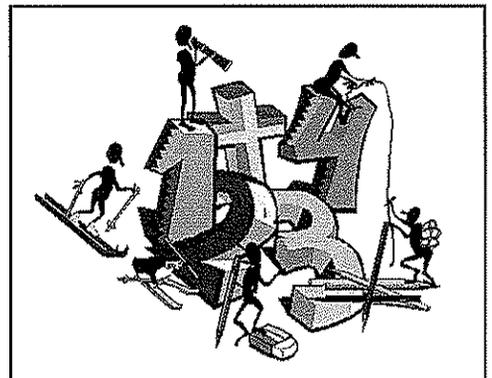
c) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

25. 7



MATEMÁTICA 2

CADERNO 2



01 . Analise Combinatória _____	80
02. Probabilidade _____	87
03. Geometria Plana e de Posição polígonos _____	95
04. Geometria Espacial geométrica de posição espacial _____	101
05. Geometria Espacial (poliedros) _____	117
06. Pirâmides e cones _____	127
07. Cilindros, Esfera e Troncos _____	137
Gabarito _____	147

1. Fatorial

Define-se fatorial de n através da expressão:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em que: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1 \\ n! \text{ lê-se: } n \text{ fatorial ou fatorial de } n \end{cases}$

Adotam-se as seguintes definições especiais:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

2. Número binomial

Denomina-se **número binomial** todo número defi-

nido por:
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Em que: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \text{ e } p \in \mathbb{N} \\ n \geq p \end{cases}$

Se $n < p$, então, por definição $\binom{n}{p} = 0$.

3. Princípio fundamental da contagem

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:

p_1 é o número de possibilidades da 1ª etapa

p_2 é o número de possibilidades da 2ª etapa

⋮

⋮

⋮

p_k é o número de possibilidades de k -ésima etapa, então: $p_1 \cdot p_2 \dots p_k$ é o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer.

4. Arranjos simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$).

Denomina-se **arranjo simples** dos n elementos de B , tomados p a p , qualquer agrupamento de p elementos distintos, escolhidos entre os elementos de B ($p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$).

Indica-se:

$$A_{n,p} \text{ ou } A_n^p$$

Observação:

Arranjo é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro pela **natureza** dos elementos componentes.

Fórmula do número de arranjos

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$$

Ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

5. Combinações simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$).

Denomina-se **combinação simples** dos n elementos de B , tomados p a p , qualquer subconjunto de p elementos do conjunto B .

Indica-se:

$$C_{n,p} \text{ ou } C_n^p$$

Observação:

Combinação é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro apenas pela **natureza** dos elementos componentes.

Fórmula das combinações simples

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

6. Permutações simples

Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$).

Denomina-se **permutação simples** dos n elementos de B , todo arranjo dos n elementos de B tomados n a n .

Indica-se:

$$P_n = A_{n,n}$$

Observação:

Permutação é o tipo de agrupamento ordenado no qual, em cada grupo, **entram todos** os elementos.

Fórmula das permutações simples

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

7. Permutações com elementos repetidos

O número de permutações possíveis com n elementos, dentre os quais um certo elemento se repete α vezes, é igual ao fatorial de n dividido pelo fatorial de α .

$$p_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!}$$

Se tivermos n elementos, dos quais:

α são iguais a A

β são iguais a B

γ são iguais a C

O número de permutações distintas dos n elementos será

$$p_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$$



Exercícios Comentados

01 De um grupo de 12 presidentes de clubes de futebol de um certo estado, 3 serão escolhidos para representar esse estado junto à federação nacional.

a) De quantas maneiras diferentes pode ser escolhida a comissão?

b) De quantas maneiras diferentes pode ser escolhida essa comissão, se houver um presidente, um vice-presidente e um secretário?

Resolução:

a) Nesse caso, os elementos da comissão não têm cargos. Portanto, escolhidos 3 elementos, eles formam uma única comissão. Trata-se, portanto, de um problema de combinações.

O número de maneiras de serem escolhidas as comissões será dado por:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

a) Nesse caso, os ocupantes da comissão têm cargos diferentes. Com as mesmas três pessoas podem ser formadas comissões distintas. Veja:

Presidente	Vice	Secretário
A	B	C
B	A	C
C	B	A

Logo, a ordem dos elementos deve ser levada em conta. Trata-se de um problema de arranjos. O número de situações distintas será dado por:

$$A_{12,3} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

02 Um grupo de 10 rapazes deve ser dividido em dois grupos de 5 para disputar uma partida de futebol de salão. Se, entre os 10 jogadores, há dois craques que devem pertencer ao mesmo time, de quantas maneiras diferentes pode ser feita a separação? Suponha que cada jogador possa atuar em qualquer situação.

Resolução:

Como os jogadores são polivalentes (jogam em qualquer posição), podemos considerar um time como sendo um subconjunto com 5 elementos. Logo, trata-se

de um problema de combinações. Coloquemos então cada um dos dois craques em cada time:

A — — — — B

Para completar o primeiro time, devemos escolher 4 jogadores entre os 8 restantes, sem se importar a ordem. O número de maneiras diferentes de se fazer tal escolha é:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

Para cada subconjunto de 4 jogadores que completar o 1º time, restam, automaticamente, 4 para completar o 2º time. Portanto, o número de maneiras de se fazer a separação do grupo em dois times, nas condições propostas, é: $C_{8,4} = 70$.

03 (Mackenzie) 6 refrigerantes diferentes devem ser distribuídos entre 2 pessoas, de modo que cada pessoa receba 3 refrigerantes. O número de formas de se fazer isso é:

- a) 12
- b) 18
- c) 24
- d) 15
- e) 20

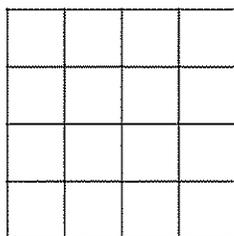
Resolução

$$\frac{6!}{3!3!} = 20 \cdot 1 = 20$$

04 (EsPCEX) Um tabuleiro possui 16 casas dispostas em 4 linhas e 4 colunas. De quantas maneiras diferentes é possível colocar 4 peças iguais nesse tabuleiro de modo que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça?

- a) 4096.
- b) 576.
- c) 256.
- d) 64.
- e) 16.

Resolução



$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

05 (EsPCEX) – Um gerente de hotel, após fazer alguns cálculos, chegou à conclusão de que, para atingir a meta de economia de energia elétrica, bastava apagar 2 lâmpadas de um corredor com 8 lâmpadas alinhadas. Para manter um mínimo de claridade ao longo do corredor, o gerente determinou que 2 lâmpadas adjacentes não poderiam ficar apagadas ao mesmo tempo, e as duas lâmpadas da extremidade deveriam ficar acesas. Sendo assim, o número de maneiras que este gerente pode apagar 2 lâmpadas é:

- a) 24.
- b) 10.
- c) 15.
- d) 12.
- e) 6.

Resolução

A — — — — A

$C_{6,2} - 5$ (número de maneiras de se apagar duas lâmpadas consecutivas).

$$= 15 - 5 = 10$$



Exercícios de Sala

01 (Mackenzie) Um professor deve ministrar 20 aulas em 3 dias consecutivos, tendo, para cada um dos dias, as opções de ministrar 4, 6 ou 8 aulas. O número de diferentes distribuições possíveis dessas 20 aulas, nos 3 dias, é:

- a) 7
- b) 6
- c) 4
- d) 10
- e) 8

02 (PUC) O número total de inteiros positivos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4, se nenhum algarismo é repetido em nenhum inteiro, é:

- a) 54
- b) 56
- c) 58
- d) 60
- e) 64

03 (PUC) O campeonato brasileiro tem, em sua primeira fase, 28 times que jogam todos entre si. Nesta primeira etapa, o número de jogos é de:

- a) 376
- b) 378
- c) 380
- d) 388
- e) 396

04 (PUC) A senha de acesso a um jogo de computador consiste em quatro caracteres alfabéticos ou numéricos, sendo o primeiro necessariamente alfabético. O número de senhas possíveis será, então:

- a) 36^4 .
- b) 10×36^3 .
- c) 26×36^3 .
- d) 26^4 .
- e) 10×26^4 .

05 (Mackenzie) Um juiz dispõe de 10 pessoas, das quais somente 4 são advogados, para formar um único júri com 7 jurados. O número de formas de compor o júri, com pelo menos 1 advogado, é:

- a) 120
- b) 108
- c) 160
- d) 140
- e) 128

06 (Mackenzie) Numa empresa existem 10 diretores, dos quais 6 estão sob suspeita de corrupção. Para que se analisem as suspeitas, será formada uma comissão especial com 5 diretores, na qual os suspeitos não sejam maioria. O número de possíveis comissões é:

- a) 66
- b) 72
- c) 90
- d) 120
- e) 124

07 (EsPCEEx) Entre duas cidades A e B há dois postos de pedágio, sendo o primeiro com 5 cabines e o segundo com 4 cabines. Há também 10 pontos de abastecimento. Um viajante realizará o percurso entre as duas cidades passando pelos dois pedágios e parando três vezes para abastecer. Entendendo por "formas diferentes de realizar o percurso" cada uma das opções de passar pelas cabines de pedágio e parar nos postos de abastecimento, o número de formas de realizar o percurso da cidade A para a cidade B é:

- a) 60.
- b) 600.
- c) 1200.
- d) 2400.
- e) 14400.

08 (EsPCEEx) A equipe de professores de uma escola possui um banco de questões de matemática composto de 5 questões sobre parábolas, 4 sobre circunferências e 4 sobre retas. De quantas maneiras distintas a equipe pode montar uma prova com 8 questões, sendo 3 de parábolas, 2 de circunferências e 3 de retas?

- a) 80.
- b) 96.
- c) 240.
- d) 640.
- e) 1280.

09 (EsPCEEx) Um conjunto contém 5 números inteiros positivos e 6 números inteiros negativos. Os valores absolutos destes 11 números são primos distintos. A quantidade de números positivos distintos que podem ser formados pelo produto de 3 destes números é

- a) 25.
- b) 70.
- c) 85.
- d) 120.
- e) 210.

10 (EsPCEEx) Uma prova de um concurso público engloba as disciplinas Matemática e Inglês, contendo dez questões de cada uma. Segundo o edital, para ser aprovado, o candidato precisa acertar, no mínimo, 70% das questões da prova, além de obter acerto maior do que ou igual a 60% em cada disciplina. Em relação às questões da prova, quantas possibilidades diferentes terá um candidato de alcançar, exatamente, o índice mínimo de aprovação?

- a) 18 900.
- b) 33 300.
- c) 38 760.
- d) 77 520.
- e) 125 970.

11 O número de inteiros ímpares compreendidos entre 10.000 e 20.000, nos quais o terceiro algarismo é 5, é igual a:

- a) 400
- b) 500
- c) 600
- d) 800
- e) 900

12 Um número capicua é aquele que não se altera quando lido da direita para esquerda ou da esquerda para direita, 1.331, 404 e 87.678 são alguns exemplos. O número de números capicuas de três algarismo que podemos conseguir com os algarismos significativos é:

- a) 30
- b) 81
- c) 90
- d) 100
- e) n. d. a.

13 Para identificar os canais de um sistema de televisão o cabo, usam-se siglas de 3 (três) letras, escolhidas no conjunto {A, C, R, T, V}, podendo, cada sigla, ter, no máximo, 2 (duas) letras iguais. Assim, por exemplo, TVB, TVT, CBB são siglas possíveis. O número de siglas diferentes que podemos formar é:

- a) 180
- b) 190
- c) 196
- d) 210
- e) 216

14 Uma fila deve ser formada por 3 estudantes de Medicina, 4 de Engenharia e 2 de Direito. De quantos modos podemos organizar essa fila de maneira que estudantes de mesmo curso permaneçam sempre juntos?

15 Listando-se em ordem crescente todos os números de quatro algarismos distintos formados com os elementos do conjunto {2, 4, 6, 8}, o número 6.428 ocupa o n-ésimo lugar. Então, n é igual a:

- a) 12
- b) 13
- c) 14
- d) 15
- e) 16

16 Um professor propôs, para uma de suas turmas, uma prova com 7 questões, das quais cada aluno deveria escolher 5 questões para responder. Sabe-se que não houve duas escolhas das mesmas 5 questões entre todos os alunos da turma. Logo, o número máximo de alunos que essa turma poderia ter era:

- a) 17
- b) 19
- c) 21
- d) 22

17 Numa reunião definida como "Queijos e Vinhos", estavam disponíveis no buffet 8 tipos de queijos e 6 tipos de vinhos. Sabendo que Jaime se serve de dois tipos diferentes de queijo e um tipo de vinho cada vez que vai ao buffet, o número total de opções distintas para servir-se é:

- a) 34
- b) 62
- c) 42
- d) 168
- e) 336

18 Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, das quais 5 deverão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grupo a ser formado?

- a) 182
- b) 330
- c) 462
- d) 782
- e) 7.920

19 De um grupo de 5 homens e 5 mulheres, quantas comissões de 4 elementos podem ser formados de modo que 3 elementos dessas comissões tenham o mesmo sexo?

- a) 50
- b) 100
- c) 200
- d) 400
- e) 25

20 O mapa de uma cidade é formado por 6 bairros distintos. Deseja-se pintar este mapa com as cores vermelho, azul e verde do seguinte modo: um bairro deve ser vermelho, dois bairros, azuis e os demais, verdes. De quantas maneiras distintas isso pode ser feito?



Exercícios de Casa

01 (EsPCEX) Num determinado setor de um hospital, trabalham 4 médicos e 8 enfermeiras. O número de equipes distintas, constituídas cada uma de 1 médico e 3 enfermeiras, que podem ser formadas nesse setor é de

- a) 60
- b) 224
- c) 495
- d) 1344
- e) 11880

02 (Mackenzie) 12 professores, sendo 4 de matemática, 4 de geografia e 4 de inglês, participam de uma reunião com o objetivo de formar uma comissão que tenha 9 professores, sendo 3 de cada disciplina. O número de formas distintas de se compor essa comissão é:

- a) 36
- b) 108
- c) 12
- d) 48
- e) 64

03 (PUC) O número de anagramas da palavra EXPLODIR, nos quais as vogais aparecem juntas, é:

- a) 360
- b) 720
- c) 1 440
- d) 2 160
- e) 4 320

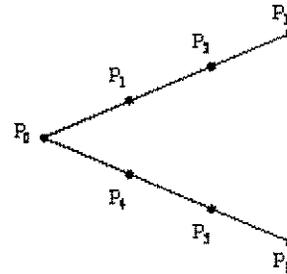
04 (UFU) Considere A, B, C, D, E, F e G pontos num mesmo plano, tais que dentre esses pontos não existam três que sejam colineares. Quantos triângulos podem ser formados com vértices dados por esses pontos, de modo que não existam triângulos de lado AB, nem de lado BC?

- a) 34
- b) 35
- c) 26
- d) 25

05 (UFJF) Cinco amigos vão viajar utilizando um carro com cinco lugares. Sabendo-se que apenas dois deles podem dirigir, o número de maneiras que os cinco amigos podem se acomodar para viagem é:

- a) 12
- b) 24
- c) 48
- d) 120

06 (UFU) Na figura abaixo, o maior número de triângulos que podem ser formados tendo como vértices três dos pontos $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ e P_6 indicados é



- a) 33
- b) 27
- c) 56
- d) 18
- e) 35

07 (Fuvest) Numa primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 13
- e) 14

08 (PUC) Se, em um encontro de n pessoas, todas apertarem as mãos entre si, então o número de apertos de mão será:

- a) n^2
- b) $n(n - 1)$
- c) $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$
- d) n
- e) $2n$

09 (Uniupe) Com os algarismos do conjunto $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ serão formados números pares de três algarismos distintos e maiores que 400. A quantidade de números assim formada é:

- a) 45
- b) 60
- c) 85
- d) 90
- e) 95

10 (FGV) No estoque de uma loja há 6 blusas pretas e 4 brancas, todas de modelos diferentes. O número de diferentes pares de blusas, com cores diferentes que uma balconista pode pegar para mostrar a uma cliente, pode ser calculado assim:

- a) $A_{10,2} - (C_{6,2} + C_{4,2})$.
- b) $C_{10,2} - (C_{6,2} + C_{4,2})$.
- c) $A_{10,2} - A_{6,4}$.
- d) $C_{10,2} - C_{6,4}$.
- e) $C_{10,2} - A_{6,4}$.

11 (UFMG) O número de múltiplos de 10, compreendidos entre 100 e 9999 e com todos os algarismos distintos, é:

- a) 250
- b) 321
- c) 504
- d) 576

12 (UFOP) De quantas maneiras podemos distribuir 10 alunos em 2 salas de aula com 7 e 3 lugares, respectivamente?

- a) 120
- b) 240
- c) 14.400
- d) 86.400
- e) 3.608.800

13 (UFOP) Quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}?

- a) 60
- b) 120
- c) 45
- d) 70
- e) 90

14 (UFOP) Quantos são os números de 7 algarismos distintos, formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, que têm 1 e 7 nas extremidades?

- a) 21
- b) 42
- c) 120
- d) 240
- e) 2520

15 (Fgv) Três números inteiros distintos de -20 a 20 foram escolhidos de forma que seu produto seja um número negativo. O número de maneiras diferentes de se fazer essa escolha é

- a) 4.940.
- b) 4.250.
- c) 3.820.
- d) 3.640.
- e) 3.280.

16 (Uel) Antônio e Bruno são membros atuantes do Grêmio Estudantil e estão se formando numa turma de 28 alunos. Uma comissão de formatura, com 5 membros, deve ser formada para a organização dos festejos. Quantas comissões podem ser formadas de modo que Antônio e Bruno sejam membros?

- a) 2600
- b) 9828
- c) 9288
- d) 3276
- e) 28

17 (Uerj) Numa cidade, os números telefônicos não podem começar por zero e têm oito algarismos, dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo.

Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são 0000 e que o prefixo da farmácia Vivavida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nesta ordem.

O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

- a) 6
- b) 24
- c) 64
- d) 168

18 (Ufrn) Em virtude de uma crise financeira, uma fábrica dispõe de apenas quatro vigilantes para ocuparem sete postos de vigilância.

Considerando que, em cada posto, fica, no máximo, um vigilante e que o posto da entrada principal não pode ficar desguarnecido, indique a opção correspondente ao número de maneiras distintas de que o chefe de segurança pode dispor para distribuir os vigilantes.

Obs.: Duas maneiras são ditas idênticas se, em ambas, os vigilantes ocupam os mesmos postos e cada posto é ocupado pelo mesmo vigilante; caso contrário, são ditas distintas.

- a) 35
- b) 80
- c) 480
- d) 840

19 (Fgv) Um fundo de investimento disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a

- a) 56.
- b) 70.
- c) 86.
- d) 120.
- e) 126.

20 (Unesp) O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo que, entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia, é

- a) 3.
- b) 6.
- c) 9.
- d) 12.
- e) 15.

2. Probabilidade

1. Introdução

Experimentos que ao serem realizados repetidas vezes nas mesmas condições apresentarem resultados variados, não sendo possível portanto a previsão lógica dos resultados, são denominados **experimentos aleatórios**.

· Espaço amostral- é o conjunto de **todos** os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indicaremos o espaço amostral por U.

· Evento – é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplo: Seja uma urna, contendo 3 bolas pretas e 3 bolas vermelhas. Dessa urna são retiradas, sucessivamente, 3 bolas.

$$\begin{array}{l}
 1^{\text{a}} \text{ bola} \quad 2^{\text{a}} \text{ bola} \quad 3^{\text{a}} \text{ bola} \\
 P \text{ — } \left\{ \begin{array}{l} P \text{ — } \left\{ \begin{array}{l} P \quad PPP \\ V \quad PPV \end{array} \right. \\ V \text{ — } \left\{ \begin{array}{l} P \quad PVP \\ V \quad PVV \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 V \text{ — } \left\{ \begin{array}{l} P \text{ — } \left\{ \begin{array}{l} P \quad VPP \\ V \quad VPV \end{array} \right. \\ V \text{ — } \left\{ \begin{array}{l} P \quad VVP \\ V \quad VVV \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{array}$$

O espaço amostral será:

$U = \{(PPP), (PPV), (PVP), (PVV), (VPP), (VPV), (VVP), (VVV)\}$
 Alguns eventos:

Evento 1 : as três bolas têm a mesma cor $\rightarrow \{(PPP), (VVV)\}$

Evento 2 : 2 das bolas são pretas $\rightarrow \{(PPV), (PVP), (VPP)\}$

Evento 3 : as três bolas são vermelhas $\rightarrow \{(VVV)\}$

Evento 4 : o número de bolas pretas é igual ao número de bolas vermelhas $\rightarrow \{ \}$

2. Definição

Seja U um espaço amostral equiprovável e A um de seus eventos. Denomina-se **probabilidade** do evento A o número $P(A)$ tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Em que:

$n(A)$ = nº de elementos do evento A.

$n(U)$ = nº de elementos do espaço amostral.

3. Adição de probabilidades

Se A e B são dois eventos do mesmo espaço amostral, podemos escrever:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observação:

Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. Probabilidade do evento complementar

Sejam

A = evento de um espaço amostral U.

\bar{A} = evento complementar de A.

Então:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

5. Multiplicação de probabilidades

Se um acontecimento é composto por vários eventos sucessivos e independentes, de tal modo que:

O primeiro evento é A e sua probabilidade é p_1

O segundo evento é B e sua probabilidade é p_2

O terceiro evento é C e sua probabilidade é p_3

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

O K-ésimo é K e sua probabilidade é p_K , então a probabilidade de que os eventos A, B, C, ..., K ocorra nessa ordem é:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_K$$

6. Probabilidade condicional

Denomina-se probabilidade de A condicionada a B a probabilidade de ocorrência do evento A, sabendo-se que vai ocorrer ou já ocorreu o evento B.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

7. Lei binomial das probabilidades

Seja uma experiência realizada com n tentativas independentes e com dois resultados possíveis em cada tentativa: **sucesso** ou **fracasso** (falha).

Seja p a probabilidade de ocorrência do evento E (**sucesso**) e q = 1 - p a probabilidade de ocorrência do evento \bar{E} (**fracasso**).

A probabilidade de obtermos r vezes o resultado desejado é dado por:

$$P = \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r}$$



Exercícios Comentados

- 01 Numa sala de aula com 25 alunos, cada aluno recebeu um número de 1 a 25 para concorrer ao sorteio de um ingresso para um show. Qual é a probabilidade de:
- ser sorteado o aluno que tem o número 25?
 - ser sorteado um aluno com número ímpar?
 - ser sorteado um aluno cujo número é múltiplo de 7?

Resolução:

O espaço amostral do experimento é:
 $S = \{1; 2; 3; \dots; 25\} \Rightarrow n(S) = 25$

a) seja A o evento: ser sorteado o número 25

$$A = \{25\} \Rightarrow n(A) = 1$$

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{25}$$

b) seja B o evento: ser sorteado um aluno com número ímpar

$$B = \{1; 3; 5; \dots; 25\} \Rightarrow n(B) = 13$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{25}$$

c) Seja D o evento: ser sorteado um número múltiplo de 7

$$D = \{7; 14; 21\} \Rightarrow n(D) = 3$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{25}$$

02 Estudos realizados numa certa comunidade indicam que a probabilidade de nascer uma criança do sexo feminino é o dobro da probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino. Qual é a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino nessa comunidade?

Resolução:

O espaço amostral tem apenas duas possibilidades, que representaremos por:

M: criança do sexo masculino

F: criança do sexo feminino

$S = \{M; F\}$

Os eventos elementares são:

$\{M\}$: nascer criança do sexo masculino

$\{F\}$: nascer criança do sexo feminino

As probabilidades associadas a esses eventos elementares podem ser apresentadas na forma:

$$\{M\} \Rightarrow P_1 = x$$

$$\{F\} \Rightarrow P_2 = 2x$$

$$\text{como: } P_1 + P_2 = 1$$

$$x + 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

A probabilidade de nascer criança do sexo masculino é $\frac{1}{3}$

03 Considere um baralho de 52 cartas.

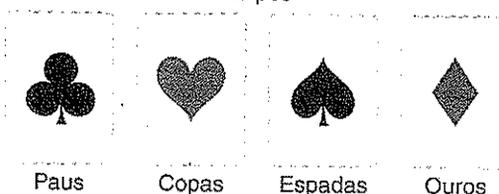
a) Retirando-se aleatoriamente uma carta, qual é a probabilidade de que esta carta seja uma dama ou uma carta de paus?

b) Escolhendo-se 3 cartas ao acaso, qual é a probabilidade de que dentre as cartas escolhidas tenhamos pelo menos uma carta de copas?

Resolução:

As 52 cartas são distribuídas em 4 naipes, sendo 13 de cada naipe.

Naipes



Cada naipe apresenta 1 ás, 3 figuras (vaiete, dama e rei) e 9 cartas numeradas (de 2 a 10).

a) Considere os eventos:

A: retirar uma dama

B: retirar uma carta de paus

Logo, $A \cap B$ equivale a retirar a dama de paus.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

b) Seja o evento:

A: "pelo menos" uma das 3 cartas é copas

Então temos:

\bar{A} : nenhuma das 3 cartas é de copas

Temos:

$$n(S) = C_{52,3} = \frac{52!}{3!49!} \left(\begin{array}{l} \text{Número de maneiras} \\ \text{de escolher 3 cartas} \\ \text{dentre as 52.} \end{array} \right)$$

$$n(\bar{A}) = C_{39,3} = \frac{39!}{3!36!} \left(\begin{array}{l} \text{Número de maneiras} \\ \text{de escolher 3 cartas} \\ \text{dentre as cartas que} \\ \text{não são de copas.} \end{array} \right)$$

$$\text{Logo: } P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(S)} = \frac{39!}{3!49!} \cdot \frac{39!}{52!} = \frac{27.417}{66.300}$$

$$\text{Mas: } P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(A) = 1 - \frac{27.417}{66.300}$$

$$P(A) = \frac{38.883}{66.300} = \frac{997}{1700}$$

04 Numa sala de aula com 30 alunos, cada aluno recebeu um número de 1 ao 30 para concorrer ao sorteio de um livro.

Suponha que, para manter a expectativa, em vez de divulgar de imediato o número sorteado, o professor anunciou: "O número sorteado é primo".

Pergunta-se: qual é a probabilidade de ter saído um número maior que 15?

Para o experimento "sortear" um número natural entre 1 e 30, há 30 resultados possíveis:

$$S = \{1; 2; 3; \dots; 30\} \Rightarrow n(S) = 30$$

Sejam os eventos:

A: sair um número primo

$$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\} \Rightarrow n(A) = 10$$

B: sair um número maior que 15

$$B = \{16; 17; \dots; 19; 29; 30\} \Rightarrow n(B) = 15$$

Devemos calcular a probabilidade de ocorrer B (número maior que 15), mas sabemos de antemão que ocorreu o evento A (números primo). Devemos então destacar, dentre os elementos de A, aqueles que são favoráveis à ocorrência do evento B, ou seja, os elementos de $A \cap B$.

$$A \cap B = \{17; 19; 23; 29\} \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

Assim, entre os 10 números primos possíveis de ocorrer, há 4 casos favoráveis.

Então, a probabilidade de ocorrer um número maior que 15, tendo sido sorteado um número primo, será dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

05 Num grupo de funcionários de uma empresa, há 4 rapazes e 6 moças e dois deles serão sorteados para fazer uma viagem. Calcule a probabilidade de que:

- as duas pessoas sorteadas sejam moças.
- As duas pessoas sorteadas sejam rapazes.
- As duas pessoas sorteadas sejam do mesmo sexo.
- Pelo menos uma pessoa sorteada seja do sexo feminino.

Resolução:

a) Sejam os eventos:

A: a 1ª pessoa sorteada é uma moça.

B: a 2ª pessoa sorteada é uma moça.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

- A: a 1ª pessoa sorteada é um rapaz
- B: a 2ª pessoa sorteada é um rapaz

c) Duas pessoas de mesmo sexo:

A: sejam sorteadas duas moças

B: sejam sorteados dois rapazes

d) Pelo menos uma moça ser sorteada é o evento complementar de serem sorteados 2 rapazes.



Exercícios de Sala

01 Uma urna contém 4 bolas brancas e 5 bolas pretas. Duas bolas, escolhidas ao acaso, são sacadas de uma, sucessivamente e sem reposição. A probabilidade de que ambas sejam brancas vale:

- 1/6
- 2/9
- 4/9
- 16/81
- 20/81

02 Considere todos os números de cinco algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8. Escolhendo-se um desses números, ao acaso, a probabilidade dele ser um número ímpar é

- 1
- 1/2
- 2/5
- 1/4
- 1/5

03 Uma caixa contém 3 bolas verdes, 4 bolas amarelas e 2 bolas pretas. Duas bolas são retiradas ao acaso e sem reposição. A probabilidade de ambas serem da mesma cor é:

- 13/72
- 1/18
- 5/18
- 1/9
- 1/4

04 Uma urna contém apenas cartões marcados com números de três algarismos distintos, escolhidos de 1 a 9. Se, nessa urna, não há cartões com números repetidos, a probabilidade de ser sorteado um cartão com um número menor que 500 é:

- 3/4.
- 1/2.
- 8/21.
- 4/9.
- 1/3.

05 Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, a probabilidade de que suas faces superiores exibam soma igual a 7 ou 9 é:

- a) 1/6
- b) 4/9
- c) 2/11
- d) 5/18
- e) 3/7

06 (Unirio) Considerando-se um hexágono regular e tomando-se ao acaso uma de suas diagonais, a probabilidade de que ela passe pelo centro do hexágono é de:

- a) 1/9
- b) 1/6
- c) 1/3
- d) 2/9
- e) 2/3

07 (Fuvest) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1, e que as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado.

Qual a frequência da face 1?

- a) 1/3.
- b) 2/3.
- c) 1/9.
- d) 2/9.
- e) 1/12.

08 (Fuvest) Escolhe-se ao acaso três vértices distintos de um cubo. A probabilidade de que estes vértices pertençam a uma mesma face é:

- a) 3/14
- b) 2/7
- c) 5/14
- d) 3/7
- e) 13/18

09 (Fuvest) No jogo da sena seis números distintos são sorteados dentre os números 1, 2, ..., 50. A probabilidade de que, numa extração, os seis números sorteados sejam ímpares vale aproximadamente:

- a) 50 %
- b) 1 %
- c) 25 %
- d) 10 %
- e) 5 %

10 (Uel) De um total de 500 estudantes da área de exatas, 200 estudam Cálculo Diferencial e 180 estudam Álgebra Linear. Esses dados incluem 130 estudantes que estudam ambas as disciplinas. Qual é a probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente

esteja estudando Cálculo Diferencial ou Álgebra Linear?

- a) 0,26
- b) 0,50
- c) 0,62
- d) 0,76
- e) 0,80

11 Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

- a) $\frac{1}{10}$
- b) $\frac{1}{9}$
- c) $\frac{1}{5}$
- d) $\frac{2}{5}$
- e) $\frac{1}{2}$

12 Uma classe possui 12 alunos, sendo 7 meninas e 5 meninos. São sorteados, ao acaso, dois alunos. A probabilidade de saírem dois meninos é:

- a) $\frac{5}{33}$
- b) $\frac{5}{12}$
- c) $\frac{7}{12}$
- d) $\frac{7}{33}$
- e) $\frac{1}{4}$

13 Dois prêmios iguais são sorteados entre 6 pessoas, sendo 4 homens e 2 mulheres. Supondo que uma mesma pessoa não possa ganhar os 2 prêmios, a probabilidade de pelo menos um homem ser sorteado é:

- a) $\frac{5}{6}$
- b) $\frac{7}{8}$
- c) $\frac{14}{15}$
- d) $\frac{13}{14}$
- e) $\frac{8}{9}$

14) Contra certa doença podem ser aplicadas as vacinas I ou II. A vacina I falha em 10% dos casos e a vacina II, em 20% dos casos, sendo esses eventos totalmente independentes. Nessas condições, se todos os habitantes de uma cidade receberam doses adequadas das duas vacinas, a probabilidade de um indivíduo não estar imunizado contra a doença é:

- a) 30%
- b) 10%
- c) 3%
- d) 2%
- e) 1%

15) Um jogador de basquete, cuja média de aproveitamento nos lances livres é 60%, está posicionado para a cobrança de dois lances livres. Qual a probabilidade de o jogador acertar somente o primeiro lance?

- a) 40%
- b) 36%
- c) 32%
- d) 28%
- e) 24%

16) Sabe-se que o "cestinha" da seleção mariliense de basquete acerta 80% dos lances livres que executa numa partida. A probabilidade de ele acertar pelo menos um dos lances livres ao sofrer uma falta é:

- a) 64%
- b) 76%
- c) 80%
- d) 96%
- e) 100%



Exercícios de Casa

01) (Ufpa) De um refrigerador que tem em seu interior 3 refrigerantes da marca A, 4 refrigerantes da marca B e 5 refrigerantes da marca C, retiram-se dois refrigerantes sem observar a marca. A probabilidade de que os dois retirados sejam da mesma marca é:

- a) $1/6$
- b) $5/33$
- c) $19/66$
- d) $7/22$
- e) $3/11$

02) (Unesp) Após uma partida de futebol, em que as equipes jogaram com as camisas numeradas de 1 a 11 e não houve substituições, procede-se ao sorteio de dois jogadores de cada equipe para exame anti-doping. Os jogadores da primeira equipe são representados por 11 bolas numeradas de 1 a 11 de uma urna A e os da segunda, da mesma maneira, por bolas de uma urna B. Sorteia-se primeiro, ao acaso e simultaneamente, uma bola de cada urna. Depois, para o segundo sorteio, o processo deve ser repetido com as 10 bolas restantes de cada urna. Se na primeira extração foram sorteados dois jogadores de números iguais, a probabilidade de que aconteça o mesmo na segunda extração é de:

- a) 0,09.
- b) 0,1.
- c) 0,12.
- d) 0,2.
- e) 0,25.

03) (Unesp) Numa certa região, uma operadora telefônica utiliza 8 dígitos para designar seus números de telefones, sendo que o primeiro é sempre 3, o segundo não pode ser 0 e o terceiro número é diferente do quarto. Escolhido um número ao acaso, a probabilidade de os quatro últimos algarismos serem distintos entre si é

- a) $63/125$
- b) $567/1250$
- c) $189/1250$
- d) $63/1250$
- e) $7/125$

04 (Fgv) Uma urna contém cinco bolas numeradas com 1, 2, 3, 4 e 5. Sorteando-se ao acaso, e com reposição, três bolas, os números obtidos são representados por x , y e z . A probabilidade de que $xy + z$ seja um número par é de

- a) 47/125.
- b) 2/5.
- c) 59/125.
- d) 64/125.
- e) 3/5.

05 (Ita) Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

- a) 1/21
- b) 1/8
- c) 3/21
- d) 5/21
- e) 1/4

06 (Pucmg) Numa disputa de robótica, estão participando os quatro estados da Região Sudeste, cada um deles representado por uma única equipe. No final, serão premiadas apenas as equipes classificadas em primeiro ou em segundo lugar. Supondo-se que as equipes estejam igualmente preparadas, a probabilidade de Minas Gerais ser premiada é:

- a) 0,3
- b) 0,5
- c) 0,6
- d) 0,8

07 (Pucsp) Os 36 cães existentes em um canil são apenas de três raças: poodle, dálmata e boxer. Sabe-se que o total de cães das raças poodle e dálmata excede o número de cães da raça boxer em 6 unidades, enquanto que o total de cães das raças dálmata e boxer é o dobro do número dos de raça poodle. Nessas condições, escolhendo-se, ao acaso, um cão desse canil, a probabilidade de ele ser da raça poodle é

- a) 1/4
- b) 1/3
- c) 5/12
- d) 1/2
- e) 2/3

08 (Pucsp) Um marceneiro pintou de azul todas as faces de um bloco maciço de madeira e, em seguida, dividiu-o totalmente em pequenos cubos de 10 cm de aresta. Considerando que as dimensões do bloco eram

140 cm por 120 cm por 90 cm, então a probabilidade de escolher-se aleatoriamente um dos cubos obtidos após a divisão e nenhum a de suas faces estar pintada de azul é

- a) 1/3
- b) 5/9
- c) 2/3
- d) 5/6
- e) 8/9

09 (Ufmg) Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta.

Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão.

Então, é correto afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

- a) 27/64
- b) 27/256
- c) 9/64
- d) 9/256

10 (Fatec) Num eleição para prefeito de uma certa cidade, concorreram somente os candidatos A e B. Em uma seção eleitoral votaram 250 eleitores. Do número total de votos dessa seção, 42% foram para o candidato A, 34% para o candidato B, 18% foram anulados e os restantes estavam em branco. Tirando-se, ao acaso, um voto dessa urna, a probabilidade de que seja um voto em branco é:

- a) 1/100
- b) 3/50
- c) 1/50
- d) 1/25
- e) 3/20

11 (Fei) Uma urna contém 3 bolas numeradas de 1 a 3 e outra urna contém 5 bolas numeradas de 1 a 5. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola de cada urna, a probabilidade da soma dos pontos ser maior do que 4 é:

- a) 3/5
- b) 2/5
- c) 1/2
- d) 1/3
- e) 2/3

12 (Mackenzie) Dois rapazes e duas moças ocupam ao acaso os quatro lugares de um banco. A probabilidade de não ficarem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo é:

- a) 1/3.
- b) 2/3.
- c) 1/2.
- d) 3/4.
- e) 1/4.

13 (Mackenzie) Num grupo de 12 professores, somente 5 são de matemática. Escolhidos ao acaso 3 professores do grupo, a probabilidade de no máximo um deles ser de matemática é:

- a) 3/11.
- b) 5/11.
- c) 7/11.
- d) 8/11.
- e) 9/11.

14 (Mackenzie) A probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é 0,25. Então a probabilidade do casal ter dois filhos de sexos diferentes é:

- a) 1/16
- b) 3/8
- c) 9/16
- d) 3/16
- e) 3/4

15 (Mackenzie) Escolhe-se, ao acaso, um número de três algarismos distintos tomados do conjunto {1; 2; 3; 4; 5}. A probabilidade de nesse número aparecer o algarismo 2 e não aparecer o algarismo 4 é:

- a) 3/5
- b) 4/5
- c) 3/10
- d) 5/10
- e) 7/10

16 (Mackenzie) Numa urna são colocadas 60 bolas iguais, numeradas de 1 a 60. A probabilidade de sortearmos, sucessivamente, com reposição, 3 bolas com números que são múltiplos de 5, é:

- a) 8%
- b) 0,8%
- c) 0,08%
- d) 0,008%
- e) 0,0008%

17 (Pucsp) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 5. Sorteia-se uma bola, verifica-se o seu número e ela é repostada na urna.

Num segundo sorteio, procede-se da mesma forma que no primeiro sorteio. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior que o da primeira é

- a) 4/5
- b) 2/5
- c) 1/5
- d) 1/25
- e) 15/25

18 (Vunesp) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7.

Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

- a) 0,06
- b) 0,14
- c) 0,24
- d) 0,56
- e) 0,72

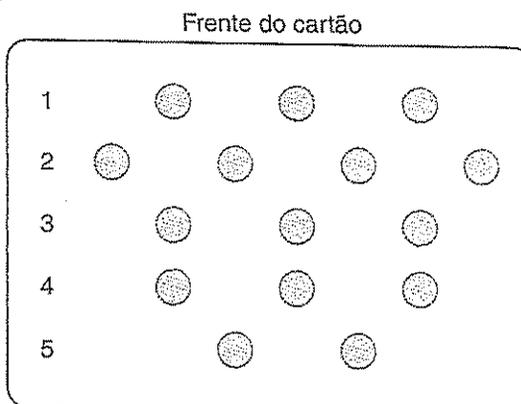
19 (Vunesp) Sabe-se que os pênaltis a favor de certa equipe de futebol são batidos pelos dois melhores cobradores da equipe, A e B, cujos índices de aproveitamento (conversão de gols) são, respectivamente, 85% e 90%.

Sabe-se ainda que B cobra 75% dos pênaltis a favor da equipe. Acaba de ser marcado um pênalti a favor dessa equipe e, nesse momento, os jogadores A e B estão em campo.

a) Qual é a probabilidade de que o pênalti seja cobrado por B e não seja convertido em gol?

b) Qual é a probabilidade de o pênalti ser convertido em gol?

20 (Enem-MEC) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens em cartão de apostas do seguinte tipo:



Verso do cartão

- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas. Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um X em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de X distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal modo que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero.

Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

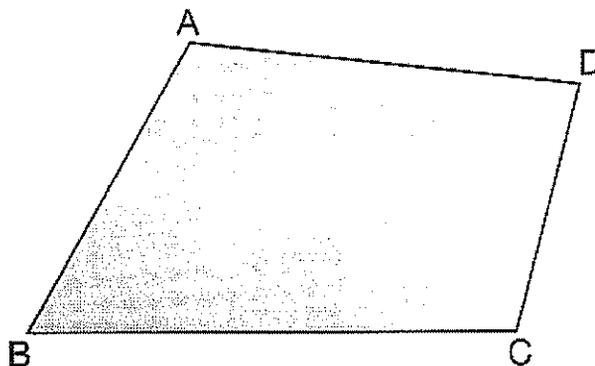
- a) $\frac{1}{27}$
- b) $\frac{1}{36}$
- c) $\frac{1}{54}$
- d) $\frac{1}{72}$
- e) $\frac{1}{108}$

3. GEOMETRIA PLANA E DE POSIÇÃO

Polígonos

3. 1. Nomenclatura

Seja o polígono da figura:



Em que:

A, B, C e D são vértices do polígono;

\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} são lados do polígono.

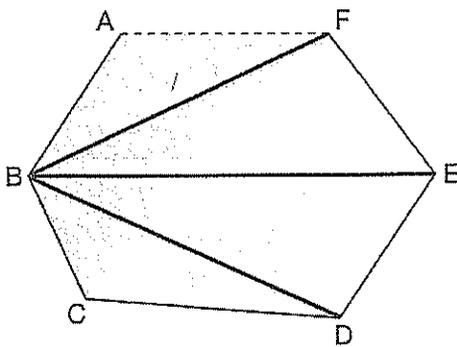
Quando todo e qualquer par de pontos R e S, tomados na região poligonal, determinar um segmento \overline{RS} completamente interno à região, o polígono é **convexo**. Caso contrário, o polígono é **não-convexo** ou **côncavo**.

Tipos de polígonos convexos:

- Triângulo – 3 lados
- Quadrilátero – 4 lados
- Pentágono – 4 lados
- Hexágono – 6 lados
- Heptágono – 7 lados
- Octógono – 8 lados
- Eneágono – 9 lados
- Decágono – 10 lados
- Undecágono – 11 lados
- Dodecágono – 12 lados
- Pentadecágono – 15 lados
- Icoságono – 20 lados

3. 2. Número de diagonais de um polígono

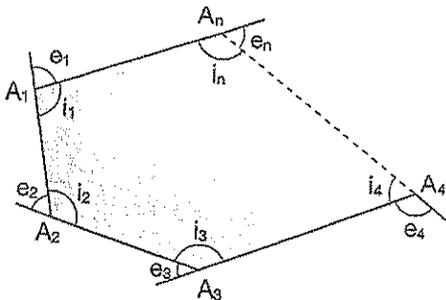
O número de diagonais d de um polígono de n lados é dado por:



$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

3.3. Soma das medidas dos ângulos internos e externos

Considere o polígono de n lados da figura:



$$S_i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \Rightarrow S_i = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$S_e = e_1 + e_2 + \dots + e_n \Rightarrow S_e = 360^\circ$$

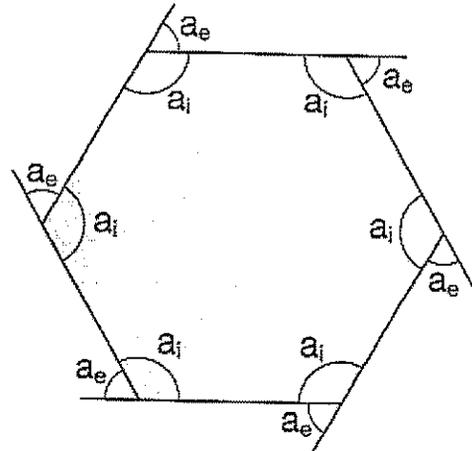
Em que:

S_i é a soma dos ângulos internos;

S_e é a soma dos ângulos externos.

Observações:

1ª) Se o polígono for regular, ele tem todos os lados e os ângulos congruentes; logo:



$$\text{Ângulo interno} \Rightarrow a_i = \frac{S_i}{n}$$

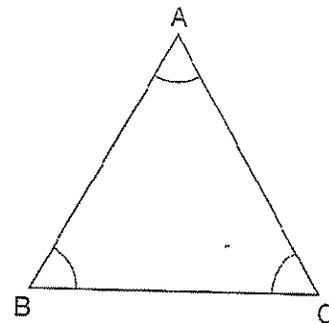
$$\text{Ângulo externo} \Rightarrow a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

2ª) Todo polígono regular é inscrivível e circunscritível.

Triângulos

3.4. Classificação

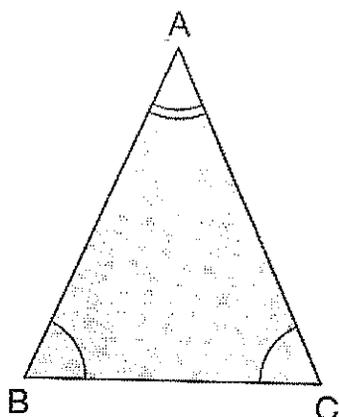
Equilátero



$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$$

$$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$$

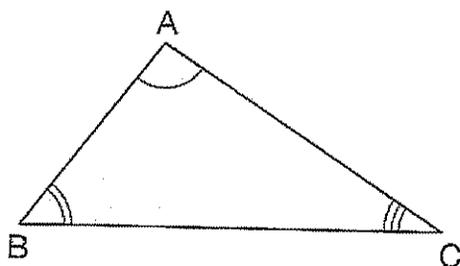
Isóceles



$$\overline{AB} \cong \overline{AC}$$

$$\widehat{B} \cong \widehat{C}$$

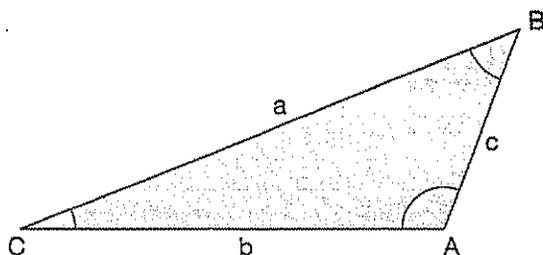
Escaleno



$$\overline{AB} \not\cong \overline{AC} \not\cong \overline{BC}$$

$$\widehat{A} \not\cong \widehat{B} \not\cong \widehat{C}$$

3.5 Relações



1ª) Qualquer lado é menor que a soma dos outros dois.

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

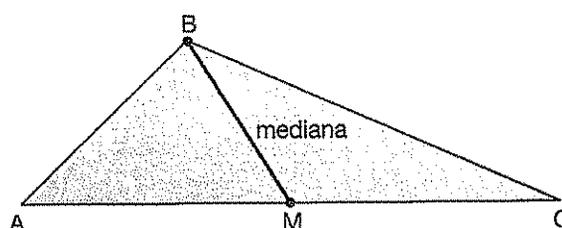
$$c < a + b$$

2ª) A soma dos ângulos internos é 180° .

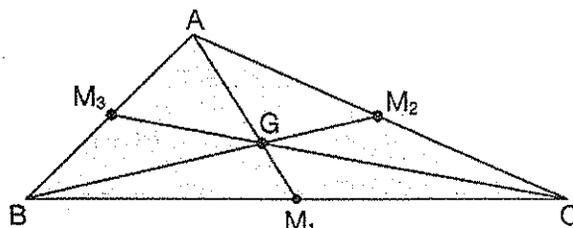
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

3.6. Mediana

É o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.



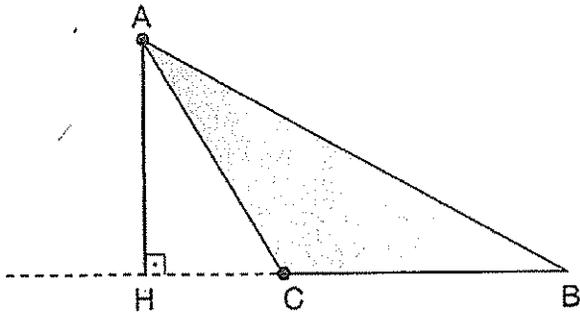
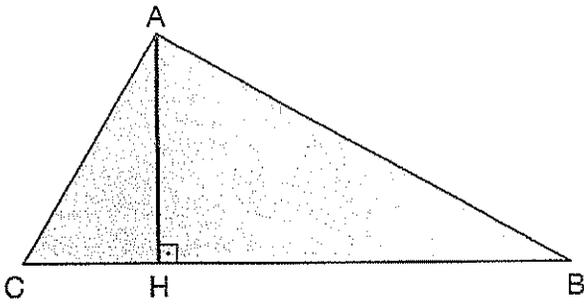
As três medianas de um triângulo cruzam-se num ponto G, determinado **baricentro** do triângulo.



$$AG = 2GM_1 \Rightarrow \begin{cases} AG = \frac{2}{3} AM_1 \\ GM_1 = \frac{1}{3} AM_1 \end{cases}$$

3.7. Altura

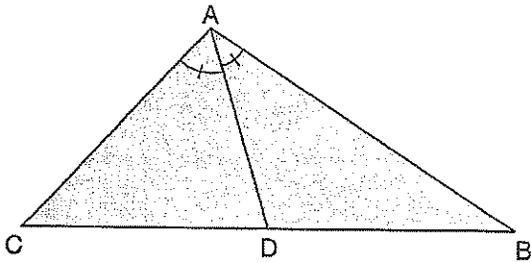
É o segmento que parte de um vértice e é perpendicular ao lado oposto.



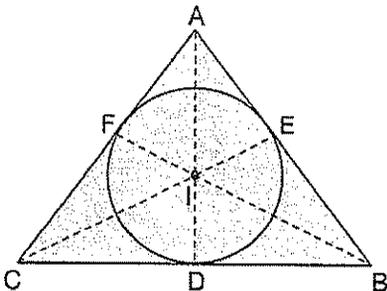
As três alturas de um triângulo cruzam-se num mesmo ponto, denominado **ortocentro** do triângulo.

3.8. Bissetriz

A bissetriz do ângulo \hat{A} intercepta o lado oposto no ponto D. O segmento \overline{AD} denomina-se **bissetriz interna** relativa ao vértice A.



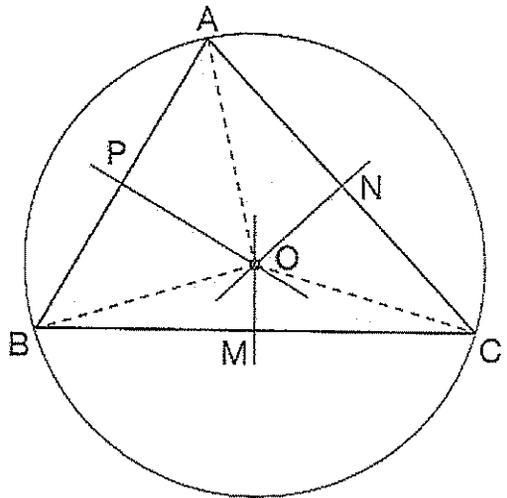
As três bissetrizes de um triângulo cruzam-se num mesmo ponto I, denominado **incentro** do triângulo.



O ponto I é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

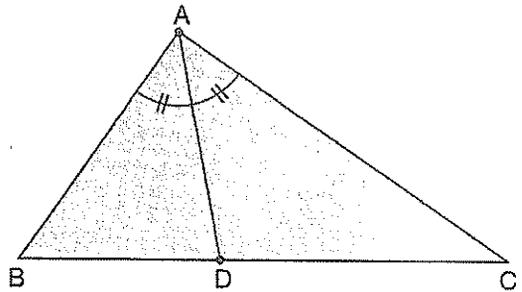
Observação:

O centro da circunferência circunscrita a um triângulo é o **circuncentro**, isto é, o ponto de encontro das mediatrizes.



3.9. Teorema da bissetriz interna

Considere o triângulo ABC e a bissetriz interna relativa ao vértice A.



Da figura, temos:

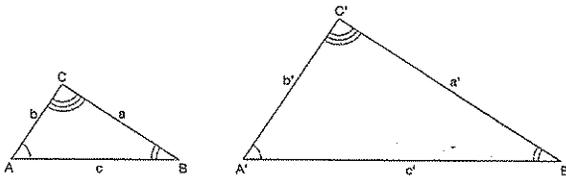
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

A bissetriz do ângulo interno de um triângulo determina sobre o lado oposto dois segmentos proporcionais aos outros dois lados.

3.10. Semelhança de triângulos

Dois triângulos ABC e A' B' C' são ditos semelhantes, se:

- Os ângulos correspondentes forem congruentes;
- Os lados correspondentes (ou homólogos) forem proporcionais.



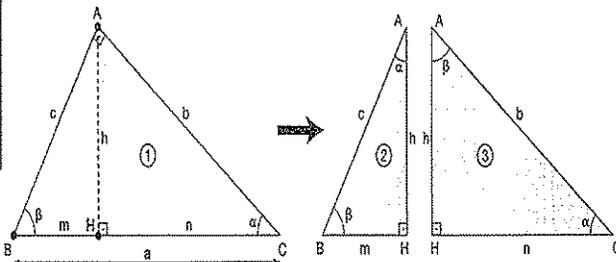
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Em que k é a constante de proporcionalidade.

Observação:

Figuras que têm a mesma forma mas medidas lineares diferentes são denominadas **figuras semelhantes**.

3.11. Relações métricas no triângulo retângulo



Em que:

- a – hipotenusa;
 - b e c – catetos;
 - h – altura relativa à hipotenusa;
 - m e n – projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
- Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow \begin{cases} ah = bc \\ c^2 = a \cdot m \end{cases}$$

$$\Delta_1 \sim \Delta_3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$$

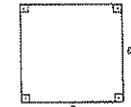
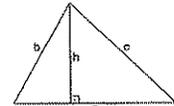
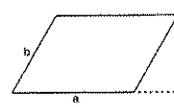
$$\Delta_2 \sim \Delta_3 \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

• Teorema de Pitágoras

Do Δ_1 , obtemos $a^2 = b^2 + c^2$

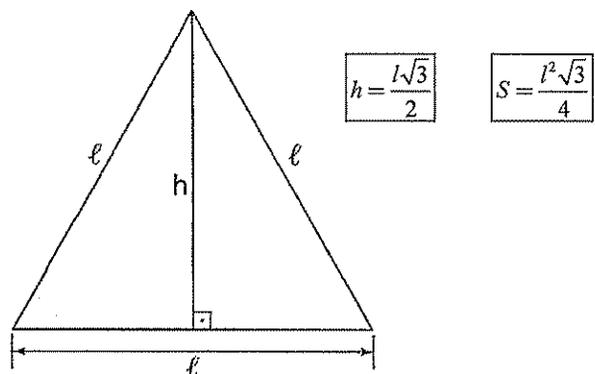
O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Área das figuras planas Área dos quadriláteros

Figura	Perímetro	Área
retângulo 	$2(a + b)$	$S = a \cdot b$
quadrado 	$4a$	$S = a^2$
triângulo 	$a + b + c$ $p = \frac{a + b + c}{2}$... semiperímetro	$S = \frac{a \cdot h}{2}$ OU $S = p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)$
paralelogramo 	$2(a + b)$	$S = a \cdot h$

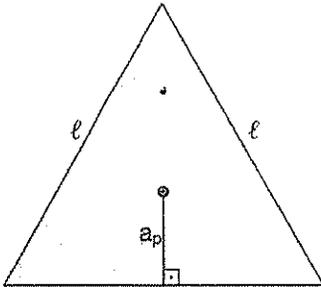
Observações:

1ª) No caso do triângulo equilátero, temos:

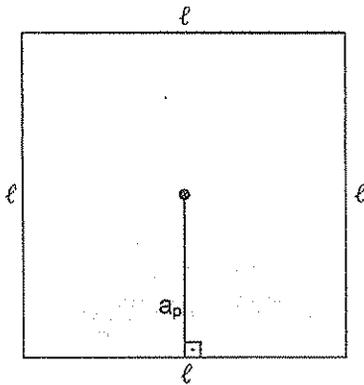


2ª) O apótema de um polígono regular é a distância do centro do polígono a qualquer um dos lados; logo:

Triângulo equilátero

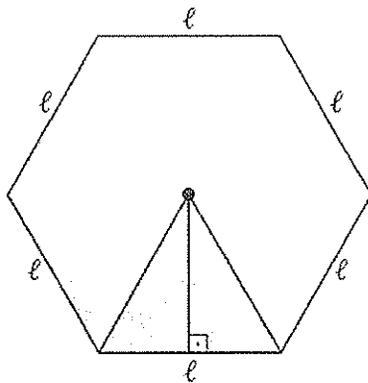


$$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$



$$a_p = \frac{l}{2}$$

Hexágono regular



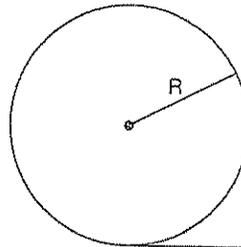
$$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

3.12. Áreas do círculo e suas partes

	Figura	Área
círculo		$S = \pi R^2$
setor circular		α em graus: $S = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ}$ α em radianos: $S = \frac{\alpha R^2}{2}$
segmento circular		$S = S_{setor} - S_{\Delta ACB}$

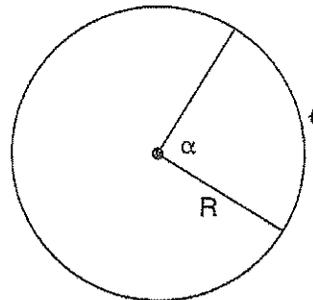
Observações:

1ª) O comprimento de uma circunferência de raio R é dado por:



$$C = 2\pi R$$

2ª) A medida de um arco de circunferência é dada por:



$$l = \alpha \cdot R$$

(α em radianos)

4. Geometria Espacial de Posição

Ponto, reta e plano são considerados noções primitivas na Geometria.

Espaço é o conjunto de todos os pontos.

Postulados são proposições aceitas e utilizadas sem demonstração.

P1. Uma reta possui infinitos pontos e existem infinitos pontos fora dela.

P2. Por um ponto passam infinitas retas.

P3. Dois pontos distintos determinam uma reta.

P4. Um plano possui infinitos pontos e existem infinitos pontos fora dele.

P5. Se dois pontos distintos pertencem a uma reta e a um plano, então esta reta está contida neste plano.

P6. Três pontos não-colineares determinam um plano.

P7. A intersecção de dois planos distintos que tenham um ponto em comum é uma reta.

P8. A paralela a uma reta por um ponto é única.

1. Posições relativas de duas retas

I- Retas coplanares: concorrentes, paralelas e coincidentes.

II- Retas reversas: são retas que não estão contidas num mesmo plano.

Observações:

1ª) Quando duas retas concorrentes formam entre si um ângulo de 90° , são chamadas retas **perpendiculares**.

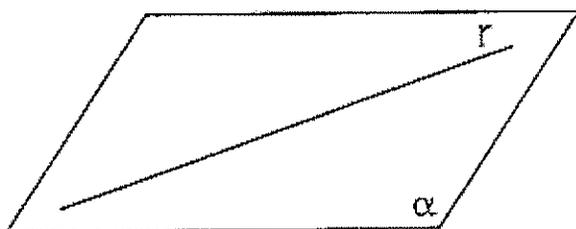
2ª) Quando duas retas reversas formam um ângulo de 90° , são chamadas retas **ortogonais**.

2. Determinação de planos

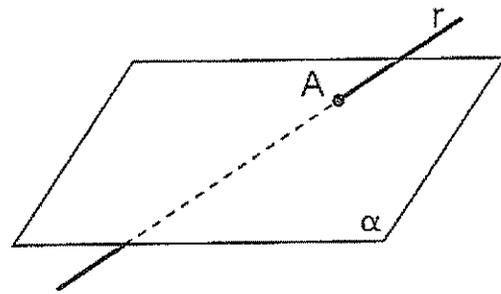
Um plano fica determinado por: três pontos não-colineares, duas retas paralelas, duas retas concorrentes ou uma reta e um ponto fora dela.

3. Posições relativas entre uma reta e um plano

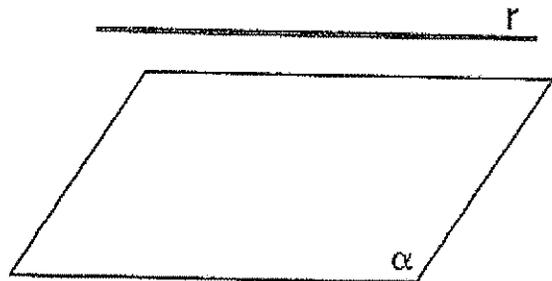
a) A reta está contida no plano.



b) Reta concorrente ou secante: a reta "fura" o plano.

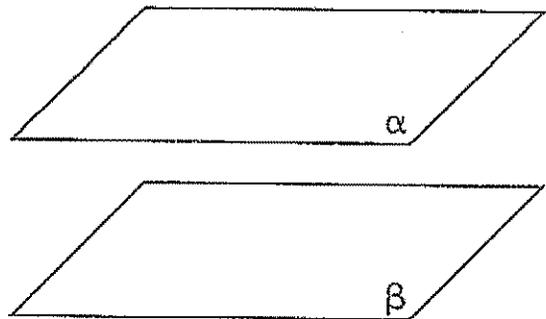


c) A reta é paralela ao plano.

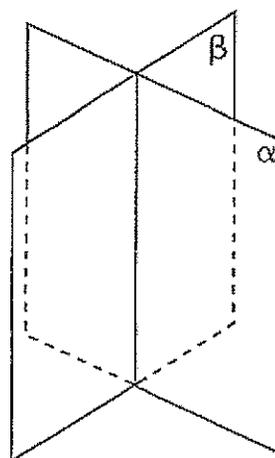


4. Posições relativas entre dois planos

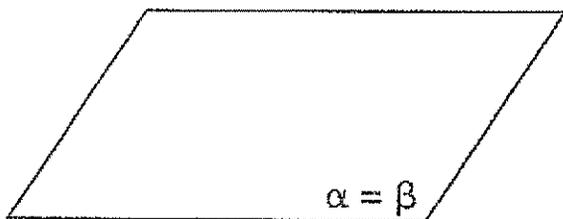
a) Planos paralelos.



b) Planos secantes: a intersecção é uma reta.



c) Planos coincidentes.



5. Principais teoremas

T1. Se uma reta r é perpendicular a um plano α num ponto A , ela é perpendicular a todas as retas do plano α que passam por este ponto.

T2. Se uma reta r , não contida num plano α , é paralela a uma reta s de α , então r e α são paralelos.

T3. Se uma reta r é paralela a um plano α e se existe um plano β que contém r e é secante a α segundo uma reta s , então $r \parallel s$.

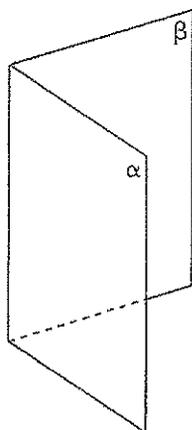
T4. Se dois planos α e β são paralelos, então qualquer reta de um plano é paralela ao outro plano.

T5. Teorema das três perpendiculares: se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto A , e se uma reta s de α passa por A e uma reta t de α não passa por A mas é perpendicular a s no ponto B , então qualquer reta que passe por B e por um ponto de r é perpendicular à reta t .

T6. Duas retas distintas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si.

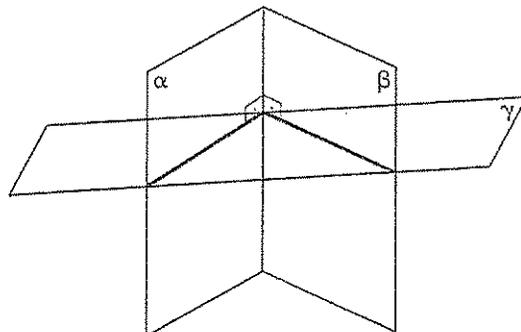
6. Diedro

Diedro é a região formada por dois semiplanos de origem comum.



aresta: reta comum
 α e β : faces

Secção de um diedro é a intersecção do diedro com o plano γ secante à aresta. Quando este plano é perpendicular à aresta, a secção é denominada normal ou reta do diedro.

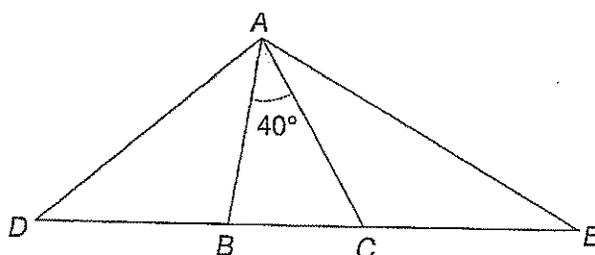


A medida de um diedro é a medida de sua secção normal.



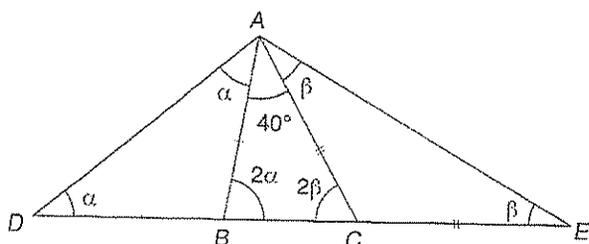
Exercícios Comentados

01 Na figura. $AB=BD, AC = CE$ e $\widehat{BAC}=40^\circ$. O ângulo \widehat{DAE} mede.



- a) 110°
- b) 114°
- c) 118°
- d) 120°
- e) 125°

Resolução:



· Nos triângulos isóceles BAD e CAE, $\widehat{BAD} = \widehat{CEA} = \alpha$ e $\widehat{CAE} = \widehat{CEA} = \beta$ (ângulos das bases).

· $\widehat{ABC} = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (ângulo externo do triângulo ABD)

· $\widehat{ACB} = \beta + \beta = 2\beta$ (ângulo externo do triângulo ACE).

· Por fim, no triângulo ABC,

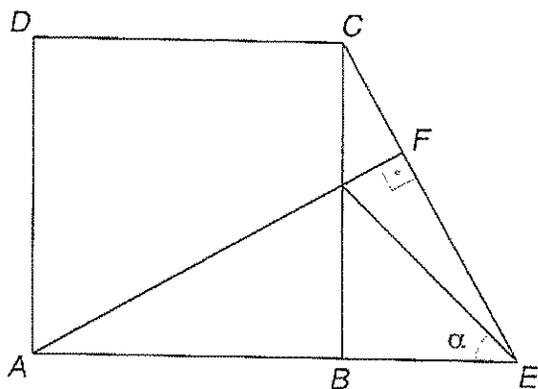
$$2\alpha + 2\beta + 40^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 140^\circ \div (2)$$

$$\alpha + \beta = 70^\circ$$

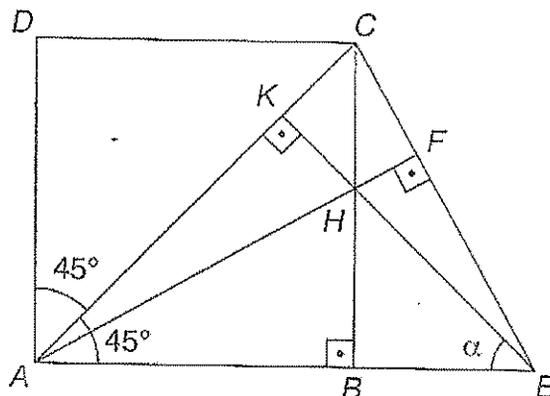
$$\therefore \widehat{DAE} = \alpha + \beta + 40^\circ \Rightarrow \widehat{DAE} = 110^\circ$$

02) Nesta figura, ABCD é um quadrado, E é um ponto qualquer do prolongamento do lado AB e $\overline{AF} \perp \overline{EC}$. Calcule α .



Resolução:

Traçando a diagonal \overline{AC} , obtemos o triângulo ACE no qual \overline{CB} e \overline{AF} são alturas.



Então, H é o ortocentro do triângulo ACE e, conseqüentemente, o segmento \overline{EK} é a terceira altura desse triângulo.

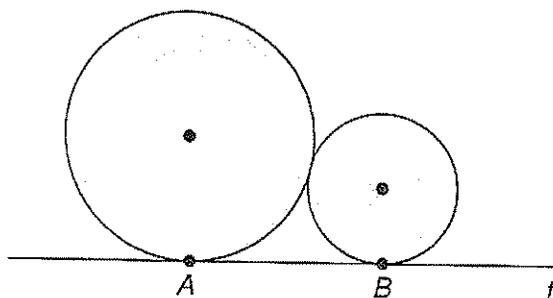
Finalmente, como a diagonal do quadrado é bissetriz de seus ângulos internos, no triângulo AEK temos:

$$\alpha + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ$$

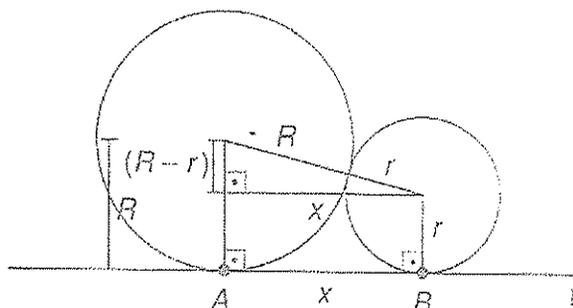
Resposta: $\alpha = 45^\circ$

03) As circunferências da figura têm raios R e r, são tangentes entre si e tangenciam a reta t nos pontos A e B.



Calcule AB em função de R e r.

Resolução:



04 Calcule os raios das circunferências inscrita e circunscrita num triângulo equilátero de lado $\ell = 12 \text{ cm}$.

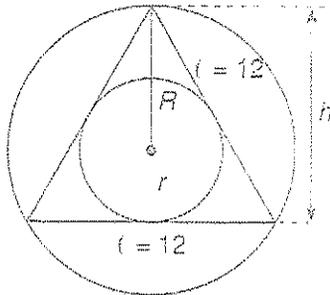
Resolução:

Observação: as medidas da altura do triângulo equilátero e da diagonal do quadrado. Tais resultados foram deduzidos na primeira aula deste curso (trigonometria do triângulo retângulo).

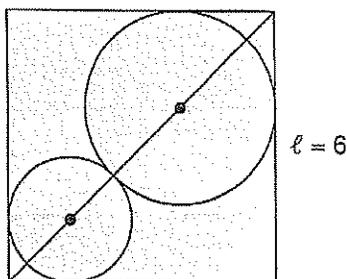
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$r = \frac{1}{3}h \Rightarrow r = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$R = \frac{2}{3}h \Rightarrow R = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$



05 As duas circunferências da figura são tangentes e cada uma delas tangencia dois lados do quadrado de lado $\ell = 6$.



Se $R=2$ é o raio da circunferência maior, o raio da menor é igual a:

- a) 1
- b) $\sqrt{2} - 1$
- c) $\frac{3}{4}$

d) $2(\sqrt{2} - 1)^2$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Observando os dois quadrados sombreados na figura, temos:

$$AO' = r\sqrt{2} \text{ e } OC = 2\sqrt{2}$$

Como $AC = 6\sqrt{2}$, podemos escrever:

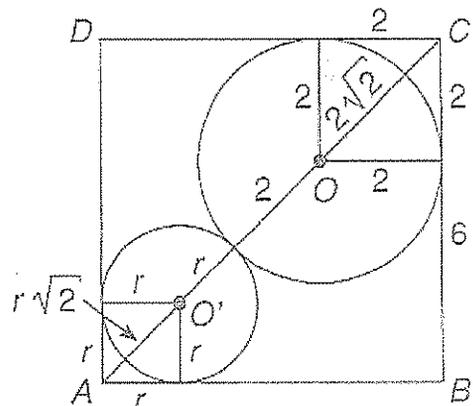
$$r\sqrt{2} + r + 2 + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$r(\sqrt{2} + 1) = 4\sqrt{2} - 2$$

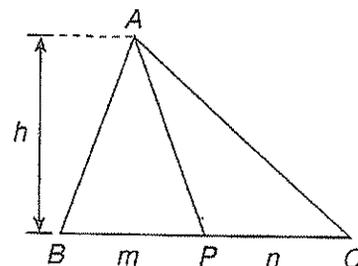
$$r = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1}$$

Racionalizando o denominador, obtemos:

$$r = 2(\sqrt{2} - 1)^2$$



06 Na figura a seguir \overline{AP} é uma ceviana qualquer do triângulo ABC. Se $BP = m$ e $PC = n$, prove que as áreas dos triângulos ABP e APC são proporcionais a m e n.

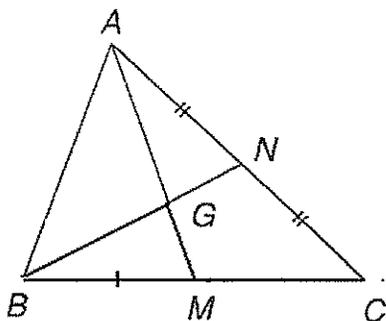


Resolução:

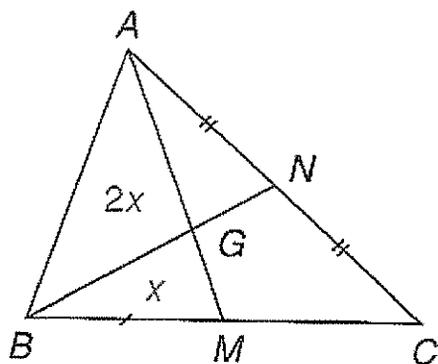
$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{\frac{mh}{2}}{\frac{nh}{2}} \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{m}{n}$$

b) Prove que, se G é o baricentro de um triângulo

ABC de área S, então $S_{ABG} = S_{BCG} = S_{ACG} = \frac{S}{3}$.



Resolução:



\overline{AM} é uma mediana de triângulo ABC. Assim,

$$S_{ABM} = \frac{S}{2}$$

Como G é o baricentro do triângulo ABC, AG e GM são proporcionais 2 e 1. Logo, as áreas dos triângulos ABG e BMG são também proporcionais a 2 e 1 (item a).

Façamos então $S_{BMG} = x$ e $S_{ABG} = 2x$.

Então, temos:

$$2x + x = \frac{S}{2} \Rightarrow 3x = \frac{S}{2} \Rightarrow x = \frac{S}{6}$$

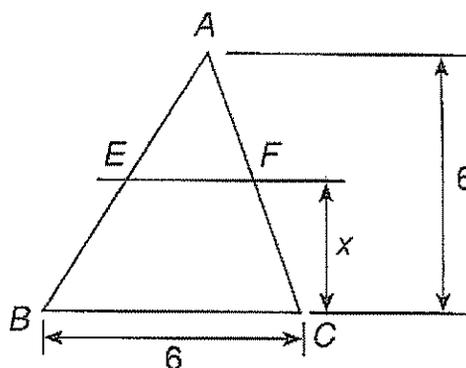
Logo,

$$S_{ABG} = 2x \Rightarrow S_{ABG} = \frac{S}{3}$$

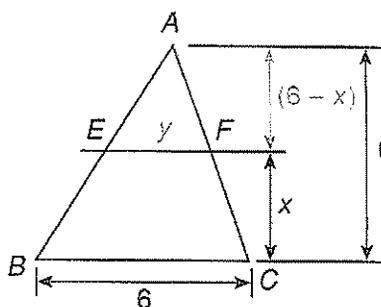
Analogamente prova-se que $S_{BCG} = \frac{S}{3}$ e

$$S_{ACG} = \frac{S}{3}.$$

07) Nesta figura, $EF \parallel BC$. Calcular x para que a área do trapézio EBCF seja igual a 10.



Resolução:



$$(\triangle AEF \sim \triangle ABC) \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{6-x}{6}$$

$$\therefore y = 6 - x$$

A área do trapézio EBCF será dada por:

$$S = \frac{(6+y)x}{2} = \frac{(6+6-x)x}{2} = \frac{-x^2 + 12x}{2}$$

Logo:

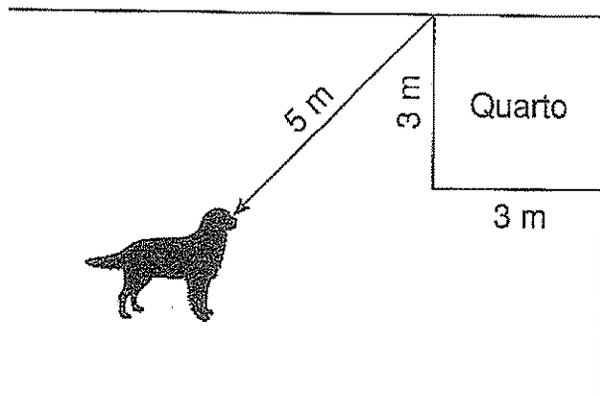
$$S = 10 \Rightarrow \frac{-x^2 + 12x}{2} = 10$$

$$-x^2 + 12x = 20$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 10)$$

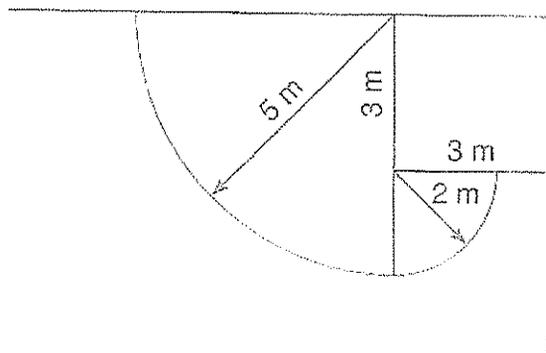
Como $x < 6$, temos $x = 2$.

08 No quintal de sua casa, Francisco possui um pequeno quarto de 3m por 3m, conforme mostra a figura. No canto, entre o muro dos fundos e uma parede do quarto, Francisco fixa uma corrente de 5m de comprimento na qual prende seu cão durante o dia.



1. Fazer uma figura ilustrativa, desenhando a linha limite onde o cão pode circular.

Resolução:



2. Calcular a área dessa região.

A área procurada é:

$$S = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$$

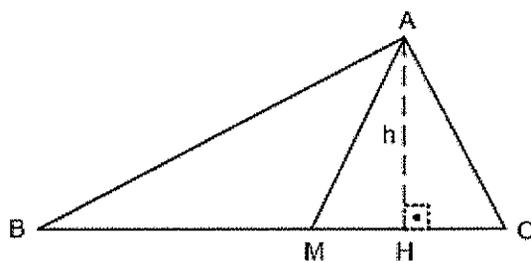
$$S = \frac{29\pi}{4} m^2$$



Exercícios de Sala

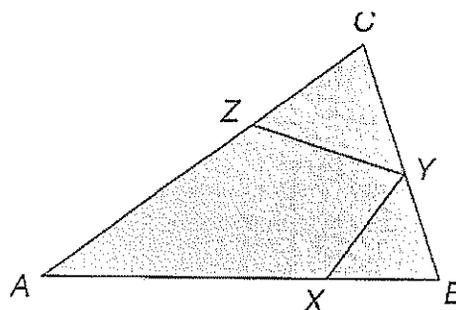
01 (Unicamp) É comum encontramos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

02 (EspCEx) No triângulo ABC, a base BC mede 8 cm, o ângulo \hat{B} mede 30° e o segmento AM é congruente ao segmento MC, sendo M o ponto médio de BC. A medida, em centímetros, da altura h, relativa ao lado BC do triângulo ABC, é de



- a) $\sqrt{2}$ cm.
- b) $2\sqrt{2}$ cm.
- c) $\sqrt{3}$ cm.
- d) $2\sqrt{3}$ cm.
- e) $3\sqrt{3}$ cm.

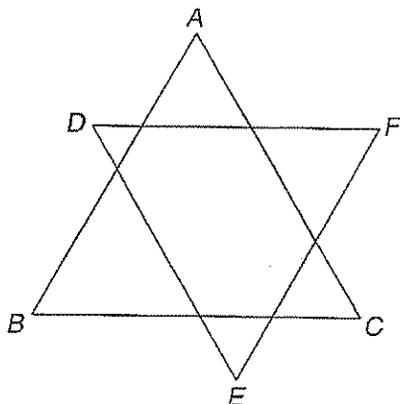
03 (Fuvest) Na figura, $AB = AC$, $BX = BY$ e $CZ = CY$.



Se o ângulo A mede 40° , então o ângulo XYZ mede:

- a) 40°
- b) 50°
- c) 60°
- d) 70°
- e) 90°

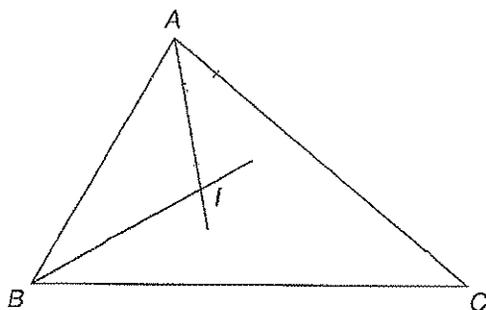
04 Nesta figura, ABC e DEF dão triângulos equiláteros de perímetros iguais a 30 cm e 24 cm, respectivamente. Além disso, cada lado de um triângulo é paralelo a um lado do outro.



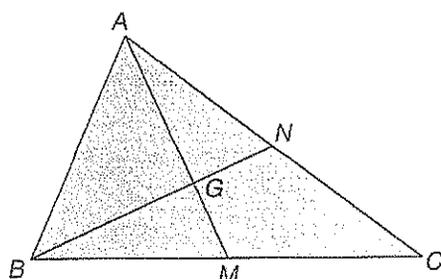
O perímetro do hexágono determinado pela intersecção dos dois triângulos é:

- a) 24 cm
- b) 20 cm
- c) 18 cm
- d) 16 cm
- e) 15 cm

05 Na figura seguinte I é o incentro do triângulo ABC. Calcule \widehat{AIB} , sabendo que $\widehat{C} = 40^\circ$.



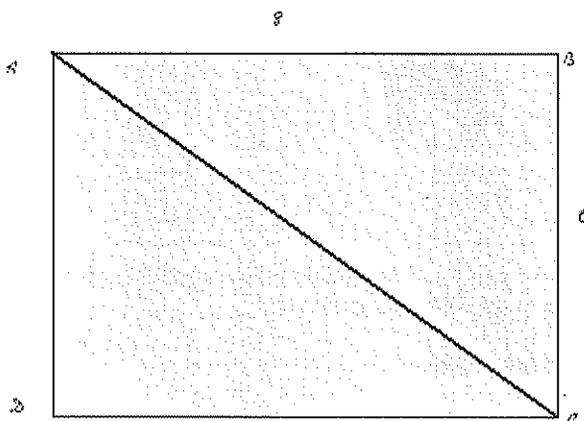
06 No triângulo ABC a seguir, M e N são os pontos médios de \overline{BC} e de \overline{AC} .



Se $AM = 12$ cm e $BN = 15$ cm, conclui-se corretamente que $AG + GN$ é igual a:

- a) 14 cm
- b) 13 cm
- c) 12 cm
- d) 11 cm
- e) 10 cm

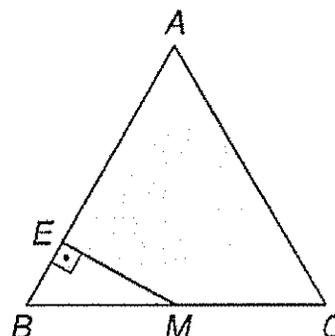
07 ABCD é um retângulo em que $AB = 8$ cm e $BC = 6$ cm.



A distância do vértice B à diagonal AC é igual a:

- a) 4,2 cm
- b) 4,4 cm
- c) 4,6 cm
- d) 4,8 cm
- e) 5,0 cm

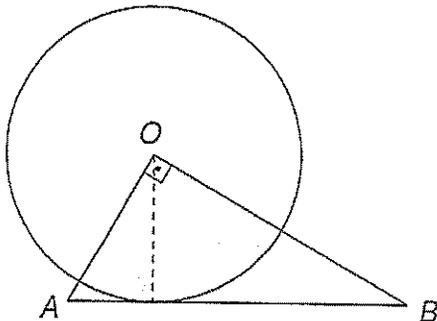
08 No triângulo isóceles seguinte, $AB = AC = 10$ cm, $BC = 12$ cm e M é o ponto médio de \overline{BC} . Então, ME é igual, em cm, a:



- a) 4

- b) 4,2
- c) 4,4
- d) 4,6
- e) 4,8

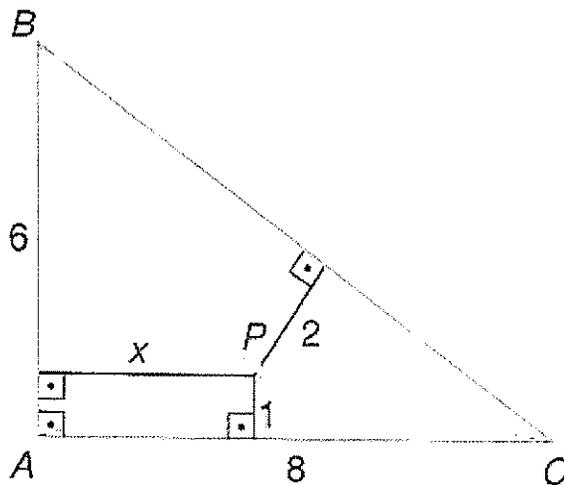
09) Seja AOB um triângulo retângulo em O, no qual $AO = \sqrt{10}$ cm e $OB = 3\sqrt{10}$ cm. Com centro em O, descreve-se a circunferência que tangencia a hipotenusa.



O raio dessa circunferência mede, em cm:

- a) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
- b) 3
- c) $\frac{3\sqrt{10}}{4}$
- d) 3,2
- e) 2,8

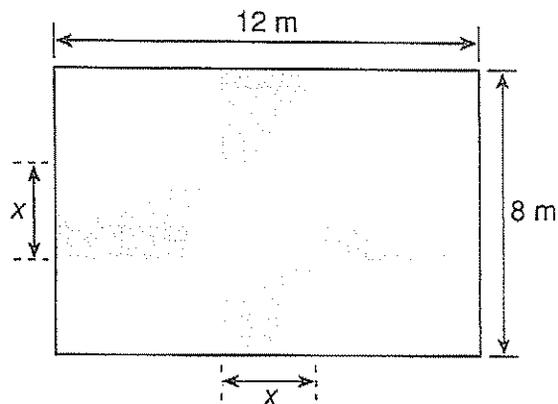
10) ABC é um triângulo retângulo em A, $AB = 6$ cm e $AC = 8$ cm. O ponto P, situado no interior do triângulo, dista 1 cm de AC e 2 cm de BC. Qual a distância de P a AB?



11) Os lados de um triângulo medem 5 cm, 6 cm, e 7 cm. Calcular, desse triângulo:

- a) A área.
- b) A maior altura.

12) Numa área retangular de 8 m por 12m, será implantado um jardim, dividido como mostra a figura a seguir, a partir de um quadrado de x metros de lado centralizado no retângulo.

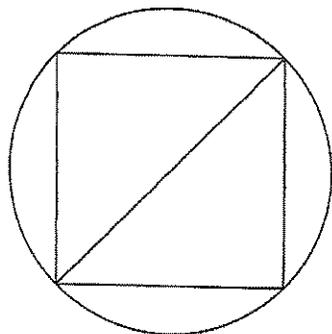


Na região em amarelo serão plantadas margaridas e na região em laranja serão plantadas sálvias.

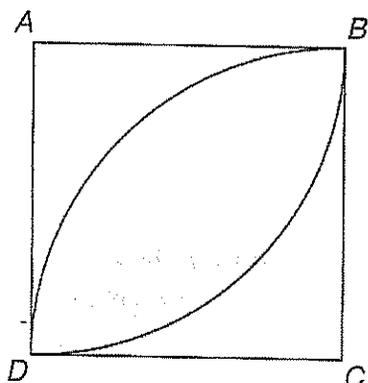
- a) Calcular, em função de x, a área reservada para as margaridas.
- b) Calcular x para que as duas flores ocupem áreas iguais.

13 Um quadrado está inscrito numa circunferência de comprimento igual a 8π cm. A área da região interna à circunferência e externa ao quadrado, em cm^2 , é igual a:

- a) $8(\pi - 1)$
- b) $8(2\pi - 1)$
- c) $16(2\pi - 1)$
- d) $16(\pi - 2)$
- e) $32(\pi - 1)$



14 (PUC-PR) No quadrado ABCD de lado 2, traçam-se dois arcos com centro nos vértices A e C e raio igual ao lado do quadrado.



A área delimitada por estes dois arcos é:

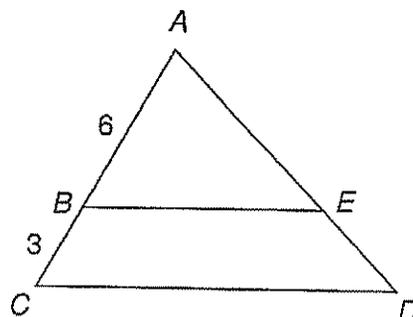
- a) $(\pi - 1)$
- b) $(\pi - 4)$
- c) $2(\pi - 1)$
- d) $(\pi - 2)$
- e) $2(\pi - 2)$

15 (PUC-SP) Se é a área de um triângulo ABC e M, N e P são os pontos médios dos lados do triângulo ABC, então a área do triângulo MNP é:

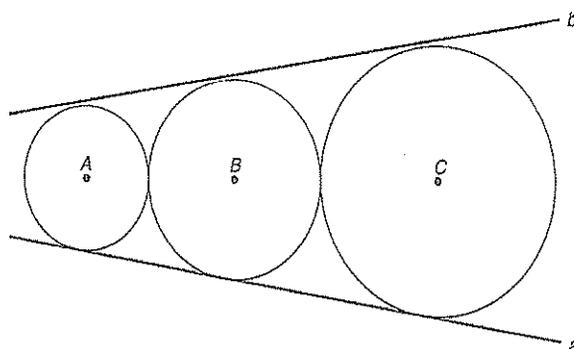
- a) $\frac{S}{5}$
- b) $\frac{S}{4}$
- c) $\frac{S}{3}$
- d) $\frac{S}{2}$
- e) S

16 Na figura seguinte, $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ $AB = 6$ e $BC = 3$. A razão entre as áreas do triângulo ABE é do trapézio BCDE é:

- a) $\frac{4}{5}$
- b) $\frac{4}{9}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) 1
- e) 2

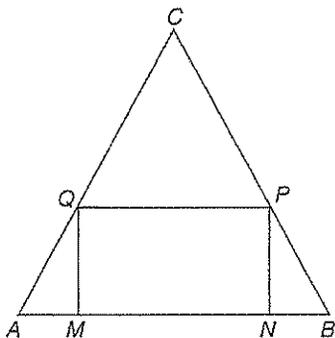


17 A circunferência de centro B tem raio r e tangencia externamente as circunferências de centros A e C, cujos raios são iguais a 1 e 2, respectivamente. As retas a e b tangenciam as três circunferências. Calcule r.



18 (Fuvest-SP) No triângulo acutângulo ABC, a base AB mede 4 cm e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. MNPQ é um retângulo cujos vértices M e N pertencem ao lado AB, P pertence ao lado BC e Q ao lado AC. O perímetro desse retângulo, em cm, é:

- a) 4
- b) 8
- c) 12
- d) 14
- e) 16



19 (Mack-SP) Considere as afirmações.

- I. Três retas paralelas distintas podem determinar 1 ou 3 planos.
- II. Duas retas s e t distintas são paralelas a um plano α ; então elas podem ser reversas.
- III. Se uma reta é perpendicular a uma reta paralela a um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Então:

- a) todas são verdadeiras;
- b) todas são falsas;
- c) somente I e II são verdadeiras;
- d) somente I e III são verdadeiras;
- e) somente II e III são verdadeiras.

20 (PUCCAMP-SP) Considere as afirmações abaixo.

- I. Duas retas distintas determinam um plano.
- II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
- III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

É correto afirmar que:

- a) apenas II é verdadeira.
- b) apenas III é verdadeira.
- c) apenas I e II são verdadeiras.
- d) apenas I e III são verdadeiras.
- e) I, II e III são verdadeiras.

21 (UFF-RJ) Considere um plano α , uma reta r concorrente com α , um ponto P que não pertença nem a r nem a α , e as seguintes afirmações.

- I. A reta s que passa por P , intercepta r e é paralela a α , é única.
- II. O plano β que contém P e r intercepta α .
- III. Qualquer reta que passe por P e seja paralela a α intercepta r .

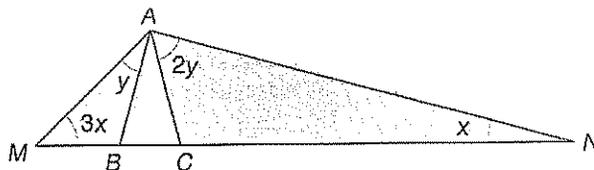
Pode-se concluir que:

- a) as afirmações I e III são verdadeiras.
- b) as afirmações I e II são verdadeiras.
- c) as afirmações II e III são verdadeiras.
- d) todas as afirmações são verdadeiras.
- e) todas as afirmações são falsas.

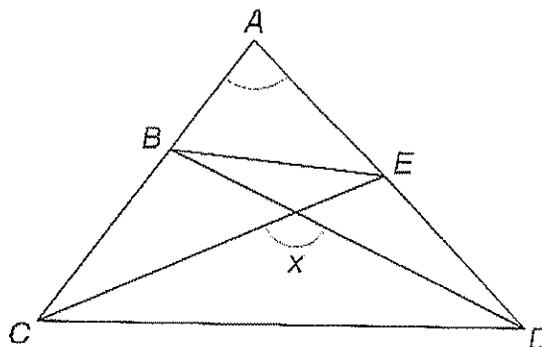


Exercícios de Casa

01 Calcule x e y , sabendo que $x + y = 42^\circ$ e que $AB = AC$.



02 Na figura, $\hat{A} = 80^\circ$, $BC = BE = ED$.



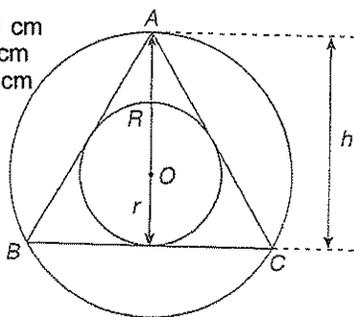
A medida x do ângulo indicado é:

- a) 100°
- b) 110°
- c) 120°
- d) 130°
- e) 135°

03 Nesta figura, ABC é um triângulo equilátero, R e r são os raios das circunferências circunscrita e inscrita e h é sua altura.

Calcule:

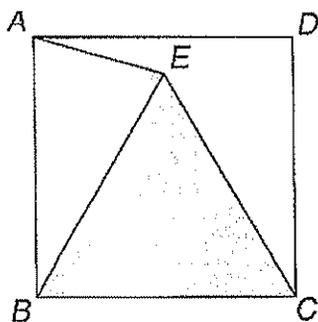
- a) R e r se $h = 21$ cm
 b) R e r se $r = 5$ cm
 c) r e h se $R = 8$ cm



04 (Cesgranrio-RJ) Assinale a alternativa que contém a propriedade diferenciadora do quadrado em relação aos demais quadriláteros:

- a) Todos os ângulos são retos.
 b) Os lados são todos iguais.
 c) As diagonais são iguais e perpendiculares entre si.
 d) As diagonais se cortam ao meio.
 e) Os lados opostos são paralelos e iguais.

