ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA

Padrões e relações

2

Adilson Longen

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
2º ANO
ENSINO MÉDIO

Editora do Brasil

ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA

padrões e relações

2

Adilson Longen

Licenciado em Matemática, doutor e mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná. Autor de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Foi professor universitário e atualmente é professor de Matemática em escolas da rede particular.

Manual do
PROFESSOR

1ª edição
São Paulo – 2016

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
2º ANO
ENSINO MÉDIO

Editora do Brasil

Direção geral: Vicente Tortamano Avanso
Direção adjunta: Maria Lúcia Kerr Cavalcante Queiroz

Direção editorial: Cibele Mendes Curto Santos
Gerência editorial: Felipe Ramos Poletti
Supervisão editorial: Erika Caldin
Supervisão de arte, editoração e produção digital: Adelaide Carolina Cerutti
Supervisão de direitos autorais: Marilisa Bertolone Mendes
Supervisão de controle de processos editoriais: Marta Dias Portero
Supervisão de revisão: Dora Helena Feres
Consultoria de iconografia: Tempo Composto Col. de Dados Ltda.
Licenciamentos de textos: Cinthya Utiyama, Paula Harue e Renata Garbellini
Coordenação de produção CPE: Leila P. Jungstedt

Concepção, desenvolvimento e produção: Triolet Editorial e Mídias Digitais
Diretora executiva: Angélica Pizzutto Pozzani
Diretor de operações e produção: João Gameiro
Gerente editorial: Denise Pizzutto
Editora de texto: Carmen Lucia Ferrari
Assistentes editoriais: Adriane Gozzo, Tatiane Pedroso
Preparação e revisão: Fernanda A. Umile (coord.), Bruna Lima, Érika Finati, Flávia Venezio, Flávio Frasqueti, Leandra Trindade, Liliane F. Pedroso, Mayra Terin Buaiz, Patrícia Rocco
Projeto gráfico: Triolet Editorial/Arte
Editora de arte: Daniela Fogaça Salvador
Assistente de arte: Wilson Santos, Beatriz Landiosi (estag.), Lucas Boniceli (estag.)
Ilustradores: Adilson Secco, Dawidson França, Felipe Rocha, Suryara Bernardi
Cartografia: Allmaps
Iconografia: Pamela Rosa (coord.), Erika Freitas
Tratamento de imagens: Felipe Martins Portella
Capa: Beatriz Marassi
Imagem de capa: Paula Sierra/Getty Images/© Niemeyer, Oscar/AUTVIS, Brasil, 2016.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Longen, Adilson
Matemática : padrões e relações, 2 : ensino médio / Adilson Longen. – 1. ed. – São Paulo : Editora do Brasil, 2016. – (Coleção matemática padrões e relações)

Componente curricular: Matemática
ISBN 978-85-10-06250-3 (aluno)
ISBN 978-85-10-06251-0 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Título.
II. Série.

16-03298 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

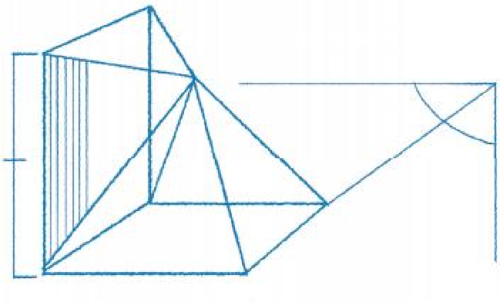
Imagem de capa:
Centro Cultural Internacional Oscar Niemeyer, na cidade de Avilés, nas Astúrias, Espanha.

2016
Impresso no Brasil

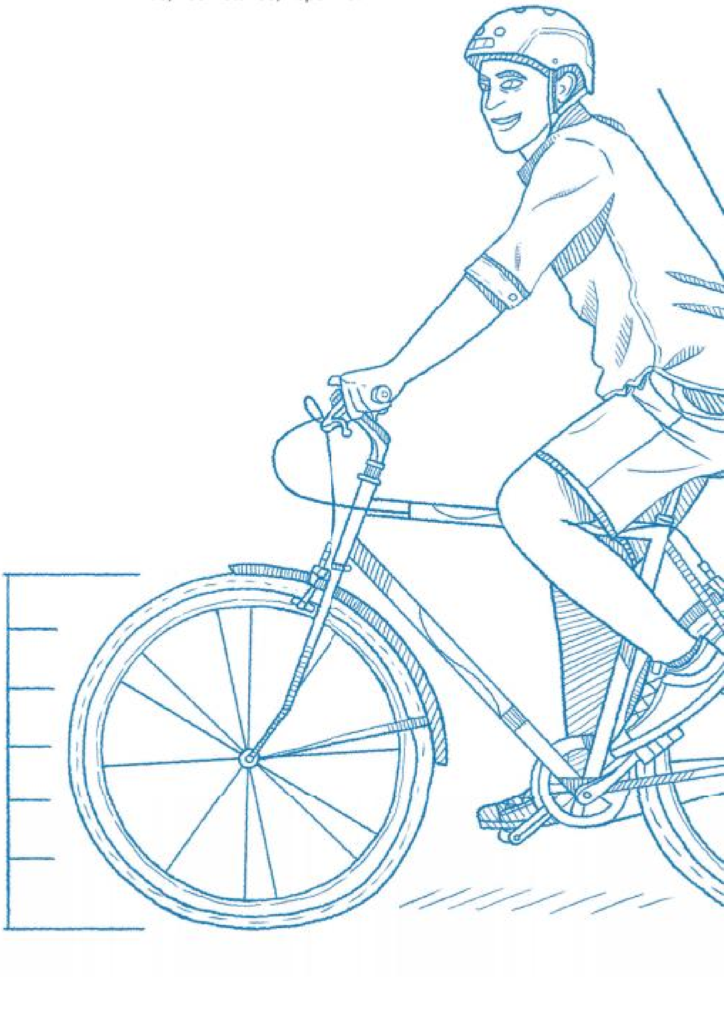
1ª edição / 1ª impressão, 2016

Editora do Brasil

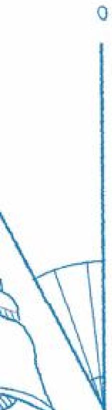
Rua Conselheiro Nébias, 887 – São Paulo/SP – CEP 01203-001
Fone: (11) 3226-0211 – Fax: (11) 3222-5583
www.editoradobrasil.com.br



Suryara Bernardi



APRESENTAÇÃO



Uma coleção de livros destinados à formação de conhecimentos matemáticos exige de todos os envolvidos certo grau de comprometimento. Ao autor, fica a tarefa de transmissão de conteúdos elencados normalmente para o grau de ensino a que se destina, procurando dar um encaminhamento claro, objetivo e didático. Seu papel também compreende a busca de procedimentos que possibilitem um desenvolvimento adequado das aulas a serem ministradas, tendo o cuidado de levar em conta dois outros personagens extremamente importantes para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra: professor e aluno.

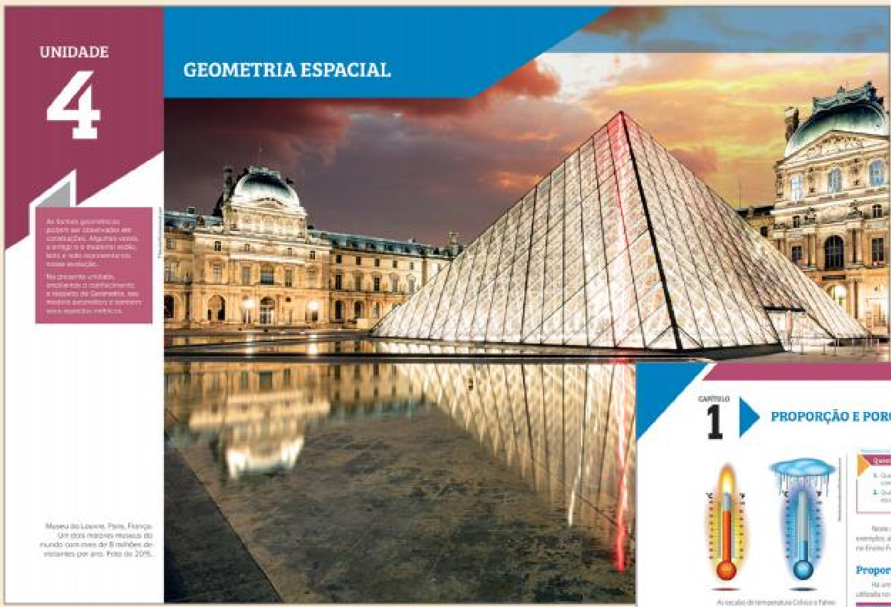
Quanto à Matemática que o aguarda nas próximas páginas, não posso dizer que será um caminho com um acesso imediato e veloz. Antes, prefiro acreditar que é uma trajetória lenta, mas necessária, rica de saberes construídos ao longo de nossa evolução e carregada de dúvidas necessárias, de etapas a serem ultrapassadas. Não pense na Matemática como uma ciência exata, pois antes das certezas, estudamos nela os acasos; antes de termos as medidas precisas, temos as aproximações, que são muito mais reais.

A proposta de nossa coleção de Matemática para o Ensino Médio contempla diversos aspectos importantes que devem ser levandos em conta. Entre eles destacamos a necessidade de ter na matemática um conhecimento historicamente construído, que permite desenvolver habilidades de pensamento importantes na formação do cidadão. Outro aspecto considerado também fundamental e que aqui procurou ser levando em conta, é o de permitir um trabalho voltado à autonomia, pois é desejável cada vez mais pessoas que busquem e construam conhecimentos.

Um bom trabalho!

O Autor

Conheça o livro


UNIDADE 4

GEOMETRIA ESPACIAL

Abertura de Unidade

Ao iniciar um tema, convida o aluno a envolver-se no assunto. Isso é realizado por meio contextos diversos, que podem ser do cotidiano ou do desenvolvimento histórico da Matemática, e explora curiosidades a respeito do próprio tema da unidade.


CAPÍTULO 1

PROPORÇÃO E PORCENTAGEM

Questões e reflexões

Proporcionalidade

Números diretamente proporcionais

Abertura de capítulo

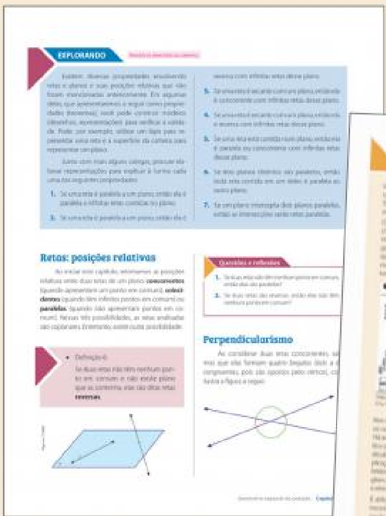
É apresentado o assunto do capítulo.

Questões e reflexões

Perguntas aplicadas ao longo do desenvolvimento da teoria para abordar conhecimento prévio e reflexões sobre o conteúdo.

Explorando

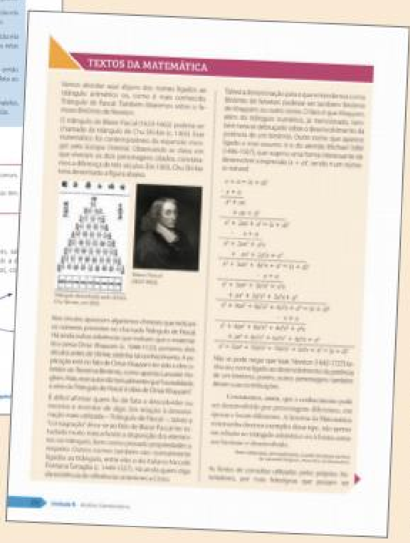
Seção que aparece ao longo da teoria com o objetivo de explorar determinado conteúdo ou a situação com o uso de calculadoras ou programas de computador.


EXPLORANDO

Retas: posições relativas

Questões e reflexões

Perpendicularismo


TEXTOS DA MATEMÁTICA

Textos na Matemática

Nessa seção é utilizada a forma textual para abordar explicações necessárias para a compreensão de conteúdos diversos.

História da Matemática

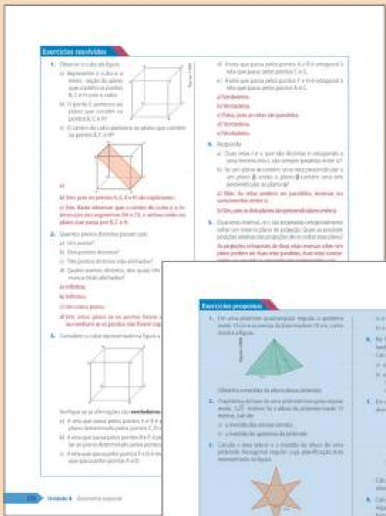
Aqui são abordados a história da Matemática, no decorrer do tempo, e seus personagens.

Algumas conclusões

Similar a um roteiro, onde é proposta uma reflexão sobre o que foi desenvolvido na unidade.

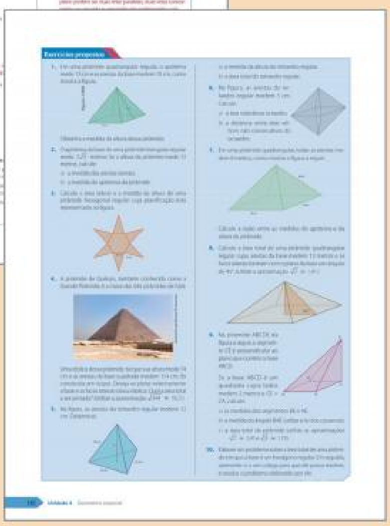
Explorando habilidades e competências

Situações elaboradas para explorar conhecimento utilizando um contexto diferente.



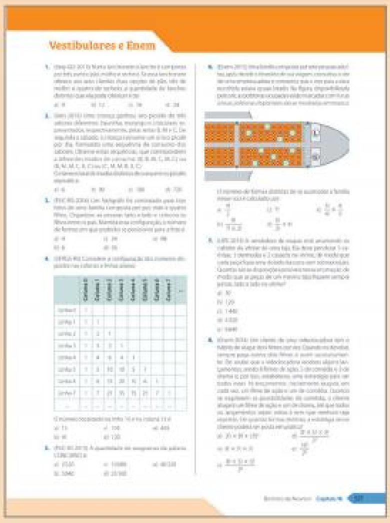
Exercícios resolvidos

Além dos exemplos ao longo da teoria, os exercícios servem como estratégia para a explorar o conteúdo.



Exercícios propostos

Exercícios para fixação, no final de cada tema.



Vestibular e Enem

No final de cada unidade, exercícios relacionados a vestibulares de todo Brasil e questões do Enem.

Desafio

Exercício relacionado a Unidade, com nível mais complexo.

Atenção!

Não escreva no livro. Todos os exercícios devem ser resolvidos no caderno.

Sumário

UNIDADE 1 – MATEMÁTICA FINANCEIRA

Capítulo 1 – Proporção e porcentagem 10
- Proporcionalidade 10
- Porcentagem 13
- Aumentos e descontos 15

Capítulo 2 – Juro simples 18
- Juro simples 18
- Juro simples e progressão aritmética 20
- Juro simples e função afim 21

Capítulo 3 – Juros compostos 23
- Juros compostos 23
- Progressão geométrica e logaritmos 26
- Equivalência de taxas 27
- Compras a prazo e financiamentos 27
- Vestibulares e Enem 31
- Explorando habilidades e competências 34

UNIDADE 2 – TRIGONOMETRIA

Capítulo 4 – Trigonometria na circunferência 38
- Arcos e ângulos 38
- Circunferência trigonométrica 42
- Seno e cosseno de um arco 48
- Função seno e função cosseno 53

Capítulo 5 – Relações trigonométricas 62
- A tangente de um arco na circunferência 62
- Outras razões trigonométricas 65
- Equações trigonométricas 66

Capítulo 6 – Transformações trigonométricas 71
- Fórmulas para adição e subtração de arcos 71
- Fórmulas de duplicação de arcos 75
- Vestibulares e Enem 79
- Explorando habilidades e competências 82

UNIDADE 3 – MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Capítulo 7 – Matrizes e Determinantes 86
- Conceitos iniciais de matrizes 86
- Adição de matrizes 92
- Subtração de matrizes 93
- Multiplicação por um número real 95
- Multiplicação de matrizes 97
- Propriedades do produto de duas matrizes 99
- Determinantes de matrizes 102
- Propriedades dos determinantes 106

Capítulo 8 – Sistemas de equações lineares 112
- Equações e sistemas de equações lineares 112
- Escalonamento 116
- Matrizes e sistemas lineares 123
- Vestibulares e Enem 129
- Explorando habilidades e competências 131

UNIDADE 4 – GEOMETRIA ESPACIAL

Capítulo 9 – Geometria espacial de posição 134
- Primeiras noções 134
- Planos: determinação e posições relativas 138
- Planos e retas: posições relativas 139
- Retas: posições relativas 141
- Perpendicularismo 141
- Projeções ortogonais e distâncias 144
- Distâncias 145

Capítulo 10 – Poliedros 153
- Noção de poliedro 154
- Poliedros regulares 155
- Classes de poliedros 157

Filipe Rocha

Capítulo 11 – Prismas 161
Prismas e seus elementos 161
Prisma regular 163
Área da superfície de um prisma 163
Paralelepípedo e cubo 166
Volume do prisma 170
Volume do prisma e princípio de Cavalieri 173

Capítulo 12 – Pirâmides 178
Pirâmide e seus elementos 178
Pirâmides regulares 179
Área da superfície de uma pirâmide 181
Volume da pirâmide 183
Vestibulares e Enem 189
Explorando habilidades e competências 191

UNIDADE 5 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

Capítulo 13 – Princípio fundamental da contagem 194
Princípio fundamental da contagem 194

Capítulo 14 – Permutações 201
Permutação simples 201
Fatorial de um número natural 203
Outras situações com permutação 205
Permutação com repetição 208
Permutação circular 209

Capítulo 15 – Combinações e arranjos 213
Combinações simples 213
Combinações e arranjos 219
Combinações condicionadas 220

Capítulo 16 – Binômio de Newton 223
Propriedades das combinações 223
Fórmula do desenvolvimento de um binômio 229
Fórmula do termo geral 230
Vestibulares e Enem 233
Explorando habilidades e competências 235

UNIDADE 6 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Capítulo 17 – Introdução à teoria das probabilidades 238
Ideias iniciais 238
Espaço amostral e evento 240

Capítulo 18 – Cálculo de probabilidades 245
Probabilidade em espaço amostral finito 245
Probabilidade de um evento 246
Aplicações de probabilidades 250

Capítulo 19 – Adição e multiplicação de probabilidades 254
Probabilidade da união e da intersecção 254
Probabilidade condicional 259
Probabilidade de eventos independentes 260

Capítulo 20 – Introdução à estatística 266
Ideias iniciais 266
Frequência absoluta e frequência relativa 269
Organizando dados em gráficos 273
Vestibulares e Enem 282
Explorando habilidades e competências 285

Filipe Rocha

UNIDADE 1

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Respostas encontram-se no Manual do Professor.

Na era da informação, qualquer mudança política numa nação, por exemplo, pode influenciar as aplicações financeiras e os valores das moedas no resto do mundo.

Nesta unidade, conheceremos alguns aspectos da Matemática financeira, como juros simples e juros compostos.

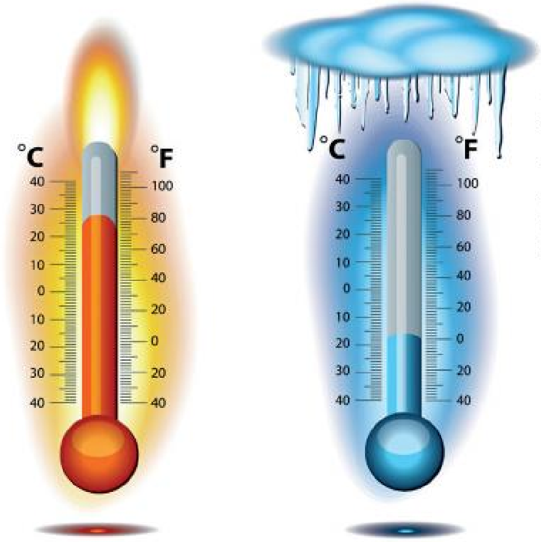
Rawpixel.com/Shutterstock.com

As mudanças políticas e econômicas em qualquer nação podem influenciar a economia global.


Currencies
$1=
Change
%Change
British POUND 0.6529 +0.0001 +0.012%
Czech KORUNA 20.1790 -0.0440 -0.218%
Danish KRONE 5.8659 +0.0005 +0.009%
European EURO 0.7889 +0.0002 +0.028%
Hungarian FORINT 244.9750 -0.4150 -0.169%
Norwegian KRONE 6.0616 +0.0023 +0.038%
Polish ZLOTY 3.4800 -0.0056 -0.161%
Russian RUBLE 31.8485 -0.0307 -0.096%
Swedish KRONA 6.9936 +0.0019 +0.027%
Swiss FRANC 0.9535 +0.0018 +0.188%
56.21$
96.87$
3 Month % Change
-0.86%
+5.65%
+2.88%
+6.41%
+2.53%
+6.61%
+5.52%
+11.73%
20 Wk
High
Low
T/N
Return
MktVol.

CAPÍTULO

1 PROPORÇÃO E PORCENTAGEM



Monika Hunackova/Shutterstock.com

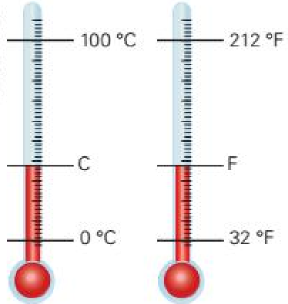
As escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit estão relacionadas por meio da seguinte igualdade:

$$\frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180}$$

Note que os dois membros dessa igualdade são razões. A igualdade de duas razões é, em Matemática, chamada **proporção**.

Para compreender como a relação entre essas escalas foi obtida, podemos observar dois termômetros, lado a lado, um na escala Celsius e outro na escala Fahrenheit. A altura do mercúrio nos dois termômetros é a mesma, o que muda é a escala (a "régua"). Assim, conforme ilustrado a seguir, temos, para uma temperatura *C*, na escala Celsius, e *F*, na escala Fahrenheit, a proporção entre as diferenças (alturas nos termômetros) dos valores das escalas:

Adilson Secco



$$\frac{C-0}{100-0} = \frac{F-32}{212-32}$$

$$\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180}$$

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

1. Qual é a temperatura na escala Celsius correspondente a 75 °F?
2. Qual é a temperatura em que as duas escalas têm o mesmo valor numérico?

Neste capítulo retomaremos, por meio de exemplos, algumas ideias que foram estudadas no Ensino Fundamental sobre proporções.

Proporcionalidade

Há uma propriedade que normalmente é utilizada no cálculo envolvendo proporções:

Em uma proporção, o produto dos termos dos extremos é igual ao produto dos termos dos meios, isto é, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então, $a \cdot d = b \cdot c$.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, os termos chamados extremos são *a* e *d*, enquanto os termos chamados meios são *b* e *c*. Com base nessa proporção, para que o produto dos extremos seja igual ao produto dos meios, basta multiplicar os dois membros da igualdade por $b \cdot d$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Números diretamente proporcionais

Um exemplo de geometria plana envolvendo proporções é quando duas ou mais retas paralelas determinam em duas retas transversais segmentos de medidas proporcionais (diretamente proporcionais).

Exemplo:

As retas paralelas *a*, *b*, *c* e *d* determinam sobre as retas transversais *r* e *s* segmentos de comprimentos indicados na figura a seguir. Vamos determinar a medida desconhecida *x*.

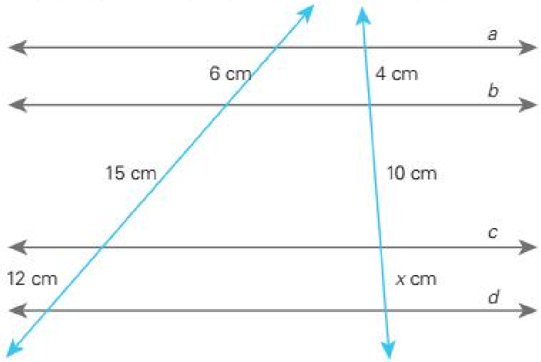


Figura: © DAE

- De acordo com o teorema de Tales, que você já estudou, as medidas dos segmentos determinados nas duas retas transversais são proporcionais. Assim, podemos escrever:

$$\frac{6}{4} = \frac{15}{10} = \frac{12}{x}$$

- Utilizando apenas uma dessas igualdades, podemos determinar *x*:

$$\frac{15}{10} = \frac{12}{x}$$

$$15x = 120 \Rightarrow x = 8$$

Portanto, a medida desconhecida é 8 cm.

Nesse exemplo, quando consideramos as razões entre as medidas indicadas, temos:

$$\frac{6}{4} = 1{,}5 \qquad \frac{15}{10} = 1{,}5 \qquad \frac{12}{8} = 1{,}5$$

Assim,

$$\frac{6}{4} = \frac{15}{10} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

Dizemos que o número 1,5 é a constante de proporcionalidade.

Essa proporção indicada também é válida quando acrescentamos outra razão cujo numerador é a soma dos numeradores e o denominador é a soma dos denominadores, isto é:

$$\frac{6}{4} = \frac{15}{10} = \frac{12}{8} = \frac{6+15+12}{4+8+10} = 1{,}5$$

Se os números reais não nulos *a*, *b*, *c*, ..., *n* são diretamente proporcionais aos números *a'*, *b'*, *c'*, ..., *n'*, nessa ordem, temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots \frac{n}{n'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+\ldots+n}{a'+b'+c'+\ldots n'} = k$$

(*k* é a constante de proporcionalidade)

OBSERVAÇÃO:
Quando números ou grandezas são diretamente proporcionais, seus quocientes são constantes.

Exemplo:

Márcia, Pedro e Rubens abriram um escritório de advocacia. Para constituir uma sociedade, Márcia investiu R$ 100.000,00, Pedro, R$ 80.000,00 e Rubens, R$ 40.000,00. Após 1 ano de intenso trabalho, houve um lucro de R$ 66.000,00. Como esse lucro deve ser dividido?

- Nessa situação, a divisão deve ser feita em partes diretamente proporcionais às quantias investidas quando da constituição da sociedade. Considerando que Márcia, Pedro e Rubens receberão, respectivamente, *x*, *y* e *z*, em reais, temos:

$$\frac{x}{100\,000} = \frac{y}{80\,000} = \frac{z}{40\,000} \Rightarrow \frac{x+y+z}{100\,000+80\,000+40\,000}$$

$$\frac{x}{100\,000} = \frac{y}{80\,000} = \frac{z}{40\,000} \Rightarrow \frac{66\,000}{220\,000} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{x}{100\,000} = \frac{3}{10} \Rightarrow x = 30\,000$$

$$\frac{y}{80\,000} = \frac{3}{10} \Rightarrow y = 24\,000$$

$$\frac{z}{40\,000} = \frac{3}{10} \Rightarrow z = 12\,000$$

Portanto, Márcia receberá R$ 30.000,00; Pedro, R$ 24.000,00; e Rubens, R$ 12.000,00.

Números inversamente proporcionais

Também há situações que relacionam números inversamente proporcionais. De modo geral, temos:

Dizemos que os números reais não nulos $a, b, c, ..., n$ são inversamente proporcionais aos números $a', b', c', ..., n'$, nessa ordem, quando são diretamente proporcionais aos números $\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}, ..., \frac{1}{n'}$, ou seja: $\dfrac{a}{\frac{1}{a'}} = \dfrac{b}{\frac{1}{b'}} = \dfrac{c}{\frac{1}{c'}} = ... = \dfrac{n}{\frac{1}{n'}}$

Então: $a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = ... = n \cdot n'$

OBSERVAÇÃO:
Quando números ou grandezas são inversamente proporcionais, seus produtos são constantes.

Exemplo:

Vamos considerar que Márcia, Pedro e Rubens constituíram uma sociedade com capitais iguais, isto é, todos contribuíram com R$ 80.000,00. Após algum tempo, houve um lucro de R$ 38.000,00. Como dividir esse lucro, considerando que Márcia, no período correspondente, ausentou-se durante 2 meses, Pedro, 4 meses e Rubens, 5 meses?

- Neste caso, a divisão deverá ser inversamente proporcional ao tempo que cada sócio esteve ausente. Assim, quanto maior o tempo ausente, menor a quantia a receber. Sejam x, y e z, respectivamente, as quantias que Márcia, Pedro e Rubens vão receber, em reais. Então, temos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = k$$

$$2x = 4y = 5z = k \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{2} \\ y = \dfrac{k}{4} \\ z = \dfrac{k}{5} \end{cases}$$

- Como a soma desses valores corresponde ao lucro, calculamos inicialmente o valor de k para depois determinar a quantia que cada um desses sócios vai receber:

$$x + y + z = 38000$$
$$\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} = 38000$$
$$10k + 5k + 4k = 760000$$
$$19k = 760000$$

$$k = 40000 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{2} = \dfrac{40000}{2} = 20000 \\ y = \dfrac{k}{4} = \dfrac{40000}{4} = 10000 \\ x = \dfrac{k}{5} = \dfrac{40000}{5} = 8000 \end{cases}$$

Portanto, Márcia deve receber R$ 20.000,00, Pedro, R$ 10.000,00 e Rubens, R$ 8.000,00.

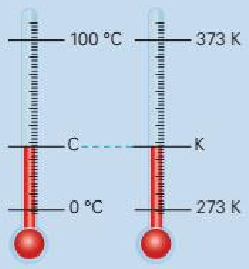
EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

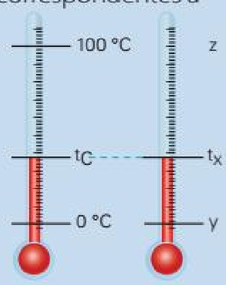
Resolva os exercícios no caderno.

Vimos a relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit. Utilizamos o cálculo de proporção para obter essa relação. Vamos explorar essa ideia um pouco mais.

1. Observando as equivalências entre as temperaturas nas escalas Celsius e Kelvin, indicadas nos termômetros ilustrados ao lado, obtenha uma fórmula matemática que relacione uma temperatura t_c (em graus Celsius) com uma temperatura t_k (em kelvins).



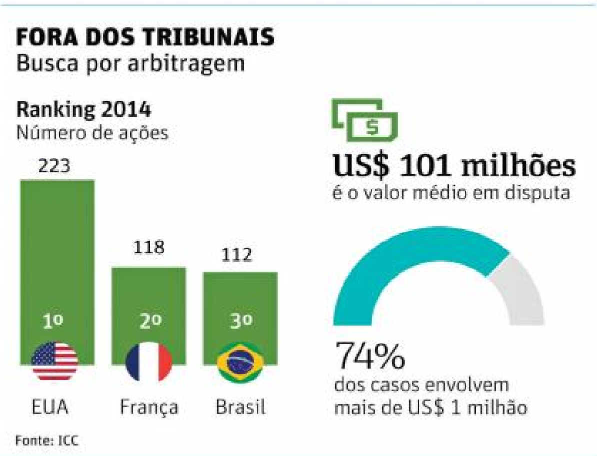
2. Você vai inventar uma escala de temperatura. Na figura ao lado, as temperaturas correspondentes a y e a z (com $z > y$) deverão ser indicadas por números que você vai atribuir. Em seguida, obtenha a relação entre uma temperatura t_x (na escala inventada) e uma temperatura t_c (na escala Celsius).



Ilustrações: Adilson Secco

Porcentagem

O gráfico a seguir foi publicado no jornal *Folha de S.Paulo*, em 9 de setembro de 2015, na página A14. Na reportagem, citava-se que a recessão econômica estimulava a busca por resolução de conflitos entre empresas fora dos chamados litígios na justiça. Os conflitos eram resolvidos em "câmaras de arbitragem".



Editoria de Arte/Folhapress

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 9 set. 2015, p. A14.

Note acima a utilização de porcentagem juntamente a um gráfico estatístico.

O que significa dizer que 74% dos casos envolvem mais de 1 milhão de dólares?

Vamos recordar o assunto porcentagem estudado no Ensino Fundamental. Assim, observe as diferentes formas de se escrever 15%:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

- forma decimal
- forma de fração decimal
- porcentagem

Se representássemos o todo, isto é, 100%, em um gráfico de setores como este abaixo, o correspondente a 15% seria a parte destacada na cor roxa.

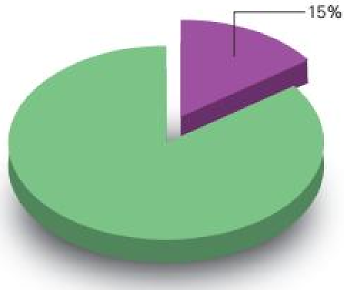


Gráfico: © DAE

Em algumas calculadoras, para calcular 15% de R$ 4 500,00, por exemplo, procedemos do seguinte modo:

- digitamos 4 500 e pressionamos a tecla $\boxed{\times}$ (que indica multiplicação);
- digitamos $\boxed{1}$ e $\boxed{5}$ e apertamos a tecla $\boxed{\%}$;
- após, apertamos a tecla $\boxed{=}$ (em certas calculadoras é necessário pressionar essa tecla).

Exercícios resolvidos

1. Um pai resolveu dividir a quantia de R$ 100,00 entre seus dois filhos em partes inversamente proporcionais às idades, em anos completos, de cada um. Um dos filhos tem 8 anos e o outro, 12 anos. Calcule a quantia que cada filho vai receber.

Seja x a quantia recebida pelo filho mais novo e seja y a quantia recebida pelo filho mais velho, temos:

$$x \cdot 8 = y \cdot 12 = k \Rightarrow x = \frac{k}{8} \text{ e } y = \frac{k}{12} \Rightarrow$$

$$x + y = 100 \Rightarrow \frac{k}{8} + \frac{k}{12} = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3k + 2k}{24} = 100 \Rightarrow k = 480 \Rightarrow$$

$$x = \frac{480}{8} = 60 \text{ e } y = \frac{480}{12} = 40$$

Logo, o filho mais novo vai receber R$ 60,00 e o filho mais velho, R$ 40,00.

2. Ao comprar uma televisão cujo preço é R$ 900,00, uma pessoa tinha duas opções para efetuar o pagamento:

- À vista, com 10% de desconto sobre o preço.
- Uma entrada no valor de 50% do preço e mais uma parcela, após 30 dias, com juros de 2%.

Se a pessoa escolher a segunda opção, qual será o valor pago a mais em relação ao pagamento à vista?

Se optar pelo pagamento à vista, a pessoa pagará 90% de R$ 900,00 ou seja:

0,90 · R$ 900,00 = R$ 810,00

Se optar pelo parcelamento, a pessoa pagará R$ 450,00 + R$ 450,00 + 2% de R$ 450,00, ou seja:

R$ 450,00 + R$ 450,00 + 0,02 · R$ 450,00 = = R$ 909,00

Como 909 − 810 = 99, se a pessoa escolher a segunda opção (pagamento parcelado), o valor pago a mais em relação ao pagamento à vista será R$ 99,00.

Exercícios propostos

3. Os valores de x e y são proporcionais a 3 e 4, respectivamente. Assim, temos infinitas possibilidades, como $x = 6$ e $y = 8$ ou $x = 18$ e $y = 24$.

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o valor de x nas seguintes proporções:

a) $\frac{x}{2}=\frac{7}{4}$ a) $x=\frac{7}{2}$ b) $\frac{x+1}{6}=\frac{3}{2}$ b) $x = 8$ c) $\frac{x}{3}=\frac{-2}{x-5}$ c) $x = 2$ ou $x = 3$.

2. Os números x, y e 48 são diretamente proporcionais a 3, 12 e 72, nessa ordem.

a) Determine a constante de proporcionalidade. $k=\frac{2}{3}$

b) Calcule os valores de x e y. $x = 2$ e $y = 8$.

3. Na proporção $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ é comum que muitas pessoas concluam imediatamente que $x = 3$ e $y = 4$. Explique por que essa conclusão não é correta.

4. Três números x, y e z, tais que $x + y + z = 60$, são diretamente proporcionais a 2, 3 e 7. Calcule o valor de $3x - y + 2z$. 85

5. Três números x, y e z, tais que $x + y + z = 82$, são inversamente proporcionais a 2, 3 e 7. Calcule o valor de $3x - y + 2z$. 122

6. "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°."

Considerando que, no triângulo da figura abaixo, as medidas α, β e γ dos ângulos internos são diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 7, calcule a medida do maior ângulo interno. 105°

Figura: © DAE

7. Em um hospital trabalham, em média, 1 enfermeiro para cada 6 pacientes e 3 médicos para cada 10 enfermeiros. Calcule o número de pacientes para cada médico. 20

8. Sabe-se que as medidas dos lados de um triângulo retângulo R são 3 cm, 4 cm e 5 cm.

As medidas de outro triângulo retângulo S são representadas por a, b e c, e essas medidas são diretamente proporcionais às medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm, respectivamente. Com base no enunciado, responda:

a) Quais são as medidas dos dois catetos do triângulo retângulo S, considerando que sua hipotenusa mede 15 cm? $a = 9$ cm e $b = 12$ cm

b) Qual é a razão entre as medidas da hipotenusa do triângulo R e do triângulo S, nessa ordem? $\frac{1}{3}$

c) Qual é a razão entre as medidas do perímetro do triângulo R e do triângulo S, nessa ordem? $\frac{1}{3}$

9. Uma herança deveria ser dividida entre três irmãos. No testamento, a orientação era fazer a divisão em partes diretamente proporcionais às idades, em anos completos, de cada um. Se no momento da partilha as idades dos três irmãos eram 25, 28 e 32 anos e o valor total da herança era R$ 170.000,00, calcule a quantia que cada irmão recebeu.

10. Podemos obter um percentual qualquer efetuando uma simples multiplicação. Por exemplo, para calcular 20% de 500, basta multiplicar o número 500 por $\frac{20}{100}$, ou seja, $500 \cdot 0{,}20 = 100$. Utilizando uma calculadora, determine:

a) 25% de 1 200. 300

b) 12% de 150. 18

c) 5% de 800. 40

d) 70% de 2 500. 1 750

e) 37,5% de 3 000. 1 125

11. Para calcular um número aumentado ou diminuído de um percentual qualquer, basta multiplicar esse número por 100% somado ou subtraído do percentual em questão. Por exemplo, o número 500 aumentado 30% é igual a:

$$500 \cdot \frac{130}{100} = 500 \cdot 1{,}30 = 650$$

E o número 500 diminuído 30% é igual a:

$$500 \cdot \frac{70}{100} = 500 \cdot 0{,}70 = 350$$

Utilizando uma calculadora, determine:

a) 250 aumentado 20%. 300

b) 800 diminuído 20%. 640

c) 1 500 aumentado 45%. 2 175

d) 2 000 diminuído 22%. 1 560

12. O Imposto de Renda (IR) é calculado com base na tabela da Receita Federal, da seguinte maneira: sobre o rendimento base aplica-se a alíquota correspondente e subtrai-se a parcela a deduzir. A tabela a seguir mostra como se distribuem as faixas de rendimento.

Tabela progressiva para o cálculo anual do Imposto sobre a Renda da Pessoa Física para o exercício de 2016, ano-calendário de 2015

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
Até 22.499,13	-	-
De 22.499,14 até 33.477,72	7,5	1.687,43
De 33.477,73 até 44.476,74	15	4.198,26
De 44.476,75 até 55.373,55	22,5	7.534,02
Acima de 55.373,55	27,5	10.302,70

Fonte: SUBSECRETARIA DE TRIBUTAÇÃO E CONTENCIOSO. *IRPF* (Imposto sobre a renda das pessoas físicas). 30 jul. 2015. Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de--renda-pessoa-fisica#c-lculo-anual-do-irpf>. Acesso em: 12 fev. 2016.

a) Qual é o valor do imposto pago por uma pessoa que possuiu um rendimento anual total de R$ 22.400,00 no ano de 2015? Essa pessoa é isenta de pagar imposto.

b) Qual é o valor do imposto pago por uma pessoa que possuiu um rendimento anual total de R$ 35.500,00 no ano de 2015? R$ 1.126,74

9. R$ 50.000,00 (filho com 25 anos), R$ 56.000,00 (filho com 28 anos) e R$ 64.000,00 (filho com 32 anos).

Aumentos e descontos

A situação da economia de uma sociedade, de modo geral, depende também de como está o comércio de bens. Em períodos de recessão, por exemplo, o poder de compra do consumidor diminui consideravelmente.

Nesses momentos, muitas são as campanhas publicitárias para motivar o cliente a consumir, mas a maneira mais simples e conhecida pelos comerciantes é oferecer descontos aos consumidores.

Algumas vezes, esses descontos são ilusórios, pois há lojistas que, inicialmente, aumentam o valor do preço que era praticado, para depois anunciar o desconto.

10incheslab/Shutterstock.com

Nesse sentido, é importante compreendermos alguns aspectos dessa chamada Matemática Comercial, observando os **aumentos** e os **descontos**.

Vamos analisar duas situações.

1ª situação:

Considere o retângulo abaixo e as medidas indicadas.

Figura: © DAE

Vamos examinar o que ocorre com a área desse retângulo quando aumentamos 10% a medida da base, que é 8 cm, e 20% a medida da altura, que é 5 cm. Particularmente, queremos saber de quantos por cento será o aumento da área desse retângulo.

- Área inicial do retângulo (A_i):

$$A_i = (8 \text{ cm}) \cdot (5 \text{ cm})$$
$$A_i = 40 \text{ cm}^2$$

- Aumentando as medidas dos lados do retângulo:

Base $\rightarrow$ 8 cm + 0,10 · 8 cm = 8,80 cm

Altura $\rightarrow$ 5 cm + 0,20 · 5 cm = 6,00 cm

- Área final do retângulo (A_f):

$$A_f = (8{,}80 \text{ cm}) \cdot (6{,}00 \text{ cm})$$
$$A_f = 52{,}8 \text{ cm}^2$$

- Cálculo do aumento da área:

Para determinar o percentual de aumento da área, dividimos a área final pela área inicial, ou seja:

$$\frac{A_f}{A_i} = \frac{52{,}8 \text{ cm}^2}{40 \text{ cm}^2} \Rightarrow \frac{A_f}{A_i} = 1{,}32$$

Esta última igualdade pode ser escrita das seguintes maneiras:

A_f é 132% de A_i

$$A_f = 1{,}32 \cdot A_i = \frac{132}{100} \cdot A_i$$
$$A_f = (1 + 0{,}32) \cdot A_i$$
$$A_f = A_i + 0{,}32 \cdot A_i$$

A_f é 32% maior que A_i

Assim, concluímos que a área final é 32% maior que a área inicial, isto é, podemos dizer que houve um aumento de 32% da área desse retângulo. Também podemos dizer que a nova área é 132% da área anterior.

Outra maneira de calcular esse percentual de aumento é utilizar uma proporção:

$$\frac{A_f - A_i}{A_i} = \frac{x}{100}$$

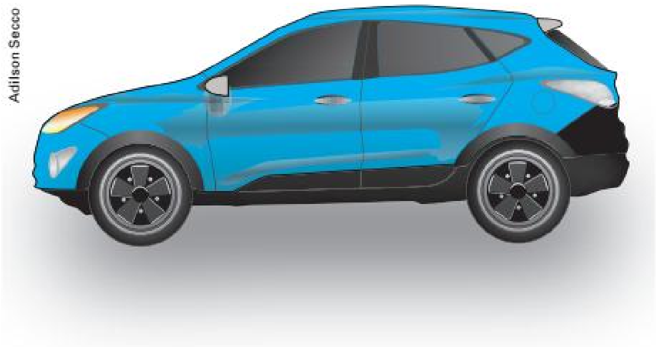
$$\frac{52{,}80 - 40}{40} = \frac{x}{100}$$

$$\frac{12{,}80}{40} = \frac{x}{100} \Rightarrow \frac{12{,}80}{40} = \frac{x}{100}$$

2ª situação:

Um carro seminovo foi colocado à venda por R$ 20.000,00. Após algum tempo sem conseguir vendê-lo, o dono do carro abaixou o preço para R$ 16.000,00. De quanto por cento foi essa redução?

Adilson Secco



- Consideremos que V_i e V_f indicam, respectivamente, o valor inicial e o valor final desse carro. Para saber o percentual de desconto, podemos inicialmente dividir o valor final pelo valor inicial do carro:

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{16000}{20000} = 0{,}80 \Rightarrow \frac{V_f}{V_i} = 0{,}80$$

Esta última igualdade pode ser escrita das seguintes maneiras:

$$V_f = \underbrace{0{,}80 \cdot V_i}_{V_f \text{ é 80\% do valor de } V_i} \Rightarrow V_f = \frac{80}{100} \cdot V_i$$

$$V_f = (1 - 0{,}20) \cdot V_i$$

$$V_f = \underbrace{V - 0{,}20 \cdot V_i}_{V_f \text{ é 20\% menor que o valor de } V_i}$$

Assim, a redução do preço foi de 20%, ou seja, houve desconto de 20% no valor final do preço do carro.

Enquanto na primeira situação tivemos um aumento, na segunda tivemos um desconto. De modo geral, quando queremos comparar dois valores de uma mesma grandeza V (V_i = valor inicial; V_f = valor final), dividimos o valor final pelo valor inicial. Conforme o resultado dessa divisão, podemos ter:

- $\frac{V_f}{V_i} = 1$ (não houve variação)
- $\frac{V_f}{V_i} > 1$ (houve aumento)
- $\frac{V_f}{V_i} < 1$ (houve redução)

Quando nos referimos particularmente a preços de mercadorias, aquilo que foi chamado de redução é normalmente conhecido como desconto.

Exemplo:

O litro de gasolina custava R$ 3,50. Por conta de variações do preço mundial do petróleo, em um mesmo mês houve dois aumentos: um de 10% e outro de 2% sobre o último valor. De quanto por cento foi o aumento em relação ao preço inicial?

- Podemos calcular esses valores sucessivamente, isto é:

  Valor após o primeiro aumento:

  $3{,}50 + 0{,}10 \cdot (3{,}50) = 3{,}50 + 0{,}35 = 3{,}85$

  Valor após o segundo aumento:

  $3{,}85 + 0{,}02 \cdot (3{,}85) = 3{,}85 + 0{,}077 = 3{,}927$

- Dividindo o valor final pelo valor inicial (antes dos aumentos), temos:

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{3{,}927}{3{,}50} = 1{,}122$$

Assim, concluímos que os dois aumentos sucessivos produziram um aumento correspondente a 12,2% em relação ao preço inicial do litro de gasolina.

- Outra maneira de calcular é encontrar inicialmente o resultado da seguinte multiplicação:

$$1{,}10 \cdot 1{,}02 = 1{,}122$$

Note que, quando multiplicamos determinado valor por 1,10, estamos aumentando 10% esse valor (1 corresponde a 100% e 0,10 corresponde a 10%). Do mesmo modo, multiplicando por 1,02, estamos aumentando 2%. Portanto, quando multiplicamos determinado valor por 1,122 significa que efetuamos um aumento de 12,2% no valor.

Exercícios resolvidos

1. Em uma livraria, um título estava em promoção:

Calcule o desconto percentual aplicado nessa promoção.

$$\frac{39,40}{45,80} \cong 0,86$$

Portanto, o desconto percentual aproximado aplicado nessa promoção é 0,14, que corresponde a 14%.

2. As dimensões de uma imagem retangular são 60 centímetros (altura) e 1 metro (base). Se aumentarmos 20% essas medidas, qual será o percentual de aumento da área dessa imagem?

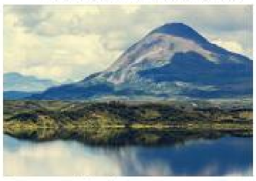


Imagem original.


Imagem com dimensões aumentadas 20%.

Zoonar GmbH/ Alamy/Fotoarena

Se aumentarmos 20% as dimensões dessa imagem, as novas medidas serão:

$60 \text{ cm} \cdot 1,20 = 72 \text{ cm}$ e $100 \text{ cm} \cdot 1,20 = 120 \text{ cm}$

A razão entre a área da imagem com dimensões aumentadas 20% e a área da imagem original é:

$$\frac{72 \cdot 120}{60 \cdot 100} = 1,44$$

Então, o percentual de aumento da área dessa imagem será 44%.

3. Considera-se que, para um motorista que possui um veículo *flex*, é mais vantajoso abastecer com álcool do que com gasolina quando o preço do litro do álcool for menor 70% do que o preço do litro da gasolina. Se em um posto o preço do litro da gasolina é R$ 3,30 e o do álcool é R$ 2,20, qual é a opção mais econômica para esse tipo de veículo?

$0,7 \cdot \text{R\$ } 3,30 = \text{R\$ } 2,31$

$\text{R\$ } 2,31 > \text{R\$ } 2,20$

Então, para um motorista que possui um veículo *flex*, é mais vantajoso abastecer com álcool.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. O salário de Pedro, que era de R$ 1.200,00 por mês, teve aumento de 12%. Qual é o valor do salário mensal de Pedro após esse reajuste? R$ 1.344,00

2. O valor de um carro novo, zero quilômetro, desvaloriza 10% no primeiro ano de uso. Se uma pessoa comprar um carro novo por R$ 30.000,00, qual será seu valor de mercado após 1 ano? R$ 27.000,00

3. Ao contrário dos automóveis, o valor de um imóvel tende a ser valorizado com o passar dos anos. Se um apartamento for comprado por R$ 150.000,00 e tiver valorização de 12% ao ano, qual será seu valor de mercado após 1 ano? R$ 168.000,00

4. Um aumento de 20% seguido de um desconto de 10% equivale a um único aumento de x%. Calcule o valor de x.
$x = 8$

5. Dois descontos sucessivos, um de 20% e outro de 30%, equivalem a um único desconto de x%. Calcule o valor de x.
$x = 44$

6. Em uma promoção "Pague 3, leve 4", qual é o desconto oferecido sobre cada unidade vendida? 25%

7. O dono de uma loja de roupas reajustou em 10% o preço de suas mercadorias. Percebendo que as vendas caíram, decidiu fazer uma promoção de 10% de desconto em todos os itens do estoque.

a) O valor das mercadorias, após o anúncio dessa promoção, é menor, igual ou maior que o valor cobrado antes do aumento dos preços? Menor.

b) Qual é a diferença, em ponto percentual, entre o valor cobrado antes do aumento e o valor cobrado após o anúncio da promoção?
A diferença é 1 ponto percentual.

8. Uma pessoa comprou um televisor e um aparelho de DVD. O preço do televisor era R$ 1.000,00 e o do aparelho de DVD era R$ 200,00. Por comprar à vista, essa pessoa recebeu 16% de desconto no preço do televisor e 10% de desconto no preço do aparelho de DVD. Considerando o valor total da compra, qual foi o desconto obtido? 15%

9. A medida do raio de uma circunferência é igual a 10 centímetros, como indicado na figura:

Figura: © DAE

a) Se a medida desse raio aumentar 30%, qual será o aumento percentual do comprimento da circunferência? 30%

b) Nessas mesmas condições, qual será o aumento percentual da área do círculo limitado pela circunferência? 69%

CAPÍTULO

2 JURO SIMPLES

Uma pessoa deseja aplicar um **capital** em uma instituição financeira.

Algumas perguntas normalmente feitas por essa pessoa são:

— Qual é a **aplicação financeira** que tem maior **rendimento**?

— Qual é a **taxa de aplicação** mensal?

Na instituição financeira, para responder a essas perguntas, é frequente o gerente também fazer outras, como:

— Qual é o capital que deseja aplicar?

— Qual é o tempo de aplicação?

As questões acima utilizam certos termos que são muito frequentes em instituições financeiras e transações comerciais. Além de serem utilizados os termos capital, aplicação, rendimento, taxa e tempo, outros também são empregados, como **correção**, **juros** e **montante**. Vamos estudar alguns deles neste e no próximo capítulo.

Juro simples

Inicialmente, quando falamos em capital (C), estamos nos referindo a uma quantia em dinheiro que poderá ser emprestada ou investida. O termo juros (J) refere-se à quantia em dinheiro cobrada pelo emprestador, pelo uso do dinheiro, ou paga pelo tomador do empréstimo. Observe a seguinte situação:

Aplicamos um capital de R$ 4.000,00 em um investimento qualquer de um banco; logo, podemos dizer que estamos emprestando essa quantia ao banco. O período ou tempo de aplicação (t) é 1 mês. Verificamos que o saldo é R$ 4.040,00 após esse período, significa que houve um aumento de R$ 40,00 por conta de juros. Observe que esses juros correspondem a 1% de R$ 4.000,00. Esse percentual é chamado taxa de juros (i). O valor R$ 4.040,00, correspondente à soma do capital aplicado com os juros gerados por essa aplicação, é denominado montante (M).