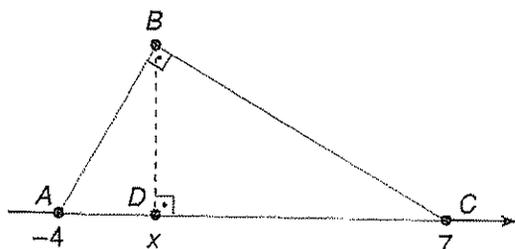
05 Na figura, ABCD é um quadrado e BCE é um triângulo equilátero.



A medida do ângulo AEB, em graus, é:

- a) 30
 b) 49
 c) 60
 d) 75
 e) 90

06 (UFSCar-SP) A hipotenusa do triângulo retângulo ABC está localizada sobre a reta real, conforme indica a figura.

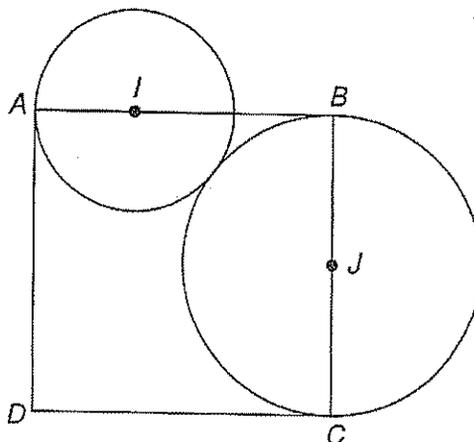


Se $x > 0$ e a medida da altura BD relativa ao lado AC do triângulo ABC é $2\sqrt{6}$.

Então x é o número real:

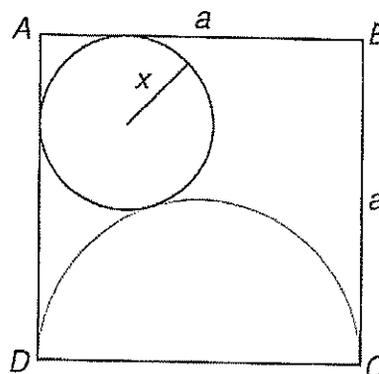
- a) $2\sqrt{3}$
 b) 4
 c) $3\sqrt{2}$
 d) 5
 e) $3\sqrt{3}$

07 Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado unitário. As circunferências de centros I e J são tangentes entre si e seus raios são $IA = x$ e $JC = y$, com $0 < x < 1$.



- a) Determine y em função de x .
 b) Determine x para que se tenha $y = x$.

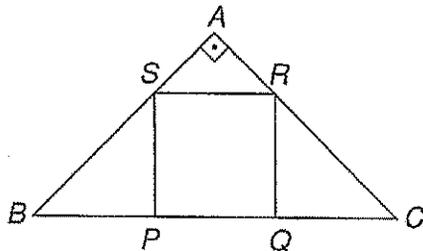
08 Na figura a seguir, ABCD é um quadrado de lado a . A circunferência de raio x tangencia os lados AB e AD e a semicircunferência de diâmetro CD.



Calcule x em função de a .

09 (Fuvest-SP) Na figura a seguir, ABC é um triângulo isósceles e retângulo em A, e PQRS é um quadrado de

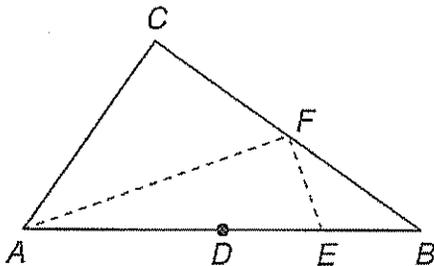
lado $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



Então, a medida do lado AB é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

10 (Cesgranrio-RJ) Seja D o ponto médio do lado AB do triângulo ABC. Sejam E e F os pontos médios dos segmentos DB e BC, respectivamente, conforme se vê na figura.

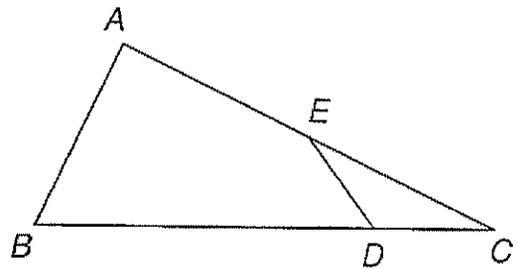


Se a área do triângulo ABC vale 96, então a área do triângulo AEF vale:

- a) 42
- b) 36
- c) 32
- d) 30
- e) 28

11 Na figura seguinte sabe-se que $BC = 10$ cm, $AC = 6$ cm, $CD = 3$ cm e $CE = 4$ cm. Se a área do triângulo CDE é igual a 3 cm^2 , a área do quadrilátero ABCDE é igual a:

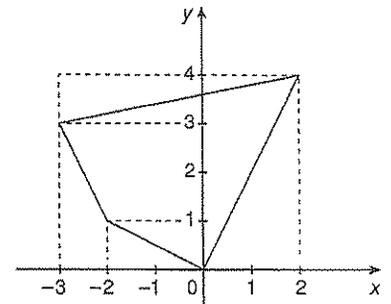
- a) 18 cm^2
- b) 15 cm^2
- c) 12 cm^2
- d) 10 cm^2
- e) 9 cm^2



12 (ITA) Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado AB e E um ponto do lado AC. Se $AB = 8$ cm, $AC = 10$ cm, $AD = 4$ cm e $AE = 6$ cm, a razão entre as áreas dos triângulos ADE e ABC é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{3}{5}$
- c) $\frac{3}{8}$
- d) $\frac{3}{10}$
- e) $\frac{3}{4}$
- f) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

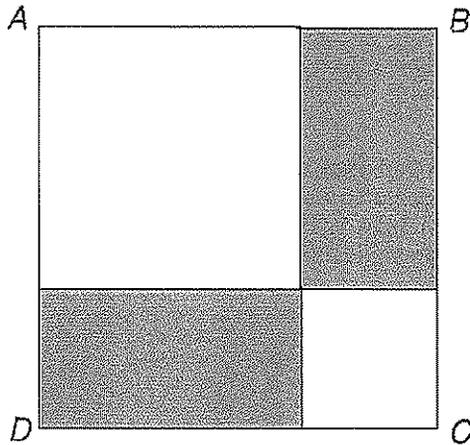
13 (UFMS) A figura mostra, no sistema cartesiano, um terreno retangular onde a região sombreada representa uma construção.



Assinale a alternativa que fornece a porcentagem da área do terreno ocupada pela construção.

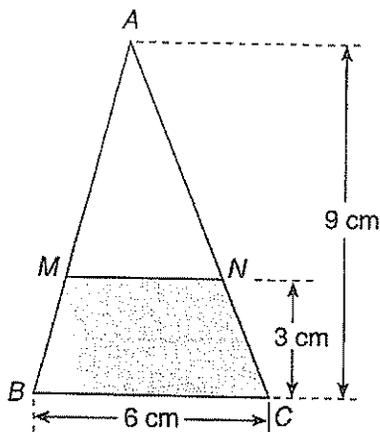
- a) 45,5%
- b) 46,5%
- c) 47%
- d) 47,5%
- e) 52,5%

14 O quadrado ABCD da figura está decomposto em dois quadrados de tamanhos diferentes e em dois retângulos. A soma das áreas dos dois quadrados menores é igual a 1.000 cm^2 , e a diferença entre as medidas dos lados desses dois quadrados é igual a 8 cm.

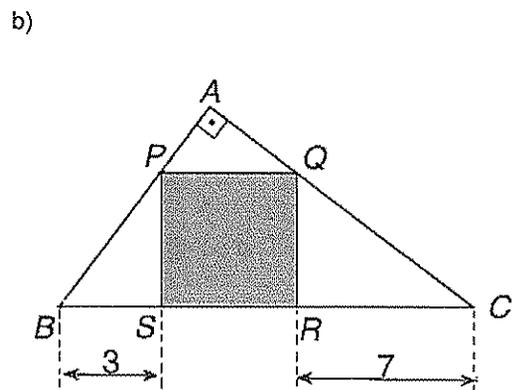
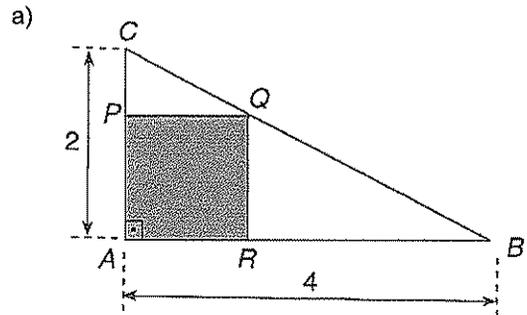


Calcule a área de um dos retângulos sombreados.

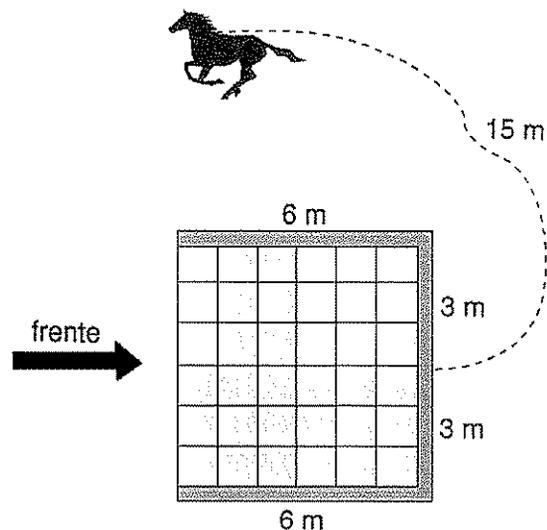
15 Na figura seguinte, sabe-se que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Calcule a área do quadrilátero BMNC.



16 Calcule a área do quadrado inscrito no triângulo retângulo dado nos seguintes casos:



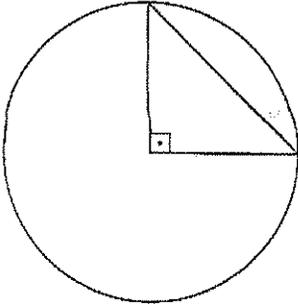
17 Em seu sítio, Dona Júlia construiu um galpão de 6 m por 6 m, aberto na frente, como mostra a figura.



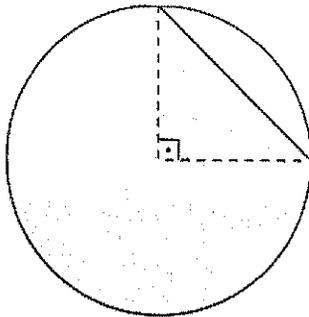
Do lado de fora do galpão, exatamente no centro da parede dos fundos, Dona Júlia amarra uma extremidade de uma corda de 15 m de comprimento e na outra extremidade prende seu cavalo. Qual é a área da região interna do galpão à qual o cavalo tem acesso?

18) Calcule a área de cada um seguinte segmentos circulares, para $r=6$.

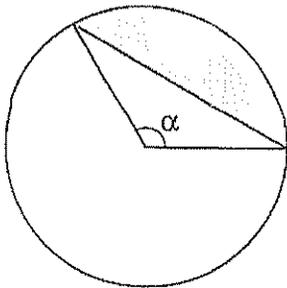
a)



b)

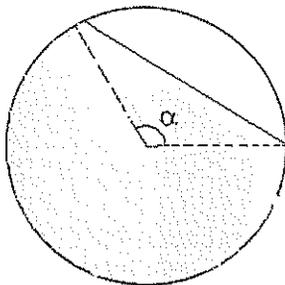


c)



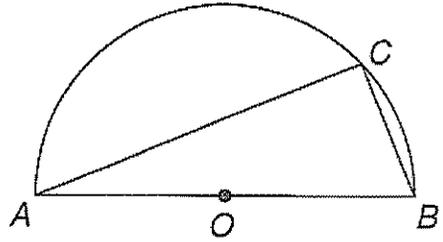
$(\alpha = 120^\circ)$

d)



$(\alpha = 120^\circ)$

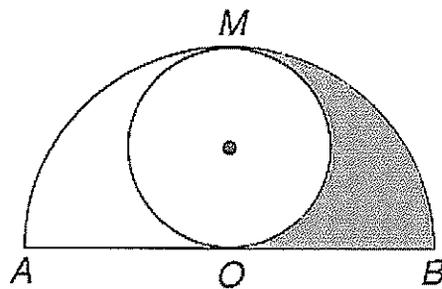
19) (Cesgranrio-RJ) O triângulo ABC está inscrito no semicírculo de centro O e diâmetro $AB = 2$.



Se o ângulo $C\hat{A}B = 30^\circ$, a área da região sombreada é:

- a) $\frac{\pi}{3}$
- b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$
- d) $\pi - 2$
- e) $\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$

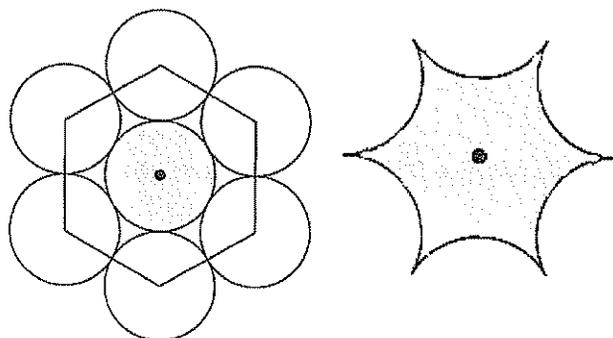
20) A figura seguinte apresenta uma semicircunferência de diâmetro AB e centro O, e uma circunferência tangente a \overline{AB} em O e tangente à semicircunferência em M.



Se a área da região sombreada é igual a $8\pi \text{ cm}^2$, o raio da semicircunferência mede:

- a) 2 cm
- b) 4 cm
- c) 6 cm
- d) 8 cm
- e) 12 cm

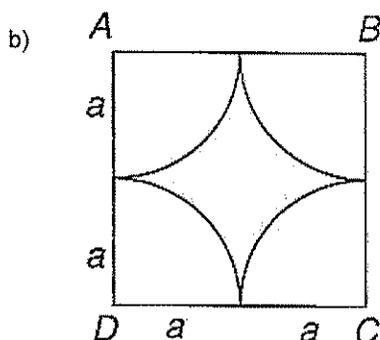
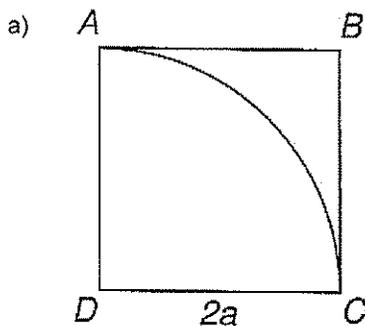
21 (Unesp) Na figura, são exibidas sete circunferências. As seis exteriores, cujos centros são vértices de um hexágono regular de lado 2, são tangentes à interna. Além disso, cada circunferência externa é também tangente às outras duas que lhe são contíguas.



Nestas condições, calcule:

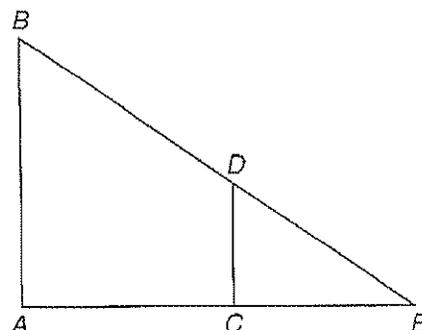
- a) A área da região sombreada, apresentada em destaque à direita.
b) O perímetro da figura que delimita a região sombreada.

22 Sendo ABCD um quadrado de lado igual a $2a$, calcule a área da região sombreada em cada um destes casos:

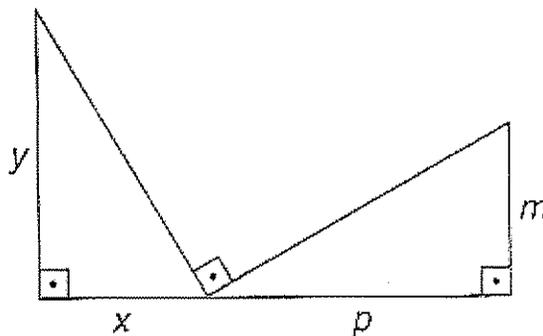


23 (PUC-SP) Na figura, as retas AB e CD são paralelas. $AB = 136$, $CE = 75$ e $CD = 50$. Quanto mede o segmento AE?

- a) 136
b) 306
c) 204
d) 163
e) 122

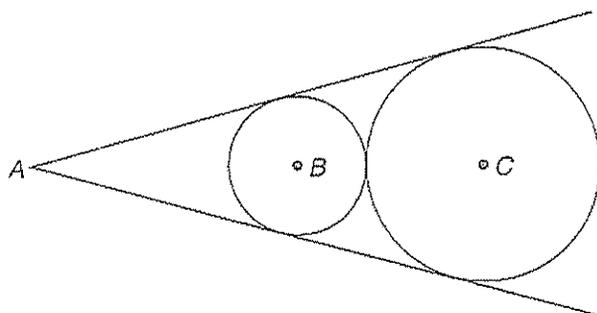


24 (Fuvest-SP) Na figura, se os ângulos assinalados são retos, temos necessariamente:

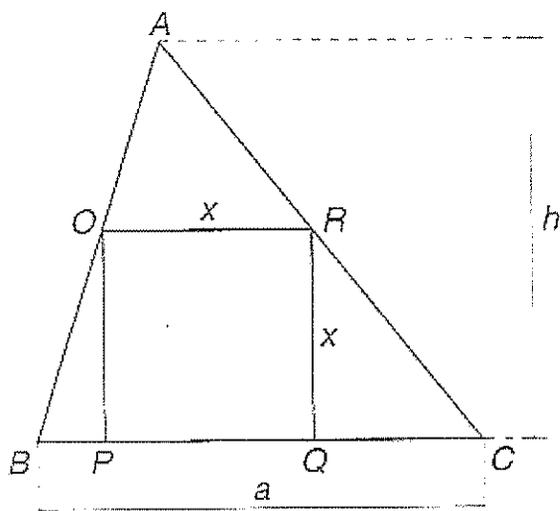


- a) $\frac{x}{y} = \frac{p}{m}$
b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$
c) $xy = pm$
d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$
e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

25 As circunferências de centros B e C têm raios $r = 2$ e $R = 3$, respectivamente, são tangentes entre si e tangenciam os lados do ângulo de vértice A. Calcule AB.



26 Na figura a seguir, OPQR é um quadrado inscrito no triângulo ABC. Calcule o lado desse quadrado em função da base a e da altura h do triângulo.



27 (FAMECA) Assinale a afirmação verdadeira.

- a) Por um ponto fora de um plano existe uma só reta paralela a este plano.
- b) Por um ponto fora de um plano existe uma só reta perpendicular a este plano.
- c) Se uma reta é paralela a dois planos, então estes planos são paralelos.
- d) Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então é perpendicular a este plano.
- e) Três pontos distintos determinam um e um só plano.

28 (UEL-PR) A reta r é a intersecção dos planos perpendiculares α e β . Os pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $A \notin \beta$, $B \in \beta$, $B \notin \alpha$. As retas \overline{AB} e r :

- a) são reversas;
- b) são coincidentes;
- c) podem ser concorrentes;
- d) podem ser paralelas entre si;
- e) podem ser perpendiculares entre si.

29 Os planos α e β são paralelos. A reta r é perpendicular a α e a reta s é perpendicular a β . Pode-se concluir que r e s :

- a) se interceptam em um único ponto;
- b) são coplanares;
- c) são perpendiculares;
- d) são ortogonais;
- e) são reversas.

30 (Vunesp-SP) Sejam α e β planos perpendiculares, $\alpha \cap \beta = r$. Em α considera-se uma reta s perpendicular a r , $S \cap r = \{A\}$, e em β considera-se t oblíqua a r , $t \cap r = \{A\}$. Dentre as afirmações:

- I. s é perpendicular a β ;
- II. t é perpendicular a s ;
- III. o plano determinado por s e t é perpendicular a β ;
- IV. todo plano perpendicular a s e que não contém A é paralelo a β ;

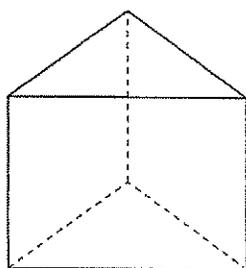
Pode-se garantir que:

- a) Somente I é falsa.
- b) Somente II é falsa.
- c) Somente III é falsa.
- d) Somente IV é falsa.
- e) Nenhuma é falsa.

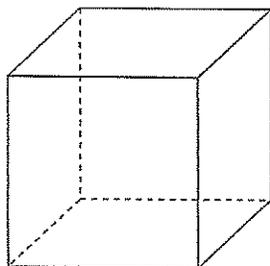
5. Poliedros e Prisma

5.1 Poliedros

Denomina-se poliedro o sólido limitado por polígonos planos que têm, dois a dois, um lado comum. Exemplos:



prisma triangular

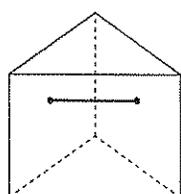


cubo

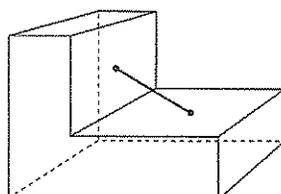
Os polígonos são denominados **faces** do poliedro. Os lados e os vértices dos polígonos denominam-se, respectivamente, **arestas** e **vértices** do poliedro.

5.2. Poliedros convexos e não-convexos

Um poliedro é dito convexo quando o segmento de reta que une dois quaisquer de seus pontos está contido no poliedro. Em caso contrário, é não-convexo.



poliedro convexo



poliedro não-convexo

De acordo com o número de faces temos os seguintes poliedros:

- Tetraedro \Rightarrow poliedro convexo com quatro faces;
- Pentaedro \Rightarrow poliedro convexo com cinco faces;
- Hexaedro \Rightarrow poliedro convexo com seis faces;
- Dodecaedro \Rightarrow poliedro convexo com dez faces;
- Octaedro \Rightarrow poliedro convexo com oito faces;
- Icosaedro \Rightarrow poliedro convexo com vinte faces.

5.3 Relação de Euler

Em todo poliedro convexo, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

V = número de vértices
F = número de faces
A = número de arestas

Propriedade

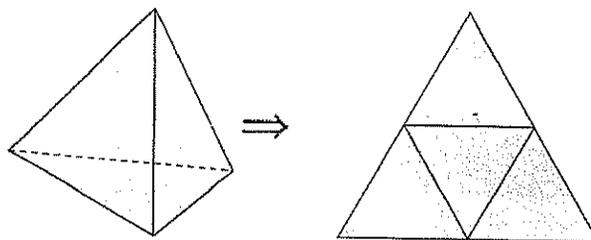
Num poliedro convexo, a soma dos ângulos de todas as faces é dada por:

$$S = (V - 2) \cdot 360^\circ$$

5.4 Poliedros regulares ou poliedros de Platão

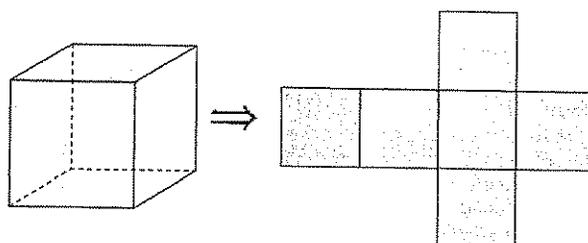
Um poliedro convexo é dito regular quando as suas faces são polígonos regulares e congruentes, e todos os ângulos poliédricos são congruentes.

Há somente cinco poliedros regulares, que são:
Tetraedro regular



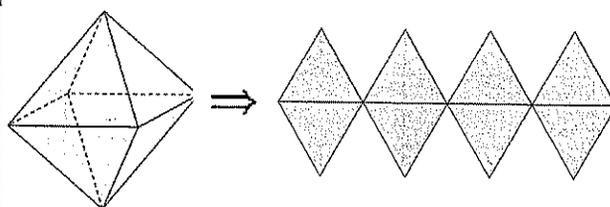
Faces: triângulos equiláteros

Hexaedro regular (cubo)



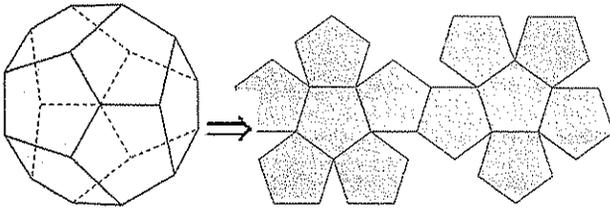
Faces: quadrados

Octaedro regular



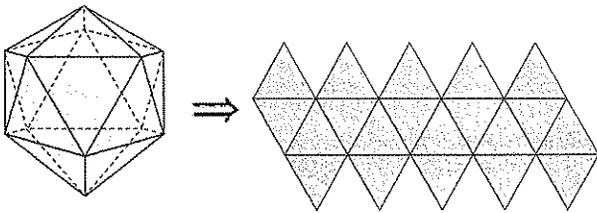
Faces: triângulos equiláteros

Dodecaedro regular



Faces: pentágonos regulares

Icosaedro regular



Faces: triângulos equiláteros

Chamando de:

m = número de arestas concorrentes em cada vértice

n = número de lados em cada face

V = número de vértices do poliedro

A = número de arestas do poliedro

F = número de faces do poliedro

S = soma dos ângulos de todas as faces do poliedro

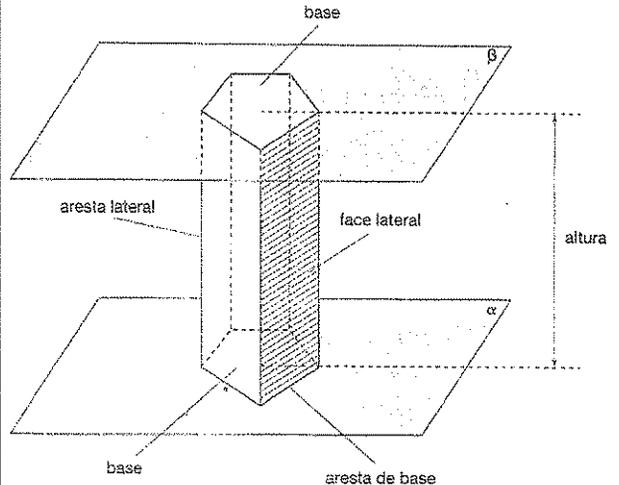
Temos:

Nome	m	n	V	A	F	S
tetraedro	3	3	4	6	4	720°
hexaedro	3	4	8	12	6	2160°
octaedro	4	3	6	12	8	1440°
dodecaedro	3	5	20	30	12	6480°
icosaedro	5	3	12	30	20	3600°

PRISMA

5.5. Elementos e classificação

Considere o prisma:



As bases são polígonos congruentes.

Os prismas são designados de acordo com o número de lados dos polígonos das bases.

Bases	Prisma
triângulos	triangular
quadriláteros	quadrangular
pentágonos	pentagonal
hexágonos	hexagonal
e assim por diante	

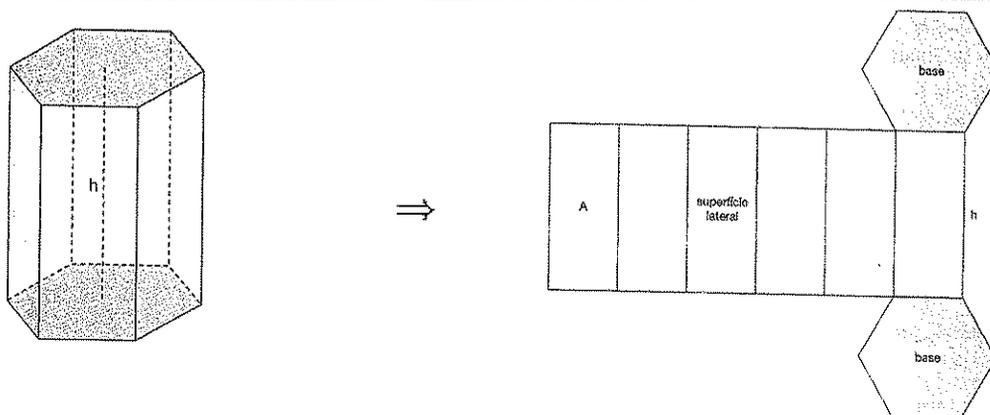
Se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, o prisma é dito **reto**.

Se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases, o prisma é dito **oblíquo**.

O prisma será **regular** quando for reto e sua base for um polígono regular.

5.6 Áreas e volume

Considere o prisma:



· **Área**

Área de uma face lateral – é a área A de uma das faces laterais (paralelogramo) que constituem o prisma.

Área lateral – adicionando todas as áreas das faces laterais, encontramos a área lateral A_t do prisma:

$$A_t = n \cdot A$$

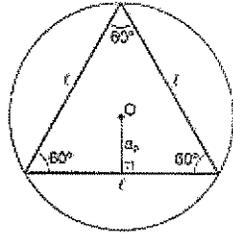
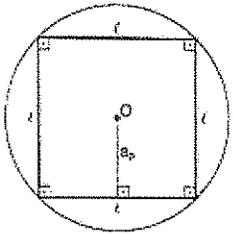
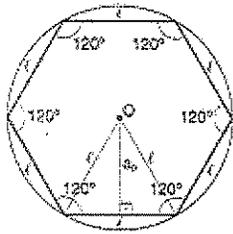
· **Volume**

O volume V de um prisma é dado pelo produto da área da base pela altura h :

$$V = A_b \cdot h$$

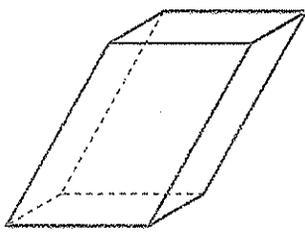
5.7 Apótema de um polígono regular

É o segmento cujas extremidades são o centro e o ponto médio do lado do polígono.

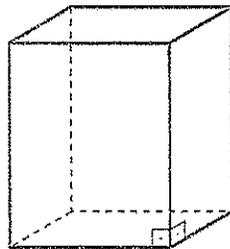
Triângulo equilátero	Quadrado	Hexágono regular
		
$a_p = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{6}$	$a_p = \frac{l}{2}$	$a_p = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$

5.8. Paralelepípedo

Denomina-se paralelepípedo o prisma no qual as seis faces são paralelogramos.



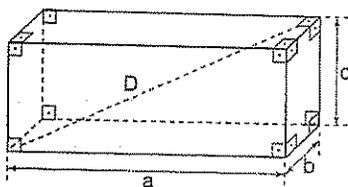
paralelepípedo oblíquo



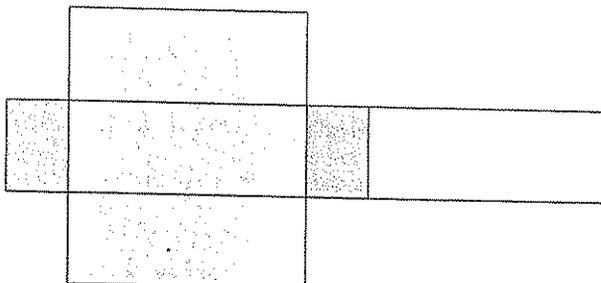
paralelepípedo reto

• **Paralelepípedo retângulo ou ortoedro**

É um paralelepípedo reto cujas faces são retângulos.



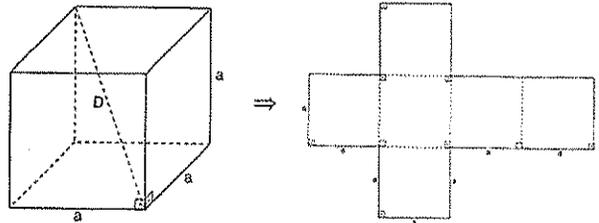
a = comprimento
b = largura
c = altura
D = diagonal



Diagonal	$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Área total	$A_t = 2(ab + ac + bc)$
volume	$V = abc$

5.9 **Cubo**

Quando as três dimensões são iguais, ou seja, $a = b = c$, o paralelepípedo é denominado cubo.



Diagonal	$D = a\sqrt{3}$
Área total	$A_t = 6a^2$
volume	$V = a^3$



Exercícios Comentados

01 A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo vale 720° . Sabendo-se que o número de faces vale $\frac{2}{3}$ do número de arestas, pode-se dizer que o número de faces vale.

- a) 6.
- b) 4.
- c) 5.
- d) 12.
- e) 9.

Resolução:

$$\begin{aligned} Se &= 720 \\ (V-2) 360 &= 720 \\ V &= 4 \end{aligned}$$

Como $F = \frac{2}{3} A$ e substituindo em

$$V + F = A + 2$$

$$4 + \frac{2A}{3} = A + 2 \rightarrow A = 6$$

$$F = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

02 (Cesgranrio) Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal. O número de vértices desse poliedro é de:

- a) 6.
- b) 7.
- c) 8.
- d) 9.
- e) 10.

Resolução:

$$N^{\circ} \text{ de faces} = \begin{cases} 4f_3; n = 3 \\ 2f_4; n = 4 \\ 1f_6; n = 6 \end{cases}, \text{ logo}$$

$$F = 7$$

$$\text{Substituindo em } n F = 2 A,$$

$$3 + 4 + 4 + 2 + 6 + 1 + 2A$$

$$A = 13$$

$$\text{Como } V + F = A + 2$$

$$V + 7 = 13 + 2; \therefore V = 8$$

03 (Fuvest) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x é:

- a) 16.
- b) 17.
- c) 18.
- d) 19.
- e) 20.

$$\text{Resolução } V_{\text{par}} = V_{\text{cubo 1}} + V_{\text{cubo 2}}$$

$$8 \cdot 8 \cdot x = 10^3 + 6^3$$

$$64x = 1216$$

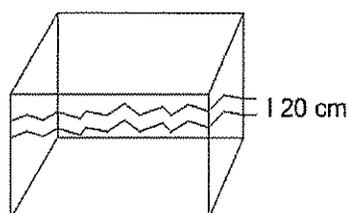
$$x = 19$$

04 (Unicamp) Ao serem retirados 128 litros de água de uma caixa d'água de forma cúbica, o nível da água baixa 20 centímetros.

a) Calcule o comprimento das arestas da referida caixa.

b) Calcule sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

Resolução:



$$128L = 128 \text{ dm}^3 = 128000 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{refinado}} = x \cdot x \cdot 20 = 128.000$$

$$x = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$$

$$\text{a) } 80 \text{ cm}$$

$$\text{b) } V = 8^3 = 512 \text{ dm}^3 = 512 \text{ L.}$$

05 (EsPCEx) Sabe-se que um prisma hexagonal regular tem por altura o diâmetro da circunferência circunscrita à base, e que a maior de suas diagonais mede $20\sqrt{2}$ cm. Sua área total e seu volume valem, respectivamente:

$$\text{a) } 1200 \text{ cm}^2 \text{ e } 300\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

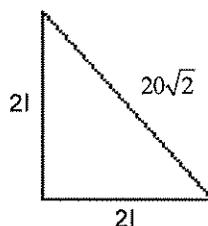
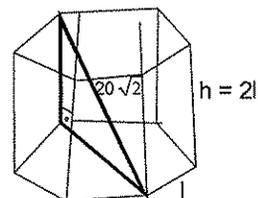
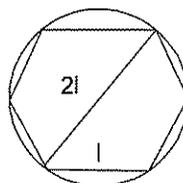
$$\text{b) } 3\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e } 3 \text{ cm}^3.$$

$$\text{c) } 3(4 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2 \text{ e } 3\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{d) } 1500\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e } 3000\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{e) } 1200\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e } 3000 \text{ cm}^3.$$

Resolução:



$$2l = 20$$

$$l = 10$$

$$A_T = A_L + 2A_B$$

$$A_L = 6 \cdot 10 \cdot 20 = 1200$$

$$A_B = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}$$

$$A_T = 1200 + 300\sqrt{3}$$

$$V = A_B \cdot H$$

$$= 150\sqrt{3} \cdot 20 = 3000\sqrt{3}$$



Exercícios de Sala

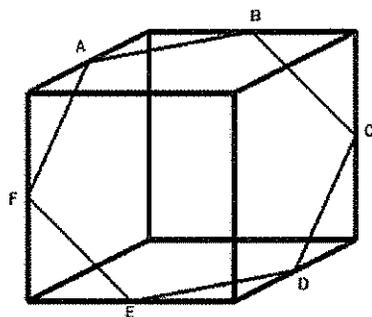
01 (Cesgranrio) Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

- a) 16.
- b) 18.
- c) 24.
- d) 30.
- e) 44.

02 (Unirio) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

- a) 35.
- b) 34.
- c) 33.
- d) 32.
- e) 31.

03 (EsPCEEx) O hexágono regular $ABCDEF$ é uma secção plana de um cubo de aresta $2a\sqrt{3}$. Cada vértice do polígono divide ao meio a aresta na qual está apoiado.



A área do hexágono é

- a) $9a^2\sqrt{3}$.
- b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
- c) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.
- d) $4a^2\sqrt{3}$.
- e) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$.

04 (EsPCEEx) Um prisma reto com 5 cm de altura e base retangular com dimensões de 4 cm e 6 cm contém água até uma altura de 3 cm. Um cubo maciço de aresta igual a 2 cm é colocado dentro deste prisma, ficando totalmente submerso. A partir de então, a altura do nível da água, em cm, passa a ser de:

- a) $\frac{13}{4}$.
- b) $\frac{10}{3}$.
- c) $\frac{15}{4}$.
- d) $\frac{13}{3}$.
- e) $\frac{14}{4}$.

05 (EsPCEEx) Dispondo de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, com as dimensões da figura, preenchido com água até o nível indicado, um aluno fez o seguinte experimento:

- Mergulhou na água um cubo maciço, com 1 cm^3 de volume;
- Mergulhou, sucessivamente, novos cubos, cada vez maiores, cujos volumes formam, a partir do cubo de 1 cm^3 de volume, uma progressão aritmética de razão 2 cm^3 .

Após mergulhar certo número de cubos, que ficaram completamente submersos, verificou que a altura do nível da água passou para 39 cm.

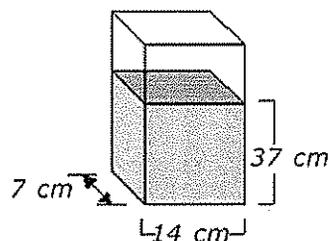


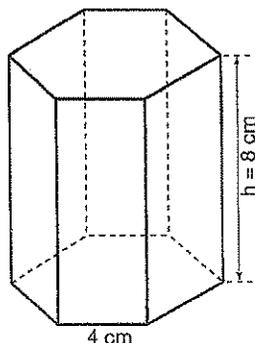
Figura fora de escala

Com base nas informações, a área total do último cubo colocado é de

- a) 54 cm^2 .
- b) 42 cm^2 .
- c) 24 cm^2 .
- d) 150 cm^2 .
- e) 216 cm^2 .

06 Dado o prisma hexagono regular da figura, calcule:

- o apótema da base
- a área total
- o volume



07 (PUC-MG) As bases de um prisma reto de altura 16 são trapézios isósceles de bases 4 e 6. Calcule a área total do prisma, sabendo que seu volume é 160.

08 Considere um prisma hexagonal regular tal que a razão entre a aresta da base a e a aresta lateral ℓ é

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sabendo que, se a aresta da base for aumentada

2 cm, o volume V do prisma ficará aumentado 108 cm^3 , permanecendo a aresta lateral a mesma, calcule o volume do prisma.

09 Calcule, em litros, o volume de uma caixa-d' água em forma de um prisma reto, de aresta lateral 6 m, sabendo que a base é um losango cujas medidas das diagonais são 7 m e 10 m.

10 As medidas das três dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em P.G. Sabendo que a área total e o volume deste paralelepípedo são, respectivamente, 112 cm^2 e 64 cm^3 , calcule as medidas das suas dimensões.

11 Uma caixa tem 1 m de comprimento, 2 m de largura e 3 m de altura. Uma segunda caixa, de mesmo volume, tem comprimento x metros maior do que a anterior, largura x metros maior do que a da anterior a altura x metros menor do que a da anterior. o valor de x é:

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{6}$
- $\sqrt{7}$

12 A água de um reservatório com a forma de um paralelepípedo retângulo de comprimento 30 m e largura 20 m atingia a altura de 10 m. Com a falta de chuvas e o calor, 1.800 metros cúbicos de água do reservatório evaporaram. A água restante no reservatório atingiu a altura de

- 2 m
- 3 m
- 7 m
- 8 m
- 9 m

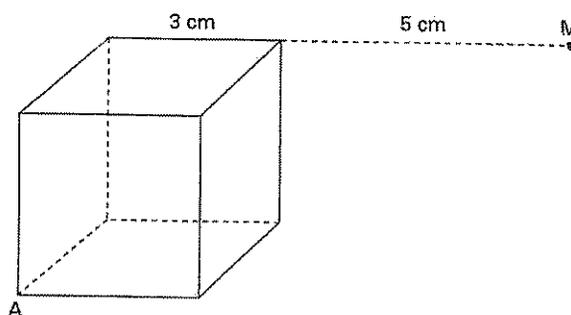
13 Uma formiga mora na superfície de um cubo de aresta a . O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento

- $a\sqrt{2}$
- $a\sqrt{3}$
- $3a$
- $a\sqrt{5}$
- $(1 + \sqrt{2})a$

14 Se a, B, C e D são os centros das faces laterais de um cubo de volume 8, então a área do polígono cujos vértices são A, B, C e D é:

- 2
- $\sqrt{2}$
- 4
- $2\sqrt{2}$
- $8\sqrt{2}$

15 Na figura, cada aresta do cubo mede 3 cm. Prolongando-se uma delas em 5 cm, obtemos o ponto M . A distância, em centímetros, de M ao vértice A é:

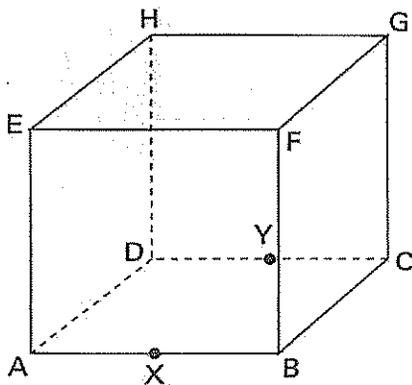


- $2\sqrt{21}$
- $\sqrt{82}$
- $8\sqrt{3}$

- d) $8\sqrt{2}$
e) 9

16 Na figura abaixo, X e Y são, respectivamente, os pontos médios das arestas \overline{AB} e \overline{CD} do cubo. A razão entre o volume do prisma AXFEDYGH e o cubo é:

- a) $\frac{3}{8}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{5}{6}$



17 Um prisma hexagonal regular tem como altura a diagonal de um cubo de aresta a . Se o volume do cubo é igual ao do prisma, a aresta da base do prisma mede:

- a) $a\sqrt{3}$
b) $a\sqrt{2}$
c) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$
e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



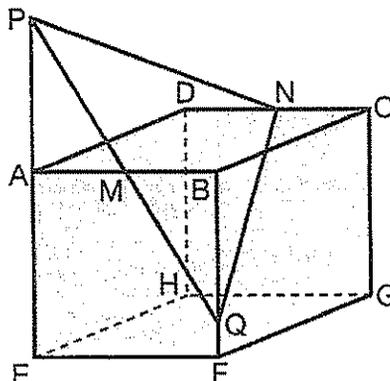
Exercícios de Casa

01 (EFEI-MG) A área de um paralelepípedo retângulo é 720 m^2 . A diagonal de uma de suas faces mede 20 m e a soma das suas dimensões é 34 m. Calcule as dimensões deste paralelepípedo.

02 (Vunesp-SP) Uma piscina de forma retangular tem 8 m de largura, 15 m de comprimento, 0,9 m de profundidade num de seus extremos e 2,7 m de profundidade no outro extremo, sendo seu fundo um plano inclinado. Calcule o volume de água da piscina quando a altura do nível da água é de 0,6 m na extremidade mais funda.

03 Um reservatório tem a forma de um paralelepípedo reto cuja base (que está assentada no solo) é um retângulo de 3 m por 2 m e cuja altura é 1 m (medidas internas) e contém 60 cm de altura de água. Um escoadouro localizado na sua base escoia a água (quando ligado) na razão de $0,02 \text{ m}^3$ por minuto. A parti de um certo instante, quanto tempo este escoadouro deve permanecer funcionando para que o volume ocupado pelo líquido seja exatamente a metade da capacidade do reservatório?

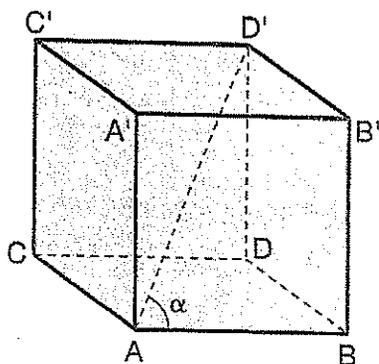
04 (Fuvest-SP) Considere um cubo ABCDEFGH de lado 1 unidade de comprimento, como na figura. M e N são os pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} , respectivamente. Para cada ponto P da reta \overline{AE} seja Q o ponto de intersecção das retas \overline{PM} e \overline{BF} .



a) Prove que o $\triangle PQN$ é isósceles.

b) A que distância do ponto A deve estar o ponto P para que o $\triangle PQN$ seja retângulo?

05 (Vunesp-SP) Sendo ABCDA'B'C'D' um cubo, calcular o seno do ângulo α .



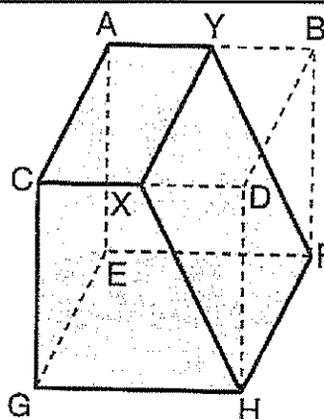
06 (Unicamp-SP) Procura-se construir um cubo grande empilhando cubos pequenos e todos iguais. Quando se coloca um certo número de cubos pequenos em cada aresta, sobram cinco; se tentasse acrescentar um cubo a mais em cada aresta, ficariam faltando trinta e dois. Quantos são os cubos pequenos?

07 Quanto se deve aumentar a medida das arestas de um cubo cujas diagonais medem $\sqrt{6}$ cm a fim de que seu volume duplique?

08 Qual deve ser a altura de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado a, para que seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta a?

09 A figura abaixo destaca o sólido que restou de um cubo de aresta a, após retirar-se dele o prisma XDHYBF, sendo \overline{XY} paralelo a \overline{CA} . Se o volume do sólido res-

tante é $\frac{4}{7}$ do volume do cubo, ache a fração de a que expressa a medida de \overline{CX} .



10 (Vunesp-SP) Uma caixa-d' água com forma de um paralelepípedo reto de $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ de base e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m de

altura está sobre uma laje horizontal com água até a altura h. Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas da base (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim sendo, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse 30° . Calcular a altura h.

11 (EsPCEx) Na figura abaixo, o segmento BC, paralelo ao segmento AD, representa o lado do hexágono regular inscrito na circunferência de centro O. O comprimento do arco ABC é de $\frac{20}{3}\pi$ cm. Nestas condições, a medida, em cm, do raio da circunferência é de:

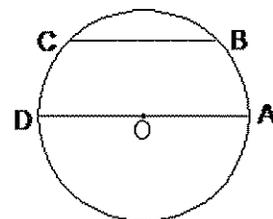
a) $\frac{5\pi}{3}$.

b) $\frac{10\pi}{3}$.

c) 20.

d) 15.

e) 10.



12 (EsPCEx) Pedro construiu um aquário em forma cúbica. Enquanto o enchia, notou que, colocando 64 litros de água, o nível subia 10 cm. O volume máximo, em litros, que comporta esse aquário é de

a) 216.

b) 343.

c) 512.

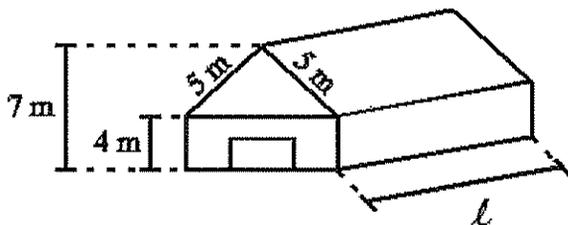
d) 729.

e) 1024.

13 (EsPCEX) Uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo tem largura de 6 metros, diagonal do fundo com 10 metros e diagonal da face que contém o comprimento igual a $4\sqrt{5}$ metros. Para enchê-la com água será utilizado um caminhão tanque com capacidade de 6000 litros. O número de cargas completas, desse mesmo caminhão, necessárias para que a piscina fique completamente cheia é:

- a) 24.
- b) 28.
- c) 32.
- d) 54.
- e) 80.

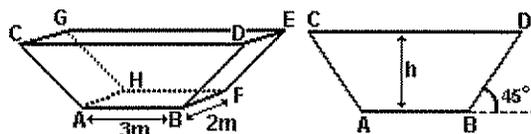
14 (EsPCEX) Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até 200m^3 . Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento (λ) que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:



(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

- a) 13m.
- b) 20 m.
- c) 5 m.
- d) 25 m.
- e) 15m.

15 (UNB) Na figura abaixo, à esquerda, representa-se um reservatório de altura h e base retangular de 2 m de largura e 3 m de comprimento e, à direita, representa-se uma das paredes frontais desse reservatório. As paredes laterais (BDEF e ACGH) são inclinadas em 45° com relação ao plano da base e as paredes frontais são perpendiculares à base do reservatório. Calcule, em decímetros, o valor da altura h necessária para que a capacidade do reservatório seja de 8.000 L. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.



16 (Acafe-SC) Um poliedro convexo tem 15 faces triangulares, 1 face quadrangular, 7 faces pentagonais e 2 faces hexagonais. O número de vértices desse polidro é:

- a) 25
- b) 48
- c) 73
- d) 96
- e) 71

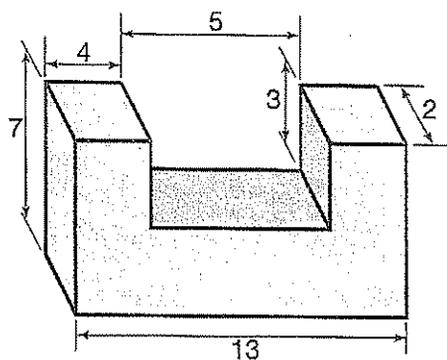
17 (UCRS) Se a soma dos ângulos das faces de um poliedro regular é 1440° , então o número de vértices desse poliedro é:

- a) 12
- b) 8
- c) 6
- d) 20
- e) 4

18 (Fatec-SP) Se considerarmos as retas suportes das arestas de um cubo, então o número de pares de retas reversas que podemos formar é:

- a) 8
- b) 16
- c) 24
- d) 32
- e) 40

19 (Marck-SP) A área total do sólido abaixo é:



- a) 204
- b) 206
- c) 222
- d) 244
- e) 262

20 (Cescea-SP) O volume do prisma hexagonal regular, de altura $\sqrt{3}$ cm e cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm, é:

- a) 18 cm^3
- b) $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- c) 3 cm^3
- d) $\sqrt{3} \text{ cm}^3$

6. Pirâmides e Cones

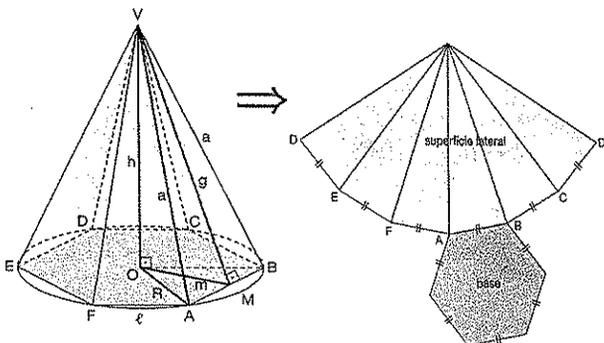
Pirâmide:

6.1 Classificação e elementos

Uma pirâmide é dita **regular** quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base.

As pirâmides são classificadas de acordo com o número de lados dos polígonos da base:

- Pirâmide triangular \Rightarrow a base é um triângulo;
- Pirâmide quadrangular \Rightarrow a base é um quadrilátero;
- Pirâmide pentagonal \Rightarrow a base é um pentágono;
- Pirâmide hexagonal \Rightarrow a base é um hexágono;



Numa pirâmide regular, convém destacar:

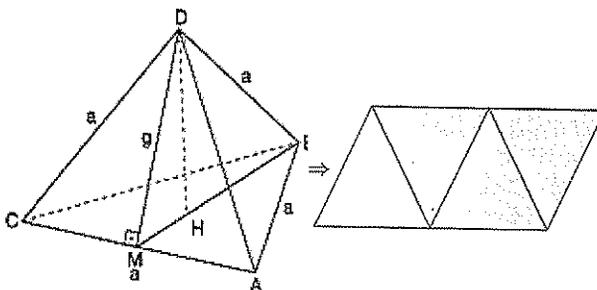
- 1°) O polígono da base é regular, de lado ℓ , e, portanto, inscrivível numa circunferência de raio $\overline{OA} = R$, chamado **raio da base**.
- 2°) O apótema do polígono regular da base é chamado **apótema da base** e sua medida será indicada por m .
- 3°) As arestas laterais são congruentes e sua medida será indicada por a .
- 4°) As faces laterais são triângulos isóceles congruentes.
- 5°) A altura de uma face lateral (é a altura relativa à base de um triângulo isóceles) é chamada **apótema da pirâmide** e sua medida será indicada por g .

6.2 Área e volume

Área total	$A_t = A_l + A_b$
volume	$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

6.3 Tetraedro regular

É uma pirâmide em que todas as faces são triângulos equiláteros.



Considerando a figura:

- 1°) O apótema lateral do tetraedro é a altura de um triângulo equilátero, ou seja, $g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- 2°) O ponto H, sendo o centro de um triângulo equilátero, é o baricentro; logo:

$$\overline{MH} = \frac{1}{3} g$$

$$\overline{HB} = \frac{2}{3} g$$

Área da base	$A_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
Área total	$A_t = a^2 \sqrt{3}$
volume	$V = \frac{a^2 \sqrt{2}}{12}$

Cone:

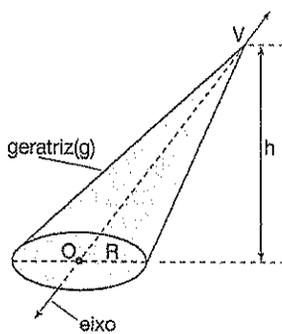
6.4 Classificação e elementos

Um cone pode ser classificado em:

Cone oblíquo: quando o eixo é oblíquo à base.

Cone reto: quando o eixo é perpendicular à base.

Considerando a figura:



O círculo C é a base do cone e seu raio R é chamado raio do cone.

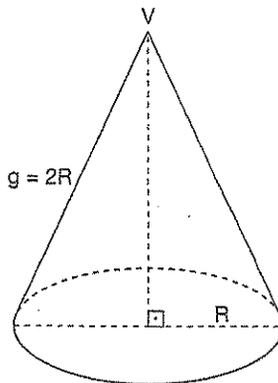
A distância entre o vértice V e o plano α é a altura do cone e sua medida é expressa por h.

A reta que passa pelo vértice V e o centro O da base chama-se eixo do cone.

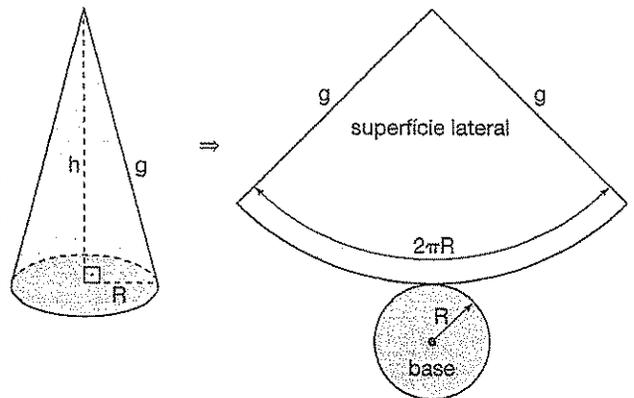
Se P é um ponto da circunferência da base, então o segmento VP é chamado

geratriz.

Se a secção meridiana de um cone for um triângulo equilátero, ou seja, $g = 2R$, então, o cone é dito cone equilátero.



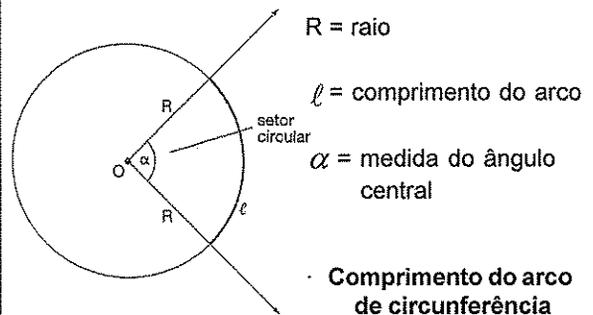
6.5 Áreas e volume



área da base	$A_b = \pi R^2$
área lateral	$A_t = \pi Rg$
área total	$A_t = \pi R(g + R)$
volume	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

6.6 Setor circular

Seja o setor circular da figura:



$$\alpha \text{ em graus} \begin{cases} \text{ângulo} & \text{comprimento} \\ 360^\circ & \text{----- } 2\pi R \\ \alpha & \text{----- } l \end{cases} \quad \boxed{\ell = \frac{\alpha \cdot R \cdot \pi}{180^\circ}}$$

$$\alpha \text{ em radianos} \begin{cases} \text{ângulo} & \text{comprimento} \\ 2\pi & \text{----- } 2\pi R \\ \alpha & \text{----- } l \end{cases} \quad \boxed{\ell = \alpha \cdot R}$$

Área do setor circular

{	comprimento do arco	área	$A_{\text{setor}} = \frac{\ell \cdot R}{2}$
	$2\pi R$ -----	πR^2	
	ℓ -----	A_{setor}	

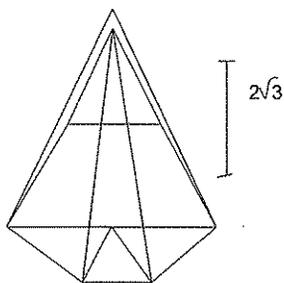


Exercícios Comentados

01 (EsPCEX) Uma pirâmide de base hexagonal e altura $h = 2\sqrt{3}$ cm é seccionada por um plano perpendicular à sua base, de tal modo que a secção gerada tem a maior área possível. Sabendo – se que a área de secção é $5\sqrt{3}$ cm², o volume da pirâmide, em cm³, é:

- a) $\frac{25}{2}$.
- b) $\frac{50}{3}$.
- c) $\frac{75}{4}$.
- d) $\frac{125}{3}$.
- e) $\frac{70}{3}$.

Resolução:



$$A_s = \frac{bh}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$b \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$b = 5$$

Como a base da pirâmide é formada por triângulos e equiláteros, $2l = 5 \rightarrow l = \frac{5}{2}$

$$V_{\text{pin}} = \frac{A_B \cdot H}{3}$$

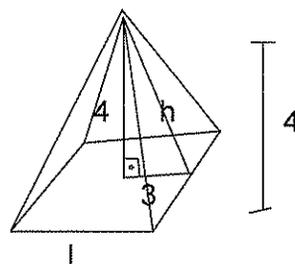
$$A_B = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 25\sqrt{3}}{4 \cdot 4} = \frac{75\sqrt{3}}{8}$$

$$N_{\text{pin}} = \frac{75\sqrt{3}}{8} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{75}{4}$$

02 (EsPCEX) A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é 36 m². Se a altura da pirâmide me 4 m, sua área total, em m², é igual a:

- a) 48.
- b) 54.
- c) 96.
- d) 120.
- e) 144.

Resolução:



$$A_B = 36$$

$$l_2 = 36 : 4 = 9$$

$$A_l = A_B + A_L$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{bh}{2} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 60$$

$$A_T = 36 + 60 = 96$$

03 Calcule a área e o volume de um tetraedro regular de altura 12 cm.

Resolução:

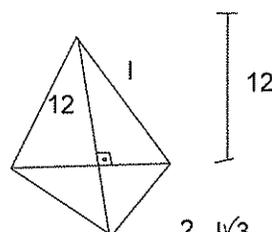
$$l^2 = 12^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$l^2 = 144 + \frac{l^2}{3}$$

$$3l^2 = 432 + l^2$$

$$l^2 = 216$$

$$l = 6\sqrt{6}$$



$$\frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Pelo triângulo retângulo da figura:

$$V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

$$A_t = 4 \cdot A_d$$

$$A_t = 4 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = (6\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$A_t = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

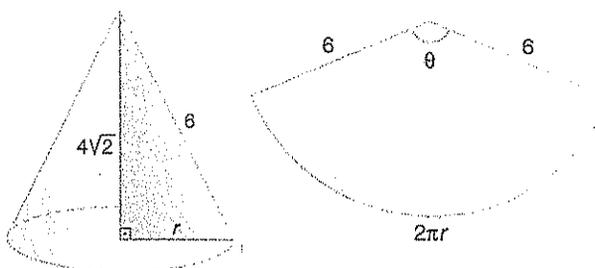
$$V = \frac{l^2 \sqrt{3}}{3} \cdot 12$$

$$V = \frac{216\sqrt{3}}{4} \cdot 4$$

$$V = 216\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

- 04 A altura e a geratriz de um cone reto medem $4\sqrt{2}$ e 6, respectivamente. A planificação da superfície lateral desse cone resulta num setor circular cujo ângulo mede θ . Calcule θ em radianos e em graus.

Resolução:



Pelo teorema de Pitágoras:

$$r^2 + (4\sqrt{2})^2 = 6^2$$

$$r^2 = 4 \therefore r = 2$$

A medida θ , em radianos, é:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

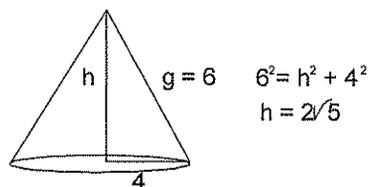
Convertendo em graus, obtemos:

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

- 05 (ITA-SP) Qual é o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é $24\pi \text{ cm}^2$ e o raio da base é 4 cm?

- a) $\frac{16\sqrt{20}\pi}{3} \text{ cm}^3$ d) $\frac{8\sqrt{24}\pi}{3} \text{ cm}^3$
 b) $6\pi \text{ cm}^3$
 c) $\frac{\sqrt{24}\pi}{3} \text{ cm}^3$ e) $\frac{\sqrt{20}\pi}{3} \text{ cm}^3$

Resolução:



$$A_t = 24\pi \quad V = \frac{A_b \cdot H}{3} \quad V = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$$

$$\pi R g = 24\pi$$

$$g = 6 \quad V = \frac{16\pi \cdot 2\sqrt{5}}{3} \quad V = \frac{16\pi\sqrt{20}}{3}$$



Exercícios de Sala

- 01 (EspCEEx) Uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base, determinando um tronco de pirâmide cuja altura é $\frac{1}{3}$ da altura da pirâmide. Sabendo-se que a base da pirâmide tem área igual a 225 m^2 , a área da secção do plano na pirâmide, em m^2 , vale:

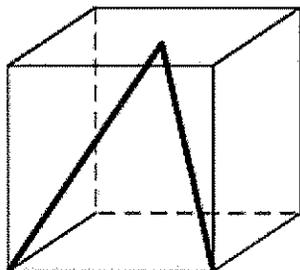
- a) 36.
 b) 64.
 c) 150.
 d) 25.
 e) 100.

- 02 (EspCEEx) Uma pirâmide tem por base um triângulo equilátero de lado a e a razão entre sua aresta lateral e sua altura é k . Seu volume é:

- a) $\frac{a^3}{\sqrt{k^2+1}}$
 b) $\frac{a^3}{4\sqrt{k^2-1}}$
 c) $\frac{a^3}{8\sqrt{k^2+1}}$
 d) $\frac{a^3}{12\sqrt{k^2-1}}$
 e) $\frac{a^3}{6\sqrt{k^2+1}}$

03 (EsPCEX) Em um cubo de aresta medindo 4 cm, forma-se um triângulo VEF, conforme figura abaixo, em que V é o centro do quadrado ABCD. A área, em cm^2 , do triângulo VEF é igual a

- a) $4\sqrt{5}$.
- b) $4\sqrt{6}$.
- c) $5\sqrt{5}$.
- d) $5\sqrt{6}$.
- e) $6\sqrt{6}$.

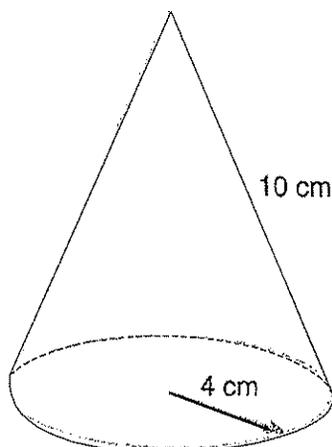


04 (EsPCEX) Uma pirâmide hexagonal regular tem área da base igual a $18\sqrt{3} \text{ m}^2$. Sabendo-se que sua altura é igual ao triplo do apótema da base, então seu volume é:

- a) 36 m^3 .
- b) $27\sqrt{3} \text{ m}^3$.
- c) $36\sqrt{3} \text{ m}^3$.
- d) $54\sqrt{3} \text{ m}^3$.
- e) $81\sqrt{3} \text{ m}^3$.

05 (UNB) Considere um tetraedro regular com vértices A, B, C e D e arestas de comprimento igual a 17 cm, no qual M, N, O e P são pontos médios das arestas AB, BC, CD, e DA, respectivamente. Calcule, em centímetros, o perímetro do quadrilátero com vértices M, N, O e P, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

06 Um cone circular reto cujo raio da base é igual a 4 cm tem sua geratriz igual a 10 cm.



Planificando-se a superfície lateral desse cone obtém-se um setor circular cujo ângulo central mede:

- a) 115°
- b) 120°
- c) 144°
- d) 150°
- e) 162°

07 O raio da base e a altura de um cone circular reto medem 8 cm e 15 cm, respectivamente. Desse cone, determine os valores:

- a) da área lateral.
- b) da área total.
- c) do volume.

08 Planificando-se a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular cujo ângulo central mede θ . Se o raio da base do cone é $r = 6 \text{ cm}$ e sua altura é $H = 8 \text{ cm}$, então θ é igual a:

- a) 180°
- b) 196°
- c) 200°
- d) 216°
- e) 236°

09 (Fuvest-SP) Um pedaço de cartolina tem a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Com essa cartolina, um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa. Qual é a distância do bico do chapéu à mesa?

- a) $10\sqrt{3} \text{ cm}$
- b) $3\sqrt{10} \text{ cm}$
- c) $20\sqrt{2} \text{ cm}$
- d) 20 cm
- e) 10 cm

10 Um cálice cônico tem 4 cm de diâmetro na boca e 6 cm de profundidade. Um outro cálice, este cilíndrico, tem 3 cm de diâmetro na boca e 5 cm de profundidade. Enche-se completamente o primeiro cálice com licor e despeja-se esse conteúdo no segundo cálice. Pode-se concluir que o líquido, no segundo cálice:

- a) transbordará.
- b) atingirá exatamente a metade da profundidade.
- c) ultrapassará a metade da profundidade, sem transbordar.

- d) ficará abaixo da metade da profundidade.
e) atingirá exatamente $\frac{1}{3}$ da profundidade.



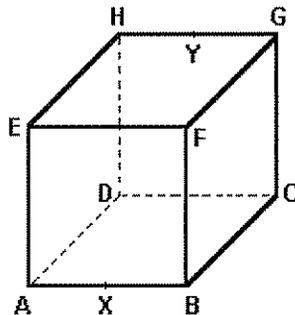
Exercícios de Casa

01 (Fuvest) Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:

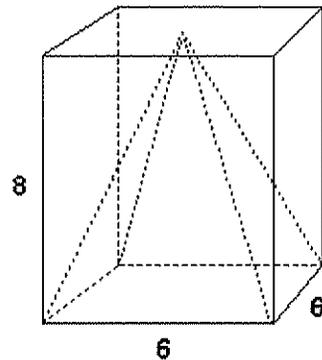
- a) 144°.
b) 192°.
c) 240°.
d) 288°.
e) 336°.

02 (Fuvest) No cubo de aresta 'a' mostrado na figura adiante, X e Y são pontos médios das arestas AB e GH respectivamente. Considere a pirâmide de vértice F e cuja base é o quadrilátero XCYE. Calcule, em função de a,

- a) o comprimento do segmento XY.
b) a área da base da pirâmide.
c) o volume da pirâmide.



03 (Fuvest) Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura 8 m e base quadrada de lado 6 m. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura 8 m e base quadrada com lado 6 m. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura h , a partir da base ($h \leq 8$). Determine o volume da água para um valor arbitrário de h , $0 \leq h \leq 8$.



04 (Unicamp) Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Para este tetraedro, calcule:

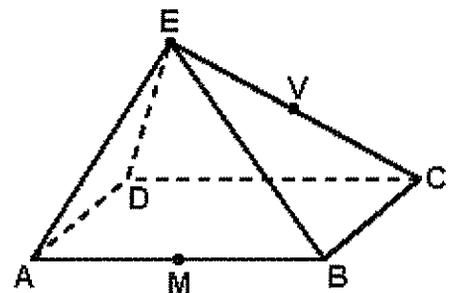
- a) a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;
b) o raio da esfera inscrita no tetraedro.

05 (Fuvest) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m². Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

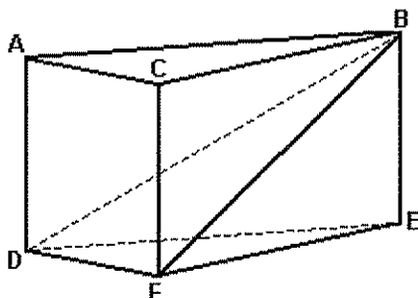
- a) 90.
b) 100.
c) 110.
d) 120.
e) 130.

06 (Fuvest) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

- a) 1.
b) 1,5.
c) 2.
d) 2,5.
e) 3.



07 (Ufmg) Observe a figura.

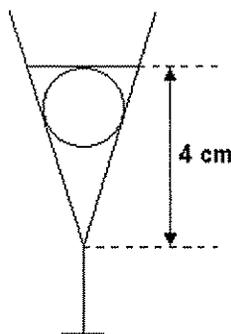


Essa figura representa um prisma reto de base triangular. O plano que contém os vértices B, D e F divide esse prisma em dois sólidos: DACFB, de volume V_1 , e

DEFB, de volume V_2 . Assim sendo, a razão $\frac{V_1}{V_2}$, é

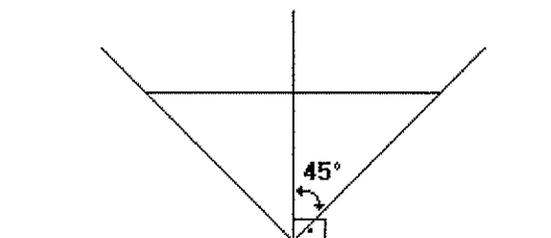
- a) 1.
- b) $3/2$.
- c) 2.
- d) $5/2$.

08 (Fuvest) Um cálice com a forma de cone contém $V \text{ cm}^3$ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica com diâmetro de 2 cm é colocada dentro do cálice. Supondo-se que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4 cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V .



09 (Fuvest) Uma caixa d' água tem a forma de um cone circular reto como ilustrado na figura a seguir. 7329 litros de água foram retirados da caixa ocasionando um abaixamento de um metro no nível da água. Quantos litros de água existiam inicialmente na caixa?

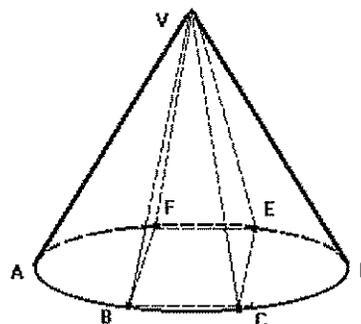
Para os cálculos use $\pi = 3,141$.



10 (Ufmg) Um reservatório de água tem forma de um cone circular reto, de eixo vertical e vértice para baixo. Quando o nível de água atinge a metade da altura do tanque, o volume ocupado é igual a π . A capacidade do tanque é

- a) 2.
- b) $8/3$.
- c) 4.
- d) 6.
- e) 8.

11 (Ufmg)

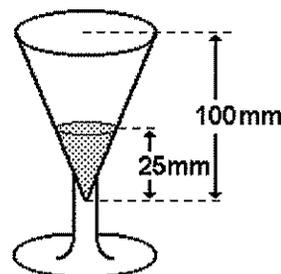


Nessa figura, a base da pirâmide VBCEF é um quadrado inscrito no círculo da base do cone de vértice V. A razão entre o volume do cone e o volume da pirâmide, nesta ordem, é

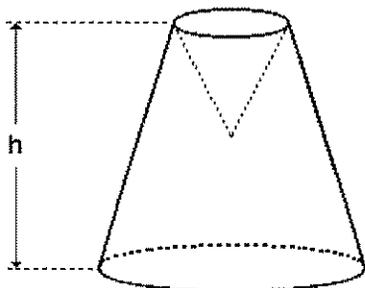
- a) $\pi/4$.
- b) $\pi/2$.
- c) π .
- d) 2π .
- e) $2\pi/3$.

12 (UNB) Um cálice tem a forma de um cone reto de revolução, de altura igual a 100 mm e volume V_1 . Esse cálice contém um líquido que ocupa um volume V_2 , atingindo a altura de 25 mm, conforme mostra a figura adiante.

Calcule o valor do quociente $\frac{V_1}{V_2}$.



13 (UnB) Um cone circular reto de sinalização de rodovias, que é oco e feito de plástico, tem altura de 60 cm e raio da base igual a 15 cm. Durante um acidente, a extremidade superior do cone foi afundada, como ilustra a figura abaixo.

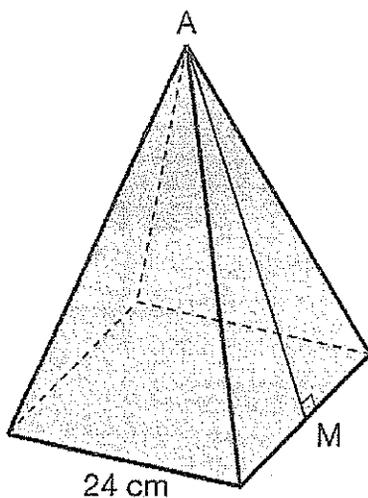


Calcule, em centímetros, a altura h do sólido resultante, sabendo que, após o acidente, o espaço interno do sinalizador foi reduzido em exatamente 25%. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

14 Calcule o volume e a área total de uma pirâmide hexagonal regular, cuja aresta lateral tem 10 m e o raio da circunferência circunscrita à base mede 6 m.

15 Calcule a área total e o volume da pirâmide quadrangular regular indicada na figura.

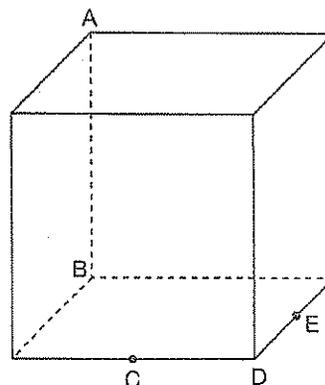
Dados: $\overline{AM} = 20$ cm e aresta da base = 24 cm.



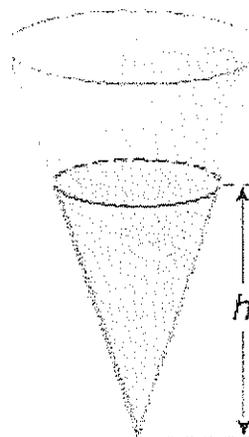
16 (Fuvest-SP) A base de uma pirâmide regular é um quadrado ABCD de lado 6 e diagonais \overline{AC} e \overline{BD} . A distância de seu vértice E ao plano que contém a base é 4.

- Determine o volume do tetraedro ABCDE.
- Determine a distância do ponto B ao plano que contém a face ADE.

17 Considerando, a figura abaixo, um cubo de aresta 4 cm, calcule o volume do sólido ABCDE, sabendo que E e C são pontos médios das arestas do cubo.



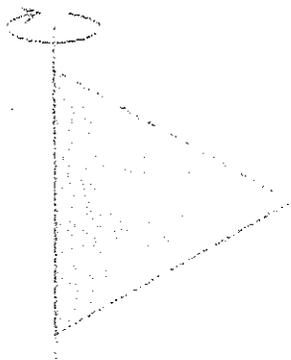
18 (UFMG) Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto, com seu vértice apontando para baixo. O raio do topo é igual a 9 m e a altura do tanque é de 27 m.



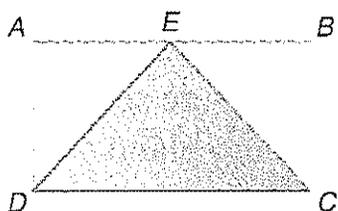
Pode-se afirmar que o volume V da água no tanque, como função da altura h da água, é:

- $V = \frac{\pi h^3}{27}$
- $V = \frac{\pi h^3}{9}$
- $V = \frac{\pi h^3}{3}$
- $V = 3\pi h^3$
- $V = 9\pi h^3$

- 19 Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um triângulo equilátero, de lado $\ell = 18 \text{ cm}$, em torno de um de seus lados.



- 20 (Fuvest-SP)



Na figura, ABCD é um retângulo, sendo $BC = BE = EA = r$. Ache, em função de r , o volume do sólido gerado pelo triângulo EDC, quando o retângulo der uma volta completa em torno de \overline{AB} .

7. Cilindro, Esfera e Troncos

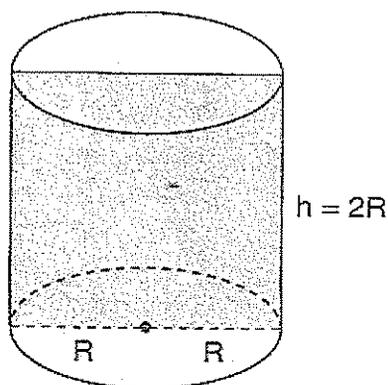
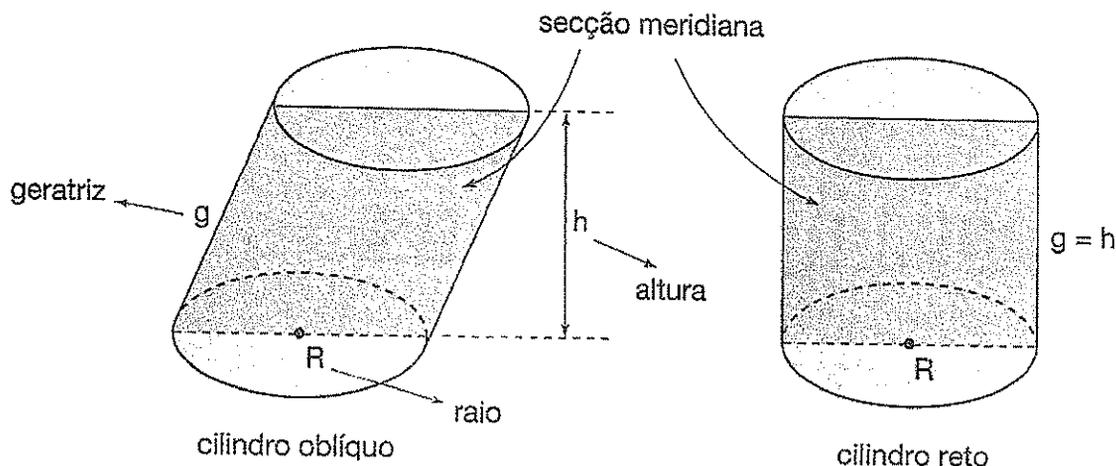
Cilindro

7.1 Classificação e elementos

Um cilindro pode ser classificado em:

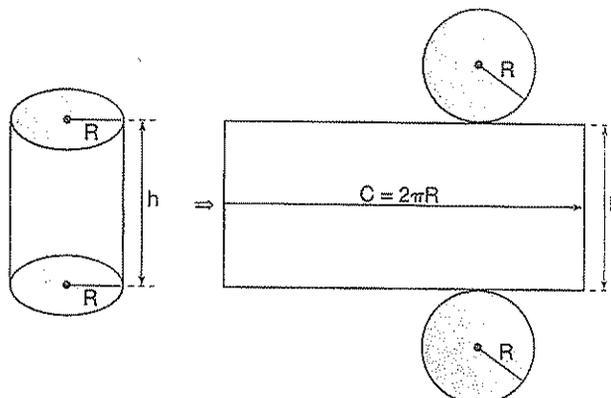
Cilindro oblíquo: quando as geratrizes são oblíquas às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um paralelogramo.

Cilindro reto: quando as geratrizes são perpendiculares às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um retângulo. Num cilindro reto, a geratriz e a altura são iguais ($g = h$).



Se a altura do cilindro for igual ao diâmetro da base, ou seja, $h = 2R$, então a secção meridiana é um quadrado e o cilindro é chamado **cilindro equilátero**.

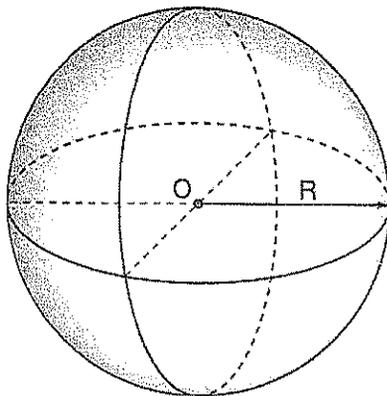
7.2 Áreas e volume



Área da base	$A_b = \pi R^2$
Área lateral	$A_l = 2\pi R h$
Área total	$A_t = 2\pi R(h + R)$
volume	$V = \pi R^2 h$

7.3 Esfera

É o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a R. O conjunto de todos os pontos P do espaço cujas distâncias ao ponto O são iguais a R é denominado **superfície esférica** de centro O e raio R.



área	$A = 4\pi R^2$
volume	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

7.3 Fuso esférico

É a parte da superfície esférica compreendida entre dois semicírculos máximos com o mesmo diâmetro.

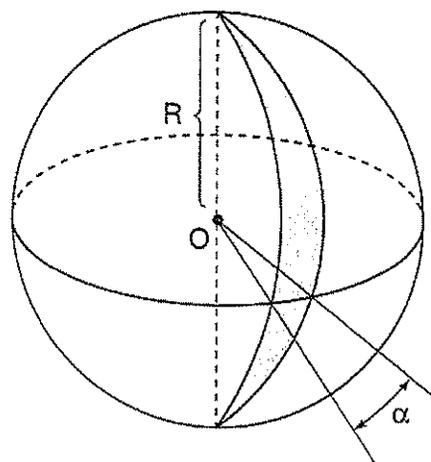
Área do fuso esférico

$$\alpha \text{ em graus} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 360^\circ & \text{-----} 4\pi R^2 \\ \alpha & \text{-----} A_{\text{fuso}} \end{cases}$$

$$A_{\text{fuso}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90^\circ}$$

$$\alpha \text{ em radianos} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 2\pi \text{rad} & \text{-----} 4\pi R^2 \\ \alpha & \text{-----} A_{\text{fuso}} \end{cases}$$

$$A_{\text{fuso}} = 2R^2 \alpha$$



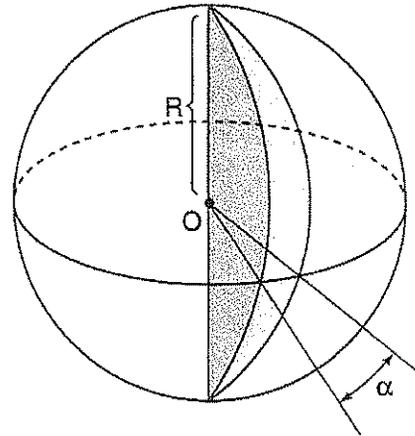
7.3 Cunha esférica

É o sólido limitado por dois semicírculos e pela superfície do fuso.

· **Volume da cunha esférica**

$$\alpha \text{ em graus} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 360^\circ & \text{-----} \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \text{-----} V_{\text{cunha}} \end{cases}$$

$$V_{\text{cunha}} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270^\circ}$$

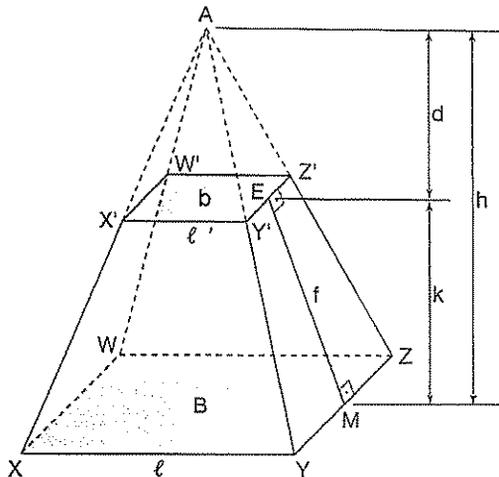


$$\alpha \text{ em radianos} \Rightarrow \begin{cases} \text{ângulo} & \text{área} \\ 2\pi \text{ rad} & \text{-----} \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \text{-----} V_{\text{cunha}} \end{cases}$$

$$V_{\text{cunha}} = \frac{2R^3 \alpha}{3}$$

7.4 Tronco da pirâmide

Considere o tronco de pirâmide da figura:



- B = área da base maior
- B = área da base menor
- h = altura da pirâmide XYZW
- d = altura da pirâmide X'Y'Z'W'
- k = altura do tronco

V_2 = volume da pirâmide X'Y'Z'W'

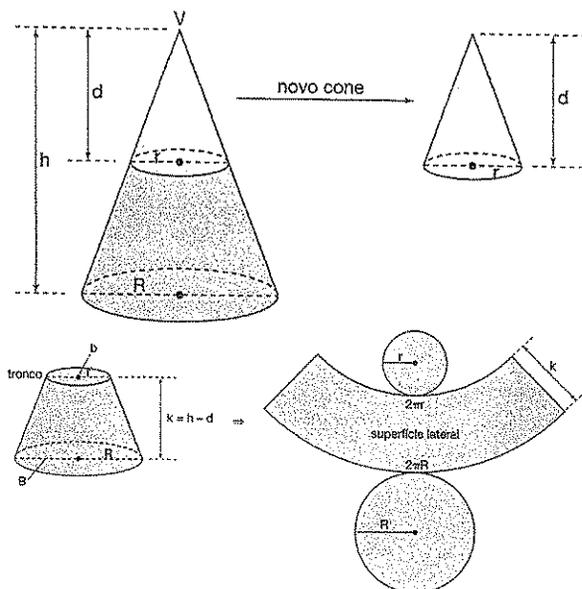
V_1 = volume da pirâmide XYZW

f = apótema do tronco

A_B	l^2
A_b	l'^2
A_L	$\frac{n \cdot (l + l'), f}{2}$
A_T	$A_L + A_B + A_b$

Propriedades	$\frac{l}{l'} = \frac{d}{h}$
	$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{h}\right)^2$
	$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{d}{h}\right)^3$
volume	$V = \frac{k}{3} [B + \sqrt{B \cdot b} + b]$

7.5 Tronco de cone



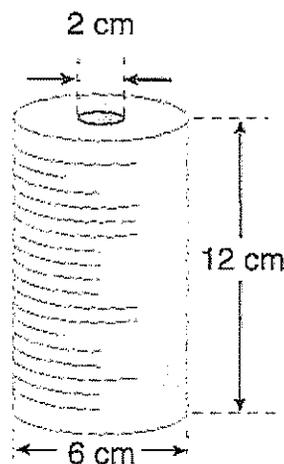
Área lateral	$A_l = \pi k (r + R)$
Área total	$A_t = A_l + A_b + A_B$
volume	$V = \frac{k\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2)$
A_B	πR^2
A_b	πr^2



Exercícios Comentados

01 Um carretel de linha de náilon, de 1 mm de espessura, tem a forma de um cilindro circular reto de 6 cm de diâmetro por 12 cm de altura. A linha está firmemente enrolada sobre um tubo cilíndrico de 2 cm de diâmetro, de modo que o espaço vazio entre duas camadas de linha é desprezível. Qual é, aproximadamente, o comprimento do fio contido no carretel?

- a) 528 m
- b) 496 m
- c) 472 m
- d) 384 m
- e) 270 m



Resolução:

O volume ocupado pela linha é a diferença entre os volumes de dois cilindros de 12 cm de altura e raios de bases iguais a 3 cm e 1 cm.

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 - \pi \cdot 1^2 \cdot 12$$

$$V = 96\pi$$

Podemos considerar o fio de náilon como sendo um longo cilindro, cujo raio da base é igual a 0,5 mm e cuja altura h é o comprimento de fio contido no carretel. O volume desse cilindro é igual a $96\pi \text{ cm}^3$. Então, temos:

$$V = 96\pi$$

$$h = \frac{96}{0,0025}$$

$$\pi \cdot (0,05)^2 \cdot h = 96\pi$$

$$h = 38.400 \text{ cm}$$

$$\therefore h = 384 \text{ m}$$

alternativa d

02 O raio da base de um cilindro equilátero é $r = 10 \text{ cm}$. Calcular a área lateral e a área total desse cilindro.

Resolução:

No cilindro equilátero, a altura é igual ao diâmetro da base. Além disso, o cilindro equilátero é reto por definição.

Assim:

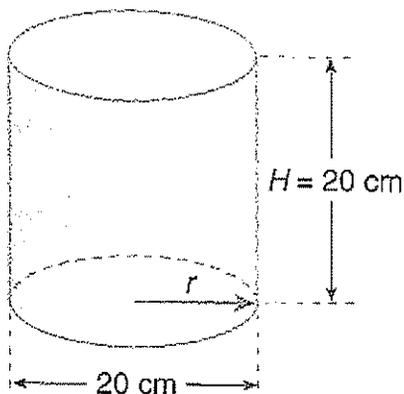
$$S_L = 2\pi rH$$

$$S_L = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 20 = 400\pi$$

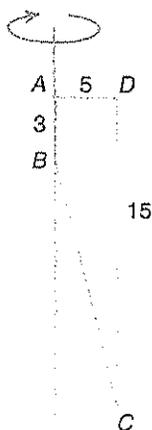
$$S_L = 400\pi \text{ cm}^2$$

$$S_T = S_L + 2 \cdot S_B$$

$$S_T = 400\pi + 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 600\pi \Rightarrow S_T = 600\pi \text{ cm}^2$$

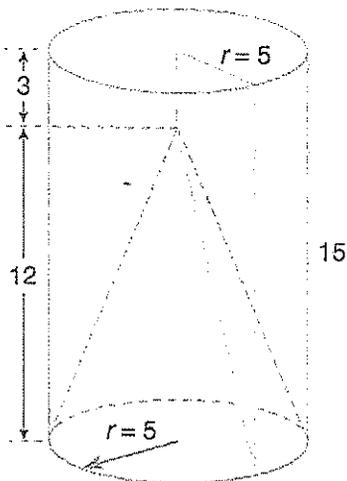


03 A figura seguinte mostra um trapézio retângulo de altura $AD = 5$ e bases $AB = 3$ e $CD = 15$. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse trapézio em torno de sua base menor.



Resolução:

O sólido gerado pela rotação é um cilindro reto com um rebaixo cônico em uma de suas bases.



Assim, o volume procurado é a diferença entre os volumes do cilindro e do cone.

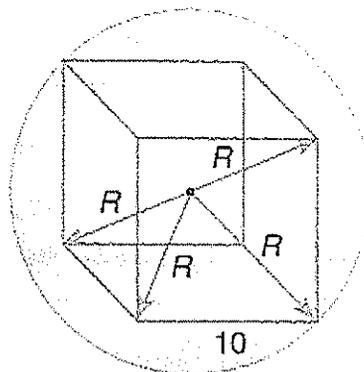
$$V = V_{cilindro} - V_{cone}$$

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 275\pi$$

04 Calcular a área da superfície esférica circunscrita a um cubo de 10 cm de aresta.

Resolução:

O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo nela inscrito.



Então

$$D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore R = 5\sqrt{3}$$

Logo, a área da superfície esférica é:

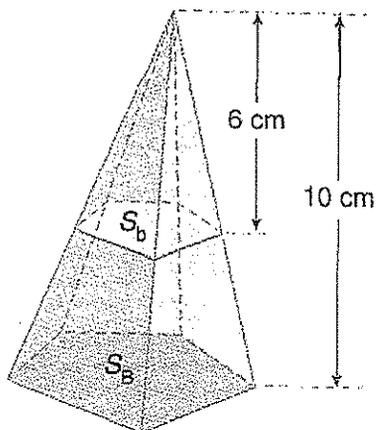
$$S_E = 4\pi R^2 \Rightarrow S_E = 4\pi (5\sqrt{3})^2 = 300\pi$$

$$\therefore S_E = 300\pi \text{ cm}^2$$

05 A base de uma pirâmide tem área igual a 125 cm^2 , e sua altura é de 10 cm. Um plano paralelo à base e distante 6 cm do vértice dessa pirâmide determina uma secção de área:

- a) 75 cm^2
- b) 45 cm^2
- c) 60 cm^2
- d) $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- e) $9\sqrt{5} \text{ cm}^2$

Resolução:



A razão de semelhança entre as pirâmides é dada por:

$$k = \frac{6}{10} \Rightarrow k = \frac{3}{5}$$

Então, sendo S_b e S_B as áreas das bases das pirâmides, temos:

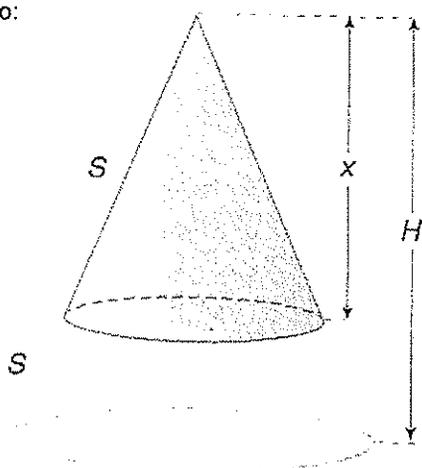
$$\frac{S_b}{S_B} = k^2 \Rightarrow \frac{S_b}{125} = \frac{9}{25}$$

Alternativa b

$$\therefore S_b = 45 \Rightarrow S_b = 45 \text{ cm}^2$$

06 Um cone tem altura H. A que distância do vértice deve-se conduzir um plano paralelo à base desse cone, para decompô-lo em dois sólidos de áreas laterais iguais?

Resolução:



Sendo S a área lateral do cone menor e S a área lateral do tronco do cone, a área lateral do cone original será igual a 2S. Então, da semelhança dos cones, temos:

$$k^2 = \frac{S}{2S} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo:

$$\frac{x}{H} = k \Rightarrow \frac{x}{H} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore x = \frac{H\sqrt{2}}{2}$$



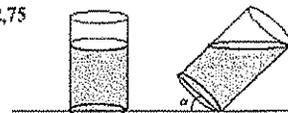
Exercícios de Sala

01 (EsPCEEx) num recipiente em forma de cilindro circular reto, com raio da base 2cm e altura $6\sqrt{3}$ cm (dimensões internas), há um volume de água de $16\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3$. O maior ângulo α que o plano da base do cilindro pode fazer com a horizontal para que a água não derrame ao se inclinar o cilindro é de, aproximadamente,

- a) 30°
- b) 40°
- c) 50°
- d) 60°
- e) 70°

Dados (aproximados)

$\text{tg} 30^\circ = 0,58$	$\text{tg} 60^\circ = 1,73$
$\text{tg} 40^\circ = 0,84$	$\text{tg} 70^\circ = 2,75$
$\text{tg} 50^\circ = 1,19$	



02 (EsPCEEx) Uma lata cilíndrica está completamente cheia de um líquido que deve ser distribuído totalmente em potes iguais entre si, também cilíndricos. A altura de cada pote é igual a $\frac{2}{5}$ da altura da lata e o diâmetro de sua base é $\frac{1}{3}$ do diâmetro da base da lata. Para tal distribuição, a quantidade mínima de potes a serem utilizados é

- a) 22.
- b) 23.
- c) 24.
- d) 25.
- e) 26.

03 (EsPCEEx) Se a área lateral e área total de um cilindro reto são $2\pi A$ e $2\pi S$, então, o volume deste sólido é igual a:

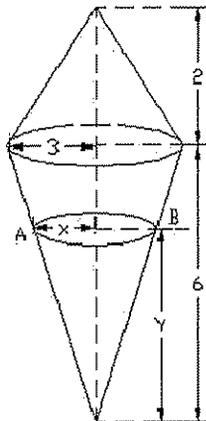
- a) $\pi A\sqrt{S-A}$.
- b) $\pi S\sqrt{S-A}$.
- c) $\pi A\sqrt{S+A}$.
- d) $\pi S\sqrt{S+A}$.
- e) $\pi\sqrt{S+A}$.

04 (EsPCEEx) O volume de um tronco de pirâmide, obtido a partir de uma pirâmide de base quadrada inscrita numa semi-esfera de raio R e um plano paralelo à base, distante $\frac{R}{2}$ da mesma vale:

- a) $\frac{1}{2}$ do volume da pirâmide.
- b) $\frac{7}{8}$ do volume da pirâmide.
- c) $\frac{2}{3}$ do volume da pirâmide.
- d) $\frac{7}{12}$ do volume da pirâmide.
- e) $\frac{5}{9}$ do volume da pirâmide.

05 (EsPCEEx) O sólido geométrico abaixo é formado por dois cones circulares retos de mesma base. Sabendo-se que a seção que contém os pontos A e B é paralela à base comum dos cones e divide todo o sólido em duas partes de igual volume, então o valor de $x^3 + y^3$ é:

- a) 96.
- b) 128.
- c) 144.
- d) 162.
- e) 248.



07 (EsPCEEx) O volume da esfera, em cm^3 , da esfera inscrita em um cone de revolução, cujo raio da base é 5 cm e cuja altura é 12 cm, é:

- a) $\frac{1000\pi}{162}$.
- b) $\frac{2000\pi}{27}$.
- c) $\frac{3000\pi}{108}$.
- d) $\frac{4000\pi}{81}$.
- e) $\frac{5000\pi}{9}$.

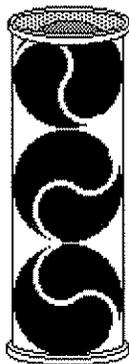
08 (EsPCEEx) Um trapézio isósceles, cujas bases medem 2 cm e 4 cm e cuja altura é 1 cm, sofre uma rotação de 180° em torno do eixo que passa pelos pontos médios das bases. O volume, em cm^3 , do sólido gerado por essa rotação é

- a) $\frac{4\pi}{3}$.
- b) $\frac{5\pi}{3}$.
- c) 2π .
- d) $\frac{7\pi}{3}$.

09 (EsPCEEx) Um plano corta uma esfera de raio R de modo que a área da menor calota formada seja igual a m vezes a área lateral do cone cujo vértice é o centro da esfera e cuja base é o círculo que serve de base à calota. A distância d do centro da esfera ao plano é dada por:

- a) $d = R \frac{4-m^2}{4+m^2}$.
- b) $d = R \left(\frac{4-m}{4+m} \right)^2$.
- c) $d = R \frac{4+m^2}{4-m^2}$.
- d) $d = R \left(\frac{4+m}{4-m} \right)^2$.
- e) $d = R \frac{m^2-4}{m^2+4}$.

10 (Uerj) Três bolas de tênis, idênticas, de diâmetro igual a 6 cm, encontram-se dentro de uma embalagem cilíndrica, com tampa. As bolas tangenciam a superfície interna da embalagem nos pontos de contato, como ilustra a figura a seguir.



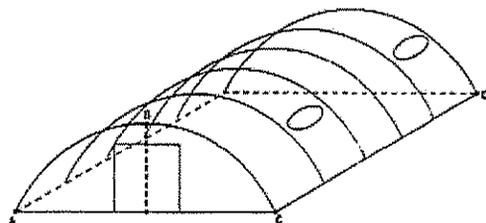
Calcule:

- a área total, em cm^2 , da superfície da embalagem;
- a fração do volume da embalagem ocupado pelas bolas.



Exercícios de Casa

01 (EsPCEEx) Uma barraca de campanha militar possui o formato apresentado no desenho abaixo



A curva ABC é um arco de 90° de uma circunferência com 10 metros de raio. O segmento CD mede 20 metros. Admitindo $\pi = 3,14$, podemos concluir que o volume do interior da barraca é de aproximadamente:

- 480 m^3
- 570 m^3
- 618 m^3
- 1140 m^3
- 2880 m^3

02 (EsPCEEx) Considere as proposições abaixo:

- O volume V de um cilindro equilátero de raio r é $V = 4\pi r^3$.
- O volume de um cubo de área total 600 cm^2 é 1000 cm^3 .
- Quando o raio de uma esfera aumenta 100%, o volume da esfera aumenta 700%.
- Uma reta r e um plano α são perpendiculares a uma outra reta t , em pontos distintos, então r e α são paralelos.

Dentre as proposições acima somente é/são falsa(s) a(s):

- I.
- II.
- I e III.
- I e IV.
- III e IV.

03 (EsPCEEx) O volume de uma lata cilíndrica é $4\pi \text{ cm}^3$. O custo de fabricação das bases é R\$ 0,04 por cm^2 e o custo de fabricação da superfície lateral é de R\$ 0,02 por cm^2 . O custo de fabricação da lata (em R\$) em função do raio R (em cm) das bases é:

- $0,04\pi \left(R^2 + \frac{1}{R} \right)$.
- $0,06\pi \left(R^2 + \frac{1}{R} \right)$.
- $0,06\pi \left(R^2 + \frac{2}{R} \right)$.
- $0,08\pi \left(R^2 + \frac{2}{R} \right)$.
- $0,08\pi \left(R^2 + \frac{1}{R} \right)$.

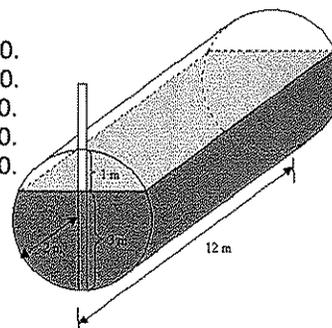
04 (EsPCEEx) O volume de um cilindro equilátero de 1 metro de raio é, aproximadamente, igual a:

- 3,1 m^3 .
- 6,3 m^3 .
- 9,4 m^3 .
- 12,6 m^3 .
- 15,7 m^3 .

05 (EsPCEEx) Deseja-se estimar a quantidade de combustível existente em um tanque cilíndrico disposto horizontalmente, medindo-se a parte molhada de uma régua, conforme a figura abaixo. Sabendo que o tanque tem 2m de raio e 12m de comprimento, e que a parte molhada da régua tem 3m de comprimento, pode-se concluir que o volume de combustível, em litros, existente no tanque está compreendido entre

Dados: utilizar $\pi = 3,1$ e $\sqrt{3} = 1,7$

- 145000 e 155000.
- 135000 e 145000.
- 125000 e 135000.
- 115000 e 125000.
- 105000 e 115000.



06 (EsPCEX) Dois recipientes, um em forma de cilindro e o outro, de paralelepípedo, cujas bases estão num mesmo plano, são unidos por uma tubulação com uma válvula no meio. Inicialmente, a válvula está fechada, o paralelepípedo está vazio e o cilindro é ocupado, em parte, por um líquido cujo volume é de 2000π litros, atingindo uma altura de 2 metros. A válvula é aberta e, após certo tempo, verifica-se que os dois recipientes têm o mesmo nível do líquido. Considerando desprezível o volume da tubulação que une os dois reservatórios e sabendo que a área da base do paralelepípedo é de $1,5\pi \text{ m}^2$, o volume final, em litros, de líquido no paralelepípedo é

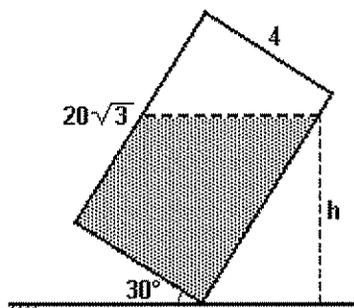
- a) 600π .
- b) 800π .
- c) 1000π .
- d) 1200π .
- e) 1500π .

07 (EsPCEX) A razão entre a altura de um cilindro circular reto e a altura de um cone circular reto, de mesmo

volume, é igual a $\frac{1}{3}$. Sendo "R" o raio do cilindro e "r" o raio do cone, pode-se afirmar

- a) $R = \frac{r}{3}$.
- b) $R = \frac{r}{9}$.
- c) $R = 3r$.
- d) $R = r$.
- e) $R = 2r$.

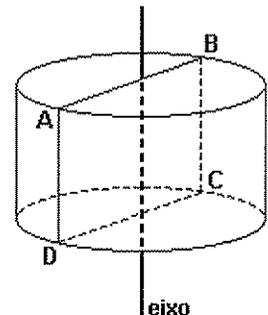
08 (Fuvest) Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4 cm e altura $2\sqrt{3}$ cm, com $\frac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral a seguir). Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.



09 (Ufmg) Num cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma seção formada por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura a seguir.

O volume desse cilin

- a) $\frac{250}{\pi} \text{ cm}^3$.
- b) $\frac{500}{\pi} \text{ cm}^3$.
- c) $\frac{625}{\pi} \text{ cm}^3$.
- d) $\frac{125}{\pi} \text{ cm}^3$.



10 (Ufrj) Carlos é um rapaz viciado em beber refrigerante diet. Um dia, voltando do trabalho, ele passou em frente a uma companhia de gás, onde viu um enorme reservatório cilíndrico de 3 metros de altura com uma base de 2 metros de diâmetro e pensou... "Em quanto tempo eu beberia aquele reservatório inteiro, se ele estivesse cheio de refrigerante diet?" Considerando $\pi = 3,14$ e sabendo-se que Carlos bebe 3 litros de refrigerante diet por dia, pode-se afirmar que ele consumirá todo o líquido do reservatório em um período de

- a) 86 dias.
- b) 86 meses.
- c) 86 anos.
- d) 8,6 anos.

11 (Ufmg) Um aquário cilíndrico, com 30 cm de altura e área da base igual a $1\,200 \text{ cm}^2$, está com água até a metade de sua capacidade. Colocando-se pedras dentro desse aquário, de modo que fiquem totalmente submersas, o nível da água sobe para 16,5 cm. Então, o volume das pedras é

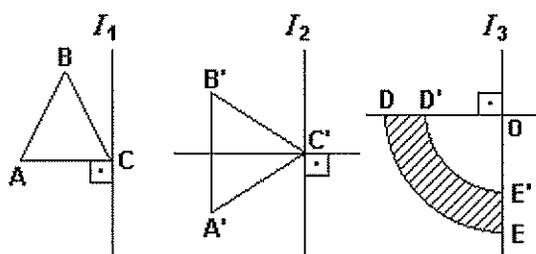
- a) $1\,200 \text{ cm}^3$.
- b) $2\,100 \text{ cm}^3$.
- c) $1\,500 \text{ cm}^3$.
- d) $1\,800 \text{ cm}^3$.

12 (Fuvest) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm é:

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

13 (Unicamp) Uma esfera de raio 1 é apoiada no plano xy de modo que seu pólo sul toque a origem desse plano. Tomando a reta que liga o pólo norte dessa esfera a qualquer outro ponto da esfera, chamamos de "projeção estereográfica" desse outro ponto ao ponto em que a reta toca o plano xy . Identifique a projeção estereográfica dos pontos que formam o hemisfério sul da esfera.

14 (Ufpe) Nas figuras a seguir, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são equiláteros com lados medindo 3cm, e DE e $D'E'$ são arcos de circunferência com centro em O e raios iguais a 3cm e 2cm, respectivamente.



Seja S_1 o sólido obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC em torno de l_1 , S_2 pela rotação de 360° de $A'B'C'$ em torno de l_2 e S_3 pela rotação de 360° da região hachureada em torno de l_3 . Podemos afirmar que:

() S_1 é obtido de um cone circular reto retirando-se dois outros cones circulares retos.

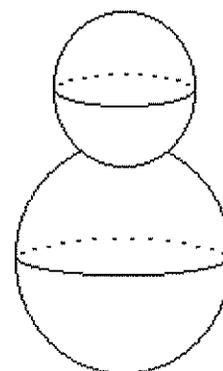
() O volume de S_1 é igual ao volume do cone com raio igual a $\frac{3}{2}$ cm e altura igual $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.

() S_2 é obtido de um cilindro circular reto retirando-se dois cones circulares retos.

() A área da superfície de S_2 é igual à área de um cone circular reto de raio $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm e altura 3cm.

() S_4 é obtido de um hemisfério retirando-se outro hemisfério.

15 (Ufrj) Ping Oin recolheu $4,5m^3$ de neve para construir um grande boneco de 3m de altura, em comemoração à chegada do verão no Pólo Sul. O boneco será composto por uma cabeça e um corpo ambos em forma de esfera, tangentes, sendo o corpo maior que a cabeça, conforme mostra a figura a seguir. Para calcular o raio de cada uma das esferas, Ping Oin aproximou π por 3.



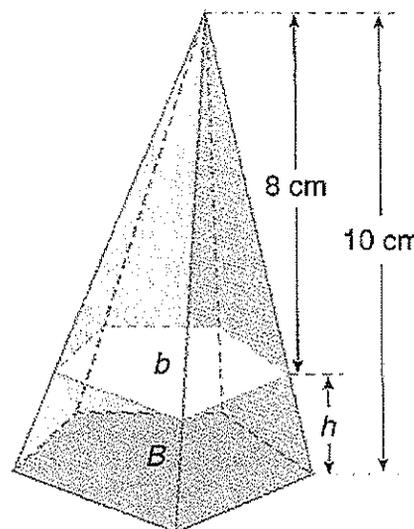
Calcule, usando a aproximação considerada, os raios das duas esferas.

16 (Unicamp) O volume V de uma bola de raio r é dado pela fórmula $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

a) Calcule o volume de uma bola de raio $r = \frac{3}{4}$ cm. Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número $\frac{22}{7}$.

b) Se uma bola de raio $r = \frac{3}{4}$ cm é feita com um material cuja densidade volumétrica (quociente da massa pelo volume) é de $5,6g/cm^3$, qual será a sua massa?

17 Uma pirâmide, cuja área da base é $75 cm^2$ e cuja altura é 10 cm, é seccionada por um plano paralelo à base, distante 8 cm do vértice.



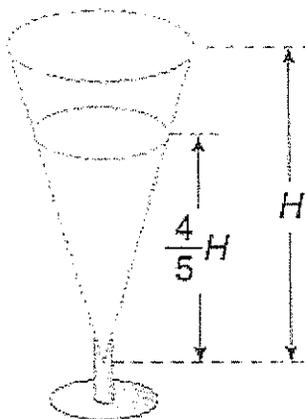
a) calcule a área da seção.

b) Calcule o volume do tronco da pirâmide por diferença entre os volumes das pirâmides.

c) Calcule o volume do tronco pela fórmula

$V_{TP} = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b)$, em que B e b são as áreas das bases e h é a altura do tronco.

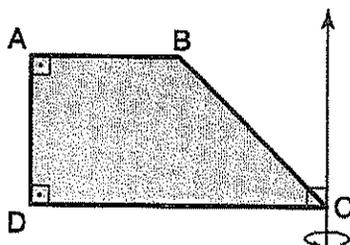
18 Uma bebida é servida num copo cônico. O líquido ocupa $\frac{4}{5}$ da profundidade do copo, sendo o restante ocupado pela espuma.



Da capacidade total do corpo, a porcentagem ocupada pelo líquido é aproximadamente igual a:

- a) 80%
- b) 75%
- c) 72%
- d) 64%
- e) 50%

19 (Cefet-PR) O trapézio da figura a seguir gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por C e é paralelo ao lado \overline{AD} . Se $\overline{AB} = \overline{AD} = \ell$ e $\overline{CD} = 2\ell$, o volume do sólido gerado pelo trapézio é, em unidades de volume:



a) $\frac{8\pi\ell^3}{3}$

b) $\frac{11\pi\ell^3}{3}$

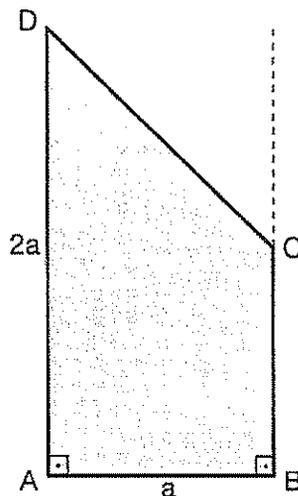
c) $\frac{14\pi\ell^3}{3}$

d) $\frac{17\pi\ell^3}{3}$

20 (Vunesp-SP) No trapézio ABCD da figura os ângulos internos em A e B são retos, e o ângulo interno em D

é tal que sua tangente vale $\frac{5}{6}$. Se $\overline{AD} = 2\overline{AB}$,

O volume do sólido obtido ao se girar o trapézio em torno da reta por B e C é dado por:



a) $\left(\frac{3}{4}\right)\pi\alpha^3$

b) $\left(\frac{5}{8}\right)\pi\alpha^3$

c) $\left(\frac{6}{5}\right)\pi\alpha^3$

d) $\left(\frac{20}{13}\right)\pi\alpha^3$

e) $\left(\frac{8}{5}\right)\pi\alpha^3$

Gabarito

1. Análise combinatória

Sala

- 01. e
- 02. e
- 03. c
- 04. e
- 05. b
- 06. d
- 07. a
- 08. e
- 09. c
- 10. d
- 11. b
- 12. c
- 13. d
- 14. 1,728
- 15. d
- 16. c
- 17. d
- 18. b
- 19. b
- 20. 60

casa

- 01. b
- 02. e
- 03. e
- 04. c
- 05. c
- 06. b
- 07. d
- 08. c
- 09. c
- 10. b
- 11. d
- 12. a
- 13. e
- 14. d
- 15. a
- 16. d
- 17. b
- 18. c
- 19. b
- 20. d

2. Probabilidade

sala

- 01. a
- 02. c
- 03. c
- 04. d
- 05. d
- 06. c

- 07. c
- 08. d
- 09. b
- 10. b
- 11. b
- 12. a
- 13. c
- 14. d
- 15. e
- 16. d

casa

- 01. c
- 02. b
- 03. a
- 04. c
- 05. a
- 06. b
- 07. b
- 08. b
- 09. a
- 10. b
- 11. a
- 12. a
- 13. c
- 14. b
- 15. c
- 16. b
- 17. b
- 18. d
- 19.
- 20.

3. Geometria plana, e Geometria Espacial de Posições

sala

- 01
- 02.
- 03. d
- 04. c
- 05. (110°)
- 06. b
- 07. d
- 08. e
- 09. b
- 10. (10/3)

11. $(a = 6\sqrt{6}, b = \frac{12\sqrt{6}}{5} c) \frac{2\sqrt{6}}{3}$

- 12. a) $2x^2 - 20x + 96$
- b) 6 ou 4

- 13. d
- 14. e
- 15. b
- 16. a
- 17.

18.
19. c
20. b
21. b

casa

01. ($x = 14$ $y = 28$)
02. d
03. a) $R = 14$ $h = 7$
 b) $R = 10$ $h = 15$
 c) $R = 4$ $h = 12$
04. c
05. d
06. b

07. a) $\frac{1-x}{1+x}$

 b) $x = \sqrt{2} - 1$

08. ($x = a(2 - \sqrt{3})$)
09. b
10. b
11. c
12. c
13. e
14. (468)
15. (15)

16. (a) $\frac{16}{9}$ (b) 21

17. ($3(3\sqrt{3} + 2\pi)$)

18. a) $9(\pi - 2)$ c) $3(4\pi - 3\sqrt{3})$
 b) $9(3\pi + 2)$ d) $3(8\pi + 3\sqrt{3})$

19. c
20. d

21. a) $2(3\sqrt{3} - \pi)$

 b) 4π

22. a) $a^2(4 - \pi)$
 b) $a^2(4 - \pi)$

23. c
24. b
25. 10

26. $x = \frac{ah}{a+h}$

27. b
28. a
29. b
30. e

5. Poliedros e Prismas

Parte 1

sala

01. 34 cm
02. d
03. 64
04. 30 cm
05. VFV
06. a) $2\sqrt{3}$
 b) $48(4 + \sqrt{3})$
 c) $192\sqrt{3}$
07. $4(45 + 8\sqrt{5})$
08. (36 cm³)
09. (210000l)
10. (2,4 e 8)
1. e
12. b
13. d
14. a
15. b
16. d
17. d

casa

01. (16, 12 e 60)
02. (12 cm³)
03. 30 min
04. $\sqrt{3}/2$
05. $\sqrt{6}/2$
06. 32
07. $\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$
08. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$
09. a/7
10. $\sqrt{3}/3$
11.
12.
13.
14.
15. (10 dm)
16. a
17. c
18. c
19. d
20. a

6. Pirâmides e Cones

sala

01. b
 02. d
 03. a) $99/56 \text{ cm}^3$ b) 9,9 g
 04.
 05. (34)
 06.
 07. a) 136π
 b) 200π
 c) 320π
 08. d
 09. a
 10. c

casa

01. d
 02. a) $a\sqrt{2}$
 b) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$
 c) $\frac{a^3}{6}$
 03. $\frac{3}{16}(8-h)^3 + 36h - 96$
 04. a) $3\sqrt{2}$
 b) $\sqrt{6}/2$
 05. a
 06. b
 07. c
 08. $\frac{4\pi}{3}$
 09. (83 76)
 10. e
 11. b
 12. (46)
 13. (30 cm)
 14.
 15.
 16.
 17.
 18. a
 19. $V = 14 58 \pi$
 $A_T = 32 4 \pi \sqrt{3}$
 20. $\frac{4}{3}\pi h^3$

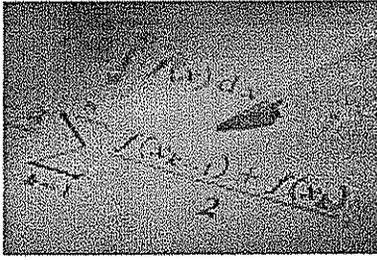
7. Cilindro, Esfera e Troncos

Sala

01. a) $3\sqrt{2} \text{ cm}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm}$
 02. b
 03. e
 04. Circulo de raio = 2, com centro da esfera maior = 1
 05. 8376 litros
 06.
 07. c
 08 d
 09. a
 10. a) $126 \pi \text{ cm}^2$. b) $2/3$.

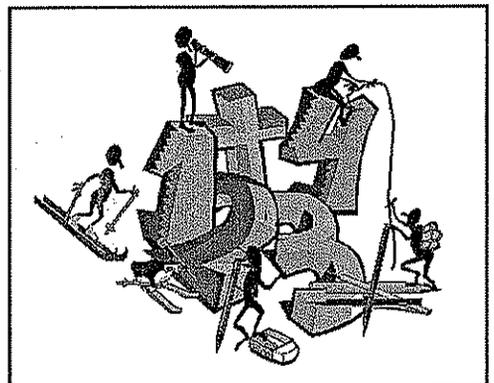
Casa

01.
 02.
 03.
 04.
 05.
 06.
 07.
 08. 21
 09. d
 10. d
 11. d
 12. e
 13. cilindro raio = 2
 14. VFV FV
 15. $r = 1/2$ $R = 1$
 16. a) $\frac{99}{56} \text{ cm}^3$ b) 9,9 g
 17. a) 48 cm^2
 b) 122 cm^3
 c) 122 cm^3
 18. e
 19. b
 20. e



MATEMÁTICA 1

CADERNO 3



E Q U I P E

Diretor Geral
Luiz Alberto Tinoco Cidade

Diretora Executiva
Clara Marisa May

Diretor de Artes
Fabiano Rangel Cidade

Coordenação Geral dos Cursos Preparatórios
Francisco Gerden

Coordenação dos Cursos de Idiomas EAD
Dr. Daniel Soares Filho

Secretaria
Mariana Ramos

Editoração Gráfica
Edilva de Lima

Fonoaudióloga e Psicopedagoga
Mariana Fernandes Ramos – CRFa 12482-RJ/T-DF

Assessoria Jurídica
Luiza May Schmitz – OAB/DF – 24.164

Assessoria de Línguas Extranjeiras
Cleide Thieves (Poliglota-EEUU)
João Jorge Gonçalves (Poliglota-Europa)

Equipe de Professores

Idiomas

Luiz Cidade – Espanhol
Daniel Soares Filho – Espanhol (EAD)
Cleide Thieves – Inglês, Francês, Espanhol, Alemão (EAD)
João Jorge Gonçalves – Inglês, Francês Espanhol e Português
Leonardo dos Santos – Espanhol
Diego Fernandes – Espanhol
Márcia Mattos da Silva – Francês (EAD)
Marcos Henrique – Francês
Maristella Mattos Silva – Espanhol (EAD)
Monike Rangen Cidade – Espanhol (EAD)
Cacilda Leal do Nascimento – Espanhol
Mariana Ramos – Inglês (EAD)

Concursos

Cassia Braga – Português
Maria Antônia – Redação
Murilo Roballo – Matemática
Sormany Fernandes – História do Brasil
Francisco Roges – Geografia
Gerdean – Química
Gustavo Porto – História
Luiz Fernando – Português
Thiago Magalhães – Física

Os direitos autorais desta obra são reservados e protegidos pela Lei nº 9.610, de 19 Fev 98.
É proibida a reprodução de qualquer parte deste livro, sem autorização prévia expressa por escrito do Autor e da Editora, por quaisquer meios empregados, sejam eletrônicos, mecânicos, videográficos, fonográficos, reprográficos, microfilmicos, fotográficos, gráficos ou outros. Essas proibições aplicam-se também à editoração da obra, bem como às suas características gráficas.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, meu agradecimento especial e minha consideração a dois professores extraordinários – aqueles que me levaram a gostar de ensinar com excelência - Tide e Euzébio Cidade. (Olá, Mamãe e Papai!)

Um agradecimento sincero aos meus queridos alunos e minha excelente e dedicada equipe de professores, profissionais de qualidade ímpar que reúnem as qualidades de verdadeiros líderes na arte de educar, com desempenhos de incomensuráveis valores pedagógicos, reconhecidos por todos os alunos que passaram por nossa escola.

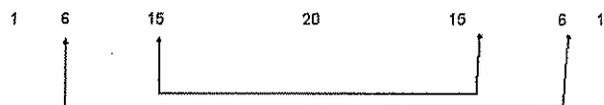
Finalizando um agradecimento muito especial ao professor Murilo Roballo, que com dedicação e esmero confeccionou esta apostila de matemática que apresenta além da teoria as questões necessárias e fundamentais para um adestramento simples, rápido e eficaz para a prova do concurso da EsPCEx. Esperamos que utilize esta obra, exercitando com dedicação cada item apresentado e pesquisando àqueles que apresentaram maior grau de dificuldade. Traga para a aula as questões cuja resposta não consiga encontrar ou envie-as por e-mail para seu tutor, caso seja aluno do curso presencial.

Aceite nossa companhia nesta viagem de treinamento rumo à EsPCEx / AMAN .

Bons Estudos!!

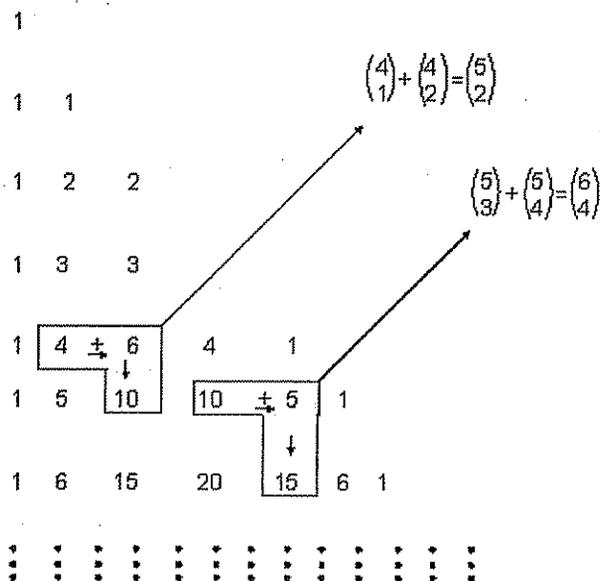
Luiz Cidade
Diretor

32 - Binômio de newton	7
33- Números complexos	13
34 - Polinômios	22
35 - Equações polinomiais	28



4ª) Cada binomial $\binom{n}{p}$ da linha n é igual à soma de dois binomiais da linha

(n-1): aquele que está na coluna p com aquele que está na coluna (p-1) (relação de Stifel).



$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

5ª) A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2 cujo expoente é a ordem da linha (dada pelo numerador).

linha 0 \Rightarrow 1	$2^0 = 1$
linha 1 \Rightarrow 1+1	$2^1 = 2$
linha 2 \Rightarrow 1+2+1	$2^2 = 4$
linha 3 \Rightarrow 1+3+3+1	$2^3 = 8$
linha 4 \Rightarrow 1+4+6+4+1	$2^4 = 16$
linha 5 \Rightarrow 1+5+10+10+5+1	$2^5 = 32$

Em geral: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

6. Binômio de Newton

Seendo $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, demonstra-se que:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^{n-1} + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n$$

fórmula do binômio de Newton

Observe que:

- O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui (n+1) termos;
- As potências de x decrescem de n até zero;
- As potências de a crescem de zero até n;
- Os coeficientes binomiais $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ dos termos do desenvolvimento constituem uma linha do triângulo de Pascal.

No caso de $(x-a)^n$, temos:

$$(x-a)^n = \binom{n}{0} x^n - \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} a^n$$

Os sinais de cada termo do desenvolvimento são alternados, isto é, os termos de ordem par (2°, 4°, 6°...) são negativos e os de ordem ímpar (1°, 3°, 5°, ...) são positivos.

Essas fórmulas podem ser escritas da seguinte forma:

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

$$(x-a)^n = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

7. Fórmula do termo geral

Qualquer termo de ordem (p+1) do binômio é dado por:

$$(x+a)^n \Rightarrow T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

$$(x-a)^n \Rightarrow T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$



Exercícios Comentados

01 Resolva $\frac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} = 16$

Resolução:

$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = 16$$

$$\frac{(n+1)(n-1)![(n+2)n+1]}{(n+1)n(n-1)!} = 16$$

$$n^2 + 2n + 1 = 16$$

$$(n+1)^2 = 16$$

$$n+1 = 4 \rightarrow n = 3$$

ou

$$n+1 = -4 \rightarrow n = -5 \text{ (não convém pois, } (n-1)! = (-6)! \text{ não existe)}$$

$$S = \{3\}$$

02 Calcule p, $p > 3$, sendo: $\frac{\binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3}}{\binom{p}{2} - \binom{p-1}{1}} = \frac{5}{3}$

Resolução:

$$\binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3} = \binom{p}{3} \text{ (relação de Stiffell)}$$

$$\binom{p}{2} + \binom{p-1}{1} = \binom{p-1}{2} \text{ (relação de Stiffell)}$$

$$\text{Logo: } \frac{\binom{p}{3}}{\binom{p-1}{2}} = \frac{5}{3} \therefore \frac{\frac{p!}{3!(p-3)!}}{\frac{(p-1)!}{2!(p-3)!}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{p!}{3!} \cdot \frac{2!}{(p-1)!} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2p(p-1)!}{6(p-1)!} = \frac{5}{3} \therefore \frac{p}{3} = \frac{5}{3} \therefore p = 5$$

$$S = \{5\}$$

03 Calcule o valor de m:

a) $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = m$

Resolução:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \dots + \binom{6}{6} = m$$

$$m = 2^6 = 64$$

$$\boxed{m = 64}$$

b) $\sum_{p=0}^m \binom{m}{p} 2^p = 729$

Resolução

Lembrem-se que:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

$$\text{Logo: } \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} 2^p = (1+2)^m = 729$$

$$3^m = 3^6$$

$$\boxed{m = 6}$$

04 Calcule o 10º termo no desenvolvimento de

$$(2x^2 - x)^{12}$$

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p \cdot (-1)^p$$

$$T_{10} = \binom{12}{9} (2x^2)^{12-9} \cdot x^9 \cdot (-1)^9$$

$$= \frac{12!}{9!3!} \cdot 8x^6 \cdot x^9 \cdot (-1)$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} \cdot 8x^{15} \cdot (-1)$$

$$T_{10} = -1760x^{15}$$

05 Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

Resolução:

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} (\sqrt{x})^{10-p} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p \cdot (-1)^p$$

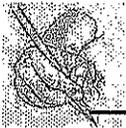
$$= \binom{10}{p} \cdot x^{\frac{10-p}{2}} \cdot x^{-\frac{p}{2}} \cdot (-1)^p$$

$$\frac{10-2p}{2} = 0 \rightarrow p = 5$$

$$T_6 = \binom{10}{5} (-1)^5 \cdot x^0$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot (-1) = -252$$

$T_6 = -252$



Exercícios de Sala

01 (V.UNIF.RS) A expressão $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)! + n!}$, com n natural estritamente positivo, vale:

- a) $\frac{n^2 + n}{1 + n}$
 b) $\frac{n^2 - n}{1 + n}$
 c) $\frac{n}{1 + n}$
 d) $\frac{n^2 + n - 1}{2}$
 e) $\frac{n^2}{1 + n}$

02 (U.F.PA) A forma mais simples da expressão

$$\frac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} \text{ é:}$$

- a) $n(n+2)$
 b) $n!$

- c) $(n-1)!$
 d) $n+1$
 e) $(n+1)^2$

03 (VUNESP) A soma $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}$ é igual

a:

- a) $n \cdot 2^{n-1}$
 b) 2^n
 c) $n \cdot 2^n$
 d) $(n+1) \cdot 2^{n+1}$
 e) $n \cdot 2^{n+1}$

04 (U.F.RN) No desenvolvimento de $(3+2x)^5$, o coeficiente de x^3 é igual a:

- a) 60
 b) 120
 c) 240
 d) 720
 e) 1440

05 (U.MACK) No desenvolvimento de $(2x+b)^5$, $b \neq 0$, o coeficiente numérico do termo em x^4 é oito vezes aquele do termo em x^2 . Então b vale:

- a) $\frac{1}{8}$
 b) $\frac{1}{4}$
 c) $\frac{1}{2}$
 d) 32
 e) 16

06 (U.C.SALVADOR) O 5º termo do desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, segundo as potências decrescentes de x , é $1.120x^4$. O número natural n é:

- a) Primo.
 b) Divisível por 3.
 c) Múltiplo de 5.
 d) Quadrado perfeito.
 e) Cubo perfeito.



Exercícios de Casa

07 (U.C.SALVADOR) No desenvolvimento do binômio

$\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^8$, segundo as potências decrescentes de x , o coeficiente do quinto termo é:

- a) 1
- b) 448
- c) 1120
- d) 1440
- e) 1792

08 (U.E.BA) No desenvolvimento do binômio

$\left(2x^2 - \frac{y}{2}\right)^8$, o coeficiente do termo médio é:

- a) -224
- b) -70
- c) -28
- d) 28
- e) 70

09 (U.F.SE) No desenvolvimento do binômio $(1+x)^9$, a soma dos coeficientes é:

- a) 0
- b) 9
- c) 18
- d) 64
- e) 256

10 (U.F.RS) O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ é:

- a) 5!
- b) $\frac{10!}{5!5!}$
- c) $\frac{10!}{5!}$
- d) $\frac{5!}{10!}$
- e) $\frac{5!5!}{10!}$

01 (FUEM-PR) Se $\binom{m-1}{m-2} = 4$ e $m > 3$, então o valor de

$\left[\frac{m-1}{(m-3)} + 0!\right]$ é:

02 Ache o conjunto solução da equação: $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{4n}$

03 Os números binomiais $\binom{n}{0}$, $\binom{n+1}{1}$ e $\binom{n+2}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, nesta ordem, estão em progressão aritmética. Calcule n .

04 Calcule p na equação: $\binom{14}{3p} = \binom{14}{p+6}$

05 Resolva a equação: $\binom{12}{n+1} = \binom{12}{3n+3}$

06 Sabendo que

$$a^7 + \binom{7}{1}a^6b + \binom{7}{2}a^5b^2 + \dots + \binom{7}{6}ab^6 + b^7 = 128$$

e também que $b = 2\alpha$, o valor de a é:

- a) 1
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) $\frac{4}{3}$
- e) $\frac{1}{2}$

07 Calcule $\sum_{p=0}^6 \binom{6}{p} 3^{6-p} \cdot (-1)^p$.

08 Calcule $\sum_{p=0}^{10} \binom{10}{p} \cdot (-1)^p$.

09 O termo independente de x de $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$ é:

- a) 20
- b) 60
- c) 120
- d) 160
- e) 180

10 Qual é o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^5 ?$$

- a) 10
- b) -10
- c) 15
- d) -15
- e) 20

11 Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(2x+a)^6$, com $a \in \mathbb{R}$, é $2160x^4$, então o valor de a pode ser:

- a) 5
- b) 4
- c) 3
- d) 2
- e) 1

12 Desenvolvendo $(x^2 + y^2)^8$ segundo potências de expoentes decrescentes de x , o terceiro termo é igual a:

- a) $14x^{12}y^2$
- b) $28x^{12}y^2$
- c) $56x^{10}y^4$
- d) $28x^{14}y^4$
- e) $56x^{10}y^6$

13 (U.F.BA) A soma do segundo e terceiro termos do desenvolvimento de $(\sqrt{2} + 2x)^4$ é:

- a) $32x(2+3x)$
- b) $16x(\sqrt{2} + 3x)$
- c) $16x(\sqrt{2} + 6x)$
- d) $8x(\sqrt{6} + 6x)$
- e) $4x(\sqrt{6} + 6x)$

14 (EAESP-FGV) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x+3y)^8$ é:

- a) 15.625
- b) 7.776
- c) 6.225
- d) 4.225
- e) 2.048

15 (U.F.UBERLÂNDIA) Se n é o número de termos do desenvolvimento $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[10]{y})^{55}$ que não contenham radicais, então n é:

- a) 8
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 4

16 (U.MAK) A soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(2x-5y)^n$ é 81. Ordenando os termos segundo potências decrescentes de x , o termo cujo módulo do coeficiente numérico é máximo é:

- a) O segundo
- b) O terceiro
- c) O quarto
- d) O quinto
- e) O sexto

17 (U.F.PA) No desenvolvimento do binômio $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$, qual o termo independente?

- a) 2°
- b) 3°
- c) 4°
- d) 5°
- e) 6°

18 (F.C.M.STA.CASA) A soma dos coeficientes do primeiro, segundo e terceiro termos do desenvolvimento de $(x^2 + x^{-1})^m$ é igual a 46. O termo independente de x vale:

- a) 36
- b) 126
- c) 84
- d) 168
- e) N.d.a

19 (EAESP-FGV) Sabendo que $\binom{m}{p} = x$ e $\binom{m+1}{p+1} = y$,

então $\binom{m}{p+1}$ é igual a:

- a) $x + y$
- b) $x - y$
- c) $y - x$
- d) $x - p$
- e) $y - p$

20 (F.M.ABC) Assinale a verdadeira:

- a) $(a+x)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$
- b) $p! A_n^p = C_n^p$
- c) $p! = q! \Leftrightarrow p = q$
- d) $\frac{(n+2)!}{n!} = n^2 + 3n + 2$
- e) $(2n)! = 2!n!$

21 Calcule n

- a) $\frac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} = 25$
- b) $\frac{(n+2)!(n-2)!}{(n+1)!(n-1)!} = 4$
- c) $\frac{(n+2)! + (n+1)!}{n!} = 5(n+1)$

2 - NÚMEROS COMPLEXOS

1. Definição

Denomina-se **número complexo** toda expressão da forma $a+bi$, onde a e b são números reais, e $i^2 = -1$.

Em que: i é a unidade imaginária.

2. Forma algébrica

Todo número complexo pode ser escrito na forma $z=a+bi$, denomina-se **forma algébrica**.

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a = \text{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ b = \text{Im}(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Em que:

a é a parte real de z .

b é a parte imaginária de z .

3. Álgebra dos números complexos

Igualdade

Dois números complexos, $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, são iguais quando suas partes reais e imaginárias são respectivamente iguais, isto é:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow a + bi = c + di \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Multiplicação

Multiplicando dois números complexos de acordo com a regra da multiplicação de binômios e sabendo que $i^2 = -1$, temos:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Conjugação de z

Se $z=a+bi$, defina-se como complexo conjugado de z o complexo $\bar{z} = a - bi$, isto é:

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Divisão

A divisão de dois números complexos, $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$, pode ser obtida escrevendo-se o quociente sob a forma de fração. A seguir, procedendo-se de modo análogo ao utilizado na racionalização do denominador de uma fração, multiplicam-se ambos os termos da fração pelo número complexo conjugado do denominador.

Isto é:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_2 \cdot z_2}$$

Potências de i

Geralmente, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

Então, para calcular o resultado de uma potência inteira de i , divide-se o expoente por 4 e, observando-se o valor do resto, obtém-se o resultado através da tabela ao lado:

Resto	i^{resto}	Valor da potência
0	i^0	1
1	i^1	i
2	i^2	-1
3	i^3	$-i$

4. Representação geométrica

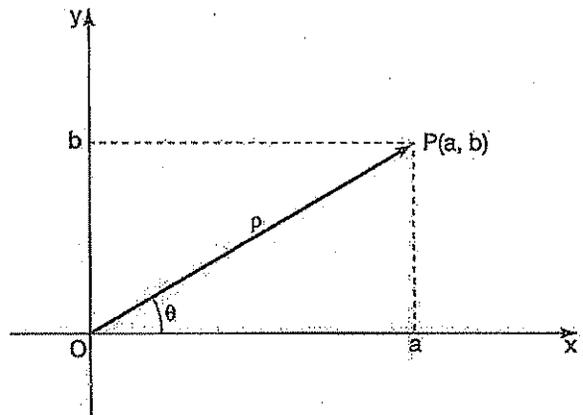
Todo número complexo $z = a+bi$ pode ser associado a um ponto $P(a,b)$ do plano cartesiano da seguinte forma:

O ponto P é denominado **afixo** ou **imagem** de z .

Assim, no eixo das **abscissas**, representa-se a **parte real** de z e, no eixo das **ordenadas**, a **parte imaginária** de z .

A distância ρ de P até a origem O é denominada **módulo** de z e indicamos:

$$|z| = |a+bi| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Denomina-se **argumento** do complexo z a medida do ângulo θ , formado por \overline{OP} com o eixo real Ox , medido no sentido anti-horário, conforme indica a figura.

$$\theta = \arg(z)$$

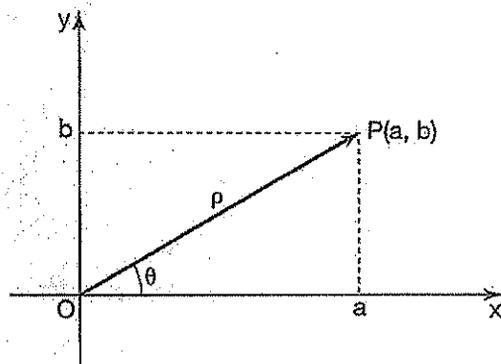
Esse ângulo θ deve satisfazer a condição $0 \leq \theta < 2\pi$.

Observe que:

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta = \frac{b}{\rho}$$

5. Forma trigonométrica ou polar

Considere o complexo $z = a+bi$, representado pelo ponto $P(a,b)$, indicado na figura.



$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \sin \theta$$

Substituindo-se em $z=a+bi$:

$$z = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta \cdot i$$

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

6. Operações na forma trigonométrica

Considere dois números complexos z_1 e z_2 , não-nulos, representados na forma trigonométrica

$$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Multiplicação

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Observe que o módulo do produto é o produto dos módulos, e o argumento do produto é a soma dos argumentos dos complexos dos fatores.

$$z = z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Observe que o módulo do quociente é o quociente dos módulos, e o argumento do quociente é a diferença dos argumentos dos complexos dividendo e divisor.

Potenciação

$$z^n = \rho^n (\cos n \theta + i \sin n \theta)$$

Observe que, para obter z^n , elevamos o módulo de z à potência n e multiplicamos o argumento θ por n .

Radiciação

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

Observe que as raízes enésimas têm módulo igual a $\sqrt[n]{\rho}$ e seus argumentos são obtidos da expressão

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n}, \text{ fazendo } k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1.$$



Exercícios Comentados

01 (MACK-SP) Com relação ao número complexo

$$z = \frac{3x-i}{1+3xi}, \text{ x real, pode-se afirmar que se trata de um número:}$$

- Real, para qualquer valor de x .
- Real, para um único valor de x .
- Imaginário puro, para qualquer valor de x .
- Imaginário puro, para um único valor de x .
- De representação gráfica no 2º quadrante.

Resolução:

$$z = \frac{3x-i}{1+3xi} \cdot \frac{1-3xi}{1-3xi} = \frac{3x-9x^2i-i+3x}{1+9x^2}$$

$$z = \frac{6x+i(-9x^2-1)}{1+9x^2} = \frac{6x}{1+9x^2} + i \frac{(-9x^2-1)}{1+9x^2}$$

$$\text{Se } \frac{6x}{1+9x^2} = 0, z \text{ é imaginário puro}$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Se } \frac{(-9x^2-1)}{1+9x^2} = 0, z \text{ é real}$$

$$-9x^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 = -1$$

∄ x para que z seja real

$$R = D$$

02 (FATEC-SP) Sejam os números complexos

$$z_1 = \frac{1}{2} + i \text{ e } z_2 = 1 - \frac{1}{2}i. \text{ O argumento de } z_1 - \overline{z_2} \text{ é:}$$

$$\text{a) } \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{b) } \frac{5\pi}{4}$$

- c) $\frac{7\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{\pi}{8}$

Resolução:

$$\overline{z_2} = 1 + \frac{i}{2}$$

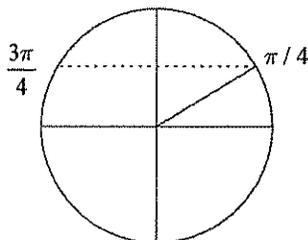
Logo: $z_1 - \overline{z_2} = \frac{1}{2} + i - \left(1 + \frac{i}{2}\right) =$

$$\frac{1}{2} + i - 1 - \frac{i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in 2^\circ \text{quadrante}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

Resposta: A



03 (IBMEC-SP) A quantidade de números complexos que têm o seu quadrado igual ao seu conjugado é:

- a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução:

$$z^2 = \overline{z}$$

Seja $z = a + bi$

$$(a + bi)^2 = a - bi$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = a - bi$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

1º) Se $b = 0$

$$a^2 - b^2 = a$$

$$a^2 - a = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

2º) Se $a = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$$

$$1 - 4b^2 = -2$$

$$b^2 = \frac{3}{4}$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2ab + b = 0$$

$$b(2a + 1) = 0$$

$$b = 0$$

ou

$$a = -\frac{1}{2}$$

logo há 4 números
resposta: E

04 (UEL-PR) Se $z = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$, então o conjugado de z^2 é igual a:

- a) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
d) 4
e) -4i

Resolução:

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z^2 = 2^2 \left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z^2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z^2 = 4(0 + i) = 4i$$

logo: $\overline{z^2} = -4i$

resposta: E

05 (IBMEC-SP) Os afixos (imagens) dos números complexos que são raízes da equação $z^4 - 81 = 0$ são vértices do polígono convexo de área igual a:

- a) 36
b) 27
c) 25
d) 18
e) 16

Resolução:

$$z^4 = 81$$

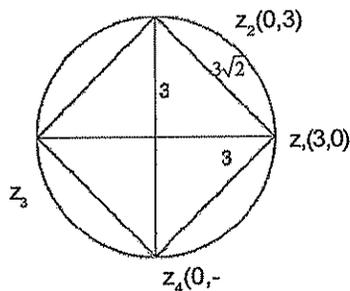
$$z = \sqrt[4]{81}$$

logo: $z_1 = 3 = (3, 0)$

O polígono é um quadrado cujo lado mede $3\sqrt{2}$

$$A = \ell^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$$

resposta: D



Exercícios de Sala

01 (UEL-PR) Seja o número complexo $z=x+yi$, no qual $x, y \in \mathbb{R}$. Se $z(1-i) = (1+i)^2$, então:

- a) $x=y$
- b) $x-y=2$
- c) $xy=1$
- d) $x+y=0$
- e) $y=2x$

02 (UFV-MG) Os números complexos z e w são tais que $w+iz=-2-i$ e $z+iw=5+2i$. Então z e w são respectivamente:

- a) $-2+2i$ e $3i$
- b) $2+2i$ e $3i$
- c) $-2-2i$ e $3i$
- d) $-2-2i$ e $-3i$
- e) $2+2i$ e $-3i$

03 (MACK-SP) Considere os números complexos tais que $|z|=1$. O número imaginário puro w , quando $w=1+2z$, pode ser:

- a) $\sqrt{3}i$
- b) $\sqrt{2}i$
- c) i
- d) $-2i$
- e) $-3i$

04 (MACK-SP) O valor de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{102}$, $i^2=-1$, é:

- a) i
- b) $-i$
- c) 1
- d) $1+i$
- e) -1

05 (UFRN) Se $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$, então o argumento de z é:

- a) $-\frac{3\pi}{4}$
- b) $-\frac{\pi}{4}$
- c) $\frac{\pi}{4}$
- d) $\frac{\pi}{2}$
- e) $\frac{3\pi}{4}$

06 (FGV-SP) Seja o número complexo $z=(x-2i)^2$, no qual x é um número real. Se o argumento de z é 90° , então $\frac{1}{z}$ é igual a:

- a) $-\frac{i}{8}$
- b) $-8i$
- c) $4i$
- d) $-1+4i$
- e) $4-i$

07 (PUC-SP) $(1+i)^{12} - (1-i)^{12}$, onde $i^2=-1$, é igual a:

- a) $-128i$
- b) -128
- c) 128
- d) $128i$
- e) 0

08 (CESGRANRIO-90) O complexo $\left[\frac{\sqrt{3}-i}{2-\frac{i}{2}}\right]^6$ equivale a:

- a) $6i$
- b) i

- c) $-i$
d) $-6i$
e) -1

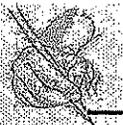
09 (PUC-SP) Quantos são os números complexos z que satisfazem as condições $z^4 = 1$ e $z + \bar{z} = 0$?

(\bar{z} = conjugado de z)

- a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

10 (U.F.BA) Sendo $z = 2 - i$, o inverso de z^2 é:

- a) $\frac{5 + 4i}{41}$
b) $\frac{2 + i}{5}$
c) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
d) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$
e) $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$



Exercícios de Casa

01 (CESGRANRIO) O complexo $\frac{1}{(1-i)^2}$ é igual a:

- a) $-\frac{1}{64}$
b) $-\frac{1}{32}$
c) $(1+i)^2$
d) $\frac{1}{12}$
e) $\frac{1}{12i}$

02 (U.F.GO) Se i é a unidade imaginária, então

$\frac{1}{i^{15}} + \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{25}} + 1$ é igual a:

- a) $1+i$
b) 0
c) $1-i$
d) i
e) 1

03 (U.F.PR) Dados os números complexos

$z_1 = 4 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = 1 + 3i$, efetuando-se $\frac{z_1}{z_2}$ obtemos:

- a) $-\frac{8\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}i$
b) $5 + \sqrt{3}i$
c) $\frac{2 + \sqrt{3}}{5} - \frac{(7 - \sqrt{3})}{5}i$
d) $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10} + \frac{(12 + \sqrt{3})}{10}i$
e) $\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8}i$

04 (VUNESP) O número complexo $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1987}$ é igual a:

- a) $-i$
b) i
c) -1
d) 1
e) 2i

05 (U.E.BA) O módulo do número complexo

$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3}}$ é:

- a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{8}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 2

06 (F.C.M.STA.CASA) Os valores de w que satisfazem a igualdade $w^2 + |w| = 0$ são: (obs.: $|w|$ é o módulo do número complexo w .)

- a) $\{-1, 0, -i\}$
- b) $\{0, i, -i\}$
- c) $\{1, 0, -i\}$
- d) $\{0, -2, i\}$
- e) n.d.a

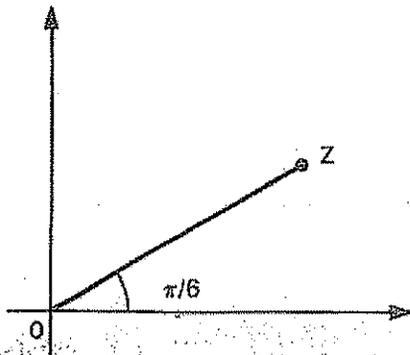
07 (U.F.SE) O módulo de um número complexo é $2\sqrt{2}$ e seu argumento principal é 45° . A sua forma algébrica é:

- a) $4+4i$
- b) $2+2i$
- c) $2-2i$
- d) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- e) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

08 (U.MACK) A função f associa a cada complexo seu argumento. O valor de $\cotg(f(-1-i))$ é:

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) $\sqrt{2}$
- e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

09 (U.F.PE) Considere o seguinte gráfico que representa o número complexo $z=a+bi$.



Sabendo-se que o segmento \overline{OZ} mede duas unidades de comprimento, assinale a alternativa correta:

- a) $z = \sqrt{2} + i$
- b) $z = \sqrt{3} + i$
- c) $z = 1 + \sqrt{3}i$
- d) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- e) $z = 1 - \sqrt{3}i$

10 (ITA) Considere a família de curvas do plano complexo, definida por $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = C$, onde z é um complexo não nulo e C é uma constante real positiva. Para cada C temos uma:

- a) Circunferência com centro no eixo real igual a C .
- b) Circunferência com centro no eixo real e raio igual a $\frac{1}{C}$.
- c) Circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $\frac{1}{(2C)}$.
- d) Circunferência tangente ao eixo imaginário e raio

igual a $\frac{1}{(2C)}$.

e) Circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a $\frac{1}{2C}$.

11 (FATEC) Se $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, então $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

- a) $\bar{z} = -z$
- b) $\bar{z} = \frac{1}{z}$
- c) $|z^2| = 2|z|$
- d) $\arg z = \arg z^2$
- e) $\frac{1}{z^2} = -z^2$

12 (U.C.MG) A forma trigonométrica do número complexo $y = 4\sqrt{3} + 4i$ é:

- a) $8 (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$
- b) $8 (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$
- c) $8 (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$
- d) $8 (\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$
- e) $8 (\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$

13 (U.E.LONDRINA) Sejam z_1 e z_2 os números complexos $z_1 = 3 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \text{sen } 30^\circ)$

e $z_2 = 5 \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \text{sen } 45^\circ)$. O produto de z_1 por z_2 é o número complexo:

- a) $15 \cdot (\cos 1350^\circ + i \cdot \text{sen } 1350^\circ)$
- b) $8 \cdot (\cos 75^\circ + i \cdot \text{sen } 75^\circ)$
- c) $8 \cdot (\cos 1350^\circ + i \cdot \text{sen } 1350^\circ)$
- d) $15 \cdot (\cos 15^\circ + i \cdot \text{sen } 15^\circ)$
- e) $15 \cdot (\cos 75^\circ + i \cdot \text{sen } 75^\circ)$

14 (F.C.M.STA.CASA) Seja o número complexo $z = (2 - 2i)^n$ onde $n \in \mathbb{N}^+$. Se $z = 512$, então o número n é:

- a) Primo
- b) Quadrado perfeito
- c) Divisível por 5
- d) Múltiplo de 4
- e) Divisível por 3

15 (VUNESP) A expressão $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$, onde i é a unidade imaginária dos complexos, é igual a:

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- e) 1

16 (F.C.M.STA.CASA) O menor valor de n inteiro e positivo para o qual $y^n = (2 + 2\sqrt{3}i)^n$ seja real e positivo é:

(Obs.: $i = \sqrt{-1}$.)

- a) 3
- b) 12
- c) 6
- d) 9
- e) n.d.a

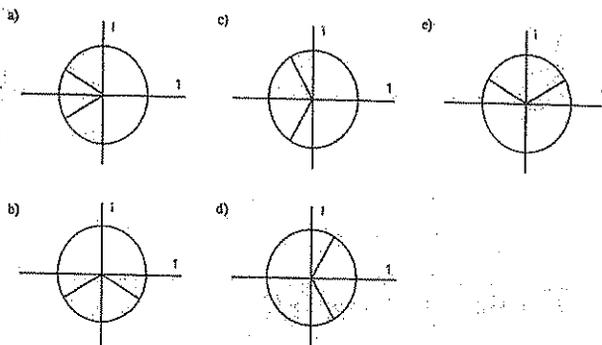
17 (FATEC) Seja $i^2 = -1$. Se z é um número complexo tal que $z^3 = 1$, então z é igual a:

- a) 1, i ou $-i$
- b) $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$
- c) $1, \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$
- d) $1, \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$
- e) $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ou $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

18 (CESGRANRIO) Seja $z \neq 1$ uma das raízes cúbicas da unidade. Então $1 + z + z^2$ vale:

- a) 0
- b) 3
- c) 1
- d) 3
- e) $1 + i\sqrt{3}$

19 (VUNESP) O diagrama que melhor representa as raízes cúbicas de $-i$ é:



20 (U. F. GO) As raízes quadradas do número complexo $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ são:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

21 (U.F.BA) No plano cartesiano ao lado, os complexos z_1 , z_2 e z_3 são as raízes cúbicas de um determinado complexo z , tal que $|z| = 8$, pode-se afirmar:

a) O argumento de z_2 é $\frac{\pi}{6}$.

b) $z_3^{987} = 2^{987}$.

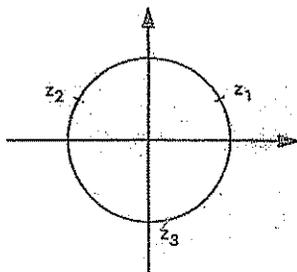
c) $\frac{iz_1}{z_1} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$.

d) A distância entre z_1 e z_3 é $\sqrt{3}$.

e) \bar{z}_1 é simétrico de z_2 em relação à origem.

f) z_2 e $i z_2$ são simétricos em relação à 1ª bissetriz.

g) O lugar geométrico dos afixos dos complexos z para os quais $\text{Re}(z) = \text{Im}(z_1 + z_2)$ é a reta $x = 2$.



22 (U.C. SALVADOR) Considere o número complexo z tal que $z^6 = -64$. O número z pode ser:

a) $\sqrt{3} + i$

b) $1 + \sqrt{3}i$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

e) $-i$

23 (F. C. M. STA. CASA) O número complexo

$$z = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \text{sen} \frac{\pi}{16} \right)$$

do número complexo:

a) $1 - i$

b) $1 + i$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

d) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

24 (ITA) Seja $w = a + bi$ com $b \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \bar{wz} + c = 0$ descreve:

a) Um par de retas paralelas.

b) Uma circunferência.

c) Uma elipse.

d) Uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.

e) n.d.a.

1. Definição

Denomina-se **função polinomial** ou **polinômio** toda função definida pela relação:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Em que:

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados **coeficientes**;

$n \in \mathbb{N}$;

$x \in \mathbb{C}$ é a variável.

Observações:

1ª) Se $a_n \neq 0$, o expoente máximo n é dito **grau** do polinômio e indicamos $\text{gr}(P) = n$.

2ª) Se $P(x) = 0$, não se define o grau do polinômio.

3ª) $P(a)$ é denominado **valor numérico** de $P(x)$ para $x = a$.

4ª) Se $P(a) = 0$, o número a é denominado **raiz** ou **zero** de $P(x)$.

2. Polinômios idênticos

Dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são iguais ou idênticos quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável x .

$$A(x) \equiv B(x) \Rightarrow A(a) = B(a), \forall a \in \mathbb{C}$$

Teorema

A condição necessária e suficiente para que dois polinômios A e B sejam idênticos é que os coeficientes dos termos semelhantes sejam dois a dois iguais.

Algebricamente:

$$A(x) \equiv B(x) \Rightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

3. Polinômio identicamente nulo

Denomina-se polinômio identicamente nulo o polinômio que tem todos os seus coeficientes nulos.

Indicamos por $P(x) \equiv 0$ (lê-se: $P(x)$ é idêntico a zero).

Seja o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

$$\text{Se } P(x) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ a_{n-1} = 0 \\ a_{n-2} = 0 \\ \vdots \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

4. Divisão de polinômios

Efetuar a divisão de um polinômio $A(x)$ por outro $B(x)$ é determinar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{array}{l} A(x) \overline{) B(x)} \Rightarrow 1^\circ) A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x) \\ R(x) \overline{) Q(x)} \quad 2^\circ) \text{gr}(R) < \text{gr}(B) \text{ ou } R(x) = 0 \end{array}$$

Em que:

$A(x)$ é o dividendo;

$B(x)$ é o divisor;

$Q(x)$ é o quociente;

$R(x)$ é o resto.

5. Divisão de um polinômio por um binômio da forma $ax+b$

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio da forma $(ax+b)$ é igual ao valor numérico do polinômio $P(x)$ se x for a raiz do divisor.

$$P(x) \overline{) ax+b} \Rightarrow r = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$r \quad Q(x)$

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ pela diferença $(x-\alpha)$ é igual a $P(\alpha)$.

$$P(x) \overline{) x-\alpha} \Rightarrow r = P(\alpha)$$

$r \quad Q(x)$

Teorema de D'Alembert

Se $r = 0$, então $P(\alpha) = 0$, isto é, $P(x)$ é divisível por $x-\alpha$ e α é raiz de $P(x)$.

Teorema

Se $P(x)$ for divisível por $(x-\alpha)$ e por $(x-\beta)$, com $\alpha \neq \beta$, também será divisível por $(x-\alpha)(x-\beta)$.

Generalizando, temos:

Se $P(x)$ é divisível por n fatores distintos $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$.

6. Dispositivo de Briot-Ruffini

É um dispositivo que permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ por um binômio da forma $x - \alpha$ (α constante).

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
α		αq_0	αq_1	...	αq_{n-2}	αq_{n-1}
	q_0	q_1	q_2	...	q_{n-1}	R

Quociente: $q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \dots + q_{n-1}$

Resto: $a_n + \alpha q_{n-1}$



Exercícios Comentados

01) Seja $f(x)$ um polinômio do 2º grau de coeficiente dominante igual a 2. Determine $f(x)$ sabendo que $f(1)=0$ e $f(-x)=f(x-1)$. Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $x+2$.

Resolução:

Coeficiente dominante $a=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(1)=2+b+c=0 \rightarrow b+c=-2$

$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

Como $f(-x)=f(x-1)$:

$ax^2-bx+c=a(x^2-2x+1)+bx-b+c$

$ax^2-bx+c=ax^2-2ax+a+bx-b+c$

$ax^2-bx+c=ax^2+x(-2a+b)+a-b+c$

Então:

$a=a$

$-b=-2a+b \Rightarrow a=b \Rightarrow b=2$

$c=a-b+ca=b$

como $b+c=-2c=-4$

Então:

$f(x)=2x^2+2x-4$

$R=f(-2)=2(-2)^2+2(-2)-4$

$f(-2)=8-4-4=0$

02) Dividindo-se o polinômio $p(x)=x^3-4x^2+7x-3$ por $D(x)$, obtém-se quociente $x-1$ e resto $2x-1$. Determine as raízes de $D(x)$.

Resolução:

Como $p(x) \div D(x) \Rightarrow D(x) \cdot Q + R = p(x)$

$$R \quad Q \quad D(x) = \frac{p(x) - R}{Q}$$

$$D(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 3 - 2x + 1}{x - 1}$$

$$D(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x - 1}$$

Dividindo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$D(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{l} S = 3 \\ P = 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} S = 3 \\ P = 2 \end{array}} \right\} 2 \text{ e } 1$$

Resposta: 2 e 1

03) Determine $a+b$ de modo que

$p(x) = ax^3 + 2x^2 - bx + 2$ seja divisível por $(x+1)^2$.

Resolução:

Como $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$, a divisão pode ser feita por Ruffini:

-1	a	b	-b	2
-1	a	2-a	-2+a-b	4-a+b
	a	2-2a	-4+3a-b	

$$\text{Logo: } \begin{cases} 4 - a + b = 0 \rightarrow \\ -4 + 3a - b = 0 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} -a + b = 4 \\ 3a - b = 4 \end{cases} \quad \boxed{a+b=12}$$

$$\begin{aligned} 2a &= 8 \\ a &= 4 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

04 Calcule o resto $R(x)$ da divisão de $p(x)$ por $(x+1)(x-2)$ sabendo-se que o resto da divisão de $p(x)$ por $x+1$ é 3 e por $x-2$ também é 3.

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{Se } p(x) \mid x+1 & \quad \text{e } p(x) \mid x-2 \\ r = 3 \Rightarrow p(-1) = 3 & \quad r_2 = 3 \Rightarrow p(2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{então: } p(x) & \quad \mid (x+1)(x-2) \\ r(x) &= ax + b \quad Q(x) \\ p(x) &= Q(x)(x+1)(x-2) + ax + b \end{aligned}$$

$$\text{como: } p(-1) = Q(-1) \underbrace{(-1+1)}_0 (-1-2) - a + b = 3$$

e

$$p(2) = Q(2) \underbrace{(2+1)}_0 (2-2) + 2a + b = 3$$

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + b = 3 \end{cases}$$

$$a = 0 \text{ e } b = 3$$

$$R(x) = 3$$

05 Calcule $A+B$ em $\frac{1+x}{x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x}$

Resolução:

$$\frac{1+x}{x-x^2} = \frac{A(1-x) + Bx}{x(1-x)}$$

$$A - Ax + Bx = 1 + x$$

$$x(-A+B) + A = 1 + x$$

$$-A + B = 1$$

$$A = 1 \rightarrow B = 2$$

$$\boxed{A+B=3}$$

02 (FGV-SP) Se o polinômio $P(X) = x^3 - kx^2 + 6x - 1$ for divisível por $(x-1)$, ele também será divisível por:

- a) $x^2 - 5x + 1$
- b) $x^2 - 5x + 3$
- c) $x^2 + 5x + 1$
- d) $x^2 + 5x + 3$
- e) $x^2 - 5x + 5$

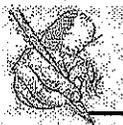
03 (PUC/Campinas-SP) Dado o polinômio

$P(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 3$, se n ímpar, então $P(-1)$ vale:

- a) -1
- b) 0
- c) 2
- d) 1
- e) 3

04 (U.E.Londrina-PR) Sejam os polinômios f e g , de graus 4 e 2, respectivamente. Se o polinômio $f+g^2$ é não-nulo, então seu grau será sempre:

- a) 8
- b) 6
- c) 4
- d) Um número par.
- e) Menor ou igual a 4.



Exercícios de Sala

01 (Esan-SP) Sendo $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$ e sabendo-se que 2 é raiz de $P(x)$ e 1 é raiz de $Q(x)$, então $P(1) - Q(2)$ vale:

- a) 0
- b) 2
- c) 3
- d) 6
- e) 10

05 (Mackenzie-SP) Seja $P(x)$ um polinômio do primeiro grau tal que $P(2x+1)=x$. Então $P(1)+P(2)$ é igual a:

- a) 0
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 1
- d) $\frac{3}{2}$
- e) 2

06 (Fuvest-SP) Um polinômio $P(x)=x^2+ax^2+bx+c$ satisfaz às seguintes condições: $P(1)=0$, $P(x)+P(-x)=0$, qualquer que seja x real. Qual o valor de $P(2)$?

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

07 (PUC-SP) Os valores de m , n e p de modo que sejam idênticos os polinômios:

$$P_1(x) = (m+n+p)x^4 - (p+1)x^3 + mx^2 + (n-p)x + n$$

e $P_2(x) = 2mx^3 + (2p+7)x^2 + 5mx + 2m$ são respectivamente:

- a) 1,2,-3
- b) 2,3,1
- c) -1,2,2
- d) 2,1,-3
- e) 1,-3,2

08 (PUC-SP) O valor de a para que o resto da divisão do polinômio $P(x) = ax^3 - 2x + 1$ por $x-3$ seja 4 é:

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{3}{2}$
- e) 1

09 (Cesgranrio) O polinômio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x + k$ é divisível por $x-2$. Então, a constante k é:

- a) -9
- b) -6
- c) 0
- d) 2
- e) 12

10 (Mackenzie-SP) Se $P(x) = x^3 - 8x + kx - m$ é divisível por $(x-2)(x+1)$, então $\frac{k}{m}$, (*com $m \neq 0$*), vale:

- a) $\frac{2}{5}$
- b) $\frac{5}{2}$
- c) $\frac{7}{2}$
- d) $\frac{2}{1}$
- e) $\frac{1}{2}$



Exercícios de Casa

01 (Mackenzie-SP) Se o polinômio $P(x) = x^5 + 4ax^4 + 3x^3 + a^2$, com $a \in \mathbb{R}$, for divisível por $x-a$, então $\sqrt{a^2+1}$ será igual a:

- a) $\sqrt{10}$
- b) 1
- c) 2
- d) $\sqrt{2}$
- e) $\sqrt{26}$

02 (U.E. Londrina-PR) Sabe-se que dividindo o polinômio $f = x^4 + x^2$ por g , obtêm-se quociente $x^2 - x + 2$ e resto $-2x$. nessas condições, o polinômio g é:

- a) $x^2 + x$
- b) $x^2 - x$
- c) $x^2 + x + 1$

- d) $x^2 - x + 1$
e) $x^2 - x - 1$

03 (Fuvest-SP) Dividindo-se p polinômio $P(x)$ por $2x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é:

- a) 2
b) 1
c) 0
d) -1
e) -2

04 (Fuvest-SP) Determinar um polinômio $P(x)$ de grau 4, divisível por $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$, sabendo que $P(0) = 0$ e que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é 48.

05 (Vunesp) Considere a função polinomial de 3º grau, $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Calcule $P(-2)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ e esboce o gráfico.
b) Com base no item a, determine, justificando sua resposta, quantas raízes reais e quantas raízes complexas (não-reais) têm $P(x)$.

06 (Fuvest-SP) $P(x)$ é um polinômio de grau ≥ 2 e tal que $P(1) = 2$ e $P(2) = 1$. Sejam $D(x) = (x - 2)(x - 1)$ e $Q(x)$ o quociente da divisão $P(x)$ por $D(x)$.

a) Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$.
b) Sabendo que o termo independente de $P(x)$ é 8, determine o termo independente de $Q(x)$.

07 (U. F. VIÇOSA) Para que o polinômio do segundo grau $P(x) = ax^2 - bx + c$ seja o quadrado do polinômio $Q(x) = dx + e$ é necessário que:

- a) $b^2 = 4c$
b) $b^2 = 4ac$
c) $b^2 = 4a$
d) $b^2 = 4a^2c$
e) $b^2 = 4a^2$

08 Dado o polinômio $p(x)$ do 2º grau que admite 2 como raiz, $p(1) = -2$ e quando dividido por $x - 3$ apresenta resto igual a 4. Logo, $p(-2)$.

- a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

09 (U. E. CE) Se $2x + 5 \equiv (x + m)^2 - (x - n)^2$, então $m^3 - n^3$ é igual a:

- a) 19
b) 28
c) 35
d) 37

10 (U.C.SALVADOR) Sejam f, g e h polinômios de graus 2, 3 e 4, respectivamente. O grau do polinômio $f \cdot (g - h)$ é:

- a) 4
b) 5
c) 6
d) 8
e) 14

11 (PUC) Se p e q são polinômios de graus 4 e 5 respectivamente, então o grau de:

- a) $p + q$ é 5.
b) pq é 20.
c) $p + q$ é 9.
d) pq é 10.
e) $q - p$ é 4.

12 (U.F.MG) O quociente da divisão de $p(x) = 4x^4 - 4x^3 + x - 1$ por $q(x) = 4x^3 + 1$ é:

- a) $x - 5$
b) $x - 1$
c) $x + 5$
d) $4x - 5$
e) $4x + 8$

13 (FATEC) Se um fator do polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ é $q(x) = x^2 - 3x + 1$, então o outro fator é:

- a) $x - 2$
b) $x + 2$
c) $-x - 2$
d) $-x + 2$
e) $x + 1$

14 (U.F.GO) Se o polinômio $x^3 + kx^2 - 2x + 3$ é divisível pelo polinômio $x^2 - x + 1$, então o quociente é:

- a) $x - 3$
b) $x + 3$
c) $x - 1$
d) $x + 1$
e) $x + 2$

15 (F.C.M.STA.CASA) Dividindo-se um polinômio f por $x^2 - 3x + 1$ obtém-se quociente $x+1$ e resto $2x+1$. O resto da divisão de f por $x+1$ é:

- a)-2
- b)-1
- c)3
- d) $2x-1$
- e) $2x+1$

16 (U.F.PA) O polinômio $x^3 - 5x^2 + mx - n$ é divisível por $x^2 - 3x + 6$. Então, os números m e n são tais que $m+n$ é igual a:

- a)0
- b)12
- c)24
- d)18
- e)28

17 (CESGRANRIO) Se o polinômio $x^3 + 2x^2 - x + k$ é divisível por $x-2$, então o valor de k é:

- a)0
- b)8
- c)-6
- d)-8
- e)-14

18 (U.E.CE) Seja o polinômio $p(x) = x^3 - 9x^2 + mx + p$. Se $p(x)$ é divisível por $x-2$ e $q(x) = x^2 + nx + 2$ é o quociente da divisão de $p(x)$ por $x-2$, então $m+p+n$ é igual a:

- a)5
- b)6
- c)7
- d)8

19 (U.F.R.PE) Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais. Assinale a alternativa certa para o resto da divisão de $p(x)$ por $x^2 - 5x + 6$, sabendo-se que $p(2)=2$ e $p(3)=3$.

- a) $2x+1$
- b) $x+1$
- c) $x-3$
- d) $x-2$
- e) x

20 (FGV) O polinômio $x^3 + 2x^2 - px + q$ é divisível por $x^2 - 1$. Podemos concluir que:

- a) $p=-2$

- b) $q=1$
- c) $p+q=0$

d) $\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$

e) $p \cdot q = \frac{7}{5}$

21 (FGV) Para que o polinômio $x^3 - 8x + mx - n$ seja divisível por $(x+1)(x-2)$ o polinômio $m \cdot n$ deve ser igual a:

- a)-8
- b)10
- c)-10
- d)8
- e)-6

22 (PUC-SP) Sejam -1 e 2, respectivamente, os restos das divisões de um polinômio f por $x-1$ e $x-2$. O resto da divisão de f por $(x-1)(x-2)$ é:

- a)0
- b)-2
- c) $-x+2$
- d) $x-1$
- e) $3x-4$

23 (U.E.CE) Um polinômio $P(x)$ dividido por $x-1$ dá resto 3, dividido por $x+1$, dá resto 1. A soma dos coeficientes do resto deste mesmo polinômio quando dividido por $(x-1)(x+1)$ é:

- a)1
- b)2
- c)3
- d)4

24 Quais devem ser os valores de A , B e C para que

$$\frac{2x^2 - 5x - 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

seja uma identidade?

25 Sabendo que:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

então $A+B+C+D$ é:

- a)-2
- b)-1
- c)0
- d)1
- e)2

4 - Equações Polinomiais

Uma equação polinomial é toda igualdade redutível à forma $P(x) = 0$, sendo $P(x)$ um polinômio qualquer.

1. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Toda equação de grau n , com $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Desse teorema, apresentado por Gauss no final do século XVIII, decorre:

Toda equação de grau n , com $n \geq 1$, possui exatamente n raízes complexas.

Rebaixamento de ordem

O teorema de D'Alembert afirma que um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x-r)$ se, e somente se, $P(r)=0$, ou seja, se r é raiz de $P(x)$. Podemos, então, escrever:

$$P(x) = (x-r) \cdot Q(x)$$

2. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, com $a_n \neq 0$. $P(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1º grau na forma:

$$P(x) = a_n \cdot (x-r_1) \cdot (x-r_2) \cdot \dots \cdot (x-r_n)$$
 em que

r_1, r_2, \dots, r_n são as n raízes de $P(x)$.

3. MULTIPLICIDADE

Dizemos que r é raiz com multiplicidade m , com $m \in \mathbb{N}^*$, de $P(x)$ se:

$$P(x) = (x-r)^m \cdot Q(x) \text{ e } Q(r) \neq 0$$

4. PESQUISA DE RAÍZES

Teorema

Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$.

Se $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional dessa equação

(com $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$) e p e q primos entre si, então:

p é divisor de a_0

q é divisor de a_n

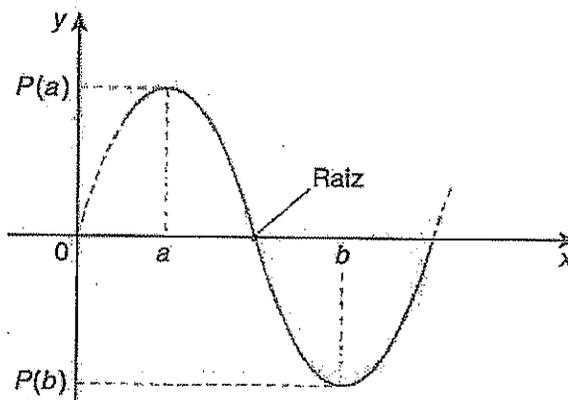
Observação:

Do teorema anterior, decorre que se $p \in \mathbb{Z}$ é raiz inteira da equação $P(x)=0$, então p é divisor de a_0 .

5. EXISTÊNCIA DE RAÍZES REAIS

Sejam $P(x)=0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e o intervalo real $]a; b[$.

Se $P(a) \cdot P(b) < 0$, há ao menos uma raiz real no intervalo $]a; b[$.

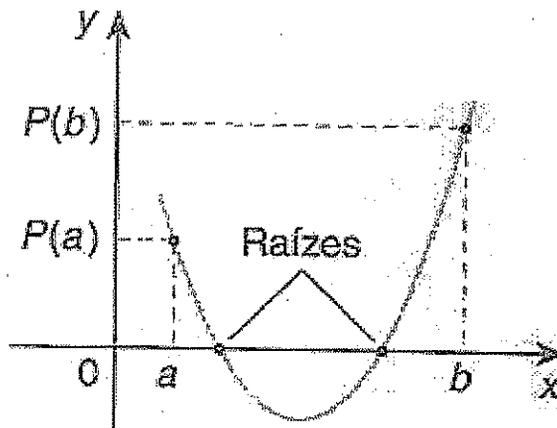
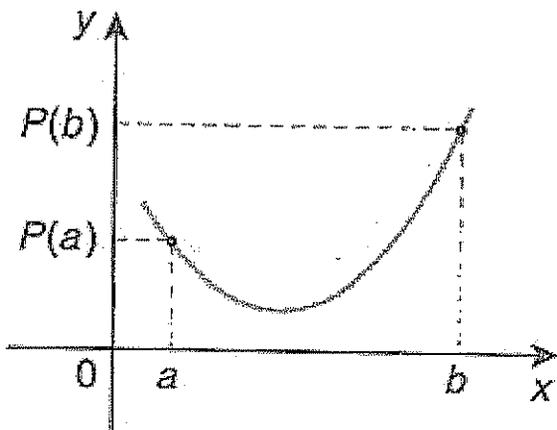


Tal proposição é conhecida como **teorema de Bolzano**.

Observações

Note que se $P(a) \cdot P(b) > 0$ não poderemos garantir nem descartar a existência de raízes reais nesse intervalo.

Veja essas situações:



Pode-se também dizer que se $P(a) \cdot P(b) > 0$, há um número par (inclusive zero) de raízes no intervalo $]a; b[$.

6. RAÍZES COMPLEXAS IMAGINÁRIAS

Teorema

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais. Se o número imaginário $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, é uma raiz de equação $P(x) = 0$, então o imaginário $\bar{z} = a - bi$ (conjugado de z) **também é raiz** dessa equação.

7. RELAÇÃO DE GIRARD

Equação quadrática

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, r_1 e r_2 suas raízes.

O teorema da decomposição permite-nos escrever:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$ax^2 + bx + c \equiv a[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2]$$

Dividindo-se os dois membros por a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$$

Resulta, então, o sistema:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Com essas igualdades obtemos a **soma** e o **produto** das raízes diretamente dos coeficientes equação.

Equação cúbica

Seja a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Desenvolvendo-se e agrupando-se o segundo membro, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a$$

$$[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)x - r_1 r_2 r_3]$$

Dividindo ambos os membros por a e identificando-se os coeficientes correspondentes, resulta o sistema:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Generalizando para uma equação de grau n , temos:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ (com } a \neq 0 \text{)}.$$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \dots + r_{n-2} \cdot r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \dots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$



Exercícios Comentados

01 Sabendo que -1 é raiz de $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ encontre as demais raízes e o decompõe em fatores do 1º grau.

Resolução:

Se -1 for raiz, o polinômio $P(x)$ é divisível por $[x - (-1)]$. Apliquemos o dispositivo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão.

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) & x+1 \\
 0 & Q(x)
 \end{array}$$

	+				
3	-4	-5	2	-1	
3	-7	2	0	0	
		x			

Teremos: $Q(x) = 3x^2 - 7x + 2$ e

$$P(x) = (x+1)(3x^2 - 7x + 2)$$

As outras raízes de $P(x)$ serão as raízes da equação $Q(x) = 0$.

$$3x^2 - 7x + 2 \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{cases}$$

Podemos escrever:

$$P(x) = (x+1) \left[3 \left(x - \frac{1}{3} \right) (x-2) \right]$$

Ou ainda:

$$P(x) = \underbrace{(x+1)(3x-1)(x-2)}_{\text{Fatores do 1º grau}}$$

As raízes são

$$-1, \frac{1}{3} \text{ e } 2, \text{ e } P(x) = (x+1)(3x-1)(x-2),$$

02 Escreva um polinômio real $P(x)$ de menor grau possível, com coeficientes predominantes igual a 2, que admita 1 e -2 como raízes simples e 3 como raiz dupla (multiplicidade 2).

Resolução:

1 e -2 são raízes simples. 3 é raiz com multiplicidade 2 (raiz dupla).

Podemos escrever:

$$P(x) = 2(x-1)[x - (-2)](x-3)^2$$

Desenvolvendo e simplificando, vem:

$$P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 42x - 36$$

03 Resolva a equação $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$, sabendo-se que $1+i$ é raiz.

Resolução:

Se $1+i$ é raiz, $1-i$ também será. Chamando as outras raízes de x_1 e x_2 e usando Girard:

$$S = 1+i+1-i+x_1+x_2 = 0$$

$$x_1+x_2 = -2$$

$$P = (1+i)(1-i)x_1x_2 = 6$$

$$2x_1x_2 = 6$$

$$\begin{cases} x_1x_2 = 3 \\ x_1+x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1x_2 = 3 \\ x_1+x_2 = -2 \end{cases}$$

Resolvendo obtêm-se as outras raízes

$$-1 \pm \sqrt{2}i \quad S = \{1+i, 1-i, -1+\sqrt{2}i, -1-\sqrt{2}i\}$$

04 Calcule a soma das inversas das raízes de $x^3 - 7x^2 + 4x - 1 = 0$.

Resolução:

Chamando-se as raízes de a , b e c , têm-se:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{4}{(-1)^3(-1)} = 4$$

05 Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$ sabendo que uma raiz é o dobro da soma das outras duas.

Resolução:

Raízes: a, b, c

$$a = 2(b + c)$$

$$S = a + b + c = 9$$

$$a + \frac{a}{2} = 9 \rightarrow a = 6$$

Por Ruffini: $6 \begin{array}{r|rrrr} 1 & -9 & 20 & -12 \\ & & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{l} S = 3 \\ P = 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} S = 3 \\ P = 2 \end{array}} \right\} 2 \text{ e } 1$$

$$S = \{1, 2, 6\}$$

06 Resolva a equação $64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 = 0$ sabendo que as raízes estão em P.G.

Resolução:

$$\frac{x}{q}, x, xq$$

$$P = \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = (-1)^3 \cdot \frac{(-1)}{64}$$

$$x^3 = \frac{1}{64}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Por Ruffini:

$$\frac{1}{4} \begin{array}{r|rrrr} 64 & -56 & 14 & -1 \\ & & 64 & -40 & 4 & 0 \end{array}$$

$$64x^2 - 40x + 4 = 0$$

$$64x^2 - 40x + 4 = 0$$

resolvendo obtemos: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\}$$



Exercícios de Sala

01 (FGV-SP) A equação $x^3 - 3x^2 + 4x + 28 = 0$ admite -2 como raiz. As outras raízes satisfazem à equação:

a) $x^2 - 4x + 14 = 0$

b) $x^2 - 5x + 14 = 0$

c) $x^2 - 6x + 14 = 0$

d) $x^2 - 7x + 14 = 0$

e) $x^2 - 8x + 14 = 0$

02 (Vunesp) Uma das raízes da equação $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$ é 2. Pode-se afirmar que:

a) As outras raízes são imaginárias.

b) As outras raízes são 17 e -19.

c) As outras raízes são iguais.

d) As outras raízes estão entre -2 e 0.

e) Só uma das outras raízes é real.

03 (PUC/Campinas-SP) Considerando que algumas raízes reais do polinômio $f = x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4$ pertencem ao conjunto $\{-2; -1; 0; 1\}$, é correto afirmar que esse polinômio admite:

a) cinco raízes reais.

b) cinco raízes não-reais.

c) três raízes reais e duas não-reais.

d) duas raízes reais e três não-reais.

e) uma raiz real e quatro não-reais.

04 (U.E.Londrina-PR) Sabe-se que a equação $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0$ admite uma raiz racional. A maior das raízes é um número.

a) ímpar.

b) divisível por 4.

c) irracional.

d) quadrado perfeito.

e) não-real.

05 (Mackenzie-SP) Se k e p são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação $4x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, então k+p vale:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{5}{2}$

d) -4

e) $-\frac{2}{5}$

06 (Fuvest-SP) Se a equação:

$ax^4 + 8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem raízes reais 2 e -1, então o valor de k é:

a) $\frac{9}{4}$

b) -2

c) $-\frac{89}{4}$

d) $-\frac{3}{17}$

e) $-\frac{76}{9}$

07 (U.E.Londrina-PR) Seja a equação

$2x^3 + x^2 - 4x + k = 0$, cujas raízes são a, b e c na

qual k é uma constante real. Se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -2$, então k é igual a:

a) -4

b) -2

c) -1

d) 2

e) 4

08 (Mackenzie-SP) Na equação $x^3 - 5x^2 + 5x + 2 = 0$, de raízes a, b, e c, o produto (a+2)(b+2)(c+2) vale:

a) 35

b) 30

c) 25

d) 45

e) 40

09 (Fuvest-SP) Seja $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de P(x) são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares têm o polinômio P(x)?

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

10 (Vunesp) A equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 4 = 0$ tem raízes x_1, x_2 e x_3 . Calcule valores numéricos para os coeficientes a, b, c e d, sabendo que as raízes de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são $x_1 - 2, x_2 - 2, x_3 - 2$.

11 (ITA-SP) Sejam a, b e c raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, em que r é um número real. Podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:

a) -60

b) $62+r$

c) $62+r^2$

d) $62+r^3$

e) $62-r$

12 (Vunesp) Os coeficientes do polinômio

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ são números inteiros. Supondo que f(x) tenha duas raízes racionais positivas distintas:

a) Encontre todas as raízes desse polinômio.

b) Determine os valores de a e b.

13 (Fuvest-SP)

a) Quais são as raízes inteiras do polinômio

$$P(x) = x^3 - x^2 - 4?$$

b) Decomponha o polinômio P(x) em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.

c) Resolva a inequação: $P(x) < 4(x-2)$

14 (Unicamp-SP) Considere o polinômio:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 26$$

a) Verifique se o número complexo $2+3i$ é raiz desse polinômio.

b) Prove que $P(x) > 0$, para todo número real $x > -2$.

15 (U.F.Uberaba-MG) Se a, b, c são raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$, então:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 9$

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

c) $a^2 + b^2 + c^2 = 6$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1$

16 (UFRJ) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes do polinômio $3x^3 - 13x^2 + 7x - 1$. Em relação a esse paralelepípedo, determine a razão entre a sua área total e o seu volume.



Exercícios de Casa

01 (U.F.RN) Uma das soluções da equação $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ é:

- a)-1
- b)-2
- c)-3
- d)-4
- e)-5

02 (U.C.SALVADOR) É verdade que a equação $(x^3 - 4x)(x^2 + 2x + 1) = 0$, no universo \mathbb{R} ,

- a) Tem quatro soluções distintas.
- b) Tem uma solução que é número irracional.
- c) Tem cinco soluções distintas.
- d) Não tem soluções.
- e) Tem apenas duas soluções distintas.

03 (U.C.SALVADOR) Sabe-se que o polinômio $f = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$ é divisível por $g = x^2 - 2x + 3$. Se q é o quociente da divisão de f por g , quais são as raízes de q ?

- a) 1 e -1
- b) 3 e -3
- c) 1 e -3
- d) -1 e 3
- e) -1 e -3

04 (U.F.RS) Se os números -3, a e b são as raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, então o valor de $a+b$ é:

- a)-6
- b)-2
- c)-1
- d)2
- e)6

05 (FATEC) Se a , b e $-\frac{1}{2}$ são as raízes da equação $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$, então a^b é igual a:

- a)-1 ou 0
- b) $-\frac{1}{2}$ ou 2
- c)2
- d) $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$
- e)-2 ou 1

06 (PUC-SP) Em relação ao polinômio $p(x) = (x-1)^2(x^2-1)$, o que se pode afirmar sobre o número 1?

- a) É raiz simples.
- b) É raiz dupla.
- c) É raiz tripla.
- d) É raiz quádrupla.
- e) Não é raiz.

07 (U.MACK) A soma das raízes da equação $2^{3x} - 7 \cdot 2^{2x} + 14 \cdot 2^x - 8 = 0$ é:

- a)-1
- b)0
- c)0
- d)2
- e)3

08 (FGV) Dada a equação $x^3 - 7x + p = 0$, determinar p de modo que uma das raízes seja o dobro da outra.

- a) $p = \pm 6$
- b) $p = \pm 3$
- c) $p = \pm 5$
- d) $p = 10$
- e) n.d.a

09 (U.F.PELOTAS) A soma dos inversos das raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ é igual a:

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{3}$

e) 2

10 (U.C.MG) O valor de m , para que a equação $x^3 + mx - 1 = 0$ tenha duas raízes iguais, é:

a) $-\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

e) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

11 (U.Mack) Uma raiz da equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ é igual à soma das outras duas. As raízes dessa equação são:

a) 2, -2, 1

b) 2, -1, 3

c) 3, -2, 1

d) 1, -1, -2

e) Nenhuma das anteriores.

12 (EAESP-FGV) Determinar as raízes da equação: $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$, sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras duas.

a) 3, 9, 6

b) 1, 9, 5

c) 0, 12, 6

d) 1, 7, 4

e) 3, 13, 8

13 (U.Mack) As raízes da equação $x^3 + 9x^2 + nx + m = 0$ formam uma P.A. de razão 3. Então:

a) $n=3$ e $m=6$

b) $n=18$ e $m=0$

c) $n=3$ e $m=\frac{1}{18}$

d) $m+n=9$

e) $n \neq 0$ e $m.n=9$

14 (U.F.PR) A condição para que as três raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ estejam em progressão geométrica é:

a) $\frac{b}{c} = a$

b) $b^3c - a^3 = 0$

c) $ba = c^3$

d) $c^3a - b^3 = 0$

e) $a^3c - b^3 = 0$

15 (ITA) Os valores de m , de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas raízes somando um, são:

a) 0

b) $\sqrt{3}$ e 3

c) 1 e -1

d) 2 e -2

e) n.d.a

16 (F.SANTANA) Se a equação $2x^3 + 11x^2 + 14x + 8 = 0$ admite duas raízes recíprocas, a terceira raiz é um número:

a) ímpar

b) maior que 2

c) negativo

d) não real

e) não inteiro

17 (VUNESP) O gráfico da figura representa o polinômio real $f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + c$. Se o produto das raízes de $f(x)=0$ é igual à soma dessas raízes, então $a+b+c$ é igual a:

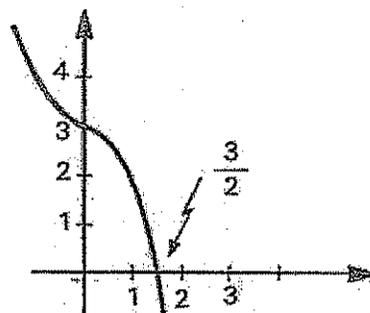
a) 4

b) 5

c) 6

d) 3

e) $\frac{9}{2}$



18 (PUC-SP) Se o número complexo $a+bi$ é raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais, então $a-bi$ também é raiz dessa equação. Qual é a raiz real de $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$, se uma de suas raízes é $1-i$?

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $-\frac{1}{3}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) -3
- e) -1

19 (U.F.RS) O módulo das raízes complexas não reais da equação $x^3 - mx^2 + 9x - 5 = 0$ é $\sqrt{5}$, com $m \in \mathbb{R}$. A soma de todas as raízes é:

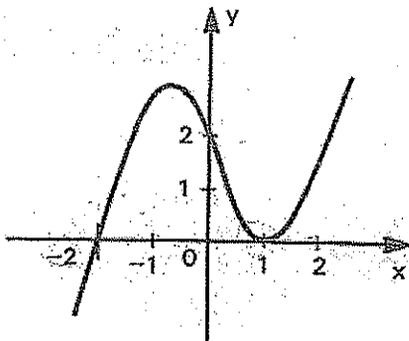
- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5
- e) 9

20 (PUC-RS) O gráfico na figura é de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $f(x)$ é um polinômio do 3º grau. Para a equação $f(x)=0$, afirmamos:

- I) O termo independente de x é igual a 2.
- II) Suas raízes são $-2, 2$ e 1 .
- III) Suas raízes são $-2, -2$ e 1 .
- IV) Suas raízes são $-2, 1$ e 1 .

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

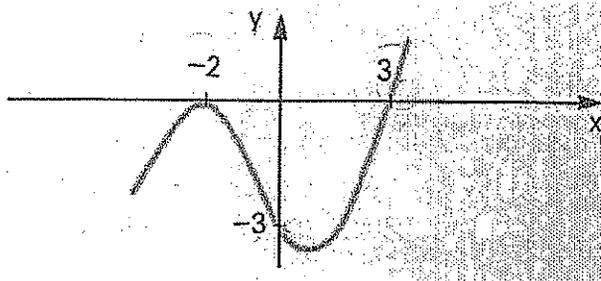
- a) II
- b) III
- c) I e II
- d) I e III
- e) I e IV



21 Resolva a equação $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$, sabendo que uma das raízes é $2 + i\sqrt{3}$.

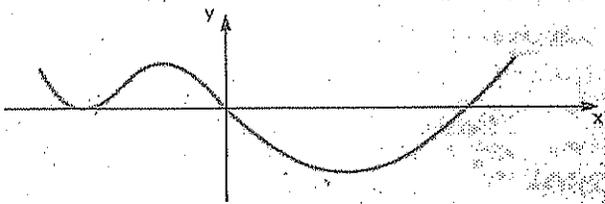
22 O polinômio de grau 3 cujo gráfico está esboçado na figura abaixo tem:

- a) Uma raiz igual a -2 , uma raiz igual a 3 e uma raiz complexa.
- b) Termo independente igual a -3 .
- c) Uma raiz real e duas complexas.



Qual das proposições acima é correta?

23 O gráfico abaixo é o de um polinômio cujos zeros reais estão todos no trecho desenhado.



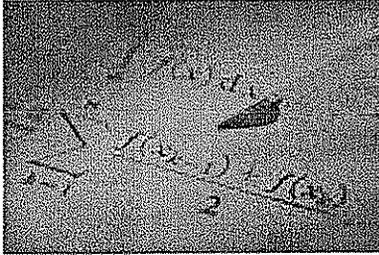
Qual das proposições abaixo, sobre o polinômio acima, é correta?

- a) Pode ser do 3º grau.
- b) Pode ser do 5º grau.
- c) Pode ser do 6º grau.