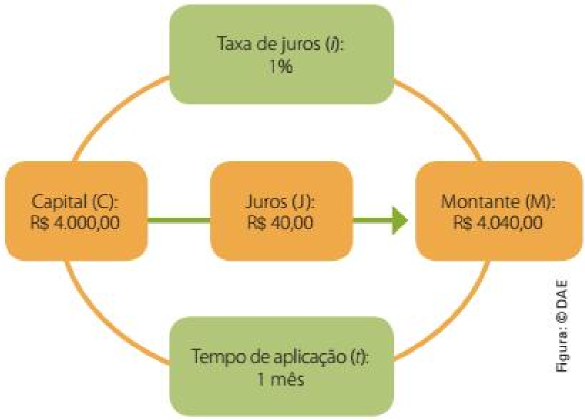


Figura: © DAE

Antes de estabelecer uma relação matemática envolvendo o capital, o tempo de aplicação, a taxa de juros e o montante, vamos observar alguns exemplos.

Exemplo:

Fábio emprestou para o irmão dele a importância de R$ 10.000,00 a uma taxa mensal fixa de 1%. Vamos calcular os valores da dívida, ao longo de 5 meses (observe a tabela a seguir), considerando que não houve qualquer pagamento e que Fábio combinou com o irmão que os juros de 1% seriam sempre sobre o valor do empréstimo.

Período	Cálculo dos juros	Juros	Montante
1º mês	0,01 · R$ 10.000,00	R$ 100,00	R$ 10.100,00
2º mês	0,01 · R$ 10.000,00	R$ 100,00	R$ 10.200,00
3º mês	0,01 · R$ 10.000,00	R$ 100,00	R$ 10.300,00
4º mês	0,01 · R$ 10.000,00	R$ 100,00	R$ 10.400,00
5º mês	0,01 · R$ 10.000,00	R$ 100,00	R$ 10.500,00

OBSERVAÇÕES:

1. A taxa e o tempo devem ser expressos na mesma unidade de tempo, ou seja, se o tempo for expresso em meses, a taxa deverá ser expressa em % ao mês; se o tempo for expresso em anos, a taxa deverá ser expressa em % ao ano etc. Por exemplo: 2% ao mês durante 5 meses; 10% ao ano durante 6 anos etc.
2. Se, ao fim de cada período de aplicação (mês, por exemplo), os juros são calculados sempre em relação ao capital inicial, dizemos que a modalidade é **juro simples**.

Exemplo:

Um capital de R$ 6.000,00, aplicado a uma taxa de juro simples de 15% ao ano, gerou um montante de R$ 9.600,00 depois de certo tempo. Determine esse tempo.

- Para saber os juros correspondentes, efetuamos a seguinte subtração:

  $J = M - C$

  $J = 9600 - 6000 \Rightarrow J = 3600$

- Cálculo dos juros por ano:

  $0{,}15 \cdot 6000 = 900$

- Cálculo da quantidade de anos:

  $t = \dfrac{3600}{900} \Rightarrow t = 4$ anos

Portanto, o capital ficou aplicado durante 4 anos completos.

Vamos obter duas relações matemáticas que permitirão calcular os juros de uma aplicação e também o montante correspondente. Para tanto, considere que um capital (C) aplicado a uma taxa fixa (i), na modalidade de juro simples, rende juros (J) ao fim de t períodos de aplicação. Vamos determinar os juros após t períodos de aplicação e o montante correspondente.

- Cálculo dos juros em cada período:

  1 período de aplicação $\longrightarrow J_1 = i \cdot C = C \cdot i$

  2 períodos de aplicação $\longrightarrow J_2 = (i \cdot C) \cdot 2 = C \cdot i \cdot 2$

  3 períodos de aplicação $\longrightarrow J_3 = (i \cdot C) \cdot 3 = C \cdot i \cdot 3$

  4 períodos de aplicação $\longrightarrow J_4 = (i \cdot C) \cdot 4 = C \cdot i \cdot 4$

  $\vdots$

  t períodos de aplicação $\longrightarrow J_t = (i \cdot C) \cdot t = C \cdot i \cdot t$

- Cálculo do montante:

  Como o montante (M), em uma aplicação, é o resultado da adição do capital aplicado, também chamado capital inicial, aos juros gerados, podemos escrever:

  $M = C + J$

  $M = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t)$

O montante (M) gerado por um capital (C), que foi aplicado na modalidade de juro simples, durante t períodos, a uma taxa fixa (i), é dado por $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$, em que i e t são expressos na mesma unidade de tempo.

Exercícios resolvidos

1. Uma pessoa aplicou R$ 5.000,00 com rendimento de 0,8% ao mês, na modalidade de juro simples, durante 10 meses.

a) Quanto essa pessoa vai receber de rendimento ao fim dessa aplicação?

b) Qual será o montante que essa pessoa vai receber?

a) Temos:

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 5000 \cdot 0{,}008 \cdot 10 \Rightarrow J = 400$

Logo, essa pessoa vai receber de rendimento R$ 400,00 ao fim dessa aplicação.

b) Temos:

$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$ $M = 5000 \cdot (1 + 0{,}008 \cdot 10) = 5400$.

Portanto, o montante que essa pessoa vai receber será R$ 5.400,00.

2. Um capital de R$ 10.000,00 aplicado a uma taxa de Juro simples ao mês, ao fim de 2 anos, 6 meses e 15 dias, gera um montante de R$ 11.830,00. Qual é a taxa de juro simples aplicada?

Temos que 2 anos, 6 meses e 15 dias equivalem a:

$24 + 6 + 0{,}5 = 30{,}5$; 30,5 meses

Pela relação de montante, temos:

$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow 11\,830 = 10\,000 \cdot (1 + i \cdot 30{,}5) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}183 = 1 + i \cdot 30{,}5 \Rightarrow 0{,}183 = i \cdot 30{,}5 \Rightarrow i = 0{,}006$

Logo, a taxa aplicada é 0,6% ao mês.

3. Para comprar um carro, uma pessoa fechou o seguinte acordo: pagar 20% do valor do carro à vista, e o restante, a uma taxa fixa de 0,5% ao mês sobre 80% do valor inicial do carro, dividido em 12 parcelas, que gerariam R$ 10.600,00 de montante. Qual é o valor inicial do carro?

Sendo C igual a 80% do valor inicial do carro, temos:

$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow 10\,600 = C \cdot (1 + 0{,}005 \cdot 12) \Rightarrow$
$\Rightarrow 10\,600 = C \cdot (1{,}06) \Rightarrow C = 10\,000$

Chamando o valor inicial do carro de V, temos:

$\dfrac{100}{80} = \dfrac{V}{10000} \Rightarrow V = 12\,500$

Logo, o valor inicial do carro é R$ 12.500,00.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Qual é a taxa anual de juro simples proporcional à taxa de 1,5% ao mês? 18%
2. João pediu emprestado a Vítor a quantia de R$ 800,00. Como são amigos há muito tempo, decidiram que, ao fim de 12 meses, a dívida seria quitada a uma taxa de Juro simples de 1% ao mês. Qual é o valor que João deverá pagar a Vítor? R$ 896,00
3. Qual é o total de juro simples gerado por um capital de R$ 3.000,00 aplicado durante 8 meses a uma taxa de 2,5% ao mês? R$ 600,00
4. Qual é o montante gerado por um capital de R$ 650,00 aplicado a uma taxa de juro simples de 1,8% ao mês durante o período de 10 meses? R$ 767,00
5. Uma filha pediu ao pai que lhe emprestasse a quantia de R$ 10.000,00 para iniciar um negócio. Depois de 15 meses, a filha pagou o total de R$ 10.750,00 ao pai. Qual é a taxa mensal de juro simples cobrada pelo empréstimo? 0,5%
6. Calcule o valor que deve ser aplicado a uma taxa de juro simples de 0,8% ao mês, durante 36 meses, para que o montante gerado seja igual a R$ 2.434,32. R$ 1.890,00
7. Qual é o montante gerado por um capital de R$ 5.000,00 aplicado a uma taxa de Juro simples de 1,2% ao mês durante 204 dias? (Considere o mês comercial, de 30 dias.) R$ 5.408,00
8. Qual é o tempo mínimo para que um capital aplicado a uma taxa de Juro simples de 4% ao mês seja triplicado? 50 meses.
9. Elabore uma situação que envolva uma compra, na modalidade de juro simples, a uma taxa de 2% ao mês, paga em 10 parcelas mensais. Depois, troque com um colega para que cada um resolva a situação que o outro criou. Resposta pessoal.

Embora, nos exemplos apresentados anteriormente, não tenhamos utilizado a fórmula do cálculo do montante, caso queira, você poderá fazê-lo. Note que essa modalidade é a de Juro simples, isto é, aplicamos a taxa sobre o capital inicial. Existe outra modalidade de juros que veremos no capítulo seguinte.

Juro simples e progressão aritmética

Vimos que o cálculo de juro simples é feito sobre o capital inicial. Assim, quando a taxa é fixa, os juros ao longo de cada período são constantes. A sequência formada pelos montantes correspondentes, nessas condições, é uma progressão aritmética de razão igual ao valor dos juros em cada período de aplicação. Vamos exemplificar.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Como você define uma progressão aritmética?
2. Considere que $a_n = 7n + 2$ representa o termo geral de uma progressão aritmética. Qual é a razão dessa sequência?

Respostas no Manual do Professor.

Rodrigo Bellizzi/Shutterstock.com

Exemplo:

Um empréstimo no valor de R$ 40.000,00 foi feito entre duas pessoas, na modalidade de Juro simples, a uma taxa fixa de 1,5% ao mês. Sabe-se que tal empréstimo foi pago ao fim de 8 meses. Qual é o montante pago conforme as condições estabelecidas?

- Cálculo do montante (com base na fórmula estabelecida anteriormente):

$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$

$M = 40\,000 \cdot (1 + 0{,}015 \cdot 8)$

$M = 40\,000 \cdot 1{,}12 \Rightarrow M = 44\,800$

- Cálculo do montante (utilizando a fórmula do termo geral da progressão aritmética para a sequência formada pelos montantes):

Primeiro, calculamos a razão e o 1º termo (montante ao fim do 1º período):

$$r = 0{,}015 \cdot 40000 = 600$$
$$a_1 = 40000 + 600 = 40600$$

Depois, calculamos o montante utilizando a fórmula do termo geral da progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_8 = a_1 + 7r$$
$$a_8 = 40600 + 7 \cdot 600 \Rightarrow a_8 = 44800{,}00$$

Portanto, o montante pago é R$ 44.800,00.

Observação:
A progressão aritmética formada pelos montantes nesse exemplo apresentado é (40 600, 41 200, 41 800, ..., 44 800)

Juro simples e função afim

Vamos retomar o exemplo apresentado anteriormente a respeito do cálculo do montante. Como a taxa de juros é fixa (1,5% de R$ 40.000,00), o valor dos juros, período a período, pode ser obtido por meio de uma função afim, isto é:

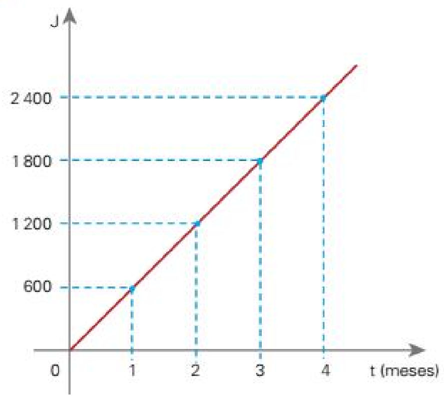
$$J = f(t) = 600 \cdot t \ (t \in \mathbb{N})$$

Assim, atribuindo valores à variável t, obtemos valores para a variável J, ou seja:

t (meses)	**J = *f*(*t*)** (reais)
0	0
1	600
2	1 200
3	1 800
4	2 400

Observações:

1. Caso representemos esses valores em um plano cartesiano, teremos o gráfico formado por pontos alinhados, como a seguir:



2. As grandezas juros (J) e tempo (t), nesse exemplo, são diretamente proporcionais.

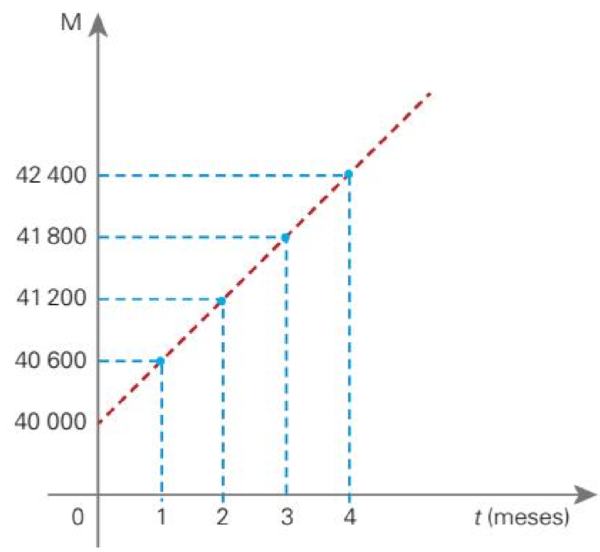
Vamos considerar agora a função que fornece o montante.

A função correspondente ao montante, nesse exemplo, em função do tempo (t) também é uma função afim, ou seja:

$$M = C + J$$
$$M = 40000 + 600 \cdot t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = f(t) = 40000 + 600 \cdot t \ (t \in \mathbb{N})$$

O gráfico também pode ser construído atribuindo-se valores à variável independente t, como sugere a tabela a seguir:

t (meses)	**M = *f*(*t*)** (reais)
0	40 000
1	40 600
2	41 200
3	41 800
4	42 400



Desse modo, também temos o gráfico formado por pontos alinhados.

Exercícios resolvidos

1. João pediu emprestada à irmã a quantia de R$ 5.000,00. Os irmãos combinaram que a taxa de juros seria de 2% ao mês na modalidade de Juro simples. Caso João não pague a dívida, após quantos meses essa dívida chegará ao valor de R$ 7.800,00?

Podemos escrever os valores da dívida como termos de uma PA, na qual a posição do termo representa o valor da dívida:

(5 100, 5 200, 5 300, ..., 7 800)

Temos:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 7800 = 5100 + (n - 1) \cdot 100 \Rightarrow$#

$\Rightarrow n = 28$

Portanto, após 28 meses, a dívida chegará ao valor de R$ 7.800,00.

2. Um produtor vende aos feirantes cogumelos por R$ 30,00 o quilograma. Ele combinou com os feirantes que aumentaria o preço do quilograma 1% ao mês na modalidade de juro simples. Escreva uma função que determine o preço do quilograma do cogumelo x meses após o início dos aumentos de 1% ao mês.

Observe a tabela:

Mês	Preço do quilograma de cogumelos (em reais)
1	$30 + 0{,}01 \cdot 30 = 30{,}3 = 30 + 1 \cdot 0{,}3$
2	$30{,}3 + 0{,}01 \cdot 30 = 30{,}6 = 30 + 2 \cdot 0{,}3$
3	$30{,}6 + 0{,}01 \cdot 30 = 30{,}9 = 30 + 3 \cdot 0{,}3$
⋮	⋮
x	$P = 30 + x \cdot 0{,}3$

Então, o preço do quilograma do cogumelo x meses após o início dos aumentos é dado pela função:

$P(x) = 30 + 0{,}3x$

Exercícios propostos

4. O valor de cada um dos três capitais aplicados é, respectivamente, R$ 2.000,00, R$ 4.000,00 e R$ 5.000,00.

Resolva os exercícios no caderno.

1. Um capital, aplicado a Juro simples, gera montante de R$ 537,50 em 5 meses e R$ 560,00 em 8 meses. Calcule o capital aplicado e a taxa de juros utilizada.
O capital aplicado é R$ 500,00 e a taxa de juros é 1,5%.

2. Um capital foi aplicado por x meses a uma taxa de 2% de Juro simples ao mês, gerando um montante de R$ 3.100,00. Se tivesse sido aplicado por $x + 5$ meses, geraria um montante de R$ 3.350,00. Calcule o capital aplicado e o valor de x. O capital aplicado é R$ 2.500,00 e o valor de x é 12 meses.

3. Roseli adquiriu um televisor que custava R$ 800,00 à vista da seguinte maneira:

- uma entrada no valor de R$ 450,00.
- o restante 2 meses após a compra, no valor de R$ 406,00.

Qual é a taxa mensal de juro simples utilizada no parcelamento? 8%

4. Três capitais são aplicados a Juro simples: o primeiro a uma taxa de 2% ao mês durante 24 meses; o segundo a uma taxa de 2,4% ao mês durante 30 meses; o terceiro a uma taxa de 1,8% ao mês durante 20 meses. Sabendo que o valor do segundo é igual ao dobro do primeiro, que a soma dos três é igual a R$ 11.000,00 e que juntos, esses capitais geraram um montante de R$ 16.640,00; calcule o valor de cada um dos três capitais aplicados.

5. Maria Eduarda aplicou a quantia de R$ 15.000,00 da seguinte maneira:

- a terça parte em fundos de investimentos, a uma taxa de juro simples de 2% ao mês.
- a quinta parte na poupança, a uma taxa de juro simples de 1% ao mês.
- o restante investiu em ações com juro simples de 4% ao mês.

Evidentemente que uma aplicação que oferece um rendimento maior tem maior risco de perdas. Mas considerando que ao fim de 1 ano a economia se manteve estável e todas as taxas de juros não foram alteradas, calcule o montante resgatado por Maria Eduarda após 1 ano. R$ 19.920,00

6. Marina emprestou a quantia de R$ 1.000,00 de uma amiga a uma taxa de 2% de Juro simples ao mês. Para se organizar melhor, fez uma tabela para saber qual será o valor da dívida após certo número de meses, uma vez que não foi estipulado um prazo para a quitação.

Tempo (meses)	Valor da dívida (R$)
1º mês	$1000{,}00 + 0{,}02 \cdot 1000{,}00 = 1020{,}00$
2º mês	$1000{,}00 + 2 \cdot 0{,}02 \cdot 1000{,}00 = 1040{,}00$
3º mês	$1000{,}00 + 3 \cdot 0{,}02 \cdot 1000{,}00 = 1060{,}00$
4º mês	$1000{,}00 + 4 \cdot 0{,}02 \cdot 1000{,}00 = 1080{,}00$
5º mês	$1000{,}00 + 5 \cdot 0{,}02 \cdot 1000{,}00 = 1100{,}00$
⋮	⋮

Após escrever as primeiras linhas dessa tabela, Marina percebeu que os valores da dívida formavam uma progressão aritmética. Dessa maneira, poderia obter qualquer valor utilizando o termo geral da PA, ou seja, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Calcule o valor que Marina deverá pagar após 24 meses. R$ 1.480,00

7. (FGV-SP) João adquiriu um aparelho de som dando uma entrada de R$ 250,00 mais uma parcela de R$ 400,00 dois meses após a compra. Sabendo que o preço à vista do aparelho é de R$ 600,00: a) A taxa é 7% ao mês. b) Aproximadamente 6 meses.

a) qual a taxa de juro simples do financiamento?

b) após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 400,00 para que a taxa de juro simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês?

8. Crie um exercício que envolva a aplicação de um capital com rendimento mensal na modalidade de juro simples. Depois, troque com um colega para que cada um resolva o exercício que o outro criou. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 3

JUROS COMPOSTOS

No capítulo anterior, vimos situações relacionadas a juro simples. Nelas, os juros recaíam somente sobre o capital inicial. Na prática, sabemos que, quando se aplica uma quantia ou se contrai um empréstimo, a modalidade de juros utilizada não é a de juro simples, mas a de juros compostos. Assim, o montante (aplicação financeira ou dívida de um empréstimo), caso não seja pago, aumenta exponencialmente.

Na modalidade de juros compostos, os juros não incidem sobre o capital inicial, mas sobre o saldo devedor.

Vamos considerar a seguinte situação em que os juros incidem sobre o saldo devedor:

Mateus fez um empréstimo bancário no valor de R$ 50.000,00. Combinou com a gerente que pagaria juros de 2% ao mês. Caso não pagasse, seriam cobrados juros sobre juros, isto é, juros compostos. Como Mateus não pagou nada nos 5 primeiros meses, qual é o valor de sua dívida?

- Um procedimento para saber o valor da dívida de Mateus é calcular mês a mês o montante, isto é, o capital acrescido de juros:

$M_1 = 50\,000{,}00 + 0{,}02 \cdot 50\,000{,}00 = 51\,000{,}00$

$M_2 = 51\,000{,}00 + 0{,}02 \cdot 51\,000{,}00 = 52\,020{,}00$

$M_3 = 52\,020{,}00 + 0{,}02 \cdot 52\,020{,}00 = 53\,060{,}40$

$M_4 = 53\,060{,}40 + 0{,}02 \cdot 53\,060{,}40 \cong 54\,121{,}61$

$M_5 = 54\,121{,}61 + 0{,}02 \cdot 54\,121{,}61 \cong 55\,204{,}04$

Note que o capital considerado para calcular M_2 é M_1, para M_3 é M_2, e assim por diante.

Desse modo, a dívida de Mateus é de R$ 55.204,04. O acréscimo de R$ 5.204,04 corresponde aos juros cobrados pelo não pagamento. Como temos juros sobre juros, dizemos que nesse empréstimo é utilizada a modalidade de juros compostos.

Juros compostos

Na situação apresentada anteriormente, os juros gerados em cada período de aplicação (meses, no exemplo) são incorporados ao capital para o cálculo dos juros no período seguinte. Portanto, dizemos que o crescimento do capital é segundo um regime de capitalização composta.

Vamos analisar essas duas modalidades de juros observando o quadro comparativo a seguir, em que são apresentados os cálculos de um empréstimo no valor de R$ 50.000,00 na modalidade de juro simples e na de juros compostos com a mesma taxa de 2% ao mês, ao longo de 5 meses:

Período	Juro simples	Juros compostos
1º mês	51 000,00	51 000,00
2º mês	52 000,00	52 020,00
3º mês	53 000,00	53 060,40
4º mês	54 000,00	54 121,61
5º mês	55 000,00	55 204,04

Os valores da tabela são os montantes que você poderá obter com a calculadora. Percebe-se que, enquanto o cálculo de juro simples é feito apenas em relação ao capital inicial, o de juros compostos é feito sobre o montante do período anterior.

Vamos agora considerar um capital (C), aplicado na modalidade de juros compostos, a uma taxa fixa mensal de i%. Queremos obter uma relação matemática que permita calcular o montante após t meses de aplicação. Observe a seguir que $M_1, M_2, M_3, ..., M_t$ são os montantes após 1 mês, 2 meses, 3 meses, ..., t meses de aplicação:

$M_1 = C + i \cdot C \Rightarrow M_1 = C \cdot (1 + i)$

$M_2 = C \cdot (1 + i) + i \cdot C \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_2 = C \cdot (1 + i)^2$

$M_3 = C \cdot (1 + i)^2 + i \cdot C \cdot (1 + i)^2 = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_3 = C \cdot (1 + i)^3$

$M_4 = C \cdot (1 + i)^3 + i \cdot C \cdot (1 + i)^3 = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_4 = C \cdot (1 + i)^4$

$\vdots$ (t meses)

$M_t = C \cdot (1 + i)^t$

Para facilitar, a relação acima foi obtida considerando a taxa e o período de aplicação na unidade de tempo mês. Essa mesma relação é válida desde que a taxa de juros e o período estejam na mesma unidade de tempo. Assim, de modo geral, temos:

> O montante (M) gerado por um capital (C), que foi aplicado a uma taxa fixa (i), durante t períodos, na modalidade de juros compostos, pode ser calculado pela relação $M_t = C \cdot (1 + i)^t$, em que i e t são expressos na mesma unidade de tempo.

Exemplo:

Qual é o montante correspondente a 6 meses de aplicação da quantia de R$ 50.000,00, na modalidade de juros compostos, a uma taxa fixa mensal de 2%?

- Note que esse exemplo se refere ao mesmo valor que consta no quadro anterior. Para calcular o montante após 6 meses, devemos utilizar a fórmula da relação matemática já citada:

$M_t = C \cdot (1 + i)^t$

$M_6 = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^6$

$M_6 = 50\,000 \cdot 1{,}02^6$

$M_6 \cong 50\,000 \cdot 1{,}1261624 \Rightarrow M_6 \cong 56\,308{,}12$

Portanto, o montante correspondente é de, aproximadamente, R$ 56.308,12.

Observações:

1. Para calcular $1{,}02^6$ numa calculadora simples, digitamos:

1 , 0 2

depois a tecla × e em seguida a tecla = 5 vezes.

2. Na modalidade de juros compostos, os acréscimos sobre o capital (C) são sucessivos com taxas de acréscimos iguais, taxa fixa (*i*). Assim, poderíamos escrever a fórmula para o cálculo do montante da seguinte maneira:

$M_t = C \cdot \underbrace{(1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot \ldots \cdot (1 + i)}_{t \text{ vezes}}$

3. Considerando que as taxas de acréscimos são *i*1, *i*2, *i*3, ..., i_t (não necessariamente iguais), essa relação corresponde a:

$M_t = C \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)$

Exercícios resolvidos

1. Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado, na modalidade de juros compostos, a uma taxa de 10% ao mês.
   a) Qual é o montante dessa aplicação após 4 meses?
   b) Qual é o rendimento dessa aplicação após 4 meses?

   a) $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 10\,000(1 + 0{,}1)^4 =$
   $= 10\,000 \cdot 1{,}4641 = 14\,641$

   Logo, o montante após 4 meses é R$ 14.641,00.

   b) $14\,641 - 10\,000 = 4\,641$

   Portanto, o rendimento após 4 meses é R$ 4.641,00.

2. João comprou um terreno em uma região cuja valorização é 20% a cada ano. Após 4 anos, esse terreno está valendo R$ 103.680,00. Quanto João pagou por esse terreno?

   $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 103\,680 = C \cdot (1 + 0{,}2)^4 \Rightarrow$
   $\Rightarrow 103\,680 = C \cdot 2{,}0736 \Rightarrow C = 50\,000$

   Logo, João pagou R$ 50.000,00 por esse terreno.

3. Em 3 anos, uma dívida aumentou de R$ 3.000,00 para R$ 10.125,00. Considerando que a dívida sofreu correções na modalidade de juros compostos, qual é a taxa anual de juros dessa dívida?