24 Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

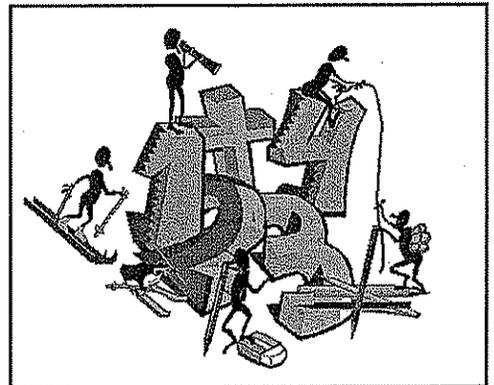
25 Determine as raízes da equação $x^5 - 8x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0$.

26 Resolva a equação $15x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$.



MATEMÁTICA 2

CADERNO 3

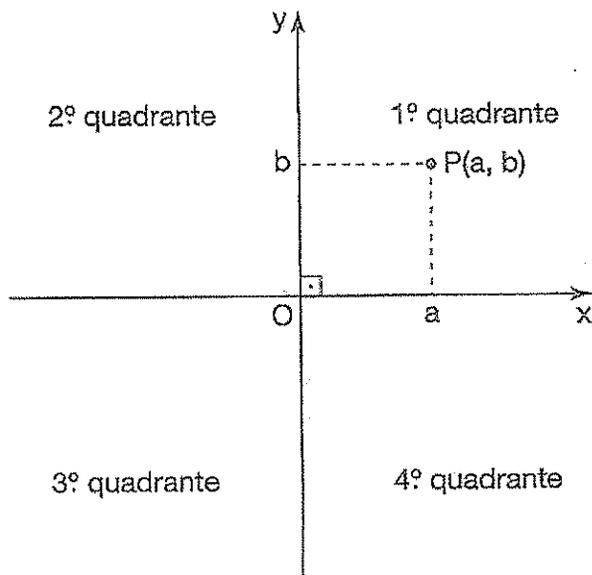


36 - Geometria analítica	37
37 - Estudo da circunferência	51
38- Cônicas	59
Gabarito	69

Parte I - Estudo de Ponto e Reta

1. Sistema cartesiano ortogonal

É constituído por duas retas, x e y, perpendiculares entre si.



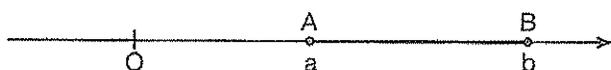
Em que:

A reta x é chamada *eixo das abscissas*;
A reta y é chamada *eixo das ordenadas*;

O ponto O é chamado *origem*;
O número real a é denominado *abscissa* de P;
O número real b é denominado *ordenada* de P;
O par ordenado (a,b) representa as *coordenadas* de P.

2. Distância entre dois pontos na reta

A distância entre os pontos A e B de coordenadas a e b, respectivamente, é dada por:

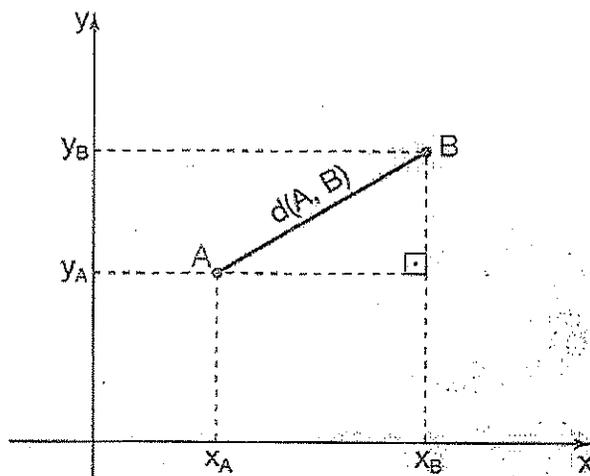


$$d(A, B) = |b - a|$$

Em que $d(A, B)$ é a distância entre A e B. O número real não-negativo $d(A, B)$ é denominado, também, *comprimento* do segmento \overline{AB} .

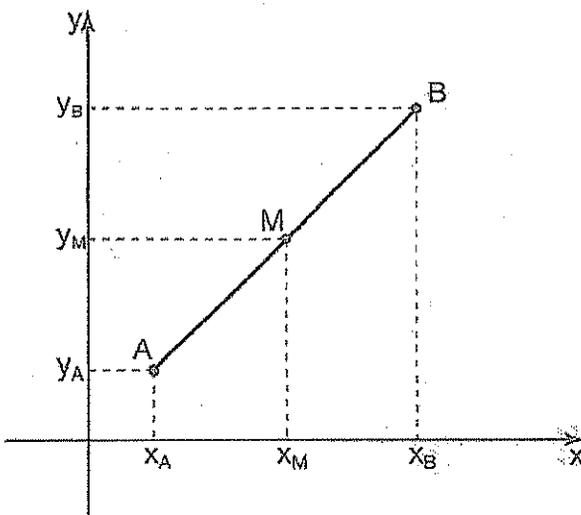
3. Distância entre dois pontos no plano

A distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:



$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

4. Ponto Médio



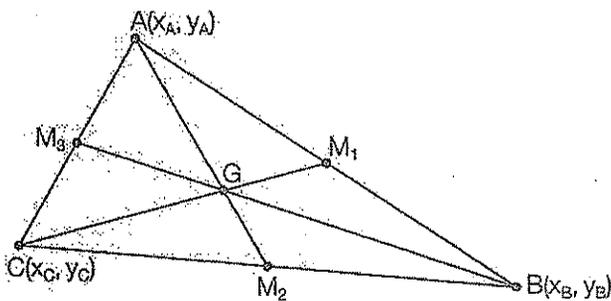
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Em que x_M é a abscissa do ponto M e y_M é a ordenada do ponto M.

5. Baricentro de um triângulo

O baricentro G de um triângulo ABC de coordenadas $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dado por:

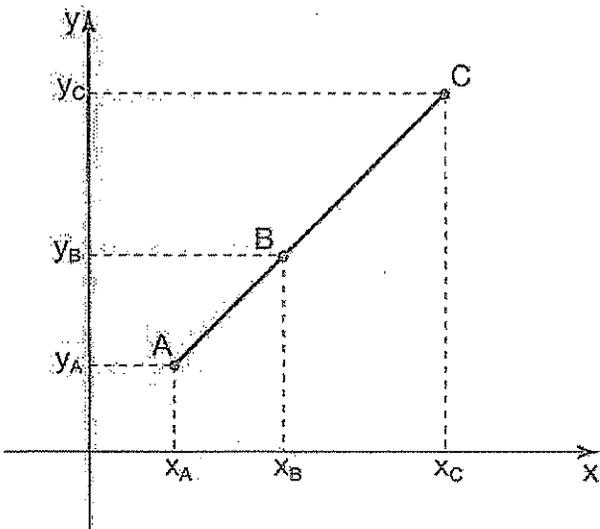


Baricentro é o ponto de encontro das medianas.

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

6. Alinhamento de três pontos

Sejam os pontos da figura:



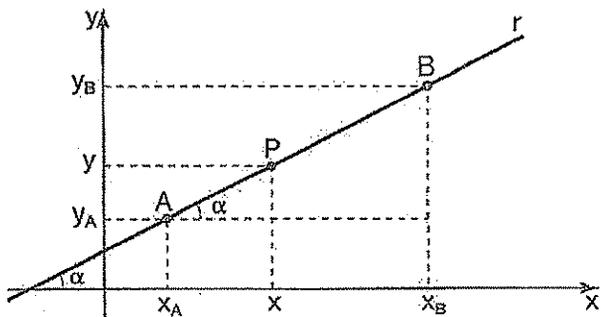
$$\begin{cases} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \\ C(x_C, y_C) \end{cases} \text{ e } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 0 \Rightarrow A, B$ e C são colineares, isto é, estão alinhados.
 $D \neq 0 \Rightarrow A, B$ e C formam triângulo.

7. Estudo da reta

Equação geral

Se a reta r passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $P(x, y)$, temos:



$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

Em que:

$$\begin{cases} a = y_A - y_B \\ b = x_A - x_B \\ c = x_A y_A - x_B y_B \end{cases}$$

Observações:

$$a = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \text{ reta horizontal}$$

$$b = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a} \text{ reta vertical}$$

$$c = 0 \Rightarrow ax + by = 0 \text{ reta que passa pela origem}$$

O coeficiente angular ou declividade m da reta é dado por:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = m \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{a}{b}}$$

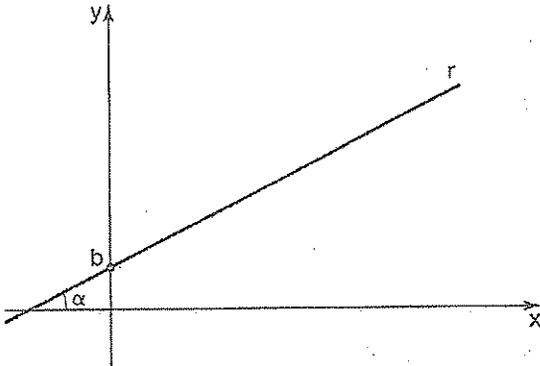
Reta que passa por um ponto dado e declividade conhecida

Seja a reta r que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e com declividade m ; então:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Equação reduzida

A equação reduzida da reta r da figura é dada por:



coeficiente
linear

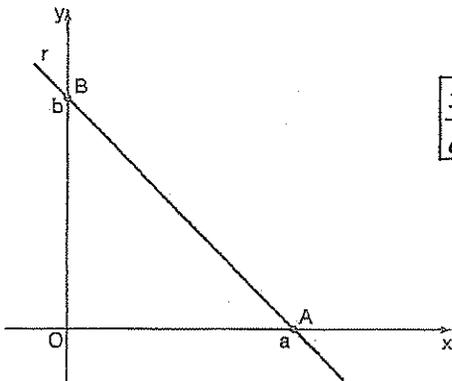
$$y = mx + b$$



coeficiente
angular

Equação segmentária

A equação segmentária da reta r que passa pelos pontos $A(a,0)$ e $B(0,b)$ da figura é dada por:



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Equações paramétricas

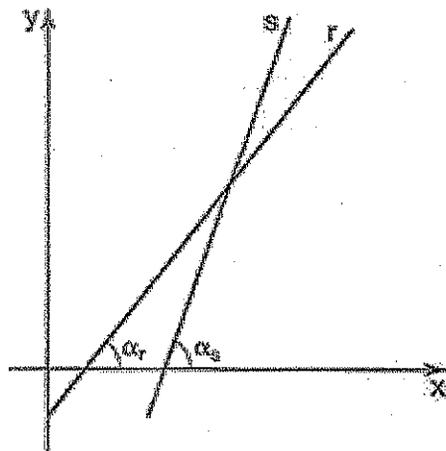
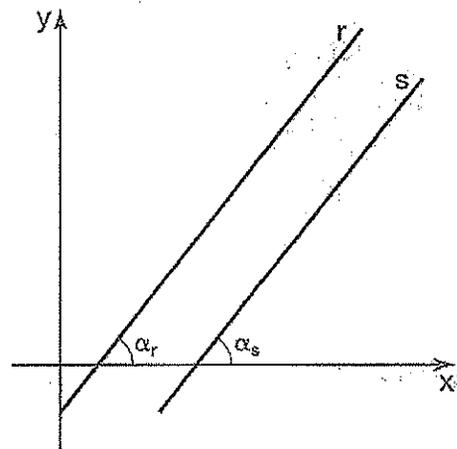
São equações que não relacionam diretamente entre si as coordenadas x e y .

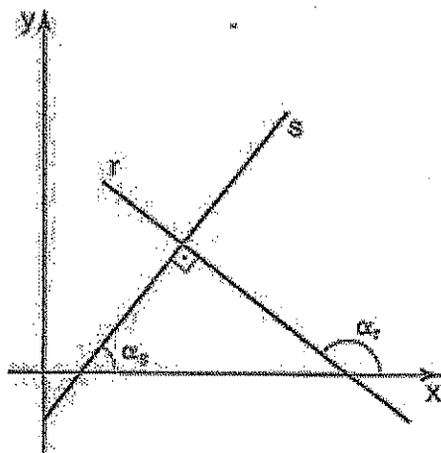
Essas equações são dadas em função de uma terceira variável, t , chamada *parâmetro*.

Exemplo:
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$$

8. Posições relativas de duas retas

Sejam as retas:
$$\begin{cases} \text{reta } r : y_r = m_r x + b_r \\ \text{reta } s : y_s = m_s x + b_s \end{cases}$$

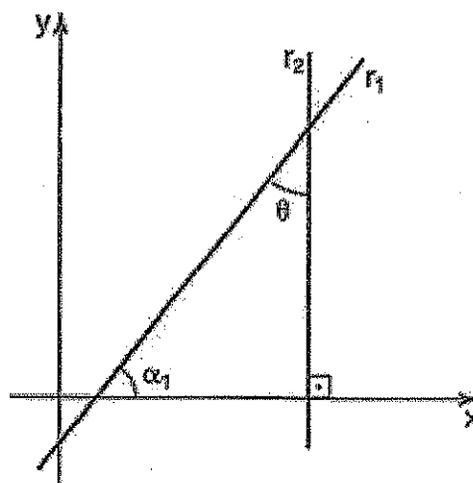
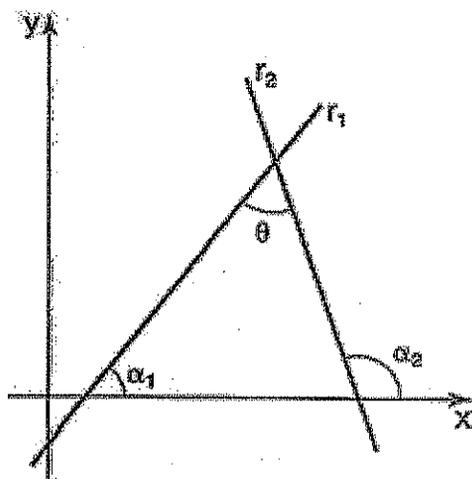




$m_r \neq m_s$
 r e s são concorrentes.
 $m_r = m_s$ e $b_r \neq b_s$
 r e s são paralelas distintas.
 $m_r = m_s$ e $b_r = b_s$
 r e s são paralelas coincidentes.
 $m_r = -\frac{1}{m_s}$
 r e s são perpendiculares.

9. Ângulo entre duas retas

Sejam as retas r_1 e r_2 indicadas nas figuras. O ângulo agudo θ entre elas é tal que:

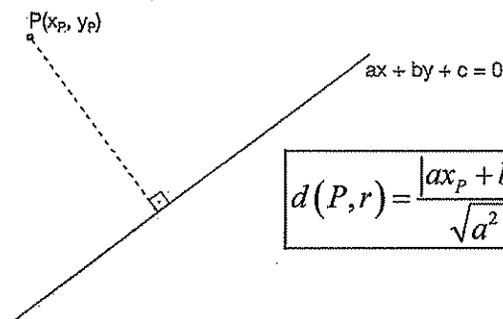


$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{1}{m_1} \right|$$

10. Distância entre ponto e reta

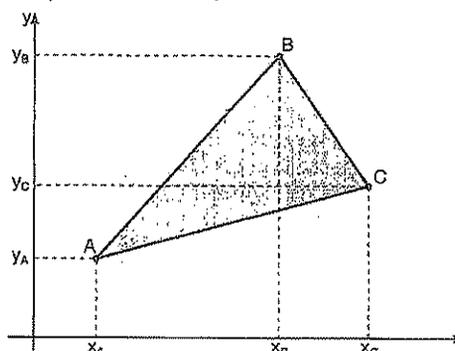
Dados um ponto $P(x_p, y_p)$ e uma reta r de equação $ax+by+c=0$, a distância entre P e r é dada por:



$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

11. Área de um triângulo

Dados três pontos não-colineares A, B e C, indicados na figura, a área S do triângulo ABC formado por esses pontos é dada por:



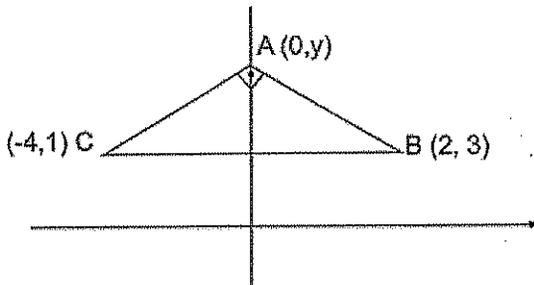
$$S = \frac{1}{2} \cdot |D| \quad \text{com} \quad D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$



Exercícios Comentados

01 Dado os pontos B(2,3) e C(-4,1) determinar o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é o ponto do eixo das ordenadas do qual se vê BC sob ângulo reto.

Resolução:



$$d_{BC}^2 = d_{AC}^2 + d_{AB}^2$$

$$\left(\sqrt{(2+4)^2 + (3-1)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{4^2 + (y-1)^2} \right)^2 + \left(\sqrt{2^2 + (3-y)^2} \right)^2$$

$$16 + y^2 - 2y + 1 + 4 + 9 - 6y + y^2 = 36 + 4$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y = -1$$

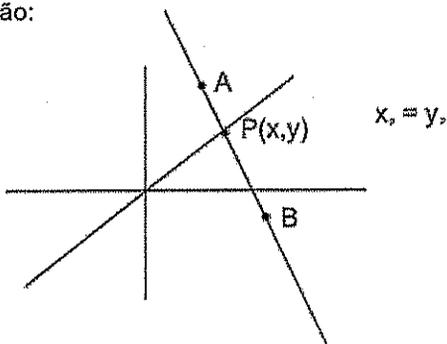
ou

$$y = 5$$

resposta: A(0, -1) ou (0, 5)

02 Dados A(1,5) e B(3,-1) obtenha o ponto em que a reta \overline{AB} intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução:

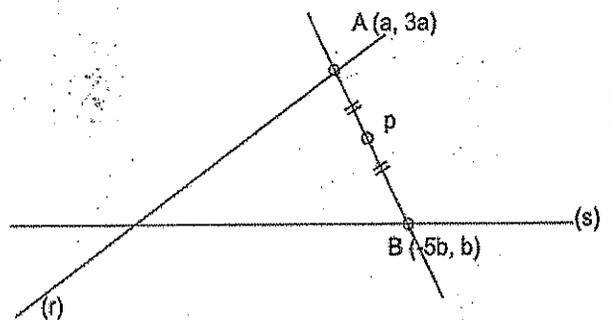


Pela condição de alinhamento:

$$\begin{array}{rcl} x & y & 5x - 1 + 3y - y - 15 + x = 0 \\ 1 & 5 & 6x + 2y - 16 = 0 \\ 3 & -1 & 8x = 16 \\ x & y & x = 2 \text{ e } y = 2 \\ & & P(2, 2) \end{array}$$

03 Qual é a reta que passa por P(3,1) intercepta (r) $3x - y = 0$ em A e (s) $x + 5y = 0$ em B tais que P é médio de \overline{AB} .

Resolução:



$$X_P = \frac{X_A + X_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{a - 5b}{2} \Rightarrow a - 5b = 6$$

$$Y_P = \frac{Y_A + Y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3a + b}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ a - 5b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos: a=1 b=-1

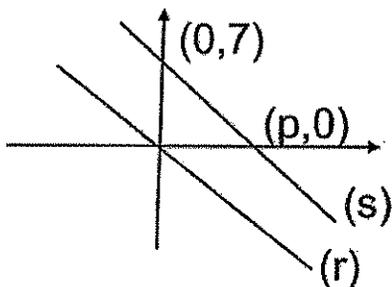
Logo A(1,3) e B(5,-1)

Então a equação da reta \overline{AB} :

$$\begin{array}{rcl} x & y & 3x - 1 + 5y - y - 15 + x = 0 \\ 1 & 3 & \\ 5 & -1 & \boxed{x + y - 4 = 0} \\ x & y & \end{array}$$

04 Obtenha uma reta paralela a (r) $2x+y=0$ e que define com os eixos um triângulo cuja área é 16.

Resolução:



$$(s) \ 2x+y+c=0$$

$$(0,q) \rightarrow q=-c$$

$$(p,0) \rightarrow 2p=-c \rightarrow p = -\frac{c}{2}$$

Como:

$$A = \frac{bh}{2} = 16$$

$$-\frac{c \cdot -\frac{c}{2}}{2} = 16 \rightarrow c = \pm 8$$

$$\text{Resp: } 2x + y + 8 = 0$$

$$2x + y - 8 = 0$$

05 Qual a equação da reta que passa por A (1,1) e é paralela à reta (r) $y = -2x + 1$.

Resolução:

Reta procurada (s)

$$m_r = m_s$$

$$m_r = -2, \text{ logo}$$

$$m_s = -2 \left. \vphantom{m_s} \right\} y - y_0 = m(x - x_0)$$

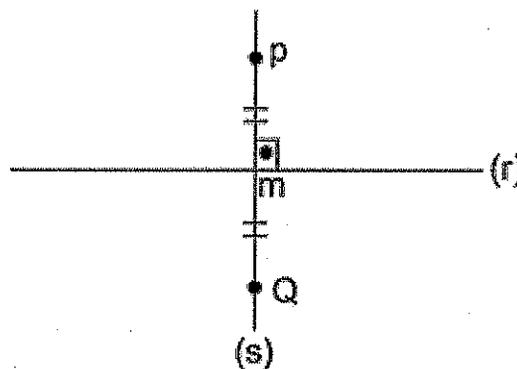
$$A(1,1)$$

$$y - 1 = -(x - 1)$$

$$\boxed{2x + y - 3 = 0}$$

06 Determine o ponto Q, simétrico de P(-3,2) em relação à reta (r) $x+y-1=0$.

Resolução:



$$\text{Reta (s):}$$

$$m_r = -1$$

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = 1$$

$$(s) \left\{ \begin{array}{l} m_s = 1 \\ (-3, 2) \end{array} \right\} y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 1(x + 3)$$

$$x - y + 5 = 0 \quad (s)$$

$$\text{Ponto } m: \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ e } y = 3$$

$$M(-2, 3)$$

Como M é médio de PQ:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = 2(-2) + 3 = -1$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

$$\boxed{Q(-1, 4)}$$



Exercícios de Sala

01 Na figura, os pontos M, N e P dividem \overline{AB} em quatro segmentos congruentes. Se $A=(4,1)$ e $B=(10,5)$, determine as coordenadas de M, N e P.



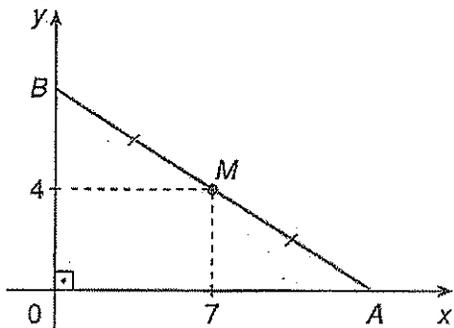
02 O ponto A pertence ao eixo Ox e B pertence ao eixo Oy. Se $M=(4,1)$ é o ponto médio de \overline{AB} , determine as coordenadas de A e B.

03 Três vértices de um paralelogramo PQRS são $P=(-3,-2)$, $Q=(1,-5)$ e $R=(9,-1)$, com P e R diagonalmente opostos. A soma das coordenadas do vértice S é:

- a)13
- b)12
- c)11
- d)10
- e)9

04 As diagonais de um paralelogramo ABCD interceptam-se no ponto M. Determine as coordenadas de C e D, sabendo que $A=(1,3)$, $B=(5,5)$ e $M=(2,-1)$.

05 Na figura seguinte, M é o ponto médio de \overline{AB} . Obtenha as coordenadas do baricentro do triângulo OAB.



06 Num triângulo ABC, em que $A=(-5,11)$, o baricentro é o ponto $G=(2,6)$. As coordenadas do ponto médio de \overline{BC} são:

- a)(4,1)

b) $\left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$

c) (-1,3)

d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right)$

07 Sejam $A=(3,2)$, $B=(1,-5)$ e $C=(-7,-7)$ os vértices de um triângulo ABC. O comprimento da mediana relativa ao lado \overline{BC} desse triângulo é:

a)5

b)10

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt{10}$

e) 13

08 O ponto P pertence à reta bissetriz dos quadrantes ímpares e é eqüidistante dos pontos $Q=(3,1)$ e $R=(-1,2)$. Quais são as coordenadas de P?

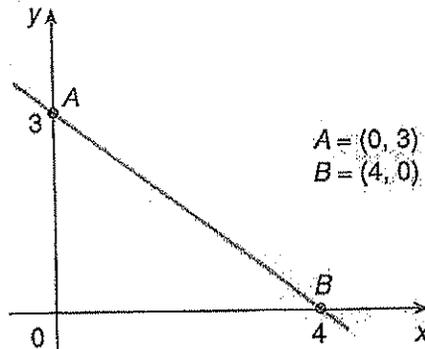
09 Determine x, para que o triângulo de vértices $A=(x,2x)$, $B=(2,1)$ e $C=(4,5)$ seja retângulo em A.

10 Calcule, se existir, o coeficiente angular da reta AB nos seguintes casos:

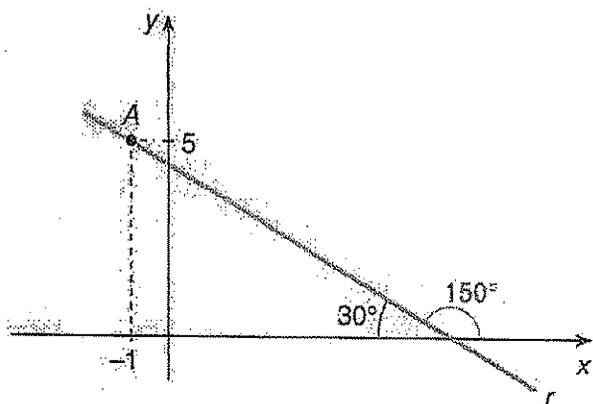
a) $A=(4,1)$ e $B=(4,5)$

b) $A=(2,-1)$ e $B=(-2,-3)$

c)

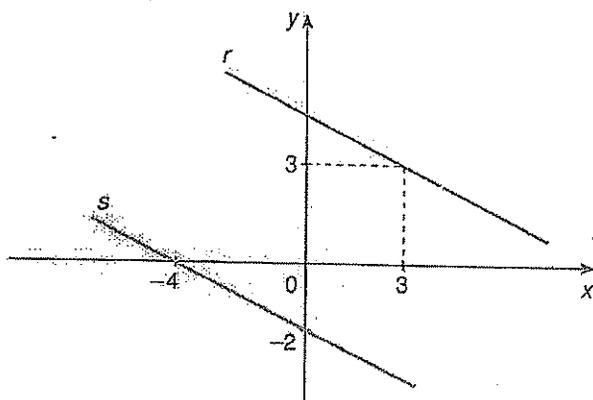


11 A equação da reta r desta figura é:



- a) $y + 5 = -\sqrt{3}(x - 1)$
- b) $y - 5 = \sqrt{3}(x + 1)$
- c) $3(y + 5) = -\sqrt{3}(x - 1)$
- d) $3(y - 5) = -\sqrt{3}(x + 1)$
- e) $3(y - 5) = \sqrt{3}(x + 1)$

12 As retas r e s desta figura são paralelas.



Obtenha uma equação de r .

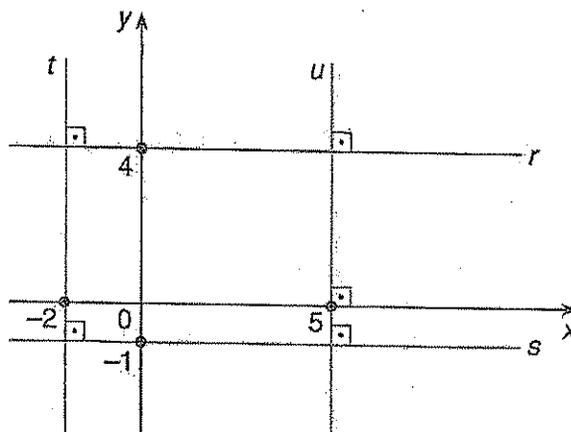


Exercícios de Casa

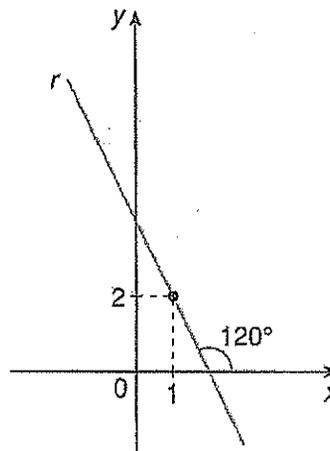
01 Para que os pontos $A=(2x,x)$, $B=(2,2)$ e $C=(3,-2)$ sejam os vértices de um triângulo ABC, devemos ter:

- a) $x \neq \frac{10}{9}$
- b) $x \neq 0$
- c) $x \neq -\frac{1}{3}$
- d) $x \neq 5$
- e) $x \neq -\frac{4}{5}$

02 Dê as equações das retas r , s , t e u da figura.



03 Uma equação da reta r desta figura é:



a) $y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$

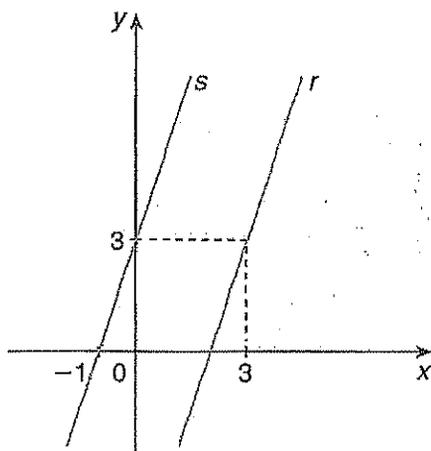
b) $y - 1 = \sqrt{3}(x - 2)$

c) $y - 2 = -\sqrt{3}(x - 1)$

d) $y - 1 = -\sqrt{3}(x - 1)$

e) $y + 1 = -\sqrt{3}(x + 2)$

04 As retas r e s da figura a seguir são paralelas.



Uma equação de r é:

a) $3x - y + 3 = 0$

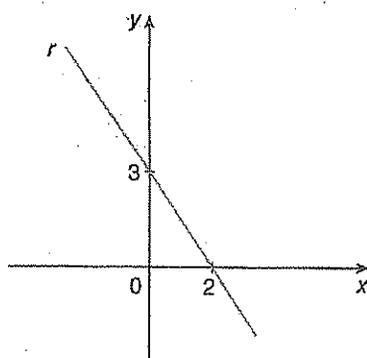
b) $3x - y - 6 = 0$

c) $x - 3y + 6 = 0$

d) $x + 3y - 12 = 0$

e) $3x + 3y - 1 = 0$

05 Qual é a equação da reta r desta figura?



a) $3x + 2y = 6$

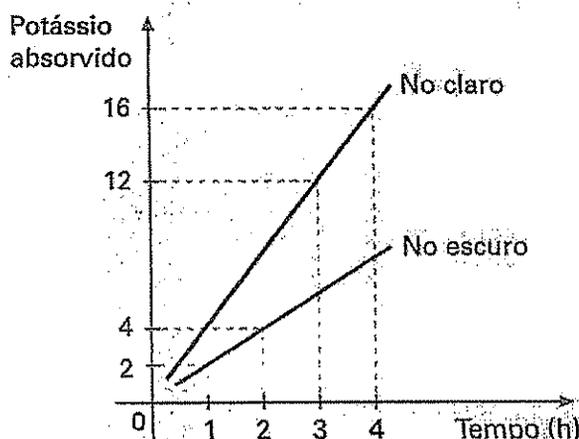
b) $3x - 2y = -6$

c) $2x + 3y = 6$

d) $2x - 3y = -6$

e) $6x + 4y = 5$

06 (VUNESP-SP) O gráfico mostra o resultado de uma experiência relativa à absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de iluminosidade.



Nos dois casos, a função linear $y = mx$ ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referência a m como taxa de absorção (geralmente medida em μ moles por unidade de peso por hora). Com base no gráfico, sem m_1 é a taxa de absorção no claro, e m_2 a taxa de absorção no escuro, a relação entre duas taxas é:

a) $m_1 = m_2$

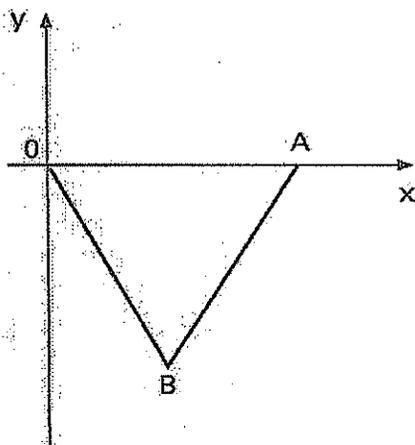
b) $m_2 = 2m_1$

c) $m_1 \cdot m_2 = 1$

d) $m_1 \cdot m_2 = -1$

e) $m_1 = 2m_2$

07 (VUNESP-SP) Os pontos O , A e B , do plano cartesiano da figura a seguir, são os vértices de um triângulo equilátero cuja medida dos lados é dada por $\sqrt{3}$. As equações da reta AB e OB são, respectivamente:



- a) $y = \sqrt{2}x - 3$ e $y = -\sqrt{2}x$
- b) $y = \sqrt{3}x - 2$ e $y = -\sqrt{3}x$
- c) $y = \sqrt{3}x - 3$ e $y = -\sqrt{3}x$
- d) $y = x + \sqrt{3}$ e $y = -x$
- e) $y = 3x + \sqrt{3}$ e $y = -3x$

08 (UFMG) A relação entre m e n , para que as retas de equações $2x - my + 1 = 0$ e $nx + 3y + 5 = 0$ sejam paralelas é:

- a) $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$
- b) $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$
- c) $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$
- d) $m \cdot n = -6$
- e) $m \cdot n = 6$

09 (CESGRANRIO-RJ) A reta r é perpendicular a $x + 3y - 5 = 0$ e contém o ponto $(1, 1)$. Então, uma equação de r é:

- a) $x - y = 0$
- b) $2x + y - 3 = 0$

- c) $x - 4y + 3 = 0$
- d) $2x - y - 1 = 0$
- e) $3x - y - 2 = 0$

10 (FUVEST-SP) As retas r e s são perpendiculares e interceptam-se no ponto $(2, 4)$. A reta s passa pelo ponto $(0, 5)$. Uma equação da reta r é:

- a) $2y + x = 10$
- b) $y = x + 2$
- c) $2y - x = 6$
- d) $2x + y = 8$
- e) $y = 2x$

11 (MACK-SP) Uma reta t passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(6, 0)$. A equação da reta s , simétrica de t em relação à reta $x - 6 = 0$, é:

- a) $5x - 4y - 30 = 0$
- b) $4x - 5y - 24 = 0$
- c) $4x - y - 24 = 0$
- d) $5x - y - 30 = 0$
- e) $6x - y - 36 = 0$

12 (UFPR) Em um sistema cartesiano ortogonal, qual é a área do triângulo determinado pelas retas de equação $x - y - 1 = 0$, $x = 5$, e pelo eixo das abscissas?

- a) 5 u.a
- b) 8 u.a
- c) 10 u.a
- d) 15 u.a
- e) 16 u.a

13 (MACK-SP) Os vértices de um triângulo são os pontos $A = (1, k)$, $B = (3, 0)$ e $C = (2, 1)$; M é o ponto médio de AB , e N é o ponto médio de BC . Se a área do triângulo $M CN$ é $0,20$, então k pode ser:

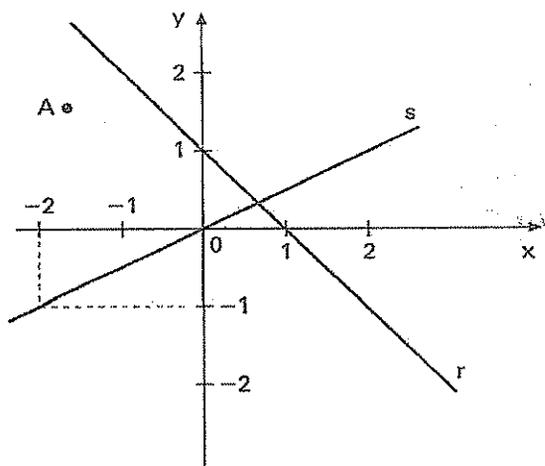
- a) $\frac{6}{5}$
- b) $\frac{12}{5}$

c) $\frac{18}{5}$

d) 4

e) 5

14 (FUVEST-SP) Na figura a seguir, A é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x,y).



Sabendo que A está localizado abaixo da reta r e acima da reta s, tem-se:

a) $y < \frac{x}{2}$ e $y < -x + 1$

b) $y < \frac{x}{2}$ e $y > -x + 1$

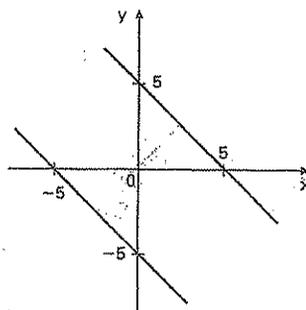
c) $\frac{x}{2} < y$ e $y > -x + 1$

d) $-x + 1 < y < \frac{x}{2}$

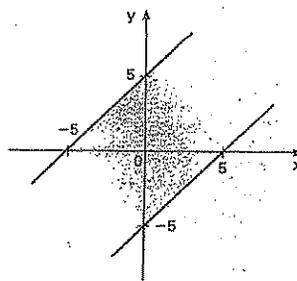
e) $\frac{x}{2} < y < -x + 1$

15 (FGV-SP) A representação gráfica da sentença $|x| + |y| \leq 5$ é:

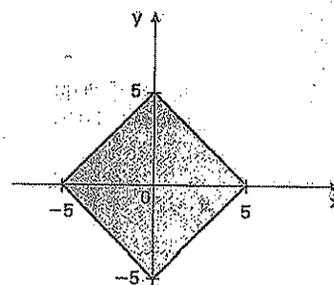
a)



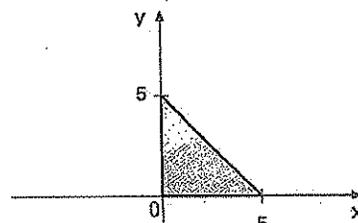
b)



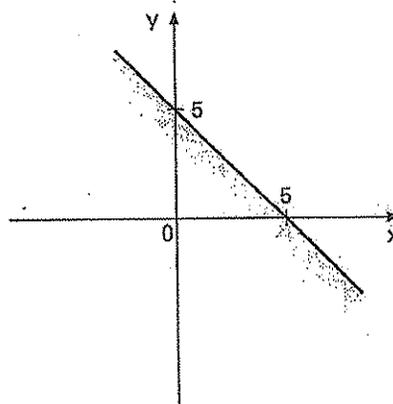
c)



d)



e)



16 (UFMG) A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas de equações $y=x$ e $y=2x$ é:

a) $y = \frac{1+\sqrt{10}}{3}x$

b) $y = \frac{2+\sqrt{10}}{3}x$

c) $y = \frac{1+\sqrt{5}}{3}x$

d) $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$

e) $y = \frac{3}{2}x$

17 (U.F.RN) De acordo com a figura abaixo, a distância entre os pontos A e B vale:

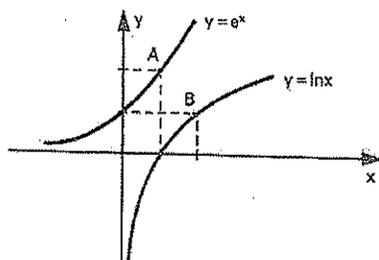
a) $\sqrt{2}e$

b) $2\sqrt{e}$

c) $\sqrt{2}(e-1)$

d) $\sqrt{2}(1-e)$

e) $\sqrt{2}e-1$



18 (U.F.MG) Seja $P=(a,1)$ um ponto da reta r da equação $4x-2y-2=0$. A equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r é:

a) $x+2y-3=0$

b) $x-2y+0=0$

c) $2x-y=0$

d) $2x+y-3=0$

e) $2x+y+3=0$

19 (U.E.CE) Se as alturas do triângulo de vértices nos pontos $p_1(6,-6)$, $p_2(6,4)$

e $p_3(-10,2)$ se interceptam no ponto (n_1, n_2) ,

então $n_1 + n_2$ é igual a:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

20 (U.F.SE) A equação da mediatriz do segmento de extremos nos pontos $(-2,1)$ e $(0,-1)$ é:

a) $y = x - 1$

b) $y = x + 1$

c) $y = x$

d) $y = -x + 1$

e) $y = -x - 1$

21 (F.C.STA.CASA) O simétrico do ponto $(-1,1)$, em relação à reta de equação $y=2x$, é o ponto:

a) $(-7,1)$

b) $(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

c) $(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$

d) $(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$

e) $(7,-1)$

22 (EAESP-FGV) Sabendo que o $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo ($B=90^\circ$), calcular as coordenadas do vértice C.

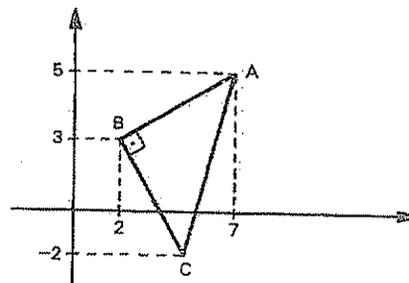
a) 5,-2

b) $3\frac{1}{2}, -2$

c) 4,-2

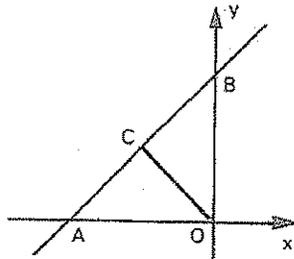
d) $4\frac{1}{2}, -2$

e) n.d.a.



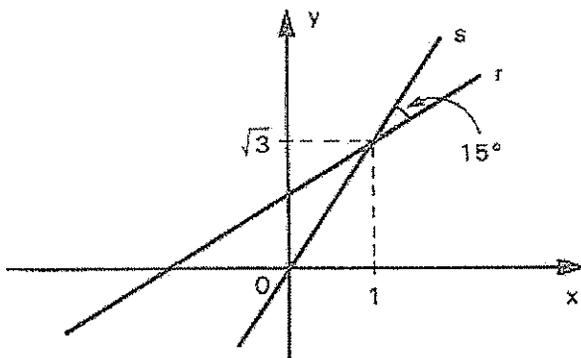
- 23 (FUVEST) Na figura abaixo o ângulo \widehat{OCA} mede 90° , o ângulo \widehat{COA} mede 45° e o segmento OC mede $\sqrt{2}$.
A equação da reta AB é:

- a) $x + y - 2 = 0$
b) $x + y - 1 = 0$
c) $x - y + 2 = 0$
d) $x - y + 1 = 0$



- 24 (U.F.MG) Observe o gráfico onde estão representadas as retas r e s.
A equação da reta r é:

- a) $x - y + 1 - \sqrt{3} = 0$
b) $\sqrt{3}x - 3y = 0$
c) $x - y + \sqrt{3} - 1 = 0$
d) $\sqrt{2}x - 2y + (2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0$
e) $\sqrt{2}x - 2y + (2 - \sqrt{6}) = 0$



- 25 (U.C.SALVADOR) Considere o triângulo de vértices $A=(0;0)$, $B=(1;4)$ e $C=(4;1)$. Sua altura em relação à base \overline{BC} mede:

- a) $2\sqrt{2}$
b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
c) 4
d) $4\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{2}$

- 26 (ITA) Considere a reta (r) mediatriz do segmento os extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ à reta (r) é:

- a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{4}{\sqrt{13}}$
c) $3\sqrt{13}$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$
e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

- 27 (FGV) As retas cujas equações são $(r)x + 3y = 5$ e $(s)x + 3y = 0$ são paralelas. A distância entre elas vale:

- a) $\frac{9\sqrt{2}}{8}$
b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\sqrt{10}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

28 (U.F.MG) As retas perpendiculares à reta de equação $3x + 4y - 9 = 0$ que distam 4 unidades da origem são:

a) $4x - 3y = 5$ e $4x - 3y = -5$

b) $4x - 3y = 20$ e $4x - 3y = -20$

c) $4x - 3y = 4$ e $4x - 3y = -4$

d) $3x + 4y = 10$ e $3x + 4y = -10$

e) $4x - 3y = 10$ e $4x - 3y = -10$

29 (U.F.MG) A área do triângulo limitado pelas retas $4x + 5y - 20 = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ é:

a) 4

b) 5

c) 10

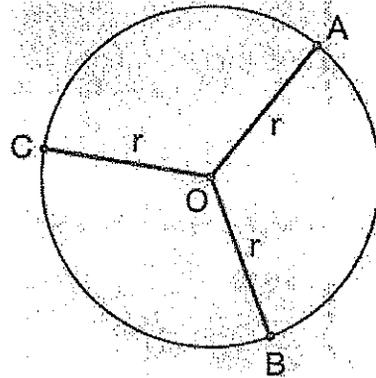
d) 16

e) 20

2 - ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

1. DEFINIÇÃO

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano, equidistantes de um ponto fixo O chamado centro da circunferência.

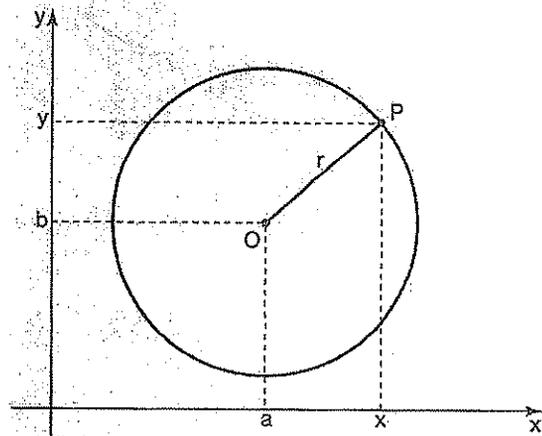


$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r \text{ (raio da circunferência)}$$

2. Equação reduzida

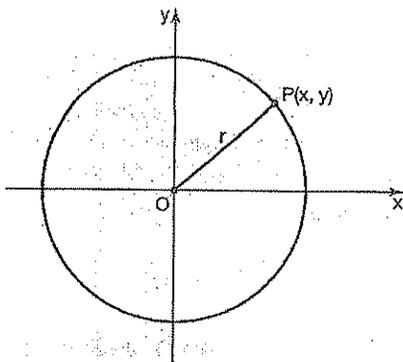
Uma circunferência de centro O (a, b) e raio r tem equação reduzida.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Se o centro O coincidir com a origem, temos:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



3. Equação geral ou equação normal

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Em que:

$$\begin{cases} A = -2a \\ B = -2b \\ C = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$$

Observação:

A equação do 2º grau

$$x^2 + y^2 + k \cdot xy + Ax + By + C = 0$$

Será a equação de uma circunferência de centro C (a, b) e raio r se, e somente se:

- ✓ Os coeficientes de x^2 e y^2 forem iguais e não-nulos;
- ✓ Não existir o termo em xy , isto é, $k=0$;

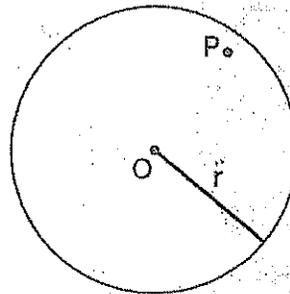
Se $A^2 + B^2 - 4C > 0$, temos uma circunferência de raio r .

Se $A^2 + B^2 - 4C = 0$, temos uma circunferência de raio nulo, isto é, um ponto.

Se $A^2 + B^2 - 4C < 0$, não existe circunferência, isto é, $r < 0$.

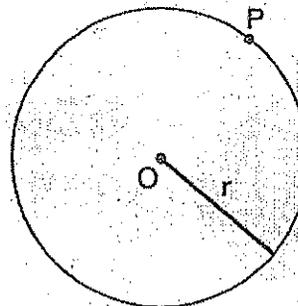
4. Posições relativas

Ponto e circunferência



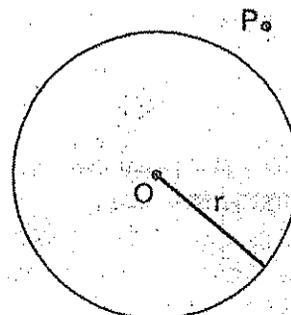
$$d(P, O) < r$$

P é interno



$$d(P, O) = r$$

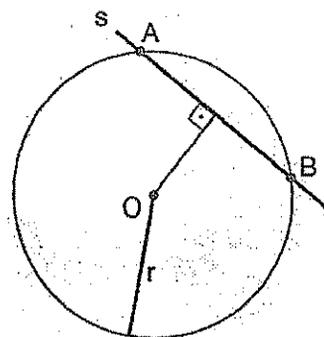
P pertence à circunferência.



$$d(P, O) > r$$

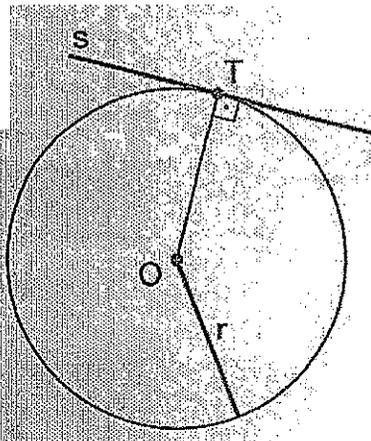
P é externo.

Reta e circunferência



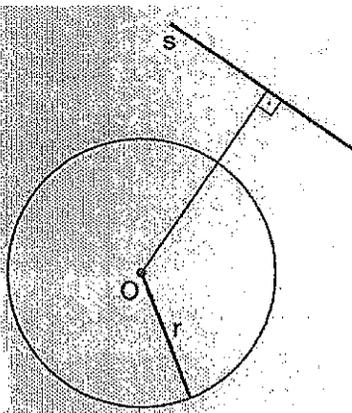
$$d(O, s) < r$$

s é secante



$$d(O, s) = r$$

s é tangente



$$d(O, s) > r$$

s é exterior

Observação:

Podemos, também, determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência procurando os pontos de intersecção da reta com a circunferência.

Isto se consegue resolvendo o sistema formado pelas equações da reta e da circunferência:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Como a resolução envolve uma equação do 2º grau, temos:

$\Delta > 0 \Rightarrow$ secantes (2 pontos comuns)

$\Delta = 0 \Rightarrow$ tangentes (1 ponto comum)

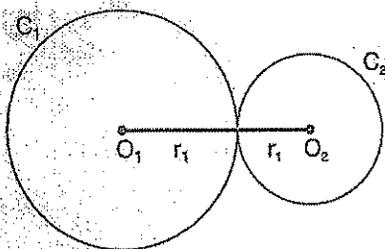
$\Delta < 0 \Rightarrow$ exteriores (nenhum ponto comum)

· Duas circunferências

Temos os seguintes casos:

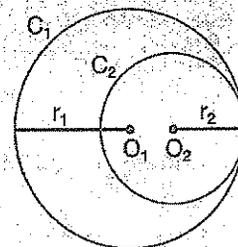
1) C_1 e C_2 são tangentes.

Externamente



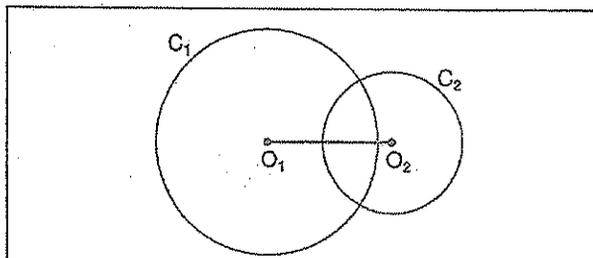
$$d(O_1, O_2) = r_1 + r_2$$

Internamente



$$d(O_1, O_2) = |r_1 - r_2|$$

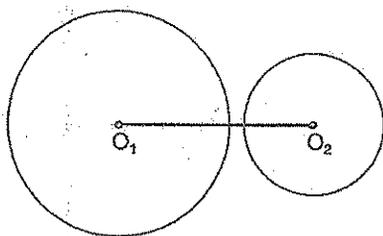
2) C_1 e C_2 são secantes



$$r_1 - r_2 < d(O_1, O_2) < r_1 + r_2$$

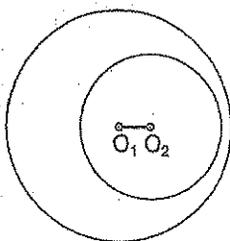
3) C_1 e C_2 não se interceptam.

Externamente



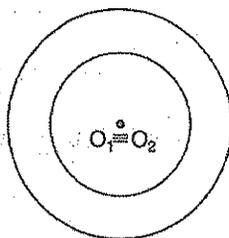
$$d(O_1, O_2) > r_1 + r_2$$

Internamente



$$d(O_1, O_2) < r_1 - r_2$$

Concêntricas



$$d(O_1, O_2) = 0$$

Observação:

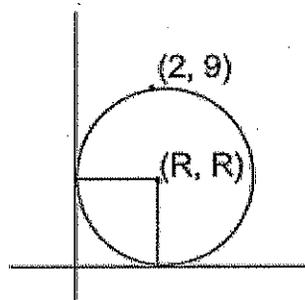
Podemos determinar os pontos de intersecção de duas circunferências, C_1 e C_2 , resolvendo o sistema formado pelas duas equações dessas circunferências.



Exercícios Comentados

01) Determine a equação da circunferência tangente aos eixos de que passa pelo ponto (2,9)

Resolução:



$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ (x - r)^2 + (y - r)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Substituindo o ponto (2,9) = $(2 - r)^2 + (9 - r)^2 = r^2$

Resolvendo a equação acima temos

$$r = 5 \text{ ou } r = 17$$

Logo: $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ ou $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 289$

02) Determine o centro e o raio de circunferência $x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

Resolução: $-2a = -2 \rightarrow a = 1$

$$-2b = 1 \rightarrow b = -\frac{1}{2} \text{ logo } C\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

Sabe-se que $a^2 + b^2 - r^2 = -1$

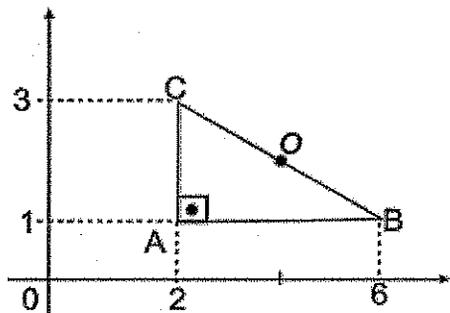
$$\left(+\frac{1}{4}\right) r^2 = -1$$

$$r = \frac{3}{2}$$

03) Obtenha a equação de circunferência circunscrita ao triângulo de vértices $A = (2, 1)$, $B = (6, 1)$ e $C = (2, 3)$.

Resolução:

Inicialmente devemos perceber que o triângulo ABC é retângulo em A.



Logo, ele inscritível numa circunferência de diâmetro BC.

♦ O centro O é ponto médio de \overline{BC} .

$$\therefore O = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{1+3}{2} \right) \Rightarrow O = (4, 2)$$

♦ O raio é a distância OB .

$$r = OB$$

$$r = \sqrt{(6-4)^2 + (2-1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

Assim, a equação procurada é:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$$

04) Considere um ponto $P = (x, y)$ variável e os pontos fixos $A = (2, 1)$ e $B = (-4, 5)$ que satisfazem a condição:

$$(PA)^2 + (PB)^2 = 40$$

a) Obtenha a equação do lugar geométrico definido por essa condição.

b) Verifique que esse lugar geométrico é uma circunferência e determine seu centro e seu raio.

Resolução:

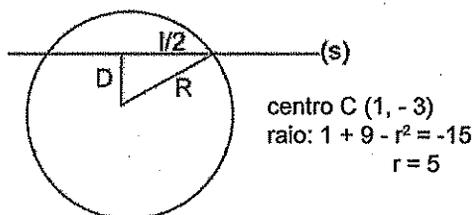
$$\begin{aligned} a) & [(x-2)^2 + (y-1)^2] + [(x+4)^2 + (y-5)^2] = 40 \\ & [x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1] + \\ & [x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10y + 25] = 40 \\ & 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 6 = 0 : (2) \\ & x^2 + y^2 + 2x - 6y + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -3 + 1 + 9 \\ & (x+1)^2 + (y-3)^2 = 7 \end{aligned}$$

A equação obtida representa a circunferência de centro $(-1, 3)$ e raios igual a $\sqrt{7}$

05) Qual o componente da corda que a reta $(s) 7x - 24y - 8 = 0$ determina na circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

Resolução:



$$D = \left| \frac{7(1) - 24(-3) - 8}{\sqrt{49 + 576}} \right| = 3$$

Por pitágora: $\frac{l^2}{4} + 9 = 25$

$$l = 8$$

06) Determinar as equações das retas t que são paralelas a $(s) 12x + 5y + 1 = 0$ e tangentes a $(\lambda)x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

Resolução:

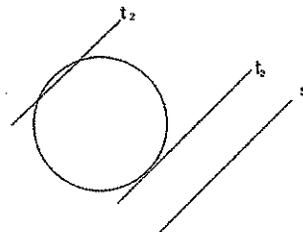
Centro $(1, 2)$
Raio: $1 + 4 - r^2 = -20$
 $r = 5$

reta $t: 12x + 5y + c = 0$

$$dct = r = \left| \frac{12 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + c}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \right| = 5$$

$$|c + 22| = 65 \begin{cases} c + 22 = 65 \rightarrow c = 43 \\ c + 22 = -65 \rightarrow c = -87 \end{cases}$$

resp: $12x + 5y + 43 = 0$ ou $12x + 5y - 87 = 0$





Exercícios de Sala

01 O centro de uma circunferência tangente ao eixo Ox tem abscissa 6. Determine a equação dessa circunferência sabendo que ela passa pelo ponto $P = (4, 1)$.

02 Verifique, dentre as equações seguintes, quais representam uma circunferência. Em caso afirmativo, determine o centro e o raio dela.

- a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
- b) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 3 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$
- d) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y - 11 = 0$
- e) $x^2 + y^2 - 3xy - 2x + 6y - 1 = 0$

03 (Cesgranrio-RJ) Uma equação de circunferência de centro $(-3, 4)$ e que tangencia o eixo Ox é:

- a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$
- b) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$
- c) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$
- d) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$
- e) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

04 O ponto $P = (1, 2)$ pertence a uma circunferência de centro $C = (4, -2)$. Também pertence a essa circunferência o ponto:

- a) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
- b) $(7, 0)$
- c) $(4, -8)$
- d) $(0, -5)$
- e) $\left(4, \frac{7}{2}\right)$

05 Obtenha a equação da circunferência de diâmetro \overline{AB} , sendo $A = (-5, 2)$ e $B = (1, 6)$.

06 (ITA-SP) Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0, 2)$, $B = (0, 8)$ e $C = (8, 8)$. Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são:

- a) $(0, 5)$ e 6
- b) $(5, 4)$ e 5
- c) $(4, 8)$ e 5,5
- d) $(4, 5)$ e 5
- e) $(4, 6)$ e 5

07 (FGV-SP) No plano cartesiano, a circunferência que passa pelo ponto $P(1, 3)$ e é concêntrica com a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$ tem a seguinte equação:

- a) $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 40 = 0$
- b) $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
- d) $x^2 + y^2 + 3x + 4y - 25 = 0$
- e) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 19 = 0$

08 Um triângulo equilátero está inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 10 = 0$.

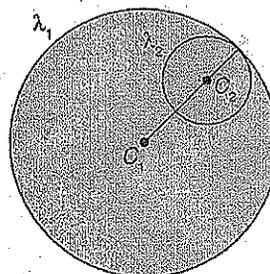
Obtenha a equação da circunferência inscrita nesse triângulo.

09 (Fuvest-SP) O segmento AB é diâmetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10y$. Se A é o ponto $(3, 1)$ então B é o ponto

- a) $(-3, 9)$
- b) $(3, 9)$
- c) $(0, 10)$
- d) $(-3, 1)$
- e) $(1, 3)$

10 A circunferência λ_1 tem equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 44 = 0$.

A circunferência λ_2 tem centro $C_2 = (-1, -3)$ e tangencia λ_1 , internamente. Qual é a equação λ_2 ?



11 Determine k , para que a equação $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente uma circunferência de raio 7.

12 A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y + m = 0$ é tangente ao eixo Ox . Então m é igual a:

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10



Exercícios de Casa

01 (VUNESP-SP) A equação da circunferência que tem centro no ponto $C = (2, 1)$ e que passa pelo ponto $P = (0, 3)$ é dada por:

- a) $x^2 + (y - 3)^2 = 0$
- b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
- c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$
- d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$
- e) $x^2 + (y - 3)^2 = 8$

02 (MACK-SP) O raio da circunferência que passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(3, 1)$ e que tem centro na reta $x - 4 = 0$, é:

- a) $\sqrt{5}$
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\sqrt{10}$
- d) $2\sqrt{2}$
- e) $2\sqrt{5}$

03 (FUVEST-SP) Os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (3, 0)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ situado no primeiro quadrante. O lado AD é perpendicular à reta $y = -2x$, e o ponto D pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$. Então, as coordenadas de C são:

- a) $(6, 2)$
- b) $(6, 1)$
- c) $(5, 3)$
- d) $(5, 2)$
- e) $(5, 1)$

04 (VUNESP-SP) O comprimento da corda que a reta $y = x$ determina na circunferência $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$ é:

- a) 4
- b) $4\sqrt{2}$
- c) 2
- d) $2\sqrt{2}$
- e) $\sqrt{2}$

05 (FUVEST-SP) Qual das equações a seguir representa a circunferência de centro $(2, -1)$ tangente à reta de equação $y = -x + 4$?

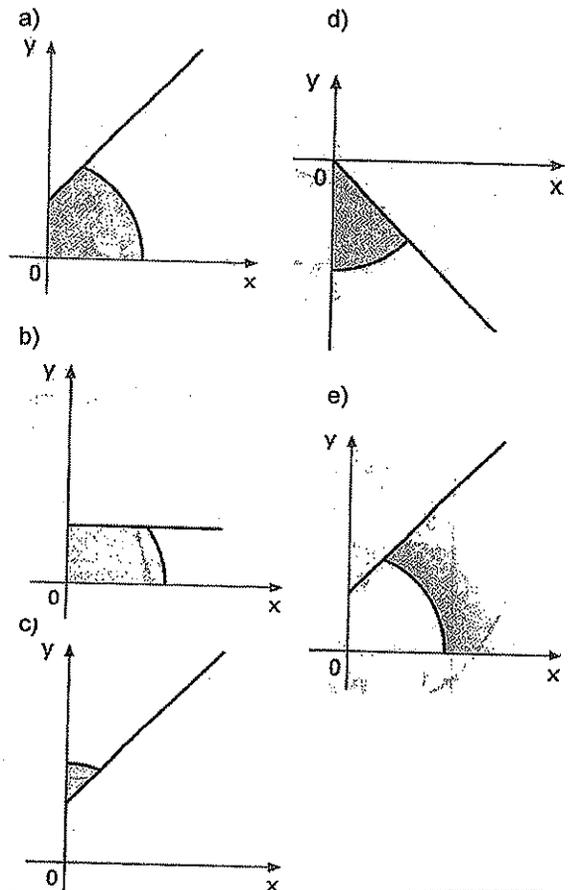
- a) $9(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 2$
- b) $2(x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 9$
- c) $2(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 9$
- d) $4(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 9$
- e) $4(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 9$

06 (CESGRANRIO-RJ) A reta do plano xOy , que passa pela origem O e é tangente à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$, é:

- a) $y = x$
- b) $y = -x$
- c) $x = 0$
- d) $y = 0$
- e) $y = -2x$

07 (FUVEST-SP) Das regiões hachuradas na sequência, a que melhor representa o conjunto dos pontos (x, y) , do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto dos pontos (x, y) , do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto das desigualdades

$$x \geq 0, y \geq 0, x - y + 1 \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 9 \text{ é:}$$



108 (VUNESP-SP) Seja

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 9\}$ uma região do plano. A área de S é:

- a) 5
- b) 7
- c) 5π
- d) 7π
- e) $7\pi^2$

109 (MACK - SP) Supondo $\pi = 3$, os pontos (x, y) do

plano tais que $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x \\ x^2 + y^2 \leq 2y \end{cases}$ definem uma região cuja

área é:

- a) 2,5
- b) 2,0
- c) 1,5
- d) 1,0
- e) 0,5

110 (ITA-SP) As circunferências $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4y$ possuem em comum o ponto P, distinto da origem. Obtenha uma equação da reta tangente à primeira circunferência no ponto P.

- a) $5x + 10y = 16$
- b) $5x + 15y = 20$
- c) $5x + 5y = 12$
- d) $3x + 4y = 8$
- e) $10x + 5y = 20$

111 (FGV-SP) Resolvendo o sistema de equações a

seguir: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ x^2 - y^2 + x - y = 50 \end{cases}$ chegaremos a:

- a) Infinitas soluções.
- b) Um par (x, y) único de solução.
- c) Dois pares (x, y) de solução.
- d) Quatro pares (x, y) de solução.
- e) Não tem solução.

112 (MACK - SP) Sendo t um número real, então o conjunto dos pontos (x, y) do plano, tais que $x = 2 \cos^2 t$ e $y = 3 \sin^2 t$, é:

- a) Um segmento de reta.
- b) Uma circunferência.
- c) Uma parábola.
- d) Uma reta de coeficiente angular negativo.
- e) Uma reta de coeficiente angular positivo.

113 (U. F. PA) Qual das equações abaixo é a equação de uma circunferência?

- a) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$
- c) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 4y = 64$
- d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -4$
- e) $x^2 + 2xy + y^2 = 3^2$

114 (PUC-SP) A distância dos centros das circunferências de equações $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - y - 1 = 0$ é:

- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
- d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- e) $\sqrt{5}$

115 (ITA) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 28 = 0$ que tem ordenada máxima é:

- a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -2, -\frac{9}{2}\right)$
- b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}, -1)$
- c) $\left(-\frac{3}{10}, -1\right)$
- d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -2, -2\right)$
- e) $(-2, -4)$

116 (U. F. UBERLÂNDIA) A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz do 1° e 3° quadrantes vale:

- a) $\sqrt{5}$
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{3/2}$
- e) $\sqrt{2/2}$

17 (FATEC) Na figura abaixo, A e B são os pontos de interseção da reta de equação: $3y - x = 5$ com a circunferência de equação: $x^2 + y^2 = 25$. O ponto médio do segmento de reta \overline{AB} é:

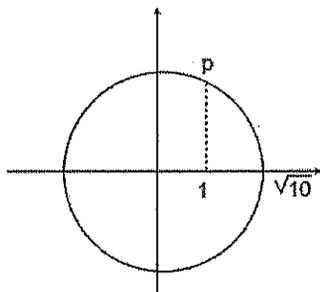
- a) (-1, 2)
- b) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$
- c) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$
- d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
- e) (-1, 1)

18 (FATEC) O quadrado ABCD está inscrito numa circunferência de centro na origem, seus lados são paralelos aos eixos coordenados, o vértice A pertence ao primeiro quadrante e o vértice C pertence à reta de equação $2y = -\sqrt{3}$. A equação da reta perpendicular à diagonal \overline{AC} pelo ponto A é:

- a) $y + x - 3 = 0$
- b) $y + x - \sqrt{3} = 0$
- c) $y - x + 3\sqrt{2} = 0$
- d) $2y + 2x - \sqrt{3} = 0$
- e) $2y + x - 3\sqrt{3} = 0$

19 (U. F. BA) Na figura ao lado, C é a circunferência. Seja r a reta que passa pelo ponto P, formando um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ com o eixo das abscissas. Assim, pode-se afirmar que r:

- a) É tangente a C.
- b) Intercepta C nos pontos P e (2, 2).
- c) Intercepta C nos pontos P e (3, 1).
- d) Intercepta o eixo das abscissas em $\sqrt{10}$.
- e) Intercepta o eixo das ordenadas em $\sqrt{10}$.

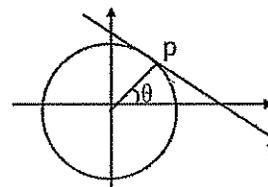


20 (U. C. SALVADOR) A circunferência λ tem equação $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$. A reta t é tangente a λ no ponto (1; 0). A equação de t é:

- a) $x = 1$
- b) $y = 1$
- c) $x + y = 1$
- d) $3x - y = 2$
- e) $-x - y = 1$

21 (ITA) A equação da reta t, tangente à circunferência de raio r no ponto P, conforme figura abaixo é dada por:

- a) $x \sin \theta + y \cos \theta = r$
- b) $x \sin \theta - y \cos \theta = -r$
- c) $x \cos \theta - y \sin \theta = -r$
- d) $x \cos \theta + y \sin \theta = r$
- e) $x \cos \theta + y \sin \theta = -r$



22 (FUVEST) Qual das equações abaixo representa a circunferência de centro (2, -1) tangente à reta de equação $y = -x + 4$?

- a) $9(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 2$
- b) $2(x + 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 9$
- c) $2(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 9$
- d) $4(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 9$
- e) $4(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 9$

23 (U. F. PR) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 25 = 0$, no ponto P(3, 4), é:

- a) $-3x + 4y - 7 = 0$
- b) $3x + 4y + 25 = 0$
- c) $3x - 4y + 7 = 0$
- d) $4x + 3y - 24 = 0$
- e) $3x + 4y - 25 = 0$

24 (U. FORTALEZA) Considere as circunferências $x^2 + y^2 = 25$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Podemos afirmar que elas são:

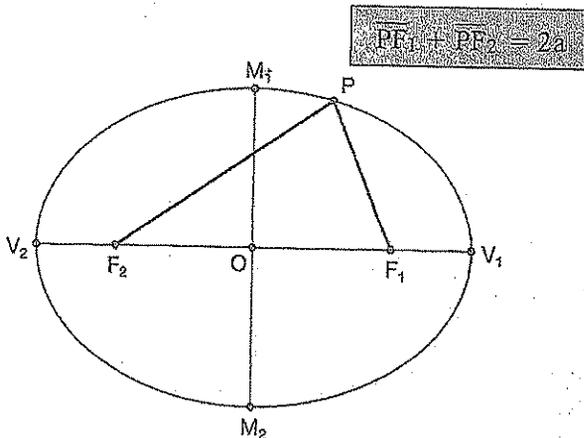
- a) Secantes.
- b) Tangente interiores.
- c) Concêntricas.
- d) Tangentes exteriores.

3- CÔNICAS

1. Estudo da elipse

1.1. Definição

Dados dos pontos F_1 e F_2 (focos) e um segmento de medida $2a$, denomina-se elipse o lugar geométrico dos pontos do plano, tais que:

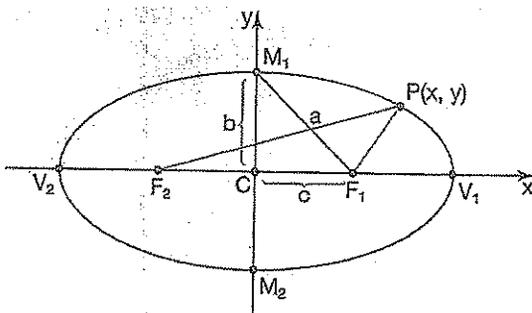


Em que:

Os pontos fixos F_1 e F_2 são os focos da elipse; o ponto O , ponto médio do segmento F_1F_2 , é o centro da elipse; a distância de F_1 a F_2 chama-se distância focal; os pontos V_1 e V_2 são chamados vértices da elipse; o segmento V_1V_2 é o eixo maior da elipse; o segmento M_1M_2 é o eixo menor da elipse.

1.2. Estudo analítico

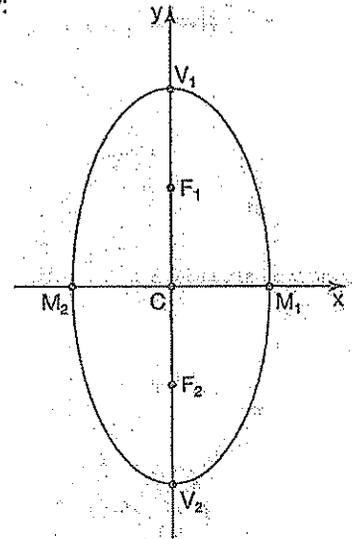
Eixo maior sobre x:



Equação reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{com } a > b$$

Eixo maior sobre y:



Equação reduzida:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{com } a > b$$

Em qualquer caso a relação entre os coeficientes é:

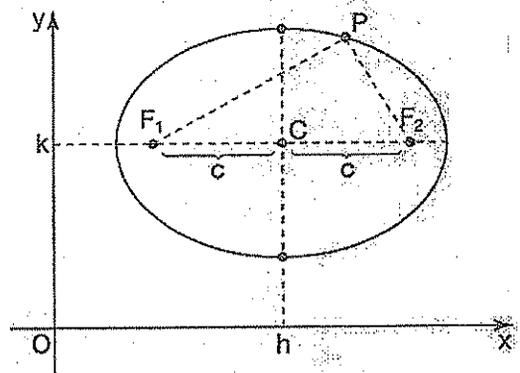
$$\left. \begin{array}{l} \text{Eixo maior: } \overline{V_1V_2} = 2a \\ \text{Eixo menor: } \overline{M_1M_2} = 2b \\ \text{Distância focal: } \overline{F_1F_2} = 2c \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

A excentricidade da elipse é o número e , tal que:

$$e = \frac{c}{a}$$

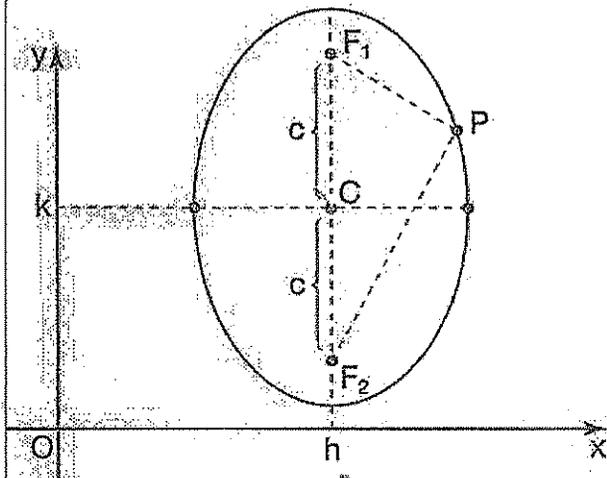
Observações:

1ª) Eixo maior da elipse paralelo ao eixo x:



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

2ª) Eixo maior da elipse paralelo ao eixo y:

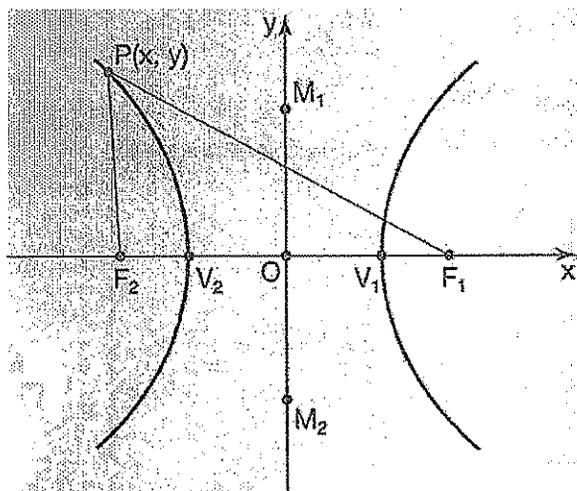


$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, a > b$$

2. Estudo da hipérbole

2.1 Definição

Dados dois pontos F_1 e F_2 , denomina-se hipérbole o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença, em módulo, das distâncias a F_1 e a F_2 , é constante e menor que a distância entre esses dois pontos dados:

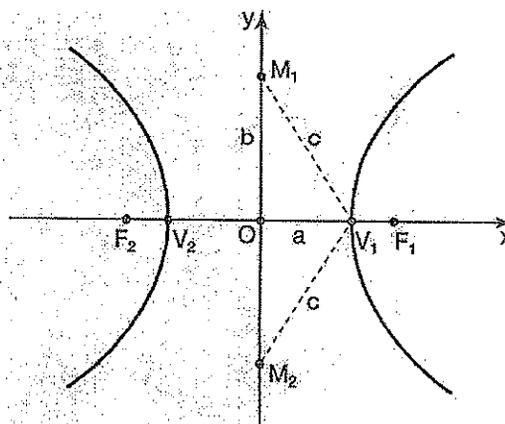


$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Em que: os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole; o ponto O médio do segmento $F_1 F_2$ é o centro da hipérbole; V_1 e V_2 são os vértices da hipérbole; o segmento $V_1 V_2$ é chamado eixo imaginário.

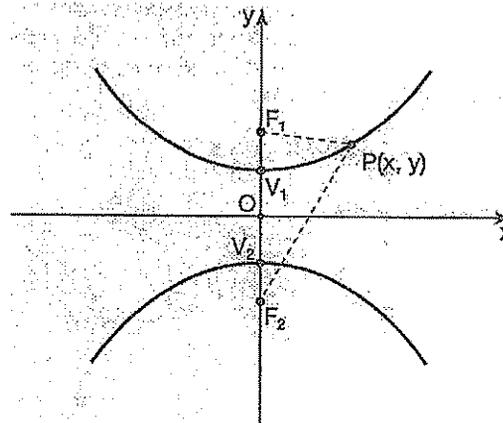
2.2 Estudo analítico

Focos sobre o eixo x:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Focos sobre o eixo y:



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

A relação entre os coeficientes é dada por:

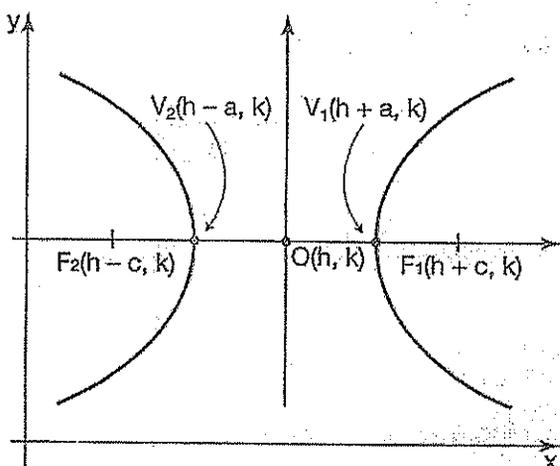
$$\left. \begin{aligned} \overline{F_1 F_2} &= 2c \\ \overline{V_1 V_2} &= 2a \\ \overline{M_1 M_2} &= 2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

A excentricidade da hipérbole é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

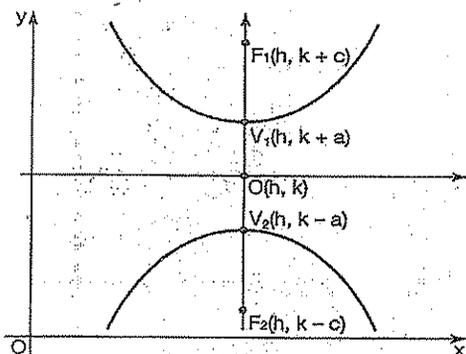
Observações:

1ª) Hipérbole de centro $O(h, k)$ e eixo real paralelo ao eixo x :



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

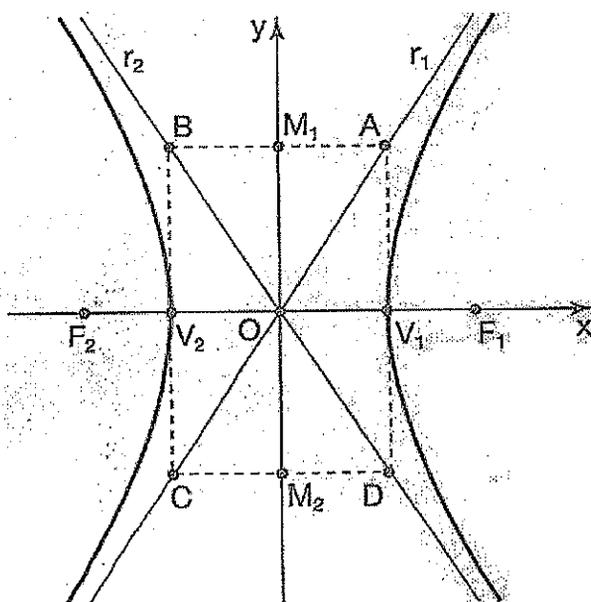
2ª) Hipérbole de centro (h, k) e eixo real paralelo ao eixo y :



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

2.3 Assíntotas da hipérbole

As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais do retângulo da figura são denominadas assíntotas da hipérbole.



Equação de r_1 :

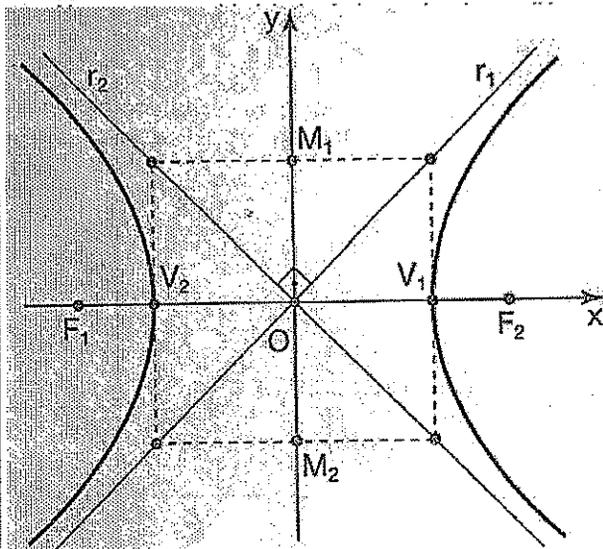
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ -a & -b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Equação de r_2 :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -a & b & 1 \\ a & -b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Observação:

Se tivermos $a = b$, o retângulo ABCD se transforma num quadrado e as assíntotas tornam-se perpendiculares.



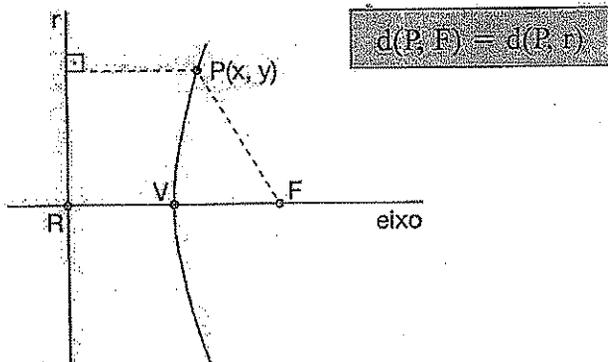
Equação de r_1 : $y = x$

Equação de r_2 : $y = -x$

15. Estudo da parábola

Definição

É o conjunto dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta r do plano.

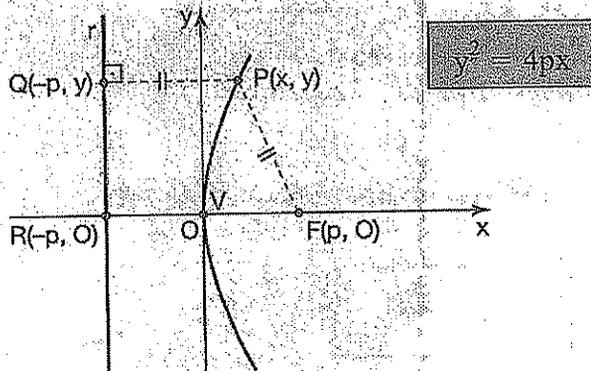


Em que:

o ponto fixo F é o foco da parábola; a reta fixa r é chamada diretriz da parábola; a reta que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz chama-se eixo ou eixo de simetria da parábola; o ponto V chama-se vértice da parábola; a distância do foco F ao vértice V é indicado por p; o ponto V é o ponto médio do segmento FR

3.2 Estudo analítico

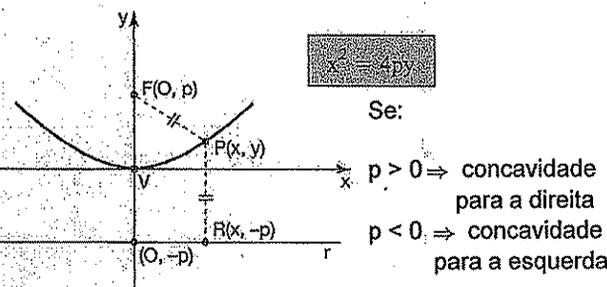
Eixo de simetria sobre x:



Se:

- $p > 0 \Rightarrow$ concavidade para a direita
- $p < 0 \Rightarrow$ concavidade para a esquerda

Eixo de simetria sobre y:



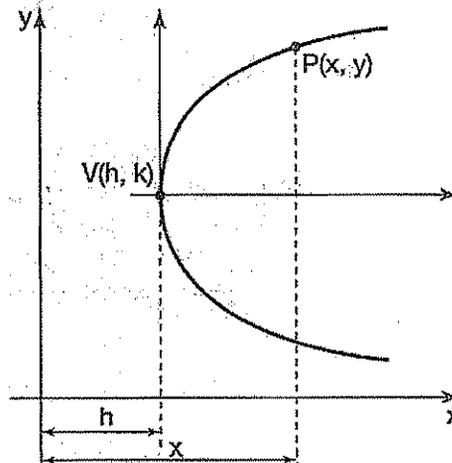
Se:

- $p > 0 \Rightarrow$ concavidade para a direita
- $p < 0 \Rightarrow$ concavidade para a esquerda

Observações:

1ª) Parábola de vértice $V(h, k)$ e eixo de simetria horizontal:

Equação:



$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

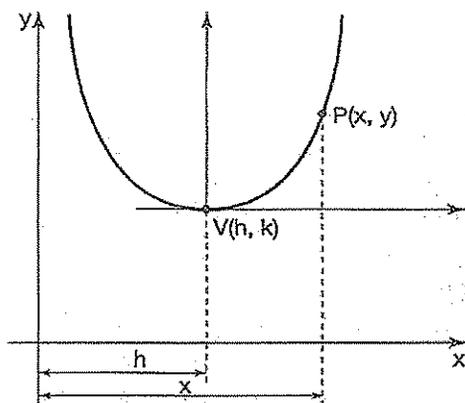
Diretriz:

$$x = h - p$$

Coordenadas do foco:

$$F(h + p, k)$$

2ª) Parábola de vértice $V(h, k)$ e eixo de simetria vertical:



Equação:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Diretriz: $y = k - p$

Coordenadas do foco:

$$F(h, k + p)$$



Exercícios Comentados

01) Determine o centro e focos de cônica $9x^2 + 16y^2 - 90x - 160y + 481 = 0$.

Resolução: Calculando na equação reduzida:

$$9(x^2 - 10x) + 16(y^2 - 10y) = -481$$

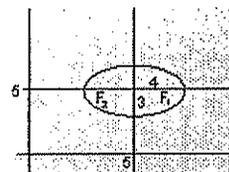
$$9(x^2 - 10x) + 25 - 25 + 16(y^2 - 10y + 25 - 25) = -481$$

$$9(x-5)^2 - 225 + 16(y-5)^2 - 400 = -481$$

$$9(x-5)^2 - 225 + 16(y-5)^2 - 400 = -481$$

$$9(x-5)^2 + 16(y-5)^2 = 144$$

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$$



$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

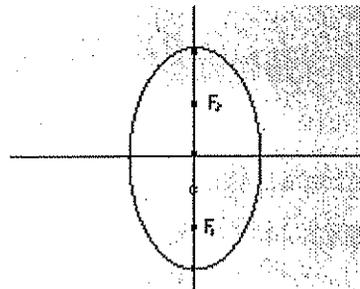
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{7} \quad F_1(5 + \sqrt{7}, 5) \text{ e } F_2(5 - \sqrt{7}, 5)$$

02) Qual é a equação do conjunto de pontos $p(x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1(0, -5)$ e $F_2(0, 5)$ é 68?

Resolução:

Esse conjunto de pontos é uma elipse de centro na origem.



$$\text{Logo: } 2a = 68 \rightarrow a = 34 \text{ e } c = 5$$

$$\text{Então: } a^2 = b^2 + c^2$$

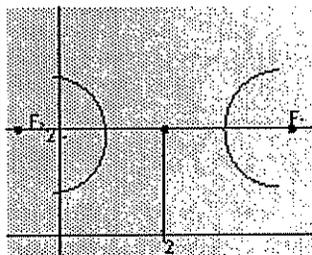
$$b = \sqrt{1131}$$

$$\text{A equação é: } \frac{x^2}{1131} + \frac{y^2}{1156} = 1$$

03) Obter o centro os focos e a excentricidade da cônica:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

Resolução: Centro (2,2)



$$\begin{aligned} a^2 &= 9 \rightarrow a = 3 \\ b^2 &= 7 \rightarrow b = \sqrt{7} \\ c^2 &= a^2 + b^2 \\ c &= 4 \\ F_1 &(6,2) \\ F_2 &(-2,2) \end{aligned}$$

$$C = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

04 Caracterize a cônica de equação $x = \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} + \frac{5}{4}$

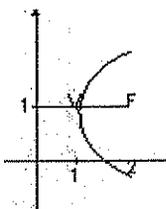
Resolução:

$$\begin{aligned} 4x &= y^2 - 2y + 5 \\ y^2 - 2y &= 4x - 5 \\ y^2 - 2y + 1 - 1 &= 4x - 5 \\ (y-1)^2 &= 4x - 4 \\ (y-1)^2 &= 4(x-1) \end{aligned}$$

Parábola de vértice $V(1,1)$

Parâmetro: $2p = 4$
 $p = 2$

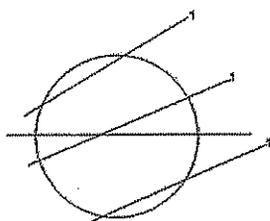
Foco: $F(2,1)$
Diretriz: $x = 0$



05 Obter os tangentes à elipse $2x^2 + 3y^2 = 6$ que são paralelas à reta $(r)y = x$

Resolução:

$$\begin{cases} t: x - y + k = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \\ x - y + k = 0 \end{cases}$$



Resolvendo o sistema e fazendo $\Delta = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3(x+k)^2 &= 6 \\ 5x^2 + 6kx + 3k^2 - 6 &= 0 \\ \Delta &= 36k^2 - 4(5)(3k^2 - 6) = \\ &= -24k^2 + 120 = 0 \\ k &= \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

Resp: $x - y + \sqrt{5} = 0$ ou $x - y - \sqrt{5} = 0$



Exercícios de Sala

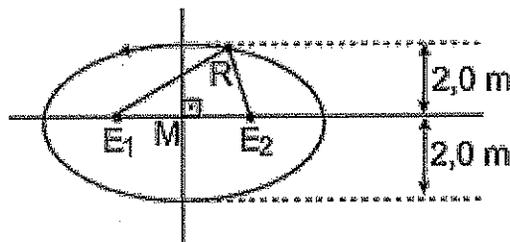
01 Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$ e seja p um ponto dessa elipse. A soma das distâncias de p aos focos vale:

- 7
- 6
- $2\sqrt{13}$
- 12
- 14

02 A equação da circunferência com centro na origem e cujo raio é igual ao semi-eixo menor da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ é:

- $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$
- $x^2 + y^2 = 16$
- $x^2 + y^2 = 4$
- $x^2 + y^2 = 1$
- n.r. a.

03 Haroldo, ao construir uma piscina, amarra as extremidades de uma corda de 6,0 m de comprimento nas estacas E_1 e E_2 . Com o riscador R , estica a corda, de modo a obter o triângulo E_1RE_2 . Deslizando o riscador R de forma que a corda fique sempre esticada e rente ao chão, obtém o contorno da piscina desenhado na figura abaixo:



Se M é o ponto médio de $\overline{E_1E_2}$, a distância entre as estacas é:

- $\sqrt{5}$ m
- $\sqrt{6}$ m
- $2\sqrt{5}$ m
- $2\sqrt{6}$ m
- $6\sqrt{2}$

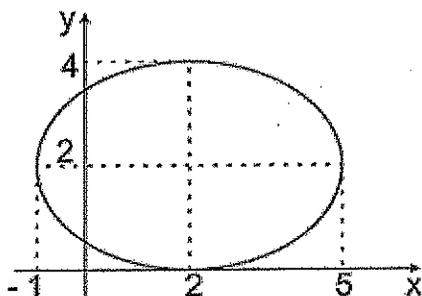
04 A equação $4x^2 + 16y^2 - 8x - 64y + 4 = 0$ representa uma elipse. As coordenadas de seus focos são:

- a) $(1, 2 + 2\sqrt{3})$ e $(1, 2 - 2\sqrt{3})$
- b) $(1, 2\sqrt{3})$ e $(1, -2\sqrt{3})$
- c) $(1, -2\sqrt{3}, 2)$ e $(1, 2\sqrt{3}, 2)$
- d) $(2\sqrt{3}, 2)$ e $(-2\sqrt{3}, 2)$
- e) n.r.a.

05 A equação da elipse que tem focos nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e contém o ponto $(1, \frac{15}{4})$ é:

- a) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$
- b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$
- c) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$
- d) $\frac{64x^2}{17} + \frac{64y^2}{81} = 1$
- e) $\frac{12x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$

06 A equação da elipse da figura é:



- a) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 36 = 0$
- b) $9x^2 + 4y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$
- c) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$
- d) $4x^2 + 9y^2 - 36x - 16y + 16 = 0$
- e) $4x^2 + 9y^2 - 18x - 8y + 8 = 0$

07 A reta $y = x + m$ intercepta a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ se e somente se:

- a) $m \geq \sqrt{5}$ ou $m \leq -\sqrt{5}$
- b) $m \geq 0$

- c) $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$
- d) $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$
- e) $m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$

08 Qual a distância entre os focos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$?

- a) $\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{5}$
- c) $\sqrt{6}$
- d) $\sqrt{7}$
- e) $\sqrt{8}$

09 A equação de uma das assíntotas à hipérbole

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1 \text{ é:}$$

- a) $y = 2x - 1$
- b) $y = 4$
- c) $y = x$
- d) $y = 2x + 1$
- e) $y = 2x$

10 A cônica representada pela equação $3x^2 - 4y^2 + 8y - 16 = 0$ é:

- a) parábola
- b) hipérbole
- c) elipse
- d) circunferência
- e) duas retas

11 O valor de b para o qual a reta $y = x + b$ não intercepta os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ é:

- a) 2
- b) $\sqrt{2}$
- c) 1
- d) 0
- e) -1

12 Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5}, 1)$; uma reta s tangente à hipérbole e paralela à $y = 2x$ pode ser:

- a) $y = 2x + 2\sqrt{3}$
- b) $y = 2x - \sqrt{3}$
- c) $y = 2x + 3\sqrt{3}$
- d) $y = 2x + 2$
- e) $y = 2x + 3$

13 A equação da parábola de foco $F(0, 1)$ e diretriz de equação $y + 1 = 0$ é:

- a) $y = ax^2$
- b) $(y - 1)^2 = 4x^2$
- c) $y = -\frac{1}{4}x^2$
- d) $x^2 = 4y$
- e) $y = -4x^2$

14 Num sistema cartesiano ortogonal, a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do eixo Oy e do ponto $(4, 0)$ é:

- a) $y^2 = 8(x - 1)$
- b) $y^2 = 4(x - 2)$
- c) $y^2 = 4x - 2$
- d) $y^2 = 8(x - 2)$
- e) $y^2 = 2x - 1$

15 A distância do vértice da parábola $y = (x - 2)(x - 6)$ à reta $y = \frac{4}{3}x + 5$ é:

- a) $\frac{72}{25}$
- b) $\frac{29}{25}$
- c) 43
- d) $\frac{43}{25}$
- e) $\frac{43}{5}$

16 Os valores de b para os quais a parábola $y = x^2 + bx$ tem um único ponto em comum com a reta $y = x - 1$ são:

- a) -1 e 3
- b) -1 e 2
- c) -3 e -1
- d) 0 e -3
- e) 0 e 2

17 O lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias aos pontos fixos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ é sempre igual a 4, intercepta o eixo y em pontos de ordenadas:

- a) 0 e 2
- b) $\pm\sqrt{2}$
- c) ± 3
- d) $\pm\sqrt{5}$
- e) $\pm\sqrt{3}$

18 As declividades das retas tangentes à parábola $y = x^2$ e que passam pelo ponto $P(0, -2)$ são:

- a) $\sqrt{3}e - \sqrt{3}$
- b) $3\sqrt{2}e - 3\sqrt{2}$
- c) $\sqrt{2}e - \sqrt{2}$
- d) $2\sqrt{2}e - 2\sqrt{2}$
- e) $2\sqrt{3}e - 2\sqrt{3}$



Exercícios de Casa

01 (CESESP) Dada a elipse de equação $25x^2 + 9y^2 - 90y = 0$, assinale a alternativa que nos indica corretamente as coordenada do centro, dos focos, as medidas do eixo maior e menor e a distância focal, respectivamente:

- a) $C(0, 0)$, $F_1(0, -4)$, $F_2(0, 4)$, 10, 6, 8
- b) $C(0, 5)$, $F_1(0, 1)$, $F_2(0, 5)$, 4, 8, 6
- c) $C(3, 0)$, $F_1(1, 0)$, $F_2(5, 0)$, 10, 6, 3
- d) $C(5, 0)$, $F_1(1, 0)$, $F_2(9, 0)$, 6, 8, 10
- e) $C(0, 5)$, $F_1(0, 1)$, $F_2(0, 9)$, 10, 6, 8

02 (F. C. M. STA. CASA) A equação $4x^2 + 16y^2 - 8x + 64y + 4 = 0$ representa uma elipse. As coordenadas de seus focos são:

- a) $(1, 2 + \sqrt{3})$ e $(1, 2 - \sqrt{3})$
- b) $1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$
- c) $(1 - \sqrt{3}, 2)$ e $(1 + \sqrt{3}, 2)$
- d) $(\sqrt{3}, 2)$ e $(-\sqrt{3}, 2)$
- e) (n. d. a.)