   $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 10\,125 = 3\,000 \cdot (1 + i)^3 \Rightarrow$
   $\Rightarrow 3{,}375 = (1 + i)^3 \Rightarrow 1{,}5 = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}5$

   Portanto, a taxa é 50% ao ano.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Qual é o montante gerado pela aplicação de um capital de R$ 10.000,00, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, durante 3 meses? R$ 10.612,08

2. Em um banco, uma pessoa fez um empréstimo no valor de R$ 40.000,00. A taxa mensal de juros compostos é igual a 1,6%. Se a dívida for paga após 8 meses, qual será o valor total pago? Aproximadamente R$ 45.416,00.

   (Utilize a aproximação $(1{,}016)^8 \cong 1{,}1354$.)

3. Qual é o montante gerado em uma aplicação de R$ 2.000,00, a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês, durante 60 meses? Aproximadamente R$ 3.633,40.

   (Utilize a aproximação $(1{,}01)^{60} \cong 1{,}8167$.)

4. Um capital foi aplicado durante 3 anos, a uma taxa de juros compostos de 30% ao ano, gerando o montante de R$ 10.985,00. Qual foi o capital aplicado? R$ 5.000,00

5. Qual é a taxa mensal, na modalidade de juros compostos, cobrada por um banco se, ao fazer um empréstimo de R$ 8.000,00, o valor total a ser pago após 1 mês é igual a R$ 8.240,00? 3%

6. Se um capital for aplicado a uma taxa de juros compostos de 25% ao ano, ao fim de 4 anos, o montante gerado será menor, igual ou maior que o dobro do capital inicial aplicado? Maior.

7. Uma pessoa deixou de pagar a fatura do cartão de crédito, cujo valor é corrigido a juros compostos. Essa dívida aumentou 33,1% em 3 meses. Calcule a taxa de juros mensais cobrada. 10%

8. Pedro deseja comprar o carro de Paulo, mas ainda não tem dinheiro suficiente. Considerando que o carro custa R$ 25.000,00 e Pedro vai aplicar R$ 22.000,00 em um fundo de investimento que rende 1% ao mês, em 12 meses Pedro conseguirá comprar o carro de Paulo, dispondo apenas do dinheiro aplicado? (Utilize a aproximação $(1{,}01)^{12} \cong 1{,}1268$.) Não.

9. Carlos aplicou um capital a uma taxa de Juro simples de 20% ao ano, durante 3 anos. Se Carlos tivesse aplicado na modalidade de juros compostos, teria recebido, com a mesma taxa, R$ 2.304,00 a mais. Calcule o capital aplicado. R$ 18.000,00

10. No início do ano, as pessoas geralmente ficam em dúvida se é vantajoso, do ponto de vista financeiro, pagar o IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano) à vista, com desconto de 7%, ou em 10 vezes iguais, sem desconto. Considerando que a caderneta de poupança paga 0,6% de juros ao mês, decida se é vantagem pagar à vista ou parcelado, deixando o dinheiro na poupança. (Utilize uma calculadora.) É vantagem pagar à vista.

Orientações e respostas no Manual do Professor.

TEXTOS DA MATEMÁTICA

Atualmente, as pessoas que trabalham no mercado financeiro utilizam calculadoras e também programas especiais em computadores. Assim, as simulações e os cálculos necessários são realizados rapidamente. Porém, nem sempre foi assim. O texto a seguir pretende contar um pouco dessa história.

Os termos relacionados a "depósito", "juros" e "crédito" encontram-se em registros entre os anos 1450 e 1650. Esses termos aparecem como *depositum*, do latim *ponere* (pôr), *juro* (jurar) e *credere* (acreditar).

Em 1618 foi publicada uma segunda edição do trabalho *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, de John Napier, matemático relacionado ao surgimento dos logaritmos. É nesse trabalho que aparece a constante matemática $e = 2,718281...$

Napier teria chegado a essa constante a partir de alguns ensaios referentes ao cálculo de juros compostos. John Napier (barão de Merchiston) nasceu nas proximidades de Edinburg, no ano de 1550. Sempre teve uma vida em meio a conforto, pois, ao contrário de muitos homens considerados importantes para o desenvolvimento da Ciência, era de uma condição financeira muito boa. Apesar de sua condição social, preferia as atividades intelectuais. Teve importantes professores contratados por seu pai e, aos 13 anos de idade, ingressou na Universidade de St. Andrews, onde teve destaque pela sua grande capacidade intelectual.

No ano de 1585, ficou conhecido em toda a Escócia pela invenção de máquinas destinadas à guerra. Eram engenhos utilizados para arremessar bolas de ferro a certas distâncias e com precisões excelentes para a época. Isso parece ter sido motivo de arrependimento, pois estava dando a seus patrícios o poder de destruição. Tornou-se internacionalmente famoso como matemático no ano de 1590, pela descoberta dos logaritmos. Seu achado representava uma colaboração muito grande na resolução de complicados problemas decorrentes da Astronomia. Entre tantos admiradores e seguidores dos estudos e descobertas de Napier encontrava-se Henry Briggs (1561-1630), professor conceituado de Matemática em Oxford. Em 1615, Briggs procurou Napier. Encontraram-se no castelo de Napier, na Escócia, e tiveram daquelas discussões intelectuais: discutiram sobre possíveis modificações no sistema de logaritmos. Um resultado provável dessa discussão teria sido que Briggs ajudou Napier em pelo menos duas obras, publicadas após sua morte: *Logarithmorum chilia prima* (em 1617) e *Arithmetica logarithmica* (em 1624).

O pai de Napier era um homem muito rico e frequentemente arrendava terras e acabava emprestando dinheiro. Como troca pelos seus empréstimos, recebia juros. É aí que entra Napier. Provavelmente pelo fato de estar auxiliando seu pai nos negócios, Napier chegou ao número 2,718281...

Esse texto foi elaborado a partir do livro de Eli Maor, e: a história de um número. Tradução Jorge Calife. Essa obra foi publicada em 2003, pela Editora Record.

QUESTÕES

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em qual obra/trabalho de Napier aparece a constante matemática $e = 2,718281...$?

2. No ano de 1585, como Napier ficou conhecido na Escócia?

3. Qual foi a descoberta, realizada por Napier, que o tornou um matemático internacionalmente famoso? Em que ano isso aconteceu?

Progressão geométrica e logaritmos

No início deste capítulo, vimos como calcular os montantes mensais de um capital (C) aplicado a juros compostos a uma taxa fixa mensal (*i*).

Observe novamente a sequência formada pelos montantes ao longo de *n* meses (ou *t* meses):

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = C \cdot (1+i) \\ M_2 = C \cdot (1+i)^2 \\ M_3 = C \cdot (1+i)^3 \\ M_4 = C \cdot (1+i)^4 \\ \vdots \\ \text{após } n \text{ meses} \\ M_n = C \cdot (1+i)^n \end{array}\right\}$$

Progressão geométrica de razão: $(1 + i)$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Como você define uma progressão geométrica?
2. Considerando que $a_n = 2^{n-1}$ representa o termo geral de uma progressão geométrica. Qual é a razão dessa sequência?

Assim, como os montantes estão em progressão geométrica, poderíamos obtê-los utilizando a fórmula do termo geral da progressão geométrica. Considerando que o primeiro termo dessa sequência corresponde ao montante M_1 e a razão é $(1 + i)$, temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (termo geral da PG)

$M_n = M_1 \cdot (1+i)^{n-1}$

e como $M_1 = C \cdot (1 + i)$ temos:

$M_n = C \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{n-1} \Rightarrow M_n = C \cdot (1+i)^n$

Existem situações relacionadas a juros nas quais precisaremos determinar o tempo de aplicação de uma quantia. Nesses casos, utilizaremos o conhecimento de logaritmos.

Analise a seguir cada um dos exemplos.

Exemplo:

Expresse o tempo (*n*) de uma aplicação em função do montante (M_n) e da taxa de aplicação (*i*) nesse mesmo tempo, isto é, obtenha (*n*) na fórmula do montante.

- Como a calculadora nos fornece logaritmo na base 10, observando propriedades dos logaritmos podemos isolar (*n*), isto é:

$$M_n = C \cdot (1+i)^n$$
$$\downarrow (I)$$
$$\log_{10} M_n = \log_{10} [C \cdot (1+i)^n]$$
$$\downarrow (II)$$
$$\log_{10} M_n = \log_{10} C + \log_{10} (1+i)^n$$
$$\downarrow (III)$$
$$\log_{10} M_n = \log_{10} C + n \cdot \log_{10} (1+i)$$
$$\downarrow (IV)$$
$$\log_{10} M_n - \log_{10} C = n \cdot \log_{10} (1+i)$$
$$\downarrow (V)$$
$$\frac{\log_{10} M_n - \log_{10} C}{\log_{10} (1+i)} = n$$

Observe que, utilizando uma calculadora, podemos determinar o tempo (*n*) de aplicação, conhecendo o montante, o capital inicial e a taxa de aplicação.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Explique cada uma das passagens de (I) a (V) nos cálculos do exemplo anterior.
2. Como a calculadora fornece logaritmo na base *e*, obtenha, no exemplo, o tempo (*n*) de aplicação utilizando apenas logaritmo na base *e*.

Exemplo:

Um capital (C) foi aplicado a uma taxa fixa mensal de 2% na modalidade de juros compostos. Após quantos meses o montante corresponderá ao dobro do capital aplicado?

- Estabelecemos a condição de que o montante será igual ao dobro do capital (C), isto é:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$2 \cdot C = C \cdot (1+0{,}02)^t$$
$$2 = 1{,}02^t$$

- Aplicando logaritmo na base 10 nos dois membros dessa igualdade e utilizando uma calculadora para obter os valores dos logaritmos, temos:

$$\log_{10} 2 = \log_{10} 1{,}02^t$$
$$\log_{10} 2 = t \cdot \log_{10} 1{,}02$$
$$0{,}30103 \simeq t \cdot 0{,}0086 \Rightarrow t \simeq 35$$

Portanto, o capital duplicará em aproximadamente 35 meses a uma taxa fixa de 2% na modalidade de juros compostos.

Equivalência de taxas

Nas situações envolvendo juros compostos que estudamos até aqui, vimos que a taxa (*i*) e o tempo (*t*) estavam na mesma unidade de tempo. Então, se a taxa (*i*) for mensal, o tempo (*t*) será em meses, e, se a taxa (*i*) for anual, o tempo (*t*) será em anos.

Vamos considerar agora exemplos relacionando unidades de tempo diferentes para a taxa (*i*) e o período de tempo (*t*).

Exemplo:

Um investimento a juros compostos rende 2% ao mês. Qual é a taxa anual correspondente?

- Calculamos o montante em função do capital investido (C) a uma taxa mensal de 2%. Ao fim de 12 meses (1 ano), temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$M_t = C \cdot (1+0{,}02)^{12}$$
$$M_t = C \cdot 1{,}02^{12}$$
$$\downarrow \textit{calculadora}: 1{,}02^{12} \simeq 1{,}268$$
$$M_t \simeq C \cdot 1{,}268$$

Note que o capital está multiplicado por 1,268, isto é, aumentou 26,8%.

Portanto, essa é a taxa anual correspondente.

- Outra maneira de fazer esse cálculo é considerar que i_a representa a taxa anual e i_m, a taxa mensal. Assim, aplicando a fórmula para o montante, teremos após 1 ano (12 meses) a seguinte igualdade:

$$C \cdot (1+i_a)^1 = C \cdot (1+i_m)^{12}$$
$$(1+i_a)^1 = (1+0{,}02)^{12}$$
$$1+i_a = 1{,}02^{12}$$
$$1+i_a \simeq 1{,}268 \Rightarrow i_a = 0{,}268 = 26{,}8\%$$

Exemplo:

Analisemos uma aplicação a juros compostos e a uma taxa fixa anual de 20%. Qual é a taxa mensal fixa correspondente?

- Calculamos o montante em função do capital investido (C), a uma taxa anual de 20%. Ao fim de 1 ano, temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$M_t = C \cdot (1+0{,}20)^1$$
$$M_t = C \cdot 1{,}20$$

- Considerando esse mesmo montante resultante da aplicação mensal do mesmo capital (C), a uma taxa (*i*) fixa e desconhecida, temos, ao fim de 12 meses:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$1{,}20 \cdot C = C \cdot (1+i)^{12}$$
$$1{,}20 = (1+i)^{12}$$
$$\sqrt[12]{1{,}20} = 1+i$$
$$\downarrow \textit{calculadora}: \sqrt[12]{1{,}20} \simeq 1{,}0153$$
$$1{,}0153 \simeq 1+i \Rightarrow i \simeq 0{,}0153 \Rightarrow i \simeq 1{,}53\%$$

Portanto, a taxa mensal fixa correspondente é, aproximadamente, 1,53%.

Compras a prazo e financiamentos

As compras a prazo e os financiamentos utilizados para comprar exigem do consumidor um cuidado especial: os juros que são cobrados. Nesse sentido, ao compreender como esses juros são calculados, cabe ao consumidor, não podendo comprar à vista, pesquisar quais são as melhores condições de pagamento, procurando as menores taxas possíveis.

Vamos considerar a seguir duas situações envolvendo compras a prazo e financiamentos. Discuta essas situações com seus colegas e o professor:

1ª situação (cálculo do valor à vista):

Lucas comprou um computador em 3 parcelas iguais, sem entrada, no valor de R$ 800,00 cada parcela. A loja informou que os juros compostos que estavam sendo financiados nessa compra a prazo eram de 4% ao mês.

Como podemos determinar o preço à vista desse computador?

- Vamos utilizar um esquema em que os números 1, 2 e 3 representam os meses de pagamento das parcelas de R$ 800,00:

- Considerando que o pagamento da primeira prestação, isto é, 800 reais, corresponde ao montante do valor V_1 após 1 mês a juros compostos de 4%, temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$800 = V_1 \cdot (1+0{,}04)^1$$
$$\frac{800}{1{,}04} = V_1$$

- Considerando que o pagamento da segunda prestação, isto é, 800 reais, corresponde ao montante do valor V_2 após 2 meses a juros compostos de 4%, temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$800 = V_2 \cdot (1+0{,}04)^2$$
$$\frac{800}{1{,}04^2} = V_2$$

- Considerando que o pagamento da terceira prestação, isto é, 800 reais, corresponde ao montante do valor V_3 após 3 meses a juros compostos de 4%, temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$800 = V_3 \cdot (1+0{,}04)^3$$
$$\frac{800}{1{,}04^3} = V_3$$

- Assim, para saber o valor (V) à vista do computador, temos:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$V = \frac{800}{1{,}04} + \frac{800}{1{,}04^2} + \frac{800}{1{,}04^3}$$
$$V \simeq 769{,}23 + 739{,}64 + 711{,}20$$
$$V \simeq 2220{,}07$$

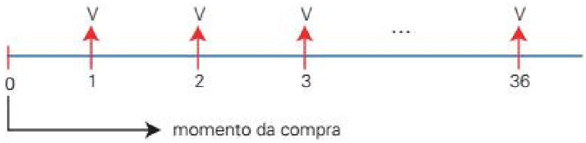
Portanto, o valor à vista desse computador é R$ 2.220,07.

Observação:
Na situação analisada, os valores V_1, V_2 e V_3 representam os valores atuais (tempo zero) das parcelas. Também é comum dizer que são os valores presentes das parcelas.

2ª situação (cálculo do valor das parcelas):

Um automóvel zero quilômetro foi anunciado nas seguintes condições de pagamento: à vista, R$ 70.000,00, ou a prazo, em 36 parcelas iguais, sem entrada, com juros compostos mensais de 1%. Como podemos descobrir o valor de cada parcela?

Novamente, utilizaremos um esquema em que os números 1, 2, 3, ... e 36 representam os meses de pagamentos das parcelas fixas no valor V:



- Considerando que o pagamento da primeira parcela, isto é, V reais, corresponde ao montante de um capital V_1 (valor à vista) após 1 mês a juros compostos de 1%, temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$V = V_1 \cdot (1+0{,}01)^1$$
$$\frac{V}{1{,}01} = V_1$$

- Considerando que o pagamento da segunda parcela, isto é, V reais, corresponde ao montante de um capital V_2 (valor à vista) após 2 meses a juros compostos de 1%, temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$V = V_2 \cdot (1+0{,}01)^2$$
$$\frac{V}{1{,}01^2} = V_2$$

- Considerando que o pagamento da terceira parcela, isto é, V reais, corresponde ao montante de um capital V_3 (valor à vista) após 3 meses a juros compostos de 1%, temos:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$V = V_3 \cdot (1+0{,}01)^3$$
$$\frac{V}{1{,}01^3} = V_3$$

- Analogamente, calculamos os demais valores até chegarmos na 36ª parcela:

$$M_t = C \cdot (1+i)^t$$
$$V = V_{36} \cdot (1+0{,}01)^{36}$$
$$\frac{V}{1{,}01^{36}} = V_{36}$$

- Como sabemos o preço à vista do automóvel, podemos agora calcular o valor (V) de cada parcela:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_{36} = 70000$$
$$\frac{V}{1{,}01} + \frac{V}{1{,}01^2} + \frac{V}{1{,}01^3} + ... + \frac{V}{1{,}01^{36}} = 70000$$
$$V \cdot \left(\frac{1}{1{,}01} + \frac{1}{1{,}01^2} + \frac{1}{1{,}01^3} + ... + \frac{1}{1{,}01^{36}} \right) = 70000$$

Nesta última expressão, a adição indicada entre parênteses corresponde à soma dos termos de uma progressão geométrica, cuja relação é $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1}$.

Então, podemos escrever:

$$V \cdot \left(\frac{\frac{1}{1{,}01^{36}} \cdot \frac{1}{1{,}01} - \frac{1}{1{,}01}}{\frac{1}{1{,}01} - 1} \right) = 70000$$

$$V \cdot \left(\frac{\frac{1 - 1{,}01^{36}}{1{,}01^{37}}}{\frac{1-1{,}01}{1{,}01}} \right) = 70000$$

$$V \cdot \left(\frac{1-1{,}01^{36}}{1{,}01^{37}} \right) = 70000 \cdot \left(\frac{1-1{,}01}{1{,}01} \right)$$

$$V \cdot \left(\frac{1-1{,}01^{36}}{1{,}01^{36}} \right) = 70000 \cdot (1-1{,}01)$$

Utilizando uma calculadora, temos $1{,}01^{36} \simeq 1{,}431$. Substituindo na expressão apresentada na linha anterior:

$$V \cdot \left(\frac{1-1{,}431}{1{,}431} \right) \simeq 70000 \cdot (-0{,}01)$$

$$V \cdot (-0{,}301) \simeq -700 \Rightarrow V \simeq 2\,325{,}58$$

Portanto, o valor de cada parcela é R$ 2.325,58

Observação:

Na situação apresentada, os valores $V_1, V_2, V_3, ..., V_{36}$ representam os **valores futuros** das parcelas.

Exercícios resolvidos

1. Um capital foi aplicado a uma taxa de juros compostos de 3% ao mês. Qual é o tempo necessário para que esse capital dobre de valor? (Utilize $\log 2 \cong 0{,}301$ e $\log 1{,}03 \cong 0{,}013$.)

$M = C\,(1 + i)^t \Rightarrow 2C = C\,(1 + 0{,}03)^t \Rightarrow 2 = 1{,}03^t$

Aplicando log nos dois membros dessa igualdade, temos:

$$\log 2 = \log 1{,}03^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}03} \cong \frac{0{,}301}{0{,}013} \cong 23{,}15$$

Portanto, em aproximadamente 23 meses, esse capital vai duplicar.

2. Gustavo aplicou R$ 100.000,00 em ações com rentabilidade de 1% ao mês, na modalidade de juros compostos. Depois de n meses, Gustavo resgatou R$ 150.000,00. Considerando que não houve depósito nem retirada nessa aplicação, calcule o valor de n. (Utilize $\log 1{,}5 \cong 0{,}1761$ e $\log 1{,}01 \cong 0{,}0043$.)

$M = C\,(1 + i)^t \Rightarrow 150\,000 = 100\,000\,(1 + 0{,}01)^t \Rightarrow 1{,}5 = 1{,}01^t$

Aplicando log nos dois membros dessa igualdade, temos:

$$\log 1{,}5 = \log 1{,}01^t \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}01} \simeq \frac{0{,}1761}{0{,}0043} \simeq 40{,}95$$

Logo, o valor de n é aproximadamente 41.

3. Roberto decidiu investir R$ 1.000,00 em um tipo de ação de risco com valorização mensal de 8% ao mês, até obter um montante de R$ 4.000,00. Por quanto tempo é necessário que esse dinheiro fique investido? (Utilize $\log 2 \cong 0{,}30$ e $\log 3 \cong 0{,}48$.)

$M = C\,(1 + i)^t \Rightarrow 4000 = 1\,000\,(1 + 0{,}08)^t \Rightarrow 4 = 1{,}08^t$

Aplicando log nos dois membros dessa igualdade, temos:

$$\log 4 = \log 1{,}08^t \Rightarrow t = \frac{\log 4}{\log 1{,}08} = \frac{\log 2^2}{\log 108 - \log 100} =$$

$$\frac{2 \log 2}{\log 3^3 + \log 2^2 - \log 10^2} \cong \frac{2 \cdot 0{,}30}{3 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}30 - 2} \cong$$

$$\cong \frac{0{,}60}{0{,}04} = 15$$

Sendo assim, é necessário que esse dinheiro fique investido por, aproximadamente, 15 meses.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Qual é o tempo mínimo necessário para que um capital C aplicado a uma taxa de juros compostos de 20% ao ano dobre de valor? (Utilize as aproximações $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e $\log_{10} 1{,}2 \cong 0{,}08$.) Aproximadamente 3 anos e 9 meses.
2. Um apartamento foi comprado por R$ 150.000,00. Considerando que o valor de mercado desse apartamento aumenta 12% ao ano, após quanto tempo esse valor será igual a R$ 300.000,00? (Utilize $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e $\log_{10} 1{,}12 \cong 0{,}05$.) Aproximadamente 6 anos.
3. Em que prazo um capital de R$ 3.000,00 acumula um montante de R$ 13.950,00 a uma taxa efetiva de 15% ao mês? (Utilize $\log 4{,}65 \cong 0{,}667$ e $\log 0{,}061$.) Aproximadamente 11 meses.
4. Um capital foi aplicado a uma taxa de 3% ao ano. Quanto tempo demora para que esse capital triplique de valor? (Utilize $\log 3 \cong 0{,}477$ e $\log 1{,}03 \cong 0{,}013$.) Aproximadamente 37 meses.
5. Uma pessoa fez um empréstimo no valor de R$ 40.000,00 e quitou essa dívida com um único pagamento de R$ 48.760,00. Quantos meses essa pessoa demorou para pagar se a dívida aumentava 2% ao mês? (Utilize $\log 1{,}219 \cong 0{,}0860$ e $\log 1{,}02 \cong 0{,}0086$.) Aproximadamente 10 meses.
6. Quanto tempo é necessário para resgatar R$ 50.000,00 de uma aplicação de R$ 25.000,00 com rendimento de 4% ao mês? (Utilize $\log 2 \cong 0{,}301$ e $\log 13 \cong 1{,}114$.) Aproximadamente 18 meses.
7. Felipe empresta R$ 4.000,00 para Ricardo, com juros de 10% ao mês. Após x meses o valor da dívida é R$ 6.440,00. Se não houve nenhum pagamento, calcule o valor de x. (Utilize $\log 1{,}61 \cong 0{,}207$ e $\log 1{,}1 \cong 0{,}041$.) Aproximadamente 5 meses.
8. Ricardo tem um total de R$ 2.000,00. Ele pretende fazer uma viagem daqui a 12 meses que custa R$ 3.000,00. Se Ricardo aplicar os R$ 2.000,00 em ações com rendimento de 3,5% ao mês, ele terá o dinheiro necessário para fazer essa viagem? (Utilize $\log 1{,}035 \cong 0{,}015$ e $\log 1{,}5 \cong 0{,}176$.) Sim.
9. Um capital de R$ 100.000,00 é depositado em uma poupança com rendimento de 0,6% ao mês. Sem considerar movimentações e impostos, quantos meses são necessários para que o montante seja R$ 200.000,00? (Utilize $\log 2 \cong 0{,}3010$ e $\log 1{,}006 \cong 0{,}0026$.) Aproximadamente 116 meses.
10. Elabore um problema de Matemática Financeira envolvendo os seguintes dados: C = R$ 10.000,00 e $t = 6$ meses. Depois, troque com um colega para que cada um resolva o problema que o outro criou. Resposta pessoal.

Algumas conclusões

Pense possíveis respostas para as questões a seguir. Essas questões abrangem o estudo de Matemática Financeira. Caso sinta alguma dificuldade, sugerimos que retome os conceitos principais estudados até aqui.

Questões:

1. Quando é que duas razões numéricas correspondem a uma proporção?

2. Qual é a condição para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais?

3. Qual é a condição para que duas grandezas sejam inversamente proporcionais?

4. O dobro de um número, percentualmente, representa quanto por cento a mais que esse número?

5. Multiplicar um número por 0,23 é o mesmo que calcular quanto por cento desse número?

6. Dois aumentos sucessivos de 10% correspondem a um único aumento de quanto por cento?

7. Em qual modalidade de juros os montantes crescem em progressão aritmética? E em progressão geométrica?

8. Qual é a relação matemática que permite calcular o montante (M) de um capital (C), que foi aplicado a uma taxa de i%, na modalidade de juros compostos, ao longo de t meses?

9. Uma taxa mensal fixa de 1% a juros compostos equivale a uma taxa anual de 12%?

10. Em qual modalidade de juros o montante é calculado sempre sobre o capital inicial?

Troque ideias com seus colegas e o professor. Comente suas respostas e ouça as de seus colegas. Juntos, façam uma lista das dificuldades que tiveram e descubram os assuntos que precisam ser retomados.

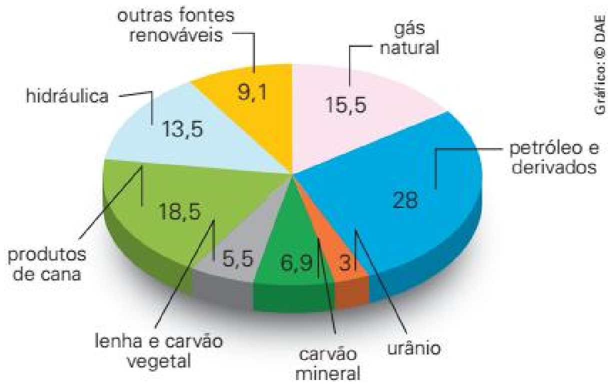
Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (UFPE) O professor Cláudio prestou um serviço de consultoria pedagógica. Sabendo-se que sobre o valor bruto a receber incidiram os descontos de 11% do INSS (Instituto Nacional de Seguridade Nacional) e 7,5% do IRPF (Imposto de Renda Pessoa Física), e que o valor descontado de INSS foi de R$ 105,00 a mais que o IRPF, qual o valor líquido recebido por Cláudio?

a) 2.295 reais.
b) 2.445 reais.
c) 2.505 reais.
d) 2.555 reais.
e) 2.895 reais.

2. (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe, em porcentagem, a previsão da oferta de energia no Brasil em 2030, segundo o Plano Nacional de Energia.



Segundo o plano, em 2030, a oferta total de energia do país irá atingir 557 milhões de tep (toneladas equivalentes de petróleo). Nesse caso, podemos prever que a parcela oriunda de fontes renováveis, indicada em azul na figura, equivalerá a:

a) 178,240 milhões de tep.
b) 297,995 milhões de tep.
c) 353,138 milhões de tep.
d) 259,562 milhões de tep.

3. (Uerj) No Brasil, o imposto de renda deve ser pago de acordo com o ganho mensal dos contribuintes, com base em uma tabela de descontos percentuais. Esses descontos incidem, progressivamente, sobre cada parcela do valor total do ganho, denominadas base de cálculo, de acordo com a tabela a seguir.

Base de cálculo aproximada (R$)	Desconto (%)
até 1.900,00	isento
de 1.900,01 até 2.800,00	7,5
de 2.800,01 até 3.750,00	15,0
de 3.750,01 até 4.665,00	22,5
acima de 4.665,00	27,5

Segundo a tabela, um ganho mensal de R$ 2.100,00 corresponde a R$ 15,00 de imposto.
Admita um contribuinte cujo ganho total, em determinado mês, tenha sido de R$ 3.000,00.
Para efeito do cálculo progressivo do imposto, deve-se considerar esse valor formado por três parcelas: R$ 1.900,00, R$ 900,00 e R$ 200,00.

O imposto de renda, em reais, que deve ser pago nesse mês sobre o ganho total é aproximadamente igual a:

a) 55
b) 98
c) 128
d) 180

4. (Uerj) Um índice de inflação de 25% em um determinado período de tempo indica que, em média, os preços aumentaram 25% nesse período. Um trabalhador que antes podia comprar uma quantidade x de produtos, com a inflação e sem aumento salarial, só poderá comprar agora uma quantidade y dos mesmos produtos, sendo $y < x$.

Com a inflação de 25%, a perda do poder de compra desse trabalhador é de:

a) 20%
b) 30%
c) 50%
d) 80%

5. (Uerj) Na compra de um fogão, os clientes podem optar por uma das seguintes formas de pagamento:

- à vista, no valor de R$ 860,00;
- em duas parcelas fixas de R$ 460,00, sendo a primeira paga no ato da compra e a segunda 30 dias depois.

A taxa de juros mensal para pagamentos não efetuados no ato da compra é de:

a) 10%
b) 12%
c) 15%
d) 18%

6. (Uece) Duas grandezas positivas x e y são inversamente proporcionais se existe uma correspondência bijetiva entre os valores de x e os valores de y e um número constante positivo k tal que, se o valor y é o correspondente do valor x então $y \cdot x = k$. Nestas condições, se o valor $y = 6$ é o correspondente ao valor $x = 25$, então o valor y que corresponde ao valor $x = 15$ é

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14

7. (Ufes) Um supermercado vende dois tipos de sabão líquido para lavagem de roupas: o sabão C, mais concentrado, e o sabão D, mais diluído. Para cada lavagem de roupas com o sabão C, Sofia gasta 30 mℓ do produto; usando o sabão D, ela gasta 100 mℓ. O sabão C é vendido apenas em vasilhames de 600 mℓ, custando 12 reais cada vasilhame. O sabão D é vendido apenas em vasilhames de 3 litros, custando 24 reais cada vasilhame. Na compra de n vasilhames do sabão D, o supermercado dá um desconto de $3n\%$ no preço de cada vasilhame desse sabão, quando $1 < n \leq\leq 10$. Quando $n > 10$, esse desconto é de 30%. Sofia resolve comprar n vasilhames do sabão D. Calcule:

a) quantos centavos de reais Sofia gastaria com o sabão C em cada lavagem de roupas, se o comprasse; R$ 0,60

b) o valor mínimo de n para que Sofia gaste menos reais com o sabão D do que com o sabão C, em cada lavagem de roupas; $n = 9$

c) o número máximo de vasilhames do sabão D que Sofia pode comprar com 128 reais. $n = 6$

8. (Unicamp-SP) A tabela abaixo informa alguns valores nutricionais para a mesma quantidade de dois alimentos, A e B.

Alimento	A	B
Quantidade	20 g	20 g
Valor energético	60 kcal	80 kcal
Sódio	10 mg	20 mg
Proteína	6 g	1 g

Considere duas porções isocalóricas (de mesmo valor energético) dos alimentos A e B. A razão entre a quantidade de proteína em A e a quantidade de proteína em B é igual a:

a) 4. b) 6 c) 8 d) 10

9. (FGV-SP) Sendo x y e z números reais tais que $\frac{y}{z} = 7$ e $\frac{x}{y} = 3$, o valor de $\frac{x-y}{y-z}$ é igual a:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{7}{3}$

10. (PUC-SP) Três irmãs – Jasmim, Flora e Gardênia – reservaram para as compras de Natal as quantias de 600 reais, 360 reais e 120 dólares, respectivamente. Antes de sair às compras, as três fizeram o seguinte acordo: o total de reais reservados por Jasmim e Flora seria igualmente dividido entre as três, enquanto que, os dólares reservados por Gardênia seriam totalmente repassados a Jasmim e Flora em partes proporcionais às quantias que cada uma delas tinha inicialmente.

Considerando que o acordo foi cumprido, quantos dólares Jasmim recebeu a mais do que Flora? Alternativa **c**.

a) 20 c) 30
b) 25 d) 35 e) 40

11. (Uema) Uma empresa fabricante de suco que envasava o produto em frascos de vidro passou a fazer o envasamento em um novo vasilhame plástico com capacidade de $\frac{2}{3}$ do frasco anterior.

A lanchonete revendedora enche de suco um copo com capacidade de $\frac{1}{5}$ do frasco de vidro.

A quantidade de copos de suco (inteiro + fração) que a lanchonete obtém com um frasco do novo vasilhame é igual a

a) 1 copo e $\frac{2}{3}$

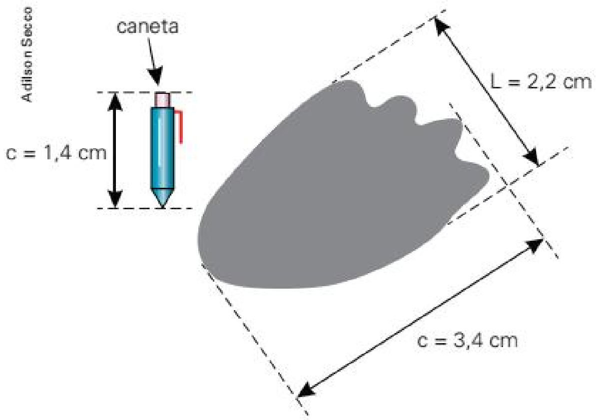
b) 2 copos e $\frac{1}{3}$

c) 2 copos e $\frac{2}{3}$

d) 3 copos e $\frac{1}{3}$

e) 3 copos e $\frac{2}{3}$

12. (Enem) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C), da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

a) 4,9 e 7,6.

b) 8,6 e 9,8.

c) 14,2 e 15,4.

d) 26,4 e 40,8.

e) 27,5 e 42,5.

13. (Enem) A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma "caneta" na qual pode ser inserido um refil contendo 3 mℓ de insulina, como mostra a imagem.


Radu Razvan/Shutterstock.com

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01 mℓ. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar.

A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite.

Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

a) 25
b) 15
c) 13
d) 12
e) 8

14. (PUC-RJ) Os sócios de uma empresa decidem dividir o lucro de um determinado período, pelos seus três gerentes, de modo que cada um receba uma parte diretamente proporcional ao seu tempo de serviço.

Sabendo que o lucro que será dividido é de R$ 18.500,00 e que o tempo de serviço de cada um deles é, respectivamente 5, 7 e 8 anos, podemos afirmar que o mais antigo na empresa receberá:

a) R$ 4.625,00
b) R$ 5.125,00
c) R$ 6.475,00
d) R$ 7.400,00
e) R$ 9.250,00

15. (FGV-SP) Um investidor aplicou certa quantia, em reais, à taxa de juro composto de 1% ao mês. Neste problema, desprezando qualquer tipo de correção monetária devido à inflação, responda às perguntas a seguir.

a) Neste investimento, após 2 meses, seria possível resgatar o valor aplicado com lucro de R$ 4.200,00. Calcule o valor inicialmente aplicado. R$ 200.000,00

b) No investimento indicado, é possível resgatar um montante de 4 vezes o capital inicialmente aplicado em 139,3 meses. Caso o cálculo fosse feito adotando-se $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 202 = 2{,}305$, que são logaritmos com apenas 3 casas decimais de aproximação, seria obtido um valor aproximado de t anos. Chamando de $E = t - 139{,}3$ ao erro cometido no cálculo devido ao uso de apenas 3 casas decimais de aproximação nos logaritmos indicados, calcule E. 11,2 meses.

16. (UERJ – R2016) No ano letivo de 2014, em uma turma de 40 alunos, 60% eram meninas. Nessa turma, ao final do ano, todas as meninas foram aprovadas e alguns meninos foram reprovados. Em 2015, nenhum aluno novo foi matriculado, e todos os aprovados confirmaram suas matrículas. Com essa nova composição, em 2015, a turma passou a ter 20% de meninos. O número de meninos aprovados em 2014 foi igual a:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 8

17. (FGV-SP) Dos animais de uma fazenda, 40% são bois, 30% são vacas, e os demais são caprinos. Se o dono da fazenda vende 30% dos bois e 70% das vacas, o total de animais da fazenda se reduz em:

a) 30%
b) 33%
c) 45%
d) 60%
e) 66%

DESAFIO

(Unifesp) O carro modelo *flex* de Cláudia, que estava com o tanque vazio, foi totalmente abastecido com 20% de gasolina comum e 80% de etanol. Quando o tanque estava com o combustível em 40% de sua capacidade, Cláudia retornou ao posto para reabastecimento e completou o tanque apenas com gasolina comum.

a) Após o reabastecimento, qual a porcentagem de gasolina comum no tanque? 68%

b) No primeiro abastecimento, o preço do litro de gasolina comum no posto superava o de etanol em 50% e, na ocasião do reabastecimento, apenas em 40%. Sabe-se que houve 10% de aumento no preço do litro de etanol, do primeiro para o segundo abastecimento, o que fez com que o preço da gasolina comum superasse o do etanol em R$ 0,704 na ocasião do reabastecimento. Calcule o preço do litro de gasolina comum na ocasião do primeiro abastecimento. R$ 2,40

EXPLORANDO HABILIDADES E COMPETÊNCIAS

Respostas no Manual do Professor.

O juro simples possui um valor fixo a ser cobrado por período proporcional ao valor que foi emprestado. Quando o empréstimo não é pago, o valor devido aumenta linearmente.

Os juros compostos, entretanto, são calculados não só em relação ao valor emprestado como também em relação ao tempo que se demora para quitar a dívida. Esse tipo de juros é o mais utilizado em transações financeiras.

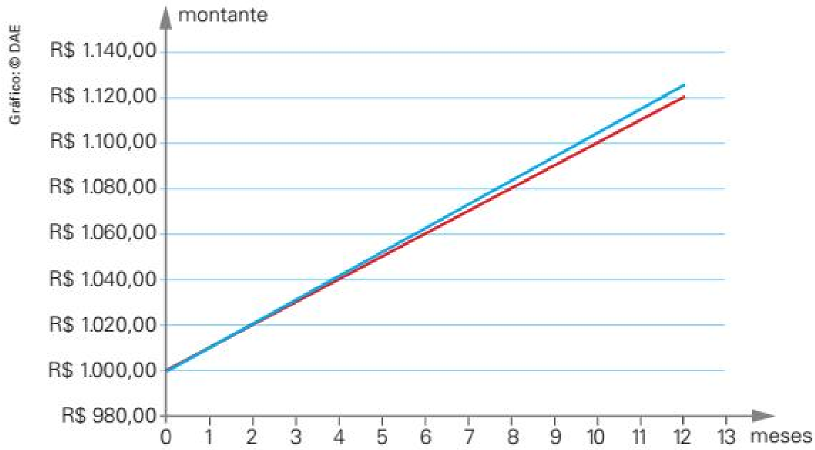
Assim, quando você combina um valor de juros mensais, ao fim de 1 mês o valor da dívida é o valor emprestado mais o valor dos juros daquele mês. Se ao fim de um mês não for feito nenhum pagamento, no mês seguinte os juros serão maiores, já que são calculados proporcionalmente ao valor total devido.

Veja abaixo alguns exemplos de simulações de transações financeiras envolvendo juros:

Exemplo 1:

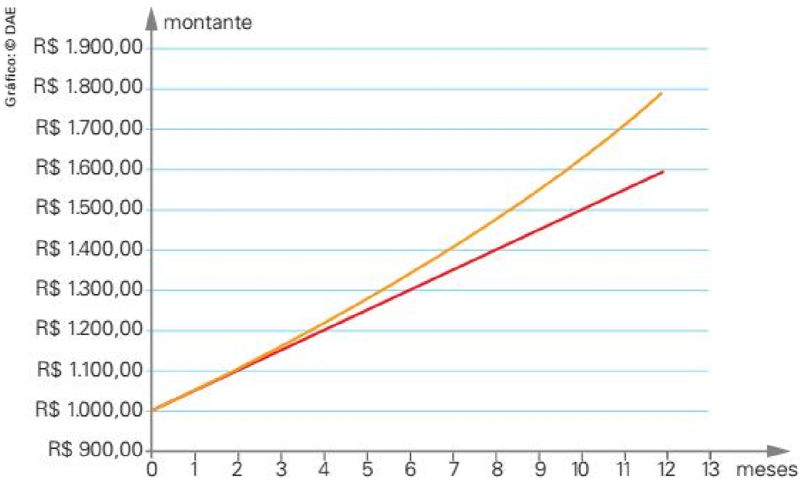
Neste exemplo, estamos comparando o acréscimo mensal sobre um capital de R$ 1.000,00. No gráfico, a linha vermelha representa o valor mensal devido quando o cálculo é feito com juro simples. A linha azul representa esse valor quando o cálculo é feito com juros compostos.

Mês	Valor com juros compostos	Valor com juro simples
0	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
1	R$ 1.010,00	R$ 1.010,00
2	R$ 1.020,10	R$ 1.020,00
3	R$ 1.030,30	R$ 1.030,00
4	R$ 1.040,60	R$ 1.040,00
5	R$ 1.051,01	R$ 1.050,00
6	R$ 1.061,52	R$ 1.060,00
7	R$ 1.072,14	R$ 1.070,00
8	R$ 1.082,86	R$ 1.080,00
9	R$ 1.093,69	R$ 1.090,00
10	R$ 1.104,62	R$ 1.100,00
11	R$ 1.115,67	R$ 1.110,00
12	R$ 1.126,83	R$ 1.120,00



Exemplo 2:

Este outro exemplo é similar ao anterior, mas com uma taxa de juros maior. No gráfico, a linha vermelha ainda representa o cálculo feito com juro simples. A linha amarela representa esse valor quando o cálculo é feito com juros compostos.



Mês	Valor com juros composto	Valor com juro simples
0	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
1	R$ 1.050,00	R$ 1.050,00
2	R$ 1.102,50	R$ 1.100,00
3	R$ 1.157,63	R$ 1.150,00
4	R$ 1.215,51	R$ 1.200,00
5	R$ 1.276,28	R$ 1.250,00
6	R$ 1.340,10	R$ 1.300,00
7	R$ 1.407,10	R$ 1.350,00
8	R$ 1.477,46	R$ 1.400,00
9	R$ 1.551,33	R$ 1.450,00
10	R$ 1.628,89	R$ 1.500,00
11	R$ 1.710,34	R$ 1.550,00
12	R$ 1.795,86	R$ 1.600,00

Questões e investigações

Resolva os exercícios no caderno.

Com base nos gráficos e nas tabelas, responda às questões.

1. Qual é a taxa de juros aplicada no exemplo 1? E no exemplo 2?

2. Para interpretar as tabelas, considere que a linha zero é o momento presente, a linha 1 é o valor devido após 1 período e assim por diante. Considerando períodos mensais, no caso do exemplo 2, podemos supor que uma pessoa que tenha utilizado um empréstimo de R$ 1.000,00 no dia 5 de março, a juros compostos, deverá pagar R$ 1.795,86 no mesmo dia do ano seguinte. Suponha então que uma pessoa exatamente nessa situação pague um valor de R$ 1.000,00 após 9 períodos. Nesse caso, quanto ela deverá pagar no dia 5 de março do ano seguinte?

3. Com base na tabela do exemplo 1, elabore duas questões similares à questão anterior: uma questão deve envolver Juro simples e outra, juros compostos. Depois, resolva as questões elaboradas por você.

4. Considere a seguinte situação: uma pessoa pegou emprestado do banco um valor de R$ 1.000,00 a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Após um mês, recebe um valor de R$ 2.000,00 que ela pode aplicar a uma taxa de 1% ao mês. Ela precisa escolher entre três maneiras diferentes de utilizar esse dinheiro:

   a) Pagar o empréstimo (com os juros de 1 mês) e aplicar o restante.

   b) Aplicar o valor e pagar o empréstimo depois de 2 meses (com os juros de 3 meses).

   c) Pagar metade do valor devido, aplicar o restante e, após 1 mês, terminar de pagar o empréstimo.

   Em qual das três opções a pessoa terminará o terceiro mês com mais dinheiro?

UNIDADE 2

TRIGONOMETRIA

A busca pelo desconhecido e a necessidade de desvendar nosso mundo parecem ser os grandes motivadores para o desenvolvimento tanto da Astronomia como da Trigonometria.

Embora a Trigonometria tenha suas raízes no cálculo de distâncias inacessíveis, ela está intimamente ligada aos fenômenos periódicos. Nesta unidade, ampliamos nosso conhecimento desta área tão importante para a Matemática: a Trigonometria.

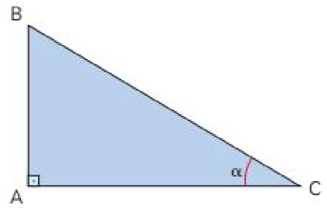
Coleção particular/Look and Learn/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Hiparco de Niceia (190 a.C.-120 a.C.) no Observatório de Alexandria.

CAPÍTULO

4 TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Você já estudou as chamadas razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.

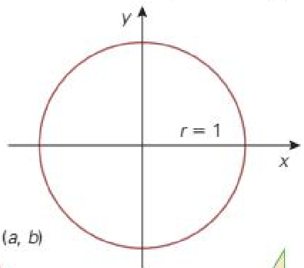


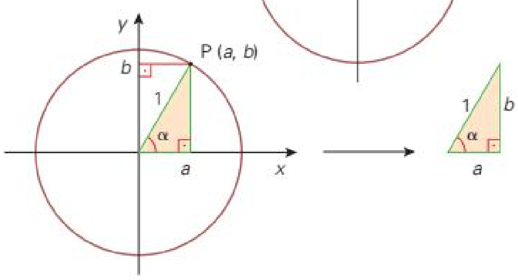
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Note o que acontece quando temos uma circunferência de raio (r) unitário e com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Ao localizar nessa circunferência um ponto P (*a*, *b*) e considerar o triângulo retângulo destacado, temos:





Nesse triângulo retângulo, vamos considerar as razões trigonométricas seno e cosseno para o ângulo agudo α:

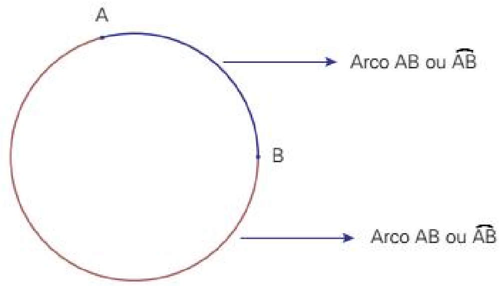
- $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \text{sen}\,\alpha$ (A **ordenada** do ponto P é o valor do seno do ângulo α)
- $\cos\alpha = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\alpha$ (A **abcissa** do ponto P é o valor do cosseno do ângulo α)

Portanto, o ponto P tem coordenadas $P(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$.

Esse procedimento de relacionar as coordenadas dos pontos de uma circunferência de raio unitário, cujo centro é a origem do sistema de coordenadas cartesianas, com o seno e o cosseno dos respectivos ângulos, permitirá, como veremos, estudar as razões trigonométricas como funções trigonométricas. Iniciamos esse estudo neste capítulo.

Arcos e ângulos

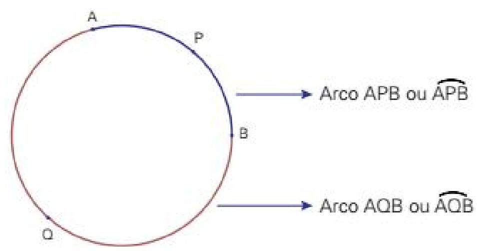
Na circunferência representada a seguir, os pontos A e B estão delimitando duas partes. Cada uma dessas duas partes, incluindo os dois pontos, é denominada **arco da circunferência**.



Caso os pontos A e B coincidam, também teremos dois arcos AB: um arco nulo e outro arco de uma volta.

Observações:

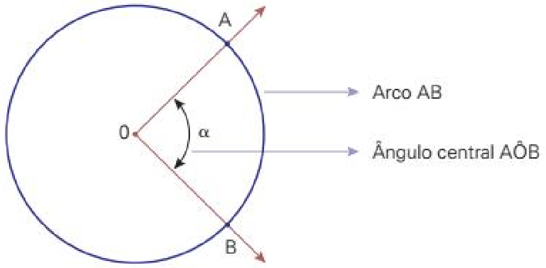
1. Quando os dois pontos A e B são distintos, eles determinam dois arcos AB. Para diferenciar um do outro, consideramos um ponto em cada um deles, conforme é indicado na figura a seguir.



Figuras: © DAE

2. Neste nosso estudo, vamos indicar um arco apenas pelos dois pontos extremos e, quando isso acontecer, estaremos nos referindo ao menor dos arcos com extremidades nesses pontos.

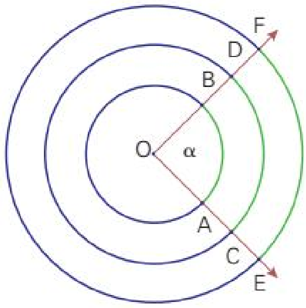
A todo arco em uma circunferência podemos associar um ângulo com o vértice no centro dessa circunferência. Para determinar esse ângulo, que denominamos ângulo central, traçamos as semirretas OA e OB ou $\left(\overrightarrow{OB} \text{ e } \overrightarrow{OA}\right)$:



A medida de um arco de uma circunferência é a medida do ângulo central correspondente. Assim, de acordo com a figura anterior, podemos representar:

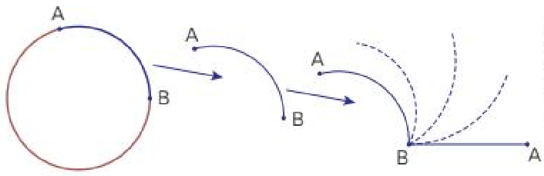
- medida do ângulo central $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ med(AÔB) $= \alpha$
- medida do arco AB $\longrightarrow$ med($\overset{\frown}{AB}$) $= \alpha$

Note, por exemplo, que a figura a seguir é formada por três circunferências concêntricas. Em cada uma dessas circunferências, foi marcado um arco cuja medida é α, isto é, os três arcos correspondem ao mesmo ângulo central de medida α. Dizemos que os arcos AB, CD e EF são de mesma medida.



Contudo, o que vai diferenciar esses arcos é o comprimento. São três arcos de comprimentos diferentes. O comprimento de um arco é uma medida linear do arco, isto é, utilizamos as unidades de medida de comprimento, como centímetro, metro, entre outras.

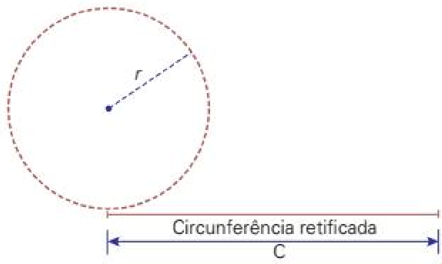
Imagine um arco sendo estendido (retificado) até que possamos obter um segmento de reta, como sugere a figura a seguir. A medida desse segmento será o comprimento do arco.



Comprimento de um arco

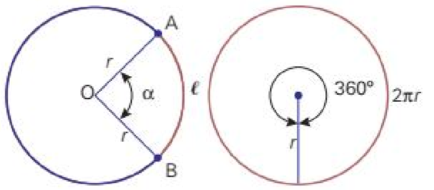
Vamos recordar como obter o comprimento de um arco.

Uma circunferência é um arco de uma volta cujo comprimento pode ser obtido pela fórmula $C = 2\pi r$, na qual representa o raio da circunferência e π o número irracional correspondente à aproximação racional 3,14.



Com base no comprimento de uma circunferência, podemos obter o comprimento de um arco, desde que saibamos a medida em grau do ângulo central correspondente.

Utilizando proporções, podemos obter a medida do comprimento de um arco (ℓ), conhecendo a medida do ângulo central (α) e a medida do raio da circunferência (r). A proporção é a razão entre a medida do comprimento da circunferência completa ($2\pi r$).



De acordo com essas figuras, temos a seguinte proporção:

$$\frac{\ell}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360°}$$

Essa relação pode ser utilizada para o cálculo do comprimento de um arco com base na medida, dada em graus, do ângulo central correspondente.

Respostas no Manual do Professor.