03 (PUC-SP) Um ponto P da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ dista 2 de um dos focos. Qual é a distância de P ao outro foco da elipse?

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 7

04 (U. MACK) Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5}, 1)$; uma reta s tangente à hipérbole e paralela a $y = 2x$ pode ser:

- a) $y = 2x + 2\sqrt{3}$
- b) $y = 2x - \sqrt{3}$
- c) $y = 2x + 3\sqrt{3}$
- d) $y = 2x + 2$
- e) $y = 2x + 3$

05 (CESESP) Considere o ramo da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, b < a, \text{ no sistema } xOy, \text{ com } x > 0, \text{ e a reta}$$

r que contém ponto $(a, 0)$ e é paralela à assíntota à hipérbole que tem inclinação positiva. Assinale, então, a única alternativa falsa.

a) A equação de r é dada por $y = \frac{b}{a}(x - a)$

b) A região compreendida por e e a assíntota considerada contém todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaçam a equação do ramo da hipérbole considerado com $y > 0$.

c) A reta que contém o foco e é assíntota considerada intercepta a hipérbole em apenas um ponto.

d) A elipse $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ tem apenas dois pontos em comum com a hipérbole dada.

e) A reta de equação $y = -\frac{a}{b}x$ é uma assíntota à hipérbole.

06 (U. E. LONDRINA) A distância do vértice da parábola

de equação $y = x^2 - 4x + 5$ à reta de equação $y = \frac{3}{4}x - 3$ é:

a) 2

b) $2\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{5}$

d) 5

e) 6

07 (UNICAP) Assinale a única alternativa que corresponde à equação da parábola que tem por foco o ponto $F(3, 0)$ e por diretriz a reta $x + 3 = 0$.

a) $y - 12x^2 = 0$

b) $y^2 - 12x = 0$

c) $y^2 - 9x = 0$

d) $y - 9x^2 = 0$

e) $y^2 - 12x = 0$

08 (CESESP) Considere a parábola $2y - x^2 - 10x + 2 = 0$. Assinale a única alternativa que representa as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz.

a) $(-5, -27/2)$ e $y = 1/2$

b) $(-5, -13)$ e $y = -1/2$

c) $(-2, 4)$ e $y = 1/4$

d) $(-5, -13)$ e $y = -14$

e) $(-5, -13)$ e $y = x + 1$

09 (FATEC) A equação $x^2 + y^2 = 2xy + 4$ representa, no sistema cartesiano ortogonal xOy ,

a) Uma circunferência.

b) Uma parábola.

c) Uma elipse.

d) Uma reta.

e) duas retas paralelas.

10 (PUC-SP) A área do trapézio $OABC$ é 11 vezes a área do triângulo OAC (veja a figura). A abscissa de A é:

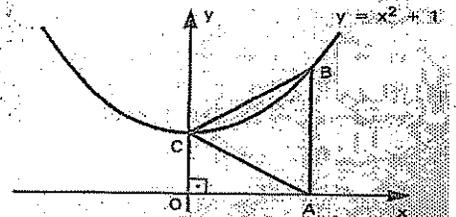
a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5



11 (PUC-SP) Os pontos A e B pertencem à elipse de foco F_1 e F_2 e distância focal igual a 1. Sabendo que o perímetro do triângulo AF_1F_2 vale 3 e que B pertence ao eixo menor da elipse, quanto vale a distância BF_1 ?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 2

e) 3

12 (U. MACK) A equação da reta que passa pelo ponto $A(3, -2)$ e pelo centro da elipse $x^2 + 4y^2 - 4x = 0$ é dada por:

a) $y + 2x - 4 = 0$

b) $y - 2x + 4 = 0$

c) $2x + y + 4 = 0$

d) $4x + y - 2 = 0$

e) $y - 4x + 2 = 0$

13 (PUC-MG) Os gráficos de $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3x + m$ se interceptam em um ponto apenas. O gráfico de $g(x)$ corta o eixo y no ponto de ordenada:

- a) 1,5
- b) 0,5
- c) 0,0
- d) -1,0
- e) 1,0

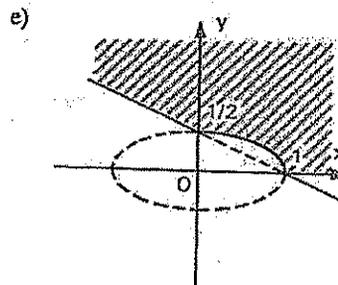
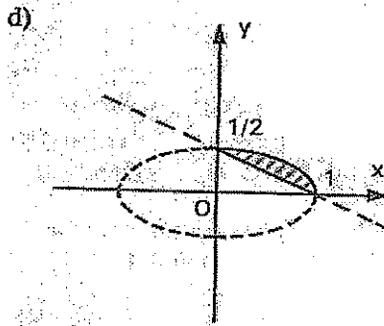
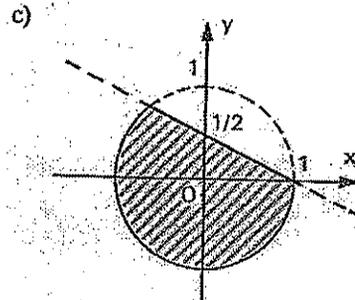
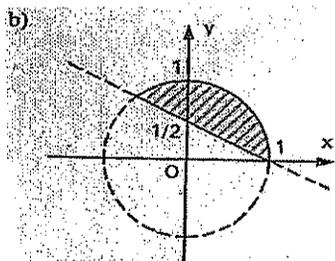
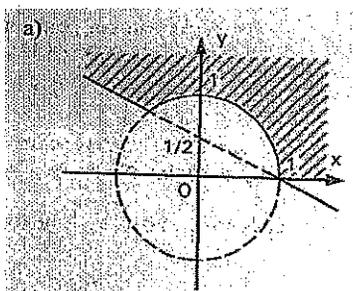
14 (U. F. PE) Um determinado fio é constituído de um material que, quando preso a dois pontos distantes um do outro de 20 m e ambos a 13 m do solo, toma a forma de uma parábola, estando o ponto mais baixo do fio a 3 m do solo.

Assinale a alternativa que corresponde à parábola no sistema de coordenadas cartesianas xOy , onde o eixo Oy contém o ponto mais baixo do fio e o eixo Ox está sobre o solo.

- a) $y = x^2 + x + 3$
- b) $10y = -x^2 + 30$
- c) $y = x^2 + 30$
- d) $5y = x^2 + 15$
- e) $10y = x^2 + 30$

15 (U. F. PE-U. F. R. PE) Nas alternativas abaixo estão sombreadas algumas regiões do plano xy , limitadas por retas, circunferências e elipses. Indique qual delas representa o conjunto solução do sistema de inequações:

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 1 \\ x^2 + y^2 &\geq 1 \end{aligned}$$



16 (CESGRANRIO) A região hachurada de todos os pontos (x, y) , tais que $y \geq x^2$ e $y \leq x + 1$, é mais bem representada por:

17 (U. E. CE) Se a reta (r) é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ que são equidistantes dos pontos $P_1(2, 3)$ e $P_2(0, -1)$, então a equação de (r) é:

- a) $x + y - 2 = 0$
- b) $x + 2y - 3 = 0$
- c) $2x + y - 3 = 0$
- d) $3x + y - 4 = 0$

19 (VUNESP) O gráfico de $y^2 = (2x - 1)^2$ é:

- a) Um círculo.
- b) Uma elipse que não é círculo.
- c) Uma hipérbole.
- d) Duas retas cocorrentes.
- e) Duas retas paralelas.

19 (U. MACK) As retas dadas pela equação
 $2x^2 - 2y^2 + 3xy = 0$:

- São paralelas.
- Fazem um ângulo de 45° .
- São perpendiculares.
- Determinam com os eixos um triângulo de área 4.
- Nenhuma das anteriores está correta.

GABARITO

1 Binômio de Newton

Exercícios de Aula

- E
- E
- A
- D
- A
- E
- C
- E
- E
- B

Exercícios de Casa

- (9)
- {3}
- {0,1}
- {2,3}
- {-1,2}
- C
- 64
- 0
- D
- A
- C
- B
- B
- A
- C
- C
- B
- C
- C
- D

2 Números Complexos

Exercícios de Aula

- D
- E
- A
- E
- E
- A
- E
- E
- C
- D

Exercícios de Casa

- A
- B
- D
- B
- D
- B

20. E
 21. $\{2+i\sqrt{3}, 2-i\sqrt{3}, -2+i, -2-i\}$
 22. B
 23. C
 24. $\{1, -1, 2\}$
 25. $\{1, -1, 2-3\}$
 26. $\{-1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\}$

5 Geometria Analítica

Parte I

Exercícios de Aula

1. $M(\frac{11}{2}, 2)$ $N(7, 3)$ $P(\frac{17}{2}, 4)$
 2. $A(8, 0)$ $B(0, 2)$
 3. E
 4. $C(3, -5)$ $D(-1, -7)$
 5. $G(\frac{14}{3}, \frac{8}{3})$
 6. B
 7. B
 8. $P(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$
 9. $x=1$ ou $x=\frac{13}{5}$
 10. a) $\neq m$
 b) $\frac{1}{2}$
 c) $\frac{-3}{4}$
 11. D
 12. $x+2y-9=0$

Exercícios de Casa

1. A
 2. (r) $y=4$ (s) $y=-1$ (t) $y=-2$ (u) $y=5$
 3. C
 4. B
 5. A
 6. E
 7. C
 8. D
 9. E
 10. E
 11. B
 12. B
 13. C
 14. E
 15. C
 16. A

17. C
 18. A
 19. B
 20. B
 21. D
 22. C
 23. C
 24. D
 25. B
 26. B
 27. E
 28. B
 29. C

Parte II Circunferência

Exercícios de Aula

1. $(x-6)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$
 2. a) $C(3, -4)$ $R=6$
 b) $C(-1, 0)$ $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$
 c) Não
 d) Não
 e) Não
 3. E
 4. D
 5. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 13$
 6. D
 7. C
 8. $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 9$
 9. A
 10. $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$
 11. $K=-8$
 12. D

Exercícios de Casa

1. C
 2. C
 3. E
 4. B
 5. C
 6. B
 7. A
 8. D
 9. E
 10. D
 11. D
 12. A
 13. D
 14. B
 15. E
 16. E
 17. D
 18. B
 19. C
 20. A

21. B
22. C
23. E
24. B

Parte III Cônicas

Exercícios de sala

01. E
02. D
03. C
04. E
05. B
06. C
07. D
08. E
09. E
10. B
11. D
12. A
13. D
14. D
15. E
16. A
17. E
18. D

Exercícios de Casa

1. E
2. E
3. C
4. A
5. D
6. A
7. B
8. A
9. E
10. C
11. C
12. A
13. E
14. E
15. E
16. A
17. A
18. B
19. D
20. D

REVISÃO MATEMÁTICA (Gabriel)

Lista de exercícios extra

**Lista 01 – Potências e Raízes****E1: Simplifique**

a) $\sqrt{4}$

b) $-\sqrt{4}$

c) $\sqrt{-4}$

d) $\sqrt{-(2^2)}$

e) $\sqrt{(-2)^2}$

f) $-\sqrt{(-2)^2}$

g) $\sqrt[3]{8}$

h) $-\sqrt[3]{8}$

i) $-\sqrt[3]{-8}$

j) $\sqrt[3]{(-8)}$

k) $\sqrt[3]{-(8)}$

l) $\sqrt[3]{-8}$

m) $\sqrt{x^2}$

n) $\sqrt{x^{12}}$

o) $\sqrt[3]{x^3}$

p) $\sqrt[3]{x^6}$

E2: Simplifique (quando possível):

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

c) $\sqrt{2+3}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$

f) $\sqrt{\frac{6}{3}}$

g) $\sqrt{6-3}$

h) $(\sqrt{7})^2$

i) $\sqrt[3]{2 \cdot 8}$

j) $(\sqrt[3]{2 \cdot 8})^3$

k) $5^{0,3\sqrt{0,6}}$

l) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

m) $2^{0,333...}$

E3: Simplifique

a) $\sqrt{24}$

b) $\sqrt{36}$

c) $\sqrt{256}$

d) $\sqrt[3]{216}$

e) $\sqrt[4]{81}$

f) $\sqrt{1512}$

g) $\sqrt[3]{1728}$

E4: Considere Verdadeiro ou Falso

a) $\sqrt{x^2} = x$

b) $\sqrt{(xy)^2} = xy$

c) $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$

j) $-\sqrt{4} = -2$

d) $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$

k) $\sqrt{-x}$ = não existe raiz real

e) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

l) $\sqrt{\frac{2}{0}} = \sqrt{0} = 0$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

m) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2}$

g) $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{2}$

n) $x^{\sqrt{2}}$ é irracional

h) $\sqrt{(-2)^2} = (-2)^{\frac{2}{2}} = (-2)^1 = -2$

i) $\sqrt{5-3} = \sqrt{2}$

E5: Qual o maior número? $\sqrt[5]{27}$ ou $\sqrt[11]{3}$? Justifique

E6(Unicamp): Dados dois números positivos, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

E7: Simplifique: $\frac{\sqrt{32x^4y^3}}{\sqrt{4x^2y^2}}$ (para $x > 0$ e $y > 0$)

E8: Simplifique: $\sqrt{20 + \sqrt{21 + \sqrt{8 + \sqrt{64}}}}$

E9: Simplifique: $3\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{7} + \sqrt{20} - \sqrt{28} + \sqrt{45}$

E10(UEPB): Efetuando $(\frac{\sqrt{2}}{2})(2^{0,25})^{-2} - (\frac{6}{6\sqrt{3}})^{\sqrt{3}+1}$ temos por resultado:

a) $\frac{17}{36}$

d) 1

b) $-\frac{71}{2}$

e) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{36}{35}$

E11: Simplifique a expressão: $\sqrt{5 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}}$

E12(Colégio Naval): Efetuando $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ obtém-se:

a) 4

d) $\frac{2}{3}$

b) $\sqrt{3}$

e) 1

c) $\sqrt{2}$

E13 (Colégio Naval): $\sqrt{3 + 2\sqrt{2\sqrt{2}}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ é igual a:

a) 1

d) 4

b) 2

e) 5

c) 3

RADICAL DUPLO – Complemento de aula

As expressões $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ ou $\sqrt{a - \sqrt{b}}$ são radicais duplos. Em muitos casos, tal expressão pode ser convertida para a forma $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ou $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Como simplificar radicais duplos (quando possível):

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Onde $c = \sqrt{a^2 - b}$

Portanto, para que seja possível essa transformação, devemos antes de tudo ter $a^2 > b$ e verificar se b não é quadrado perfeito, o que simplificaria os cálculos.

E14: Simplifique:

a) $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$

b) $\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

c) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

e) $\sqrt{1 - 2\sqrt{2 - 4\sqrt{6 - 4\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{3}}}}$

f) $\sqrt{3a + b - 2\sqrt{3ab}} + \sqrt{2a + b + 2\sqrt{2ab}}$

E15: Qual o valor da expressão

$$\left[(3^{0,333\dots})^{27} - 2^{17} + \sqrt[5]{239 + \sqrt{\frac{448}{7}}} - (\sqrt[3]{3})^{3^3} \right]^{\sqrt[7]{92}}$$

a) 0,3

d) 0

b) $\sqrt[3]{3}$

e) - 1

c) 1

E16 (EPCAr Modificado): Simplifique: $1, 111 \dots - (2^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}$

E17 (Desafio): Determine os números racionais x e y tais que:

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = x + \sqrt{y}$$

E18 Calcule: $\frac{\sqrt[3]{8\sqrt{3^3 - \sqrt{147}}}}{\sqrt[8]{81}}$

E19 Simplifique o radical: $\sqrt[3]{5^{14} \cdot 7^2 \cdot 10^3}$

E20 Resolva a expressão $\sqrt[3]{2 \cdot (\sqrt{9} + 2 \cdot \sqrt{25})} + 1$

E21 Simplifique a expressão $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} + 2 \cdot \sqrt{6}) - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} + 3 \cdot \sqrt{6})$

E22 (UTF - PR) Considere as seguintes expressões:

I. $\frac{3\sqrt{12}}{2} = \frac{3}{2}$

II. $(2\sqrt{3})^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

III. $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

É (são) verdadeira(s) somente:

a) I

b) II

c) III

d) I e II

e) I e III

E23 (UFRGS) A expressão $\frac{5^{12}\sqrt{64}-\sqrt{18}}{\sqrt{50}-\sqrt[4]{324}}$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

b) $5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $8\sqrt{2}$

e) 1

GABARITO – Lista 01

E1:

- | | |
|---|----------|
| a) 2 | h) -2 |
| b) -2 | i) 2 |
| c) Absurdo! (Conjunto universo é dos números reais) | j) -2 |
| d) Absurdo! (Conjunto universo é dos números reais) | k) -2 |
| e) 2 | l) -2 |
| f) -2 | m) $ x $ |
| g) 2 | n) x^6 |
| | o) x |
| | p) x^2 |

E2:

- | | |
|-------------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{6}$ | h) 7 |
| b) Já está simplificado | i) $2\sqrt[3]{2}$ |
| c) $\sqrt{5}$ | j) 16 |
| d) $\sqrt{2}$ | k) 5^2 |
| e) Já está simplificado | l) $\sqrt[3]{2}$ |
| f) $\sqrt{2}$ | m) $\sqrt[3]{2}$ |
| g) $\sqrt{3}$ | |

E3:

- | | |
|----------------|-----------------|
| a) $2\sqrt{6}$ | e) 3 |
| b) 6 | f) $6\sqrt{42}$ |
| c) 16 | g) 12 |
| d) 6 | |

E4:

- | | |
|--|--|
| a) <i>Falso</i> , $\sqrt{x^2} = x $ | i) <i>Verdadeiro</i> |
| b) <i>Falso</i> , $\sqrt{(xy)^2} = xy $ | j) <i>Verdadeiro</i> |
| c) <i>Falso</i> , $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2 = 2$ | k) <i>Falso</i> . Se $x = -4$ (por exemplo) $\rightarrow \sqrt{-(-4)} = 2$ |
| d) <i>Falso</i> , $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$ | l) <i>Falso</i> . Divisão por zero? <i>Absurdo!</i> |
| e) <i>Falso</i> , $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ já está na forma mais simples. | m) <i>Falso</i> , $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ |
| f) <i>Verdadeiro</i> | n) <i>Falso</i> . Se $x = \sqrt{2\sqrt{2}}$ (por exemplo) $\rightarrow (\sqrt{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ (racional) |
| g) <i>Falso</i> , $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ já está na forma mais simples. | |
| h) <i>Falso</i> , $\sqrt{(-2)^2} = -2 = 2$ | |

E5: $\sqrt[5]{27} > \sqrt[11]{3}$

E6: $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$

E7: $2x\sqrt{2y}$

E8: 5

E9: $5\sqrt{7} + 3\sqrt{5}$

E10: A

E11: $2\sqrt{5}$

E12: A

E13: B

E14:

a) $\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt{15} + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{5} + 1$

d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

e) $-\sqrt{2}$

f) $\sqrt{3a} + \sqrt{2a}$

E15: C

E16: $-\frac{8}{9}$

E17: $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$

E18: $2\sqrt{3} - 7$

E19: $6250\sqrt[3]{1225}$

E20: 3

E21: $4\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - 5$

E22: B

E23: E

1. Sendo $z = 2 - i$, calcule o inverso de z^2 .

- a) $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$
- b) $\frac{6}{25} + \frac{4}{25}i$
- c) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$
- d) $\frac{4}{25} + \frac{6}{25}i$

2. Calcule o módulo do número complexo: $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}}$

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{5}$
- e) $\frac{1}{6}$

3. O número complexo $z = a + bi$ é tal que: $\left| \frac{z-i}{z-1} \right| = 1$, calcule a relação a e b.

- a) $a = b$
- b) $2a = b$
- c) $a = 2b$
- d) $a = 3b$
- e) $3a = b$

4. Determine o módulo da solução da equação $|z| + z = 2 + i$

- a) $\frac{3}{4} + i$
- b) $\frac{3}{4} + \frac{i}{4}$
- c) $\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$
- d) $\frac{2}{3} + i$
- e) $\frac{2}{3} + \frac{i}{3}$

5. Representando-se, graficamente, no plano de Argand-Gauss, os números complexos tais que $z^2 = \bar{z} \cdot i$, o número de pontos obtidos é:

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

6. Determine o número de soluções da equação: $z^2 + |z| = 0$

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

7. Dados os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = z_2^3 / z_1^4$, pode-se afirmar que a parte real de z_3 vale:

- a) 1/4
- b) -1/4
- c) -1/2
- d) -1 e) 1/2

8. Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{\alpha+2i}$ é zero, então α é:

- a) -4
- b) -2
- c) 1
- d) 2
- e) 4

9. Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ qual é o menor valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um número real?

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

10. Sendo i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Quantos números reais existem para os quais $(a + i)^4$ é um número real?

- a) 2
- b) 1
- c) 3
- d) 4
- e) infinitos

11. Seja o número complexo $z = (x - 2i)^2$, no qual x é um número real. Se o argumento principal de z é 90° , então $1/z$ é igual a:

- a) $-i/8$
- b) $-8i$
- c) $4i$
- d) $-1 + 4i$
- e) $4 - i$

12. A solução da equação $|z| + z - 18 + 6i = 0$ é um complexo z de módulo:

- a) 6
- b) 8
- c) 18
- d) 12
- e) 10

13. Se o número complexo $z = 1 + i$ é uma das raízes da equação $x^8 = a$, o valor de a é:

- a) 4
- b) 16
- c) 126
- d) $16i$
- e) $128i$

14. Se $z = \{2[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)]\}$, então o conjugado de z^2 é igual a:

- a) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- b) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- d) 4
- e) $-4i$

15. As raízes da equação $z + \frac{1}{z} = 1$ se situam, no plano complexo, nos quadrantes:

- a) 1° e 2°
- b) 1° e 3°
- c) 1° e 4°
- d) 2° e 3°
- e) 2° e 4°

16. Se $(i + 1) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = x + iy$, em que i é a unidade imaginária e x e y são números reais, o valor de $x + y$ é?

- a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$
- e) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

17. Simplificando: $\frac{(2+i)^{101} \cdot (2-i)^{50}}{(-2-i)^{100} \cdot (i-2)^{49}}$, obtém-se:

- a) 1
- b) $2+i$
- c) $2-i$
- d) 5
- e) -5

18. Sejam x e y número reais tais que: $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1' \end{cases}$ então, o número complexo $z = x + iy$ é tal que z^3 e $|z|$ valem, respectivamente:

- a) $1 - i$ e $\sqrt[3]{2}$
- b) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$
- c) i e 1
- d) $-i$ e 1
- e) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$

19. Seja z um número complexo satisfazendo $Re(z) > 0$ e $(z + i)^2 + |z' + i|^2 = 6$, onde z' é o conjugado de z . Se n é o menor natural para o qual z^n é um imaginário puro, então n é igual a:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

20. Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

- a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) π d) $(3\sqrt{3})/2$ e) 2π

21. Partindo de uma circunferência de centro (0,0) de raio 1 toma-se um ponto z localizado no primeiro quadrante e interno a essa circunferência. Externo a essa circunferência toma-se 4 pontos externos w, r, s e t localizados, respectivamente, nos quadrantes 1,2,3 e 4. O complexo $1/z$ é igual a:

- a) z
- b) w
- c) r
- d) s
- e) t

22. Considere os números complexos $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$. Se $m =$

$$\left| \frac{(w^6 + 3z^4 + 4i)}{(z^2 + w^2 + 6 - 2i)} \right|^2, \text{ então } m \text{ vale:}$$

- a) 34
- b) 26
- c) 16
- d) 4
- e) 1

23. Determine as raízes quadradas do número complexo $z = 5 - 12i$

- a) $3 - 2i$ e $-3 + 2i$
- b) $2 - 3i$ e $2 + 3i$
- c) $4 - 3i$ e $4 + 3i$
- d) $3 + 2i$ e $3 - 2i$
- e) $-3 - 2i$ e $3 - 2i$

24. Se $z = 1 + i\sqrt{3}$; $z \cdot \bar{w} = 1$ e $a \in [0; 2\pi]$ é um argumento de $z \cdot w$, então a é igual a:

- a) $\pi/3$
- b) π
- c) $2\pi/3$
- d) $5\pi/3$
- e) $3\pi/2$

25. Dentre todos os números complexos, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, que satisfazem a inequação $|z - 25i| \leq 15$, determinar aquele que tem o menor argumento θ .

- a) $z = 12 - 16i$
- b) $z = 16 + 12i$
- c) $z = 12 + 16i$
- d) $z = 16 - 12i$
- e) $z = -12 - 16i$

"Daqui um ano, você vai desejar ter começado a levar a sério hoje, faça-me estar errado."

GABARITO 1.C 2.B 3.A 4.A 5.C 6.B 7.E 8.E 9.C 10.C 11.A 12.E 13.B 14.E 15.C 16.E 17.E 18.E 19.B 20.D 21.E 22.A 23.A 24.C 25.C

Seu teste contém 20 questões numeradas de 1 a 20 divididas por assunto.

O objetivo desse teste é, após realizado e com base em seus desenvolvimentos, orientar o aluno como estudar para o período de revisão. Por essa razão não deixem nada em branco.

O tempo total de duração da prova é de 3 (três) horas.

Não é autorizado qualquer tipo de consulta ou ajuda externa.
Boa prova.

Nome: _____
Turno: _____ Data: ____/____/____

“Exército Brasileiro: braço forte, mão amiga”

1. (CONJUNTOS). Sejam: N, Z, Q e R os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, respectivamente. Dados: $G = \{n \in Z \mid \frac{90}{n} \in N\}$, $F = \{q \in Q \mid 12q \in Z\}$ e $D = \{x \in R \mid \sqrt{x} \in Q\}$, é correto afirmar que:

- $F \cap D \subset N$.
- $F \cap Z$ é o conjunto vazio.
- $\sqrt{2} \in (D - Q)$.
- $F \cup D \subset F$.
- $G \cap F \cap D$ tem dois elementos.

2. (FUNÇÕES). Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 2x + 1$. Determine o domínio da função $\frac{f(2) - \sqrt[3]{g(x)}}{\sqrt{f \circ g(x)}} = \frac{\sqrt[3]{g^{-1}(x)}}{\sqrt[3]{f(x)}}$. $D = \{x \in IR \mid \text{_____}\}$.

- $2 < x < 3$ com $x \neq \frac{3}{2}$ e $x \neq \frac{7}{4}$
- $1 < x < \frac{1}{2}$ com $x \neq \frac{2}{3}$ e $x \neq \frac{5}{3}$
- $x < 2$ ou $x > 3$ com $x \neq 1$ e $x \neq \frac{1}{2}$
- $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$ com $x \neq 2$ e $x \neq 3$
- $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 1$ com $x \neq 3$ e $x \neq \frac{1}{2}$

3. (FUNÇÃO AFIM). Sabendo que a reta r crescente é definida por: $\begin{cases} \text{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2} \\ P_1(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2) \end{cases}$ e que

a reta s é definida por: $\begin{cases} P_2(2,3) \\ P_3(-2,5) \end{cases}$. Determine o ponto de encontro dessas retas.

- $(\frac{28\sqrt{3}-42}{3}, \frac{31-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{28\sqrt{3}-42}{3}, \frac{33-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{26\sqrt{3}-42}{3}, \frac{33-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{26\sqrt{3}-42}{3}, \frac{31-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{28\sqrt{3}-42}{3}, \frac{31-14\sqrt{3}}{3})$

4. (FUNÇÃO QUADRÁTICA). Dados:

I. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

II. $f(4) = f(-4) = 2$.

III. $f(2) = f(-2) = 8$.

IV. $x' = \text{raiz positiva}, x'' = \text{raiz negativa}$.

V. $X_v = x$ do vértice, $Y_v = y$ do vértice.

a) $5 \cdot (1 + \sqrt{5})$

b) $2 \cdot (1 + \sqrt{5})$

c) $2,5 \cdot (1 + \sqrt{5})$

d) $20 \cdot (1 + \sqrt{5})$

e) $10 \cdot (1 + \sqrt{5})$

Calcule o valor de $\frac{5 \cdot (x' - x'')}{2} + (X_v + Y_v)$.

5. (ÂNGULOS E TRIÂNGULOS). Por meio de uma manual de construção, um oficial de engenharia deseja construir uma haste de sustentação, em forma de um triângulo isósceles, com algumas barras metálicas que sobraram no paiol.

Lista de materiais:

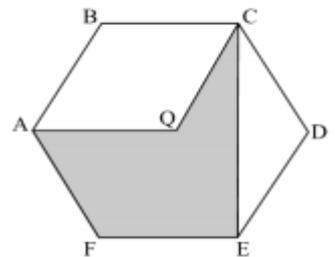
- I. 4 barras de 50 metros de comprimento. (Barras de sustentação).
 II. 8 barras de comprimentos iguais menores do que 50 metros. (Barras de apoio).

Manual de construção: [Primeiro Passo] - Pegue uma barra de apoio (\overline{BC}) para ser a base da haste triangular, em seguida funda cada extremidade da barra de apoio à extremidade de uma barra de sustentação, com angulação suficiente para que a união das outras duas extremidades das barras de sustentação (\overline{BA} e \overline{CA}) seja possível. (triângulo isósceles). [Segundo Passo] - A partir de um dos vértices da base (\overline{BC}), funda uma das extremidades de uma nova barra de apoio a fim de obter o encontro da outra extremidade com a barra de sustentação (\overline{CA}). [Terceiro Passo] - A partir desse ponto de encontro (P_1) funda uma barra de apoio a ele gerando, então, um novo ponto de encontro (P_2) com a outra barra de sustentação (\overline{BA}). [Quarto Passo] - a partir do ponto (P_2) funda uma última barra de apoio gerando um ponto (P_3) sobre a barra (\overline{CA}). Perceba que a distância do vértice A ao ponto (P_3) é igual ao comprimento de uma barra de apoio. Após a finalização da construção da haste defina o valor do ângulo $B\hat{A}C$.

- a) 15°
 b) 30°
 c) 20°
 d) 40°
 e) 45°

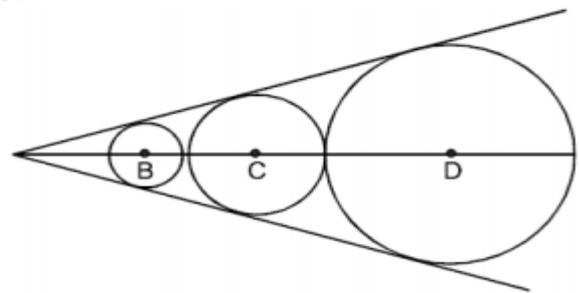
6. (POLÍGONOS) Um polígono convexo possui o número de lados n igual a um terço do número de suas diagonais. Sabendo que $\frac{n}{9}$ é igual ao lado em dm de um hexágono regular ABCDEF de centro Q, determine o perímetro do polígono AQCEF, em dm .

- a) $4 + \sqrt{2}$
 b) $4 + \sqrt{3}$
 c) $3 \cdot (\frac{4}{3} + \sqrt{2})$
 d) $4 + \sqrt{5}$
 e) $2 \cdot (2 + \sqrt{2})$



7. (CIRCUNFERÊNCIA) Na figura, as três circunferências, de centros B, C e D, são tangentes duas a duas e inscritas num mesmo ângulo. Calcular o diâmetro da circunferência intermediária, sabendo-se que os raios das outras duas circunferências são 2,5 cm e 4,9 cm. (dar o resultado em cm).

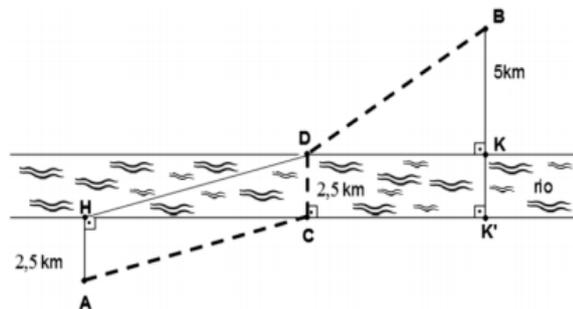
- a) 6
 b) 7
 c) 7,5
 d) 8
 e) 8,5



8. (RELAÇÕES NO TRIÂNGULO RETÂNGULO) Duas cidades, marcadas no desenho abaixo como A e B, estão nas margens retilíneas e opostas de um rio, cuja largura é constante e igual a 2,5 km, e a distâncias de 2,5 km e de 5 km, respectivamente, de cada uma das suas margens. Deseja-se construir uma estrada de A até B que, por razões de economia de orçamento, deve cruzar o rio por uma ponte de comprimento mínimo, ou seja, perpendicular às margens do rio. As regiões em cada lado do rio e até as cidades são planas e disponíveis para a obra da estrada. Uma possível planta de tal estrada está esboçada na figura abaixo em linha pontilhada.

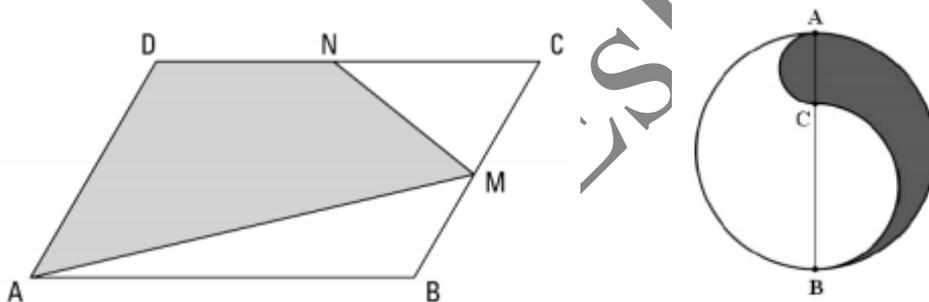
Considere que, na figura, o segmento HD é paralelo a AC e a distância $HK' = 18$ km. Calcule a que distância, em quilômetros, deverá estar a cabeceira da ponte na margem do lado da cidade B (ou seja, o ponto D) do ponto K, de modo que o percurso total da cidade A até a cidade B tenha comprimento mínimo.

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 13
- e) 14



9. (FIGURAS PLANAS). Sabendo que ABCD é um paralelogramo de área 24 cm^2 e que M e N são pontos médios de BC e CD, respectivamente. Sabendo ainda que para a circunferência ao lado $AB = 12 \text{ cm}$ e que $CB = 2 \cdot AC$. Determine a razão entre a área de AMND e o comprimento da área hachurada contida na circunferência. Adote $\pi = 3$.

- a) $\frac{7\sqrt{3}}{12}$
- b) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$
- c) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$
- d) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$
- e) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$



10. (BINÔMIO DE NEWTON). Sabendo-se que no desenvolvimento de $(1+x)^{26}$ os coeficientes dos termos de ordem $(2r+1)$ e $(r+3)$ são iguais, pode-se afirmar que r é igual a:

- a) 8 ou 4
- b) 8 ou 2
- c) 4 ou 2
- d) 2 ou 1
- e) 4 ou 4

11. (ANÁLISE COMBINATÓRIA). Em uma reunião social, cada participante cumprimenta todos os alunos uma única vez. Se houve um total de 36 cumprimentos, o número de participantes da reunião é um número:

- a) cubo perfeito.
- b) par.
- c) quadrado perfeito.
- d) primo.
- e) múltiplo de 5.

12. (FUNÇÃO MODULAR) A soma das raízes reais distintas da equação $||x - 2| - 2| = 2$ é igual a:

- a) 0
- b) 2
- c) 4
- d) 6
- e) 8

13. (EXPONENCIAL). Os gráficos das funções exponenciais reais $f(x) = 64^x$ e $g(x) = 8^x + 2$ se intersectam em um ponto de coordenadas (a, b) de um plano cartesiano. O valor

de $\left(\frac{2 \cdot b}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$ é:

- a) $64^{\sqrt[3]{3}}$
- b) $48^{\sqrt[3]{3}}$
- c) $42^{\sqrt[3]{3}}$
- d) $36^{\sqrt[3]{3}}$
- e) $24^{\sqrt[3]{3}}$

14. (NÚMEROS COMPLEXOS). Assinale a alternativa que representa a razão da área do triângulo formado pelos valores de $\sqrt[3]{i}$ pelo seu semiperímetro.

- a) $1/4$
- b) $1/2$
- c) 1
- d) 2
- e) 4

15. (POLIEDRO). Qual o volume de um octaedro platônico cuja soma das medidas das arestas é 144cm ?

- a) $1728^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- b) $1152^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- c) $576^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- d) $288^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- e) $144^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$

16. (PRISMA). Calcular o volume do prisma hexagonal regular de altura h , sabendo que suas maiores diagonais são iguais ao triplo das menores diagonais da base.

- a) $\frac{3\sqrt{3}h^3}{46}$
- b) $\frac{3\sqrt{3}h^3}{23}$
- c) $\frac{\sqrt{69}h^3}{2}$
- d) $\frac{3\sqrt{69}h^3}{2}$
- e) $\frac{5\sqrt{69}h^3}{4}$

17. (PIRÂMIDE). As arestas laterais de uma pirâmide regular de 12 faces laterais tem comprimento l . O raio do círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide mede $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Então a razão do volume desta pirâmide pelo perímetro da base vale:

- a) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}l^2}{48}$
- b) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}l^2}{48}$
- c) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{5}l^2}{48}$
- d) $\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}l^2}{48}$
- e) $\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}l^2}{48}$

18. (TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA). Simplifique a expressão considerando $\cos a > 0$:

$$\frac{\cos a}{2} \sqrt{\frac{1 + \sin^2 a}{\cos a}} \left[\sqrt{\frac{\cos^3 a}{1 + \sin^2 a}} + \sqrt{\frac{1 + \sin^2 a}{\cos a}} \right]$$

- a) $1/4$
- b) $1/2$
- c) 1
- d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- e) $\sqrt{3}$

19. (EQUAÇÃO TRIGONOMÉTRICA). Encontre o conjunto solução da equação na variável x :

$$x^2 - (\cos^2 \alpha)x - \sin^2 \alpha = 0$$

- a) $(-1, \cos^2 \alpha + 1)$
- b) $(-1, -\cos^2 \alpha - 1)$
- c) $(1, \cos^2 \alpha + 1)$
- d) $(1, -\sin^2 \alpha)$
- e) $(-1, -\sin^2 \alpha)$

20. (RAZÃO TRIGONOMÉTRICA). Simplifique a expressão:

$$y = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 0

EXPONENCIAL – FUNÇÃO – GRÁFICOS – PARÂMETROS – EQUAÇÃO–INEQUAÇÃO

FUNÇÃO – DEFINIÇÃO

Dado um número real a , tal que $a < a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a a função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} que associa a cada x real o número a^x .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2^x$$

$$x \rightarrow a^x \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

DOMÍNIO – IMAGEM – PAR ORDENADO (0,1)

Domínio: \mathbb{R}
 Imagem: \mathbb{R}_+^*
 Par ordenado: $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x$$

$$f(0) = a^0$$

para $x = 0$ tem-se $y = 1$

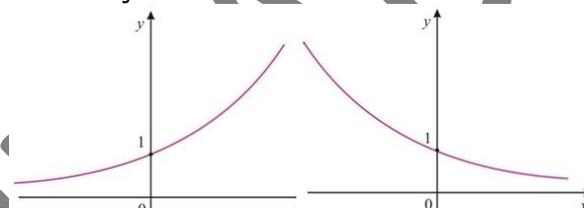
GRÁFICO

A curva representativa está toda acima do eixo x .
 Corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

Se $a > 1$ função crescente.

Se $0 < a < 1$ função decrescente.

$a > 1$ função crescente



$0 < a < 1$ função decrescente

PARAMÊTROS

$$f(x) = a^x + b$$

a → determina se é crescente ou decrescente.
 b → determina se o gráfico cortará o ponto 1 ou outro qualquer.
 x → caso x venha acompanhado de um termo independente ($x \pm c$) este alterará o ponto de encontro com a ordenada.

$$f(x) = a^x + 2 \rightarrow f(0) = a^0 + 2 \therefore f(0) = 3$$

$$f(x) = 2^{x-2} \rightarrow f(0) = 2^{0-2} \therefore f(0) = \frac{1}{4}$$

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

MÉTODO DA REDUÇÃO A UMA BASE COMUM

Pelo fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é: $a^b = a^c \leftrightarrow b = c$ ($0 < a \neq 1$)

$$a^b = a^c \leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

$$8^x = \frac{1}{32} \leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \leftrightarrow 3x = -5 \leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$(\sqrt[2]{3})^x = \sqrt[3]{81} \leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{4}{3} \leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

MÉTODO DA REDUÇÃO A UMA BASE COMUM

Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base a . ($0 < a \neq 1$).

Se b e c são números reais então:

$$2^x > 128 \leftrightarrow 2^x > 2^7$$

Como a base é maior que um, vem $x > 7$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27} \leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

Como a base está entre 0 e 1, vem $x \leq -3$

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x < \sqrt[4]{8} \leftrightarrow 2^{\frac{x}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$$

Para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \leftrightarrow b > c$.
 Para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \leftrightarrow b < c$.

Como a base é maior que um, vem $x < \frac{9}{4}$

QUESTÕES NÍVEL 1

1. Os gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ se interceptam em um ponto de abscissa 3. O valor de a é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 8 e) 9

2. Se $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ e $h(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ então $f(g(x)) - f(h(x))$ é igual a:

a) 3^{-x} b) 3^{-2x} c) 3^{2x} d) 0 e) 1

3. Construir o gráfico de $f(x) = 3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$ e $f(x) = 2 - 3^x$

4. Sabendo que $4^x - 4^{x-1} = 24$, então $x^{\frac{1}{2}}$ vale:

a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

5. O produto das soluções da equação $4^{x^2+2} - 3 \cdot 2^{x^2+3} = 160$ é:

a) -2 b) -1 c) -4 d) -3 e) 4

6. A solução real da equação $4^x - 6^x = 2 \cdot 9^x$ está no intervalo:

a) $-1 \leq x \leq 1$ b) $2 \leq x \leq 3$ c) $3 \leq x \leq 4$ d) $1 \leq x \leq 2$

7. O produto das soluções das equações:
 $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \end{cases}$ é:

a) 6 b) 12 c) -4 d) -2 e) 18

8. A solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5x+1} \geq \frac{1}{2}$ é:

a) $x \leq 0$ b) $-5 \leq x \leq 0$ c) $x \geq 0$ d) $x \leq -5$ ou $x \geq 0$

9. A lei de decomposição do radium no tempo $t \geq 0$, é dada por $M(t) = Ce^{-kt}$, onde $M(t)$ é a quantidade de radium no tempo t ; C, K são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Se a metade da quantidade $M(0)$, desaparece em 1600 metros, qual a quantidade perdida em 100 anos?

a) $(1 - 100^{-1})$ da quantidade inicial.
 b) $(1 - 2^{-6})$ da quantidade inicial.
 c) $(1 - 2^{-16})$ da quantidade inicial.
 d) $(1 - 2^{-\frac{1}{16}})$ da quantidade inicial.

GABARITO: 1.A 2.E 3. (EM SALA) 4.E 5.A 6.A 7.A 8.B 9.D

QUESTÕES NÍVEL 2

1. Fazendo $x = \ln 5$ temos que $y = e^x - e^{-x} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, a e b primos entre si, Logo $a + b$ é igual a:

a) 28 b) 29 c) 40 d) 51 e) 52

2. Seja $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 7}$. O conjunto solução da desigualdade $3^{\cos(x)} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^\beta$ no intervalo $[0, 2\pi)$, é igual a:

a) $[0, \pi/3)$ b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ c) $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$ d) $[\pi/3, 2\pi)$

3. O conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases}$ é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é

a) Ambos no primeiro quadrante.
 b) Um no quarto quadrante e o outro no eixo x.
 c) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.
 d) um no terceiro quadrante e o outro no eixo y.

e) um no segundo quadrante e o outro no eixo x.

4. A inequação $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111$, em que x é um número real,

a) não tem solução.
 b) tem apenas uma solução.
 c) tem apenas soluções positivas.
 d) tem apenas soluções negativas.
 e) tem soluções positivas e negativas.

5. Se $\frac{2^x 3^{x+2}}{3.5^{1-x}} = \frac{1}{50}$ então $x^2 - 3$ é igual a:

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

6. O conjunto solução da inequação $(0,5)^{x(x-2)} < (0,25)^{x-1,5}$ é:

a) $x < 1$ b) $x > 3$ c) $1 < x < 3$ d) $x < 1$ U $x > 3$

7. A soma das raízes da equação $3^{3x} - 13 \cdot 3^{2x} + 39 \cdot 3^x - 27 = 0$ é:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

8. A solução da equação real $\frac{(3 \cdot 9^x - 15^x)}{25^x} = 2$ é:

- a) tal que $5k = \sqrt[2]{k}$
- b) um elemento de \mathbb{R}_-
- c) um elemento de $\{-5, -3, 2, 3, 5\}$

- d) tal que $k \geq 2$
- e) tal que $0 < k < 2$

9. A solução da equação $3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3^{x^2} = 0$

- a) $\{-1; 1\}$ b) $\{-2; 2\}$ c) $\{-3; 3\}$ d) $\{0\}$ e) impossível.

GABARITO: 1.B 2.B 3.E 4.D 5.A 6.D 7.E 8.A 9.A

CURSO CIDADE

GEOMETRIA PLANA – EXERCÍCIOS

1. (EEAR – 2014) Em uma circunferência de raio $r = 6$ cm, a área de um setor circular de 30° é _____ π cm².

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

2. (EEAR – 2014) A área de um losango é 24 cm². Se uma das diagonais desse losango mede 6 cm, o lado dele, em cm, mede:

- a) 4. b) 5. c) 6. d) 7.

3. (EEAR – 2014) Sejam um hexágono regular e um triângulo equilátero, ambos de lado l . A razão entre os apótemas do hexágono e do triângulo é:

- a) 4. b) 3. c) 2. d) 1.

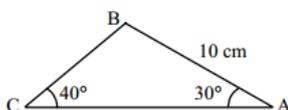
4. (EEAR – 2014) A figura é formada por um círculo de raio $R = 4$ cm e três triângulos equiláteros de lados congruentes ao raio do círculo. Os triângulos têm apenas um ponto de intersecção entre si e dois vértices na circunferência. A área hachurada, em cm², é:

- a) $6\pi - 12\sqrt{3}$
 b) $16\pi - 6\sqrt{3}$
 c) $12\pi - 8\sqrt{3}$
 d) $16\pi - 12\sqrt{3}$



5. (EEAR – 2013) Considerando $\sin 40^\circ = 0,6$. O lado BC do triângulo ABC, mede, em cm, aproximadamente:

- a) 6,11
 b) 7,11
 c) 8,33
 d) 9,33

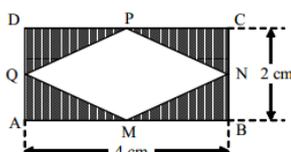


6. (EEAR – 2013) Se A é o número de diagonais de um Icoságono e B o número de diagonais de um decágono, então $A - B$ é igual a:

- a) 85 b) 135 c) 165 d) 175

7. (EEAR – 2013) Considere o retângulo ABCD, e os pontos médios de seus lados M, N, P e Q. Unindo esses pontos médios, conforme a figura, pode-se concluir que a área hachurada, em cm², é:

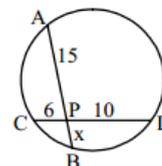
- a) 8
 b) 4
 c) $4\sqrt{2}$



d) $2\sqrt{2}$

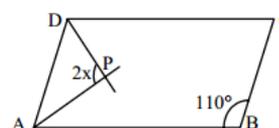
8. (EEAR – 2013) Utilizando a potência do ponto P em relação à circunferência dada, calcule-se que o valor de x é:

- a) 1
 b) 2
 c) 3
 d) 4



9. (EEAR – 2013) Seja o paralelogramo ABCD. Sabendo que AP e DP são bissetrizes dos ângulos internos \hat{A} e \hat{D} , respectivamente, o valor de x é:

- a) 55°
 b) 45°
 c) 30°
 d) 15°

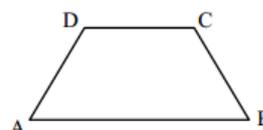


10. (EEAR – 2013) As medidas dos ângulos internos de um triângulo formam uma P.A. Assim, independente do valor da razão, pode-se afirmar que um desses ângulos mede:

- a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

11. (EEAR – 2013) Seja ABCD o trapézio isósceles da figura. A soma das medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{C} é:

- a) 90°
 b) 120°
 c) 150°
 d) 180°



12. (EEAR – 2013) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um cateto. O ângulo oposto a esse cateto mede:

- a) 20° b) 30° c) 45° d) 60°

13. (EEAR – 2013) Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se.

- a) 170° b) 220° c) 280° d) 320°

14. (EEAR – 2013) A razão r entre o apótema e o lado de um hexágono regular é igual a:

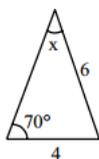
- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $2/3$ d) $1/3$

15. (EEAR – 2013) Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{1}{t}$ e $\operatorname{sen} x = u$, uma maneira de expressar o valor de $\operatorname{cos} x$ é:

a) t b) u/t c) u.t d) u + t

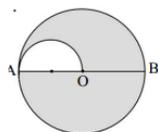
16. (EEAR – 2013) Considere as medidas indicadas na figura e que $\sin 70^\circ = 0,9$. Pela lei dos senos, obtém-se $\sin x =$ _____.

- a) 0,4
b) 0,5
c) 0,6
d) 0,7



17. (EEAR – 2013) Na figura, $AB = 8$ cm é o diâmetro do círculo de centro O e AO é o diâmetro do semicírculo. Assim, a área sombreada dessa figura é _____ π cm².

- a) 14
b) 13
c) 11
d) 10



18. (EEAR – 2011) Um polígono convexo ABCD é tal que apenas dois de seus lados são paralelos entre si e os outros dois lados são congruentes. Dessa forma, pode-se dizer que ABCD é um:

- a) losango. b) paralelogramo.
c) trapézio isósceles. d) trapézio retângulo.

19. (EEAR – 2011) Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 4 cm, e o ângulo que lhe é adjacente mede 60° . A hipotenusa desse triângulo, em cm, mede:

- a) 6. b) 7. c) 8. d) 9.

20. (EEAR – 2011) Um quadrado e um triângulo equilátero estão inscritos em uma circunferência de raio R . A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado e do triângulo é:

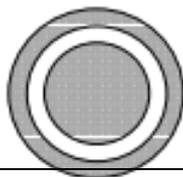
- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}$

21. (EEAR – 2011) Se $A = \operatorname{tg} 120^\circ$ e $B = \operatorname{tg} 240^\circ$, então:

- a) $B = A$. b) $B = -A$. c) $B = 2A$. d) $B = -2A$.

22. (EEAR – 2011) Considere a figura composta de três círculos concêntricos de raios medindo, respectivamente, 5 cm, 4 cm e 3 cm. A área, em cm², da parte hachurada é:

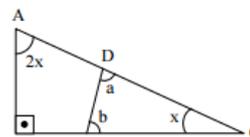
- a) 9 π .
b) 16 π .
c) 18 π .



d) 24π .

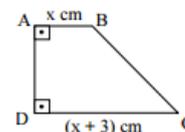
23. (EEAR – 2010) Se o triângulo CDE é semelhante ao triângulo ABC, o valor de $|a - b|$ é:

- a) 30° .
b) 45° .
c) 60° .
d) 90° .



24. (EEAR – 2010) Quando dadas em cm, as medidas dos lados do trapézio ABCD são expressas por números consecutivos. Assim, o valor de x é:

- a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.



25. (EEAR – 2010) Numa circunferência, a soma das medidas de dois arcos é 315° . Se um desses arcos mede $11\pi/12$ rad, a medida do outro é:

- a) 150° . b) 125° . c) 100° . d) 75° .

26. (EEAR – 2010) Na figura, AH é altura do triângulo ABC. Assim, o valor de x é:

- a) 20° . b) 15° . c) 10° . d) 5° .

27. (EEAR – 2010) Um setor circular, cujo arco mede 15 cm, tem 30 cm² de área. A medida do raio desse setor, em cm, é

- a) 4. b) 6. c) 8. d) 10.

28. (EEAR – 2010) No triângulo AOB, $OB = 5$ cm; então AB , em cm, é igual a:

- a) 6. b) 8. c) $5\sqrt{2}$. d) $6\sqrt{3}$.

29. (EEAR – 2009) Um triângulo de $40\sqrt{2}$ cm² de área tem dois de seus lados medindo 10 cm e 16 cm. A medida do ângulo agudo formado por esses lados é:

- a) 75° b) 60° c) 45° d) 30°

30. (EEAR - 2009) Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 8 cm, e formam um ângulo de 60° . A medida do terceiro lado desse triângulo, em cm, é:

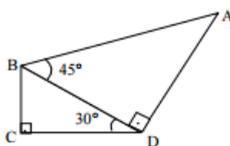
- a) $2\sqrt{13}$ b) $3\sqrt{17}$ c) $\sqrt{23}$ d) $\sqrt{29}$

31. (EEAR – 2009) “Existem somente _____ poliedros regulares.” A palavra que completa corretamente a asserção anterior é:

a) quatro. b) cinco. c) seis. d) três.

32. (EEAR – 2009) Na figura, $BC = 2$ cm. Assim, a medida de AB , em cm, é:

- a) $2\sqrt{3}$
 b) $4\sqrt{2}$
 c) $5\sqrt{2}$
 d) $3\sqrt{3}$



33. (EEAR – 2009) O perímetro de um losango é 20 cm. Se sua diagonal maior tem o dobro da medida da menor, então sua área, em cm^2 , é:

a) 35. b) 30. c) 25. d) 20.

34. (EEAR – 2009) No logotipo, OA são raios da menor das três $OCeOB$, circunferências concêntricas. A região acinzentada desse logotipo é composta de:



- a) dois setores circulares, duas coroas circulares e dois segmentos circulares.
 b) um setor circular, uma coroa circular e dois segmentos circulares.
 c) um setor circular, duas coroas circulares e um segmento circular.
 d) dois setores circulares, uma coroa circular e um segmento circular.

35. (EEAR – 2009) A área de um setor circular de 30° e raio 6 cm, em cm^2 , é, aproximadamente,

a) 7,48. b) 7,65. c) 8,34. d) 9,42.

36. (EEAR – 2009) Sejam uma circunferência de centro O e um ponto A exterior a ela. Considere AT um segmento tangente à circunferência, em T . Se o raio da circunferência mede 4 cm e $AT = 8\sqrt{2}$ cm, então a medida de AO , em cm, é:

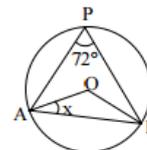
a) 10. b) 12. c) 13. d) 15.

37. (EEAR – 2009) São negativas, no 4º quadrante, as funções:

- a) seno, cosseno e tangente.
 b) seno, cosseno e cotangente.
 c) cosseno, tangente e secante.
 d) seno, tangente e cossecante.

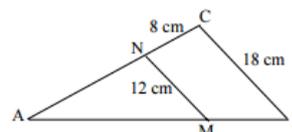
38. (EEAR – 2009) Na figura, O é o centro da circunferência. O valor de x é:

- a) 18° .
 b) 20° .
 c) 22° .
 d) 24° .



39. (EEAR – 2009) Na figura, $MN \parallel BC$. Se $AB = 30$ cm, então MB mede, em cm,

- a) 5.
 b) 10.
 c) 15.
 d) 20.



40. (EEAR – 2009) Considere as igualdades:

- I- $\text{tg } 10^\circ = \text{tg } (-10^\circ)$
 II- $\text{tg } 770^\circ = -\text{tg } 50^\circ$
 III- $\text{sen } 250^\circ = \text{sen } 20^\circ$
 IV- $\text{sen } 460^\circ = \text{sen } 100^\circ$

O número de igualdades verdadeiras é:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4.

41. (EEAR – 2009) Os ângulos da base maior de um trapézio são complementares, e a diferença entre suas medidas é 18° . O maior ângulo desse trapézio mede:

a) 100° . b) 126° . c) 144° . d) 152° .

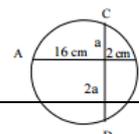
42. (EEAR – 2008) Em um polígono regular, a medida de um ângulo interno é o triplo da medida de um ângulo externo. Esse polígono é o:

a) hexágono. b) octógono. c) eneágono. d) decágono.

43. (EEAR – 2008) Se $S = 6$ cm^2 é a área de um quadrado de lado l cm, o valor de l é:

a) 3. b) 6. c) 9. d) 12.

44. (EEAR – 2008) Seja a circunferência e duas suas cordas, AB e CD . A medida de CD , em cm, é:



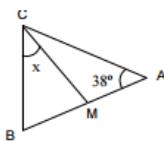
- a) 10.
b) 12.
c) 14.
d) 16.

45. (EEAR – 2008) O número de poliedros regulares que têm faces triangulares é:

- a) 1. b) 2. c) 3. d) 4.

46. (EEAR – 2008) Na figura, $AB = AC$ e $BC = CM$. O valor de x é:

- a) 50° .
b) 45° .
c) 42° .
d) 38°



47. (EEAR – 2008) Em um triângulo ABC, retângulo em A, a hipotenusa mede 5 dm e $\text{sen } \hat{B} = \frac{1}{2} \text{sen } \hat{C}$. Nessas condições, o maior cateto mede, em dm,

- a) 3. b) 4. c) $\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{5}$

48. (EEAR – 2008) Em um trapézio, a base média mede 6,5 cm e a base maior, 8 cm. A base menor desse trapézio mede, em cm,

- a) 4. b) 5. c) 6. d) 7.

49. (EEAR – 2008) No triângulo, cujos lados medem 5cm, 10 cm e 6 cm, o maior ângulo tem cosseno igual a:

- a) $7/10$ b) $9/20$ c) $-13/20$ d) $-8/20$

50. (EEAR – 2008) O triângulo cujos lados medem 6 cm, 7 cm e 10 cm é classificado como:

- a) equilátero e retângulo.
b) escaleno e acutângulo.
c) isósceles e acutângulo.
d) escaleno e obtusângulo.

51. (EEAR – 2008) Um prisma reto é regular quando suas bases:

- a) são paralelas.
b) têm a mesma área.
c) têm arestas congruentes.
d) são polígonos regulares.

52. (EEAR – 2008) Num triângulo ABC, são dados $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ e $AC = 6$ cm. Então $BC =$ _____ cm.

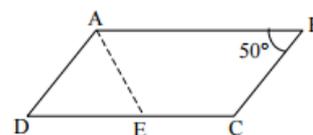
- a) $4\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

53. (EEAR – 2008) Dada uma circunferência de diâmetro a , o comprimento de um arco, cujo ângulo central correspondente é 30° , é:

- a) $\frac{\pi a}{2}$ b) $\frac{\pi a}{4}$ c) $\frac{\pi a}{10}$ d) $\frac{\pi a}{12}$

54. (EEAR – 2008) No paralelogramo ABCD, $AD = DE$. A medida de $\hat{D}EA$ é:

- a) 50° .
b) 55° .
c) 60° .
d) 65° .



55. (EEAR – 2008) O lado de um eneágono regular mede 2,5 cm. O perímetro desse polígono, em cm, é:

- a) 15. b) 20. c) 22,5. d) 27,5.

56. (EEAR – 2007) A casa de João tem um quintal retangular de 30 m por 20 m. Se ele usar 30% da área do quintal para fazer uma horta também retangular, de 10 m de comprimento, então a largura desta horta, em m, será:

- a) 18. b) 15. c) 12. d) 11.

57. (EEAR – 2007) Dois polígonos convexos têm o número de lados expresso por n e por $n + 3$. Sabendo que um polígono tem 18 diagonais a mais que o outro, o valor de n é:

- a) 10. b) 8. c) 6. d) 4.

58. (EEAR – 2007) Dois triângulos são semelhantes, e uma altura do primeiro é igual aos $2/5$ de sua homóloga no segundo. Se o perímetro do primeiro triângulo é 140 cm, então o perímetro do segundo, em cm, é

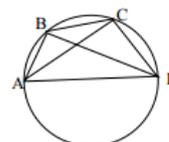
- a) 250. b) 280. c) 300. d) 350.

59. (EEAR – 2007) Um trapézio isósceles tem bases medindo 12 cm e 20 cm. Se Rascunho a medida de um de seus lados oblíquos é 5 cm, então sua área, em cm^2 , é:

- a) 25. b) 39. c) 48. d) 54.

60. (EEAR – 2007) Na figura, AD é o diâmetro da circunferência, \hat{CAD} mede 35° e \hat{BDC} , 25° . A medida de \hat{ACB} é:

- a) 30° .
b) 35° .
c) 40° .
d) 45° .



GABARITO: 1.A 2.B 3.B 4.D 5.C 6.B 7.B 8.D 9.B 10.C 11.D 12.B 13.D 14.A 15.C 16.C 17.A 18.C 19.C 20.A 21.B 22.C 23.A 24.C 25.A 26.C 27.A 28.C 29.C 30.A 31.B 32.B 33.D 34.B 35.D 36.B 37.D 38.A 39.B 40.A 41.C 42.B 43.B 44.B 45.C 46.D 47.D 48.B 49.C 50.D 51.D 52.B 53.D 54.D 55.C 56.A 57.C 58.D 59.C 60.A

LOGARITMO PROPRIEDADES

Definição	$a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$, sendo $b > 0, a > 0$ e $a \neq 1$
Conseqüências Diretas da Definição	$\log_a 1 = 0$ $a^{\log_a b} = b$ $\log_a a^m = m$ $\log_a a = 1$ $\log_a b = \log_a c \rightarrow b = c$
Produto	$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
Quociente	$\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$
Potência no Logaritmando	$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$
Potência na Base	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$
Raiz no Logaritmando	$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$
Raiz na Base	$\log_{\sqrt[n]{a}} b = \log_{a^{\frac{1}{n}}} b = n \log_a b$
Mudança de Base	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
Mudança de Base Direta	$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$
Troca da Base com o Logaritmando	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
Cologaritmo	$\text{colog}_a b = -\log_a b$
Antilogaritmo	$\log_a b = x \leftrightarrow b = \text{antilog}_a x, \text{logo } x = a^b$

NÍVEL 1

1. Resolva:

$$\text{antilog}_2 5 - \text{colog}_5 125 + \log_3 7 \cdot \log_7 9 + \log_{2\sqrt{7}} 7 - \log_2 \sqrt[3]{64} + \log_{2^3} 64^{\frac{1}{2}} - \log_2 \frac{16}{5} - \log_2 80$$

a) 0 b) 15 c) 30 d) 45 e) 60

2. Suponha que $\ln a = 2$ e $\ln b = 3$. Determine:

$$\frac{x \cdot y \cdot z}{w} \quad \ln b^2 = x \mid (\ln b)^2 = y \mid \ln \left(\frac{a^2}{b^4} \right) = z \mid \ln \frac{1}{a} = w$$

a) 256 b) 246 c) 236 d) 226 e) 216

3. Calcule o valor de $\log_2 16 - \log_4 32$.

a) 3/2 b) 5/2 c) 7/2 d) 1 e) 0

4. Calcule o valor de $\log_{\frac{1}{3}} (\log_5 125)$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) -1

5. Se $\sqrt{9^{p+1}} = 3^{\sqrt{2}}$ e $\log_2 (q-1) = \frac{1}{2}$, calcule $p^2 +$

$p \cdot q + q^2$.
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

6. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_{10}(x^2 - 6x + 10)$. Marque a opção que expressa o valor de $f(6) - f(-2)$.

a) 26 b) $\log_{10} 26$ c) 1 d) $\log_{10} \frac{5}{13}$ e) $1 + \log_{10} 26$

7. Se $\log_7 875 = a$, então $\log_{35} 245$ é igual a:

a) $\frac{a+2}{a+7}$ b) $\frac{a+2}{a+5}$ c) $\frac{a+5}{a+2}$ d) $\frac{a+7}{a+2}$ e) $\frac{a+5}{a+7}$

8. Se $\log 8 = a$, então $\log 5$ vale:

a) $\frac{a}{3}$ b) $5a - 1$ c) $\frac{2a}{3}$ d) $1 + \frac{a}{3}$ e) $1 - \frac{a}{3}$

9. Resolva em \mathbb{R} a seguinte equação.

$$(\log_2 x)^2 - 15 = 2 \log_2 x$$

a) $S = \left\{ \frac{1}{8}; 2^5 \right\}$ b) $S = \{3; 16\}$ c) $S = \{8; 32\}$
d) $S = \{16; 64\}$ e) $S = \left\{ \frac{1}{8}; 16 \right\}$

10. Resolva em \mathbb{R} a seguinte equação

$$\log_2 (x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x-2) = \log_2 x$$

a) $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{7}}{2} \right\}$ b) $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$ c) $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \right\}$
d) $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{2}}{3} \right\}$ e) $S = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$

NÍVEL 2

1. Dado que $(\log_2 3) \cdot (\log_3 4) \cdot (\log_4 5) \dots (\log_{511} 512)$ é um inteiro, determine-o.

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

2. Sendo dado

$$\ln(2^2 \sqrt[4]{3} \sqrt[6]{4} \sqrt[8]{5} \dots \sqrt[2n]{2n}) = a_n \text{ e } \ln(\sqrt[2]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{4} \dots \sqrt[2n]{2n}) = b_n$$

então, $\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln 2n}{2n}$ é igual a:

a) $a_n - 2b_n$ b) $2a_n - b_n$ c) $a_n - b_n$ d) $b_n - a_n$
e) $a_n + b_n$

3. Sejam x, y e z números reais maiores que 1 e w é um número real positivo. Se $\log_x w = 24, \log_y w = 40$ e $\log_{xyz} w = 12$. Determine $\log_z w$.

a) 45 b) 60 c) 75 d) 90 e) 120

4. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$. Se $b = \log_2 a$, então o valor de $\log_4 a^3 + \log_2 4a + \log_2 \frac{a}{a+1} + (\log_8 a)^2 -$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{a^2-1}{a-1}$ é:

a) $2b - 3$ b) $\frac{65}{18}b + 2$ c) $\frac{2b^2-3b+1}{2}$ d) $\frac{2b^2+63b+36}{18}$ e) $\frac{b^2+9b+7}{9}$

5. Sabendo que $\log_{B-L}(\sqrt{B} + \sqrt{L}) = L$, determine quanto vale $\log_{B-L}(\sqrt{B} - \sqrt{L})$, em função de L .

a) 1 b) $L+1$ c) $L-1$ d) $1-L$ e) não rola.

6. O valor de $y \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$, é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $\frac{1}{8}$ e) 7

7. Se x é um número real positivo, com $x \neq 1$, e $x \neq \frac{1}{3}$, satisfazendo $\frac{2+\log_3 x}{\log_{x+2} x} - \frac{\log_x(x+2)}{1+\log_3 x} = \log_x(x+2)$ então x pertence ao intervalo I , onde:

a) $I = (0, \frac{1}{9})$ b) $(0, \frac{1}{3})$ c) $(\frac{1}{2}, 1)$ d) $(1, \frac{3}{2})$ e) $(\frac{3}{2}, 2)$

8. A solução da inequação logarítmica $\log_{\frac{1}{2}}(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -3$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

9. Resolva o sistema: $\begin{cases} 5(\log_x y + \log_y x) = 26 \\ xy = 64 \end{cases}$

a) $\{(32,2)\}$ b) $\{(16,4)\}$ c) $\{(2,16), (16,2)\}$
d) $\{(4,16), (16,4)\}$ e) $\{(2,32), (32,2)\}$

10. Resolva o sistema: $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = ax \end{cases}$, onde $a \neq 1$ e $a > 0$.

a) $x = a^{\frac{1}{a-1}}$ e $y = a^{\frac{a}{a-1}}$ b) $x = a^{\frac{a}{a-1}}$ e $y = a^{\frac{1}{a-1}}$ c) $x = a^{\frac{1}{a+1}}$ e $y = a^{\frac{1}{a-1}}$ d) $x = a^{\frac{1}{a-1}}$ e $y = a^{\frac{a}{a+1}}$ e) $x = a^{\frac{1}{a-1}}$ e $y = a^{\frac{a}{2a-1}}$

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

P.A.		P.G	
RAZÃO	$r = a_n - a_{n-1}$	RAZÃO	$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$
TERMO GERAL	$a_n = a_1 + (n - 1).r$ OU $a_n = a_k + (n - k).r$	TERMO GERAL	$a_n = a_1 q^{n-1}$ OU $a_n = a_k q^{n-k}$
SOMA DOS TERMOS	$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$	SOMA DOS TERMOS	$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$
RELAÇÃO DE 3 TERMOS	$(b - r, b, b + r)$ $(b, b + r, b + 2r)$ $b = \frac{a + c}{2}$	SOMA INFINITA	$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$
RELAÇÃO DE 4 TERMOS	PARA $[y = \frac{r}{2}]$ $(x, x+r, x+2r, x+3r)$ $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$	3 TERMOS	$(\frac{b}{q}, b, b.q)$ $(b, b.q, b.q^2)$ $b^2 = a.c$
RELAÇÃO DE 5 TERMOS	$(x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r)$ $(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)$	4 TERMOS	$(b, b.q, b.q^2, b.q^3)$ $(\frac{b}{q^3}, \frac{b}{q}, b, b.q, b.q^3)$
INTERPOLAÇÃO	$n_i = n - 2$	5 TERMOS	$(\frac{b}{q^2}, \frac{b}{q}, b, b.q, b.q^2)$
		PRODUTO DOS TERMOS	$P_n = a_1^n . q^{\frac{n.(n-1)}{2}}$

QUESTÕES NÍVEL 1

1. A razão da P.G. (a, a + 3, 5a - 3, 8a) é:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) NRA

2. Quantos termos tem a PA (5, 10, ..., 785)?

- A) 157
- B) 205
- C) 138
- D) 208
- E) 228

3. Um atleta corre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67 500 metros, o número de metros percorridos no 3º dia foi

- A) 1.000
- B) 2.000
- C) 1.500
- D) 2.500
- E) 2.600

4. Uma certa espécie de bactéria divide-se em duas a cada 20 minutos, e uma outra, a cada 30 minutos. Determine, após 3 horas, a razão entre o número de bactérias da 1ª e o da 2ª espécies, originadas por uma bactéria de cada espécie.

- A) 8
- B) 4
- C) 2
- D) 0
- E) 12

5. O valor de x, de modo que os números 3x - 1, x + 3 e x + 9 estejam, nessa ordem, em PA é:

- A) 1
- B) 0
- C) -1
- D) -2
- E) 2

6. A sequência (m, 1, n) é uma progressão aritmética e a sequência (m, n, - 8) é uma progressão geométrica. O valor de n é:

- A) - 2
- B) - 1
- C) 3
- D) 4
- E) 8

7. Um pintor consegue pintar uma área de 5 m² no primeiro dia de serviço e, a cada dia, ele pinta 2 m² a mais do que pintou no dia anterior. Em que dia ele terá conseguido pintar 31 m²?

- A) 11º
- B) 12º

- C) 13°
- D) 14°
- E) 15°

8. O valor de x , de modo que a seqüência $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ seja uma progressão geométrica é:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

9. Dados $a_{196} = 12.374.960$ e $r = 1200$, calcule o nonagésimo sexto termo:

- a) 12.140.960
- b) 12.257.360
- c) 12.254.960
- d) 12.256.160
- e) 12.258.560

10. (UCS) O valor de x para que a seqüência $(2x, x+1, 3x)$ seja uma PA é:

- a) $1/2$
- b) $2/3$
- c) 3
- d) $-1/2$
- e) 2

11. O único valor de x que verifica a equação $(x-2)+(x-5)+(x-8)+\dots+(x-47)=424$ é

- a) 51
- b) 41
- c) 31
- d) 61
- e) 71

12. (PUC) A quantidade de meios aritméticos que se devem interpolar entre $-a$ e $20a$, a fim de se obter uma PA de razão 7, é

- a) $3a+1$
- b) $3a-1$
- c) $3a$
- d) $3a+3$
- e) $3a+2$

13. As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão em progressão geométrica, nessa ordem. A área do quadrado será:

- a) 256
- b) 64
- c) 16
- d) 243
- e) 729

14. Numa PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. O primeiro termo dessa PG é

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

15. (FIA) Numa progressão geométrica, tem-se $a_3 = 40$ e $a_6 = -320$. A soma dos oito primeiros termos é:

- a) -1700
- b) -850
- c) 850
- d) 1700
- e) 750

16. Uma P.G. tem primeiro termo igual a 1 e a razão vale $\sqrt{2}$. Se o produto desses termos é 2^{39} , o número de termos é:

- a) 12
- b) 13
- c) 14
- d) 15
- e) 16

17. Atribuindo-se um valor a cada letra da sigla ESPCEX, de modo que as letras E, S, P, C e X formem nessa ordem uma progressão geométrica e que $E.P.C + E.S.X = 8$, pode-se afirmar que o produto de E.S.P.C.E.X vale? (DICA... parta do princípio usado na questão 5).

- a) 10
- b) 26
- c) 20
- d) 24
- e) 16

18. Os números a , b e c determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r ($r \neq 0$). Na ordem b , a , c determinam uma progressão geométrica (PG). Então a razão da PG é: (DICA... parta do princípio usado na questão 5).

- a) -3
- b) -2
- c) -1
- d) 1
- e) 2

GABARITO: 1.B 2.A 3.B 4.A 5.C 6.D 7.D 8.A 9.C 10.B 11.A 12.B 13.A 14.C 15.B 16.B 17.E 18.B

QUESTÕES NÍVEL 2

1. Em um triângulo retângulo de perímetro $27x - 9y$, os lados estão em progressão aritmética. Determine a medida da razão dessa P.A.

- a) $\frac{9x+3y}{2}$
 b) $\frac{9x-3y}{2}$
 c) $\frac{9x-6y}{2}$
 d) $\frac{9x+6y}{2}$
 e) $\frac{-9x-3y}{2}$

2. Numa P.G. o segundo termo é igual a: $\frac{5a}{2}$ e o quarto termo é igual a: $\frac{2(a^2+1)^2}{5a}$ com $a > 0$. Calcule o conjunto de valores de a para os quais a P.G. é decrescente.

- a) $\{a \in \mathbb{R} \mid 1 < a < 4\}$
 b) $\{a \in \mathbb{N} \mid 1/2 < a < 2\}$
 c) $\{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a \leq 4\}$
 d) $\{a \in \mathbb{R} \mid 1 < a < 2\}$
 e) $\{a \in \mathbb{R} \mid 1/2 < a < 2\}$

3. As medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Se B é a medida do maior cateto, L a do menor e L° a da hipotenusa a área do triângulo é:

- a) $\frac{4b^2}{3}$
 b) $\frac{3b^2}{2}$
 c) $\frac{5b^2}{3}$
 d) $\frac{5b^2}{2}$
 e) $\frac{3b^2}{8}$

4. Em uma progressão aritmética de quatro termos, a soma dos dois primeiros é zero e a soma dos dois últimos é (BLL). Qual é a razão da P.A.?

- a) $\frac{(BLL)}{3}$
 b) $\frac{(BLL)}{5}$
 c) $\frac{(BLL)}{7}$
 d) $\frac{(BLL)}{8}$
 e) $\frac{(BLL)}{4}$

5. Numa progressão geométrica de termos positivos, cada termo é igual à soma dos dois termos seguintes. Então a soma dos infinitos termos dessa progressão é:

- a) $\frac{-a_1 \cdot (1 + \sqrt{5})}{2}$ b) $\frac{a_1 \cdot (1 + \sqrt{5})}{2}$ c) $\frac{-a_1 \cdot (3 + \sqrt{5})}{2}$ d) $\frac{a_1 \cdot (3 + \sqrt{5})}{2}$

6. Uma P.A. e uma P.G. têm, ambas, o 1º termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são

positivos e coincidentes. Sabe-se ainda que o 2º termo da P.A. excede o 2º termo da P.G. em dois. Então a soma do 7º termo ao 10º termo dessa P.G. é igual a:

- a) 60 b) 1792 c) 3840 d) 2560 e) 4240

7. Sabendo que a soma dos 6 primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a -15 podemos afirmar que a transposta da matriz $\begin{bmatrix} 1 - a_2 - a_5 & -a_2 - a_5 \\ 1 + a_3 + a_4 & a_3 + a_4 \end{bmatrix}$, tem como determinante o valor:

- a) 0 b) -15 c) -5 d) -8 e) -10

8. Calcule a soma da série: $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots$.

- a) $3/4$
 b) $3/5$
 c) $3/7$
 d) 3
 e) $5/3$

9. Considere as expressões:

$$A = 26^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + \dots + 5^2 - 3^2$$

$$B = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \dots$$

O valor de A/B é um número compreendido entre:

- a) 117 e 120
 b) 114 e 117
 c) 111 e 114
 d) 108 e 111
 e) 105 e 108

10. Dada a função:

$$\begin{cases} 2x - 6, & \text{se } 3 < x \leq 99 \\ 4x - 408, & \text{se } 102 < x \leq 189 \end{cases}$$

Determine o valor de $\frac{[f(3)+f(102)]^2}{2}$ da soma: $f(3) + f(6) + f(9) + \dots + f(189) = 8392$

- a) 0
 b) 1
 c) 2
 d) 3
 e) 4

11. O lado de um triângulo equilátero é dado pelo valor da expressão $x^2 + y^2$, onde $x - y = 1$ e $x \cdot y = 2$. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um novo triângulo equilátero, repetindo então este processo indefinidas vezes formaremos infinitos novos triângulos equiláteros. A soma dos semiperímetros dos

triângulos formados pela união dos pontos médios é:

- a) 30
- b) 15
- c) 5

- d) 7,5
- e) 10

GABARITO: 1.B 2.E 3.E 4.D 5.D 6.C 7.E 8.A 9.B
10.B 11.D

CURSO CIDADE

PROGRESSÕES

1. A razão da P.G. ($a, a + 3, 5a - 3, 8a$) é:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) NRA

2. Quantos termos tem a PA ($5, 10, \dots, 785$)?

- A) 157
- B) 205
- C) 138
- D) 208
- E) 228

3. Um atleta corre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67 500 metros, o número de metros percorridos no 3º dia foi

- A) 1.000
- B) 2.000
- C) 1.500
- D) 2.500
- E) 2.600

4. Uma certa espécie de bactéria divide-se em duas a cada 20 minutos, e uma outra, a cada 30 minutos. Determine, após 3 horas, a razão entre o número de bactérias da 1ª e o da 2ª espécies, originadas por uma bactéria de cada espécie.

- A) 8
- B) 4
- C) 2
- D) 0
- E) 12

5. O valor de x , de modo que os números $3x - 1, x + 3$ e $x + 9$ estejam, nessa ordem, em PA é:

- A) 1
- B) 0
- C) -1
- D) -2
- E) 2

6. A seqüência ($m, 1, n$) é uma progressão aritmética e a seqüência ($m, n, -8$) é uma progressão geométrica. O valor de n é:

- A) -2
- B) -1
- C) 3
- D) 4
- E) 8

7. Um pintor consegue pintar uma área de 5 m^2 no primeiro dia de serviço e, a cada dia, ele pinta 2 m^2 a mais do que pintou no dia anterior. Em que dia ele terá conseguido pintar 31 m^2 ?

- A) 11º
- B) 12º
- C) 13º
- D) 14º
- E) 15º

8. O valor de x , de modo que a seqüência ($3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1}$) seja uma progressão geométrica é:

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

9. Dados $a_{196} = 12.374.960$ e $r = 1200$, calcule o nonagésimo sexto termo:

- a) 12.140.960
- b) 12.257.360
- c) 12.254.960
- d) 12.256.160
- e) 12.258.560

10. (UCS) O valor de x para que a seqüência ($2x, x+1, 3x$) seja uma PA é:

- a) $1/2$
- b) $2/3$
- c) 3
- d) $-1/2$
- e) 2

11. O único valor de x que verifica a equação $(x-2)+(x-5)+(x-8)+\dots+(x-47)=424$ é:

- a) 51
- b) 41
- c) 31
- d) 61
- e) 71

12. (PUC) A quantidade de meios aritméticos que se devem interpolar entre $-a$ e $20a$, a fim de se obter uma PA de razão 7, é:

- a) $3a+1$
- b) $3a-1$
- c) 3^a
- d) $3a+3$
- e) $3a+2$

13. As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão em progressão geométrica, nessa ordem. A área do quadrado será:

- a) 256
- b) 64
- c) 16
- d) 243
- e) 729

14. Numa PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. O primeiro termo dessa PG é

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

15. (FIA) Numa progressão geométrica, tem-se $a_3 = 40$ e $a_6 = -320$. A soma dos oito primeiros termos é:



CURSO PREPARATÓRIO CIDADE



EsPCEX – 2017 – PROF: LUKE

- a) -1700
- b) -850
- c) 850

- d) 1700
- e) 750

GABARITO: 1.B 2.A 3.B 4.A 5.C 6.D 7.D 8.A 9.C 10.B 11.A 12.B 13.A 14.C 15.B

MATEMÁTICA (GABRIEL)

LISTA 02 PORCENTAGEM

Q.01) (ESPCEX 2001) Um restaurante cobra 10% do valor consumido como taxa de serviço. Um cliente pagou R\$ 50,60 e outro R\$ 132,00. A soma dos valores das despesas dos dois clientes, sem a taxa de serviço, foi de

- a) R\$ 164,00
- b) R\$ 164,34
- c) R\$ 166,00
- d) R\$ 168,00
- e) R\$ 168,50

gab. C

Q.02) (ESPCEX) Um painel retangular de propaganda, de dimensões 4m por 5m, deve ser pintado em 30% de sua área. Da área pintada, 12% deve ser na cor azul. Sabendo que cada tubo de tinta possibilita pintar 1200cm^2 , determine quantos tubos de tinta azul serão necessários.

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

gab. D

Q.03) (PUC RJ 2010) Em uma turma de Ciências da Computação formada de 40 rapazes e 40 moças, tem-se a seguinte estatística: 20% dos rapazes são fumantes; 30% das moças são fumantes. Logo, a porcentagem dos que não fumam na turma é de:

- a) 25%
- b) 50%
- c) 60%
- d) 65%
- e) 75%

gab. E

Q.04) (PUC RK 2009) Em um viveiro há várias araras.

- N 60% das araras são azuis,
- N 40% das araras são vermelhas,
- N 40% das araras azuis têm bico branco,

- N 30% das araras vermelhas têm bico branco.

Que porcentagem das araras do viveiro tem bico branco?

- a) 10%
- b) 12%
- c) 24%
- d) 36%
- e) 40%

gab. D

Q.05) (PUC RJ 2009) João recebeu um aumento de 10% e com isso seu salário chegou a R\$1.320,00. O salário de João antes do aumento era igual a?

- a) R\$1.188,00
- b) R\$1.200,00
- c) R\$1.220,00
- d) R\$1.310,00
- e) R\$1.452,00

gab. B

Q.06) (PUC RJ 2007) Que número deve ser somado ao numerador e ao denominador da fração $\frac{2}{3}$ para que ela tenha um aumento de 25%?

- a) 3
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) 1
- e) $\frac{1}{2}$

gab. A

Q.07) (PUC RJ 2007) 30% de 30% são:

- a) 3000%
- b) 300%
- c) 900%
- d) 9%
- e) 0,3%

gab. D

Q.08) (UDESC 2010) Seu Antônio, um sujeito organizado e atento a promoções, decidiu pesquisar os preços de passagens aéreas, após ler a seguinte manchete:

“As medidas tomadas para aumentar a concorrência no setor aéreo já tiveram efeito. Os preços das passagens nacionais e internacionais baixaram. Esses preços podem ficar ainda menores se o consumidor se organizar.” (O Globo, 12/05/2009)

Seu Antônio descobriu que certa empresa aérea estava operando o trajeto Florianópolis – São Paulo com um desconto de 40% durante o mês de novembro, e que esta empresa oferecia ainda um desconto adicional de 10%, às segundas-feiras. Ele então decidiu viajar em uma segunda-feira de novembro para economizar R\$ 138,00, aproveitando esta promoção. O valor desta passagem, em reais, cobrado por esta empresa antes da promoção, era igual a:

- a) 255,55
- b) 215,62
- c) 276,00
- d) 313,63
- e) 300,00

gab. E

Q.09) (ESPCEX 2003) Se escolhermos, ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores inteiros positivos do número 360, a probabilidade de esse elemento ser um número múltiplo de 12 é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{3}{5}$
- d) $\frac{2}{3}$
- e) $\frac{3}{8}$

gab. B

Q.10) (ESPCEX 2001) Uma progressão aritmética tem razão $r = -10$, sabendo que seu 100º (centésimo) termo é zero, pode-se afirmar que seu 14º (décimo quarto) termo vale:

- a) 120
- b) 990
- c) 870
- d) 130
- e) 860

gab. E

GABARITO

1. C

2. D

3. E

4. D

5. B

6. A

7. D

8. E

9. B

10. E

REVISÃO MATEMÁTICA (Gabriel)

Lista de exercícios extra

Lista 03 – Produtos Notáveis e Fatoração/Equações e problemas

Assunto 2 – Produtos Notáveis e Fatoração

q.01) Efetue os quadrados dos binômios

a) $(3x + 1)^2$

b) $(4x^2 - 9y)^2$

c) $(2x^3 - 3y^2)^2$

d) $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2$

e) $(2m + 5)^2$

f) $(11a^2b^3 + 7)^2$

g) $(-t + 8)^2$

h) $\left(\frac{3x}{y} + \frac{2y}{x}\right)^2$

i) $(5ab - 7)^2$

j) $(x^{2m} - x^{3m})^2$

k) $(-mp - 2)^2$

l) $\left(3m^5 + \frac{2}{3m^3}\right)^2$

q.02) Efetue os produtos de um binômio por seu conjugado

a) $(2x + 1)(2x - 1)$

b) $(6ab + 1)(2 - 5x^3)$

c) $\left(m^2 + \frac{2}{5}\right)\left(m^2 - \frac{2}{5}\right)$

d) $\left(\frac{x^2y^3}{z} + \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x^2y^3}{z} - \frac{5}{6}\right)$

e) $(3x^2 - 4)(3x^2 + 4)$

f) $(m^2 + p^3)(m^2 - p^3)$

g) $(x^m - x^{4m})(x^m + x^{4m})$

$$h) \left(\frac{2p}{3} + \frac{3m}{4}\right) \left(\frac{2p}{3} - \frac{3m}{4}\right)$$

q.03) Efetue os produtos de Stevin

$$a) (2x + 3)(2x + 5)$$

$$b) (4a^2b + 3)(4a^2b - 9)$$

$$c) (5x^3 + 13)(5x^3 - 11)$$

$$d) \left(m^2 + \frac{2a}{5}\right) \left(m^2 - \frac{a}{3}\right)$$

$$e) (a + b + 2)(a + b - 3)$$

$$f) (3x^2 - 6)(3x^2 - 7)$$

$$g) (m^2p + 4a^3)(m^2p - 7a^3)$$

$$h) (x^{3m} - 4)(x^{3m} + 7)$$

$$i) \left(\frac{xy^2}{5} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{xy^2}{5} - \frac{2}{6}\right)$$

q.04) Efetue os cubos dos binômios

$$a) (3x + 2)^3$$

$$b) (4x^2 - 3y)^3$$

$$c) (m + 5)^3$$

$$d) (a^2b^3 + 2)^3$$

$$e) (5ab - 1)^3$$

$$f) (m^{2m} - p^{3m})^3$$

q.05) Efetue os quadrados dos trinômios

$$a) (x + 2y + z)^2$$

$$b) (m + p - 2q)^2$$

$$c) (m + 5)^2$$

$$d) (a^2b^3 + 2)^3$$

$$e) (5ab - 1)^3$$

$$f) (m^{2m} - p^{3m})^3$$

q.06) Efetue

$$a) (x + 2y)^2 + (2x - y)^2$$

$$b) 2(m - 2)^2 - 3(m + 1)(m - 4)$$

$$c) (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$d) (2a - 3b)^2 - (a - 5b)(a + 2b)$$

e) $(m - 5y + 2)^2 - (m + 5y - 2)^2$

f) $(3m^2 - 2p)^3 - (2m^2 - 3p)^3 = 2$

q.07) Quanto devemos adicionar ao quadrado de $x+2$ para encontrarmos o cubo de $x-3$?

q.08) Determine a quarta parte da diferença entre os quadrados dos polinômios x^2+2x-1 e x^2-2x+1

q.09) Determine a diferença entre o cubo e o quadrado do polinômio $2x^2-3$

q.10) Se $A=5x^2-2$, determine o valor de A^2-3A+1

Assunto 12 – Equações e Problemas

q.11) Resolvendo um problema que conduzia a uma equação do segundo grau, um aluno errou ao copiar o valor do termo independente dessa equação e obteve raízes 7 e 1. Outro aluno errou ao copiar o valor do coeficiente de X da mesma equação e obteve raízes 3 e 4. Sabendo que os alunos se erraram nisso, as raízes corretas da equação são:

a) 3 e 6

b) 2 e 6

c) 2 e 4

d) 3 e 5

e) 4 e 5

q.12) Quais são as soluções da equação $3x^2 - 12 = 0$?

q.13) A soma de um número com o seu quadrado é 90. Calcule esse número.

q.14) Determine dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 143

q.15) A diferença entre o dobro do quadrado de um número positivo e o triplo desse número é 77. Calcule o número

q.16) Resolva: $x^2 + x(x - 6) = 0$

q.17) O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse número por 7 menos 3. Qual é esse número?

q.18) Determine quais os valores de k para que a equação $2x^2 + 4x + 5k = 0$ tenha raízes reais e distintas.

q.19) Calcule o valor de p na equação $x^2 - (p + 5)x + 36 = 0$, de modo que as raízes reais sejam iguais.

q.20) Resolva a seguinte equação do 2º grau $x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0$

GABARITO – Lista 03

q.01)

a) $9x^2 + 6x + 1$

b) $16x^4 - 72x^2y + 81y^2$

c) $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^2$

d) $\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}$

e) $4m^2 + 20m + 25$

f) $121a^4b^6 + 154a^2b^3 + 49$

g) $t^2 - 16t + 64$

h) $\frac{9x^2}{y^2} + 12 + \frac{4y^2}{x^2}$

i) $25a^2b^2 - 70ab + 49$

j) $x^{6m} - 2x^{5m} + x^{4m}$

k) $m^2p^2 + 4mp + 4$

l) $9m^{10} + 4m^2 + \frac{4}{9m^6}$

q.02)

a) $4x^2 - 1$

b) $36a^2b^2 - 1$

c) $4 - 25x^6$

d) $m^4 - \frac{4}{25}$

e) $\frac{x^4y^6}{z^2} - \frac{25}{36}$

f) $9x^4 - 16$

g) $m^4 - p^6$

h) $x^{2m} - x^{8m}$

i) $\frac{4p^2}{9} - \frac{9m^2}{16}$

q.03)

a) $4x^2 + 16x + 15$

b) $16a^4b^2 - 24a^2b - 27$

c) $25x^6 + 10x^3 - 143$

$$d) \frac{1}{15}(15m^4 + m^2 - 2a^2)$$

$$e)(a + b)^2 - (a + b) - 6$$

$$f) 9x^4 - 39x^2 + 42$$

$$g)m^4p^2 - 3a^3m^2p - 28a^6$$

$$h) x^{6m} + x^{3m} - 28$$

$$i) \frac{x^2y^4}{25} - \frac{1}{9}$$

q.04)

$$a) 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$$

$$b) 64x^6 - 36x^4y + 108x^2y^2 - 27y^3$$

$$c)m^3 + 15m^2 + 75m + 125$$

$$d) a^6b^9 + 6a^4b^6 + 12a^2b^3 + 8$$

$$e) 125a^3b^3 - 75a^2b^2 + 15ab - 1$$

$$f) m^{6m} - 3m^{4m}p^{3m} + 3m^{2m}p^{6m} - p^{9m}$$

q.05)

$$a) x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

$$b) m^2 + p^2 + 4q^2 + 2mp - 4mq - 4pq$$

$$c) 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 20a + 30b$$

$$d) 16x^4 + 25y^2 + 4 - 40x^2y + 16x^2 - 20y$$

q.06)

$$a) 5(x^2 + y^2)$$

$$b) -m^2 + m + 20$$

$$c) 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$$

$$d) 3a^2 - 9ab + 19b^2$$

$$e) 4m(2 - 5y)$$

$$f) 19m^6 - 18m^4p - 18m^2p^2 + 19p^3$$

$$q.07) x^3 - 10x^2 + 23x - 31$$

$$q.08) x^2(2x - 1)$$

$$q.09) 16x^6 - 40x^4 + 66x^2 - 36$$

$$q.10) 25x^4 - 35x^2 + 11$$

$$q.11) B$$

q.12) 2×10^{-2}

q.13) 9×10^{-10}

q.14) 11×10^{13} ou -11×10^{-13}

q.15) 7

q.16) 0×10^3

q.17) $3 \times 10^{\frac{1}{2}}$

q.18) $k < 0,4$

q.19) $p=7$

q.20) $-1 \times 10^{-\frac{3}{2}}$

REVISÃO MATEMÁTICA (Gabriel)

Lista de exercícios extra

Lista 04 – Conjuntos/Progressão Aritmética

Assunto3 – Conjuntos

Q.01) A interseção dos conjuntos $A = [-2, 5]$ e $B = [3, 6]$ é o conjunto C , tal que

- a) C é vazio
b) Apenas os elementos 3, 4 e 5 pertencem a C
c) $C \cap A$ tem infinitos elementos
d) $C \cap A$ é infinito
e) $A - C$ é um conjunto vazio

Q.02) Sendo A e B conjuntos não vazios, qual das alternativas representa um conjunto vazio?

- a) $B \cap (A \cup B)$
b) $A \cap (A \cup B)$
c) $(A - B) \cap A$
d) $(B - A) \cap B$
e) $(A - B) \cap (B - A)$

Q.03) Em uma cidade, 40% dos adultos obesos são mulheres e 50% dos adultos não obesos são mulheres. Indique qual a probabilidade de que uma pessoa adulta da cidade escolhida ao acaso seja uma mulher

- a) 0,48
b) 0,49
c) 0,50
d) 0,51
e) 0,52

Q.04) Em uma prova para seleção de alunos de um concurso público, foram colocadas apenas duas questões de matemática, 470 alunos acertaram somente uma das questões e 260 acertaram a segunda. Sendo que 90 alunos acertaram as duas e, 210 alunos erraram a primeira questão. Quantos alunos fizeram a prova?