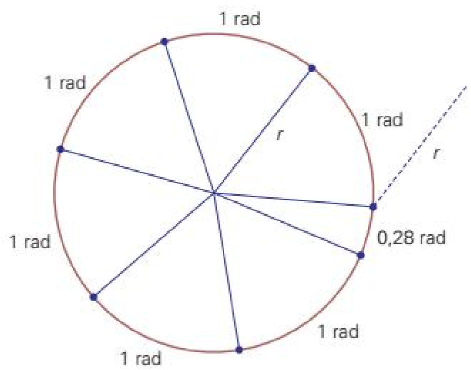
Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

1. Ao se duplicar a medida de um ângulo central em uma circunferência, o que ocorre com o comprimento do arco?
2. Considerando duas circunferências concêntricas (uma de raio r e outra de raio $2r$), com um ângulo central de medida 30° e os comprimentos dos arcos correspondentes à medida desse ângulo central, responda: A medida do comprimento de um arco é o dobro da medida do comprimento do outro?

Outra unidade de medida de ângulo

Além do **grau**, existe outra unidade de medida de ângulo muito utilizada: o **radiano**. Essa unidade pode ser compreendida com base no comprimento de uma circunferência de raio r, isto é:



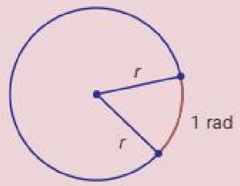
Figuras: © DAE

Se considerarmos a aproximação $\pi \cong 3{,}14$ o comprimento da circunferência será, aproximadamente, $6{,}28 \cdot r$. É como se o arco correspondente a uma volta completa fosse dividido em 6 arcos de comprimento igual a r e mais 1 arco de comprimento igual a $0{,}28 \cdot r$ (ver figura anterior):

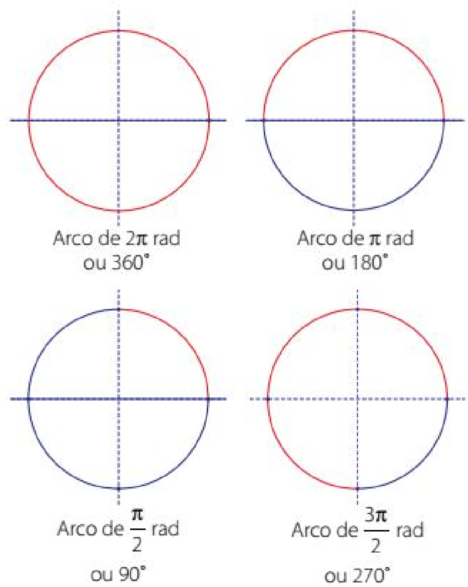
$$C = 2\pi \cdot r$$
$$C \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$$
$$C \cong 6{,}28 \cdot r$$
$$C \cong 6 \cdot r + 0{,}28 \cdot r$$

Aos arcos anteriores de mesmo comprimento (r) associa-se um ângulo central que corresponde à unidade de medida conhecida como **1 radiano** (que representamos como 1 rad). O pedacinho que falta para completar o ângulo central de uma volta inteira tem medida 0,28 radiano, aproximadamente.

Um arco de medida 1 radiano (1 rad) corresponde a um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.



Vamos obter uma relação entre as unidades grau e radiano. Assim, como em uma volta completa o ângulo central é 360º, temos que, em radianos, a medida desse ângulo será 2 π rad. Além disso, temos alguns ângulos de forma imediata correspondentes aos arcos em vermelho:



Usar a unidade de medida radiano tem uma vantagem que você pode constatar por meio da compreensão do que é 1 radiano em uma circunferência de raio *r*, obtendo, por exemplo, outros arcos.

Medida do ângulo central	Comprimento do arco
1 rad	$1 \cdot r$
2 rad	$2 \cdot r$
3 rad	$3 \cdot r$
4 rad	$4 \cdot r$
⋮	⋮
α rad	$\alpha \cdot r$

A última linha dessa tabela sugere outro procedimento que permite obter o comprimento ℓ de um arco cuja medida do ângulo central é α rad, isto é:

$$\ell = \alpha \cdot r$$

ou

$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

Note que esse resultado também poderia ser obtido por meio da seguinte proporção:

Ângulo central	Comprimento do arco
2π rad	$2\pi r$
α rad	ℓ

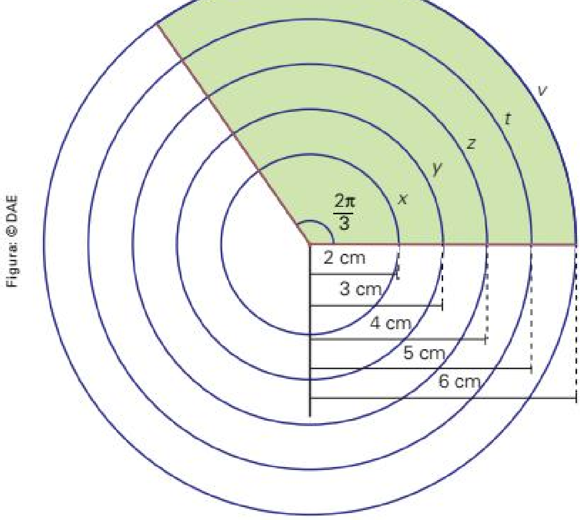
$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi r}{\ell} \Rightarrow \alpha = \frac{\ell}{r}$$

Observação:

Essa relação pode ser interpretada da seguinte maneira: o comprimento de um arco e a medida do raio da circunferência correspondente, na mesma unidade de comprimento, são diretamente proporcionais. A constante de proporcionalidade é o valor numérico da medida, em radianos, do ângulo central correspondente.

Exemplo:

As circunferências representadas a seguir são concêntricas, com raios medindo 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm e 6 cm. Considerando que o ângulo central é igual a $\frac{2\pi}{3}$, vamos representar os comprimentos dos arcos indicados por *x*, *y*, *z*, *t* e *v*.



- Como os comprimentos dos arcos são proporcionais às medidas dos raios das circunferências às quais esses raios pertencem e a constante de proporcionalidade é a medida do ângulo central em radianos, temos:

$$\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{medida do raio}} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{t}{5} = \frac{v}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}\,\text{cm}$$

$$\frac{y}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = 2\pi\,\text{cm}$$

$$\frac{z}{4} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = \frac{8\pi}{3}\,\text{cm}$$

$$\frac{t}{5} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{10\pi}{3}\,\text{cm}$$

$$\frac{v}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow v = 4\pi\,\text{cm}$$

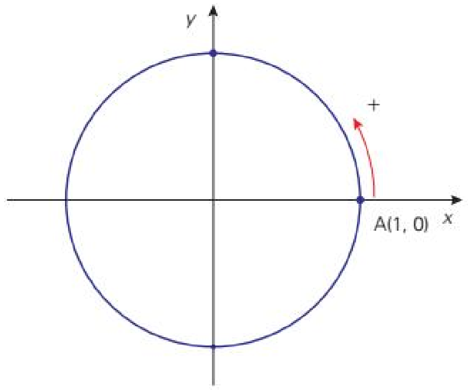
Para transformar a medida de um arco de radianos para grau e vice-versa, utilizamos a seguinte relação:

$$180° = \pi\,\text{rad}$$

A unidade de medida radiano também é muito utilizada na disciplina de Física. Faça uma pesquisa sobre os significados de deslocamento angular, velocidade angular e aceleração angular. Anote em seu caderno o resultado da pesquisa e troque ideias com a turma.

Circunferência trigonométrica

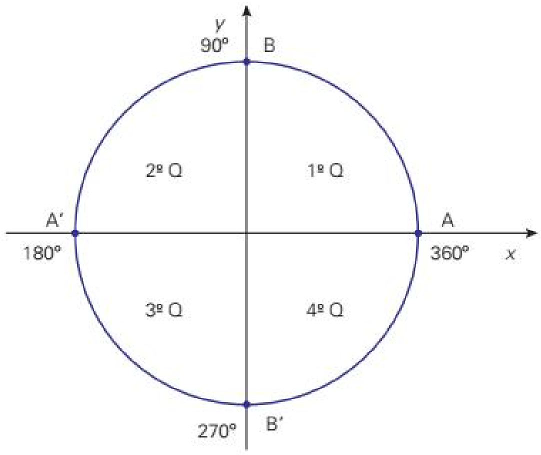
Consideremos uma circunferência de centro na origem do plano cartesiano e raio unitário, conforme a representação abaixo.



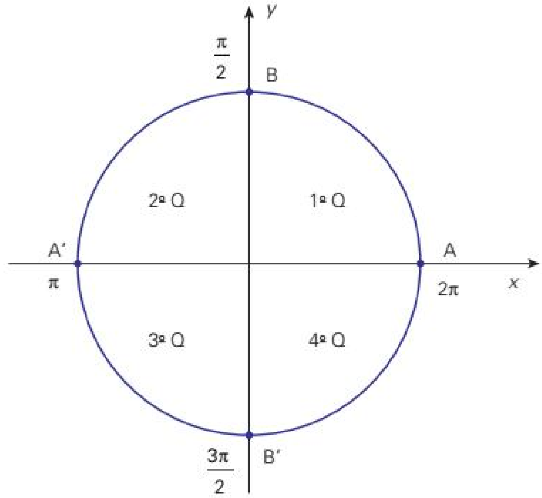
A partir do ponto A(1, 0), convencionamos que qualquer arco no sentido anti-horário será positivo. Como consequência, qualquer arco no sentido horário será negativo.

A circunferência de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais com raio unitário, na qual escolhemos um ponto de origem dos arcos e um sentido de percurso, é chamada **circunferência trigonométrica**.

Os eixos cartesianos dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes. Essas partes são denominadas quadrantes, que são indicados por 1º Q (primeiro quadrante), 2º Q (segundo quadrante), 3º Q (terceiro quadrante) e 4º Q (quarto quadrante), a partir do ponto de origem dos arcos, e são considerados no sentido positivo.



Figuras: © DAE



Observações:

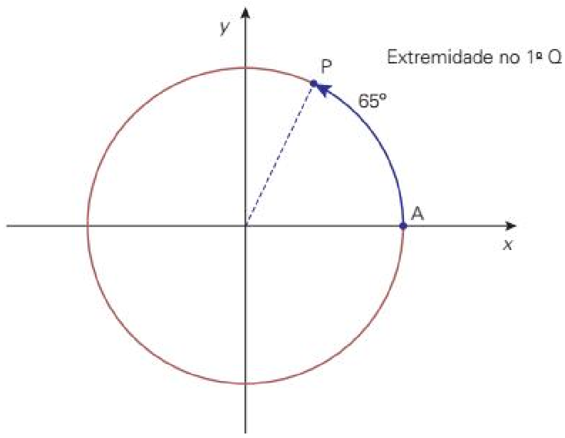
1. Os pontos A, B, A' e B' que pertencem aos eixos coordenados. Desse modo, vamos considerar que eles não pertencem a nenhum quadrante.
2. Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, a medida de qualquer arco, em radiano, é numericamente igual ao comprimento desse arco.
3. Qualquer ponto P(*x*, *y*) que pertença à circunferência trigonométrica terá suas coordenadas variando conforme as desigualdades:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } -1 \leqslant y \leqslant 1$$

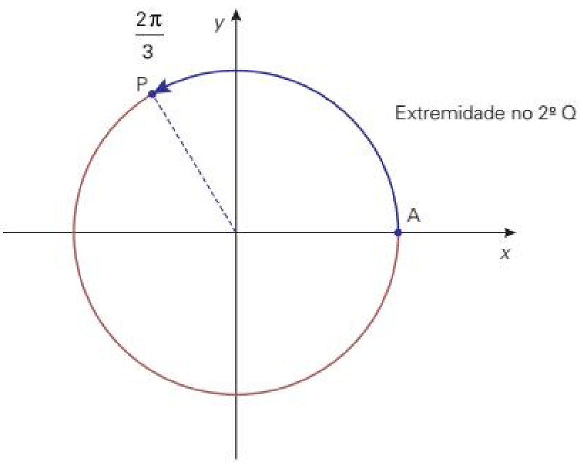
Exemplo:

Vamos considerar nos itens abaixo as extremidades de alguns arcos na circunferência trigonométrica.

a) Arco de 65º:

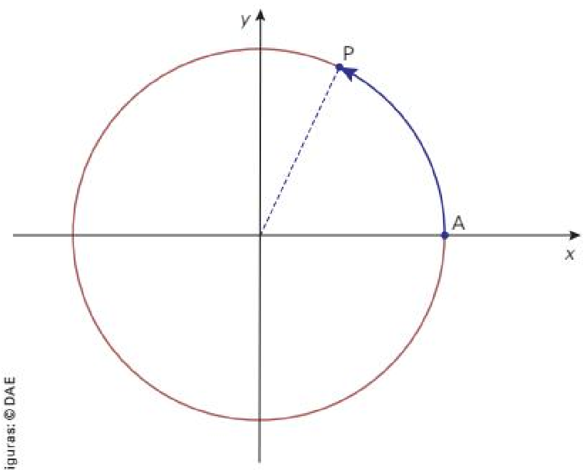


b) Arco de $\frac{2\pi}{3}$:



Sabemos que, em uma circunferência, um arco tem duas extremidades. Como uma delas é sempre a origem, para facilitar a identificação, quando citarmos a extremidade de um arco, estaremos nos referindo à extremidade que não é a origem do arco.

Arcos côngruos

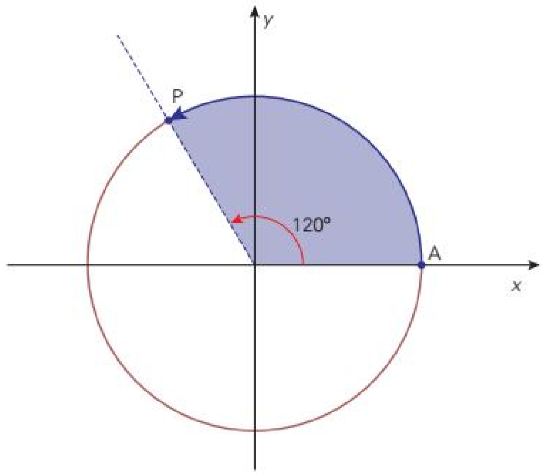


Figuras: © DAE

Considere um arco em uma circunferência trigonométrica com origem no ponto A e a outra extremidade no ponto P. Existem infinitos arcos que podemos considerar nessa circunferência tendo os pontos A e P como suas extremidades. Pode-se dar um número inteiro de voltas em qualquer um dos dois sentidos (horário ou anti-horário). Desde que inicie no ponto A e finalize no ponto P teremos arcos com as mesmas extremidades e diferenciados apenas em relação ao número de voltas da circunferência. Esses arcos são chamados **arcos côngruos**.

Exemplo:

Vamos considerar o arco de medida 120° na circunferência trigonométrica, tendo como origem o ponto A e a outra extremidade como o ponto P.



- Note que todos os arcos da tabela a seguir têm origem no ponto A e a outra extremidade no ponto P.

Arcos no sentido anti-horário	Arcos no sentido horário
$120° = 120° + 0 \cdot 360°$	$120° = 120° + 0 \cdot 360°$
$480° = 120° + 1 \cdot 360°$	$-240° = 120° + (-1) \cdot 360°$
$840° = 120° + 2 \cdot 360°$	$-600° = 120° + (-2) \cdot 360°$
$1\,200° = 120° + 3 \cdot 360°$	$-960° = 120° + (-3) \cdot 360°$
$1\,560° = 120° + 4 \cdot 360°$	$-1\,320° = 120° + (-4) \cdot 360°$

Se escolhermos dois arcos quaisquer dos que estão indicados na tabela, eles serão diferentes em relação ao número de voltas dadas na circunferência, mesmo tendo as mesmas extremidades.

Dois arcos em uma circunferência trigonométrica são côngruos quando suas medidas diferem de um múltiplo de 360° ou 2π rad.

Observações:

1. Para um arco de medida $\alpha°$, todos os arcos côngruos a ele podem ser representados pela expressão $\alpha° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para um arco de medida α rad, todos os arcos côngruos a ele podem ser representados pela expressão $\alpha + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

2. Quando $k = 0$, obtemos nessas expressões o arco de medida α (em graus ou em radianos). Se esse arco é tal que $0° \leq \alpha° < 360°$ ou $0 \leq \alpha < 2\pi$, dizemos que é a primeira determinação positiva.

Exemplos:

1. Observe como podemos obter a primeira determinação positiva do arco de medida 1 500°.

- Vamos dividir a medida 1 500° por 360°:

$$\begin{array}{r|l} 1\,500° & 360° \\ \hline -\,1\,440° & 4 \\ \hline 60° & \end{array}$$

4 → número de voltas

60° → primeira determinação positiva

Pelo algoritmo da divisão, temos:

$$1500° = 4 \cdot 360° + 60°$$

Ou seja: o quociente indica o número de voltas, e o resto representa a primeira determinação positiva.

2. Agora vamos obter a primeira determinação positiva do arco de medida $\frac{57\pi}{6}$ rad.

- Como a medida do arco está em radianos, devemos dividi-la por 2π. Para facilitar, consideramos $2\pi = \frac{12\pi}{6}$. Assim, deixamos os denominadores iguais na divisão. Efetuamos, então:

$$\begin{array}{r|l} \frac{57\pi}{6} & \frac{12\pi}{6} \\ \hline -\,\frac{48\pi}{6} & 4 \\ \hline \frac{9\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} & \end{array}$$

4 → Número de voltas

$\frac{3\pi}{2}$ → Primeira determinação positiva

- Pelo algoritmo da divisão, temos que:

$$\frac{57\pi}{6} = 4 \cdot \frac{12\pi}{6} + \frac{9\pi}{6}$$

Ou seja: o quociente indica o número de voltas e o resto representa a primeira determinação positiva.

Exercícios resolvidos

1. Transforme para radianos as seguintes medidas:

a) 210°   b) 780°

a) $\frac{180}{210} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ rad

b) $\frac{180}{780} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{780\pi}{180} = \frac{13\pi}{3}$ rad

2. Transforme para graus as seguintes medidas:

a) $\frac{2\pi}{3}$ rad

b) $\frac{9\pi}{2}$ rad

a) $\frac{2\pi}{3}\text{rad} = \frac{2}{3} \cdot \pi\text{rad} = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$

b) $\frac{9\pi}{2}\text{rad} = \frac{9}{2} \cdot \pi\text{rad} = \frac{9}{2} \cdot 180° = 810°$

3. Calcule o comprimento do menor arco determinado por um ângulo de 120° em uma circunferência de raio 5 cm.

Primeiro, vamos descobrir quanto é 120°, em radiano:

$\frac{180}{120} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$ rad

Seja x a medida procurada do comprimento do arco, então:

$x = \frac{2\pi}{3} \cdot 5 = \frac{10\pi}{3}$

Portanto, a medida desse arco é $\frac{10\pi}{3}$ cm.

4. Escreva a expressão geral de todos os arcos que são côngruos a:

a) 235°

b) $\frac{7\pi}{5}$ rad

a) A expressão geral de todos os arcos que são côngruos a 235° é $235° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) A expressão geral de todos os arcos que são côngruos a $\frac{7\pi}{5}$ rad é $\frac{7\pi}{5} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Transforme para radianos as seguintes medidas:

a) 150° a) $\frac{5\pi}{6}$rad

b) 240° b) $\frac{4\pi}{3}$rad

c) 300° c) $\frac{5\pi}{3}$rad

2. Transforme em graus as seguintes medidas:

a) $\frac{2\pi}{3}$rad 120°

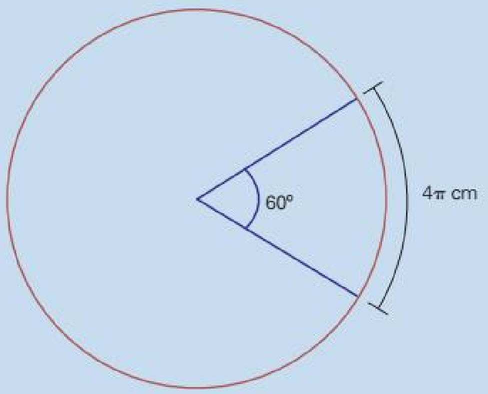
b) $\frac{7\pi}{6}$rad 210°

c) $\frac{11\pi}{6}$rad 330°

3. Calcule, em graus, o valor da seguinte expressão:

$$y = \frac{\pi}{2}\text{rad} + \frac{\pi}{3}\text{rad} - \frac{17\pi}{12}\text{rad} + \frac{3\pi}{4}\text{rad}$$ 30°

4. Na figura a seguir, calcule a medida do raio da circunferência. 12 cm



Figuras: ©DAE

5. Os pares de arcos a seguir são côngruos?

a) 60° e 780°. Sim.

b) 30° e 330°. Não.

c) $\frac{\pi}{4}$rad e $\frac{17\pi}{4}$rad. Sim.

d) $\frac{\pi}{5}$rad e $\frac{12\pi}{5}$rad. Não.

e) 120° e $\frac{62\pi}{3}$rad. Sim.

6. Escreva a expressão geral de todos os arcos que são côngruos a: Respostas no Manual do Professor.

a) 30°

b) $\frac{\pi}{4}$rad

c) 1 140°

d) $\frac{19\pi}{4}$rad

7. Com relação ao arco de medida 2 360°, responda:

a) Qual é a expressão geral de todos os seus arcos côngruos? $x = 200° + k \cdot 360°$ (com $k \in \mathbb{Z}$)

b) Qual é a primeira determinação positiva? 200°

c) Qual é a primeira determinação negativa? –160°

d) O arco de medida 4 340° é côngruo a 2 360°? Não.

8. Com relação ao arco de medida $\frac{29\pi}{3}$rad, responda:

a) Qual é a expressão geral de todos os seus arcos côngruos? $x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ (com $k \in \mathbb{Z}$)

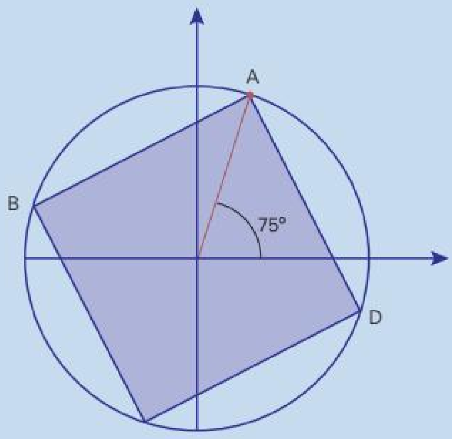
b) Qual é a primeira determinação positiva? $\frac{5\pi}{3}$rad

c) Qual é a primeira determinação negativa? $-\frac{\pi}{3}$rad

d) O arco de medida $\frac{101\pi}{3}$ é côngruo a $\frac{29\pi}{3}$? Sim.

9. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 15 centímetros. Qual é, aproximadamente, a distância que a extremidade desse ponteiro percorre em 40 minutos? (Utilize a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.) Aproximadamente ≅ 62,8 cm.

10. Na figura a seguir, um quadrado ABCD está inscrito em uma circunferência centrada na origem dos eixos.



$x = 255° + k \cdot 360°$ (com $k \in \mathbb{Z}$)

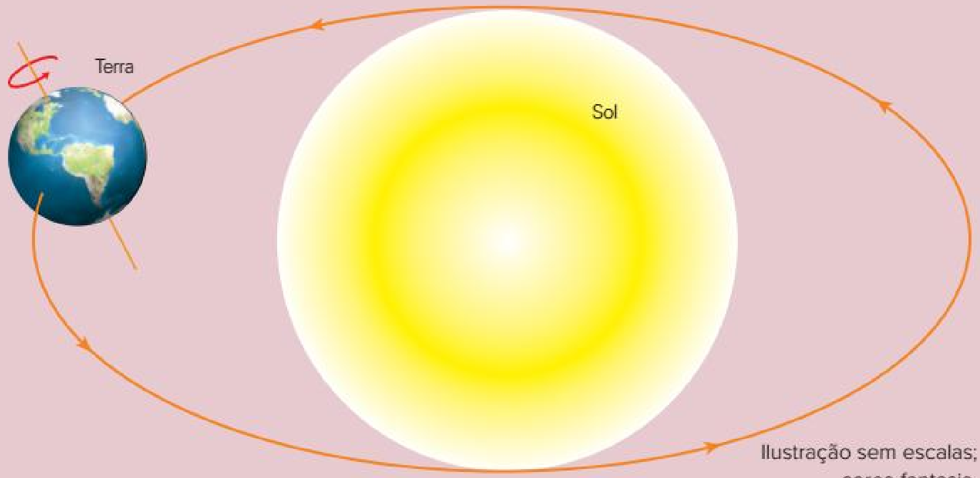
Escreva a expressão geral de todos os arcos côngruos ao arco cuja extremidade é o vértice C do quadrado.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Empregamos as unidades grau (°) e radiano (rad) para medir arcos ou ângulos. Mas como teriam surgido essas unidades de medida? A utilização dessas unidades é recente na história da Matemática?

Por que há 360° numa revolução completa? Não há nenhuma razão para isso, a não ser, razões históricas. Mesmo estas devem acabar levando a hipóteses e estas a meros "porque sim", como sempre acontece quando continuamos a perguntar "por quê?" e "onde?" em cada passo de uma investigação retrospectiva, no tempo ou na lógica. Façamos uma revisão breve da história de 360°.



Adilson Secco

Ilustração sem escalas; cores-fantasia.

Os babilônios antigos, tendo se estabelecido (entre 4000 a.C. – 3000 a.C.) para drenar pântanos, cultivar campos, construir cidades e trocar bens, interessaram-se pela Astronomia por si mesma, pela sua relação com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as estações e a época do plantio. Desenvolveram também um sistema numérico de base 60, usando a ideia de valor posicional para frações e para números inteiros (a ideia da separatriz decimal e casas à sua direita representando décimos, centésimos etc. só entrou em nosso sistema de numeração indo-arábico por volta de 1585 d.C. – mais de quatro milênios depois!). Ninguém sabe por que os babilônios escolheram 60, embora haja muitas teorias interessantes a respeito. É possível até que o uso de 60 tenha sido decorrência da facilidade de se dividir um círculo em seis partes iguais usando seu raio como corda. Talvez a fonte original de 60 seja $\frac{1}{6}$ de 360. A ideia de 360 partes em um círculo poderia ter resultado de uma estimativa ligeiramente errônea de 360 dias num ano. Todavia, parece provável que o sistema sexagesimal moderno tenha precedido a divisão do círculo em 360 partes – certamente precede a subdivisão de cada parte em 60 subpartes. Seja como for, independentemente de que o anterior tenha sido 60 ou 360, os babilônios estudaram Astronomia e usaram um sistema numérico sexagesimal em que as frações eram escritas como denominadores de potências de 60, empregando até certo ponto a mesma noção posicional com que escrevemos frações decimais.

Assim, quando a civilização grega, através do comércio e da conquista, absorveu parcialmente a cultura babilônica, adotou suas frações sexagesimais junto com sua Astronomia. Hipsicles (c. 180 a.C.) foi o primeiro astrônomo grego a dividir o círculo do zodíaco em 360 partes, seguindo os caldeus, que o haviam dividido em 12 seções, cada uma com 30 (e às vezes 60) partes. Nem Hipsicles nem os caldeus usaram essa divisão para outros círculos. Essa generalização deve-se, aparentemente, ao astrônomo Hiparco (c. 150 a.C.).

Coleção particular/Look and Learn/Elgar Collection/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Ptolomeu (c. 90 a.C. – c. 168 a.C.).

Ptolomeu (c. 125 d.C.), o famoso astrônomo e geógrafo grego, fez um uso genérico das frações sexagesimais em todo tipo de cálculo e não apenas na medida de ângulos. Segundo ele dizia, fazia isso para evitar o uso de "frações", indício de que a ideia completa de frações conforme é ensinada nas escolas elementares de hoje não era clara para esse gênio grego, mas que ele apreciava a eficiência da noção posicional em cálculos que as envolvessem.

Mas ele usava uma aritmética decimal não posicional para os inteiros, e não usava frações sexagesimais para medir o tempo. Esta última ideia foi introduzida por seu comentador, Teon de Alexandria (c. 390 d.C.).

As frações sexagesimais babilônicas usadas em traduções árabes do grego, de Ptolomeu, eram chamadas pelos tradutores "primeiras menores partes" para sexagésimos, "segundas menores partes" para sexagésimos de sexagésimos, e assim por diante. As primeiras traduções europeias se faziam em latim, que era a língua internacional dos intelectuais. Em latim essas frases tornaram-se partes *minutae primae* e partes *minutae secundae*, das quais derivam as palavras "minuto" e "segundo".

JONES, Phillip S. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula* – Trigonometria. São Paulo: Editora Atual, 1992, p. 33-34.

Em sua opinião, qual é a melhor hipótese para o surgimento da utilização da circunferência dividida em 360 partes: o calendário dos babilônios, de 360 dias, ou o sistema sexagesimal? Discuta com seus colegas a esse respeito. Que tal pesquisar um pouco mais?

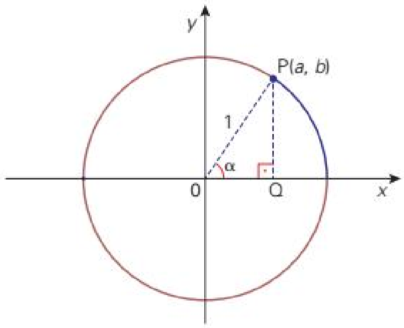
QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

De acordo com o texto, responda:

1. Quais são os motivos que levaram os babilônios a se interessarem pelo estudo da Astronomia?
2. Qual era o tipo de aritmética decimal que Ptolomeu usava para medir o tempo?

Seno e cosseno de um arco

Agora que sabemos o que é uma circunferência trigonométrica, vamos indicar um arco de medida α na circunferência com extremidade no ponto P(a, b) conforme indicado a seguir.



Considerando as razões trigonométricas seno e cosseno de um ângulo agudo no triângulo retângulo, temos:

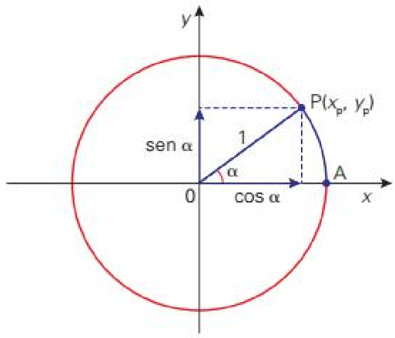
- $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

  $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{b}{1} \Rightarrow b = \text{sen}\,\alpha$

- $\cos\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$

  $\cos\alpha = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\alpha$

Com base nessas duas ideias, estudamos seno e cosseno na circunferência trigonométrica. Associamos a cada arco um valor para o seno e um valor para o cosseno. Esses dois valores são as coordenadas da extremidade do arco (ponto P). A abscissa será o cosseno do arco, e a ordenada, o seno do arco:



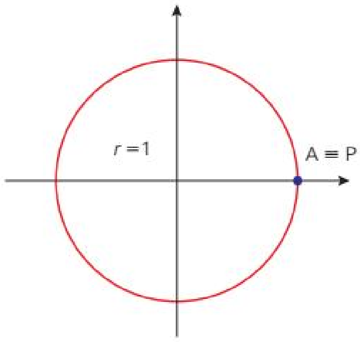
Figuras: © DAE

$\cos\alpha = x_P$ → Abscissa do ponto P

$\text{sen}\,\alpha = y_P$ → Ordenada do ponto P

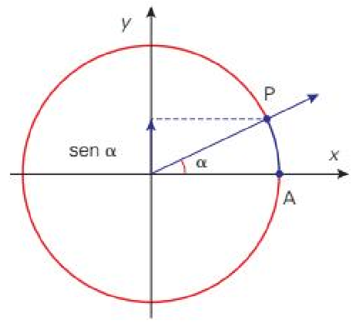
A seguir, observe o que ocorre com o seno e o cosseno quando fazemos o arco percorrer a circunferência trigonométrica.

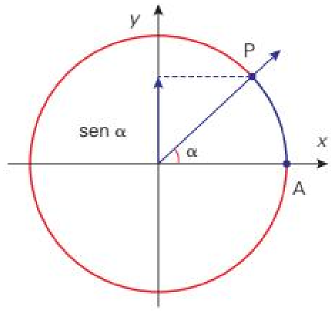
Razão trigonométrica seno

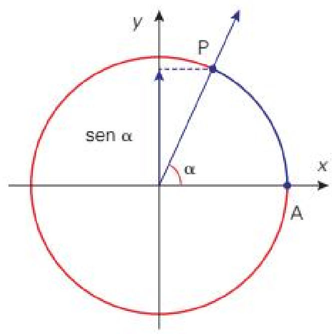


→ $\text{sen}\,0° = \text{sen}\,0 = 0$

- Arco variando no 1º quadrante:

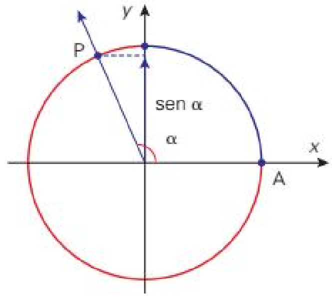


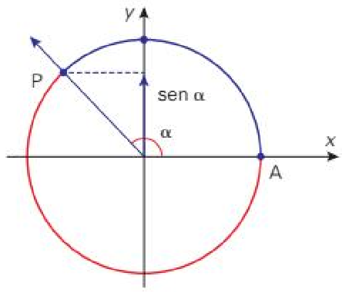


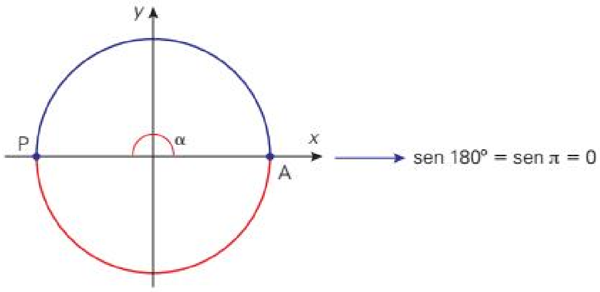


$\text{sen}\,90° = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} = 1$

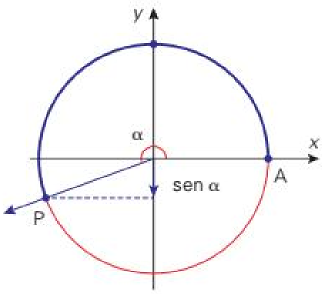
- Arco variando no 2º quadrante:

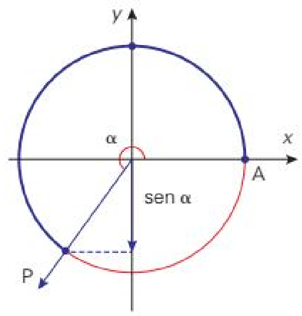




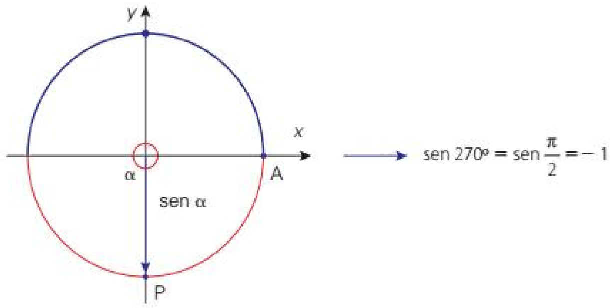


- Arco variando no 3º quadrante:

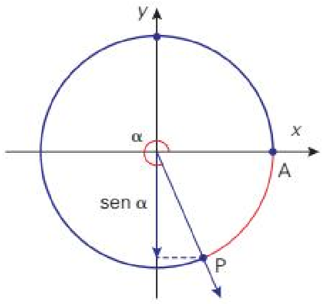


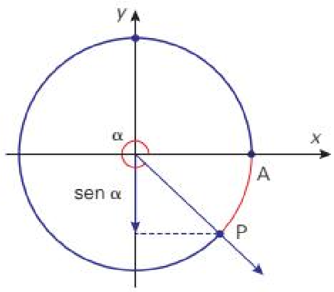


Figuras: © DAE



- Arco variando no 4º quadrante:





Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

Observando a variação de um arco α na primeira volta na circunferência trigonométrica, responda:

1. Entre quais valores varia o sen α?

2. Aumentando um arco α no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, o que ocorre com o valor de sen α?

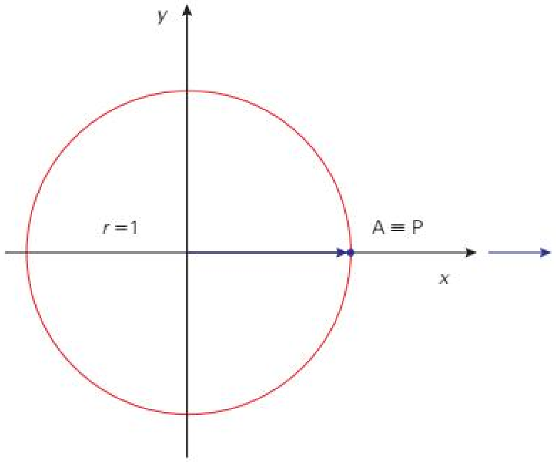
3. Em quais quadrantes, quando se aumenta o valor de α, o valor de sen α diminui?

4. Em quais quadrantes o seno é positivo? E em quais é negativo?

OBSERVAÇÃO

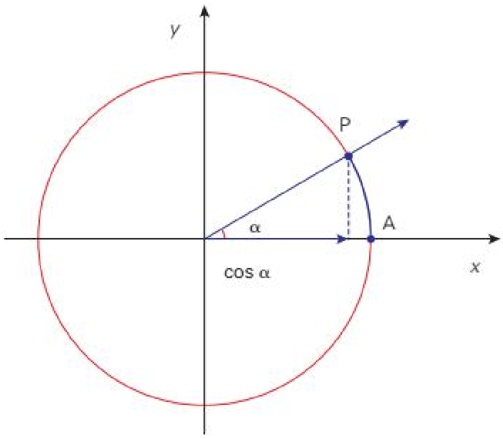
Como o seno é uma ordenada, então o sinal do seno é o sinal da ordenada do ponto correspondente à extremidade do arco.

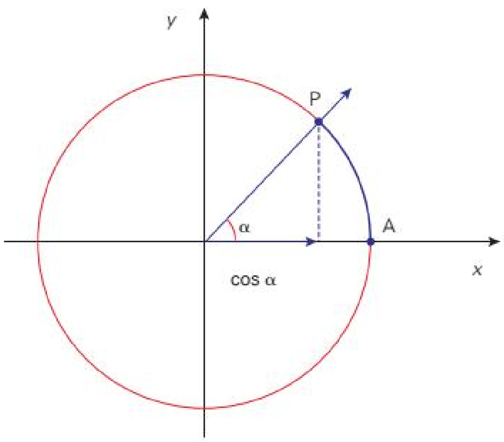
Razão trigonométrica cosseno



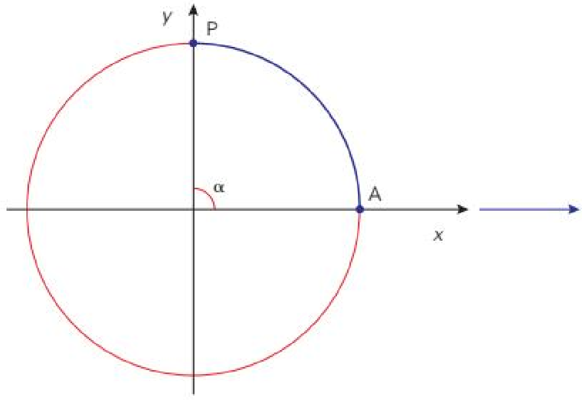
cos 0° = cos 0 = 1

- Arco variando no 1º quadrante:



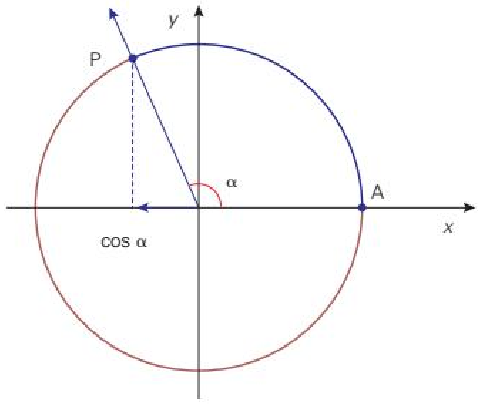


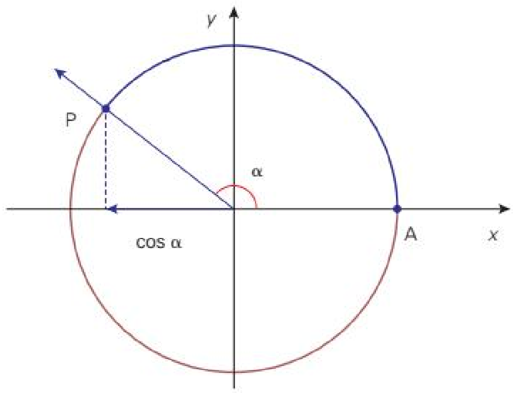
Figuras: © DAE

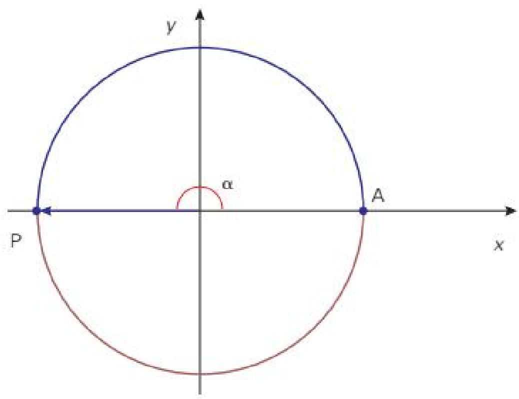


$\cos 90^{\circ} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

- Arco variando no 2º quadrante:

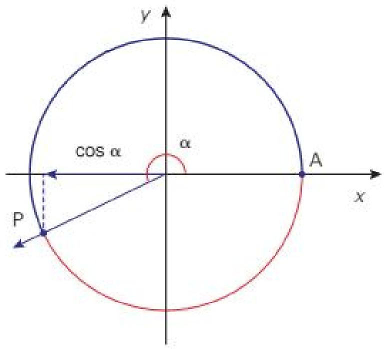


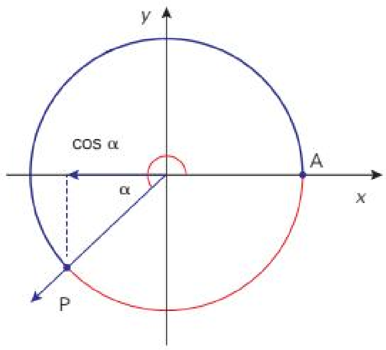


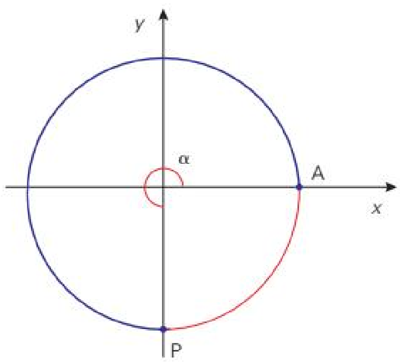


$\cos 180^{\circ} = \cos \pi = -1$

- Arco variando no 3º quadrante:

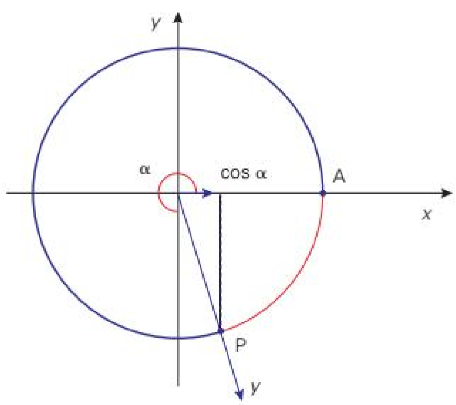




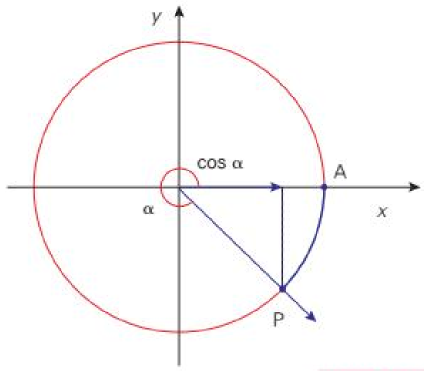


$\cos 270° = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$

- Arco variando no 4º quadrante:



Figuras: © DAE



Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

Observando a variação de um arco α na primeira volta na circunferência trigonométrica, responda:

1. Entre quais valores varia o $\cos \alpha$?

2. Aumentando um arco α no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ o que ocorre com o valor de $\cos \alpha$?

3. Em quais quadrantes, quando se aumenta o valor de α , o valor de $\cos \alpha$ aumenta?

4. Em quais quadrantes o cosseno é positivo? E em quais é negativo?

OBSERVAÇÃO:
Como o cosseno é uma abscissa, então o sinal do cosseno é o sinal da abscissa do ponto correspondente à extremidade do arco.

Resumindo o que vimos anteriormente, além dos sinais nos quadrantes de seno e cosseno, temos:

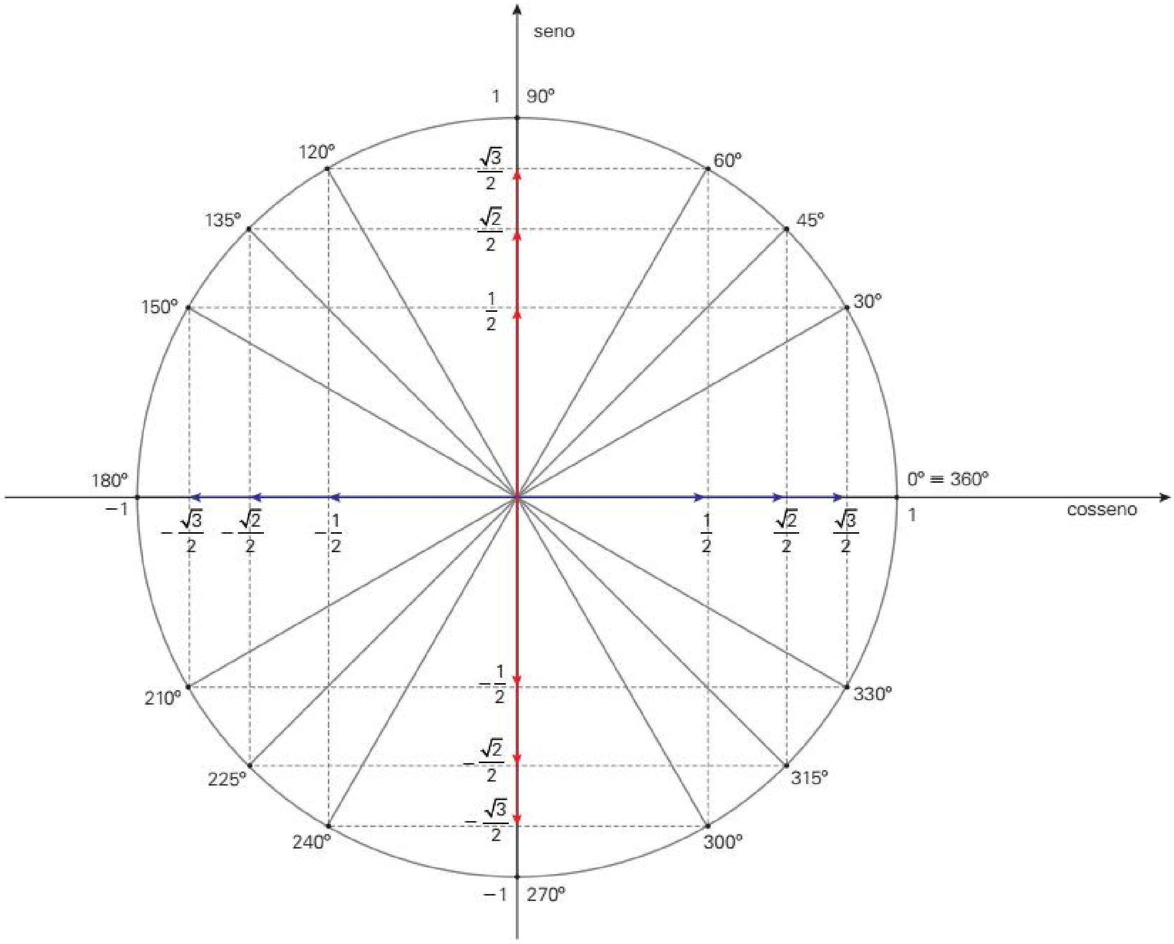
	0º	90º	180º	270º
sen	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0

$-1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Simetria no estudo do seno e do cosseno na circunferência trigonométrica

Quando estudamos a Trigonometria no triângulo retângulo, no volume 1 desta coleção, vimos a razão seno e a razão cosseno para os arcos de 30º, 45º e 60º (arcos notáveis). Ao associarmos o seno e o cosseno de um arco numa circunferência trigonométrica com as coordenadas da extremidade desse arco, podemos também ampliar o cálculo dessas razões trigonométricas (seno e cosseno) desses arcos notáveis. Assim, é possível relacioná-los com outros arcos nos demais quadrantes como sugere a figura a seguir:



Note que as linhas tracejadas estão indicando retângulos com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Assim, por exemplo, observando o retângulo com vértices nas extremidades dos arcos de 30º, 150º, 210º e 330º, temos:

$$\text{sen}\,150° = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\,210° = -\,\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2} \qquad \cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\,330° = -\,\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2} \qquad \cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

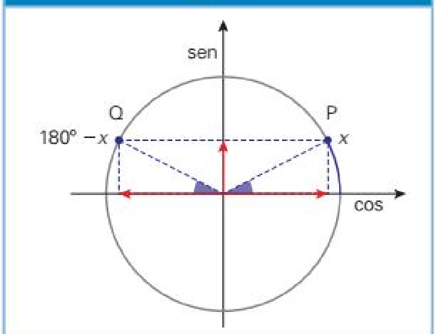
Portanto, podemos expressar o seno e o cosseno dos arcos de 150º, 210º e 330º em função do seno e do cosseno do arco de 30º.

Aqui é importante observar que foi possível relacionar o seno e o cosseno de arcos com extremidades no 2º, no 3º e no 4º quadrantes em função das mesmas razões trigonométricas de arcos do 1º quadrante. Dizemos que foram feitas reduções ao 1º quadrante. Esse procedimento é justificável pelas simetrias das coordenadas de pontos no 2º, no 3º e no 4º quadrantes em relação ao 1º quadrante. Para compreender melhor isso, vamos considerar a seguir, separadamente, um arco genérico com extremidades no 2º, no 3º e no 4º quadrantes para "reduzir" ao 1º quadrante.

- Arcos com extremidade no 2º quadrante

Observe na circunferência trigonométrica representada a seguir que as abscissas dos pontos P e Q são opostas enquanto as ordenadas são iguais:

GRAU



sen (180° - x) = sen x

cos (180° - x) = -cos x

Figuras: © DAE

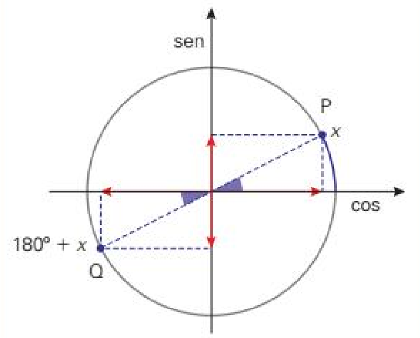
Se o arco x estivesse em radianos, teríamos:

sen $(\pi - x)$ = sen x e cos $(\pi - x) = -$ cos x

- Arcos com extremidade no 3º quadrante

Observe na circunferência trigonométrica representada a seguir que as abscissas dos pontos P e Q são opostas, assim como as ordenadas:

GRAU



sen $(180° + x) = -$sen x

cos $(180° + x) = -$cos x

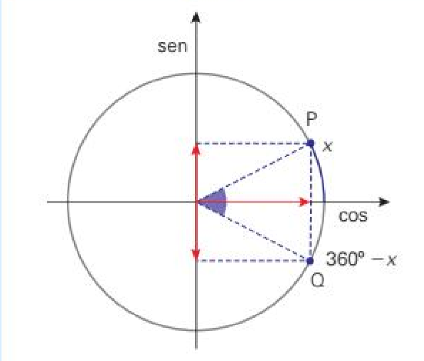
Se o arco x estivesse em radianos, teríamos:

sen $(\pi + x) = -$ sen x e cos $(\pi + x) = -$ cos x

- Arcos com extremidade no 4º quadrante

Observe na circunferência trigonométrica representada a seguir que as abscissas dos pontos P e Q são iguais, enquanto suas ordenadas são opostas:

GRAU



sen $(360° - x)$ = sen x

cos $(360° - x) = -$ cos x

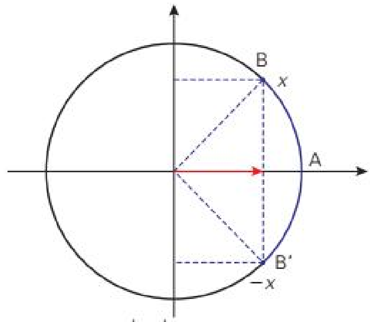
Figuras: © DAE

Se o arco x estivesse em radianos, teríamos:

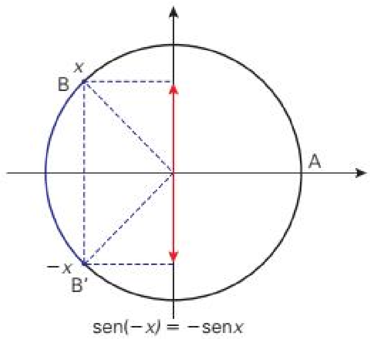
sen $(2\pi - x) = -$ sen x e cos $(2\pi - x)$ = cos x

Observação:

Se considerarmos na circunferência trigonométrica dois arcos opostos, isto é, um arco de medida x (arco AB) e outro arco de medida $-x$ (arco AB'), podemos constatar que, de acordo com as figuras a seguir, os senos são opostos, e os cossenos são iguais.