- a) 390
b) 430
c) 560
d) 600
e) 800

Q.05) Numa classe de 30 alunos, 16 gostam de Matemática e 20 gostam de História. O número de alunos desta classe que gostam de Matemática e História é:

- a) exatamente 16
b) exatamente 10
c) no máximo 6
d) no mínimo 6
e) exatamente 18

Q.06) (IME - 2006) Seja N um número inteiro de 5 algarismos. O número P é construído agregando-se o algarismo 1 à direita de N e o número Q é construído agregando-se o algarismo 1 à esquerda de N . Sabendo-se que P é o triplo de Q , o algarismo das centenas do número N é:

- a) 0
b) 2
c) 4
- d) 6
e) 8

Q.07)(UFC) Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N , o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é:

- a) o triplo do número de elementos de M .
b) o triplo do número de elementos de N .
c) o quádruplo do número de elementos de M .
d) o dobro do número de elementos de M .
e) o dobro do número de elementos de N .

Q.08)(UFSM) Dados os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ é ímpar}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 9\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\},$$

O produto dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$ é igual a:

- a) 1
b) 3
c) 15
- d) 35
e) 40

Q.09)(EPCAR) Qual das proposições abaixo é falsa?

- a) Todo número real é racional.
b) Todo número natural é inteiro.
c) Todo número irracional é real.
d) Todo número inteiro é racional.
e) Todo número natural é racional.

Q.10)(USP-SP) Depois de n dias de férias, um estudante observa que:

- choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;
- quando chove de manhã não chove à tarde;
- houve 5 tardes sem chuva;
- houve 6 manhãs sem chuva.

Podemos afirmar então que n é igual a:

- a) 7
b) 8
c) 9
- d) 10
e) 11

Q.11) (UEL – PR) Em um certo concurso vestibular, na prova de Língua Estrangeira, o candidato pode optar por Inglês, francês ou Espanhol. Sabe-se que 5% do total de inscritos optaram por Espanhol e, do número restante, 20% escolheram Francês. Se 15 200 candidatos optaram por Inglês, o total de candidatos inscritos nesse concurso é:

- a) 17 800
b) 18 000
c) 20 000
- d) 20 800
e) 21 000

Q.12)(PUC – PR)– Sejam A , B e C 3 conjuntos finitos. Sabendo-se que $A \cap B$ tem 20 elementos, $B \cap C$ tem 15 elementos e $A \cap B \cap C$ tem 8 elementos, então o número de elementos de $(A \cup C) \cap B$ é:

- a) 28
b) 35
c) 23
- d) 27
e)

13

Q.13) Se A, B e C são conjuntos tais que:

$$n[A - (B \cup C)] = 15,$$

$$n[B - (A \cup C)] = 20,$$

$$n[C - (A \cup B)] = 35 \text{ e}$$

$$n(A \cup B \cup C) = 120$$

então $n[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$ é igual a:

- a) 14
b) 50
c) 35
d) 56
e) 26

Q.14)(UDESC) Uma pesquisa foi realizada junto a 930 pessoas a respeito da prática dos esportes futebol e vôlei: foi constatado que o vôlei era praticado por 340 pessoas e que 65 praticavam ambos os esportes. Foi constatado ainda que 15 pessoas não praticavam nenhum desses esportes. O número de pessoas que praticavam apenas o futebol é:

- a) 565
b) 525
c) 535
d) 510
e) 575

Q.15) O número dos conjuntos X que satisfazem $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ é:

- a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Q.16) (FGV - SP) Seja A um conjunto com 8 elementos. O número total de subconjuntos de A :

- a) 8
b) 256
c) 6
d) 128
e) 10

Q.17) (ESPM) – Uma pesquisa envolvendo 800 habitantes de uma cidade revelou que 35% deles leem diariamente o jornal A; 60% leem o jornal B e que 120 entrevistados não leem nenhum dos dois jornais. O número de pessoas entrevistadas que leem os dois jornais é:

- a) 60
b) 80
c) 100
d) 120
e) 140

Q.18) (UPF) – Feita uma pesquisa com 600 estudantes sobre as universidades em que pretendem prestar vestibular, observou-se que 245 pretendem prestar vestibular na universidade A; 270, na universidade B; 285, na universidade C; 130, nas universidades A e B; 120, nas universidades A e C; 110, nas universidades B e C; e 50, nas três universidades citadas (A, B e C). Com base na pesquisa, é incorreto o que se afirma na alternativa:

- a) 230 estudantes pretendem prestar vestibular apenas em uma universidade.
b) 110 estudantes não pretendem prestar vestibular nas três universidades.
c) 80 estudantes pretendem prestar vestibular apenas na universidade B.
d) 70 estudantes pretendem prestar vestibular apenas na universidade C.
e) 210 estudantes pretendem prestar vestibular em duas das três universidades citadas.

Q.19) (PUC – PR) Em uma pesquisa com um turma de alunos, apurou-se o seguinte: 45% dos alunos são homens. Sabe-se também que 60% dos alunos jogam futebol e que destes 70% são homens. Que percentual de alunos, que não jogam futebol, são mulheres?

- a) 42%
b) 37%
c) 16%
d) 45%

e) 60%

Q.19) (OSEC) Numa escola de 360 alunos, onde as únicas matérias dadas são matemática e português, 240 alunos estudam matemática e 180 alunos estudam português. O número de alunos que estudam matemática e português é:

- a) 120
b) 60
c) 90
d) 180
e) 210

Q.20) (UFF) Dentre as espécies ameaçadas de extinção na fauna brasileira, há algumas que vivem somente na Mata Atlântica, outras que vivem somente fora da Mata Atlântica e, há ainda, aquelas que vivem tanto na Mata Atlântica como fora dela. Em 2003, a revista Terra publicou alguns dados sobre espécies em extinção na fauna brasileira: havia 160 espécies de aves, 16 de anfíbios, 20 de répteis e 69 de mamíferos, todas ameaçadas de extinção. Dessas espécies, 175 viviam somente na Mata Atlântica e 75 viviam somente fora da Mata Atlântica. Conclui-se que, em 2003, o número de espécies ameaçadas de extinção na fauna brasileira, citadas pela revista Terra, que vivem tanto na Mata Atlântica como fora dela, corresponde a:

- a) 0
b) 5
c) 10
d) 15
e) 20

Q.21) (UFPA)– A Câmara dos Deputados reuniu-se extraordinariamente para decidir sobre a instalação de duas Comissões Parlamentares de Inquéritos (CPI): a do FUTEBOL e a do CAIXA 2. Dos 320 deputados presentes, 190 votaram a favor da instalação da CPI do FUTEBOL; 200 pela instalação

da CPI do CAIXA 2; 90 votaram a favor da instalação das duas comissões e X deputados foram contrários à instalação das CPIs. O número X de deputados que votaram contra a instalação das CPIs é:

- a) 160
b) 90
c) 70
d) 50
e) 20

Q.22) (PUC_PR)– Em uma pesquisa feita com 120 empregados de uma firma, verificou-se o seguinte:

- têm casa própria: 38
- têm curso superior: 42
- têm plano de saúde: 70
- têm casa própria e plano de saúde: 34
- têm casa própria e curso superior: 17
- têm curso superior e plano de saúde: 24
- têm casa própria, plano de saúde e curso superior: 15

Qual a porcentagem dos empregados que não se enquadram em nenhuma das situações anteriores?

- a) 25%
b) 30%
c) 35%
d) 40%
e) 45%

Q.23) Num universo de 800 pessoas, é sabido que 200 delas gostam de samba, 300 de rock e 130 de samba e rock. Quantas não gostam nem de samba, nem de rock?

- a) 430
d) 450
c) 330
d) 250

e)

470

Q.24) (UNIFAL)– Em uma cidade com 40.000 habitantes há três clubes recreativos: Colina, Silvestre e Campestre. Feita uma pesquisa, foram obtidos os seguintes resultados: 20% da população freqüenta o Colina; 16% o Silvestre; 14% o Campestre; 8% o Colina e o Silvestre; 5% o Colina e o Campestre; e 4% o Silvestre e o Campestre. Somente 2% freqüentam os três clubes. O número de habitantes que não freqüentam nenhum destes três clubes é:

a) 26000

d) 32000

b) 30000

e) 34000

c) 28000

Q.25) (UFV/PASES) A escola Cantinho Feliz possui 1200 alunos e oferece dança e futebol como atividades extracurriculares. Sabendo que neste ano há 590 alunos inscritos em dança, 570 inscritos em futebol e 270 alunos inscritos em ambas as atividades, o número de alunos que NÃO se inscreveram em qualquer destas atividades é:

a) 300

c) 320

b) 310

d) 330

Q.26) Dados os conjuntos $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$ e $C = \{1, 2, 3, 7\}$, analise os seguintes itens:

I – $(A \cup B) \cap C = C$

II – A tem 16 subconjuntos

III – $A \cap B = 3$

IV – $A \subset B$

Podemos afirmar que:

a) Somente I é verdadeiro

b) Somente II é verdadeiro

c) Somente IV é verdadeiro

d) e) I e III são verdadeiros

e) II e III são verdadeiros

Q.27) Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6\}$, analise os itens a seguir:

(I) $3 \subset A$

(II) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

(III) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

Pode-se afirmar que:

a) apenas I está correto

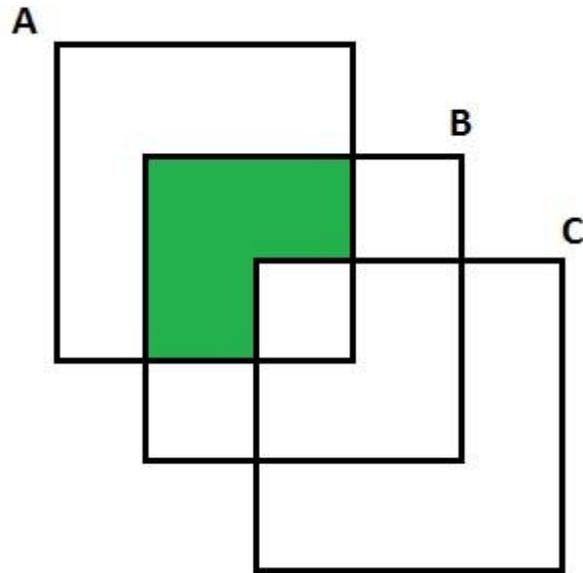
b) apenas II está correto

c) apenas III está correto

d) II e III estão corretos

e) I e III estão corretos

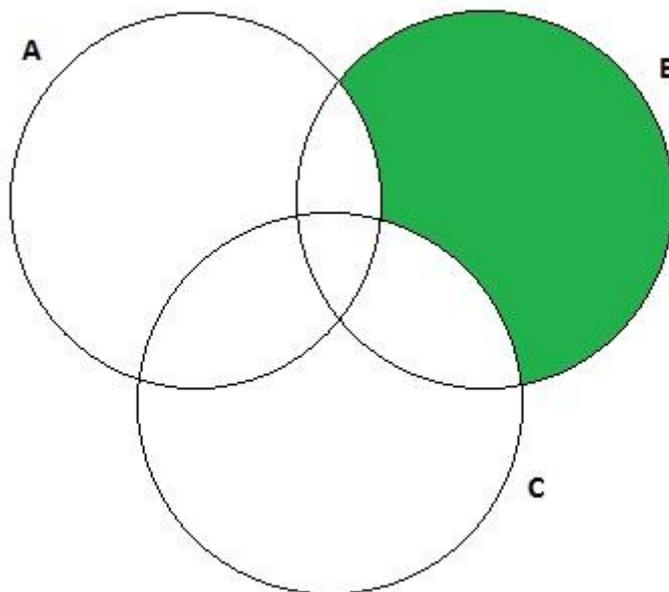
Q.28) (PUC-RS) Com relação à parte hachurada do diagrama, é correto afirmar que:



- a) $C - (A \cap B)$
- b) $(A \cap B) - C$
- c) $A - (B \cap C)$

- d) $(B \cap C) - A$
- e) $(A \cap B) - (B \cup C)$

Q.29) (UFPI)– Considerando os conjuntos A, B e C na figura abaixo, a região hachurada representa:



- a) $B - (A - C)$
- b) $B \cap (A - C)$
- c) $B \cup (A \cap C)$

- d) $B \cap (A \cup C)$
- e) $B - (A \cup C)$

Q.30)(USS – RJ) – Se A e B são conjuntos, $A \cup B = A$ se e somente se:

- a) $A = B$
- b) $A \subset B$

- c) $B \subset A$
- d) $A = \emptyset$

- a) 20
b) 21
c) 22
- d) 23
e) 24

Q.46) (PUC-RIO) A soma de todos os números naturais ímpares de 3 algarismos é:

- a) 220.000
b) 247.500
c) 277.500
- d) 450.000
e) 495.000

Q.47) (PUC-RIO) A soma de todos os números naturais ímpares de 3 algarismos é:

- a) 220.000
b) 247.500
c) 277.500
- d) 450.000
e) 495.000

Q.48) (PUC-RIO) Temos uma progressão aritmética de 20 termos onde o 1º termo é igual a 5. A soma de todos os termos dessa progressão aritmética é 480. O décimo termo é igual a:

- a) 20
b) 21
c) 22
- d) 23
e) 24

Q.49) Determine a soma dos 10 primeiros termos da PA (2, 5, ...);

Q.50) Em relação à progressão aritmética (10, 17, 24, ...), determine o termo geral dessa PA.

Q.51) (PUC – RS) Tales, um aluno do Curso de Matemática, depois de terminar o semestre com êxito, resolveu viajar para a Europa. O portão de Brandeburgo, em Berlim, possui cinco entradas, cada uma com 11 metros de comprimento. Tales passou uma vez pela primeira porta, duas vezes pela segunda e assim sucessivamente, até passar cinco vezes pela quinta. Então ele percorreu ____ metros.

- a) 55
b) 66
c) 165
- d) 275
e) 330

Q.52) (PUC-RIO 2009) Temos uma progressão aritmética de 20 termos onde o 1o termo é igual a 5. A soma de todos os termos dessa progressão aritmética é 480. O décimo termo é igual a:

- a) 20
b) 21
c) 22
- d) 23
e) 24

Q.53) (PUC-RIO 2008) Numa progressão aritmética de razão r e primeiro termo 3, a soma dos primeiros n termos é $3n^2$, logo, a razão é:

- a) 2
b) 3
- c) 6
d) 7

e) 9

Q.54) (FUVEST 2010) Os números a_1, a_2, a_3 formam uma progressão aritmética de razão r , de tal modo $a_1 + 3, a_2 - 3, a_3 - 3$ estejam em progressão geométrica. Dado ainda que $a_1 > 0$ e $a_2 = 2$, conclui-se que r é igual a:

a) $3 + \sqrt{3}$

d) $3 - (\sqrt{3})/2$

b) $3 + (\sqrt{3})/2$

e) $3 - \sqrt{3}$

c) $3 + (\sqrt{3})/4$

q.55) (UDESC 2009) Sejam x, y, z números reais tais que a seqüência $(x, 1, y, 1/4, z)$ forma, nesta ordem, uma progressão aritmética, então o valor da soma $x + y + z$ é:

a) $-3/8$

d) 2

b) $21/8$

e) $-19/8$

c) $15/8$

Q.56) (FEFISA) Se numa seqüência temos que $f(1) = 3$ e $f(n + 1) = 2 \cdot f(n) + 1$, então o valor de $f(4)$ é:

a) 4

d) 31

b) 7

e) 42

c) 15

Q.57) Determinar o primeiro termo de uma progressão aritmética de razão -5 e décimo termo igual a 12 .

GABARITO – Lista 03

Q.01)C

Q.11)C

Q.02)E

Q.12)D

Q.03) A

Q.13)B

Q.04)D

Q.14)E

Q.05)D

Q.15)B

Q.06)E

Q.16)B

Q.07)E

Q.17)B

Q.08)B

Q.18)D

Q.09)A

Q.19)B

Q.10)C

Q.20)D

Q.21)E

Q.22)A

Q.23)A

Q.24)A

Q.25)B

Q.26)B

Q.27)C

Q.28)B

Q.29)E

Q.30)C

Q.31)C

Q.32)B

Q.33)D

Q.34)D

Q.35)D

Q.36)B

Q.37)C

Q.38)E

Q.39)D

Q.40)B

Q.41)D

Q.42)A

Q.43)B

Q.44)C

Q.45)D

Q.46)B

Q.47)B

Q.48)D

Q.49) Resp. = 155

Q.50) Resp. = $7n + 3$

Q.51)C

Q.52)D

Q.53)C

Q.54)E

Q.55)C

Q.56)D

Q.57) Resp. =

REVISÃO MATEMÁTICA (Gabriel)

Lista de exercícios extra

Lista 05 – Conjuntos numéricos/Progressão Geométrica/Expansão binomial

Assunto4 – Conjuntos Numéricos

Q.01)(FATEC 2007) Se x e y são números reais tais que $x = (0,25)^{0,25}$ e $y = 16^{-0,125}$, é verdade que

- a) $x = y$
- b) $x > y$
- c) $x \cdot y = 2\sqrt{2}$
- d) $x - y$ é um número irracional
- e) $x + y$ é um número racional não inteiro

Q.02) Seja S o conjunto dos números naturais maiores que 1 que são divisores de 360 e não possuem fatores primos em comum com 147.

Então é correto afirmar que S contém:

- a) 6 elementos
- b) 7 elementos
- c) 8 elementos
- d) 9 elementos
- e) 10 elementos

Q.03) Dado que $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} | 2 < x < 20\}$, então $A \cap B$:

- a) $\{ \}$
- b) $\{2\}$
- c) $\{3\}$
- d) $\{2, 3\}$
- e) $\{3, 4\}$

Q.04) Dado que $1 \leq x \leq 4$ e $13 \leq y \leq 20$, então:

- a) o valor máximo de $\frac{x}{y}$ é 20
- b) o valor mínimo de $\frac{x}{y}$ é 1

c) o valor máximo de $\frac{x}{y}$ é 4

d) o valor máximo de $\frac{x}{y}$ é $\frac{4}{13}$

e) o valor máximo de $\frac{x}{y}$ é 5

Q.05) Sejam x e y números tais que os conjuntos {0, 7, 1} e {x, y, 1} são iguais. Então, podemos afirmar que:

a) $x = 0$ e $y = 5$

b) $x + y = 7$

c) $x = 0$ e $y = 1$

d) $x + 2y = 7$

e) $x = y$

Q.06) Num colégio de 100 alunos, 80 gostam de sorvete de chocolate, 70 gostam de sorvete de creme e 60 gostam dos dois sabores. Quantos não gostam de nenhum dos dois sabores?

a) 0

b) 10

c) 20

d) 30

e) 40

Q.07)(UFF 2010) Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823 - 1891), “Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem”. Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

Assunto 14 – Progressão Geométrica

Termo geral de uma PG: $a_n = a_1 \cdot q^n$

Soma dos n primeiros elementos de uma PG: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Aproximação para soma dos n primeiros termos de uma PG quando $q < 1$: $S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$

Q.08) A sequência seguinte é uma progressão geométrica (2, 6, 18, 54, ...). Determine o 8º termo dessa progressão:

- a) 5760
- b) 4374
- c) 2504
- d) 6400
- e) 4574

Q.09) (UEPA) Um carro, cujo preço à vista é R\$ 24 000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R\$ 4 000,00 e a quarta parcela de R\$ 1 000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

- a) 8000
- b) 7500
- c) 8500
- d) 7800
- e) 6400

Q.10) Sabendo que uma PG tem $a_1 = 4$ e razão $q = 2$, determine a soma dos 10 primeiros termos dessa progressão.

- a) 4092
- b) 4100
- c) 4036
- d) 4750
- e) 4004

Q.11) O segundo termo de uma PG crescente tal que $a_1 = 8$ e $a_3 = 18$ é igual a:

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 14
- e) 15

Q.12) Calcule o valor de k para que a soma dos k primeiros termos da progressão geométrica (1, 3, 9, ...) seja igual a 797161.

Q.13)(FIA) Numa progressão geométrica, tem-se $a_3 = 40$ e $a_6 = -320$. A soma dos oito primeiros termos é:

- a) -1700
- b) -850
- c) 850
- d) 1700
- e) 750

Q.14) O lado de um triângulo equilátero mede 3m. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um novo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios do novo triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero e, assim sucessivamente. Determine a soma dos perímetros de todos os triângulos construídos.

Expansão binomial

Desenvolvimento de um binômio segundo a fórmula de Newton:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} x^{n-k} a^k$$

$$= \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

Q.15) Utilizando o desenvolvimento do binômio de Newton, calcule o desenvolvimento de $(2x + 1)^4$

Q.16) Determine o desenvolvimento da expressão $(2x - 3)^5$

Q.17) Calcule o desenvolvimento da seguinte expressão $(3x - 2y)^4$

Q.18) Dado o binômio $(x - y)^7$ determine a soma dos coeficientes de seu desenvolvimento

Q.19) Determine o 6º termo do desenvolvimento do binômio $(x - \frac{1}{2})^9$

Q.20) Considere o binômio $(x - 3)^8$ e determine o termo independente de seu desenvolvimento.

GABARITO – Lista 05

- Q.1) A
- Q.2) B
- Q.3) C
- Q.4) D
- Q.5) B
- Q.6) B
- Q.7) D
- Q.8) B

Q.9) C

Q.10) A

Q.11) C

Q.12) $k=13$

Q.13) B

Q.14) 6

Q.15) $16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

Q.16) $32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243$

Q.17) $81x^4 - 217x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$

Q.18) zero

Q.19) $-126x^4$

Q.20) 6.561

Lista 06 – Matrizes/Funções

Aulas passadas:

- Matriz (10 mar)
- Funções (08 mar)

MAT II Assunto - Matrizes

Q.1) Determinar x e y de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$

Q.2) Determinar x, y, z e t de modo que se tenha $\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t \end{bmatrix}$

Q.3) Dados $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, calcular $A + B$ e $A - B$.

Q.4) Determinar α, β, γ e δ de modo que tenha:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Q.5) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinar a matriz X tal que $X + A = B - C$.

Q.6) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 e A^t sua transposta, determine A, tal que $A = 2 - A^t$

Q.7) Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $A = A^t$ e é dita anti-simétrica se $A^t = -A$, onde A^t é a matriz transposta de A. Sendo A uma matriz quadrada, classifique em verdadeira ou falsa as duas afirmações:

(01) $A + A^t$ é uma matriz simétrica

(02) $A - A^t$ é uma matriz anti-simétrica

a. V,F

b. V,V

c. F,F

d. F,V

Q.8) Se uma matriz quadrada A é tal que $A^t = -A$, ela é chamada matriz anti-simétrica. Sabe-se que M é anti-simétrica e:

$$M = \begin{bmatrix} 4+a & a_{12} & a_{13} \\ a & b+2 & a_{23} \\ b & c & 2c-8 \end{bmatrix}$$

Os termos a_{12} , a_{13} e a_{23} de M, valem respectivamente:

a. -4, -2 e 4

b. 4, 2 e -4

c. 4, -2 e -4

d. 2, -4 e 2

e. 2, 2 e 4

Q.9) Se $\begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ então, necessariamente:

a. $x = y = 0$

b. $x = y = m = n = 0$

c. $x = y$ e $m = n$

d. $y = -2x$ e $n = -2m$

e. $x = -2y$ e $m = -2n$

Q.10) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = 2B \end{cases} \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Q.11) Determinar as matrizes X e Y que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \text{ sendo dadas } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

MAT I Assunto - Funções

Q.12) Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcule:

a. $f(2)$

- b. $f(-1)$
- c. $f(1/2)$
- d. $f(-1/3)$
- e. $f(\sqrt{3})$
- f. $f(1 - \sqrt{2})$

Q.13) Seja f a função de \mathbb{Z} em \mathbb{Z} definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

- a. $f(2)$
- b. $f(-3)$
- c. $f(0)$
- d. $f(3/2)$

Q.14) Seja a função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{2x-3}{5}$. Qual é o elemento do domínio que tem $-3/4$ como imagem?

Q.15) Seja a função f de $\mathbb{R} - \{1\}$ em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

Q.16) Quais são os valores do domínio da função real definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$ que produzem imagem igual a 3?

Q.17) A função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} é tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = 3f(x)$. Se $f(9) = 45$, calcule $f(1)$.

Q.18) É dada uma função real tal que:

1. $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$
2. $f(1) = 2$
3. $f(\sqrt{2}) = 4$

Calcule $f(3 + \sqrt{2})$.

GABARITO – Lista 06

Q.1) $x = 1$ e $y = 0$

Q.2) $x = 0, y = 3, z = 4, t = 1$

Q.3) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ e $A - B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Q.4) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$

Q.5) $X = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Q.6) A é a matriz nula.

Q.7) B

Q.8) B

Q.9) E

Q.10) $X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

Q.11) $X = [3/2 \ 5/2 \ 6]$ e $Y = [-1/2 \ 3/2 \ 1]$

Q.12)

- a. 2
- b. 8
- c. $11/4$
- d. $46/9$
- e. $7 - 3\sqrt{3}$
- f. $4 + \sqrt{2}$

Q.13) X

- a. 4
- b. -11
- c. -2
- d. $f\left(\frac{3}{2}\right)$ não tem significado, pois $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

Q.14) $x = -3/8$

Q.15) -4

Q.16) $x = 2$ ou $x = 3$

Q.17) $f(1) = 5$

Q.18) 32



CURSO PREPARATÓRIO CIDADE
LISTA 07 - Matemática



Matrizes/Funções compostas e inversas/Números Complexos

Professor: Gabriel

Aulas passadas:

- Números Complexos
- Matrizes
- Funções compostas e inversas

MAT III Assunto –Números Complexos

Q.1) O produto $(5 + 7i)(3 - 2i)$ vale:

- a. $1 + 11i$
- b. $1+31i$
- c. $29+11i$
- d. $29-11i$
- e. $29+31i$

Q.2) Se $f(z) = z^2 - z + 1$, então $f(1 - i)$ é igual a:

- a. i
- b. $-i+1$
- c. $i-1$
- d. $i+1$
- e. $-i$

Q.3) Determine o valor do quociente dos números complexos z_1 e z_2 , sabendo que $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = -1 + 2i$.

Q.4) Sendo i a unidade imaginária o valor de $i^{10} + i^{-100}$ é:

- a. Zero
- b. i
- c. $-i$
- d. 1
- e. -1

Q.5) Sendo i a unidade imaginária, $(1 - i)^{-2}$ é igual a:

- a. 1
- b. $-i$
- c. $2i$
- d. $-i/2$
- e. $i/2$

Q.6) A potência $(1 - i)^{16}$ equivale a:

- a. 8
- b. $16-4i$
- c. $16-16i$
- d. $256-16i$
- e. 256

MAT II Assunto - Matrizes

Q.7) Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, calcule:

- a. AB
- b. BA
- c. A^2
- d. B^2

Q.8) O elemento c_{22} da matriz $C = AB$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

- e. 0
- f. 2
- g. 6
- h. 11
- i. 22

Q.9) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule A^T .

Q.10) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Então $A^4 + 2A^3 + 4A^2 + 8A$ é igual a:

- j. A^6
- k. A^8
- l. A^{10}
- m. A^5
- n. A^7

Q.11) Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, encontre B^{-1} .

MAT I Assunto – Funções compostas e inversas

Q.12) Seja $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = -2x - 1$, determine a lei que define $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$.

Q.13) Sejam f e g funções reais tais que $f[g(x)] = -10x - 13$ e $g(x) = 2x + 3$. Determine qual é a lei que define $f(x)$.

Q.14) Se $f(x) = x^5$ e $g(x) = x - 1$, a função composta $f[g(x)]$ será igual a:

- a. $x^5 + x - 1$
- b. $x^6 - x^5$
- c. $x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 5x^2 - 5x + 1$
- d. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
- e. $x^5 - 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 - 5x - 1$

Q.15) Dadas as funções reais $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = ax + b$, se $f[g(x)] = 12x + 8$, o valor de $a + b$ é:

- a. 10
- b. 13
- c. 12
- d. 20
- e. 15

GABARITO – Lista 07

Q.1) C

Q.2) E

Q.3) $\frac{-8-i}{5}$

Q.4) A

Q.5) E

Q.6) E

Q.7) .

a. $\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 11 & 23 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 25 & 24 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 31 & 18 \\ 27 & 22 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$

Q.8) D

Q.9) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

Q.10) A

Q.11) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/7 & 2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$

Q.12) $f[g(x)] = 4x^2$ e $g[f(x)] = -2x^2 - 4x - 3$

Q.13) $f(x) = -5x + 2$

Q.14) D

Q.15) B

QUADRO-RESUMO

Unidade imaginária	$i = \sqrt{-1}$
Conjugado de um número complexo	$x = a \pm bi \rightarrow \bar{x} = a \mp bi$
Propriedade	$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$
Propriedade	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
Módulo de um número complexo	$x = a \pm bi \rightarrow x = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho$
Produto de um número por seu conjugado	$x \cdot \bar{x} = x ^2$
IGUALDADE	$x = a + bi, y = c + di \rightarrow x = y \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$
ADIÇÃO	$x = a + bi, y = c + di \rightarrow x + y = (a + c) + (b + d)i$
SUBTRAÇÃO	$x = a + bi, y = c + di \rightarrow x - y = (a - c) + (b - d)i$
MULTIPLICAÇÃO	$x = a + bi, y = c + di \rightarrow x \cdot y = (ac - bd) + (bc + ad)i$
Inversão de número complexo	$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{ x ^2}$
DIVISÃO	$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x \cdot \bar{y}}{ y ^2}$
Argumento	$\theta = \arcsen\left(\frac{b}{ x }\right) = \arccos\left(\frac{a}{ x }\right)$
Forma trigonométrica	$x = a + bi \rightarrow x = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho \text{cis} \theta$
Forma exponencial	$x = a + bi \rightarrow x = \rho e^{i\theta}$

Produto de matrizes	$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
Matriz transposta	$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$
Matriz inversa	Se $A \cdot B = I$ e A é invertível $\rightarrow B = A^{-1}$

Função composta	
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é a função composta de g com f	
Função inversa	
Para obtenção da inversa:	1) troca-se todo x por y e todo y por x . 2) coloca-se o novo y em função do novo x .



CURSO PREPARATÓRIO CIDADE
LISTA 08 - Matemática



Matrizes/Funções compostas e inversas

Professor: Gabriel

Aulas passadas:

- Matrizes
- Funções compostas e inversas

MAT I Assunto – Matrizes

Q.1) Caso exista, encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a. $\begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

Q.2) Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Q.3) Resolva o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ usando a Regra de Sarrus

Q.4) Resolva o determinante $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ usando o Teorema de Laplace

Q.5) Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ usando o método da matriz adjunta

Q.6) Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ usando o método de escalonamento da matriz completa $[A \ I]$

Questão suplementar...

Q.7) Resolva o seguinte determinante de Vandermonde, deixando-o em sua forma mais

simplificada: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

MAT I Assunto – Funções compostas e inversas

Q.8) Sendo **f** e **g** duas funções tais que: $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Podemos afirmar que a igualdade $g \circ f(x) = f \circ g(x)$ ocorrerá se e somente se:

a. $b(1 - c) = d(1 - a)$

b. $a(1 - b) = d(1 - c)$

c. $ab = cd$

d. $ad = bc$

e. $a = bc$

Q.9) Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , sendo \mathbb{R} o conjunto dos números reais, dadas por $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = -4x + 1$. Nestas condições, $g(-1)$ é igual a:

- a. -5
- b. -4
- c. 0
- d. 4
- e. 5

Q.10) Se $f(g(x)) = 5x - 2$ e $f(x) = 5x + 4$, então $g(x)$ é igual a:

- a. $x - 2$
- b. $x - 6$
- c. $x - 6/5$
- d. $5x - 2$
- e. $5x + 2$

Q.11) Chama-se ponto fixo de uma função f a um número x tal que $f(x) = x$. Se o ponto fixo da função $f(x) = mx + 5$ é igual a 10, então podemos afirmar que o módulo do décuplo do ponto fixo da função $g(x) = 2x - m$ é igual a:

- a. 5
- b. 4
- c. 3
- d. 2
- e. 1

Questão suplementar...

Q.12) (ITA) Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 1$ duas funções reais. Definimos a função composta de f e g como sendo $\text{gof}(x) = g(f(x))$. Então $\text{gof}(y-1)$ é igual a:

- a. $y^2 - 2y + 1$
- b. $(y-1)^2 + 1$
- c. $y^2 + 2y - 2$
- d. $y^2 - 2y + 3$
- e. $y^2 - 1$

GABARITO – Lista 08

Q.1) A

Q.2) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Q.3) 1

Q.4) 180

Q.5) $\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Q.6) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Q.7) $(c - b)(c - a)(b - a)$

Q.8) A

Q.9) D

Q.10) C

Q.11) A

Q.12) A

QUADRO-RESUMO

Produto de matrizes	$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$
Matriz transposta	$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$
Menor complementar e cofator	Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{cases}$
Matriz dos cofatores	$cof(A)$ é a matriz formada pelos elementos A_{ij} , onde: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$
Matriz adjunta	$\bar{A} = cof^T(A)$
Matriz inversa obs.1	Se $A \cdot B = I$ e A é invertível $\rightarrow B = A^{-1}$
Matriz inversa obs.2	Se A é invertível $\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \bar{A}$
Determinante de uma matriz 2x2	
Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = (a \cdot d) - (c \cdot b) = ad - bc$	
Determinante de uma matriz 3x3 (Regra de Sarrus)	
Se $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$ $= a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$	
Solução de determinante pelo Teorema de Laplace	
$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot D_{21} + a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot D_{31}$	
Inversa de matriz pelo método do escalonamento de matriz completa $[A \quad I]$	
$[A \quad I] = \begin{bmatrix} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ combinações lineares entre linhas e colunas até que a matriz do lado esquerdo torne - se a identidade. A matriz do lado direito será a inversa. $[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a' & b' & c' \\ 0 & 1 & 0 & d' & e' & f' \\ 0 & 0 & 1 & g' & h' & i' \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix}$	

Função composta

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é a função composta de g com f

Função inversa

Para obtenção da inversa:

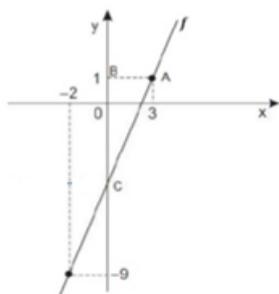
- 1) troca-se todo x por y e todo y por x .
- 2) coloca-se o novo y em função do novo x .

Aulas passadas:

- Função Afim
- Sistemas Lineares

MAT I Assunto – Função Afim

Q.1) Considere a função afim f , representada no gráfico abaixo. Sabendo-se que $A(3,1)$; $B(0,1)$ e que C é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas, a área do triângulo ABC é, em unidades de área, igual a:



- a) 10
- b) 9
- c) 8,5
- d) 7,5
- e) 6

Q.2) Para que valores reais de m a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = (3 - 2m)x + 1$ é crescente?

Q.3) Para que valores reais de m a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = (m + 3)x + 1$ é decrescente?

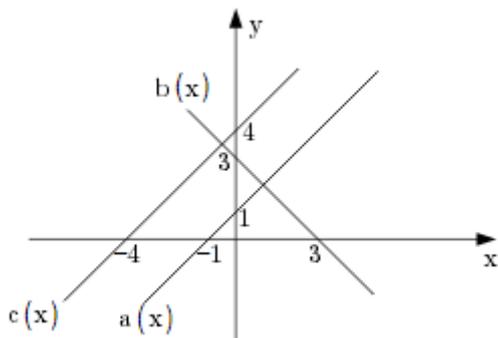
Q.4) Resolver a inequação $4(x + 1) - 5 \leq 2(x + 3)$, em \mathbb{R} .

Q.5) (FGV) O gráfico da função $f(x) = mx + n$ passa pelos pontos $(-1,3)$ e $(2,7)$. Determine o valor de m .

Q.6) Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). Determine o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros.

Q.7) O preço de venda de um livro é de R\$ 25,00 a unidade. Sabendo que o custo de cada livro corresponde a um valor fixo de R\$ 4,00 mais R\$ 6,00 por unidade, construa uma função capaz de determinar o lucro líquido (valor descontado das despesas) na venda de x livros, e o lucro obtido na venda de 500 livros.

Questão complementar...



Q.8) Nessas condições, o conjunto solução da inequação $\frac{(a(x))^5 \cdot (b(x))^6}{(c(x))^3} \geq 0$ é:

- a) $(-4, -1) \cup [3, +\infty)$
- b) $[-4, -1] \cup [3, +\infty)$
- c) $(-\infty, -4) \cup [-1, +\infty)$
- d) $[4, +\infty)$
- e) $R - \{4\}$

MAT I Assunto –Sistemas Lineares

Q.9) Resolver o sistema abaixo pela Regra de Cramer.

- a) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

Q.10) Se o termo (x_0, y_0, z_0) é a solução do sistema abaixo, então $3x_0 + 5y_0 + 4z_0$ é igual a:

$$\begin{cases} 3x + z = -5 \\ x + y + z = -2 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

- a) -8
- b) -7
- c) -6
- d) -5
- e) -4

Q.11) O sistema abaixo:

$$\begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13 \\ 4x - 5y + 4z = 18 \\ 9x - 2y - 7z = 25 \end{cases}$$

- a) Só apresenta a solução trivial
- b) É possível e determinado não tendo solução trivial
- c) É possível e indeterminado
- d) Admite a solução (1; 2; 1)
- e) É impossível

Q.12) O sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$$

- a) É impossível
- b) É possível e indeterminado

c) Admite apenas a solução (1; 2; 3)

d) Admite a solução (2; 0; 0)

Q.13) (UEL) O sistema abaixo, de incógnitas x e y , é:

$$\begin{cases} 6x + ky = 9 \\ 2x - 7y = 1 \end{cases}$$

a) Impossível, para todo k real diferente de -21

b) Possível e indeterminado, para todo k real diferente de -63

c) Possível e determinado, para todo k real diferente de -21

d) Possível e indeterminado, para todo k real diferente de -3

e) Possível e determinado, para todo k real diferente de -1 e -63

Q.14) Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas x e y :

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma única solução para certo número real k que é um:

a) Quadrado perfeito

b) Número primo

c) Número racional e não inteiro

d) Número negativo

e) Múltiplo de 5

Q.15) Se tivermos o sistema abaixo, então $x + y + z + t$ é igual a:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + z + t = 5 \\ y + z + t = 7 \\ x + y + t = 4 \end{cases}$$

a) -1

b) 7

c) 5

d) 4

e) 5/9

Q.16) Determinar m para que o sistema abaixo tenha apenas a solução trivial.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 3y + mz = 0 \end{cases}$$

Q.17) Sendo x e y números reais e $(3x + 2y)^2 + (x - 2y + 8)^2 = 0$, o valor de y^2 é:

a) 1/9

b) 1/8

c) -8

d) 9

e) 8

Q.18) Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número n de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a

a) 100

b) 105

c) 115

d) 130

e) 135

Q.19) O diretor de uma empresa, o Dr. Antonio, convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do Dr. Antonio à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o Dr. Antonio não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens. A quantidade de pessoas, presentes na sala, aguardando o Dr. Antonio é:

- a) 20
- b) 19
- c) 18
- d) 15
- e) 14

Q.20) Se o sistema linear $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$ é impossível, então:

- a) $a = 0$
- b) $a = -14/3$
- c) $a = 3/4$
- d) $a = 1$
- e) $a = 28$

GABARITO – Lista 09

- Q.1) B
- Q.2) $m < 3/2$
- Q.3) $m < -3$
- Q.4) $S = \{x \in R, x \leq 7/2\}$
- Q.5) $m = 4/3$
- Q.6) $f(18) = 16,10$
- Q.7) $L(x) = 19x - 4$ e $L(500) = 9.496$
- Q.8) C
- Q.9) a) $x = 2$ e $y = 3$ b) $x = 1, y = 2, z = 3$
- Q.10) B
- Q.11) E
- Q.12) B
- Q.13) C
- Q.14) A
- Q.15) C
- Q.16) $m \neq 4$
- Q.17) D
- Q.18) D
- Q.19) B
- Q.20) B

QUADRO-RESUMO

SISTEMAS LINEARES		
Classificação de um Sistema Linear		
POSSÍVEL ou COMPATÍVEL	DETERMINADO	Quando admite uma única solução
	INDETERMINADO	Quando admite infinitas soluções
IMPOSSÍVEL ou INCOMPATÍVEL	Quando não admite solução	
Regra de Cramer		
$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = A \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{33}z = B \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = C \end{cases} \rightarrow \text{matriz dos coeficientes} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$		
$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$		
$D_1 = \begin{vmatrix} A & a_{12} & a_{13} \\ B & a_{22} & a_{23} \\ C & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ e } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & A & a_{13} \\ a_{21} & B & a_{23} \\ a_{31} & C & a_{33} \end{vmatrix} \text{ e } D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ a_{31} & a_{32} & C \end{vmatrix}$		
$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D} \text{ e } z = \frac{D_3}{D}$		
Sistema Linear Homogêneo		
Quando os termos independentes são todos nulos		
Resolução de sistemas lineares pelo Método do Escalonamento		
1	Escreva a matriz completa do sistema $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} : b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} : b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} : b_3 \end{bmatrix}$	
2	<ul style="list-style-type: none"> • Troca de posição de duas equações quaisquer do sistema • Multiplicar ou dividir uma equação do sistema por um número diferente de zero • Efetuar uma combinação linear entre as equações para obter outra equivalente 	
3	Solução por escalonamento $\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 : b'_1 \\ 0 & a'_{22} & 0 : b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} : b'_3 \end{bmatrix}$	
$x = \frac{b'_1}{a'_{11}}, y = \frac{b'_2}{a'_{22}} \text{ e } z = \frac{b'_3}{a'_{33}}$		



CURSO PREPARATÓRIO CIDADE
LISTA 10 - Matemática



Função Quadrática

Professor: Gabriel

Aulas passadas:

- **Função quadrática**

MAT I Assunto – Função quadrática

Q.1) Determinar os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

Q.2) Resolver o sistema:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Q.3) Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

Q.4) Determinar os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$ tenha um zero real duplo.

Q.5) Determinar m na equação $mx^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ para que se tenha $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

Q.6) Determinar o valor máximo ou o valor mínimo, e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em R .

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

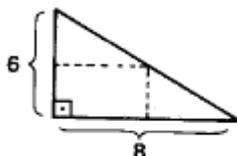
c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

e) $y = -x^2 + 5x - 7$

f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

Q.7) É dado uma folha de cartolina como na figura abaixo. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determinar esse retângulo sabendo que a área é máxima.



Q.8) Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$ determine aqueles cujo produto é máximo.

Q.9) Dentre todos os retângulos de perímetro 20cm, determine o de área máxima.

Q.10) Dentre todos os números de soma 6 determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

Q.11) Determinar o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 + 2(m - 1)x + (m + 1)$ para que o valor máximo seja 2.

Q.12) Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado 4cm, estando a base do retângulo num lado do triângulo.

Q.13) Num triângulo isósceles de base 6cm e altura 4cm está inscrito um retângulo. Determine o retângulo de área máxima sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.

Q.14) Determinar o valor de m na função real $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + (m + 2)$ para que o valor máximo seja 4.

Q.15) Determine o valor de m na função real $f(x) = (m - 1)x^2 + (m + 1)x - m$ para que o valor mínimo seja 1.

Q.16) Determinar o valor de m na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $5/3$.

Questão complementar...

Q.17) (AFA) Considere f uma função quadrática de raízes reais e opostas. O gráfico de f intercepta o gráfico da função real g definida por $g(x) = -2x$ em exatamente um ponto.

Se $f(\sqrt{3}) = 4$ e $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, então, é INCORRETO afirmar que:

- a) $f(x) - g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- b) O produto das raízes de f é um número ímpar
- c) A função real h definida por $h(x) = g(x) - f(x)$ admite valor máximo.
- d) f é crescente $\forall x \in [1, +\infty)$

GABARITO – Lista 10

Q.1) a) 1 e 2 b) 3 e 4 c) 2 e $1/3$ d) não possui e) -2 f) $1/2$ e -2

Q.2) $x = 3$ e $y = 4$

Q.3) $m \neq 0$ e $m > -\frac{1}{4}$

Q.4) $m = 1$ ou $m = 1/3$

Q.5) $m = -2 - \sqrt{6}$ ou $m = -2 + \sqrt{6}$

Q.6) a) valor mínimo = $-25/8$, no ponto $x = -5/4$ b) valor máximo = 12, no ponto $x = 2$ c) valor mínimo = 0, no ponto $x = 1$ d) valor mínimo = $-9/160$, no ponto $x = 7/4$ e) valor máximo = $-3/4$, no ponto $x = 5/2$ f) valor máximo = $7/18$, no ponto $x = 4/3$

Q.7) lados 3 e 4

Q.8) $x = -2$ e $z = 12$

Q.9) aquele de lados iguais a 5 cm, isto é, um quadrado de lado 5 cm.

Q.10) 1º número = 3, 2º número = 3.

Q.11) $m = 1$ ou $m = -2$

Q.12) lados 2 e $\sqrt{3}$

Q.13) lados 2 e 3 cm

Q.14) $m = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

Q.15) $m = \frac{3}{5}$

Q.16) $m = 2$

Q.17) A

FUNÇÃO QUADRÁTICA	
$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$ "parábola"	
Concavidade	Se $a > 0$: a concavidade da parábola está voltada para cima Se $a < 0$: a concavidade da parábola está voltada para baixo
Zeros (Fórmula de Bhaskara)	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$
Abscissa do máximo/mínimo ("x" do vértice)	$x_v = \frac{-b}{2a}$
Máximo/mínimo ("y" do vértice)	$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$
Forma canônica	$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \right]$

<p>Curso Preparatório CIDADE</p>	<p style="text-align: center;">CURSO PREPARATÓRIO CIDADE</p> <p style="text-align: center;">LISTA 11 - Matemática</p> <p style="text-align: center;">Inequações</p> <p style="text-align: center;">Professor: Gabriel</p> 
--	---

Aulas passadas:

- inequações

MAT I Assunto –

Q.1) Resolver $3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$

Q.2) $-2 < 3x - 1 < 4$

Q.3) $-4 < 4 - 2x \leq 3$

Q.4) $-3 < 3x - 2 < x$

Q.5) $x + 1 \leq 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$

Q.6) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$

Q.7) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

Q.8) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leq 2x - 5 \end{cases}$

Q.9) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geq 4x - 5 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$

Q.10) $\begin{cases} 3x + 2 \geq 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

Q.11) Resolver em \mathbb{R} a inequação $(x + 22x - 1) > 0$ analisando os dois casos possíveis.

Q.12) Resolver a inequação $(3x - 2)(x + 13 - x) < 0$ em \mathbb{R} .

Q.13) Resolver a inequação $(3x + 1)(2x - 5) \geq 0$

Q.14) Resolver em \mathbb{R} a inequação $\frac{3x+4}{1-x} \leq 2$

Q.15) Resolver a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$

Q.16) Resolver a inequação $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Q.17) Resolver a inequação $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$

Q.18) É dada a função $y = (2x^2 - 9x - 5x^2 - 2x + 2)$. Determinar:

a) Os pontos de interseção do gráfico da função com o eixo das abscissas

b) O conjunto dos valores de x para os quais $y \leq 0$

Q.19) $\begin{cases} \frac{2x-5}{1-x} \leq -2 \\ \frac{x^2+x+3}{x+1} > x \end{cases}$

Gabarito

Q.1) $S = \left\{x \in R \mid -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{4}\right\}$

Q.2) $S = \left\{x \in R \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\right\}$

Q.3) $S = \left\{x \in R \mid \frac{1}{2} \leq x < 4\right\}$

Q.4) $S = \left\{x \in R \mid -\frac{1}{3} < x < 1\right\}$

Q.5) $S = \emptyset$

Q.6) $S = \left\{x \in R \mid x < \frac{1}{3}\right\}$

Q.7) $S = \{x \in R \mid x > 1\}$

Q.8) $S = \{x \in R \mid x < -3\}$

Q.9) $S = \{x \in R \mid 3 \leq x \leq 6\}$

Q.10) $S = \emptyset$

Q.11) $S = \emptyset$

Q.12) $S = \left\{x \in R \mid -1 < x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 3\right\}$

Q.13) $S = \left\{x \in R \mid x \leq -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geq \frac{5}{2}\right\}$

Q.14) $S = \left\{x \in R \mid x \leq -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}$

Q.15) $S = R$

Q.16) $S = \{1\}$

Q.17) $S = \left\{x \in R \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

Q.18)

a. $x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 5$

b. $S = \left\{x \in R \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 5\right\}$

Q.19) $S = \{x \in R \mid -1 < x < 1\}$

QUADRO-RESUMO

INEQUAÇÕES		
Inequações simultâneas:	Ex: $f(x) < g(x) < h(x)$	Analisar as soluções do seguinte sistema: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ g(x) < h(x) \end{cases}$
Inequações-produto:	Ex: $f(x) \cdot g(x) > 0$	Abrir em todos os casos possíveis. Ex: 1º caso) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ 2º caso) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$
Inequações-quociente:	Ex: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$	
Inequações do 2º grau	Ex: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $g(x) = cx^2 + dx + e$ $f(x) \cdot g(x) < 0$	





CURSO PREPARATÓRIO CIDADE
LISTA 12 - Matemática



**Função Modular/Função Exponencial/Análise
Combinatória**

Professor: Gabriel

Aulas passadas:

- Função Modular
- Função Exponencial
- Análise Combinatória

(Assunto – Função Modular)

Q.1) Resolva a equação $|x^2 - 6x| = 9$

Q.2) O número de soluções negativas da equação $|5x - 6| = x^2$ é:

- a) 0
 - b) 1
 - c) 2
 - d) 3
 - e) 4
-

Q.3) As raízes reais da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$ são tais que:

- a) A soma delas é -1
 - b) O produto delas é -6
 - c) Ambas são positivas
 - d) O produto delas é -4
 - e) N.D.A
-

Q.4) Seja $f(x) = |2x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.

Determine os valores de x para os quais $f(x) < 1$.

Q.5) O gráfico da função $f(x) = |x| + 2$ é constituído por:

- a) Duas semirretas de mesma origem
- b) Duas retas concorrentes

c) Duas retas paralelas

d) Uma única reta que passa pelo ponto (0, 2).

e) Uma única reta que passa pela origem

Q.6) Resolva a equação modular $|3x - 1| = |2x + 6|$

Q.7) Determine quais números compõem o conjunto solução da equação modular a seguir:

$$|4x + 3| = -3x + 7$$

Questão suplementar...

Q.8) Encontre o conjunto solução da equação modular $|x + 1| + |2x - 1| = 3$

(Assunto – Função Exponencial)

Q.9) Se x é um número real, resolva a equação exponencial $3^{2x} + 3^{x+1} = 18$

Q.10) Resolva a equação exponencial:
 $-5^{x-1} - 5^x + 5^{x+2} = 119$

Q.11) Dada a equação $2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1}$, podemos afirmar que sua solução é um número:

- a) Natural
- b) Maior do que 1
- c) De módulo maior do que 1
- d) Par

e) De módulo menor que que 1

Q.12) A soma das raízes da equação

$$2^{2x+1} - 2^{x+4} = 2^{x+2} - 32 \text{ é:}$$

- a) 2
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 6
 - e) 7
-

Q.13) A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$. A soma das

daus soluções é:

- a) -5
 - b) 0
 - c) 2
 - d) 14
 - e) 1024
-

Q.14) O produto das raízes da equação exponencial $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$ é igual a:

- a) -2
 - b) 0
 - c) -1
 - d) 1
 - e) 5
-

Q.15) A interseção dos gráficos das funções

$h(x) = 2^x + 1$ e $s(x) = 2^{x+1}$ é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a:

- a) 2 e pertence à reta $v = x + 2$
 - b) 1 e pertence à reta $v = x + 1$
 - c) 2 e pertence à reta $v = x - 2$
 - d) 1 e pertence à reta $v = x - 1$
 - e) N.D.A
-

(Assunto – Análise Combinatória)

Q.16) Calcule $4!$

Q.17) Em uma eleição para representante de sala de aula, 3 alunos candidataram-se: Vanessa, Caio e Flávia. Quais são os possíveis resultados dessa eleição?

Q.18) Quantos anagramas são possíveis formar com a palavra CASA?

Q.19) Flávia, Maria, Gustavo e Pedro estão participando de uma competição. Para competir precisam fazer agrupamento com apenas 3 participantes. Quais são os agrupamentos possíveis?

Q.20) De quantos modos diferentes posso separar 10 bolinhas de cores distintas, colocando 2 bolinhas em cada saquinho?

Gabarito

Q.1) $S = \{3 \pm 3\sqrt{2}, 3\}$

Q.2) B

Q.3) D

Q.4) $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$

Q.5) A

Q.6) $S = \{-1, 7\}$

Q.7) $\frac{4}{7}e - 10$

Q.8) $S = \{-1, 1\}$

Q.9) $x = 1$

Q.10) $x = 1$

Q.11) E

Q.12) C

Q.13) B

Q.14) C

Q.15) A

Q.16) 24

Q.17) 6

Q.18) 12

Q.19) 24

Q.20) 45

QUADRO-RESUMO

FUNÇÕES MODULARES	
$ x = x$, se x for positivo	
$ x = -x$, se x for negativo	
Ex.: $ f(x) = g(x) \rightarrow$ SEPARAR EM CASOS $\rightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$	
ANÁLISE COMBINATÓRIA	
Princípio Fundamental da Contagem	Determina o número total de possibilidades de um evento ocorrer, pelo produto de $m \times n$. Sendo n e m resultados distintos de um evento experimental
Fatorial	O fatorial de um número qualquer, e representado pelo produto: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 1!$
Permutação simples	Na permutação os elementos que compõem o agrupamento mudam de ordem, ou seja, de posição. Determinamos a quantidade possível de permutação dos elementos de um conjunto, com a seguinte expressão: $P_n = n!$ $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 1!$
Permutação com repetição	Nessa permutação alguns elementos que compõem o evento experimental são repetidos, quando isso ocorrer devemos aplicar a seguinte fórmula: $P_n(n_1, n_2, n_3 \dots n_k) = n! / n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \dots n_k!$ <ul style="list-style-type: none">• $P_n(n_1, n_2, n_3 \dots n_k)$ = permutação com repetição• $n!$ = total de elementos do evento• $n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \dots n_k!$ = Elementos repetidos do evento
Arranjo simples	No arranjo simples a localização de cada elemento do conjunto forma diferentes agrupamentos, devemos levar em consideração, a ordem de posição do elemento e sua natureza, além disso, devemos saber que ao mudar os elementos de posição isso causa diferenciação entre os agrupamentos. Para saber a quantidade de arranjos possíveis em p agrupamento com n elementos, devemos utilizar a fórmula a seguir: $A_{n,p} = n! / (n-p)!$ A = Arranjo n = elementos p = Agrupamentos No arranjo a quantidade de agrupamento p , sempre deve ser menor que n , ou seja: $p \leq n$
Combinação simples	Na combinação simples, em um agrupamento mudamos somente a ordem dos elementos distintos. Para que isso seja feito podemos recorrer à utilização da fórmula: $C_{n,p} = n! / p! \cdot (n-p)!$ C = Combinação n = Elementos. p = Agrupamento Sendo sempre: $p \leq n$

 <p>Curso Preparatório CIDADE</p>	<p style="text-align: center;">CURSO PREPARATÓRIO CIDADE</p> <p style="text-align: center;">LISTA 13 - Matemática</p> <p style="text-align: center;">Função Logarítmica / Lei dos senos e Lei dos cossenos</p> <p style="text-align: center;">Professor: Gabriel</p> 
--	--

Aulas passadas:

- Função Logarítmica
- Lei dos senos e Lei dos cossenos

(Assunto – Função Logarítmica)

Q.1) Dados $\log 3 = a$ e $\log 2 = b$, a solução de $4^x = 30$ é:

- $(2a + 1)/b$
- $(a + 2)/b$
- $(2b + 1)/a$
- $(a + 1)/2b$
- $(b + 2)/a$

Q.2) Utilizando os valores aproximados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, encontramos para $\log^3 \sqrt{12}$ o valor de:

- 0,33
- 0,36
- 0,35
- 0,31
- 0,32

Q.3) Se $\log_2 3 = a$ e $\log_2 5 = b$, então o valor de $\log_{0,5} 75$ é:

- $a + b$
- $-a + 2b$
- $a - b$
- $a - 2b$
- $-a - 2b$

Q.4) Sabendo que $\log(P) = 3 \log(a) - 4 \log(b) + 1/2 \log(c)$, assinale a alternativa que representa o valor de P. (Dados: $a = 4$, $b = 2$ e $c = 16$)

- 12
- 52
- 16
- 24
- 73

Q.5) Se $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x^2$, com x real e maior que zero, então o valor de $f(f(5))$ é

- $\frac{2 \log 2}{1 + \log 2}$
- $\frac{\log 2}{\log 2 + 2}$
- $\frac{5 \log 2}{\log 2 + 1}$
- $\frac{8 \log 2}{1 - \log 2}$
- $\frac{5 \log 2}{1 - \log 2}$

Q.6) Dados $\log a = 5$, $\log b = 3$ e $\log c = 2$, calcule

$$\log \left(\frac{a \cdot b^2}{c} \right)$$

- 9
- 11
- 13
- 15
- 7

Q.7) Sendo $\log_x(2) = a$, $\log_x(3) = b$, calcule $\log_x \sqrt[3]{12}$.

Q.8) Sendo $\log_a 2 = 20$, $\log_a 5 = 30$ calcule $\log_a 100$

Q.9) Determine a solução da equação:

$$\log_2(x - 2) + \log_2(x - 3) = 1 + \log_2(2x - 7)$$

Q.10) Os valores de x que satisfazem $\log x + \log(x - 5) = \log 36$ são:

- 9 e -4
- 9 e 4
- 4
- 9
- 5 e -4

Q.11) O número real x, tal que $\log_x \left(\frac{9}{4} \right) = \frac{1}{2}$, é:

- 81/16
- 3/2
- 1/2
- 3/2
- 81/16

Q.12) Escrever $b^{\log_b a} = b^{-2}$, equivale a escrever:

- $a = \frac{1}{b^2}$
- $b = a^2$
- $a = b^2$

d) $b^2 = -a$

e) $b = \frac{1}{a^2}$

Q.13) Calcule: $\log_5 625 + \log 100 - \log_3 27$

Q.14) Considerando-se $\log_7 10 = 1,1833$.

Quanto é $\log_7 70$?

Q.15) Calcule o $\log_3 5$ sabendo que o $\log_3 45 = 3,464974$.

Q.16) A diferença entre dois números positivos é 4207,5 e a diferença entre os logaritmos decimais destes dois números é igual a 2. Que números são estes?

Q.17) Se o $\log_{60} 3 = x$ e o $\log_{60} 6 = y$, qual é o $\log_{18} 2$?

Q.18) Sabendo que $\log_3(7x - 1) = 3$ e que $\log_2(y^3 + 3) = 7$ pode-se afirmar que $\log_y(x^2 + 9)$ é igual à:

- a) 6
- b) 2
- c) 4
- d) -2
- e) -4

Q.19) Dado o sistema a seguir, e considerando log o logaritmo na base 10, assinale a(s) afirmação(ões) correta(s).

$3^{(8y-x)} = 0,11111 \dots$

$\begin{cases} \log x - \log y = 1 \end{cases}$

I) $\log(x - 9y) = 0$

II) $\log(x + 9y) = 1$

III) $(x + y) = 10$

IV) $(x \cdot y) = 10$

V) $(x \div y) = 10$

Estão corretas as afirmativas:

- a) V
- b) I, II, III, IV, V
- c) I, IV, V
- d) II, III, IV
- e) III, V

Q.20) Em física, denominamos por lei de Weber-Fechner a seguinte sentença: "a resposta a qualquer estímulo é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo". Essa lei aplica-se aos cinco sentidos, mas as suas implicações são melhor entendidas quando se refere aos

estímulos provocados pelo som. Por exemplo o nível sonoro (N) de um ambiente, em decibéis (dB), pode ser calculado por ela, por meio da fórmula $N = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, onde I representa a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado (W/m^2). Se, em um ambiente fechado, o nível sonoro de uma pessoa é 40dB, qual a sua intensidade sonora?

- a) $10^{-8} W/m^2$
- b) $3,3 \cdot 10^{-1} W/m^2$
- c) $3,3 \cdot 10^1 W/m^2$
- d) $10^8 W/m^2$

Q.21) Se log x representa o logaritmo na base 10 de x, então o valor de n tal que $\log(n) = 3 - \log(2)$ é:

- a) 2000
- b) 1000
- c) 500
- d) 100
- e) 10

Q.22) A soma dos logaritmos na base 10 de 2 números é 6, e o dobro de um desses logaritmos é 4. Com relação a esses números, julgue a afirmação a seguir:

"O produto desses números é igual a 1 milhão."

Q.23) Sobre propriedades de logaritmos, marque V para as verdadeiras e F para as falsas.

() Sendo a, b e c números reais positivos, $a \neq 1$, então: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b - \log_a c$

() Sendo a e b números reais positivos, $a \neq 1$, e m um número real então: $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

() Sendo a, b e c números reais positivos, $a \neq 1$, então: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b + \log_a c$

- a) F, F, V
- b) F, V, F
- c) V, V, F
- d) V, F, V

QUESTÃO SUPLEMENTAR...

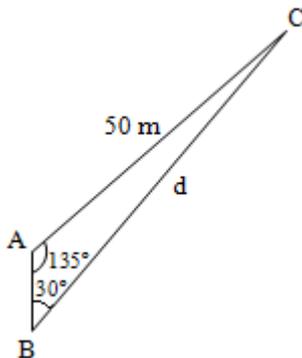
Q.24) Em uma calculadora científica de 12 dígitos quando se aperta a tecla log, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO. Depois de digitar 42 bilhões, o número de vezes que se deve apertar a tecla log para que, no visor, apareça ERRO pela primeira vez é:



- a) 4
- b) 5
- c) 3
- d) 2
- e) 1

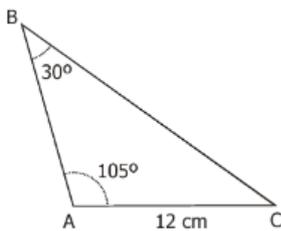
(Assunto – Lei dos senos e Lei dos cossenos)

Q.25) Na instalação das lâmpadas de uma praça de alimentação, a equipe técnica necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocada nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura. Assim, a distância “d” é:



- a) $50\sqrt{2} m$
- b) $50 \frac{\sqrt{6}}{3} m$
- c) $50\sqrt{3} m$
- d) $25\sqrt{6} m$
- e) $50\sqrt{6} m$

Q.26) Três ilhas A, B e C aparecem num mapa, em escala 1:10000, como na figura abaixo. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância em km entre as ilhas A e B é:



- a) 2,3
- b) 2,1
- c) 1,9
- d) 1,4
- e) 1,7

Q.27) Os lados de um triângulo são 3, 4 e 6. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo vale:

- a) 11/24

- b) -11/24
- c) 3/8
- d) -3/8
- e) -3/10

Q.28) Dois lados de um triângulo medem 6 m e 10 m e formam entre si um ângulo de 120°. Determinar a medida do terceiro lado.

Q.29) A, B e C são pontos de uma circunferência de raio 3 cm, $AB = BC$ e o ângulo \widehat{ABC} mede 30°. Calcule, em cm, o comprimento do segmento AC.

Q.30) Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno e do seno do menor ângulo interno desse triângulo.

Gabarito

- Q.1) D
- Q.2) B
- Q.3) E
- Q.4) C
- Q.5) D
- Q.6) A
- Q.7) $\frac{2a+b}{3}$
- Q.8) 100
- Q.9) $x = 4$ ou $x = 5$
- Q.10) D
- Q.11) A
- Q.12) A
- Q.13) 3
- Q.14) 2,833
- Q.15) 1,464974
- Q.16) 4250 e 42,5
- Q.17) $\frac{(x-y)}{x+y-2}$
- Q.18) B
- Q.19) C
- Q.20) A
- Q.21) C
- Q.22) CERTO
- Q.23) B
- Q.24) Cinco vezes
- Q.25) A
- Q.26) E
- Q.27) B
- Q.28) 14 m
- Q.29) 3 cm
- Q.30) $\sin(\alpha) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$ e $\cos(\alpha) = \frac{11}{14}$

QUADRO-RESUMO

FUNÇÃO LOGARÍTMICA
Definição:
Se $\log_b a = k \rightarrow a = b^k$, $a > 0$ e $b > 0$.
Propriedades da função logarítmica:
$\log_a a = 1$
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$
$\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a$
$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
$\log(a/b) = \log a - \log b$





CURSO PREPARATÓRIO CIDADE
LISTA 14 - Matemática



Geometria / Trigonometria

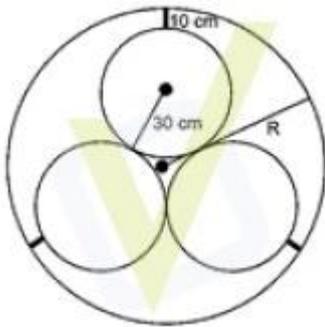
Professor: Gabriel

Aulas passadas:

- Função Geometria
- Lei dos senos e Lei dos cossenos

(Assunto – Geometria)

Q.1) Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilizando a aproximação $\sqrt{3} \cong 1,7$, o valor de R será:

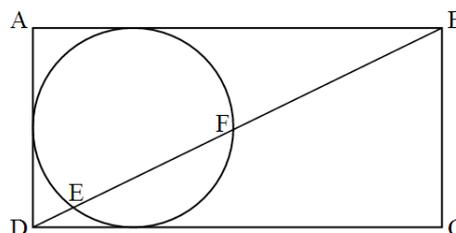
- a) 64,3
- b) 65,5
- c) 75,3
- d) 81,2
- e) 91,9

Q.2) Um vulcão que entrou em erupção gerou uma nuvem de cinzas que atingiu rapidamente a cidade de Rio Grande, a 40 km de distância. Os voos com destino a cidades situadas em uma região circular com centro no vulcão e com raio 25% maior que a distância entre o vulcão e Rio Grande foram cancelados. Nesse caso, a área da região que deixou de receber voos é:

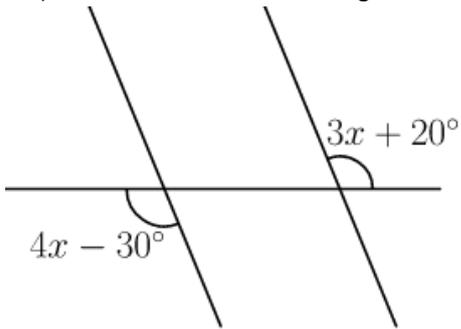
- a) Maior que 10.000 km²
- b) Menor que 8.000 km²
- c) Maior que 8.000 km² e menor que 9.000 km²
- d) Maior que 9.000 km² e menor que 10.000 km²

Q.3) (Espcex 2015) Na figura abaixo, a circunferência de raio 3 cm tangencia três lados do retângulo ABCD. Sabendo que a área deste retângulo é igual a 72 cm², a medida do segmento EF, em cm, é igual a:

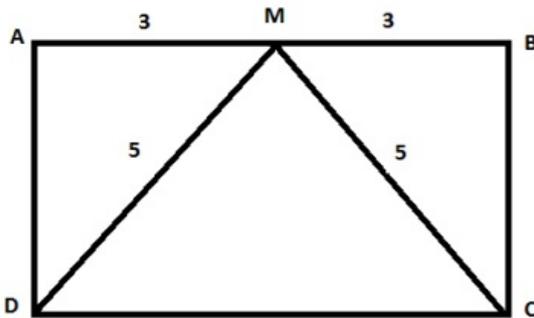
- a) $3\sqrt{5}$
- b) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
- c) $6\sqrt{5}$
- d) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$
- e) $12\sqrt{5}$



Q.4) Determine o valor de x na figura abaixo: $x=50$ graus



Q.5) (PUC RJ 2016) Considere o retângulo ABCD.



Sejam M o ponto médio do lado AB . Sabemos que $AM = MB = 3$ e que $DM = MC = 5$. Quanto vale a área do triângulo AMD ?

- a) 4
- b) 6
- c) $15/2$
- d) 10
- e) 15

Q.6) As extremidades de um fio de antena totalmente esticado estão presas no topo de um prédio e no topo de um poste, respectivamente, de 16 e 4 m de altura. Considerando-se o terreno horizontal e sabendo-se que a distância entre o prédio e o poste é de 9 m, o comprimento do fio, em metros, é:

- a) 15
- b) 10
- c) 20
- d) 40
- e) 50

Q.7) Roberto irá cercar uma parte de seu terreno para fazer um canil. Como ele tem um alambrado de 10 metros, decidiu aproveitar o canto murado de seu terreno (em ângulo reto) e fechar essa área triangular esticando todo o alambrado, sem sobra. Se ele utilizou 6 metros de um muro, do outro muro ele irá utilizar, em metros:

- a) 7
- b) 5
- c) 8
- d) 6
- e) 9

Q.8) Os ângulos internos de um quadrilátero medem $3x - 45$, $2x + 10$, $2x + 15$ e $x + 20$ graus. O menor ângulo mede, em graus:

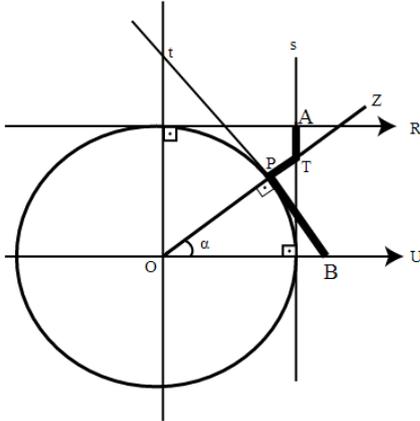
- a) 90
- b) 65
- c) 45
- d) 105
- e) 80

(Assunto – Trigonometria)

Q.9) A expressão $\frac{2tgx}{1+tg^2x}$ é idêntica a:

- a) $\cos(2x)$
- b) $2\cos(x)$
- c) $\text{sen}(2x)$
- d) $2\text{sen}(x)$

Q.10) No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z.



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, **PB, TP e AT**, pode ser calculado, como função de α , por:

- a) $\sec(\alpha)$
- b) $\text{cossec}(\alpha)$
- c) $tg(\alpha) + \text{cotg}(\alpha)$
- d) $\text{cossec}(\alpha) + \sec(\alpha)$

Q.11) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \text{sen } x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \text{sen } x & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) =$

$\det A$. Sobre a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |f(x)|$, é correto afirmar que:

- a) Possui período π .
- b) Seu conjunto imagem é $[-\frac{1}{2}, 0]$.
- c) É par.
- d) É crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Q.12) (AFA - modificada) Nas expressões x, y e z, se:

$$x = \frac{3 \log(100!)}{\log 1 + \log 8 + \log 27 + \dots + \log 100^3}$$

$$y = \frac{i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100}}{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100}}$$

$$z = \text{sen } \alpha + \text{sen } (\alpha + \pi) + \text{sen } (\alpha + 2\pi) + \dots + \text{sen } (\alpha + 99\pi)$$

Então o valor de $x^y + z$ é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3

Q.13) (AFA) Considere as funções reais f e g definidas por

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\operatorname{sen}(2x) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$$

E marque a alternativa **INCORRETA**.

- a) O conjunto imagem da função f é o intervalo $[0,1]$.
- b) A função g é ímpar
- c) A função real h definida por $h(x) = -\frac{1}{2} + g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- d) O período da função real j definida por $j(x) = \left|-\frac{1}{2} + g(x)\right|$ é $\frac{\pi}{2}$.

Q.14) (AFA) Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = \left|\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(x)}\right|$ e $g(x) = 2$, cada uma definida no seu domínio mais amplo possível. Analise as afirmações abaixo.

I – O conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ contém infinitos elementos.

II – No intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, a função f é crescente.

III – O período da função f é $p = \pi$.

Sobre as afirmações é correto afirmar que:

- a) Apenas II é verdadeira
- b) Apenas I e II são verdadeiras
- c) Todas são falsas
- d) Apenas II e III são verdadeiras

GABARITO – Lista 13

- Q.1) C
- Q.2) A
- Q.3) D
- Q.4) 50°
- Q.5) B
- Q.6) A
- Q.7) C
- Q.8) B
- Q.9) C
- Q.10) A
- Q.11) C
- Q.12) B
- Q.13) --
- Q.14) --

Aulas passadas:

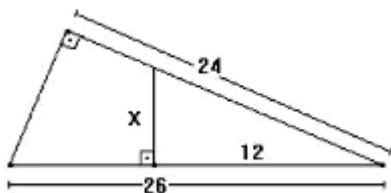
- Geometria plana

(Assunto – Geometria)

Q.1) O número de valores inteiros de x , para os quais existe um triângulo acutângulo de lados 10, 24 e x , no qual 24 é a medida do maior lado, é igual a:

- 2
- 3
- 7
- 5
- 6

Q.2) O valor de x , na figura abaixo, é:



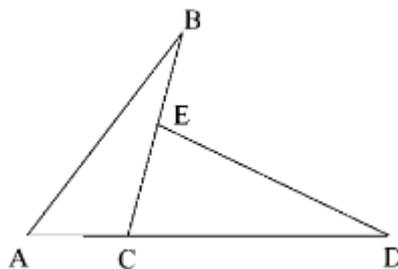
- 24
- 13
- 5
- 8
- 10

Q.3) Nesta figura, o quadrado ABCD está inscrito no triângulo AMN, cujos lados AM e NA mede, respectivamente, m e n :

Então, o lado do quadrado mede:

- $\frac{mn}{m+n}$
- $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{8}}$
- $\frac{m+n}{4}$
- $\frac{\sqrt{mn}}{2}$
- $\frac{n}{m+n}$

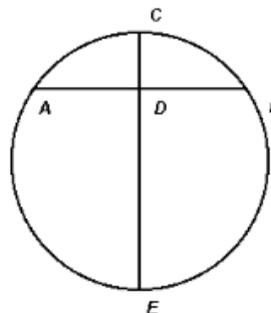
Q.4) A figura a seguir foi feita por uma criança. No entanto, sabe-se que ABC e CDE são triângulos congruentes, os vértices A, C e D são colineares e os vértices B, E e C também o são.



É correto afirmar que:

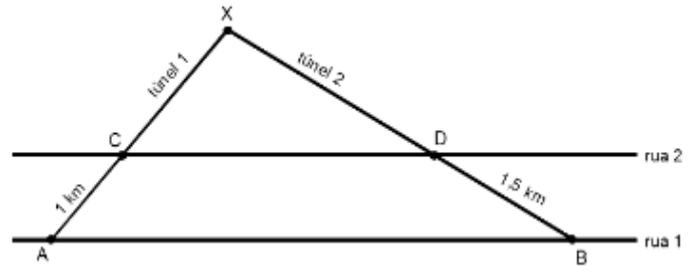
- O segmento BE é congruente ao segmento AC.
- A reta AD é perpendicular à reta BC.
- O ângulo $\widehat{B\hat{E}D}$ é congruente ao ângulo $\widehat{A\hat{C}B}$.
- O segmento CD é hipotenusa do triângulo CDE.
- O ponto E é o ponto médio do segmento BC.

Q.5) A figura abaixo mostra uma circunferência, onde AB é uma corda perpendicular ao diâmetro CE. Sabe-se que a corda AB mede " a " e que a flecha CD mede " b ". Esse é um exemplo típico de seção transversal de uma tubulação pluvial, onde a corda AB representa o nível d'água, num certo instante:



Nessas condições, pode-se afirmar que o raio R da circunferência mede:

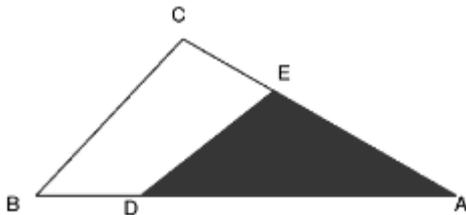
- a) $R = \frac{b^2 - 4a^2}{8a}$
- b) $R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}$
- c) $R = \frac{a^2 - 4b^2}{8b}$
- d) $R = \frac{b^2 + 4a^2}{8a}$
- e) $R = \frac{b^2 + 2a^2}{8a}$



A distância entre as estações A e C é de 1 km e entre as estações B e D, de 1,5 km. Em cada um dos túneis são perfurados 12 m por dia. Sabendo que o túnel 1 demandará 250 dias para ser construído e que os túneis deverão se encontrar em X, no mesmo dia, é CORRETO afirmar que o número de dias que a construção do túnel 2 deverá anteceder à do túnel 1 é:

- a) 135
- b) 145
- c) 125
- d) 105
- e) 115

Q.6) Uma propriedade rural tem a forma do triângulo ABC representado na figura. A região cultivada corresponde apenas à porção sombreada. Sabendo-se que $AD = \frac{3}{4}AB$ e $AE = \frac{2}{3}AC$, que porcentagem da área da propriedade rural é cultivada?



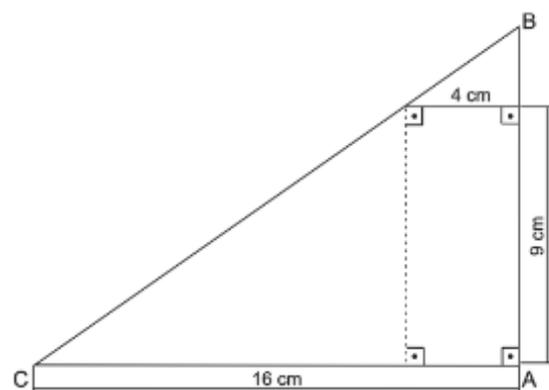
- a) 50%
- b) 60%
- c) 66%
- d) 75%
- e) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \cdot 100\%$

Q.7) Sejam ABC e FGH dois triângulos semelhantes de tal modo que suas bases AB e FG medem, respectivamente, 1cm e 3cm. Se a área do menor é igual a 8 cm^2 , podemos afirmar que a área do maior é:

- a) 24 cm^2
- b) $\frac{8}{3} \text{ cm}^2$
- c) 9 cm^2
- d) 72 cm^2
- e) $\frac{1}{9} \text{ cm}^2$

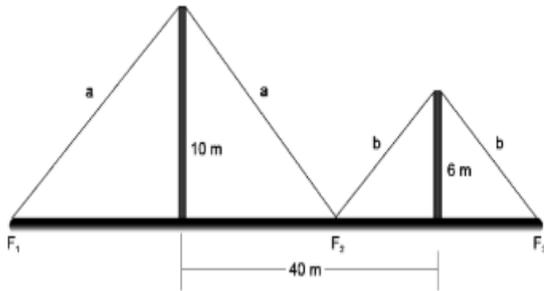
Q.8) Sob duas ruas paralelas de uma cidade serão construídos, a partir das estações A e B, passando pelas estações C e D, dois túneis retílineos, que se encontrarão na estação X, conforme ilustra a figura abaixo.

Q.9) A geometria métrica, através de suas relações, proporciona que possamos descobrir medidas desconhecidas. Usando as relações convenientes, é correto afirmar que o perímetro do triângulo ABC, abaixo, equivale a:



- a) 24 cm
- b) 34 cm
- c) 35 cm
- d) 48 cm
- e) 45 cm

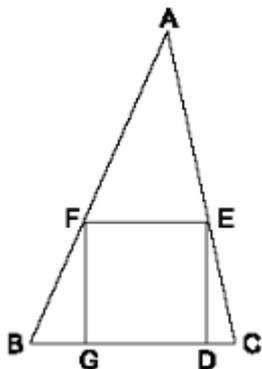
Q.10) Dois postes, um de 10 m e outro de 6 m, devem ser sustentados, por cabos de aço de comprimentos a e b , conforme ilustra a figura abaixo.



Os pontos de fixação F_1 , F_2 e F_3 devem ser determinados de modo que a quantidade de cabo seja mínima. A distância do ponto F_2 até a base do poste menor deverá ser:

- a) 10m
- b) 15m
- c) 20m
- d) 25m
- e) 30m

Q.11) No triângulo ABC da figura, o lado BC mede 4,5 e o lado do quadrado $DEFG$ mede 3. A altura do triângulo ABC , em relação ao lado BC , mede:



- a) 7,5
- b) 8,0
- c) 8,5
- d) 9,0
- e) 9,5

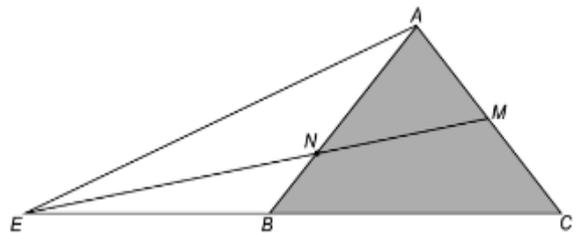
Q.12) Um turista está subindo uma trilha, em linha reta, em uma montanha que dá acesso a um mirante com uma vista muito bela. Após ter andado 200m, ele observa uma placa com os seguintes dizeres:

“Parabéns! Você já está a 34 m de altura! O mirante está a 170m de altura: agora falta pouco! Não desista. A vista é linda!”

Nessas condições, o turista ainda vai ter que andar:

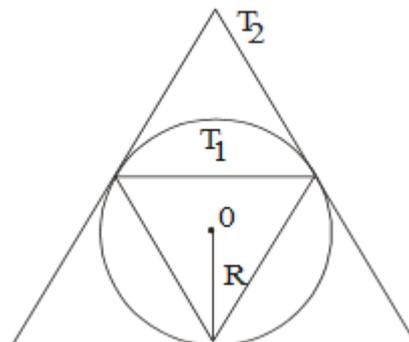
- a) 720m
- b) 740m
- c) 760m
- d) 780m
- e) 800m

Q.13) Na figura em evidência, ABC é um triângulo equilátero de 12 cm de lado. Além disso, M é o ponto médio de AC e $BE = 12$ cm. Nessas condições, a medida do segmento BN , em cm, é igual a:



- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

Q.14) Numa circunferência de raio $R > 0$ consideram-se, como na figura, os triângulos equiláteros T_1 , inscrito, e T_2 , circunscrito. A razão entre a altura de T_2 e a altura de T_1 é:



- a) 4
- b) 3
- c) 5/2
- d) 2/3
- e) 2

GABARITO – Lista 15

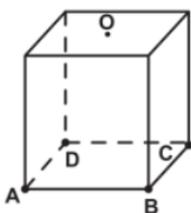
- Q.1) C
- Q.2) C
- Q.3) A
- Q.4) B
- Q.5) B
- Q.6) A
- Q.7) D
- Q.8) C
- Q.9) D
- Q.10) B
- Q.11) D
- Q.12) E
- Q.13) C
- Q.14) E

Aulas passadas:

- Prismas, Cones e Pirâmides
- Polinômios

(Assunto – Prismas, Cones e Pirâmides)

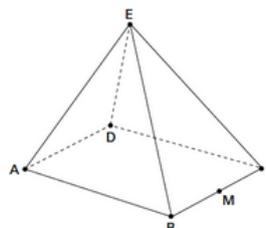
Q.1) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.



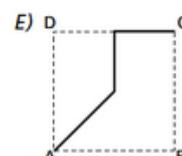
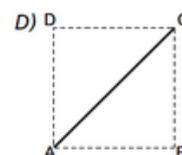
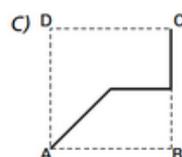
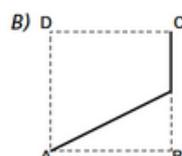
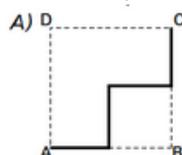
Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas AD, BC, AB e CD, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos. Os formatos dos sólidos descartados são

- Todos iguais
- Todos diferentes
- Três iguais e um diferente
- Apenas dois iguais
- Iguais dois a dois

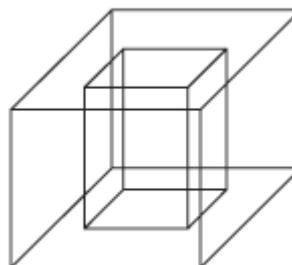
Q.2) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é:



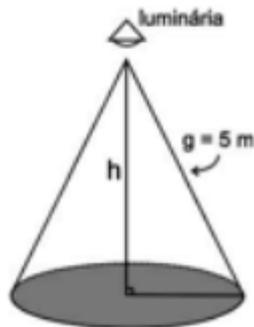
Q.3) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

- a) 12 cm^3
- b) 64 cm^3
- c) 96 cm^3
- d) 1.216 cm^3
- e) 1.728 cm^3

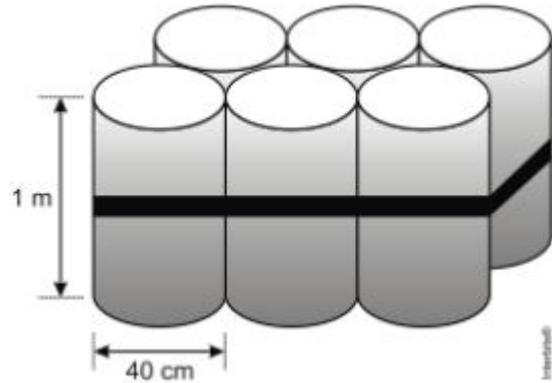
Q.4) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28,26 \text{ m}^2$, considerando $\pi=3,14$, a altura h será igual a:

- a) 3m
- b) 4m
- c) 5m
- d) 9m
- e) 16m

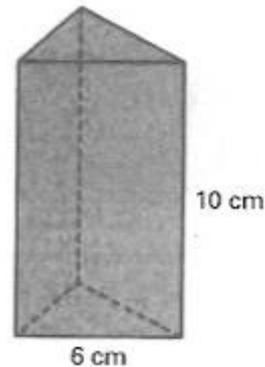
Q.5) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R\$ 2,50 por metro cúbico utilizado.



Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit em um mês pagará a quantia de (considere $\pi=3$)

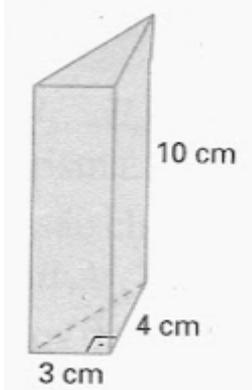
- a) R\$ 86.40
- b) R\$ 21.60
- c) R\$ 8.64
- d) R\$ 7.20
- e) R\$ 1.80

Q.6) Em um prisma regular triangular, cada aresta lateral mede 10 cm e cada aresta da base mede 6 cm. Calcular desse Prisma:

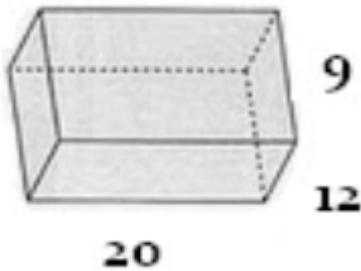


- a) A área de uma face lateral
- b) A área de uma base
- c) A área lateral
- d) A área total

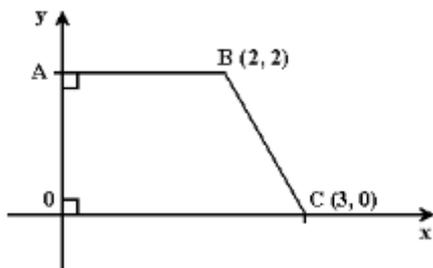
Q.7) Um prisma reto de altura 10 cm tem como polígonos das bases triângulos retângulos de catetos 3 cm e 4 cm. Calcule a área total desse prisma.



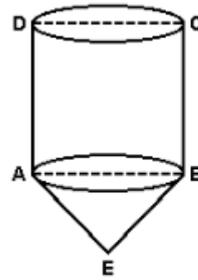
Q.8) As dimensões de um paralelepípedo reto-retângular são 20 cm, 12 cm e 9 cm. Calcule a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.



Q.9) O trapézio OABC da figura a seguir gira completamente em torno do eixo Ox. Calcule o inteiro mais próximo do volume do sólido obtido.

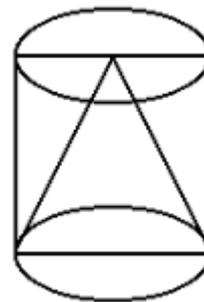


Q.10) No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e $AE = BE = \sqrt{10}$. O volume desse sólido é:



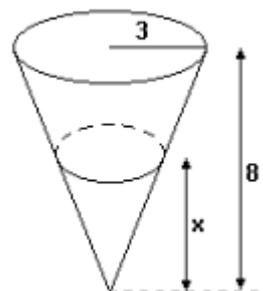
- a) $\frac{5\pi}{2}$
- b) $\frac{4\pi}{3}$
- c) 4π
- d) 5π
- e) 3π

Q.11) A figura abaixo mostra um cone inscrito num cilindro. Ambos têm raio da base x e altura 2x. Retirando-se o cone do cilindro, o volume do sólido resultante é:



- a) $2\pi x^3/3$
- b) $4\pi x^3/3$
- c) $8\pi x^3/3$
- d) $2\pi x^2/3$
- e) $8\pi x^2/3$

Q.12) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível a altura x atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:



- a) $8/3$ cm
- b) 6 cm
- c) 4 cm
- d) $4\sqrt{3}$ cm
- e) $4\sqrt[3]{4}$ cm

(Assunto – Polinômios)

Q.13) Determinar a condição para que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrado perfeito.

Q.14) Determinar a, b e c de modo que se tenha para todo x real: $\frac{ax^2 - bx - 5}{3x^2 + 7x + c} = 3$.

Q.15) Determinar a condição necessária e suficiente para que a expressão $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$, onde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são reais não nulos, assumam um valor que não depende de x.

Q.16) Determinar os reais a, b, c de modo que $f = (a - 2)x^3 + (b + 2)x + (3 - c)$ seja o polinômio nulo.

Q.17) Seja a função polinomial $f(x) = x^{15} + x^{14} + x^{13} + \dots + x^2 + x + 1$.
Calcular $f(0)$, $f(1)$ e $f(-1)$.

Q.18) Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, pede-se calcular $f(x+1)$

Q.19) Qual das expressões abaixo não representa um polinômio na variável x?

- a) $x^5 + x^3 + 2$
- b) $0x^4 + 0x^2$
- c) 3
- d) $x^{\frac{5}{2}} + 3x^2$
- e) $(\sqrt{x})^4 + x + 2$

GABARITO

Q.1) E

Q.2) C

Q.3) D

Q.4) B

Q.5) B

Q.6) a) 60cm^3 b) $9\sqrt{3}\text{ cm}^2$ c) 180 cm^2 d) $(180 + 18\sqrt{3})\text{ cm}^2$

Q.7) 132 cm^2

Q.8) 25 cm^2

Q.9) 29

Q.10) E

Q.11) B

Q.12) E

Q.13) $b^2 = 4ac$

Q.14) $a = 9, b = -21, c = -\frac{5}{3}$

Q.15) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Q.16) $a = 2, b = -2, c = 3$

Q.17) $f(0) = 1, f(1) = 16, f(-1) = 0$

Q.18) $x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

Q.19) D

Q.1) Desenvolver, usando o teorema binomial: $\left(m + \frac{1}{m}\right)^5 - \left(m - \frac{1}{m}\right)^5$

Q.2) Desenvolver $(x + a)^7$

Q.3) Quais os 3 primeiros termos do desenvolvimento de $(x + y)^{100}$ segundo as potências de expoentes decrescentes de x ?

Q.4) Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(1 - 2x)^6$?

Q.5) Desenvolvendo $(x + 3y)^9$, qual o termo que contém x^4 ?

Q.6) No desenvolvimento de $(1 - 2x^2)^5$, qual o coeficiente de x^8 ?

Q.7) Qual o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(x^2 + x^{-3})^8$?

Q.8) Qual o termo em x^3 no desenvolvimento de $\left(x - \frac{a^2}{x}\right)^{15}$?

Q.9) Qual o termo em x^3 no desenvolvimento $\left(\sqrt{x} - \frac{a^2}{x}\right)^{15}$?

Q.10) No desenvolvimento de $(x + a)^{100}$, qual o coeficiente do termo que contém x^{60} ?

Q.11) Calcule a distância entre os pontos $A(1, 3)$ e $B(-1, 4)$.

Q.12) Calcular a distância do ponto $P(-6, 8)$ à origem do sistema cartesiano.

Q.13) Calcular a distância entre os pontos $A(a - 3, b + 4)$ e $B(a + 2, b - 8)$

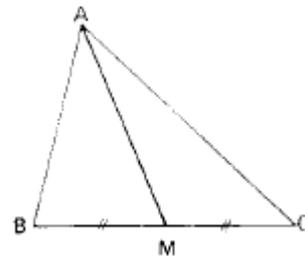
Q.14) Calcular o perímetro do triângulo ABC , sendo dados $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$ e $C(4, -2)$

Q.15) Determinar x de modo que o triângulo ABC seja retângulo em B . São dados: $A(4, 5)$, $B(1, 1)$ e $C(x, 4)$.

Q.16) Dados os pontos $B(2, 3)$ e $C(-4, 1)$, determinar o vértice A do triângulo ABC , sabendo que é o ponto do eixo y do qual se vê BC sob ângulo reto.

Q.17) Dados os vértices consecutivos, $A(-2, 1)$ e $B(4, 4)$, de um paralelogramo, e o ponto $E(3, -1)$, intersecção de suas diagonais, determinar os outros dois vértices.

Q.18) Calcular o comprimento da mediana AM do triângulo ABC cujos vértices são os pontos $A(0, 0)$, $B(3, 7)$ e $C(5, -1)$



Q.19) Se $M(2, 1)$, $N(3, 3)$ e $P(6, 2)$ são os pontos médios dos lados AB , BC e CA , respectivamente, de um triângulo ABC , determinar as coordenadas de A , B e C .

Q.20) Dados $A(3, 1)$ e $B(5, 5)$, obter o ponto em que a reta AB intercepta o eixo das ordenadas.

GABARITO – Lista 18

Q.1) $10m^3 + \frac{20}{m} + \frac{2}{m^5}$

Q.2) $x^7 + 7x^6a + 21x^5a^2 + 35x^4a^3 + 35x^3a^4 + 21x^2a^5 + 7xa^6 + a^7$

Q.3) $\binom{100}{0}x^{100}$; $\binom{100}{1}x^{99}y$; $\binom{100}{2}x^{98}y^2$

Q.4) 60

Q.5) $30618x^4y^5$

Q.6) 80

Q.7) 28

Q.8) $5005a^{12}x^3$

Q.9) $-455x^3a^6$

Q.10) $\binom{100}{40}$

Q.11) $d = \sqrt{5}$

Q.12) $d = 10$

Q.13) $d = 13$

Q.14) $2\sqrt{13} + 5\sqrt{2}$

Q.15) $x = -3$

Q.16) A(0, -1) ou A(0, 5)

Q.17) C(8, -3) e D(2, -6)

Q.18) $d = 5$

Q.19) A(5, 0), B(-1, 2), C(7, 4)

Q.20) (0, -5)

Q.1) Desenvolver, usando o teorema binomial: $\left(m + \frac{1}{m}\right)^5 - \left(m - \frac{1}{m}\right)^5$

Q.2) Desenvolver $(x + a)^7$

Q.3) Quais os 3 primeiros termos do desenvolvimento de $(x + y)^{100}$ segundo as potências de expoentes decrescentes de x ?

Q.4) Qual o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(1 - 2x)^6$?

Q.5) Desenvolvendo $(x + 3y)^9$, qual o termo que contém x^4 ?

Q.6) No desenvolvimento de $(1 - 2x^2)^5$, qual o coeficiente de x^8 ?

Q.7) Qual o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(x^2 + x^{-3})^8$?

Q.8) Qual o termo em x^3 no desenvolvimento de $\left(x - \frac{a^2}{x}\right)^{15}$?

Q.9) Qual o termo em x^3 no desenvolvimento $\left(\sqrt{x} - \frac{a^2}{x}\right)^{15}$?

Q.10) No desenvolvimento de $(x + a)^{100}$, qual o coeficiente do termo que contém x^{60} ?

Q.11) Calcule a distância entre os pontos $A(1, 3)$ e $B(-1, 4)$.

Q.12) Calcular a distância do ponto $P(-6, 8)$ à origem do sistema cartesiano.

Q.13) Calcular a distância entre os pontos $A(a - 3, b + 4)$ e $B(a + 2, b - 8)$

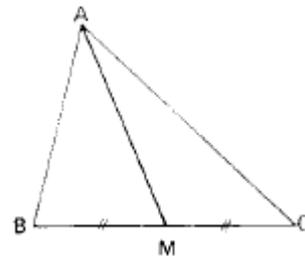
Q.14) Calcular o perímetro do triângulo ABC, sendo dados $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$ e $C(4, -2)$

Q.15) Determinar x de modo que o triângulo ABC seja retângulo em B. São dados: $A(4, 5)$, $B(1, 1)$ e $C(x, 4)$.

Q.16) Dados os pontos $B(2, 3)$ e $C(-4, 1)$, determinar o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é o ponto do eixo y do qual se vê BC sob ângulo reto.

Q.17) Dados os vértices consecutivos, $A(-2, 1)$ e $B(4, 4)$, de um paralelogramo, e o ponto $E(3, -1)$, intersecção de suas diagonais, determinar os outros dois vértices.

Q.18) Calcular o comprimento da mediana AM do triângulo ABC cujos vértices são os pontos $A(0, 0)$, $B(3, 7)$ e $C(5, -1)$



Q.19) Se $M(2, 1)$, $N(3, 3)$ e $P(6, 2)$ são os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, de um triângulo ABC, determinar as coordenadas de A, B e C.

Q.20) Dados $A(3, 1)$ e $B(5, 5)$, obter o ponto em que a reta AB intercepta o eixo das ordenadas.

GABARITO – Lista 18

Q.1) $10m^3 + \frac{20}{m} + \frac{2}{m^5}$

Q.2) $x^7 + 7x^6a + 21x^5a^2 + 35x^4a^3 + 35x^3a^4 + 21x^2a^5 + 7xa^6 + a^7$

Q.3) $\binom{100}{0}x^{100}$; $\binom{100}{1}x^{99}y$; $\binom{100}{2}x^{98}y^2$

Q.4) 60

Q.5) $30618x^4y^5$

Q.6) 80

Q.7) 28

Q.8) $5005a^{12}x^3$

Q.9) $-455x^3a^6$

Q.10) $\binom{100}{40}$

Q.11) $d = \sqrt{5}$

Q.12) $d = 10$

Q.13) $d = 13$

Q.14) $2\sqrt{13} + 5\sqrt{2}$

Q.15) $x = -3$

Q.16) A(0, -1) ou A(0, 5)

Q.17) C(8, -3) e D(2, -6)

Q.18) $d = 5$

Q.19) A(5, 0), B(-1, 2), C(7, 4)

Q.20) (0, -5)

Geometria Analítica (eq da reta) / Análise Combinatória

Lista 20

Q.1) Determinar as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são $A(0, 0)$, $B(1, 3)$ e $C(4, 0)$.

Q.2) Determinar a equação da reta definida pelos pontos $A(7/2, 5/2)$ e $B(-5/2, -7/2)$

Q.3) A reta determinada por $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ passa por $C(3, 4)$. Qual é a relação entre a e b ?

Q.4) Determinar a intersecção das retas $x + 2y = 3$ e $2x + 3y = 5$.

Q.5) Determinar a para que as retas de equações $x + 2y - 2a = 0$, $ax - y - 3 = 0$ e $2x - 2y - a = 0$ sejam concorrentes no mesmo ponto.

Q.6) Determinar m de modo que as retas de equações $3x + y - m = 0$, $3x - y + 1 = 0$ e $5x - y - 1 = 0$ definam um triângulo.

Q.7) Dado o ponto $A(1, 2)$, determine as coordenadas de dois pontos P e Q , situados respectivamente sobre as retas $y = x$ e $y = 4x$, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento PQ .

Q.8) Determinar o ponto B da reta s de tal forma que o segmento AB intercepte a reta r no ponto C que o divide na razão $1/2$. São dados: $A(-3, 1)$, $(r)x + y = 0$ e $(s)2y - 3x + 1 = 0$.

Q.9) Para que valores de k as retas $(k - 1)x + 6y + 1 = 0$ e $4x + (k + 1)y - 1 = 0$ são paralelas?

Q.10) Entre os triângulos OAB com o vértice O na origem e os outros dois vértices A e B , respectivamente, nas retas $y = 1$ e $y = 3$ e alinhados com o ponto $P(7, 0)$ determinar aquele para o qual é mínima a soma dos quadrados dos lados.

Q.11) Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 7, 8?

Q.12) Quantos números telefônicos com 7 dígitos podem ser formados se usarmos os dígitos de 0 a 9?

Q.13) Quantos divisores positivos tem o número $N = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$?

Q.14) Uma urna tem 10 bolinhas numeradas 1, 2, 3, ..., 10. Três bolinhas são extraídas sucessivamente, sem reposição. De quantas formas os números das bolinhas formam uma P.A. na ordem em que foram extraídas? (Sugestão: construa o diagrama de árvore)

Q.15) Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada tipo deve assinalar a estação de partida e de chegada respectivamente?

Q.16) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números com algarismos distintos existem entre 500 e 1000?

Q.17) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) existem?

Q.18) Formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtém permutando-se os algarismos 1, 2, 3, 6 e 8, que lugar ocupa o número 68.412?

Q.19) Uma peça para ser fabricada deve passar por 7 máquinas, sendo que a operação de cada máquina independe das outras. De quantas formas as máquinas podem ser dispostas para montar a peça?

Q.20) Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoante?

GABARITO – Lista 20

Q.1) $3x - y = 0, x + y - 4 = 0$ e $y = 0$

Q.2) $x - y - 1 = 0$

Q.3) $3b + 4a - ab = 0$

Q.4) (1, 1)

Q.5) $a = 2$ ou $a = -3/2$

Q.6) $m \neq 7$ e $m \in \mathfrak{R}$

Q.7) $P\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Q.8) $B\left(\frac{9}{5}, \frac{11}{5}\right)$

Q.9) $K = 5$ ou $k = -5$

Q.10) $A(5, 1)$ e $B(1, 3)$

Q.11) 125

Q.12) 10^7

Q.13) $(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1) \cdot (d + 1)$

Q.14) 40

Q.15) 240

Q.16) 280

Q.17) 125

Q.18) 58°

Q.19) $7! = 5040$

Q.20) 480

Geometria Analítica (Teorema angular e distância de Ponto à reta)
/ Números Complexos

Lista 21

Q.1) Determinar a equação da reta (s) que contém P(-5, 4) e é paralela à reta (r) cujas equações paramétricas são $x = 3t$ e $y = 2 - 5t$

Q.2) Determinar a equação da reta que passa por P(-5, 2) e é paralela à reta definida por A(1/2, 6/5) e B(3/2, -4/5).

Q.3) Determinar a equação da reta u que passa pelo ponto de intersecção das retas r e t e é paralela à reta s. Dados:

$$(r) \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1, (s) x = 3t \text{ e } y = 2 + 3t$$
$$(t) 3x + 4y = 0.$$

Q.4) Dois lados de um paralelogramo ABCD estão contidos nas retas (r) $y = 2x$ e (s) $x = 2y$. Dado o vértice A(5, 4), determinar B, C e D.

Q.5) Determinar a equação da reta s que contém P(3, 4) e é perpendicular à reta (r) $2x + 3y = 0$

Q.6) Determinar a projeção ortogonal do ponto P(-7, 15) sobre a reta (r) $x = 2t$ e $y = 3t$

Q.7) Determinar o pé da perpendicular baixada de P(2, 6) sobre (r) $x + y - 2 = 0$.

Q.8) São dados a reta r: $x - y + 1 = 0$ e o ponto P = (3, 2). Determinar as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre a reta r.

Q.9) Determinar o ponto Q, simétrico de P em relação à reta (r). Dados P(-3, 2) e (r) $x + y - 1 = 0$.

Q.10) Calcular o ângulo agudo formado pelas retas:
(r) $3x - y + 5 = 0$ e (s) $2x + y + 3 = 0$.

Q.11) Qual é a condição para que o produto de dois números complexos $(a + ib)$ e $(c + id)$ dê um número real?

Q.12) Colocar na forma $a + ib$ o seguinte número complexo: $\frac{i^3 - i^2 + i^{17} - i^{35}}{i^{16} - i^{13} + i^{30}}$

Q.13) Determinar x ($x \in \mathfrak{R}$) de modo que o número $z = \frac{2-xi}{1+2xi}$ seja imaginário puro.

Q.14) Determinar a ($a \in \mathfrak{R}$) de modo que o número $z = \frac{1+2i}{2+ai}$ seja real.

Q.15) Determinar o número complexo cujo produto por $5 + 8i$ é real e cujo quociente por $1 + i$ é imaginário puro.

Q.16) Determinar os números complexos z tais que $\frac{z}{1-i} + \frac{z-1}{1+i} = \frac{5}{2} + i \cdot \frac{5}{2}$

Q.17) Sejam dados os números complexos $z = x + iy$ e $u = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sendo \bar{z} o conjugado de z , calcular as partes real e imaginária do número complexo $z_1 = u \cdot \bar{z}$.

Q.18) Determinar os números complexos z tais que $z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 13 + 6i$.

Q.19) Determinar o módulo, o argumento principal e colocar na forma trigonométrica o número: $-5 - 5i$

Q.20) Calcular o módulo do número $\frac{3+3i}{1+2i}$

GABARITO – Lista 21

Q.1) $(s) 5x + 3y + 13 = 0$

Q.2) $2x + y + 8 = 0$

Q.3) $x - y - 14 = 0$

Q.4) B(4, 2), C(0, 0), D(1, 2)

Q.5) $(s) 3x - 2y - 1 = 0$

Q.6) $M\left(\frac{62}{13}, \frac{93}{13}\right)$

Q.7) (-1, 3)

Q.8) (2, 3)

Q.9) Q(-1, 4)

Q.10) $\theta = \frac{\pi}{4}$

Q.11) $ad + bc = 0$

Q.12) $-1 + i$

Q.13) $x = \pm 1$

Q.14) $a = 4$

Q.15) impossível

Q.16) $z = 3 + 2i$

Q.17) $real(z_1) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y; imag(z_1) =$

$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)i$

Q.18) $z = \pm 2 + 3i$

Q.19) $\rho = 5\sqrt{2}; \theta = \frac{5\pi}{4}; -5 - 5i = 5\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) +$

$i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right]$

Q.20) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

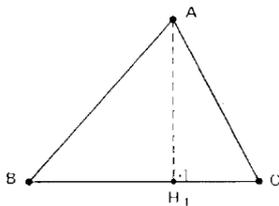
Lista 22

Q.1) Calcule a distância da origem à reta $(r) ax + by + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$

Q.2) Achar a distância da reta $r: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -7 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ e a origem.

Q.3) Calcular a distância do ponto $P(-3, -1)$ à reta $(r) 5x - 5y + 2 = 0$

Q.4) Calcular a altura AH , do triângulo de vértices $A(-3; 0)$, $B(0; 0)$ e $C(6; 8)$.



Q.5) Calcular a altura do trapézio cujos vértices são $A(0, 0)$, $B(7, 1)$, $C(6, 5)$ e $D(-8, 3)$.

Q.6) O ponto $P=(2, -5)$ é um vértice de um quadrado que tem um dos seus lados não adjacentes a P sobre a reta $x - 2y - 7 = 0$. Qual é a área do quadrado?

Q.7) Calcular a distância entre as retas $(r) 3x + 4y - 13 = 0$ e $(s) 3x + 4y + 7 = 0$.

Q.8) Determinar os pontos da reta $(r) y = 2x$ que estão à distância 2 da reta $(s) 4x + 3y = 0$.

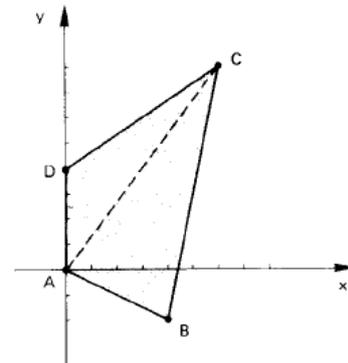
Q.9) Determinar as equações das retas que formam 45° com o eixo dos x e estão à distância $\sqrt{2}$ do ponto $P(3, 4)$.

Q.10) Obter uma reta paralela a $(r) x + y + 6 = 0$ e distante $\sqrt{2}$ do ponto $C(1, 1)$.

Q.11) Determinar as equações das perpendiculares à reta $(r) 7x - 24y + 1 = 0$, as quais estão à distância de 3 unidades do ponto $P(1, 0)$.

Q.12) Determinar a equação de uma reta que passa por $P(3, 0)$ e dista 2 unidades da origem.

Q.13) Calcular a área do quadrilátero $ABCD$, dados: $A(0, 0)$, $B(4, -2)$, $C(6, 8)$ e $D(0, 4)$.



Q.14) Calcular a área do triângulo cujos vértices são $A(a, a+3)$, $B(a-1, a)$ e $C(a+1, a+1)$.

Q.15) Determine a área do triângulo ABC onde A , B e C são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos MN , NP e PM , sendo $M(-1, -5)$, $N(1, 3)$ e $P(7, -5)$.

GABARITO – Lista 22

Q.1) 1

Q.2) $\frac{17\sqrt{13}}{13}$

Q.3) $3/5$

Q.4) $12/5$

Q.5) $\frac{29\sqrt{2}}{10}$

Q.6) $\sqrt{5}$

Q.7) 4

Q.8) (1, 2) e (-1, -2)

Q.9) $(r_1) x - y + 3 = 0$ ou $(r_2) x - y - 1 = 0$

Q.10) $x + y = 0$ ou $x + y - 4 = 0$

Q.11) $24x + 7y + 51 = 0$ ou $24x + 7y - 99 = 0$

Q.12) $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (x - 3)$

Q.13) 34

Q.14) $5/2$

Q.15) 8

Lista 23

Q.1) Determinar a equação da circunferência de centro $C(0, -3)$ e raio $r = 2$.

Q.2) Qual é a equação da circunferência de centro $C(1, 2)$ que passa por $P(5, 5)$?

Q.3) Determinar o centro e o raio das seguintes circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

Q.4) Achar a equação da reta que passa pelo centro da circunferência $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$ e é perpendicular à reta $x - y - 16 = 0$.

Q.5) Determinar o centro e o raio da circunferência cuja equação é $4x^2 + 4y^2 - 12x + 12y - 7 = 0$.

Q.6) Para que valores de m e k a equação $mx^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ representa uma circunferência?

Q.7) Determinar a, b, c de modo que a equação $2x^2 + ay^2 + bxy + 3x + 4y + c = 0$ represente uma circunferência.

Q.8) Um quadrado tem vértices consecutivos $A(5, 0)$ e $B(-1, 0)$. Determinar a equação da circunferência circunscrita ao quadrado.

Q.9) Determinar p de modo que o ponto $A(7, 9)$ seja exterior à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - p = 0$.

Q.10) Obter a intersecção de $(s) y = x$ com $(\lambda)x^2 + y^2 = 2$.

Q.11) Obter a intersecção de $(s) y = x - 2$ com $(\lambda)x^2 + y^2 = 2$.

Q.12) Calcular a distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 1 = 0$ à reta $4x + 3y = 0$.

Q.13) Qual é a posição da reta $(r) 4x + 3y = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 1 = 0$?

Q.14) Dadas a reta $(r) 3x + 2y + 17 = 0$ e a circunferência $(\lambda)x^2 + y^2 + 6x + 8y + 12 = 0$, pede-se:

- A posição relativa de r e λ
- A intersecção de r com λ

Q.15) Determinar os pontos P e Q onde a circunferência $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 4 = 0$ encontra o eixo dos x .

Q.16) Determinar os pontos P e Q onde a circunferência $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 4 = 0$ encontra a reta cuja equação é $3x + 2y + 12 = 0$.

Q.17) Dadas a circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ e a reta $x = k$ para que valores de k a reta intercepta a circunferência em pontos distintos?

Q.18) Determinar c de modo que a reta $(r) 4x - 3y + c = 0$ seja exterior à circunferência $(\lambda)x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

GABARITO – Lista 23

Q.1) $x^2 + (y + 3)^2 = 4$

Q.2) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Q.3) C(3, -2) e r = 5

Q.4) $x + y - 5 = 0$

Q.5) C(3/2, -3/2) e r = 5/2

Q.6) $m = 1$ e $k < 13$

Q.7) $a = 2, b = 0, c < 25/8$

Q.8) $(x - 2)^2 + (y \pm 3)^2 = 18$

Q.9) $-2 < p < 98$

Q.10) $s \cap \lambda = \{(1, 1), (-1, -1)\}$

Q.11) $s \cap \lambda = \{(1, -1)\}$

Q.12) 1/10

Q.13) Como $d < R$, é secante.

Q.14) a) secantes b) $[(-1, -7), (-5, -1)]$

Q.15) P(1, 0) e Q(4, 0)

Q.16) P(-4, 0) e Q(0, -6)

Q.17) $-1 < k < 3$

Q.18) $c < -6$ ou $c > 4$

Geometria Analítica (Elipse, Hipérbole e Parábola)

Lista 24

Q.1) O ponto $C = (3, 2)$ é o centro de uma elipse tangente aos eixos coordenados. Se os eixos de simetria são paralelos aos eixos coordenados, escreva a equação da elipse.

Q.2) As metades do eixo maior e da distância focal, de uma elipse medem, respectivamente, 10 cm e 6 cm, e seu centro é o ponto $(4, -2)$. Se o eixo menor é paralelo ao eixo ordenado Ox , escrever a equação reduzida dessa elipse.

Q.3) Calcular a distância focal e a excentricidades da elipse $(\lambda) 25x^2 + 169y^2 = 4225$.

Q.4) Determinar a equação da elipse com centro na origem, que passa pelo ponto $P(1, 1)$ e tem um foco $F_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$.

Q.5) Determinar os focos da cônica de equação $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

Q.6) Qual é a equação do conjunto dos pontos $P(x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1(0, -6)$ e $F(0, 10)$ é 34?

Q.7) Obter a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

Q.8) Calcular a excentricidade da hipérbole cuja equação é $9x^2 - 25y^2 = 1$

Q.9) Determinar as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $9y^2 - 16x^2 = 144$

Q.10) Obter os focos da cônica cuja equação é $\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

Q.11) Achar as coordenadas do foco F e a equação da diretriz da parábola $y^2 = -8x$.

Q.12) Determinar o foco e o vértice da parábola $(\lambda)(y - 3)^2 = 8(x - 1)$

Q.13) Achar a equação da diretriz da parábola representada pela equação $y = (x - 3)^2$

Q.14) Achar a equação da parábola que tem eixo de simetria vertical e passa pelos pontos $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(-4, 20)$.

Q.15) Obter a equação da parábola cuja diretriz é $(d) x = 0$ e cujo foco é $F(2, 2)$.

Q.16) Achar a distância do ponto $P = (2, 4)$ à reta determinada pelos pontos de intersecção da função $f(x) = x^2 - x$ com a sua inversa.

Q.17) Dada a parábola de equação $x = y^2 - 6y + 8$, determinar as coordenadas do vértice.

GABARITO – Lista 24

Q.1) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Q.2) $\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$

Q.3) $2c = 64; e = \frac{12}{13}$

Q.4) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$

Q.5) $F_1 = (-3, 1)$ e $F_2 = (5, 1)$

Q.6) $\frac{x^2}{225} + \frac{(y-2)^2}{289} = 1$

Q.7) $2c = 20$

Q.8) $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$

Q.9) $F_1(0, -5)$ e $F_2(0, 5)$

Q.10) $F_1(-2, 1)$ e $F_2(4, 1)$

Q.11) $F(-2, 0), x = 2$

Q.12) $V(1, 3)$ e $F(3, 3)$

Q.13) $y = -\frac{1}{4}$

Q.14) $y = x^2 - x$

Q.15) $(y - 2)^2 = 4 \cdot (x - 1)$

Q.16) $\sqrt{2}$

Q.17) Vértice $V = (-1, 3)$ parâmetro $p = 1/2$

Lista 25

Q.1) Determinar $x \in \mathfrak{R}$ e $y \in \mathfrak{R}$ para que se tenha:

- a) $3 + 5ix = y - 15i$
- b) $(x + yi)(2 + 3i) = 1 + 8i$
- c) $(3 + yi) + (x - 2i) = 7 - 5i$
- d) $(x + yi)^2 = 2i$
- e) $(2 - x + 3y) + 2yi = 0$
- f) $(3 - i)(x + yi) = 20$

Q.2) Qual é a condição para que o produto de dois números complexos $a + ib$ e $c + id$ dê um número real?

Q.3) Determinar $x | x \in \mathfrak{R}$ de modo que o número $z = \frac{2-xi}{1+2xi}$ seja imaginário puro

Q.4) Determinar $a | a \in \mathfrak{R}$ de modo que o número $z = \frac{1+2i}{2+ai}$ seja real.

Q.5) Determinar o número complexo cujo produto por $5 + 8i$ é real e cujo quociente por $1 + i$ é imaginário puro.

Q.6) Determinar os números complexos z tais que $\frac{z}{1-i} + \frac{z-1}{1+i} = \frac{5}{2} + i \cdot \frac{5}{2}$

Q.7) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $\bar{z} = -2zi$.

Q.8) Sejam dados os números complexos $z = x + iy$ e $u = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Sendo \bar{z} o conjugado de z , calcular as partes real e imaginária do número complexo $z_1 = u \cdot \bar{z}$.

Q.9) Determinar os números complexos z tais que $z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 13 + 6i$

Q.10) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = \bar{z}$

Q.11) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = i$

Q.12) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

Q.13) Calcular:

- a) $\sqrt{-7 + 24i}$
- b) $\sqrt{5 + 12i}$
- c) $\sqrt[3]{-11 - 2i}$
- d) $\sqrt[4]{28 - 96i}$

Q.14) Calcular:

- a) $\sqrt[4]{1}$
- b) $\sqrt[3]{1 + i}$
- c) $\sqrt{-16i}$
- d) $\sqrt[6]{-729}$
- e) $\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$
- f) $\sqrt[3]{-64}$
- g) $\sqrt[3]{1}$
- h) $\frac{1}{\sqrt{-4i}}$

GABARITO

Q.1) .

a. $x = -3, y = 3$

b. $x = 2, y = 1$

c. $x = 4, y = -3$

d. $x = 1, y = 1$ ou $x = -1, y = -1$

e. $x = 2, y = 0$

f. $x = 6, y = 2$

Q.2) $ad + bc = 0$

Q.3) $x = \pm 1$

Q.4) $a = 4$

Q.5) Impossível

Q.6) $z = 3 + 2i$

Q.7) $z = 0$

Q.8) $real: z_1 = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$ $imag: z_1 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)i$

Q.9) $z = \pm 2 + 3i$

Q.10) $z = 0$ ou i ou $-i$ ou 1 ou -1

Q.11) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Q.12) $z = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$

Q.13) .

a. $3 + 4i$ ou $-3 - 4i$

b. $3 + 2i$ ou $-3 - 2i$

c. $1 + 2i$ ou $-\frac{1+2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}i$ ou $-\frac{1-2\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-2}{2}i$

d. $-3 + i$ ou $3 - i$ ou $1 + 3i$ ou $-1 - 3i$

Q.14) .

a. 1 ou i ou -1 ou $-i$

b. $\sqrt[6]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ou $\sqrt[6]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\sqrt[6]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

c. $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ou $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

d. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ou $3i$ ou $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ou $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ou $-3i$ ou $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

e. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

f. $2 + 2\sqrt{3}i$ ou -4 ou $2 - 2\sqrt{3}i$

g. 1 ou $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou -1 ou $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

h. $-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$ ou $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$

Lista 25

Q.1) Se m é raiz do polinômio real $P(x) = x^6 - (m + 1)x^5 + 32$, determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$.

- a) 10
- b) 20
- c) 30
- d) 40
- e) 50

Q.2) O resto da divisão de $4x^9 + 7x^8 + 4x^3 + 3$ por $x + 1$ vale:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

Q.3) O valor real de a para o qual i é raiz do polinômio $P(x) = x^5 + x^4 + ax - 1$ é:

- a) 1
- b) -1
- c) -2
- d) 2
- e) 3

Q.4) Se o polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x + a$ é divisível por $D(x) = x - 2$, o valor de a é:

- a) -8
- b) -6
- c) -4
- d) -2
- e) 2

Q.5) O resto da divisão do polinômio $P(x) = (x^2 + 1)^2$ pelo polinômio $D(x) = (x - 1)^2$ é igual a:

- a) 2
- b) 4
- c) $2x - 1$
- d) $4x - 2$
- e) $8x - 4$

Q.6) Se na divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 5x - 4$ pelo polinômio $Q(x)$ obtém-se um quociente x e um resto $R(x)$ que é divisível por $x - 1$, então $R(x)$ vale:

- a) $x - 1$
- b) $2(x - 1)$
- c) $3(x - 1)$
- d) $4(x - 1)$
- e) $5(x - 1)$

Q.7) A divisão do polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) -10
- e) 5

Q.8) Se $P(x - 1) = x^2 - 2x + 3$, então o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é:

- a) 3
- b) 5
- c) 7
- d) 9
- e) 11

Q.9) Se o polinômio $P(x) = x^2 + bx + c$ é divisível por $x - 3$ e $P(P(3)) = 6$, então o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Q.10) Para que o polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 + mx^2 + nx - 1$ seja divisível por $(x - 2) \cdot (x + 1)$, o valor de $-7m + n$ deve ser igual a:

- a) -7
- b) 0
- c) 2
- d) -3
- e) 4

Q.11) As raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ são m, n e p. Sabendo que m e n são complexas e que p é uma raiz racional, o valor de $m^2 + n^2$ é igual a:

- a) -18
- b) -10
- c) 0
- d) 4
- e) 8

Q.12) Considere os polinômios $p(x) = x^{80} + 3x^{79} - x^2 - x - 1$ e $b(x) = x^2 + 2x - 3$. Sendo $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $b(x)$, o valor de $r(1/2)$ é igual a:

- a) 0
- b) 1/2
- c) 1
- d) 2
- e) 5/2

Q.13) Considere o polinômio $P(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x$. Sobre as raízes de $P(x) = 0$, podemos afirmar que:

- a) Quatro raízes são reais distintas.
- b) Quatro raízes são reais, sendo duas iguais.
- c) Apenas uma é real.
- d) Apenas duas raízes são reais e iguais.
- e) Apenas duas raízes são reais distintas.

Q.14) Sendo R a maior das raízes da equação

$$\frac{11x+6}{x-4} = x^2, \text{ então o valor de } 2R - 2 \text{ é:}$$

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 10

Q.15) O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa o resto $r(x)$.

Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é:

- a) -10
- b) -4
- c) 0
- d) 4
- e) 10

Q.16) Sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\sqrt{p(x)}$ está definida é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2}\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2 \text{ e } x \neq 1\}$

Q.17) Dado o polinômio $q(x)$ que satisfaz a equação $x^3 + ax^2 - x + b = (x - 1) \cdot q(x)$ e sabendo que 1 e 2 são raízes da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, determine o intervalo no qual $q(x) \leq 0$:

- a) $[-5, -4]$
- b) $[-3, -2]$
- c) $[-1, 2]$
- d) $[3, 5]$
- e) $[6, 7]$

Q.18) Um polinômio $q(x)$, do 2º grau, é definido por $q(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $a \neq 0$.

Dentre os polinômios a seguir, aquele que verifica a igualdade $q(x) = q(1 - x)$, para todo x real, é:

- a) $q(x) = a(x^2 + x) + c$
- b) $q(x) = a(x^2 - x) + c$
- c) $q(x) = a^2(x^2 - x) + c$
- d) $q(x) = a^2(x^2 + x) + c$
- e) $q(x) = ax^2 + c$

Q.19) Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são tais que

$A(x) = B(x) + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. Sabendo-se que -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, então $A(3) - B(-1)$ é igual a:

- a) 98
- b) 100
- c) 102
- d) 103
- e) 105

Q.20) As medidas em centímetros das arestas de um bloco retangular são as raízes da equação polinomial $x^3 - 14x^2 + 64x - 96 = 0$. Denominando-se r , s e t essas medidas, se for construído um novo bloco retangular, com arestas medindo $(r - 1)$, $(s - 1)$ e $(t - 1)$, ou seja, cada aresta medindo 1 cm a menos que a do bloco anterior, a medida do volume desse novo bloco será:

- a) 36 cm^2
- b) 45 cm^2
- c) 54 cm^2
- d) 60 cm^2
- e) 80 cm^2

Q.21) Considere a equação $x^4 - 2ax^3 + 4ax^2 - 6ax + 9a = 0$. Sabendo que "a" é raiz dupla dessa equação e não é nula, determine o valor de "a".

- a) -1
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

Q.22) O polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 12$ é tal que $P(x) = 0$ admite as raízes x_1 , x_2 e x_3 . Se $x_1 \cdot x_2 = -3$ e $x_2 + x_3 = 5$, então é correto afirmar que:

- a) $p(m) = 0$
- b) $m - n = -13$
- c) $m \cdot n = 20$
- d) $n - 2m = -7$

Q.23) Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Sabendo-se que as funções $f_1(x) = \log_4(4x^2 - kx + 1)$ e $f_2(x) = x^2 - 7\arcsen(wx^2 - 8)$, com $k, w \in \mathfrak{R}$, são tais que $f_1(r_1) = 0$ e $f_2(r_2) = f_2(r_3) = 4$, onde r_1 é a menor raiz positiva do polinômio $P(x)$, é correto afirmar que os números $(w + k)$ e $(w - k)$ são raízes da equação:

- a) $x^2 - 6x - 2 = 0$
- b) $x^2 - 4x - 12 = 0$
- c) $x^2 - 4x + 21 = 0$
- d) $x^2 - 6x + 8 = 0$
- e) $x^2 - 7x - 10 = 0$

Q.24) Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com a e $b \in \mathfrak{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz real de p , então o valor de $b-a$ é igual a:

- a) -36
- b) -12
- c) 6
- d) 12
- e) 24

Q.25) Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

- a) $x^2 + x - 2$
- b) $6x^2 - 4x + 2$
- c) $3x - 9$
- d) $6x^2 - 17x - 3$
- e) $6x + 1$

GABARITO – Lista 24

- Q.1) C
- Q.2) C
- Q.3) B
- Q.4) A
- Q.5) E
- Q.6) D
- Q.7) E
- Q.8) E
- Q.9) B
- Q.10) B
- Q.11) B
- Q.12) A
- Q.13) E
- Q.14) E
- Q.15) A
- Q.16) C
- Q.17) C
- Q.18) B
- Q.19) C
- Q.20) B
- Q.21) D
- Q.22) D
- Q.23) B
- Q.24) B
- Q.25) D

Lista 26

Q.1) Determinar $x \in \mathfrak{R}$ e $y \in \mathfrak{R}$ para que se tenha:

- a) $3 + 5ix = y - 15i$
- b) $(x + yi)(2 + 3i) = 1 + 8i$
- c) $(3 + yi) + (x - 2i) = 7 - 5i$
- d) $(x + yi)^2 = 2i$
- e) $(2 - x + 3y) + 2yi = 0$
- f) $(3 - i)(x + yi) = 20$

Q.2) Qual é a condição para que o produto de dois números complexos $a + ib$ e $c + id$ dê um número real?

Q.3) Determinar $x | x \in \mathfrak{R}$ de modo que o número $z = \frac{2-xi}{1+2xi}$ seja imaginário puro

Q.4) Determinar $a | a \in \mathfrak{R}$ de modo que o número $z = \frac{1+2i}{2+ai}$ seja real.

Q.5) Determinar o número complexo cujo produto por $5 + 8i$ é real e cujo quociente por $1 + i$ é imaginário puro.

Q.6) Determinar os números complexos z tais que

$$\frac{z}{1-i} + \frac{z-1}{1+i} = \frac{5}{2} + i \cdot \frac{5}{2}$$

Q.7) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $\bar{z} = -2zi$.

Q.8) Sejam dados os números complexos $z = x + iy$ e

$u = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Sendo \bar{z} o conjugado de z , calcular as partes real e imaginária do número complexo $z_1 = u \cdot \bar{z}$.

Q.9) Determinar os números complexos z tais que

$$z \cdot \bar{z} + (z - \bar{z}) = 13 + 6i$$

Q.10) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = \bar{z}$

Q.11) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = i$

Q.12) Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

Q.13) Calcular:

- a) $\sqrt{-7 + 24i}$
- b) $\sqrt{5 + 12i}$
- c) $\sqrt[3]{-11 - 2i}$
- d) $\sqrt[4]{28 - 96i}$

Q.14) Calcular:

- a) $\sqrt[4]{1}$
- b) $\sqrt[3]{1 + i}$
- c) $\sqrt{-16i}$
- d) $\sqrt[6]{-729}$
- e) $\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$
- f) $\sqrt[3]{-64}$
- g) $\sqrt[3]{\sqrt{1}}$
- h) $\frac{1}{\sqrt{-4i}}$

GABARITO

Q.1) .

a. $x = -3, y = 3$

b. $x = 2, y = 1$

c. $x = 4, y = -3$

d. $x = 1, y = 1$ ou $x = -1, y = -1$

e. $x = 2, y = 0$

f. $x = 6, y = 2$

Q.2) $ad + bc = 0$

Q.3) $x = \pm 1$

Q.4) $a = 4$

Q.5) Impossível

Q.6) $z = 3 + 2i$

Q.7) $z = 0$

Q.8) $real: z_1 = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$ $imag: z_1 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)i$

Q.9) $z = \pm 2 + 3i$

Q.10) $z = 0$ ou i ou $-i$ ou 1 ou -1

Q.11) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Q.12) $z = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $z = -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$

Q.13) .

a. $3 + 4i$ ou $-3 - 4i$

b. $3 + 2i$ ou $-3 - 2i$

c. $1 + 2i$ ou $-\frac{1+2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}i$ ou $-\frac{1-2\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-2}{2}i$

d. $-3 + i$ ou $3 - i$ ou $1 + 3i$ ou $-1 - 3i$

Q.14) .

a. 1 ou i ou -1 ou $-i$

b. $\sqrt[6]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ou $\sqrt[6]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\sqrt[6]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

c. $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ ou $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

d. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ou $3i$ ou $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ ou $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ou $-3i$ ou $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

e. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

f. $2 + 2\sqrt{3}i$ ou -4 ou $2 - 2\sqrt{3}i$

g. 1 ou $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou -1 ou $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

h. $-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$ ou $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$

Lista 27

Q.1) (ESPCEX) Os números a , b e c determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r ($r \neq 0$). Na ordem b , a , c determinam uma progressão geométrica (PG). Então a razão da PG é:

- a) -3
- b) -2
- c) -1
- d) 1
- e) 2

Q.2) (ESPCEX) O valor numérico da expressão

$$\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) \text{ é:}$$

- a) 1/2
- b) 1/3
- c) 1/4
- d) 1/6
- e) 1/8

Q.3) O valor de $\cos(x) + \operatorname{sen}(x)$, sabendo que $3 \cdot \operatorname{sen}(x) + 4 \cdot \cos(x) = 5$, é:

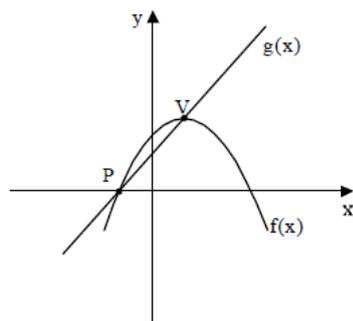
- a) 3/5
- b) 4/5
- c) 1
- d) 6/5
- e) 7/5

Q.4) (ESPCEX) As matrizes A , B e C são do tipo $r \times s$, $t \times u$ e $2 \times w$, respectivamente. Se a matriz $(A - B) \cdot C$ é do tipo 3×4 , então $r + s + t + u + w$ é igual a:

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 13
- e) 14

Q.5) (ESPCEX) A figura mostra uma função quadrática, definida por $f(x) = -x^2 + 6x + 7$, e uma função afim $g(x)$. O ponto V é o vértice da parábola e P é uma raiz da função $f(x)$. O gráfico de $g(x)$ passa por esses dois pontos. O valor da ordenada onde o gráfico da função $g(x)$ corta o eixo y é:

- a) 2
- b) 7/2
- c) 4
- d) 9/2
- e) 6



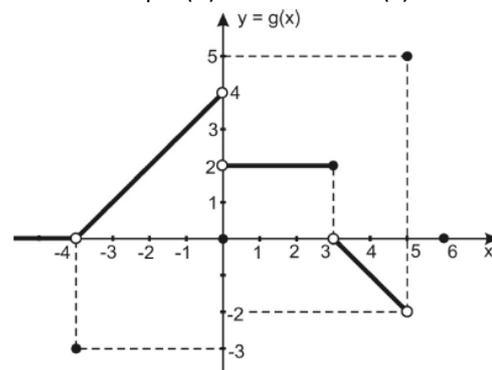
Q.6) (ESPCEX) O número de raízes reais distintas da equação $x|x| - 3x + 2 = 0$ é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

Q.7) (ESPCEX) Duas grandezas são tais que: se $x = 5$, então $y = 11$. Dessa forma, pode-se concluir que:

- a) Se $x \neq 5$, então $y \neq 11$
- b) Se $y = 11$, então $x = 5$
- c) Se $y \neq 11$, então $x \neq 5$
- d) Se $y \neq 11$, então $x = 5$
- e) Se $y = 5$, então $x = 5$

Q.8) (AFA) Considere o gráfico da função real $g: A \rightarrow A$ abaixo e marque (V) verdadeiro ou (F) falso.



- () A função g possui exatamente duas raízes.
- () $g(4) = -g(-3)$
- () $\operatorname{Im}(g) = \{-3\} \cup]-2, 4[$
- () A função definida por $h(x) = g(x) + 3$ NÃO possui raiz.
- () $(g \circ g \circ g \circ \dots \circ g)(-2) = 2$

A sequência correta é:

- a) F-V-F-F-V
- b) F-F-V-F-V
- c) F-V-F-V-F
- d) V-V-F-F-V

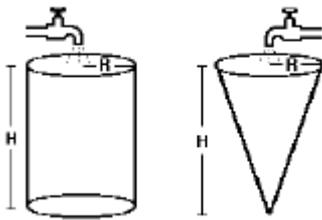
Q.9) (ESPCEX) Se $z = \frac{2-3\operatorname{sen}(x)}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em:

- a) $-2 \leq z \leq -1$
- b) $-1 \leq z \leq -\frac{1}{4}$
- c) $-\frac{1}{4} \leq z \leq \frac{5}{4}$
- d) $0 \leq z \leq \frac{3}{2}$
- e) $\frac{1}{4} \leq z \leq 2$

Q.10) (ESPCEX) O produto dos elementos do conjunto-solução da equação exponencial $2^{(x^2 + \frac{1}{x^2})} = \frac{1024}{2^{(x + \frac{1}{x})}}$ é:

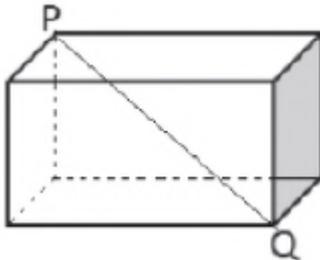
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Q.11) No desenho a seguir, dois reservatórios de altura H e raio R, um cilíndrico e outro cônico, estão totalmente vazios e cada um será alimentado por uma torneira, ambas de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva 2 horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isto ocorra com o reservatório cônico será de:



- a) 2 h
- b) 1h e 30 min
- c) 1 h
- d) 50 min
- e) 30 min

Q.12) Duas das dimensões do paralelepípedo reto retângulo a seguir medem 4 cm e 6 cm.



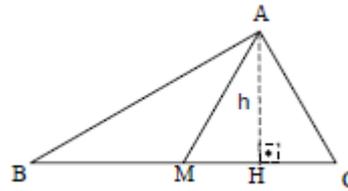
Se a diagonal PQ mede $2\sqrt{14}$ cm, o volume desse sólido, em cm^3 , é:

- a) 42
- b) 48
- c) 54
- d) 58

Q.13) (ESPCEX) Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1 cm. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

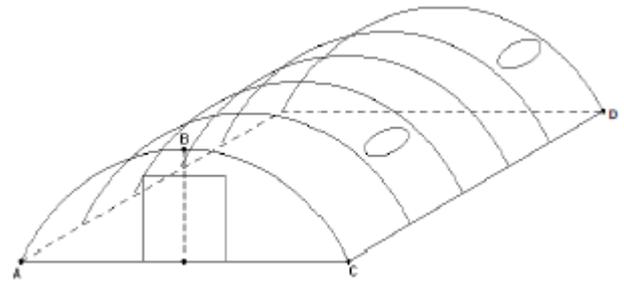
- a) $\frac{1}{3}\pi$
- b) $\frac{2}{3}\pi$
- c) $\frac{4}{3}\pi$
- d) $\frac{8}{3}\pi$
- e) 3π

Q.14) (ESPCEX) No triângulo ABC, a base \overline{BC} mede 8 cm, o ângulo B mede 30° e o segmento \overline{AM} é congruente ao segmento \overline{MC} , sendo M o ponto médio de \overline{BC} . A medida, em centímetros, da altura h, relativa ao lado \overline{BC} do triângulo ABC, é de



- a) $\sqrt{2}$ cm
- b) $2\sqrt{2}$ cm
- c) $\sqrt{3}$ cm
- d) $2\sqrt{3}$ cm
- e) $3\sqrt{3}$ cm

Q.15) (ESPCEX) Uma barraca de campanha militar possui o formato apresentado no desenho abaixo.

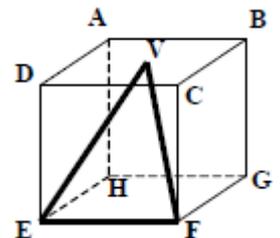


A curva ABC é um arco de 90° de uma circunferência com 10 metros de raio. O segmento \overline{CD} mede 20 metros. Admitindo $\pi = 3,14$, podemos concluir que o volume do interior da barraca é de aproximadamente:

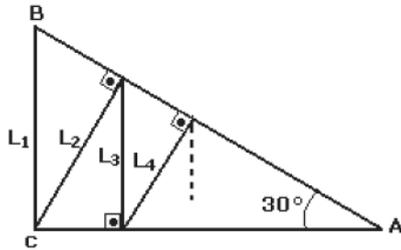
- a) 480 m^3
- b) 570 m^3
- c) 618 m^3
- d) 1140 m^3
- e) 2880 m^3

Q.16) (ESPCEX) Em um cubo de aresta medindo 4 cm, forma-se um triângulo VEF, conforme figura abaixo, em que V é o centro do quadrado ABCD. A área, em cm^2 , do triângulo VEF é igual a:

- a) $4\sqrt{5}$
- b) $4\sqrt{6}$
- c) $5\sqrt{5}$
- d) $5\sqrt{6}$
- e) $6\sqrt{6}$

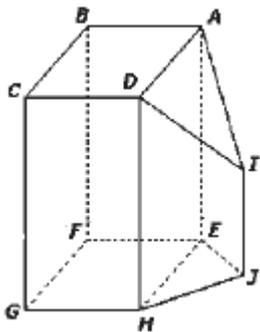


Q.17) (ESPCEX) Considere o triângulo ABC abaixo, retângulo em C, em que $B\hat{A}C = 30^\circ$. Nesse triângulo está representada uma sequência de segmentos cujas medidas estão indicadas por $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$, em que cada segmento é perpendicular a um dos lados do ângulo de vértice A. O valor L_9/L_1 é:



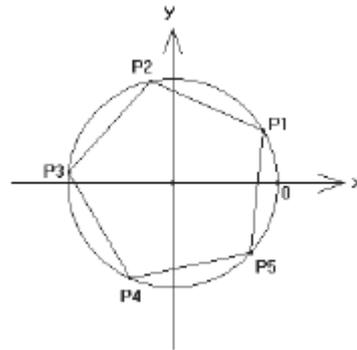
- a) $\frac{27\sqrt{3}}{128}$
- b) $\frac{1}{128}$
- c) $\frac{256}{81}$
- d) $\frac{27}{64}$
- e) $\frac{1}{256}$

Q.18) (ESPCEX) A ilustração a seguir representa um paralelepípedo retângulo ABCDEFGH e um prisma reto triangular de base EHJ seccionado por um plano, gerando o triângulo isósceles ADI, cuja medida AI é igual à medida DI. Diante das informações acima, podemos afirmar que:



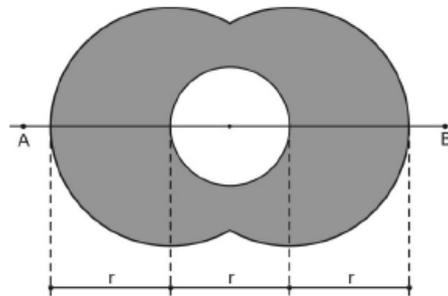
- a) A reta JH é ortogonal à reta DC
- b) As retas EJ e FG são reversas
- c) A reta IJ é ortogonal à reta EF
- d) A reta AI é concorrente à reta BC
- e) A reta AI é paralela à reta EJ

Q.19) (ESPCEX) Na figura, está representado um círculo trigonométrico em que os pontos P1 a P5 indicam extremidades de arcos. Esses pontos, unidos, correspondem aos vértices de um pentágono regular inscrito no círculo. Se o ponto P1 corresponde a um arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos, então o ponto P4 corresponderá à extremidade de um arco cuja medida, em radianos, é igual a:



- a) $\frac{13\pi}{30}$
- b) $\frac{17\pi}{30}$
- c) $\frac{29\pi}{30}$
- d) $\frac{41\pi}{30}$
- e) $\frac{53\pi}{30}$

Q.20) (AFA) Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.



A expressão que fornece o valor da área sombreada é:

- a) $\frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9} r^2$
- b) $\frac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12} r^2$
- c) $\frac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9} r^2$
- d) $\frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12} r^2$

Q.21) (ESPCEX) Se $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + n \cdot (-1)^{n-1}$, para todo n inteiro e positivo, então $\frac{S_{2003}}{3}$ é igual a:

- a) 668
- b) 567
- c) 334
- d) 424
- e) 223

Q.22) (ESPCEX) A soma dos quadrados de todas as raízes da equação $x^2 + 4x - 2 \cdot |x + 2| + 4 = 0$ é igual a:

- a) 16
- b) 20
- c) 24
- d) 28
- e) 36

Q.23) (ESPCEX) Uma lata cilíndrica está completamente cheia de um líquido que deve ser distribuído totalmente em potes iguais entre si, também cilíndricos. A altura de cada pote é igual a $2/5$ da altura da lata e o diâmetro de sua base é $1/3$ do diâmetro da base da lata. Para tal distribuição, a quantidade mínima de potes a serem utilizados é:

- a) 22
- b) 23
- c) 24
- d) 25
- e) 26

Q.24) (ESPCEX) Para todo $x \in \mathfrak{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathfrak{R} \right\}$,

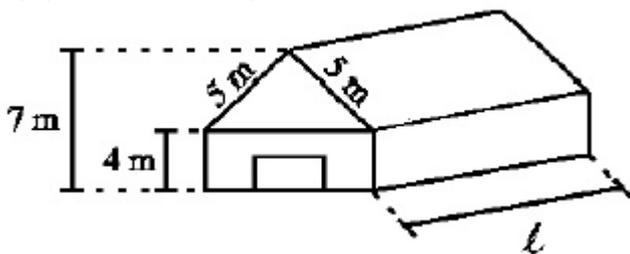
simplificando a expressão:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cos}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{sec}^2 x}$$

Obtém-se o valor:

- a) $1/2$
- b) 1
- c) $3/2$
- d) 2
- e) 0

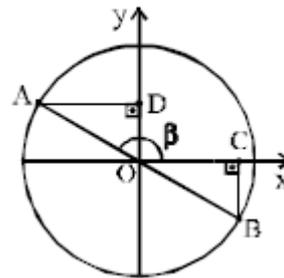
Q.25) (ESPCEX) Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até 200 m^3 . Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento (λ) que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3(três) aparelhos de ar condicionado é:



(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

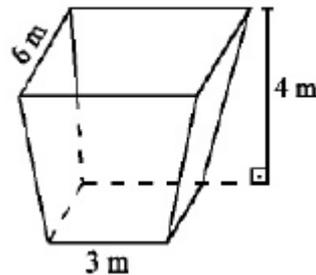
- a) 13 m
- b) 20 m
- c) 5 m
- d) 25 m
- e) 15 m

Q.26) (ESPCEX) No círculo trigonométrico (raio = 1), representado na figura, a medida de β é 150° e \overline{AB} representa um diâmetro. O valor do produto das medidas dos segmentos \overline{OC} e \overline{OD} é:



- a) $1/4$
- b) $1/2$
- c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

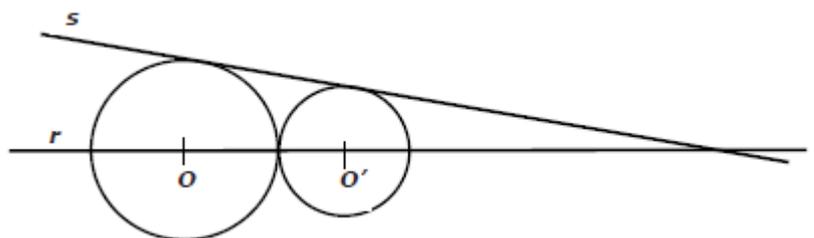
Q.27) (ESPCEX) Um reservatório com forma de tronco de pirâmide regular, representado pela figura abaixo, com bases quadradas e paralelas, está repleto de água. Deseja-se esvaziá-lo com o auxílio de uma bomba de sucção que retira água com uma vazão constante.



A vazão, em litros/segundo, que esta bomba deve ter para que o reservatório seja esvaziado exatamente em 1 hora e 40 minutos é:

- a) 12 L/s
- b) 18 L/s
- c) 16 L/s
- d) 14 L/s
- e) 20 L/s

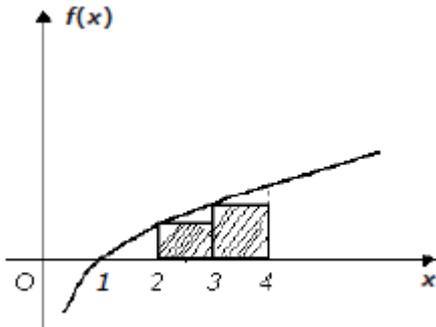
Q.28) (ESPCEX) Na figura, as circunferências são tangentes entre si e seus raios estão na razão $1/3$. Se a reta r passa pelos centros O e O' das duas circunferências, e a reta s é tangente a ambas, então o menor ângulo formado por essas duas retas mede:



- a) $\text{arc sen } \frac{1}{3}$
- b) $\text{arc tg } \frac{1}{2}$
- c) 60°
- d) 45°
- e) 30°

Q.29) (ESPCEX) A curva da figura representa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Dados: $\log_{10} 2 = 0,30$; $\log_{10} 12 = 1,08$.



Com base nesses dados, a soma das áreas dos dois retângulos hachurados é, aproximadamente,

- a) 1,60
- b) 2,10
- c) 2,08
- d) 2,60
- e) 3,60

Q.30) (AFA) Considere uma aplicação financeira denominada UNI que rende juros mensais de $M = \log_{27} 196$ e outra aplicação financeira denominada DUNI que rende juros mensais de $N = -\log_{\frac{1}{9}} 14$

A razão entre os juros mensais de M e N, nessa ordem, é

- a) 70%
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{4}{3}$
- d) 80%

GABARITO

1.B – 2.C – 3.E – 4.E – 5.C – 6.E – 7.A – 8.A – 9.C – 10.A
– 11.D – 12.B – 13.D – 14.D – 15.B – 16.A – 17.C – 18.C
– 19.D – 20.D – 21.C – 22.B – 23.B – 24.D – 25.A – 26.C
– 27.D – 28.E – 29.D – 30.C

25. O conjunto-solução da inequação: $\log_2(x+1) + \log_2 \frac{1}{8} > 1$ é:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
- b) \emptyset
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

1. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer com $B \neq \emptyset$, tais que:

I) $B \subset P(A)$, onde $P(A)$ é o conjunto das partes de A

II) A e C são disjuntos

Com relação às seguintes proposições:

I) $(A \cap B) \cup C \subset A \cap B \cap C$

II) $(C - B) \cup (A - B) \supset A \cup B \cup C$

III) $(A \cup B) \cup (C \cap B) \supset (A - B) \cap (C \cup B)$

podemos afirmar que:

- a) I é a única verdadeira
- b) I e III são verdadeiras
- c) III é a única verdadeira
- d) I e II são verdadeiras
- e) I, II e III são verdadeiras

2. Seja f uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais e $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo a e b. Se $f(0) = 1$, então o valor de x que

satisfaz a igualdade $f(2x) = \frac{1}{f(1)}$, onde $f(0) \neq 0$, é um dos zeros da equação:

- a) $x^2 - x - 6 = 0$
- b) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
- c) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
- d) $x^2 + 2x + 1 = 0$
- e) $x^2 - 3x + 1 = 0$

3. A soma dos inversos das raízes da equação $x^2 + 4x + m = 0$ é $\frac{1}{3}$. A soma dos quadrados das raízes da equação é igual a:

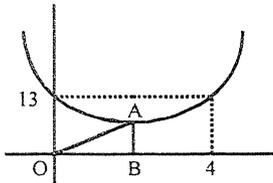
- a) 26
- b) 40
- c) 58
- d) 80
- e) 96

4. As funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 3x + m$. Se $f(g(x)) = g(f(x))$, então $f(m)$ vale:

- a) 3
- b) 6
- c) 9
- d) 12
- e) 15



5. A figura representa uma parábola de vértice em A e um triângulo retângulo em B, sabendo que $\overline{OA} = \sqrt{85}$, podemos afirmar que essa parábola passa pelo ponto:



- a) (5,17)
- b) (-1,18)
- c) (1,9)
- d) (-2,24)
- e) (2,12)

6. Sejam as funções $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow [-3, +\infty[$ e $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow [2, +\infty[$, definidas respectivamente por $f(x) = 3x^2 - 3$ e $g(x) = 2x^2 + 2$. Se $h(x) = g(f(x))$, então o valor de $h^{-1}(10)$, onde $h^{-1}(x)$ é a função inversa de $h(x)$ é:

- a) $\frac{\sqrt{10}}{3}$
- b) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{15}}{5}$
- d) $\frac{\sqrt{15}}{3}$
- e) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

7. Seja a função $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$,

não inversível. Podemos afirmar que essa função é:

- a) bijetora e não é par nem ímpar
- b) par e injetora
- c) ímpar e injetora
- d) par e sobrejetora
- e) ímpar e sobrejetora

8. Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 2, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ent}$$

então $f \circ g \circ f(2 + \sqrt{2})$

é igual a:

- a) -1
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 2
- d) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) -2

9. $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 + mx + m$, $m \in \mathbb{R}$, e $f(g(x)) = g(x)$, para todo x real, então os valores que a constante m pode assumir pertencem ao seguinte intervalo:

- a) [1, 5]
- b) [-1, 3]
- c) [2, 6]
- d) [-2, 2]
- e) [0, 4]

10. Considerando que:

I) o nível de álcool N no sangue de uma pessoa decresce de acordo com a função $N(t) = N_0 (0,5)^t$, onde N_0 é o nível de álcool inicial e t é medido em horas.

II) o nível máximo permitido para que uma pessoa possa dirigir com segurança é de 0,8 gramas por litro.

Constatando-se que um motorista apresenta nível alcoólico inicial de 2 gramas por litro, o tempo que ele deverá esperar para voltar a dirigir com segurança, a partir desta constatação, é de:

(use, se necessário, $\log 2 = 0,30$; $\log 3 = 0,47$; $\log 5 = 0,7$)

- a) 0h 15min
- b) 0h 44min
- c) 1h 20min
- d) 1h 30min
- e) 1h 45min

11. O conjunto-solução de: $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leq 1$ é:

- a) $S = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 4\}$
- b) $S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 3\}$
- c) $S = \{x \in \mathbb{R} / 4 < x \leq 5\}$
- d) $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1 \text{ ou } x > 4\}$
- e) $S = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 4\}$

12. Num certo mês, dois jornais circularam com 50.000 e 300.000 exemplares diários, respectivamente. A partir daí a circulação do primeiro cresce 8,8% cada mês e a do segundo decresce 15% cada mês. Nessas condições, o número mínimo de meses necessários para que a circulação do primeiro jornal supere a do segundo é de:

(use, se necessário, $\log 2 = 0,30$; $\log 3 = 0,47$; $\log 5 = 0,7$)

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8
- e) 9

13. Considere a relação $\frac{p^{-y}}{1+p^{-y}} = x$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Nessas condições a expressão que define y , em função de x , e seu domínio são, respectivamente:

a) $y = \log_{1/p} \frac{1-x}{x}; D = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$

b) $y = \log_p \frac{x}{1-x}; D = \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

c) $y = \log_p \frac{1-x}{x}; D = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$

d) $y = \log_{1/p} \frac{x}{x-1}; D = \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

14. Observei que os ponteiros das horas e dos minutos de meu relógio estavam superpostos às 4h 21min 48seg. Fiz os cálculos e concluí que eles estarão novamente superpostos às:

- a) 5h 21min 48seg
- b) 5h 27min 16seg
- c) 5h 27min 28seg
- d) 5h 28min 27seg
- e) 5h 28min 15seg

15. Sabe-se que um prisma hexagonal regular tem por altura o diâmetro da circunferência circunscrita à base, e que a maior de suas diagonais mede $20\sqrt{2}cm$. Sua área total e seu volume valem, respectivamente:

- a) $1200cm^2$ e $3000\sqrt{3}cm^3$
- b) $3\sqrt{3}dm^2$ e $3dm^3$
- c) $3(4+\sqrt{3})dm^2$ e $3\sqrt{3}dm^3$
- d) $1500\sqrt{3}cm^2$ e $3000\sqrt{3}cm^3$
- e) $1200\sqrt{3}cm^2$ e $3000cm^3$

16. Sejam A, B e C matrizes reais $n \times n$. Com relação às seguintes afirmações:

- I) $A(BC) = (AB)C$
 - II) $AB = BA$
 - III) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
 - IV) $\det(A+B) = \det A + \det B$
- podemos afirmar que:
- a) I e II são verdadeiras
 - b) II e III são verdadeiras
 - c) III e IV são verdadeiras
 - d) I e III são verdadeiras
 - e) I e IV são verdadeiras

17. No desenvolvimento de $(2x-y)^5(2x+y)^5$, a soma dos coeficientes numéricos vale:

- a) 3
- b) 27
- c) 81
- d) 243
- e) 729

18. O valor de m tal que $\sum_{p=0}^m \binom{m}{p} 2^p = 729$ é:

- a) 6
- b) 8
- c) 10
- d) 12
- e) 14

19. Os valores de a e b para que o sistema: $\begin{cases} 6x + ay + 8z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 6x + y + 13z = b \end{cases}$ seja

indeterminado, são respectivamente:

- a) 2 e -4
- b) 8 e 6
- c) -4 e -15
- d) 8 e 2
- e) -4 e 8

20. A equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$ tem uma única

solução para:

- a) $a \neq 2$
- b) $a = 2$
- c) $a \neq 1/2$
- d) $a = 1/2$
- e) $a = -1/2$

21. A soma dos valores reais de a que tornam o sistema

$\begin{cases} 3^{2a+1}x + y = 1 \\ x + y = 0 \\ (10.3^a - 3)x + y = 1 \end{cases}$ possível e determinado é:

- a) 0
- b) 2
- c) 3
- d) 5
- e) 6

22. A expressão: $1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ é equivalente

a:

- a) $\cos^4 x$
- b) $2\operatorname{sen}^2 x$
- c) $\cos^3 x$
- d) $\cos^2 x$
- e) $\operatorname{sen} 2x$

23. O conjunto-solução da equação:

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2 \text{ é:}$$

- a) $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- b) $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- c) $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/6 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- d) $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- e) $S = \{x \in \mathbb{R} / x = 5\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

24. Sendo $\operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x = m$ e $\operatorname{sec} x - \operatorname{tg} x = n$, então o valor de $m \cdot n$ é:

- a) -1
- b) 1
- c) 2
- d) 4
- e) 6

25. Quanto à função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, pode-se afirmar que:

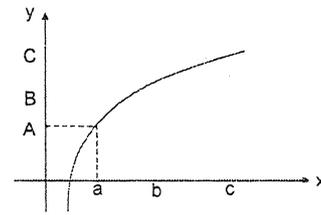
- a) tem período π e valor max 2
- b) tem período 2π e valor max 2
- c) tem período 4π e valor max 2
- d) tem período π e valor max $\sqrt{2}$
- e) tem período 2π e valor max $\sqrt{2}$

26. Numa ΔABC retângulo em \hat{A} tem-se $\hat{B} = 60^\circ$. As bissetriza desse ângulo se encontra num D . Se o seguimento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

- a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- b) $1+\sqrt{3}$
- c) $2+\sqrt{3}$
- d) $1+2\sqrt{2}$
- e) $2+2\sqrt{3}$

27. A figura abaixo representa o gráfico de $y = \log x$.

Se $\overline{OA} = \overline{BC}$, então podem afirmar que:



- a) $\log_a b = C$
- b) $a + b = C$
- c) $a^c = b$
- d) $a^b = C$
- e) $\log_a c = 1 + \log_a b$



1. Se $f(x) = (x + 2)^3 + (x - 1)^3 + 5ax + 2b$, com a e b reais, é divisível por $(x + 1)^2$, então:

- a) $a - b = -3$
- b) $a - b = -2$
- c) $a - b = -1$
- d) $a - b = 0$
- e) $a - b = 1$

2. Um cubo de aresta m está inscrito em uma semiesfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semiesfera e os demais vértices pertencem à superfície da semiesfera. Então, m é igual a:

- a) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
- b) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
- c) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$
- d) R
- e) $R\sqrt{\frac{2}{3}}$

3. Sabendo que $z_1 = (1 - \sqrt{3}i)$ e que $z_2 = \text{cis } 285^\circ$ então z_1/z_2 é igual :

- a) $\sqrt{6}$
- b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)i$
- c) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)i$
- d) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i$
- e) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$

4. Três números positivos, cuja soma é 30, estão em progressão aritmética. Somando-se, respectivamente, 4, -4 e -9 ao primeiro, segundo e terceiro termos dessa progressão aritmética, obtemos três números em progressão geométrica. Então, a soma das possíveis razões dessa progressão aritmética é:

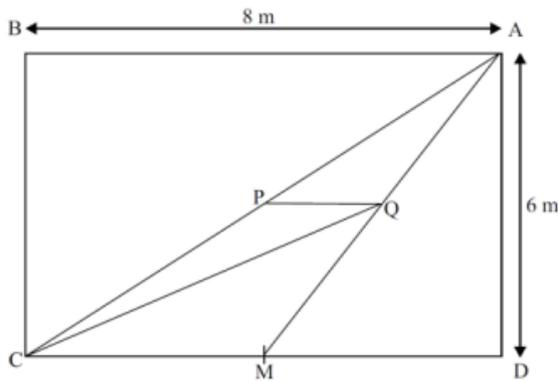
- a) 2
- b) 11
- c) 13
- d) 9
- e) 24

5. Resolva a inequação $\log_x [\log_2(4^x - 6)] \leq 1$.

- a) $[\log_4 7 ; \log_2 3[$
- b) $]\log_4 7 ; \log_2 3]$
- c) $]\log_2 3 ; 3/2]$
- d) $]\log_2 3 ; 5/2]$
- e) $]\frac{3}{2} ; 7/4]$

6. Um jardim retangular $ABCD$ será construído no pavilhão da Engenharia e terá um passeio feito de pedras de cores diferentes, na forma de triângulos, conforme mostra a figura. Sabendo que os pontos P e M são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos AC e CD , e que o segmento PQ é paralelo ao lado CD , então, o comprimento, em metros, do segmento CQ é:

- a) $9\sqrt{3}$
- b) $6\sqrt{5}$
- c) $6\sqrt{3}$
- d) $5\sqrt{3}$
- e) $3\sqrt{5}$



7. Permutando de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevendo os números assim formados em ordem crescente, que número ocupa o 66º lugar?

- a) 42761
- b) 46721
- c) 47621
- d) 61247
- e) 61472

8. Qual o valor da expressão: $f(x) = \text{sen}^6 x + \frac{2}{3} \text{cos}^6 x - 2\text{sen}^4 x - \text{cos}^4 x + \text{sen}^2 x$

- a) 0
- b) 1
- c) $-2\text{sen}^4 x$
- d) $-\frac{2}{3} \text{cos}^6 x$
- e) $-\frac{1}{3} \text{cos}^6 x$

9. Determine o valor da equação $(x - y \cdot z)^2$ do sistema linear:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

- a) 2
- b) 4
- c) 9
- d) 16
- e) 36

10. Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = 17/(2^x + 1)$ e $g(x) = 3 + 2x - x^2$. O valor mínimo de $f(g(x))$ é:

- a) $1/4$
- b) $1/3$
- c) $1/2$
- d) 1
- e) 2

11. O elemento a_{23} da matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, é:

- a) -1
- b) $-1/3$
- c) 0
- d) $2/3$
- e) 2

12. Um número entre 1 a 300 (inclusive) é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou por 5.

- a) $7/15$
- b) $6/15$
- c) $1/3$
- d) $4/15$
- e) $1/5$

13. Determine a equação da reta suporte de um segmento que tem seu centro no ponto $(5,0)$ e extremidade em cada uma das retas $x - 2y - 3 = 0$ e $x + y + 1 = 0$. Dê a resposta na forma $Ax + By + C = 0$.

- a) $(2x - 4y - 15)k = 0$
- b) $(3x - 4y - 15)k = 0$
- c) $(4x - 5y - 20)k = 0$
- d) $(3x - 5y - 15)k = 0$
- e) $(4x - 4y - 20)k = 0$

14. Seja C a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$. Se $P(a, b)$ é o ponto de C mais próximo da origem, então:

- a) $a = -3/2$ e $4b^2 + 24b + 15 = 0$
- b) $a = -\frac{1}{2}$ e $4b^2 + 24b + 33 = 0$
- c) $a = \frac{\sqrt{10}}{10} - 1$ e $b = 3a$
- d) $a = -1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $b = 3a$
- e) *n. d. a.*

15. Calcule a área de um triângulo equilátero com um vértice no ponto $(0,0)$ e os outros dois sobre a parábola $y = 2x^2$.

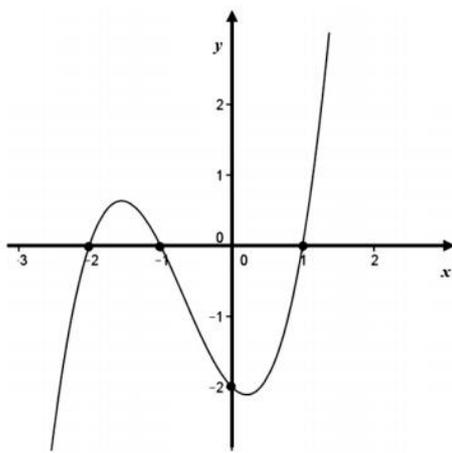
- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- d) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$
- e) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

16. Determine a soma dos possíveis valores que m pode assumir na equação $x^2 + mx + m^2 - m - 12 = 0$, de modo que ela tenha uma raiz nula e outra positiva.

- a) 4
- b) 3
- c) 1
- d) -3
- e) -7

17. Se o gráfico abaixo representa a função polinomial f , definida em \mathbb{R} por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com a, b, c e d coeficientes reais, então $f(2)$ é:

- a) 24
- b) 36
- c) 48
- d) 72
- e) 12



18. A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $\left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ é 1024. O termo independente de x desse desenvolvimento é:

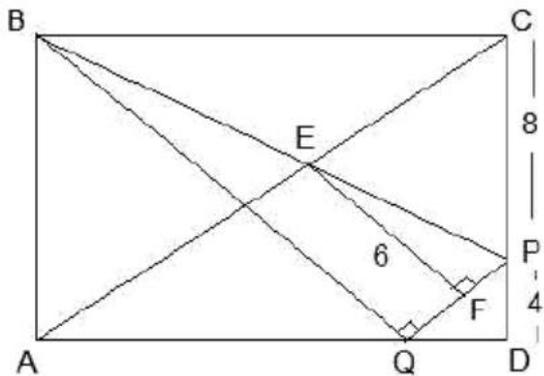
- a) -1
- b) 405
- c) 504
- d) -240
- e) 360

19. Se dividirmos o polinômio $P(x)$ por $(x - 2)$ o resto é 13 e se dividirmos $P(x)$ por $(x + 2)$ o resto é 5. Supondo que $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 4$. Calcule $R(1)$.

- a) 5
- b) 7
- c) 9
- d) 11
- e) 13

20. Na Figura mostrada temos o retângulo $ABCD$. Se $CP = 8$, $DP = 4$ e $EF = 6$, então podemos concluir que AD é:

- a) $43/3$
- b) $44/3$
- c) $45/3$
- d) $46/3$
- e) $49/3$



Seu teste contém 20 questões numeradas de 1 a 20 divididas por assunto.

O objetivo desse teste é, após realizado e com base em seus desenvolvimentos, orientar o aluno como estudar para o período de revisão. Por essa razão não deixem nada em branco.

O tempo total de duração da prova é de 3 (três) horas.

Não é autorizado qualquer tipo de consulta ou ajuda externa.
Boa prova.

Nome: _____
Turno: _____ Data: ____/____/____

“Exército Brasileiro: braço forte, mão amiga”

1. (CONJUNTOS). Sejam: N, Z, Q e R os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, respectivamente. Dados: $G = \{n \in Z \mid \frac{90}{n} \in N\}$, $F = \{q \in Q \mid 12q \in Z\}$ e $D = \{x \in R \mid \sqrt{x} \in Q\}$, é correto afirmar que:

- $F \cap D \subset N$.
- $F \cap Z$ é o conjunto vazio.
- $\sqrt{2} \in (D - Q)$.
- $F \cup D \subset F$.
- $G \cap F \cap D$ tem dois elementos.

2. (FUNÇÕES). Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 2x + 1$. Determine o domínio da função $\frac{f(2) - \sqrt[3]{g(x)}}{\sqrt{f \circ g(x)}} = \frac{\sqrt[3]{g^{-1}(x)}}{\sqrt[3]{f(x)}}$. $D = \{x \in IR \mid \text{_____}\}$.

- $2 < x < 3$ com $x \neq \frac{3}{2}$ e $x \neq \frac{7}{4}$
- $1 < x < \frac{1}{2}$ com $x \neq \frac{2}{3}$ e $x \neq \frac{5}{3}$
- $x < 2$ ou $x > 3$ com $x \neq 1$ e $x \neq \frac{1}{2}$
- $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$ com $x \neq 2$ e $x \neq 3$
- $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 1$ com $x \neq 3$ e $x \neq \frac{1}{2}$

3. (FUNÇÃO AFIM). Sabendo que a reta r crescente é definida por: $\begin{cases} \text{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2} \\ P_1(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2) \end{cases}$ e que

a reta s é definida por: $\begin{cases} P_2(2,3) \\ P_3(-2,5) \end{cases}$. Determine o ponto de encontro dessas retas.

- $(\frac{28\sqrt{3}-42}{3}, \frac{31-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{28\sqrt{3}-42}{3}, \frac{33-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{26\sqrt{3}-42}{3}, \frac{33-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{26\sqrt{3}-42}{3}, \frac{31-14\sqrt{3}}{3})$
- $(\frac{28\sqrt{3}-42}{3}, \frac{31-14\sqrt{3}}{3})$

4. (FUNÇÃO QUADRÁTICA). Dados:

I. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

II. $f(4) = f(-4) = 2$.

III. $f(2) = f(-2) = 8$.

IV. $x' = \text{raiz positiva}, x'' = \text{raiz negativa}$.

V. $X_v = x$ do vértice, $Y_v = y$ do vértice.

a) $5 \cdot (1 + \sqrt{5})$

b) $2 \cdot (1 + \sqrt{5})$

c) $2,5 \cdot (1 + \sqrt{5})$

d) $20 \cdot (1 + \sqrt{5})$

e) $10 \cdot (1 + \sqrt{5})$

Calcule o valor de $\frac{5 \cdot (x' - x'')}{2} + (X_v + Y_v)$.

5. (ÂNGULOS E TRIÂNGULOS). Por meio de uma manual de construção, um oficial de engenharia deseja construir uma haste de sustentação, em forma de um triângulo isósceles, com algumas barras metálicas que sobraram no paiol.

Lista de materiais:

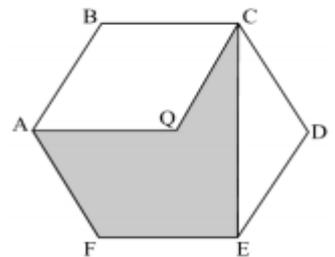
- I. 4 barras de 50 metros de comprimento. (Barras de sustentação).
 II. 8 barras de comprimentos iguais menores do que 50 metros. (Barras de apoio).

Manual de construção: [Primeiro Passo] - Pegue uma barra de apoio (\overline{BC}) para ser a base da haste triangular, em seguida funda cada extremidade da barra de apoio à extremidade de uma barra de sustentação, com angulação suficiente para que a união das outras duas extremidades das barras de sustentação (\overline{BA} e \overline{CA}) seja possível. (triângulo isósceles). [Segundo Passo] - A partir de um dos vértices da base (\overline{BC}), funda uma das extremidades de uma nova barra de apoio a fim de obter o encontro da outra extremidade com a barra de sustentação (\overline{CA}). [Terceiro Passo] - A partir desse ponto de encontro (P_1) funda uma barra de apoio a ele gerando, então, um novo ponto de encontro (P_2) com a outra barra de sustentação (\overline{BA}). [Quarto Passo] - a partir do ponto (P_2) funda uma última barra de apoio gerando um ponto (P_3) sobre a barra (\overline{CA}). Perceba que a distância do vértice A ao ponto (P_3) é igual ao comprimento de uma barra de apoio. Após a finalização da construção da haste defina o valor do ângulo $B\hat{A}C$.

- a) 15°
 b) 30°
 c) 20°
 d) 40°
 e) 45°

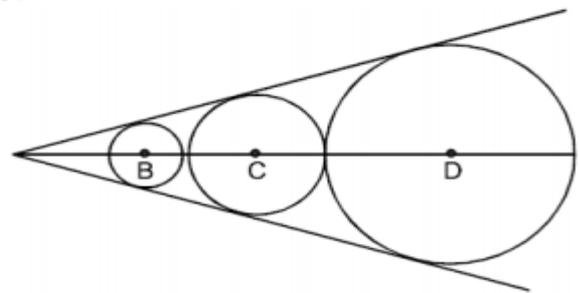
6. (POLÍGONOS) Um polígono convexo possui o número de lados n igual a um terço do número de suas diagonais. Sabendo que $\frac{n}{9}$ é igual ao lado em dm de um hexágono regular ABCDEF de centro Q, determine o perímetro do polígono AQCEF, em dm .

- a) $4 + \sqrt{2}$
 b) $4 + \sqrt{3}$
 c) $3 \cdot \left(\frac{4}{3} + \sqrt{2}\right)$
 d) $4 + \sqrt{5}$
 e) $2 \cdot (2 + \sqrt{2})$



7. (CIRCUNFERÊNCIA) Na figura, as três circunferências, de centros B, C e D, são tangentes duas a duas e inscritas num mesmo ângulo. Calcular o diâmetro da circunferência intermediária, sabendo-se que os raios das outras duas circunferências são 2,5 cm e 4,9 cm. (dar o resultado em cm).

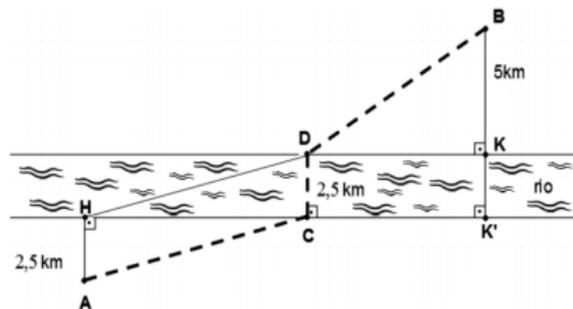
- a) 6
 b) 7
 c) 7,5
 d) 8
 e) 8,5



8. (RELAÇÕES NO TRIÂNGULO RETÂNGULO) Duas cidades, marcadas no desenho abaixo como A e B, estão nas margens retilíneas e opostas de um rio, cuja largura é constante e igual a 2,5 km, e a distâncias de 2,5 km e de 5 km, respectivamente, de cada uma das suas margens. Deseja-se construir uma estrada de A até B que, por razões de economia de orçamento, deve cruzar o rio por uma ponte de comprimento mínimo, ou seja, perpendicular às margens do rio. As regiões em cada lado do rio e até as cidades são planas e disponíveis para a obra da estrada. Uma possível planta de tal estrada está esboçada na figura abaixo em linha pontilhada.

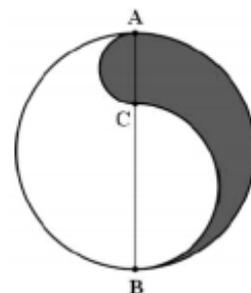
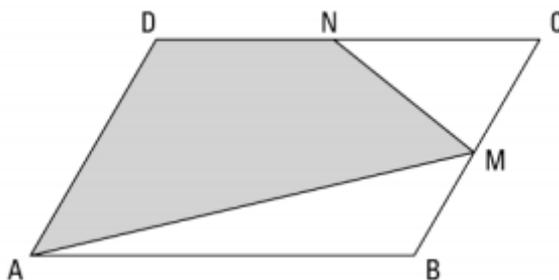
Considere que, na figura, o segmento HD é paralelo a AC e a distância $HK' = 18$ km. Calcule a que distância, em quilômetros, deverá estar a cabeceira da ponte na margem do lado da cidade B (ou seja, o ponto D) do ponto K, de modo que o percurso total da cidade A até a cidade B tenha comprimento mínimo.

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 13
- e) 14



9. (FIGURAS PLANAS). Sabendo que ABCD é um paralelogramo de área 24 cm^2 e que M e N são pontos médios de BC e CD, respectivamente. Sabendo ainda que para a circunferência ao lado $AB = 12 \text{ cm}$ e que $CB = 2 \cdot AC$. Determine a razão entre a área de AMND e o comprimento da área hachurada contida na circunferência. Adote $\pi = 3$.

- a) $\frac{7\sqrt{3}}{12}$
- b) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$
- c) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$
- d) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$
- e) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$



10. (BINÔMIO DE NEWTON). Sabendo-se que no desenvolvimento de $(1+x)^{26}$ os coeficientes dos termos de ordem $(2r+1)$ e $(r+3)$ são iguais, pode-se afirmar que r é igual a:

- a) 8 ou 4
- b) 8 ou 2
- c) 4 ou 2
- d) 2 ou 1
- e) 4 ou 4

11. (ANÁLISE COMBINATÓRIA). Em uma reunião social, cada participante cumprimenta todos os alunos uma única vez. Se houve um total de 36 cumprimentos, o número de participantes da reunião é um número:

- a) cubo perfeito.
- b) par.
- c) quadrado perfeito.
- d) primo.
- e) múltiplo de 5.

12. (FUNÇÃO MODULAR) A soma das raízes reais distintas da equação $||x - 2| - 2| = 2$ é igual a:

- a) 0
- b) 2
- c) 4
- d) 6
- e) 8

13. (EXPONENCIAL). Os gráficos das funções exponenciais reais $f(x) = 64^x$ e $g(x) = 8^x + 2$ se intersectam em um ponto de coordenadas (a, b) de um plano cartesiano. O valor

de $\left(\frac{2 \cdot b}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$ é:

- a) $64^{\sqrt[3]{3}}$
- b) $48^{\sqrt[3]{3}}$
- c) $42^{\sqrt[3]{3}}$
- d) $36^{\sqrt[3]{3}}$
- e) $24^{\sqrt[3]{3}}$

14. (NÚMEROS COMPLEXOS). Assinale a alternativa que representa a razão da área do triângulo formado pelos valores de $\sqrt[3]{i}$ pelo seu semiperímetro.

- a) $1/4$
- b) $1/2$
- c) 1
- d) 2
- e) 4

15. (POLIEDRO). Qual o volume de um octaedro platônico cuja soma das medidas das arestas é 144cm ?

- a) $1728^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- b) $1152^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- c) $576^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- d) $288^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$
- e) $144^2\sqrt{2}\text{ cm}^3$

16. (PRISMA). Calcular o volume do prisma hexagonal regular de altura h , sabendo que suas maiores diagonais são iguais ao triplo das menores diagonais da base.

- a) $\frac{3\sqrt{3}h^3}{46}$
- b) $\frac{3\sqrt{3}h^3}{23}$
- c) $\frac{\sqrt{69}h^3}{2}$
- d) $\frac{3\sqrt{69}h^3}{2}$
- e) $\frac{5\sqrt{69}h^3}{4}$

17. (PIRÂMIDE). As arestas laterais de uma pirâmide regular de 12 faces laterais tem comprimento l . O raio do círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide mede $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Então a razão do volume desta pirâmide pelo perímetro da base vale:

- a) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}l^2}{48}$
- b) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}l^2}{48}$
- c) $\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{5}l^2}{48}$
- d) $\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}l^2}{48}$
- e) $\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}l^2}{48}$

18. (TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA). Simplifique a expressão considerando $\cos a > 0$:

$$\frac{\cos a}{2} \sqrt{\frac{1 + \sin^2 a}{\cos a}} \left[\sqrt{\frac{\cos^3 a}{1 + \sin^2 a}} + \sqrt{\frac{1 + \sin^2 a}{\cos a}} \right]$$

- a) $1/4$
- b) $1/2$
- c) 1
- d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- e) $\sqrt{3}$

19. (EQUAÇÃO TRIGONOMÉTRICA). Encontre o conjunto solução da equação na variável x :

$$x^2 - (\cos^2 \alpha)x - \sin^2 \alpha = 0$$

- a) $(-1, \cos^2 \alpha + 1)$
- b) $(-1, -\cos^2 \alpha - 1)$
- c) $(1, \cos^2 \alpha + 1)$
- d) $(1, -\sin^2 \alpha)$
- e) $(-1, -\sin^2 \alpha)$

20. (RAZÃO TRIGONOMÉTRICA). Simplifique a expressão:

$$y = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 0

TURMA:

NOME:

1º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Sendo $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x + y + z = 10$ e $xy + yz + xz = 8$, o valor de $x^2 + y^2 + z^2$ é:

- (A) 64.
- (B) 70.
- (C) 80.
- (D) 84.
- (E) 90.

2. Considere a equação $x^2 - 8x + 8 = 0$, tal que m e n são as raízes da equação determine o valor de $32 \left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{n^4} \right)$

- (A) 32.
- (B) 16.
- (C) 128.
- (D) 64.
- (E) 49.

3. Simplificando $\frac{2^{n+4} - 2^{n+1}}{2^{n-2}}$, obterão:

- (A) 56.
- (B) 48.
- (C) 14.
- (D) 16.
- (E) 20.

4. O valor de $(3\sqrt{2} - 2)(3\sqrt{2} + 2)$ é:

- (A) 14.
- (B) 12.
- (C) 16.
- (D) 18.
- (E) 10.

5. Se $A = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ e $B = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$, o valor de $A^2 - B^2$ é:

- (A) 0.
- (B) 2
- (C) 3^x .

- (D) 1.
- (E) 3^{-x} .

6. O valor de $99998^2 - 99997^2$ é:

- (A) 99999.
- (B) 199.996.
- (C) 199.995.
- (D) 198.995.
- (E) 201.005.

7. O valor $\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} - 2\sqrt{2}$ é:

- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 2.
- (D) -1.
- (E) -2.

8. Calcule o valor da expressão $\frac{3xy(x+y)+x^3+y^3}{x^2+y^2+2xy}$ se $x=1+\sqrt[4]{2}$ e $y=1-\sqrt[4]{2}$:

- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 2.
- (D) -1.
- (E) -2.

9. Uma pera tem cerca de 90% de água e 10% de matéria sólida. Um produtor coloca 100 quilogramas de pera para desidratar até o ponto em que a água apresenta 60% da massa total. Quantos litros de água serão evaporados? (Lembre-se 1 litro de água tem massa de 1 quilograma)

- (A) 15 L.
- (B) 45 L.
- (C) 75 L.
- (D) 80 L.
- (E) 30 L.

10. Duas melancias custam o mesmo que nove laranjas mais seis bananas; além disso, meia dúzia de bananas custa metade de uma melancia. Portanto, o preço pago por uma dúzia de laranja e uma dúzia de bananas é igual ao preço de quantas melancias?

- (A) 3.
- (B) 4.
- (C) 6.
- (D) 5.
- (E) 2.

11. (Fuvest) Um lote de livros foi impresso em duas gráficas A e B, sendo que A imprimiu 70% dos livros e B 30%. Sabe-se que 3% dos livros impressos em A e 2% dos livros impressos em B são defeituosos. Qual a porcentagem dos livros defeituosos do lote?

- (A) 1,8
- (B) 2,0
- (C) 2,2
- (D) 2,7
- (E) 3,1

12. Uma senhora extremamente gorda resolve fazer uma dieta e perdeu em três meses 30% de seu peso; entretanto, nos três meses seguintes, ela aumentou seu peso em 40%.

No decorrer desse semestre, o peso da senhora:

- (A) Aumentou 16%.
- (B) Aumentou 10%.
- (C) Manteve seu valor inicial.
- (D) Diminuiu 10%.
- (E) Diminuiu 2%.

13. Em uma sala estão presente 100 pessoas das quais 99% são homens. Quantas pessoas devem sair da sala para que a porcentagem de homens seja de 98%

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 10
- (D) 20
- (E) 50

14. Simplifique a expressão:

$$\sqrt{3a + b - 2\sqrt{3ab}} + \sqrt{2a + b + 2\sqrt{2ab}}$$

- (A) $\sqrt{3a} + 2\sqrt{b}$
- (B) $\sqrt{3a} + 2\sqrt{a}$
- (C) $\sqrt{3b} + 2\sqrt{a}$
- (D) $\sqrt{3a} + \sqrt{2b}$
- (E) $\sqrt{3a} + \sqrt{2a}$

15. A expressão $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ pode ser representada de que outra forma?

- (A) $5 - \sqrt{3}$
- (B) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$
- (C) $3 - \sqrt{2}$
- (D) $\sqrt{13 - 3\sqrt{3}}$
- (E) 2

16. Qual o valor da soma:

$$\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$$

- (A) 1,0
- (B) 1,1
- (C) 1,2
- (D) 1,3
- (E) 1,4

17. A expressão $\sqrt{24 + 8\sqrt{5}} - \sqrt{24 - 8\sqrt{5}}$ é igual a:

- (A) 0
- (B) 2
- (C) 4
- (D) $\sqrt{5}$
- (E) $8\sqrt{5}$

18. O valor aproximado de:

$$\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

está entre:

- (A) 0 e 2
- (B) 2 e 4
- (C) 4 e 6
- (D) 6 e 8
- (E) 8 e 10

19. Qual o valor da expressão:

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

20. Calcular o valor de $\sum_{p=2}^9 \frac{10}{p}$

- (A) 1024
- (B) 1023
- (C) 1013
- (D) 1012
- (E) $\binom{9}{2}$

TURMA:

NOME:

Final Da Prova De Matemática

Curso Cidade

CURSO CIDADE

SCLN 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 4102-6781 / 3201-0432 / 9975-4464 (Vivo) / 8175-4509 (Tim)

www.cursocidade.com.br / cursocidade@iic.pro.br





GABARITO 1º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

2º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Dados dois conjuntos quaisquer A e B, sendo A^c e B^c os complementos de A e B, respectivamente, simplificando a expressão $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c)$, obtemos.

- (A) A^c
- (B) B^c
- (C) A
- (D) B
- (E) $A \cup B$

2. Numa escola de música, 65% das pessoas matriculadas estudam teclado e as restantes estudam violão. Sabe-se que 60% das pessoas matriculadas são do sexo masculino e que as do sexo feminino que estudam violão são apenas 5% do total. Nessas condições, escolhendo-se uma matrícula ao acaso, qual é a probabilidade de ser a de uma pessoa do sexo masculino e estudante de teclado?

- (A) $\frac{2}{5}$
- (B) $\frac{3}{10}$
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $\frac{1}{5}$
- (E) $\frac{1}{10}$

3. Numa pesquisa para se avaliar a leitura de três revistas "A", "B" e "C", descobriu-se que 81 pessoas leem, pelo menos, uma das revistas; 61 pessoas leem somente uma delas e 17 pessoas leem duas das três revistas. Assim sendo, o número de pessoas mais bem informadas dentre as 81 é:

- (A) 3.
- (B) 5.
- (C) 12.
- (D) 29.
- (E) 37.

4. Se $2^x = 10$, o valor de 4^{x+1} é:

- (A) 200
- (B) 100
- (C) 25
- (D) 250
- (E) 400

5. Um engenheiro, ao fazer o levantamento do quadro de pessoal de uma fábrica, obteve os seguintes dados:

- 28% dos funcionários são mulheres;
- $\frac{1}{6}$ dos homens são menores de idade;
- 85% dos funcionários são maiores de idade.

Qual é a porcentagem dos menores de idade que são mulheres?

- (A) 30%
- (B) 28%
- (C) 25%
- (D) 23%
- (E) 20%

6. Se $2^x + 2^{-x} = a$, o valor de $8^x + 8^{-x}$ é:

- (A) $a^2 - 3a$
- (B) $a^2(a - 3)$
- (C) $a(a^2 - 3)$
- (D) $a^2 - 3$
- (E) $a^3 - 3$

7. Simplificando a expressão $\sqrt[n]{\frac{600}{25^{n+2} - 5^{2n+2}}}$ Para $n \in N - \{0,1\}$, temos.

- (A) 5.
- (B) 5^{-1}
- (C) 5^{-2}
- (D) 5^2
- (E) 1

8. João fez um percurso de 30 km e teria gasto 4 horas menos se aumentasse sua velocidade de 2 km/h. Qual é a velocidade de João?

- (A) 2 km/h
- (B) 1 km/h
- (C) 4 km/h
- (D) 3 km/h
- (E) 5 km/h

9. Pedro e João são concorrentes na venda de carnês. Em maio, eles venderam o mesmo número de carnês. Em junho, Pedro conseguiu aumentar em 32% as suas vendas. Porém, neste mês de junho, as vendas de João foram 25% superiores às de Pedro. Em relação ao mês de maio, de quanto foi o aumento nas vendas de João?

- (A) 32%
- (B) 40%
- (C) 75%
- (D) 60%
- (E) 65%

10. Uma loja vende seus artigos nas seguintes condições: à vista com 30% de desconto sobre o preço da tabela ou no cartão de crédito com 10% de acréscimo sobre o preço de tabela. Um artigo que à vista sai por R\$ 7.000,00, no cartão sairá por:

- (A) R\$ 13.000,00
- (B) R\$ 11.000,00
- (C) R\$ 10.010,00
- (D) R\$ 9.800,00
- (E) R\$ 7.700,00

11. Na equação $(x - 1) + (2x - 3) + (3x - 5) + \dots + (50x - 99) = 25$ o cálculo de x é:

- (A) 2
- (B) $\frac{8}{51}$
- (C) $\frac{13}{50}$
- (D) $\frac{101}{51}$
- (E) $\frac{17}{50}$

12. O terceiro termo de uma progressão aritmética é 11 e a razão é 4. A soma dos 20 primeiros termos é:

- (A) 790
- (B) 800
- (C) 810
- (D) 820
- (E) 830

13. Um automóvel percorre no 1º dia de viagem uma certa distância x ; no 2º dia percorre uma distância $2x$; no 3º dia $3x$, e assim por diante. Ao final de 20 dias, percorreu uma distância de 6.300 km. A distância percorrida no primeiro dia foi de:

- (A) 15 km
- (B) 30 km
- (C) 20 km
- (D) 25 km
- (E) 35 km

14. O par ordenado (x,y) com x e y inteiros positivos, $x > y$ satisfaz a equação $4x^2 + y^2 = 4(xy + 16)$ o valor de $2x - y$ é:

- (A) 6.
- (B) 5.
- (C) 9.
- (D) 8.
- (E) 4.

15. Certa quantia é dividida em partes iguais, entre determinado número de pessoas. Se aumentarmos de 6 o número de pessoas, cada uma receberá R\$ 3,00 a menos, e se, ao contrário, o número de pessoas diminui de 2, cada uma terá R\$ 2,00 a mais. Achar o número de pessoas e a parte de cada uma.

- (A) 6.

TURMA:

NOME:

- (B) 8.
- (C) 10.
- (D) 12.
- (E) 14.

16. Se $x - y = 7$ e $xy = 60$, então o valor da expressão $x^2 + y^2$ é:

- (A) 53
- (B) 109
- (C) 169
- (D) 420
- (E) 400

17. (OBMEP) Na figura abaixo temos dois quadrados. O maior tem lado $a + b$ e o menor lado a . Qual é a área da região colorida?

- (A) b^2
- (B) $a + b$
- (C) $a^2 + 2ab$
- (D) $2ab + b^2$
- (E) $a - b$



18. Determine os valores de m para que a equação $x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha duas raízes reais iguais.

- (A) $m = -2$ e $m = 0,4$
- (B) $m = -1$ e $m = 0,2$
- (C) $m = 0$
- (D) $m = 2$ e $m = 0,2$
- (E) $m = 1$ e $m = 3$

19. Em uma escola que tem 415 alunos, 221 estudam inglês, 163 estudam francês e 52 estudam ambas as línguas. Quantos alunos estudam inglês ou francês? Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

- (A) 330 e 40
- (B) 330 e 80
- (C) 332 e 36
- (D) 332 e 83
- (E) 300 e 83

20. O primeiro termo de uma progressão aritmética é -10 e a soma dos oito primeiros termos 60 . Determine a razão.

- (A) 5
- (B) 4
- (C) 3
- (D) 2
- (E) 1

Final Da Prova De Português

CURSO CIDADE

SCLN 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 4102-6781 / 3201-0432 / 9975-4464 (Vivo) / 8175-4509 (Tim)
www.cursocidade.com.br / cursocidade@iic.pro.br





GABARITO 2º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	ANULADA				
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

1º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Considerando os n números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, em que a n ésima linha compreende n números, calcule a soma dos números da 10ª linha.

```

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
. . . . .
. . . . .
. . . . .

```

- (A) 1000
(B) 980
(C) 1020
(D) 960
(E) 990

2. Resolvendo a equação $x^{-1} + 4x^{-1/2} + 3 = 0$, em \mathbb{R} , encontra-se o conjunto solução:

- (A) $\{-1, -9\}$
(B) $\{9, 1\}$
(C) $\left\{2, \frac{2}{3}\right\}$
(D) $\left\{1, \frac{1}{9}\right\}$
(E) $\left\{-9, \frac{1}{9}\right\}$

3. Se na equação $2x^2 + m \cdot x - 1 = 0$, em que $m \in \mathbb{R}$, a soma das raízes é igual ao produto delas, então o conjunto solução da equação é:

- (A) $\{3, 3/2\}$
(B) $\{-3, 3/4\}$
(C) $\{-2, 2/3\}$
(D) $\{-1, -2\}$

(E) $\{-1, 1/2\}$

4. A operação $(R \cap Q) \cap (N \cup Z) \cap (Z \cap Q)$ é:

- (A) Z
- (B) N
- (C) Q
- (D) R
- (E) I

5. Seja, A, B e C conjuntos finitos. Se $n(A \cap B) = 25$, $n(A \cap C) = 15$ e $n(A \cap B \cap C) = 10$, então, o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$ é:

- (A) 15
- (B) 10
- (C) 30
- (D) 20
- (E) 40

6. Sejam m e n dois números inteiros positivos tais que m e n são ímpares consecutivos, com $m \cdot n = 483$. Nessas condições, o valor de $m + n$ é:

- (A) 64
- (B) 52
- (C) 46
- (D) 44
- (E) 32

7. Numa progressão geométrica (PG) crescente de 5 termos, o primeiro e o último correspondem, respectivamente, às raízes da equação $x^2 - 51x + 144 = 0$. O valor da soma do segundo, terceiro e quarto termos dessa PG é:

- (A) 12
- (B) 24
- (C) 28
- (D) 36
- (E) 42

8. Um restaurante cobra 10% do valor consumido como taxa de serviço. Um cliente pagou R\$ 50,60 e outro R\$ 132. A soma dos valores das despesas dos dois clientes, sem a taxa de serviço, foi de:

- (A) R\$ 168,50.
- (B) R\$ 166,00.
- (C) R\$ 164,34.
- (D) R\$ 168,00.
- (E) R\$ 164,00.

9. Uma progressão aritmética tem razão $r = -10$, sabendo que seu 100º (centésimo) termo é zero, pode-se afirmar que seu 14º (décimo quarto) termo vale:

- (A) 130

- (B) 870
- (C) 860
- (D) 990
- (E) 120

10. É correto afirmar que:

- (A) A soma e a diferença de dois números naturais é sempre um número natural.
- (B) O produto e o quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- (C) A soma de dois números racionais é sempre um número racional
- (D) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional
- (E) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional

11. Se $A = [-5, 1[$ e $B =]-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5}[$, então os conjuntos $A - B$ e $A \cap B$ são, respectivamente.

- (A) $[-5, -\frac{\sqrt{2}}{3}[$ e $]-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1[$
- (B) $[-5, -\frac{\sqrt{2}}{3}[$ e $]-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5}[$
- (C) $]-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1[$ e $]-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5}[$
- (D) $[1, \sqrt{5}]$ e $]-5, -\frac{\sqrt{2}}{3}[$
- (E) $]-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1[$ e $]-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1[$

12. Um terreno possui a forma de um triângulo cujos lados medem 132 m, 156 m e 204 m. Deseja-se plantar árvores no seu perímetro de maneira que haja uma árvore em cada vértice e que as árvores fiquem equiespaçadas. Determine o número mínimo de árvores que podem ser plantadas de modo que a distância entre duas árvores seja um número inteiro.

- (A) 36
- (B) 41
- (C) 18
- (D) 24
- (E) 38

13. Uma fábrica produz dados com três tamanhos: pequeno, médio e grande, com 6, 7 e 8 cm de aresta, respectivamente. O fabricante deseja remeter a sua produção em caixas cúbicas do mesmo tamanho, de forma que os dados fiquem bem ajustados na caixa e que ela contenha um mesmo tipo de dado. Determine o menor tamanho possível para cada caixa.

- (A) 154
- (B) 168
- (C) 142
- (D) 136

(E) 176

14. Os números x, y, z formam, nessa ordem, uma PA de soma 15 por outro lado, os números $x, y + 1$ e $z + 5$ formam, nesta ordem, uma PG de soma 21, sendo $0 \leq x \leq 10$, o valor de $3z$ é:

- (A) 36
- (B) 9
- (C) -6
- (D) 48
- (E) 21

15. Um artigo custa hoje R\$ 100,00 e seu preço é aumentado, mensalmente, em 12% sobre o preço anterior.

Se fizermos uma tabela de preço desse artigo mês a mês, obteremos uma progressão:

- (A) Aritmética de razão 12.
- (B) Aritmética de razão 0,12.
- (C) Geométrica de razão 12.
- (D) Geométrica de razão 1,12.
- (E) Geométrica de razão 0,12.

16. Simplificar supondo $a > 0$ e $b > 0$: $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2} \cdot \sqrt[n+1]{a^{-1}}} \right)^{n^2-1}$

- (A) a
- (B) $a^{n^2} - 2$
- (C) a^{n+3}
- (D) a^{-1}
- (E) a^2

17. (UEG-adaptada) Por meio de negociação com o governo, uma categoria sindical consegue um reajuste parcelado de 13% no mês de maio e de 16% no mês de junho. Calcule o salário final após os dois reajustes, supondo um salário inicial de R\$ 180,00:

- (A) R\$ 203,0
- (B) R\$ 208,80
- (C) R\$ 195,00
- (D) R\$ 235,95
- (E) R\$ 200,00

18. (ESAL) Foi consultado um certo número de pessoas sobre as emissoras de TV que habitualmente assistem. Obteve-se o resultado seguinte: 300 pessoas assistem ao canal A, 270 pessoas assistem o canal B, das quais 150 assistem ambos os canais A e B e 80 assistem outros canais distintos de A e B. O número de pessoas consultadas foi:

- (A) 800
- (B) 720
- (C) 570
- (D) 500

TURMA:

NOME:

(E) 600

19. A razão de uma P.A é igual a 8% do primeiro termo. Sabendo que o 11º termo vale 36, determine o valor da soma dos 26 primeiros termos dessa P.A.

(A) 1.000

(B) 1.040

(C) 500

(D) 750

(E) 1.280

20. As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão em progressão geométrica, nessa ordem. A área do quadrado será:

(A) 256

(B) 64

(C) 16

(D) 243

(E) 729

Final Da Prova De Português



MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

4º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Se A, B e C são conjuntos tais que:

$$n(A - (B \cup C)) = 15$$

$$n(B - (A \cup C)) = 20$$

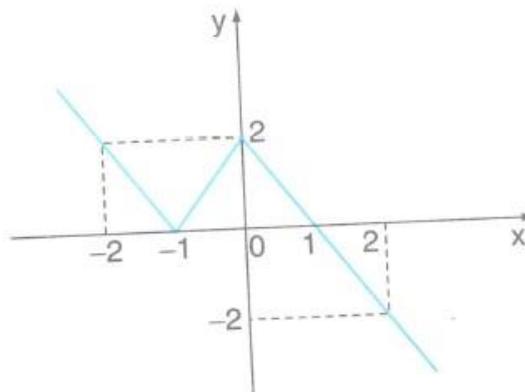
$$n(C - (A \cup B)) = 35$$

$$n(A \cup B \cup C) = 120$$

Determine o número de elementos do conjunto $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

- (A) 30
- (B) 40
- (C) 45
- (D) 50
- (E) 55

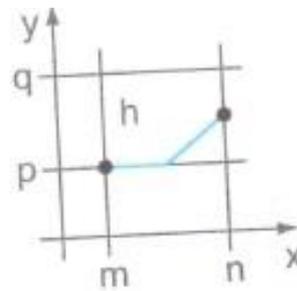
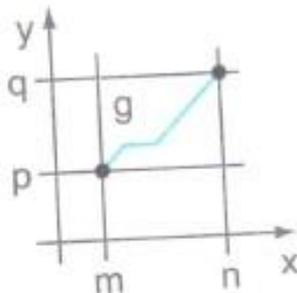
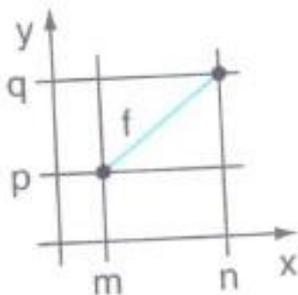
2. Seja f a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , dada pelo gráfico a seguir.



É correto afirmar que:

- (A) f é sobrejetora e não injetora.
- (B) f é bijetora.
- (C) $f(x) = f(-x)$ para todo x real.
- (D) $f(x) > 0$ para todo x real.
- (E) O conjunto-imagem de f é $]-\infty; 2]$.

3. Considere as funções f, g e h, todas definidas em $[m, n]$ com imagens em $[p, q]$ representadas pelos gráficos a seguir.



Pode-se afirmar que:

- (A) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h é injetiva.
- (B) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
- (C) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.
- (D) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.
- (E) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

4. Em certo ano, ao analisar os dados dos candidatos ao Concurso Vestibular para o Curso de Graduação em Administração, nas modalidades Administração de Empresas e Administração pública, concluiu-se que:

- 80% do número total de candidatos optaram pela modalidade Administração de Empresas;
- 70% do número total de candidatos eram do sexo masculino;
- 50% do número de candidatos à modalidade administração pública eram do sexo masculino;
- 500 mulheres optam pela modalidade administração pública.

O número de candidatos de sexo masculino à modalidade administração de empresas foi:

- (A) 4.000
- (B) 3.500
- (C) 3.000
- (D) 1.500
- (E) 1.000

5. Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} tais que: $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = -2x + 1$, se $f(g(m - 1)) - 1 = 3m - g(f(m + 1))$, então $f(m) + g(m)$ é igual a:

- (A) 1
- (B) $-\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{1}{3}$
- (D) $\frac{2}{3}$
- (E) $-\frac{2}{3}$

6. Simplificando a expressão:

$$1000^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{4}{3}} - (625)^{-0,75} \text{ obtemos:}$$

- (A) 1

- (B) $\frac{40501}{500}$
- (C) $\frac{500}{25151}$
- (D) $\frac{40501}{250}$
- (E) $\frac{25501}{500}$

7. Um retângulo com 15 metros de comprimento e 9 metros de largura deve ser dividido em quadrados iguais e que apresentam a maior área possível. Qual é o número de quadrados obtidos?

- (A) 15
(B) 10
(C) 20
(D) 25
(E) 12

8. Antônio e Eduardo começaram em seus novos empregos no mesmo dia. A jornada de trabalho de Antônio é de três dias de trabalho seguidos de um dia de descanso, enquanto que a jornada de trabalho de Eduardo é de sete dias de trabalho seguidos de três dias de descanso. Durante quantos de seus primeiros 1.000 dias de trabalho seus dias de descanso coincidirão?

- (A) 48.
(B) 50
(C) 72
(D) 75
(E) 100

9. Reduza ao numeral mais simples:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

- (A) $\sqrt{2}$
(B) 2
(C) 1
(D) $2\sqrt{2}$
(E) 0

10. Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nessa classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nessa classe é:

- (A) 7
(B) 8
(C) 9
(D) 10
(E) 11

11. Numa microempresa, consomem-se atualmente x litros de combustível por dia. Para a próxima semana, haverá um aumento de 5% no preço do combustível. Com o objetivo de manter a mesma despesa, será feita uma redução no consumo. O novo consumo diário de combustível deverá ser de aproximadamente:

- (A) $94,2\%x$
- (B) $95\%x$
- (C) $95,12\%x$
- (D) $95,24\%x$
- (E) $95,5\%x$

12. A, B e C são matrizes quadradas de ordem 3 e 0 é a matriz nula de ordem 3. Assinale a afirmação falsa.

- (A) $(A + B)C = AC + BC$
- (B) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$
- (C) $(A+C)I = A+C$
- (D) $(BC)^t = C^tB^t$
- (E) $AC = CA = I \Rightarrow C = A^{-1}$

13. Os números reais x, y e z que satisfazem a equação matricial mostrada a seguir são tais que sua soma é igual a:

$$\begin{bmatrix} x-1 & y+2 \\ z & x+y+z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

- (A) -3
- (B) -2
- (C) -1
- (D) 2
- (E) 3

14. Sejam as matrizes a seguir:

$$\begin{cases} A = (a_{ij})_{4 \times 3}, a_{ij} = i^j \\ B = (b_{ij})_{3 \times 4}, b_{ij} = j^i \end{cases}$$

Se $C = A \cdot B$, então c_{22} vale:

- (A) 3
- (B) 14
- (C) 39
- (D) 84
- (E) 258

15. Considerando as matrizes A e B .

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2b & -2b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Se a inversa da matriz A é a matriz B , então:

- (A) $a = 0$ ou $b = 0$
- (B) $ab = 1$

(C) $ab = \frac{1}{2}$

(D) $a = 0$ e $b = 0$

(E) $a + b = \frac{1}{2}$

16. Um pecuarista deseja fazer 200 kg de ração com 22% de proteína, utilizando milho triturado, farelo de algodão e farelo de soja. Admitindo-se que o teor de proteína do milho seja 10%, do farelo de algodão seja 28% e do farelo de soja seja 44%, e que o produtor disponha de 120 kg de milho, calcule as quantidades de farelo de soja e farelo de algodão, respectivamente, que ele deve adicionar ao milho para obter essa ração.

(A) 60kg e 20kg

(B) 40kg e 30kg

(C) 20kg e 60kg

(D) 25kg e 30kg

(E) 50kg e 50kg

17. Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço y ela consegue vender x unidades do produto, de acordo como a equação $y = 50 - \frac{x}{2}$. Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de R\$1.250,00, qual foi a quantidade vendida?

(A) 50

(B) 49

(C) 12

(D) 16

(E) 35

18. Dadas as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$, sabe-se que uma das raízes da segunda equação é o dobro de uma das raízes da primeira equação. Sendo $k \neq 0$, determine k .

(A) $k = 3$

(B) $k = 2$

(C) $k = 6$

(D) $k = 1$

(E) impossível encontrar k com os dados apresentados

19. A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15. Calcule a soma do sexto termo dessa P.A com o décimo quinto termo.

(A) -1

(B) -1,5

(C) 0

(D) -2

(E) -3

20. Um carro, cujo preço à vista é R\$ 24.000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R\$ 4.000,00 e a quarta parcela de R\$ 1.000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

(A) 8.500

(B) 8.000

TURMA:

NOME:

- (C) 4.500
- (D) 9.000
- (E) 12.000

Final Da Prova De Matemática

Curso Cidade





MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

5º SIMULADO DE MATEMÁTICA

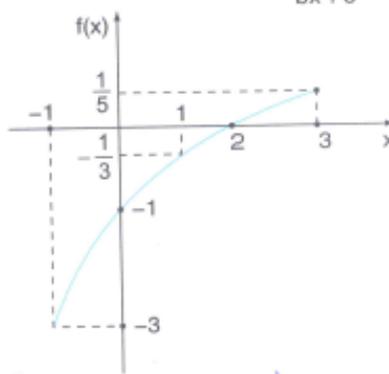
1. Em uma empresa, 60% dos funcionários lêem a revista A, 80% lêem a revista B, e todo funcionário é leitor de pelo menos uma dessas revistas. O percentual de funcionários que lêem as duas revistas é:

- (A) 20%
- (B) 40%
- (C) 60%
- (D) 75%
- (E) 140%

2. Em um encontro de dirigentes esportivos, foi aprovada a realização de um torneio A de futebol, que aconteceu, pela primeira vez, 2 anos depois é, posteriores, a Cada 9 anos. No mesmo encontro, foi aprovada a realização de um torneio B, que ocorreu pela primeira vez somente 9 anos depois, acontecendo a cada 7 anos. Dessa forma, a partir da aprovação, os dois torneios ocorreram, pela primeira vez no mesmo ano após:

- (A) 50 anos.
- (B) 55 anos.
- (C) 58 anos
- (D) 60 anos.
- (E) 65 anos.

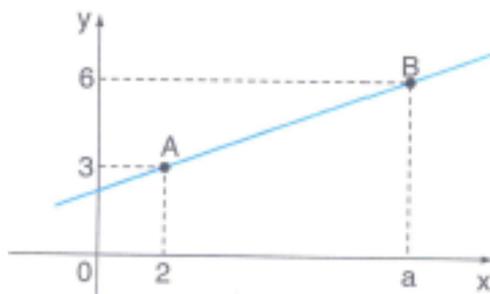
3. A figura a seguir representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \frac{x+a}{bx+c}$, para $-1 \leq x \leq 3$. - 1



Logo, $a+b+c$ é igual a:

- (A) 5
- (B) 4
- (C) 3
- (D) 2
- (E) 1

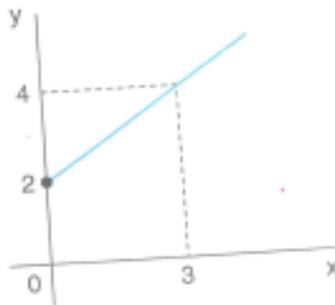
4. A figura representa o gráfico de uma função do 1° grau que passa pelos pontos A e B onde $a \neq 2$.



O ponto de interseção da reta \overline{AB} com eixo x tem abscissa igual a:

- (A) $1 - a$
 (B) $A - 2$
 (C) $\left(\frac{3a - 12}{a - 2}\right)$
 (D) $4 - a$
 (E) $12 - 3a$
5. Para a função $f(x) = 5x + 3$ é um número b, tem-se $f(f(b)) = -2$ o valor b é:
- (A) -1
 (B) $-\frac{4}{5}$
 (C) $-\frac{17}{25}$
 (D) $-\frac{1}{5}$
 (E) $\frac{-3}{5}$
6. Seja f e g funções tais que $f(x) = 5x + 2$ e $g(x) = -6x + 7$, determine a lei que define a função afim h, sabendo que $h(-5) = 1$ e que o gráfico de h passa pelo ponto de interseção dos gráficos de f com g.
- (A) $h(x) = 3x + 4$
 (B) $h(x) = \frac{x}{5} + 4$
 (C) $h(x) = \frac{3x}{5} + 4$
 (D) $h(x) = x + 4$
 (E) $h(x) = \frac{2x}{5} + 3$

7. Consideramos a função inversível f cujo gráfico é visto a seguir.



A lei que define f^{-1} é:

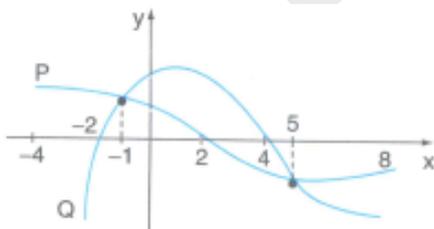
- (A) $y = 3x + \frac{3}{2}$
 (B) $y = 2x - \frac{3}{2}$
 (C) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x - 3$
 (D) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 2$
 (E) $y = -2x - \frac{3}{2}$

8. Medições realizadas mostram que a temperatura no interior da terra aumenta, aproximadamente, 3°C a cada 100 m de profundidade. Num certo local, a 100 m de profundidade, a temperatura é de 25°C .

Encontrado-se uma fonte de água mineral a 46°C , a profundidade dela será igual a:

- (A) 700 m
 (B) 600 m
 (C) 800 m
 (D) 900 m
 (E) 500 m

9. Os gráficos de duas funções polinomiais P e Q estão representados na figura seguinte.



Então, no intervalo $[-4; 8]$, $P(x) \cdot Q(x) < 0$ para:

- (A) $-2 < x < 4$
 (B) $- < x < -1$ ou $5 < x < 8$
 (C) $-4 \leq x < -2$ ou $2 < x < 4$
 (D) $-4 \leq x < -2$ ou $5 < x \leq 8$
 (E) $-1 < x < 4$

10. O valor da expressão $\left(\frac{3}{5}\right)^0 - \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + 2^2 + \sqrt[7]{-128} - (0,36)^{\frac{1}{2}}$ é:

- (A) 1/8
- (B) 1/6
- (C) 1
- (D) 1/2
- (E) 1/15

11. Se $x^3 = 2.005^7$; $y^5 = 2.005^8$ e $z^9 = 2005^{10}$, o valor $(xyz)^{45}$ é igual a:

- (A) 2.005^{45}
- (B) $2.005^{2.005}$
- (C) 2.005^{125}
- (D) 2.005^{227}
- (E) 2.005^{250}

12. No alto de uma torre de uma emissora de televisão, duas luzes piscam com frequências diferentes. A primeira pisca 15 vezes por minuto e a segunda pisca 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?

- (A) 12
- (B) 10
- (C) 20
- (D) 15
- (E) 30

13. São dados três números em PA crescente cuja soma é 18. Se multiplicarmos o 1º por 2 e o 2º por 3 e o 3º por 6, os produtos formarão uma PG. Calcule o produto dos termos do PA.

- (A) 162
- (B) 158
- (C) 145
- (D) 128
- (E) 124

14. A soma de três números em PG decrescente é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma PA. Calcule a soma dos termos da PG

- (A) 14
- (B) 15
- (C) 18
- (D) 19
- (E) 20

15. No triângulo equilátero de lado a , constrói-se outro triângulo equilátero nos pontos médios de seus lados. Esse processo é feito indefinidamente gerando infinitos outros triângulos equiláteros. Determine o limite da soma dos perímetros desses triângulos.

- (A) $3a$
- (B) $4a$
- (C) $5a$
- (D) $6a$

(E) 8a

16. Seja A uma “matriz diagonal” de ordem 2; isso é, A é do tipo: $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, onde x e y são números quaisquer.

Nestas condições, o número de matrizes que satisfazem a equação matricial: $A^2 - A = 0$ é:

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

17. Seja Q uma matriz de ordem 4 tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = O$. Calcule $\det Q$.

- (A) 4
- (B) 16
- (C) 8
- (D) 12
- (E) 1

18. Seja as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = 2i - 3j$ e $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $b_{ij} = y - j$. O determinante de $A \cdot B$ é.

- (A) -12
- (B) -6
- (C) 0
- (D) 1
- (E) 5

19. Se a terna ordenada (a, b, c), de números reais é solução do sistema: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$ então a soma $a + b + c$ é

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

20. Se (a, b, c) é a solução do sistema: $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$ Calcule $(a + b + c)^4$.

- (A) 48
- (B) 81
- (C) 72
- (D) 36
- (E) 100

Final Da Prova De Matemática



MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

6º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Num grupo constituído de k pessoas, das quais 14 jogam xadrez, 40 são homens. Se 20% dos homens jogam xadrez e 80% das mulheres não jogam xadrez, então o valor de K é:

- (A) 62
- (B) 70
- (C) 78
- (D) 84
- (E) 90

2. Leia e responda:

- I. Se $\{5;7\} \subset A$ e $A \subset \{5; 6; 7, 8\}$, então os possíveis conjuntos A são em números de 4.
- II. Supondo A e B conjuntos quaisquer, então sempre temos $(A \cap \emptyset) \cup (B \cup \emptyset) = A \cup B$.
- III. A soma de dois números irracionais pode ser racional.

Das afirmações anteriores:

- (A) I, II e III são verdadeiras
- (B) Apenas I e II são verdadeiras.
- (C) Apenas III é verdadeira.
- (D) Apenas II e III são verdadeiras.
- (E) Apenas I e III são verdadeiras.

3. O gráfico da função $y = mx + n$, em que m e n são constantes, passa pelos pontos $A(1, 6)$ e $B(3, 2)$. O coeficiente angular da função é:

- (A) -2
- (B) $-\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) 2
- (E) 4

4. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $b \in \mathbb{R}$ $x \rightarrow y = -\left(\frac{x}{2}\right) + b$ e sabendo-se que $f \circ f(4) = 2$, a lei que define f^{-1} é:

- (A) $y = \left(-\frac{x}{2}\right) + 2$
- (B) $y = \left(-\frac{x}{2}\right) + 3$

- (C) $y = -2x + 4$
- (D) $y = -2x + 6$
- (E) $y = -2x + 8$

5. Medições realizadas mostram que a temperatura no interior da terra aumenta, aproximadamente, 3°C a cada 100 m de profundidade. Nem certo local, a 100 m de profundidade, a temperatura é de 25°C . Nessas condições podemos afirmar que:

A temperatura a 1500 m de profundidade é:

- (A) 70°C
- (B) 45°C
- (C) 42°C
- (D) 60°C
- (E) 67°C

6. Determine a solução da inequação $-1 < \frac{2-3x}{x+3} < 1$

- (A) $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$
- (B) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
- (C) $(2, +\infty)$
- (D) $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
- (E) $\left(-3, \frac{5}{2}\right) \cup (5, +\infty)$

7. Sendo $x \geq 4$, o conjunto imagem da função $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$ é dado por:

- (A) $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$
- (B) $\{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 2\}$
- (C) $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 2\}$
- (D) $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 4\}$
- (E) $\{y \in \mathbb{R} / y \leq 0 \text{ ou } y \geq 2\}$

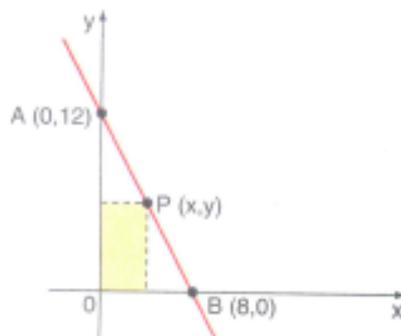
8. A equação $2mx^2 + mx + \frac{1}{2} = 0$ possui 2 raízes reais distintas então:

- (A) $m = 0$
- (B) $m > 0$
- (C) $m < 4$
- (D) $m < 0$ ou $m > 4$
- (E) $0 < m < 4$

9. O ponto de maior ordenada pertencente ao gráfico da função real $f(x) = (2x - 1)(3 - x)$ é o por (a, b) . Então, $a - b$ é:

- (A) $\frac{-39}{8}$
 (B) $\frac{-11}{8}$
 (C) $\frac{3}{8}$
 (D) $\frac{11}{8}$
 (E) $\frac{39}{8}$

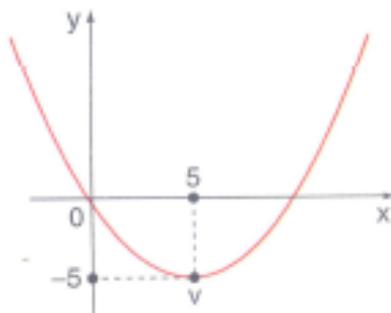
10. A figura mostra um retângulo com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta que passa pelos pontos $A(0, 12)$ e $B(8, 0)$.



As dimensões x e y do retângulo para que sua área seja máxima devem ser, respectivamente, iguais a:

- (A) 4 e 6
 (B) 5 e $\frac{9}{2}$
 (C) 5 e 7
 (D) 4 e 7
 (E) 6 e 3

11. Observe a figura.



Nessa figura, está representada a parábola de vértice V , gráfico da função de segundo grau cuja expressão é:

(A) $y = \left(\frac{x^2}{5}\right) - 2x$

(B) $y = x^2 - 10x$

(C) $y = x^2 + 10x$

(D) $y = \left(\frac{x^2}{5}\right) - 10x$

(E) $y = \left(\frac{x^2}{5}\right) + 10x$

12. Considere a sequência (2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, ...). Qual o termo da posição 149?

(A) 276

(B) 278

(C) 280

(D) 282

(E) 284

13. Seja f uma função tal que $f(1) = 2$ e $f(x+1) = f(x) - 1$. Então $f(100)$ é:

(A) -99

(B) -97

(C) 96

(D) 98

(E) 100

14. Uma bola lançada verticalmente ao solo de uma altura h . Cada vez que ela bate no solo, ela sobe a metade da altura que caiu. Calcule o comprimento total percorrido pela bola em sua trajetória até atingir o repouso.

(A) $3h$

(B) $2h$

(C) $4h$

(D) $5h$

(E) h

15. Sendo as matrizes: $M = (m_{ij})_{2,3}$, $N = (n_{ij})_{a,b}$, $P = (P_{ij})_{c,4}$ e $Q = (q_{ij})_{d,c}$, é possível determinar: $M + N$, e $P \cdot Q$, se:

(A) $b - a = c - d$

(B) $a = b = c = d = e - 1$

(C) $b = a + 1, c = d = e = 4$

(D) $ab = 6, a + 1 = b = c = d = e - 1$

(E) $b = c = d = \frac{a+c}{2}$.

16. Dada a matriz M , $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & k \\ -k & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, se $M^{-1} = M^t$, então k pode ser:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{1}{2}$

17. Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 6 & -5 \\ 12 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$

(A) -1

(B) 1

(C) 0

(D) 2

(E) -2

18. O sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + mz = 0 \end{cases}$ é indeterminado para:

(A) $m \in \mathbb{R}$

(B) $\forall m \in \mathbb{R}$

(C) $m = 1$

(D) $m = -1$

(E) $m = 0$

19. Considere o seguinte de equação nas incógnitas x e y: $\begin{cases} 3kx + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Esse sistema tem apenas uma solução se o número real k for diferente de:

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

20. Num curso de matemática, cada bimestre teve três provas. As questões valem um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Alves, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 6 na terceira, obteve no

TURMA:	NOME:
--------	-------

final, um total de 57 pontos. Tadeu acertou 3, 6 e 6 questões respectivamente na 1ª, 2ª e 3ª provas, totalizando 54 pontos. Por sua vez, João acertou 2, 7 e 3 questões, respectivamente na 1ª, 2ª e 3ª provas, atingindo a soma de 40 pontos no final. Sabendo que Xavier faz 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira, o total de pontos de Xavier foi:

- (A) 49
- (B) 50
- (C) 51
- (D) 52
- (E) 53

Final Da Prova De Matemática





GABARITO 6º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

7º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Os pontos A (1,3) e B (3,-1) pertencem ao gráfico cartesiano de uma função real do 1º grau. A imagem dessa função no ponto $x = 0$ será:

- (A) 3
- (B) -6
- (C) 5
- (D) -1
- (E) -3

2. Calculando o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d} \\ \sqrt{b} r r^2 r^3 \\ \sqrt{c} r^2 r^3 r^4 \\ \sqrt{d} r^3 r^4 r^5 \end{bmatrix}$ encontramos:

- (A) 1
- (B) 0
- (C) \sqrt{a}
- (D) r
- (E) r^2

3. A função real $f(x) = \sqrt{\frac{4x-3}{x+2}}$ tem como domínio o conjunto:

- (A) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq \frac{3}{4}\}$
- (B) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ ou } x < \frac{3}{4}\}$
- (C) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{3}{4}\}$
- (D) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ ou } x \leq \frac{3}{4}\}$
- (E) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \frac{3}{4}\}$

4. Considere as matrizes: $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ onde $a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$B = (b_{ij})_{2 \times 3}$ onde $b_{ij} = 2i + 3j$ e $C = AxB$. Então $\sum_{j=1}^3 c_{2j}$ será igual a:

- (A) 78
- (B) 144
- (C) 63
- (D) 87
- (E) 76

5. Resolvendo em \mathbb{R} a inequação $\frac{(x-2)^{16} \cdot (x-3)^{19}}{6-x} \geq 0$, obtemos:

- (A)]3,6[
- (B)]3,6]
- (C) [3,6[
- (D) [3,6]
- (E) (-2,3] \cup [6,+ ∞)

6. Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros, serão usados 400 m de tela de arame, de modo a obter-se área máxima para o curral. A área máxima, em hm^2 , será:

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

7. O crescimento de uma cultura de bactérias obedece à função $f(t) = Ce^{kt}$, onde $f(t)$ é a quantidade de bactérias para $t \geq 0$.

Verificando-se que a quantidade inicial de bactérias $f(0)$ duplica-se em 4 horas a quantidade dessas bactérias ao final de 6 horas será:

- (A) $\sqrt{2}f(0)$
- (B) $4\sqrt{2}f(0)$
- (C) $2f(0)$
- (D) $2\sqrt{2}f(0)$
- (E) $f(0)$

8. Colocando-se em ordem crescente todos os números formados com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 8, não repetidos, a posição ocupada pelo número 68231 é:

- (A) 18
- (B) 42
- (C) 60
- (D) 90
- (E) 100

9. A quantidade de número ímpares de 3 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 é:

- (A) 18
- (B) 42
- (C) 60
- (D) 90
- (E) 100

10. A quantidade de anagramas possíveis da palavra EsPCEx é:

- (A) 360
- (B) 144
- (C) 450
- (D) 720
- (E) 520

11. Um campeonato de futebol é disputado em um turno único. Todos os times jogam entre si uma única vez. Se o número de equipes for 12, o número de jogos do campeonato será:

- (A) 38
- (B) 48
- (C) 72
- (D) 66
- (E) 144

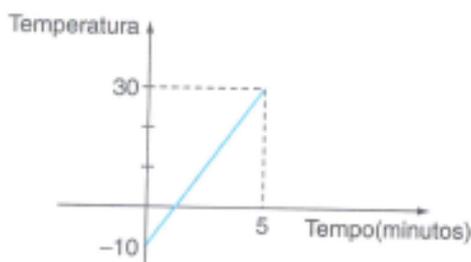
12. Sobre uma reta, marcam-se 5 pontos e sobre outra reta paralela à primeira, marcam-se 7 pontos. Unindo 3 quaisquer desses 12 pontos, podem formar a seguinte quantidade de triângulos:

- (A) 125
- (B) 145
- (C) 175
- (D) 180
- (E) 360

13. Dados os conjuntos $E = \{1,2,3,4,5\}$ e $F = \{a,b,c,d,e\}$, as aplicações bijetoras de E em F são em número de:

- (A) 1
- (B) 5
- (C) 25
- (D) 80
- (E) 120

14. Uma barra de ferro com temperatura inicial de -10°C . O gráfico a seguir representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 0°C .



- (A) 1 min
- (B) 1 min e 5 s.
- (C) 1 min e 10 s.
- (D) 1 min e 15 s.
- (E) 1 min e 20 s.

15. Com relação ao gráfico da função $f(x) = 2(x - 1)^2 - 4$ são feitas as seguintes afirmações.

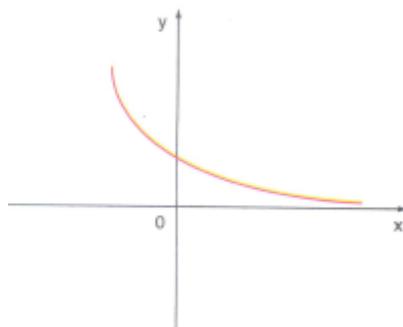
- I. É uma parábola com concavidade voltada para cima.
- II. É uma parábola cujo vértice é o ponto $(-2;4)$.

III. O ponto de interseção com o eixo y é $(0; -2)$.

Nessas condições:

- (A) Somente a afirmação I é verdadeira.
- (B) Somente a afirmação III é verdadeira.
- (C) As afirmações I, II e III são verdadeiras.
- (D) As afirmações I, e III são verdadeiras.
- (E) As afirmações II e III são verdadeiras.

16. Observe a figura a seguir. Nessa figura, está representado o gráfico $f(x) = b^x$, $b > 0$.



Se $f(1) + f(-1) = \frac{10}{3}$, a única afirmativa verdadeira sobre valor de b é:

- (A) $0 < b < \frac{1}{9}$
- (B) $\frac{2}{9} < b < \frac{4}{9}$
- (C) $\frac{8}{9} < b < 1$
- (D) $1 < b < 4$
- (E) $4 < b < 9$

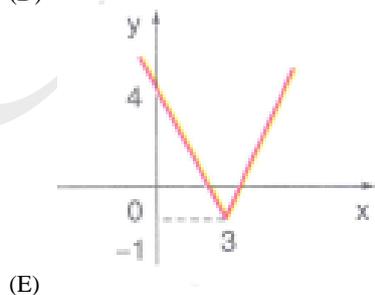
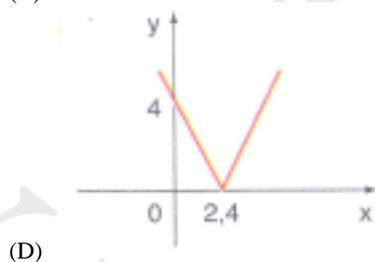
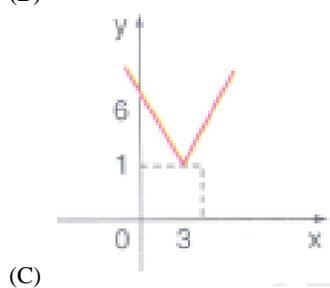
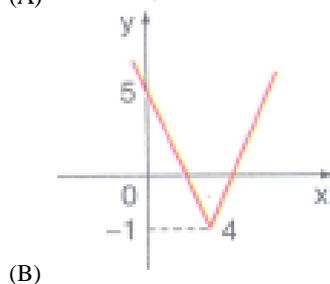
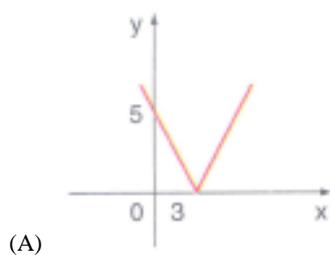
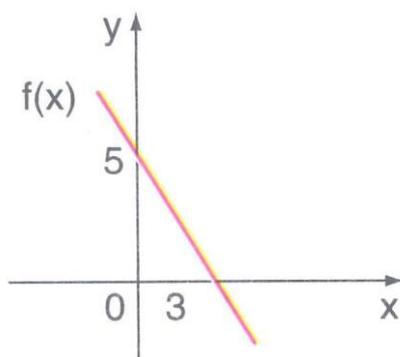
17. Resolvendo $|x^2 + x + 1| \geq 1$ obtemos:

- (A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}$
- (B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
- (C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$
- (D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$
- (E) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

18. A soma das raízes de $|x - 2| = 3x + 1$ é:

- (A) $-3/2$
- (B) -1
- (C) $1/2$
- (D) $-5/4$
- (E) $1/4$

19. No gráfico a seguir, está representada a função do 1º grau $f(x)$. O gráfico que melhor representa $g(x) = |f(x)| - 1$ é:



TURMA:

NOME:

20. Durante o ano de 2016 uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função $L(x) = 50(|x - 100| + |x - 200|)$, em que $x = 1, 2, \dots, 365$ corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais.

Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R\$ 10.000,00.

Assinale a soma dos dias:

- (A) 300
- (B) 250
- (C) 50
- (D) 200
- (E) 150

Final Da Prova De Matemática

CURSO CIDADE

SCLN 113 - Bloco C - Salas 207 / 210 - Tel.: 3340-0433 / 4102-6781 / 3201-0432 / 9975-4464 (Vivo) / 8175-4509 (Tim)

www.cursocidade.com.br / cursocidade@iic.pro.br





GABARITO 7º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

8º SIMULADO DE MATEMÁTICA

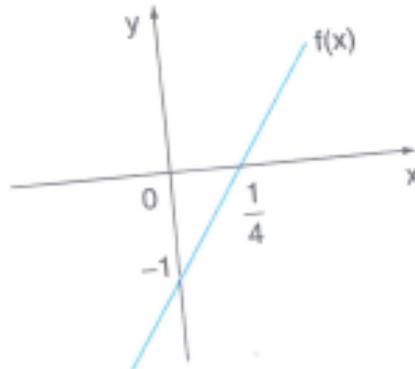
1. Sabemos que a composição de funções não é uma operação comutativa. Dadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = 2x + 1$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(x) = ax + b$; $a \neq 0$, determine a relação entre a e b tal que $f \circ g = g \circ f$; $\forall x \in \mathbb{R}$

- (A) $a - b = 1$
- (B) $a = b + 2$
- (C) $b - a = 1$
- (D) $b - a = 2$
- (E) $a = b - 1$

2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x+1) = 2f(x) - 5$ e $f(0) = 6$. O valor de $f(2)$ é:

- (A) 0
- (B) 3
- (C) 8
- (D) 9
- (E) 12

3. Com a função $f(x)$, representada no gráfico a seguir, e com função $g(x)$, obtém-se a composta $g(f(x)) = x$.



A expressão algébrica que define $g(x)$ é:

- (A) $-\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
- (B) $-\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
- (C) $\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
- (D) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
- (E) $\frac{x}{4} - 1$

4. As soluções de $\frac{(x^2 - 2x)}{x^2 + 1} < 0$ são os valores de x que satisfazem:

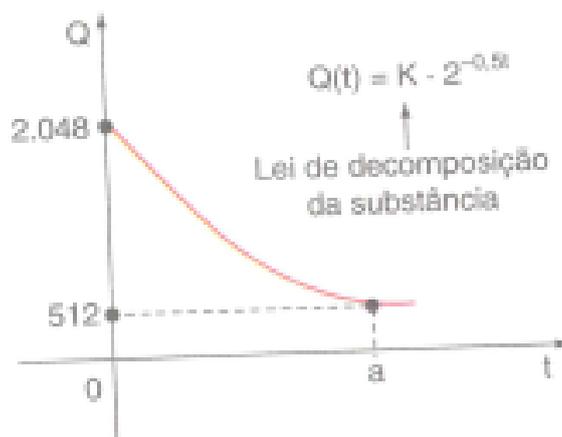
- (A) $x < 0$ ou $x > 2$
- (B) $x < 2$
- (C) $x < 0$
- (D) $0 < x < 2$
- (E) $x > 2$

5. O preço de ingresso numa peça de teatro (p) relaciona-se com a quantidade de frequentadores (x) por sessão através da relação: $p = -0,2x + 100$.

Qual o preço que deve ser cobrado para dar a máxima receita por sessão?

- (A) R\$ 40,00
- (B) R\$ 50,00
- (C) R\$ 30,00
- (D) R\$ 55,00
- (E) R\$ 60,00

6. Considerando-se o gráfico e a equação a seguir relacionados à decomposição de uma substância, onde K é uma constante, t indica tempo (em minutos) e $Q(t)$ indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t . O valor de $K + a$ é =



- (A) 2048
- (B) 2050
- (C) 2052
- (D) 2054
- (E) 2056

7. Em um período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada pela função $q(t) = q_0 \cdot 2^{-0,1t}$, sendo q_0 a quantidade de água após t meses. Em quantos meses a quantidade de água no reservatório se reduzirá à metade do que era no início?

- (A) 5
- (B) 7
- (C) 8
- (D) 9
- (E) 10

8. A lei de decomposição do radium, no tempo $t \geq 0$, é dada por $M(t) = C \cdot e^{-kt}$, onde $M(t)$ é a quantidade de radium no tempo t ; C e K são constantes positivas (“ e ” é o número neperiano, $e = 2,71828\dots$). Se a metade da quantidade primitiva $M(0)$ desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?
- (A) $2^{1/16} \cdot M(0)$
(B) $1 - 2^{-1/8} M(0)$
(C) $1 - 2^{-1/4}, M(0)$
(D) $1 - 2^{-1/16}, M(0)$
(E) $2^{-1/16}, M(0)$
9. Uma empresa vende uma mercadoria e vai receber o pagamento em duas prestações. A primeira no ato da venda e a segunda trinta dias depois. Supondo que o preço à vista da mercadoria seja C reais, que o primeiro pagamento seja $\frac{C}{3}$ reais e que a inflação nesses 30 dias seja de 25%, calcule o valor que deve ser cobrado no segundo pagamento de modo que compense exatamente a inflação do período.
- (A) $C/5$
(B) $5C/6$
(C) $6C/5$
(D) $C/4$
(E) $3C/4$
10. Uma pessoa foi passar uns dias de férias em uma cidade. Verificou que, se gastasse R\$ 80,00 por dia, poderia permanecer na cidade um dia a mais do que se gastasse R\$ 90,00. Quanto possuía a pessoa?
- (A) R\$ 600
(B) R\$ 650
(C) R\$ 680
(D) R\$ 700
(E) R\$ 720
11. A soma das raízes de equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$ é:
- (A) 0
(B) -2
(C) -4
(D) 6
(E) 2
12. Se x e y são números reais quaisquer, então é correto afirmar que:
- (A) Se $x^2 < y^2$, então $x < y$.
(B) Se $x < y$, então $x^2 < y^2$.
(C) Se $x^2 - y^2 = 0$, então $|x| = |y|$.
(D) $\sqrt{(x^2 + y^2)} = x + y$.
(E) $-x < 0$.
13. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quantas funções injetoras existem de A em B ?
- (A) 120
(B) 60
(C) 100
(D) 150

(E) 80

14. De quantas maneiras 20 pessoas podem se sentar em um ônibus de 42 lugares?

(A) 20!

(B) 42!

(C) $\frac{42!}{20!}$

(D) 41. 20!

(E) 42! . 20!

15. Supondo que “escalar um time de futebol” seja distribuir as onze camisas entre os jogadores, determine quantos times é possível escalar dispondo de 20 jogadores.

(A) 20! 11!

(B) 20!

(C) 11!

(D) $\frac{20!}{11!}$

(E) $\frac{20!}{9!}$

16. Sobre os lados de um triângulo marca-se, respectivamente, 3, 4 e 5 pontos distintos, não coincidindo com os vértices. Quantos segmentos de reta podemos obter, unindo, 2 e 2, os centros de todas as circunferências que passam por 3 quaisquer dos pontos marcados?

(A) 20.000

(B) 12.910

(C) 9.210

(D) 20.910

(E) 15.850

17. A soma de todos os valores de k, para os quais o sistema $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - kz = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$ admita uma infinidade de soluções. É igual

a:

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

(E) 2

18. Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$. Calcule $x + y - z$.

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

(E) 3

19. Retirando-se uma bola de uma urna contendo 3 balas brancas, 2 pretas e 5 vermelhas, qual é a probabilidade de que saia uma bala branca?

- (A) 0,3
- (B) 0,2
- (C) 0,4
- (D) 0,5
- (E) 0,6

20. Retirando-se simultaneamente 4 bolas do exercício anterior, qual é a probabilidade de obter-se 2 balas brancas e 2 balas vermelhas.

- (A) $\frac{2}{7}$
- (B) $\frac{3}{7}$
- (C) $\frac{2}{5}$
- (D) $\frac{3}{5}$
- (E) $\frac{1}{7}$

Final Da Prova De Matemática



MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



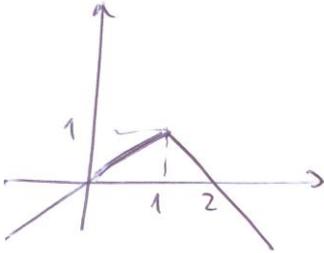
TURMA:

NOME:

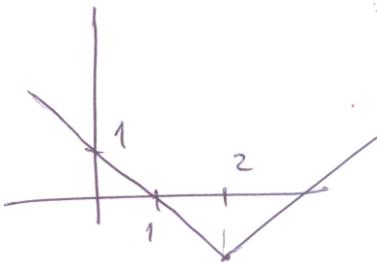
9º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. O gráfico que melhor representa a função $f(x) = -|x-1|+1$ é:

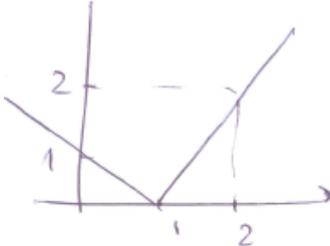
(A)



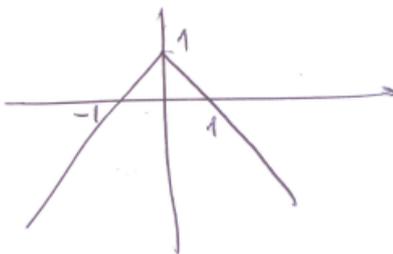
(B)



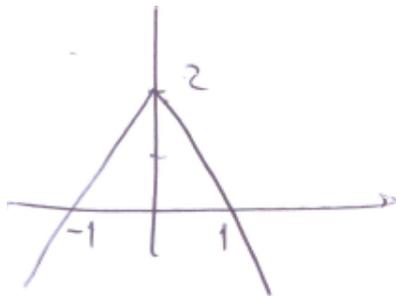
(C)



(D)



(E)



2. Na igualdade $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 15$, o valor de x real é:

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) ± 1
- (C) -3 ou 4
- (D) ± 2
- (E) 0

3. Do cardápio de uma festa constavam dez diferentes tipos de salgadinhos, dos quais só quatro seriam servidos quentes. O garçom encarregado de arrumar a travessa e servi-la foi instruído para que esta contivesse sempre só 2 diferentes tipos de salgadinhos frios e só 2 diferentes dos quentes. De quantos modos diferentes o garçom teve a liberdade de selecionar os salgadinhos para compor a travessa, respeitando as instruções:

- (A) 90
- (B) 21
- (C) 240
- (D) 38
- (E) Nenhuma

4. Numa caixa existem 5 balas de hortelã e 3 balas de mel. Retirando-se sucessivamente e sem reposição duas dessas balas, a probabilidade de que sejam de sabores diferentes é:

- (A) $\frac{1}{7}$
- (B) $\frac{15}{28}$
- (C) $\frac{15}{56}$
- (D) $\frac{25}{26}$
- (E) $\frac{25}{64}$

5. Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem, com $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$; se $(AX)^{-1} = B$, com X do tipo 2×2 , então x é igual a:

- (A) $B^{-1}A^{-1}$
- (B) BA^{-1}
- (C) $A^{-1}B^{-1}$

- (D) AB^{-1}
(E) $A^{-1}B^{-1}A$

6. O valor de x que verifica a igualdade $\sqrt[8]{128^{x-5}} = \frac{1}{4^3}$ é:

- (A) $-\frac{13}{7}$
(B) 13
(C) $\frac{13}{7}$
(D) $\frac{7}{13}$
(E) 7

7. A função $f(x) = \sqrt{\frac{4x-3}{x+2}}$ tem como domínio o conjunto:

- (A) $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{3}{4} \right\}$
(B) $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ ou } x < \frac{3}{4} \right\}$
(C) $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq \frac{3}{4} \right\}$
(D) $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ ou } x \leq \frac{3}{4} \right\}$
(E) $D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \}$

8. Com os algarismos do conjunto $\{2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$ serão formados números pares de três algarismos distintos e maiores que 400. A quantidade dos números assim formados é:

- (A) 45
(B) 60
(C) 85
(D) 90
(E) 95

9. Uma tribo indígena utiliza uma linguagem escrita que possui duas “letras”: \square e \bigcirc , e cada palavra pode ter de 1 a 5 “letras”. O número máximo de palavra desta linguagem é:

- (A) 10
(B) 20
(C) 62
(D) 32
(E) 30

10. Resolvendo $\log_{1/2} x + \log_{1/2} (x+2) > -3$, obtemos:

- (A) $] -2, 4[$
(B) $[-2, 4[$
(C) $] 0, 2]$

- (D) $]0, 2]$
(E) $[-2, 2]$

11. A lei de formação da função quadrática cuja gráfico passa pelo ponto P (1,6) e tem o vértice no ponto V (-1,2) é:

- (A) $y = x^2 - 2x - 3$
(B) $y = -x^2 - 2x - 3$
(C) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$
(D) $y = x^2 + x - 3$
(E) $y = x^2 + 2x + 3$

12. Um recipiente contém 4 balas de hortelã, 5 de morango e 3 de anis. Se duas balas forem retiradas sucessivamente e sem reposição, a probabilidade de que sejam de mesmo sabor é:

- (A) $\frac{18}{65}$
(B) $\frac{19}{66}$
(C) $\frac{20}{67}$
(D) $\frac{21}{68}$
(E) $\frac{22}{69}$

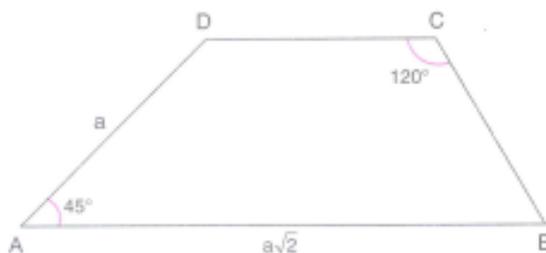
13. Entre os elementos a e b da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ existe uma relação que torna verdadeira a equação $A^3 + A = 0$. Essa relação é:

- (A) $a = b$
(B) $a = -b$
(C) $a = -2b$
(D) $a = 2b$
(E) $a = -\frac{1}{b}$

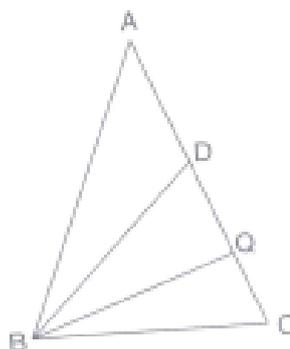
14. Se os números x , \sqrt{x} e $\log_2 10x$ são, nessa ordem os três primeiros termos de uma progressão geométrica, os 1º e 5º termos serão, respectivamente:

- (A) $\frac{1}{2}$ e 2
(B) $\frac{1}{3}$ e 3
(C) $\frac{1}{4}$ e 4
(D) $\frac{1}{5}$ e 5
(E) $\frac{1}{6}$ e 6

15. No trapézio ABCD de bases \overline{AB} e \overline{CD} , são dados: $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, $\hat{A} = 45^\circ$ e $\hat{C} = 120^\circ$. Calcule a diagonal BD e os lados BC e CD.



- (A) $\frac{a}{6}$
 (B) $a(\sqrt{2} + \sqrt{6})$
 (C) $\frac{a}{3}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{6})$
 (D) $\frac{a}{4}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$
 (E) $\frac{a}{6}(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$
16. Observe a figura.



Tendo: $AB = AC = 6$, $BC = DB = 4$ e $\hat{CBQ} = \hat{QBD}$. A tangente do ângulo \hat{CBQ} é:

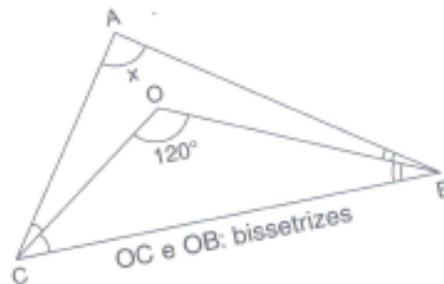
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (C) $\frac{(1 + \sqrt{2})}{2}$
 (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 (E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

17. Sabendo se que $\log_x 5 + \log_y 4 = 1$ e $\log_x y = 2$, o valor de $x + y$ é:

- (A) 120

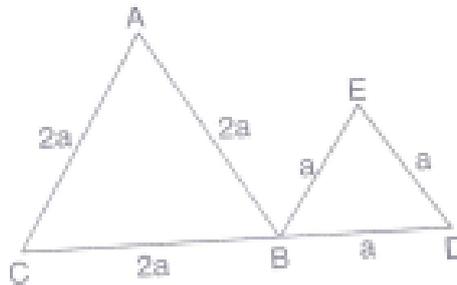
- (B) 119
- (C) 100
- (D) 110
- (E) 115

18. Calcule x.



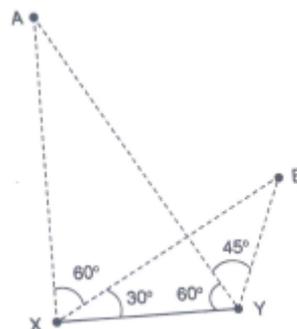
- (A) 60
- (B) 30
- (C) 45
- (D) 15
- (E) 80

19. Na figura abaixo, os triângulos ABC e BED são equiláteros de lados $2a$ e a , respectivamente. Calcule a medida do segmento \overline{AE} .



- (A) $a\sqrt{2}$
- (B) $a\sqrt{3}$
- (C) $a\sqrt{5}$
- (D) $a\sqrt{6}$
- (E) a

20. Na figura a seguir, os ângulos assinalados têm as medidas indicadas. Se $XY = 5$ m, então a medida de AB, em metros, é igual a:



TURMA:

NOME:

(A) $\frac{(5\sqrt{5})}{2}$

(B) $\frac{(5\sqrt{10})}{2}$

(C) $\frac{(5\sqrt{10})}{4}$

(D) $5\sqrt{5}$

(E) 5

Final Da Prova De Matemática





MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

10º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Sejam x , y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo:

$$\log_k(xy) = 49$$

$$\log_k(x/z) = 44$$

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a:

- (A) 52
- (B) 61
- (C) 67
- (D) 80
- (E) 97

2. Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

- I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$
- II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$
- III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$

Então, destas é (são) verdadeira(s):

- (A) apenas I.
- (B) apenas I e II.
- (C) apenas II e III.
- (D) apenas I e III.
- (E) todas.

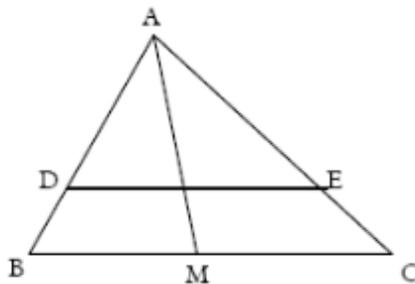
3. Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

- (A) $x \in]0, 2[$.
- (B) x é racional
- (C) $\sqrt{2x}$ é irracional
- (D) x^2 é irracional.
- (E) $x \in]2, 3[$.

4. Sejam $(1, a_2, a_3, a_4)$ e $(1, b_2, b_3, b_4)$ uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, respectivamente, ambas com a mesma soma dos termos e ambas crescentes. Se a razão r da progressão aritmética é o dobro da razão q da progressão geométrica, então, o produto $r \cdot q$ é igual a:

- (A) 15
- (B) 18
- (C) 21
- (D) 24
- (E) 32

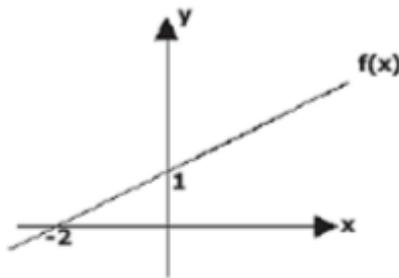
5. Na figura, DE é paralela à BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC.



Sabendo que $AD = 6$, $AE = x$, $DB = 2$, $EC = 5$, $BM = 6$ e $MC = y$. Então $x + y$ é igual a:

- (A) 15
 (B) 20
 (C) 25
 (D) 30
 (E) 35
6. Um primeiro capital rendeu o mesmo juro de um segundo capital, que foi empregado a uma taxa igual ao triplo da taxa do primeiro capital e, durante um tempo que foi metade do que esteve empregado o primeiro. Sabendo que a soma dos capitais é R\$ 516,00, então o valor do menor dos capitais é, em R\$:
- (A) 206,00
 (B) 206,10
 (C) 206,40
 (D) 207,00
 (E) 208,40
7. As matrizes A, B e C são do tipo $m \times 3$, $n \times p$ e $4 \times r$, respectivamente. Se a matriz transposta de (ABC) é do tipo 5×4 , então:
- (A) $m = p$
 (B) $mp = nr$
 (C) $n + p = m + r$
 (D) $r = n$
 (E) Nenhuma das alternativas.
8. Se uma função do 1º grau é tal que $f(100) = 780$ e $f(-500) = 480$, então:
- (A) $f(-100) = 280$
 (B) $f(0) = 380$
 (C) $f(120) = 790$
 (D) $f(150) = 850$
 (E) $f(200) = 1560$

9. Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função real do 1º grau $f(x)$.



A expressão algébrica que defina a função inversa de $f(x)$ é:

- (A) $y = \frac{x}{2} + 1$
- (B) $y = x + \frac{1}{2}$
- (C) $y = 2x - 2$
- (D) $y = -2x + 2$
- (E) $y = 2x + 2$

10. Considere o número complexo $z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ e calcule z^n . No conjunto formado pelos quatro menores valores naturais de n para os quais z^n é um número real:

- (A) existem números que estão em progressão aritmética de razão igual a 4.
- (B) há elementos cuja soma é igual a 20.
- (C) existe um único número ímpar.
- (D) existe apenas um elemento que é número primo.
- (E) Nenhuma das alternativas.

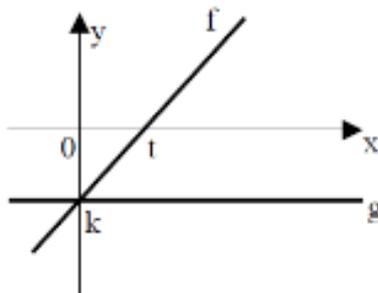
11. Dado o número complexo z tal que $z + 2\bar{z} - 9 = 3i$, é correto afirmar que:

- (A) $|z| = 3\sqrt{10}$
- (B) $z = 3\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right)$
- (C) $\bar{z} = 9 - 3i$
- (D) $z^{-1} = \frac{(1+i)}{3}$
- (E) $z = 0$

12. Os valores reais de x , para os quais a parte real do número complexo $z = \frac{(x-2i)}{(x+i)}$ é negativa, pertencem ao conjunto (intervalo):

- (A) $\{ \}$
- (B) $\{ 0 \}$
- (C) $(-1, 1)$
- (D) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- (E) $\{ 3 \}$

13. Analise o gráfico abaixo das funções f e g e marque a opção correta.



- (A) o gráfico da função $h(x) = g(x) - f(x)$ é uma reta crescente.
 (B) o conjunto imagem da função $s(x) = f(g(x))$ é \mathbb{R}
 (C) $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ para qualquer $x > t$.
 (D) $g(f(x)) = g(x)$ para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$
14. Considere as funções reais $f(x) = 3x$, de domínio $[4; 8]$ e $g(y) = 4y$, de domínio $[6; 9]$. Os valores máximo e mínimo que o quociente $\frac{f(x)}{g(y)}$ pode assumir são, respectivamente:
- (A) $2/3$ e $1/2$
 (B) $1/3$ e 1
 (C) $4/3$ e $3/4$
 (D) $3/4$ e $1/3$
 (E) 1 e $1/3$
15. Usando-se 5 algarismos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, sem repeti-los, a quantidade de números pares que se pode formar é:
- (A) 1080
 (B) 2160
 (C) 2520
 (D) 5040
 (E) 2000
16. Uma prova consta de 3 partes, cada uma com 5 questões. Cada questão, independentemente da parte a que pertença, vale 1 ponto, sendo o critério de correção “certo ou errado”. O número de maneiras diferentes de se alcançar 10 pontos nessa prova, se devem ser resolvidas pelo menos 3 questões de cada parte e 10 questões no total, é igual a:
- (A) 150
 (B) 1500
 (C) 75
 (D) 1600
 (E) 800
17. Numa demonstração de paraquedismo, durante a queda livre, participam 10 paraquedistas. Em um certo momento, 7 deles devem dar as mãos e formar um círculo. De quantas formas distintas eles poderão ser escolhidos e dispostos nesse círculo?
- (A) 120
 (B) 720
 (C) 86400
 (D) 151200
 (E) 840

TURMA:

NOME:

18. Todo número real positivo pode ser descrito na forma 10^x . Tendo em vista que $2 = 10^{0,30}$, então o expoente x , tal que $5 = 10^x$ vale, aproximadamente:

- (A) 0,15
- (B) 0,33
- (C) 0,50
- (D) 0,70
- (E) 0,85

19. Seja $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de n elementos distintos, tomando p a p . A equação $A_{n,3} = 6n$ tem como solução:

- (A) uma raiz nula
- (B) uma raiz positiva
- (C) duas raízes positivas
- (D) uma raiz positiva e outra negativa
- (E) nenhuma das alternativas acima

20. A soma das raízes da equação $3^{2-x} + 3^{1+x} = 28$ é:

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Final Da Prova De Matemática





GABARITO 10º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

11º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Um triângulo ABC, retângulo em A, possui área S. Se $x = \angle ABC$ e r é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, então:

- (A) $S = r^2 \cos(2x)$
- (B) $S = r^2 \sen(2x)$
- (C) $S = \frac{1}{2} r^2 \sen(2x)$
- (D) $S = \frac{1}{2} r^2 \cos x$
- (E) $S = \frac{1}{2} r^2 \sen x$

2. A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base 64m^2 vale:

- (A) 128 m^2
- (B) $64\sqrt{2}\text{m}^2$
- (C) 135 m^2
- (D) $60\sqrt{5}\text{m}^2$
- (E) $32(\sqrt{2} + 1)\text{ m}^2$

3. Considere as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de lado L. A área da coroa circular formada por estas circunferências é dada por:

- (A) $\frac{\pi}{4} L^2$
- (B) $\frac{\sqrt{6}}{2} \pi L^2$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi L^2$
- (D) $\sqrt{3} \pi L^2$
- (E) $\frac{\pi}{2} L^2$

4. A diferença entre o penúltimo termo e o primeiro termo de uma progressão aritmética é 24. A soma de todos os termos é 102. A diferença entre quaisquer dois termos adjacentes é o triplo do primeiro termo. Calcule a razão dessa progressão.

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

5. Um poliedro platônico, cujas faces são triangulares, tem 30 arestas. Determine o número de arestas que concorrem em cada vértice.

- (A) 3
- (B) 5
- (C) 4

- (D) 6
(E) 2

6. O produto da maior diagonal pela menor diagonal de um prisma hexagonal regular de área lateral igual a 144 cm^2 e volume igual a $144\sqrt{3} \text{ cm}^3$ é:

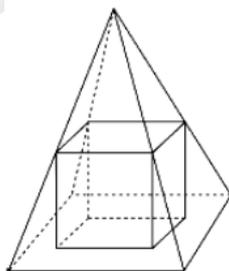
- (A) $10\sqrt{7}$
(B) $20\sqrt{7}$
(C) $10\sqrt{21}$
(D) $20\sqrt{21}$
(E) $2\sqrt{3}$

7. Qual deve ser a medida da altura de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado a , para que seu volume tenha valor a^3 ?

- (A) $\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$
(B) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{4}$
(C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
(D) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$
(E) $\frac{a\sqrt{3}}{8}$

8. (AFA) Um cubo tem quatro vértices nos pontos médios das arestas laterais de uma pirâmide quadrangular regular, e os outros quatro na base da pirâmide, como mostra a figura abaixo.

Qual a razão entre os volumes do cubo e da pirâmide?



- (A) $\frac{3}{4}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{8}$
(D) $\frac{3}{8}$
(E) $\frac{1}{3}$

9. Seja P uma pirâmide cujo vértice é o centro de uma das faces de um cubo de aresta a e cuja base é a face oposta. Então, a área lateral dessa pirâmide é igual a:

- (A) $a^2\sqrt{5}$
(B) $2a^2\sqrt{3}$
(C) $a^2\sqrt{3}$

(D) $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$

(E) $a^2\sqrt{2}$

10. Um reservatório de forma cilíndrica (cilindro circular reto) de altura 30 cm e raio da base 10 cm está cheio de água. São feitos, simultaneamente, dois furos no reservatório: um no fundo e outro a 10 cm de altura do fundo. Cada um desses furos permite uma vazão de 1 litro por minuto. A quantidade de água restante no reservatório após $\frac{4\pi}{3}$ minutos é, em litros:

(A) π

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

(E) 2π

11. Num cone reto, a medida do raio da base, da altura, e da geratriz estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão igual a 1. Sabendo-se que a soma destas medidas é 12 dm e que a área total da superfície deste cone é igual à área da superfície de uma esfera, a medida do raio da esfera, em dm, é:

(A) $\sqrt{6}$

(B) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

(C) $\sqrt{5}$

(D) 2

(E) 1

12. Qual o volume, em cm^3 , da esfera inscrita em um cone reto, cuja altura e diâmetro da base são, respectivamente, 16 cm e 24 cm?

(A) 27π

(B) $\frac{500}{3}\pi$

(C) 288π

(D) 686π

(E) 25π

13. Seja x um número real ou complexo para o qual $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. O valor de $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ é:

(A) 1

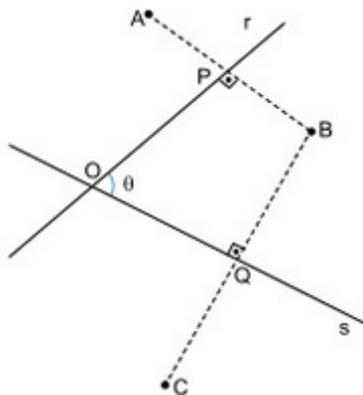
(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

14. Observe a figura:



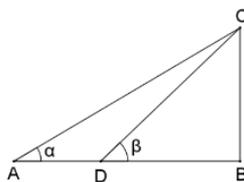
Nessa figura, os segmentos AB e BC são perpendiculares, respectivamente, às retas r e s. Além disso, $\overline{AP} = \overline{PB}$, $\overline{BQ} = \overline{QC}$ e a medida do ângulo $\angle POQ$ é θ . Considerando-se essas informações, é correto afirmar que a medida do ângulo interno $\angle AOC$ do quadrilátero AOCB é:

- (A) 2θ
- (B) $\frac{5}{2}\theta$
- (C) 3θ
- (D) $\frac{3}{2}\theta$
- (E) 5θ

15. Seja $q = [\cos(5^\circ)]. [\cos(20^\circ)]. [\cos(40^\circ)]. [\cos(85^\circ)]$ a razão de uma progressão geométrica infinita com termo inicial $a_0 = 1/4$. Sendo assim, é correto afirmar que a soma dos termos dessa progressão vale:

- (A) $1/15$
- (B) $2/15$
- (C) $3/15$
- (D) $4/15$
- (E) $7/15$

16. Na figura a seguir, $AD = 2$ e $CB = 5$. Se $\text{tg}(\alpha) = \frac{4}{5}$, então $\text{cotg}(\beta)$ é:



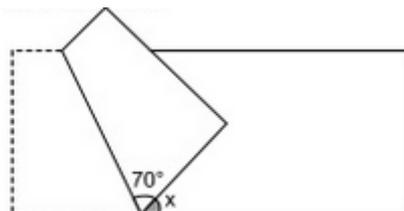
- (A) $15/17$
- (B) $13/17$
- (C) $17/20$
- (D) $19/20$
- (E) $12/17$

17. De 2h 45min a 4h 35min, o ponteiro das horas de um relógio percorre, em radianos,

- (A) $\frac{11\pi}{36}$

- (B) $\frac{\pi}{3}$
 (C) $\frac{5\pi}{18}$
 (D) $\frac{7\pi}{24}$
 (E) $\frac{\pi}{2}$

18. Uma folha de papel retangular foi dobrada conforme a figura. Assinale a alternativa que representa corretamente o valor de x .



- (A) 15° .
 (B) 20° .
 (C) 30° .
 (D) 40° .
 (E) 45° .

19. Dadas as afirmativas a seguir:

- I. $x^5 - 1 \equiv (x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$
 II. $x^5 - 1 \equiv (x - 1) \left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1 \right) \left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1 \right)$
 III. $x^5 - 1 \equiv (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
 IV. $x^5 - 1 \equiv (x^3 + 1)(x^2 - 1)$
 V. $x^5 - 1 \equiv (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1)(x - 1)$

Quantas são verdadeiras?

- (A) 1
 (B) 2
 (C) 3
 (D) 4
 (E) 5

20. Simplificando a expressão $\overline{(X \cap Y)} \cup (\bar{X} \cap Y)$, teremos:

- (A) universo
 (B) vazio
 (C) $X \cap Y$
 (D) $\bar{X} \cap Y$
 (E) $X \cap \bar{Y}$

Final Da Prova De Matemática



GABARITO 11º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

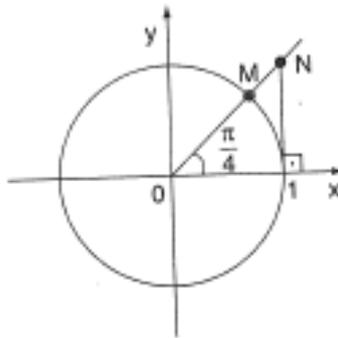
NOME:

12º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. Em um círculo, um ângulo central de 60° intercepta um arco de 2π cm de comprimento. Calcular o raio desse círculo.

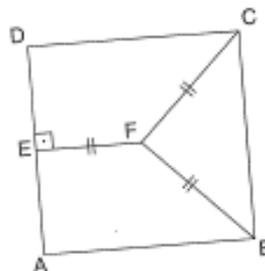
- (A) 8 cm.
- (B) 6 cm.
- (C) 4 cm.
- (D) 2 cm.
- (E) 10 cm.

2. Na figura seguinte, calcule o valor do segmento \overline{MN} .



- (A) $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$
- (B) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (C) $-\sqrt{2} + 1$
- (D) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (E) $\sqrt{2} - 1$

3. Observe a figura.



Nessa figura, ABCD é um quadrado de lado 1, $EF = FC = FB$ e $DE = \frac{1}{2}$. A área do triângulo BCF é:

- (A) $\frac{3}{16}$
(B) $\frac{1}{5}$
(C) $\frac{1}{6}$
(D) $\frac{(\sqrt{3})}{4}$
(E) $\frac{1}{4}$

4. Calculando o valor da expressão:

$E = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$, encontramos:

- (A) 1
(B) $\sin^2 x$
(C) $\cos^2 x$
(D) $\sin x \cdot \cos x$
(E) Zero.

5. Os pontos A (-1; 2), B (3;1) e C (a;b) são colineares. Para que C esteja sobre o eixo das abscissas, a e b devem ser, respectivamente, igual a:

- (A) 0 e 4
(B) 0 e 7
(C) 4 e 0
(D) 7 e 0
(E) 0 e 0

6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x}$. Determine o maior valor que a função pode assumir.

- (A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

7. Sendo $\log_a n = 2$, $\log_b n = 3$ e $\log_c n = \frac{1}{4}$, calcule $\log_{(a.b.c)} n$.

- (A) $\frac{2}{3}$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\frac{6}{29}$
(D) 6
(E) 1

8. Calculando o valor da expressão: $y = \operatorname{sen} 41^\circ \cdot \operatorname{sen} 42^\circ \cdot \operatorname{sen} 43^\circ \cdot \operatorname{sen} 44^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 46^\circ \cdot \operatorname{sen} 47^\circ \cdot \operatorname{sen} 48^\circ \cdot \operatorname{sen} 49^\circ$, encontra-se:

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (B) $2\sqrt{2}$
 (C) $\sqrt{2}$
 (D) 0
 (E) 1

9. O sistema linear $\begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$ é:

- (A) Impossível
 (B) Indeterminado
 (C) Possível e determinado
 (D) Possível com 2 soluções
 (E) Possível com 4 soluções

10. No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^9$ encontramos um termo independente de x .

Esse termo é:

- (A) 84
 (B) 168
 (C) 336
 (D) 672
 (E) 724

11. Sendo

$\cos a$	$\operatorname{sen} a$	$\cos c$	
$-\operatorname{sen} a$	$\cos a$	$\operatorname{sen} ac$	$= 0$, calcule $a - b + c$.
$\operatorname{Sen} b$	$-\cos a$	1	

- (A) $0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 (B) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 (C) $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 (D) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 (E) $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

12. Um paralelepípedo retângulo de base quadrada, inscrito em um cilindro equilátero, possui área total $A_t = 16(1 + 2\sqrt{2})$. A área total e o volume do cilindro equilátero circunscrito ao paralelepípedo em questão são, respectivamente:

- (A) $A_t = 24\pi, V = 16\pi$
- (B) $A_t = 18\pi, V = 16\pi$
- (C) $A_t = 32\pi, V = 18\pi$
- (D) $A_t = 16\pi, V = 20\pi$
- (E) $A_t = 20\pi, V = 18\pi$

13. Se os números x , \sqrt{x} e $\log_2 10x$ são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica, os 1º e 5º termos serão, respectivamente:

- (A) $\frac{1}{2}$ e 2
- (B) $\frac{1}{3}$ e 3
- (C) $\frac{1}{4}$ e 4
- (D) $\frac{1}{5}$ e 5
- (E) $\frac{1}{6}$ e 6

14. Um cilindro circular reto tem altura 20 cm e raio da base 10 cm. Faz-se um furo circular longitudinal que o atravessa de uma base a outra e cujo centro do furo para que o volume retirado seja igual à metade do volume do cilindro inicial.

- (A) $6\sqrt{2}$ cm
- (B) $5\sqrt{2}$ cm
- (C) $4\sqrt{2}$ cm
- (D) $3\sqrt{2}$ cm
- (E) $2\sqrt{2}$ cm

15. Para escrever seus contatos um escritor procede da seguinte maneira: escreve no primeiro dia de trabalho 20 linhas, e nos dias seguintes, o número de linhas escrito no dia anterior, acrescido de 5. Seu último conto tem 17 páginas, e cada página 25 linhas. Calcule em quantos dias foi escrito este seu último livro.

- (A) 9 dias
- (B) 10 dias
- (C) 17 dias
- (D) 21 dias
- (E) 24 dias

16. Num ônibus de turismo viajam 32 pessoas. Sabe-se que:

- 8 delas são menores de idade;
- 2 são mulheres e adultas;
- 5 dos menores são do sexo masculino.

Escolheu-se aleatoriamente um passageiro. Calcule a probabilidade de que seja mulher ou menor.

- (A) $\frac{10}{32}$
- (B) $\frac{15}{32}$
- (C) $\frac{13}{32}$
- (D) $\frac{27}{32}$
- (E) $\frac{11}{32}$

17. As retas r e s são concorrentes, e determinam o plano α . Traçam-se em α quatro paralelas a r e nove paralelas a s . Nestas condições calcule o número de paralelogramos construídos.

- (A) 36
- (B) 45
- (C) 360
- (D) 450
- (E) 500

18. Sejam A , B e C matrizes reais 3×3 que satisfazem às seguintes condições: $A B = C^{-1}$; $B = \frac{1}{2} A$. Se o determinante de C é $\frac{1}{32}$, então o valor do módulo do determinante de A é:

- (A) $\frac{1}{8}$
- (B) $\frac{1}{4}$
- (C) 8
- (D) 12
- (E) 16

19. O valor de m para que o sistema $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ 2x + my + 2z = 0 \\ mx + 2y + mz = 0 \end{cases}$ admita soluções não nula é:

- (A) $m = 1$ ou $m = -2$ ou $m = 2$
- (B) $m = +\frac{1}{2}$ ou $m = -2$ ou $m = 2$
- (C) $m = -1$ ou $m = -2$ ou $m \neq 2$
- (D) $m \neq -\frac{1}{2}$ ou $m \neq -2$ ou $m \neq 2$
- (E) $m \neq 1$ ou $m \neq \pm 2$

20. Quanto à função $f(x) = \text{sen}^2 x$, pode-se afirmar que:

- (A) Tem período 2π
- (B) Não é periódica.
- (C) Tem período π

TURMA:

NOME:

(D) O valor máximo de f é $\frac{1}{2}$

(E) O valor mínimo é - 1

Curso Cidade

Final Da Prova De Matemática





GABARITO 12º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =

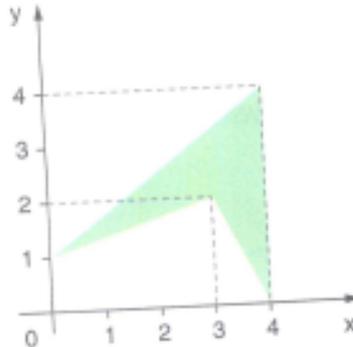


TURMA:

NOME:

13º SIMULADO DE MATEMÁTICA

1. A área da figura colorida no diagrama a seguir vale:



- (A) 4,0
- (B) 3,5
- (C) 3,0
- (D) 5,0
- (E) 4,5

2. Achar os valores de x que verifiquem, simultaneamente, as igualdades: $\cos a = \frac{6x+2}{5}$ e $\operatorname{sen} a = \frac{3x+2}{5}$

- (A) 3 e $\frac{1}{3}$
- (B) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{17}{15}$
- (C) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{17}{15}$
- (D) -3 e $\frac{1}{3}$
- (E) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$

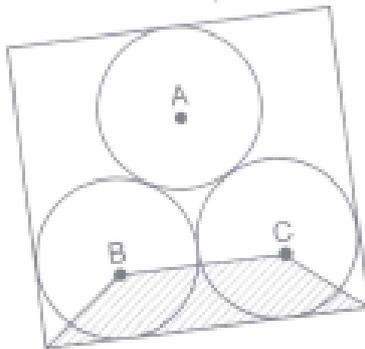
3. É uma hora da tarde; o ponteiro dos minutos coincidirá com o ponteiro das horas, pela primeira vez, aproximadamente, às:

- (A) 13h5min23s
- (B) 13h5min25s
- (C) 13h5min27s
- (D) 13h5min29s
- (E) 13h5min31s

4. Para qualquer valor real de x , $(\text{sen}x + \text{cos}x)^2 + (\text{sen}x - \text{cos}x)^2$ é igual a:

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 2
- (E) $2\text{sen}2x$

5. Na figura a seguir, A, B e C são centros de circunferências iguais.



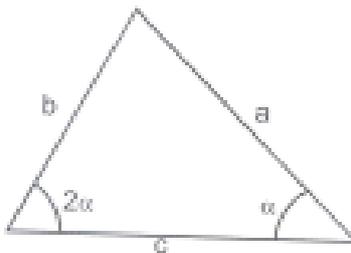
Se a área do trapézio assinalado é 3, então a área do retângulo vale:

- (A) $4 + 4\sqrt{3}$
- (B) $8 + 4\sqrt{3}$
- (C) $8 + 8\sqrt{3}$
- (D) $4 + 8\sqrt{3}$
- (E) $8 + 5\sqrt{3}$

6. Seja um triângulo equilátero cujos lados medem 4. Unindo os pontos médios desses lados, obtém-se novo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados do novo triângulo, obtém-se outro triângulo, e assim sucessivamente. A soma das áreas desses triângulos, obtém-se outro triângulo, e assim sucessivamente. A soma das áreas desses triângulos é:

- (A) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$
- (B) $\frac{81\sqrt{3}}{2}$
- (C) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$
- (D) $\frac{23\sqrt{3}}{2}$
- (E) $\frac{13\sqrt{3}}{2}$

7. Na figura abaixo, $b = 2$ e $c = 3$. Calcule o valor de a .



- (A) 1
 (B) $\sqrt{2}$
 (C) 3
 (D) 5
 (E) $\sqrt{10}$

8. Simplificando a expressão:

$$y = \frac{\operatorname{sen}(\pi - x) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi + x)}{\cos(\pi - x) \cdot \cos(2\pi - x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

Obtemos:

- (A) $-\frac{1}{2} \sec^2 x$
 (B) $\frac{1}{2} \sec^2 x$
 (C) $-\frac{1}{2} \cos^2 x$
 (D) $\frac{1}{2} \cos^2 x$
 (E) $-\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

9. O valor de x que verifica a igualdade $\sqrt[8]{128^{x-5}} = \frac{1}{4^3}$ é:

- (A) $-\frac{13}{7}$
 (B) 13
 (C) $\frac{13}{7}$
 (D) $\frac{7}{13}$
 (E) $-2/7$

10. Sorteando um número natural de 1 a 20, a probabilidade de se obter um múltiplo de 2 ou um múltiplo de 3 é:

- (A) 70%

- (B) 65%
- (C) 60%
- (D) 55%
- (E) 45%

11. A sequência $(C_{n-2}; A_{n-2}; 12.P_2)$ é uma progressão geométrica. A razão dessa progressão é:

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 8
- (E) 10

12. O conjunto – solução do sistema $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+5y+8z=3 \\ 5x+12y+19z=7 \end{cases}$ é:

- (A) $S = \{(1+a, 1-2a, a); a \in \mathbb{R}\}$
- (B) $S = \{(-1+a, 1-2a, a); a \in \mathbb{R}\}$
- (C) $S = \{(-1+a, 1+2a, a); a \in \mathbb{R}\}$
- (D) $S = \{(-1+2a, -1-2a, a); a \in \mathbb{R}\}$
- (E) $S = \{(2a, -1-2a, a); a \in \mathbb{R}\}$

13. Numa P. A. de 5 elementos, a soma dos seus termos é 10 e o produto do menor pelo maior termo é -32. O menor termo desta P. A é:

- (A) -4
- (B) -8
- (C) -12
- (D) -16
- (E) -18

14. Considere uma função $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, tal que:

- 1) $f(n+2) = f(n) + 14$;
- 2) $f(1) = 5$;
- 3) As imagens de $n \in \mathbb{N}$ estão em progressão aritmética.

Nestas condições, podemos afirmar que $f(101)$ vale:

- (A) 505
- (B) 605
- (C) 705
- (D) 805
- (E) 900

15. Se $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = a$, então $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ é igual a:

- (A) a

- (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (C) $-a$
 (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (E) $\sqrt{2}a$

16. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix}$ inversa de A, então $x + y$ vale:

- (A) $-\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{1}{3}$
 (C) $\frac{1}{2}$
 (D) $\frac{1}{3}$
 (E) 0

17. Os valores de K para os quais o sistema $\begin{cases} x - z = 1 \\ Kx + y + 3z = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$, tenha solução única são:

- (A) $k = 1$ ou $k = -4$
 (B) $k \neq 1$ ou $k \neq -4$
 (C) $k = 1$ ou $k = -4$
 (D) $k = -1$ ou $k = 4$
 (E) $k \neq -1$ ou $k \neq 4$

18. O valor numérico da expressão $y = \sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$ é igual a:

- (A) $\frac{1}{2}$
 (B) $1/5$
 (C) $\frac{1}{6}$
 (D) $\frac{1}{8}$
 (E) $1/4$

19. Se f é uma função real, tal que;

- I. $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$;
 II. $f(1) = 2$;
 III. $f(\sqrt{2}) = 4$, então pode-se afirmar que $f(3+\sqrt{2})$ vale:

TURMA:

NOME:

- (A) $3\sqrt{2}$
- (B) 8
- (C) 16
- (D) 32
- (E) 12

20. Simplificando a expressão $y = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}$ obteremos:

- (A) $y = \operatorname{sen} x$
- (B) $y = \cos x$
- (C) $y = \sec x$
- (D) $y = \operatorname{tg} x$
- (E) $y = \operatorname{cotg} x$

Final Da Prova De Matemática





GABARITO 13º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =



TURMA:

NOME:

14º SIMULADO DE MATEMÁTICA

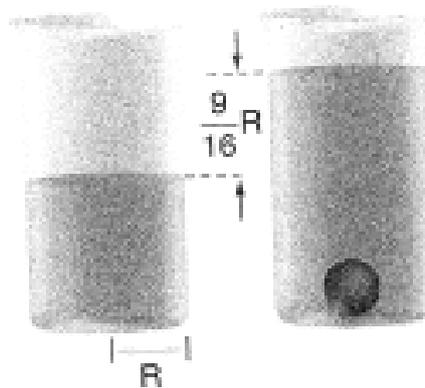
1. Qual o termo independente de x na expansão de $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$?

- (A) 104
- (B) 80
- (C) 72
- (D) 64
- (E) 56

2. Em uma fábrica, a máquina x produz 35% do total da produção de X ; a máquina Y , 40% e a máquina Z os restantes 25%. Da produção de X , 2% apresentam defeito; da produção de Y , 1,5% apresenta defeito, e da produção de Z 0,8% apresenta defeito. Em um dia que a produção total das 3 máquinas foi de 20.000 peças, uma delas foi tirada ao acaso e verificou-se que era defeituosa. Qual a probabilidade de que essa peça tenha sido produzida na máquina X ?

- (A) $7/15$
- (B) $3/8$
- (C) $1/15$
- (D) $7/8$
- (E) $5/8$

3. Um tanque cilíndrico com água tem raio R . Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe $\frac{9}{16}R$ (veja a figura). O raio da esfera é:



- (A) $\frac{3R}{4}$
- (B) $\frac{9R}{16}$
- (C) $\frac{3R}{5}$

- (D) $\frac{R}{2}$
(E) $\frac{2R}{3}$

4. Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 faces pentagonais. O número de vértices do poliedro é:

- (A) 80
(B) 60
(C) 50
(D) 48
(E) 36

5. Seja A e B números reais que satisfazem à igualdade da expressão a seguir para todo valor de x que não anula nenhum dos denominadores. $\frac{1}{(x+2)(2x+1)} = \frac{A}{X+2} + \frac{B}{2X+1}$

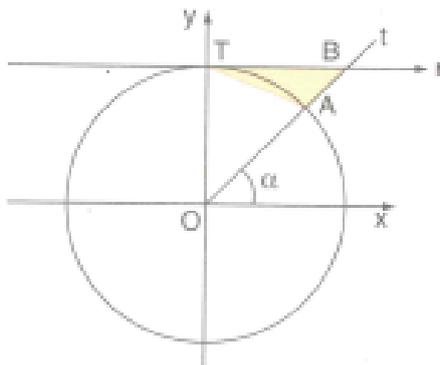
A soma A + B é:

- (A) -1
(B) $-\frac{1}{3}$
(C) 0
(D) $\frac{1}{3}$
(E) $\frac{3}{2}$

6. Sabe-se que a equação $4x^3 - 12x^2 - x + k = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$, admite duas raízes opostas. O produto das raízes dessa equação é:

- (A) -12
(B) $-\frac{1}{4}$
(C) $-\frac{3}{4}$
(D) $\frac{3}{4}$
(E) 12

7. Na figura, a reta r passa pelo ponto $T = (0,1)$ e é paralela ao eixo Ox . A semirreta Ot forma um ângulo α com o semieixo Ox ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) e intercepta a circunferência trigonométrica e a reta r nos pontos A e B respectivamente.



A área do $\triangle ATB$, como função de α , é dada por:

- (A) $\frac{1 - \operatorname{sen} a}{2} \cdot \cos a$
 (B) $\frac{1 - \cos a}{2} \cdot \operatorname{sen} a$
 (C) $\frac{1 - \operatorname{sen} a}{2} \cdot \operatorname{sen} a$
 (D) $\frac{1 - \operatorname{sen} a}{2} \cdot \cot g a$
 (E) $\frac{1 - \operatorname{sen} a}{2} \cdot \operatorname{sen} a$

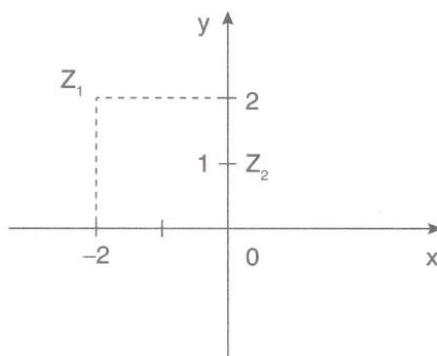
8. A igualdade $\operatorname{sen} \pi x = 0$ é verdadeira se, e somente se, x for:

- (A) Real.
 (B) Inteiro.
 (C) Complexo.
 (D) Racional.
 (E) Irracional.

9. O número de anagramas de palavra VESTIBULANDO que não apresentam as cinco vogais juntas é:

- (A) $12!$
 (B) $(8!) (5!)$
 (C) $12! - (8!) (5!)$
 (D) $12! - 8!$
 (E) $12! - (7!) (5!)$

10. Se z_1 e z_2 são números complexos representados pelos seus afixos no plano de argand-Gauss abaixo, então $z_3 = z_1 z_2$ escrito na forma trigonométrica é:

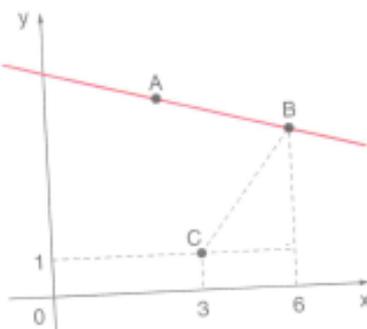


- (A) $\sqrt{2}(cis225^\circ)$
- (B) $\sqrt{2}(cis315^\circ)$
- (C) $2\sqrt{2}(cis45^\circ)$
- (D) $2\sqrt{2}(cis135^\circ)$
- (E) $2\sqrt{2}(cis225^\circ)$

11. Dentre os complexos $z = (x; y)$ tais que $\begin{cases} |z-1| \leq 1 \\ x-y \geq 1 \end{cases}$, aquele de maior módulo tem:

- (A) $x > 0$ e $y > 0$
- (B) $x < 0$ e $y = 0$
- (C) $x > 0$ e $y < 0$
- (D) $x < 0$ e $y > 0$
- (E) $x = 0$ e $y > 0$

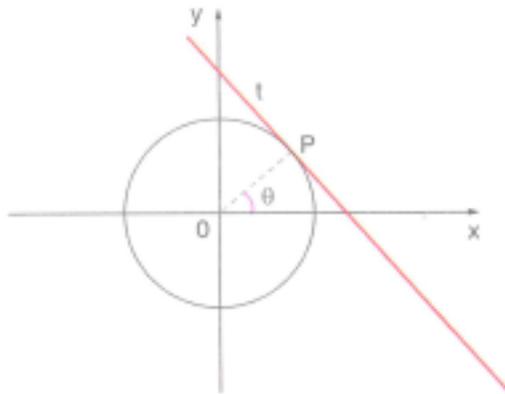
12. Observe a figura a seguir. Nessa figura, $A = (2;3)$ e $BC = \sqrt{10}$.



A equação da reta AB é:

- (A) $x + 4y - 14 = 0$
- (B) $x - 4y + 14 = 0$
- (C) $4x + y - 14 = 0$
- (D) $4x - y + 14 = 0$
- (E) $x + 2y - 7 = 0$

13. A equação da reta t , tangente à circunferência de raio r no ponto P , conforme figura abaixo é dada por:



- (A) $x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta = r$
- (B) $x \operatorname{sen} \theta - y \operatorname{cos} \theta = -r$
- (C) $x \operatorname{cos} \theta - y \operatorname{sen} \theta = -r$
- (D) $x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta = r$
- (E) $x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta = -r$

14. A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz dos quadrantes ímpares vale:

- (A) $\sqrt{5}$
- (B) $\sqrt{2}$
- (C) $\sqrt{3}$
- (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. A área da interseção das regiões do plano cartesiano limitada por $x^2 + (y - 4)^2 \leq 25$ e $y \leq \frac{4}{3}x + 4$ é:

- (A) $\frac{9\pi}{2}$
- (B) $\frac{17\pi}{2}$
- (C) $\frac{25\pi}{2}$
- (D) $\frac{31\pi}{2}$
- (E) $\frac{13\pi}{2}$

16. Se a área lateral e a área total de cilindro reto são $2\pi A$ e $2\pi S$ respectivamente, então o volume deste sólido é igual a:

- (A) $\pi A \sqrt{S - A}$

- (B) $\pi S\sqrt{S-A}$
 (C) $\pi A\sqrt{S+A}$
 (D) $\pi S\sqrt{S+A}$
 (E) $\pi\sqrt{S+A}$

17. Um gerente de um hotel, após fazer alguns cálculos, chegou à conclusão de que, para atingir a meta de economia de energia elétrica, bastava apagar 2 lâmpadas de um corredor, com 8 lâmpadas o gerente determinou que 2 lâmpadas adjacentes não poderiam ficar apagadas ao mesmo tempo, e as 2 lâmpadas das extremidades deveriam permanecer acesas. Sendo assim, o número de maneiras que este gerente pode apagar 2 lâmpadas:

- (A) 24
 (B) 10
 (C) 15
 (D) 12
 (E) 6

18. Sejam as funções reais $f(x)$ e $g(x)$ Se $f(x) = x + 2$ e $f(g(x)) = \frac{x}{2}$, pode-se afirmar que a função inversa de $g(x)$ é:

- (A) $g^{-1}(x) = \frac{f(x)}{2}$
 (B) $g^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$
 (C) $g^{-1}(x) = f(x)$
 (D) $g^{-1}(x) = 2f(x)$
 (E) $g^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$

19. Dados os números $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \sqrt{3} + 1$ e $c = 0,1333\dots$, pode-se afirmar que:

- (A) $a.b$ é um número irracional
 (B) $(a+b) \cdot c$ é um número racional
 (C) $(a+b) \cdot c$ é um número racional
 (D) $a.b.c$ é um número irracional
 (E) $\frac{a}{b}$ é um número racional

20. No conjunto \mathbb{R} , o sistema de equação $\begin{cases} ax + y = -1 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$ é:

- (A) Possível e determinando para $a \neq -\frac{1}{2}$
 (B) Possível e indeterminado para a real qualquer.
 (C) Impossível para $a = -\frac{1}{2}$
 (D) Possível e indeterminado para $a = \frac{1}{2}$
 (E) Impossível para $a = \frac{1}{2}$



GABARITO 14º SIMULADO GERAL 2017

2º DIA

MATEMÁTICA

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E
11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

GEOGRAFIA

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E
31	A	B	C	D	E
32	A	B	C	D	E

HISTÓRIA

33	A	B	C	D	E
34	A	B	C	D	E
35	A	B	C	D	E
36	A	B	C	D	E
37	A	B	C	D	E
38	A	B	C	D	E
39	A	B	C	D	E
40	A	B	C	D	E
41	A	B	C	D	E
42	A	B	C	D	E
43	A	B	C	D	E
44	A	B	C	D	E

INGLÊS

45	A	B	C	D	E
46	A	B	C	D	E
47	A	B	C	D	E
48	A	B	C	D	E
49	A	B	C	D	E
50	A	B	C	D	E
51	A	B	C	D	E
52	A	B	C	D	E
53	A	B	C	D	E
54	A	B	C	D	E
55	A	B	C	D	E
56	A	B	C	D	E

= F I M =