$\cos(-x) = \cos x$



$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$

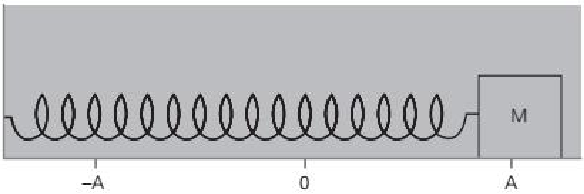
Note que os arcos de medidas x e $-x$ têm o mesmo comprimento. Como os pontos B e B' têm a mesma abscissa, eles possuem o mesmo valor do cosseno e, analogamente, como esses pontos têm ordenadas opostas, eles têm senos opostos.

Função seno e função cosseno

Você já ouviu falar em movimento harmônico simples?

Em Física, existem situações envolvendo fenômenos periódicos, isto é, fenômenos que têm movimentos que se repetem sob certas condições. Um tipo de movimento periódico é o chamado movimento harmônico simples (MHS). Vamos considerar a seguinte situação:

Um corpo de massa M está preso à extremidade de uma mola. A outra extremidade está presa a uma parede, como sugere a figura a seguir. O ponto 0 indica a posição de equilíbrio. Se comprimirmos essa mola até a posição −A e a soltarmos, uma força restauradora fará com que essa mola se desloque para a direita passando pela posição de equilíbrio e chegando até o ponto indicado pela posição A. Considerando condições ideais, esse corpo vai se deslocar periodicamente da posição A até a posição –A.



Figuras: © DAE

Para determinar a posição x desse corpo em função do tempo t, utilizamos a seguinte relação matemática:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Note que, na situação apresentada, a posição do corpo é dada em função do tempo t e está relacionada ao cosseno de um arco.

Movimentos que são periódicos podem ser descritos por meio de uma função trigonométrica.

Agora, vamos compreender como são as funções trigonométricas seno e cosseno.

Função seno

Vimos que, para cada arco ou ângulo x, podemos associar um valor de seno. Logo, para cada x real (considere x em radiano) podemos associar outro número real dado por sen x:

> Denominamos função seno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real sen x, isto é, $f(x) = \text{sen } x$.

O esboço do gráfico dessa função pode ser feito por meio do seno de diversos arcos na primeira volta na circunferência trigonométrica. Você poderá utilizar uma calculadora para verificar os valores dos senos.

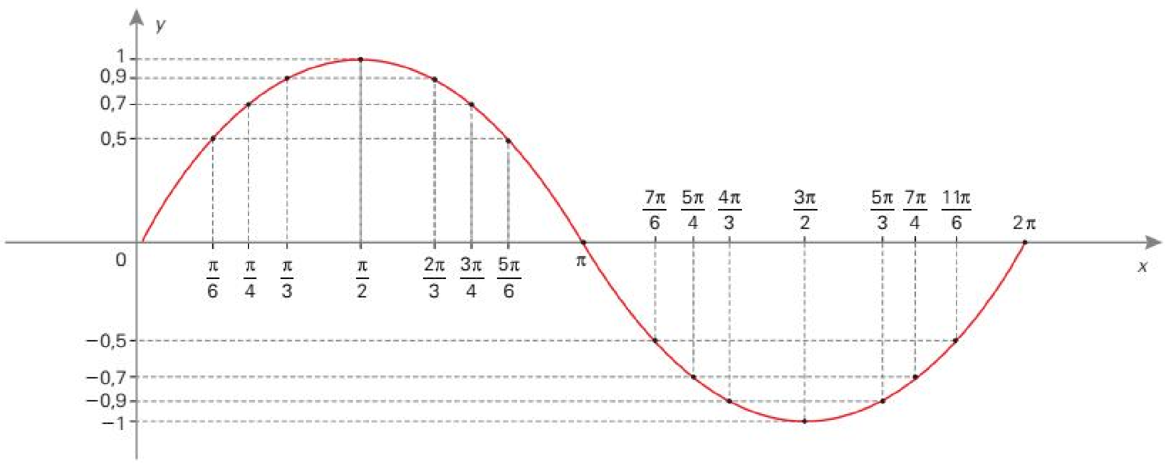
Assim, utilizando algumas vezes aproximações, podemos obter as coordenadas de alguns desses pontos. Como exemplo:

$$x = \frac{\pi}{6} \to y = sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

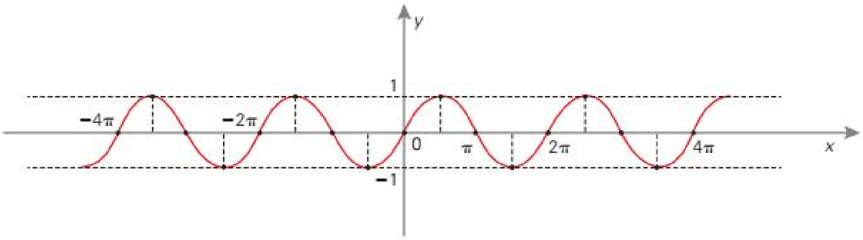
$$x = \frac{\pi}{4} \to y = sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$$

$$x = \frac{\pi}{3} \to y = sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}9$$

Atribuindo outros valores para x no intervalo $[0, 2\pi]$, obtendo os valores em correspondência para y e localizando esses pontos no plano cartesiano obtermos o gráfico da função seno.



Como a função seno é definida no conjunto dos números reais, a curva correspondente (chamada senoide) a esse gráfico pode ser estendida para arcos negativos (determinações negativas) e também para arcos maiores que 2π (determinações positivas além da primeira volta). Se assim considerarmos, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen } x$, terá o seguinte gráfico:



Note, com base no gráfico acima, que a função repete seus valores de modo periódico a cada volta na circunferência, isto é:

⋮

$[-4\pi; -2\pi] \rightarrow$ 2ª volta no sentido negativo.

$[-2\pi; 0] \rightarrow$ 1ª volta no sentido negativo.

$[0; 2\pi] \rightarrow$ 1ª volta no sentido positivo.

$[2\pi; 4\pi] \rightarrow$ 2ª volta no sentido positivo.

⋮

Assim, podemos escrever que:

$$\ldots = \text{sen}\,(x - 4\pi) = \text{sen}\,(x - 2\pi) = \text{sen}\,(x) =$$
$$= \text{sen}\,(x + 2\pi) = \text{sen}\,(x + 4\pi) = \ldots$$

para qualquer arco real x que considerarmos. Dizemos que essa função é periódica de período 2π, ou seja, repete-se de 2π em 2π.

Podemos, assim, resumir algumas ideias importantes sobre a função seno:

- Função periódica: a função seno é periódica de período $P = 2\pi$.
- Domínio: como para qualquer arco real x associamos sen x, temos que o domínio é real, isto é, $D(f) = \mathbb{R}$.
- Imagem: o conjunto imagem é formado pelos valores possíveis para sen x, isto é, $Im(f) = [-1, 1]$.
- Função ímpar: a função seno é ímpar, pois $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,x$.

Observações:

1. Com base no gráfico da função seno construído anteriormente, temos:

	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
Sinal do seno	+	+	−	−
Variação do seno	crescente	decrescente	decrescente	crescente

2. O intervalo $[-1, 1]$, que é o conjunto imagem da função seno, também pode ser representado por $-1 \leqslant \text{sen}\,x \leqslant 1$.

Função cosseno

Vimos que, para cada arco ou ângulo x, podemos associar um valor de cosseno. Logo, para cada x real (considere x em radianos) podemos associar outro número real dado por cos x:

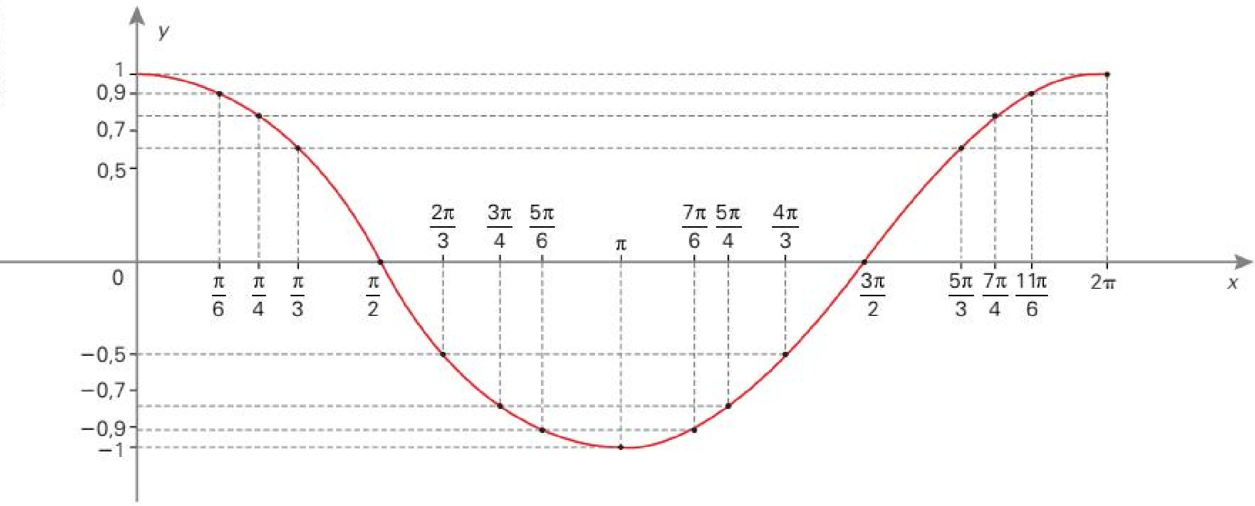
Denominamos de função cosseno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real cos x, isto é, $f(x) = \cos x$.

O esboço do gráfico dessa função pode ser feito por meio do cosseno de diversos arcos na primeira volta na circunferência trigonométrica. Você poderá utilizar uma calculadora para verificar os valores dos cossenos. Assim, utilizando algumas vezes aproximações, podemos obter as coordenadas de alguns desses pontos. Como exemplo:

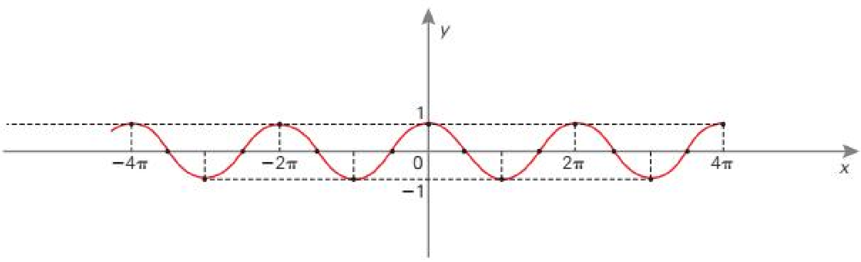
$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}9$$
$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow y = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}7$$
$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Atribuindo outros valores para x no intervalo $[0,2\pi]$, obtendo os valores em correspondência para y e localizando esses pontos no plano cartesiano obtermos o gráfico da função cosseno.

Figuras: ©DAE



Como a função cosseno é definida no conjunto dos números reais, a curva correspondente (chamada cossenoide) a esse gráfico pode ser estendida para arcos negativos (determinações negativas) e também para arcos maiores que 2π (determinações positivas além da primeira volta). Se assim considerarmos, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, terá o seguinte gráfico:



Note, com base no gráfico acima, que a função repete seus valores de modo periódico a cada volta na circunferência, isto é:

⋮

$[-4\pi; -2\pi] \to$ 2ª volta no sentido negativo.

$[-2\pi; 0] \to$ 1ª volta no sentido negativo.

$[0; 2\pi] \to$ 1ª volta no sentido positivo.

$[2\pi; 4\pi] \to$ 2ª volta no sentido positivo.

⋮

Assim, podemos escrever que:

$$\ldots = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos(x) = \\ = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ldots$$

para qualquer arco real x que considerarmos. Dizemos que essa função é periódica de período 2π, ou seja, repete-se de 2π em 2π.

Podemos assim resumir algumas ideias importantes sobre a função cosseno:

- Função periódica: a função cosseno é periódica de período $P = 2\pi$.
- Domínio: como para qualquer arco real x associamos $\cos x$, temos que o domínio é real, isto é, $D(f) = \mathbb{R}$.
- Imagem: o conjunto imagem é formado pelos valores possíveis para $\cos x$, isto é, $Im(f) = [-1, 1]$.
- Função par: a função cosseno é par, pois $\cos(-x) = \cos x$.

Observações:

1. Com base no gráfico da função cosseno construído anteriormente, temos:

	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
Sinal do cosseno	+	−	−	+
Variação do cosseno	decrescente	decrescente	crescente	crescente

2. Note que a cossenoide nada mais é que a senoide deslocada $\frac{\pi}{2}$ unidade para a direita.

Funções envolvendo seno e cosseno

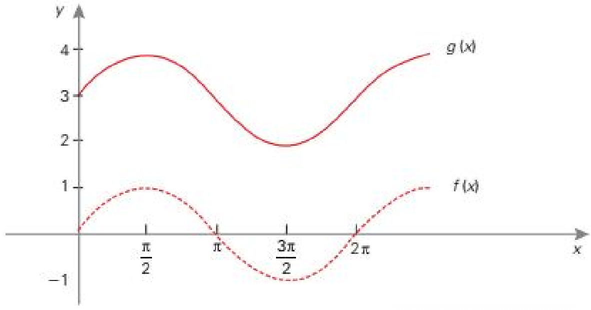
Com base no conhecimento das funções trigonométricas seno e cosseno, podemos também analisar o comportamento de outras funções que envolvem essas duas. Essa análise é útil para a compreensão de fenômenos periódicos que relacionam, de alguma maneira, essas funções. Vejamos alguns exemplos:

1. Conhecendo o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, vamos esboçar, na primeira volta, o gráfico da função $g(x) = 3 + \text{sen } x$.

- Utilizando os valores de x correspondentes às extremidades dos arcos que dividem os quadrantes, podemos construir a seguinte tabela:

x	sen x	$3 + \text{sen } x$
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	1	4
π	0	3
$\frac{3\pi}{2}$	−1	2
2π	0	3

- Com esses valores e conhecendo o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, podemos ter uma ideia do gráfico da função $g(x) = 3 + \text{sen } x$.



Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Comparando os gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = 3 + \text{sen } x$, essas funções têm o mesmo período?

2. Se sobrepormos esses dois gráficos, eles coincidirão?

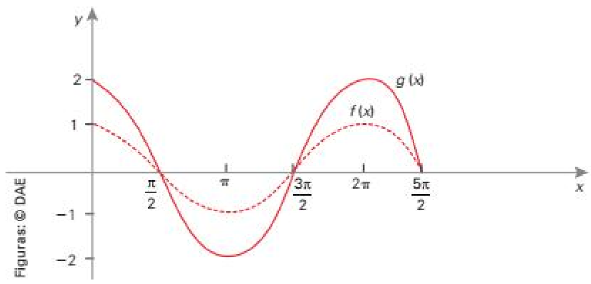
3. Sem atribuir valores a x, como você pode obter o gráfico da função g com base no gráfico da função f?

2. Conhecendo o gráfico da função $f(x) = \cos x$, vamos esboçar, na primeira volta, o gráfico da função $g(x) = 2 \cos x$.

- Utilizando os valores de x correspondentes às extremidades dos arcos que dividem os quadrantes, podemos construir a seguinte tabela:

x	cos x	$2 \cdot \cos x$
0	1	2
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	−1	−2
$\frac{3\pi}{2}$	0	0
2π	1	2

- Com esses valores e conhecendo o gráfico da função $f(x) = \cos x$, podemos ter uma ideia do gráfico da função $g(x) = 2 \cos x$.



Figuras: © DAE

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Comparando os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 2\cos x$, essas funções têm o mesmo período?
2. Se sobrepormos esses dois gráficos, eles coincidirão?
3. Essas duas funções têm o mesmo conjunto imagem?

Observe que, quando temos uma função definida no conjunto dos números reais na forma $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(mx + n)$ ou na forma $f(x) = a + b \cdot \cos\,(mx + n)$, pode-se verificar e demonstrar (não faremos aqui tal demonstração) que os números reais a, b, m e n de alguma maneira estão relacionados aos gráficos dessas funções, em que:

- a, $b \rightarrow$ indicam alteração no conjunto imagem da função;
- $m \rightarrow$ o período da função pode ser calculado por $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$;
- $n \rightarrow$ está relacionado ao deslocamento horizontal da curva.

Sugerimos, ainda nesta página, uma atividade exploratória que envolve a construção gráfica de diversas funções com a utilização da ferramenta *Winplot* (ou outra ferramenta que você tenha acesso). Essa ferramenta já foi utilizada em atividades propostas no Volume 1 desta coleção na obtenção de gráficos de outras funções.

Aplicações da função seno e da função cosseno

Apresentamos a seguir duas situações para exemplificar a utilização do estudo de funções trigonométricas. Analise detalhadamente cada uma dessas situações.

1ª situação

Uma partícula realiza movimento harmônico simples e sua posição x, em centímetro, em função do tempo t, em segundo, é dada por:

$$x(t) = 0{,}2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Vamos determinar a elongação máxima e o período de repetição do movimento dessa partícula.

- Para determinar a elongação máxima, basta determinar a maior imagem da função. Isso ocorre para o maior valor assumido pelo cosseno:

$$x(t) = 0{,}2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$x(t)_{\text{máximo}} = 0{,}2 \cdot 1 \rightarrow x(t)_{\text{máximo}} = 0{,}2\ \text{cm}$$

- O período de repetição pode ser determinado pelo período da função correspondente:

$$p = \frac{2\pi}{|m|}$$

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} \Rightarrow p = 4\ s$$

Portanto, a elongação máxima é 0,2 cm e o período é 4 s.

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Para que você possa perceber melhor o comportamento gráfico de diversas funções trigonométricas relacionadas à função seno e à função cosseno, sugerimos realizar as seguintes atividades utilizando a ferramenta *Winplot*.

1. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Depois, responda:

   a) Se os dois gráficos forem sobrepostos, o que é possível concluir sobre as curvas?

   b) Como você explica o gráfico da função g com base no gráfico da função f?

c) Essas duas funções têm o mesmo conjunto imagem? E o período dessas duas funções é o mesmo?

2. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos(4x)$. Depois, responda:

   a) Essas duas funções têm o mesmo conjunto imagem? E o período dessas duas funções é o mesmo?

   b) As curvas obtidas são iguais?

3. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 3 \operatorname{sen} x$. Depois, responda:

   a) Essas funções têm o mesmo período? Qual é o conjunto imagem de cada uma dessas funções?

   b) Para quais valores de x, essas duas funções têm a mesma imagem?

4. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = -3 + \cos(2x)$. Depois, responda:

   a) Como você explica o gráfico da função g em função do gráfico da função f?

   b) Essas funções têm o mesmo período? Qual é o conjunto imagem de cada uma dessas funções?

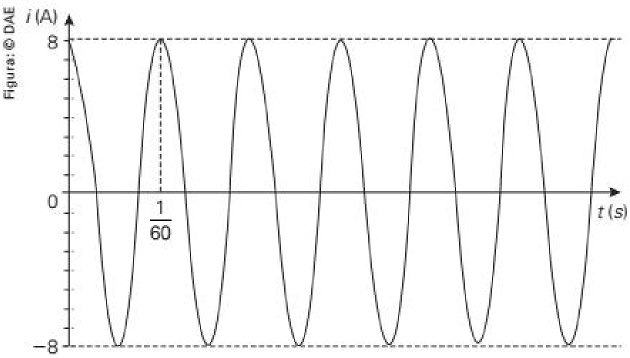
5. Explique:

   a) como obter o gráfico da função $f(x) = -\cos x$ em função do gráfico da função $g(x) = \cos x$.

   b) como obter o gráfico da função $f(x) = -\operatorname{sen} x$ em função do gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen} x$.

2ª situação

A energia elétrica é resultante do movimento ordenado dos elétrons. Esse movimento ordenado é conhecido como corrente elétrica. Em uma corrente alternada, a intensidade da corrente é periódica. Considere que essa corrente (i), em ampères (A), seja representada em função do tempo t, em segundo, conforme representado no gráfico a seguir:



Observando a função $i(t) = a \cdot \cos(m \cdot t)$, na qual a e m são números reais positivos, vamos determinar a lei de formação dessa função e a frequência dessa corrente, isto é, o número de ondas por segundo.

- Pelo gráfico temos que o máximo dessa função é igual a 8 e ocorre, por exemplo, quando $t = 0$. Desse modo, temos:

$$i(t) = a \cdot \cos(m \cdot t)$$
$$i(0) = a \cdot \cos(m \cdot 0)$$
$$8 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 8$$

- Observando no gráfico que o período dessa função é igual a $\frac{1}{60}$, podemos determinar o valor de m utilizando a fórmula do cálculo do período da função:

$$p = \frac{2\pi}{|m|}$$
$$\frac{1}{60} = \frac{2\pi}{|m|}$$
$$|m| = 120\pi \Rightarrow m = 120\pi \, (m > 0)$$

- A frequência (f) dessa corrente (frequência, em Física, é o inverso de período) é dada por:

$$f = \frac{1}{p}$$
$$f = \frac{1}{\frac{1}{60}} \Rightarrow f = 60 \text{ hertz}$$

Portanto, a lei de formação é $i(t) = 8 \cdot \cos(120\pi \cdot t)$ e a frequência dessa corrente é 60 hertz (ou 60 Hz).

Exercícios resolvidos

1. Determine o valor da expressão

$$y=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos\left(180^\circ\right)}{3\operatorname{sen}\left(90^\circ\right)+\cos\left(2\pi\right)}$$

$$y=\frac{-1-3\cdot(-1)}{3\cdot 1+1}=\frac{-1+3}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

2. Construa os gráficos das funções trigonométricas a seguir. Depois, determine o período, máximo, mínimo e o conjunto imagem de cada uma delas.

a) $f(x) = -1 + 3\operatorname{sen}(x)$

a) Máximo da função f: $\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$
$= -1 + 3\cdot 1 = 2$

Mínimo da função f: $\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$
$= -1 + 3\cdot(-1) = -4$

Período da função f: $p=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$

$\operatorname{Im}(f) = [-4, 2]$

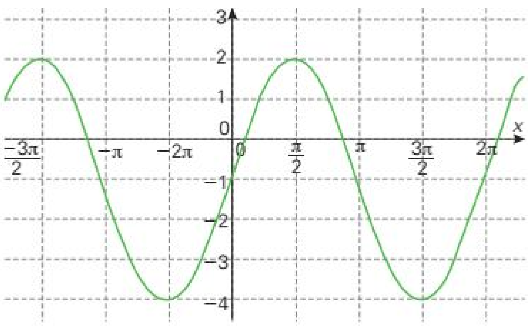
b) $g(x) = 2 - 2\cos(2x)$

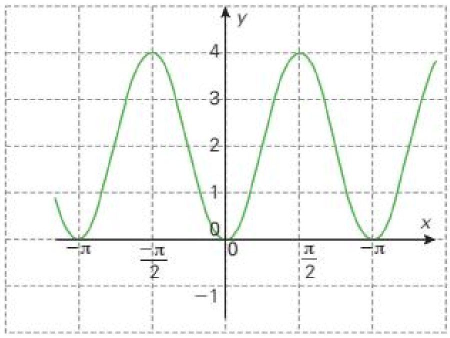
b) Máximo da função g: $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right) =$
$= 2 - 2\cdot(-1) = 4$

Mínimo da função g: $g(0) = 2 - 2\cos(2\cdot 0) =$
$= 2 - 2\cdot 1 = 0$

Período da função g: $p=\frac{2\pi}{|2|} = \pi$

$\operatorname{Im}(g) = [0, 4]$





Figuras: © DAE

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o valor de:

a) sen (1 500°) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) cos (2 565°) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) cos (−675°) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) cos (−3 540°) $\frac{1}{2}$

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ 1

2. Calcule o valor de:

a) sen (1 980°) 0

b) cos (1 350°) 0

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ −1

d) cos (18π) 1

3. Determine para quais valores reais de x existe θ tal que:

a) $\operatorname{sen}\theta=\left(\frac{2x-7}{5}\right)$

b) $\cos\theta=\left(\frac{x+1}{3}\right)$

4. Determine para quais valores reais de x existe $\pi \in \left]\pi, 2\pi\right[$ tal que sen $\alpha = 2x - 3$. 3. a) $1 \leqslant x \leqslant 6$

$1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$

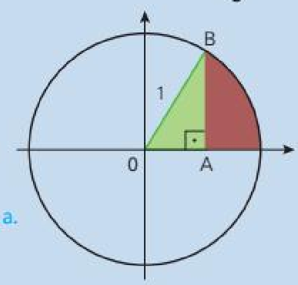
b) $-4 \leqslant x \leqslant 2$

5. Na figura a seguir, o vértice B do triângulo OAB é a extremidade de um arco de medida $\frac{\pi}{3}$ rad.

a) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ u. a.

b) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ u. c.

c) $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ u. a.

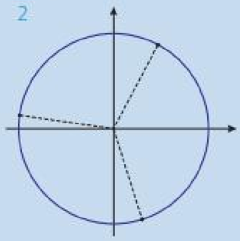


a) Calcule a área do triângulo OAB.

b) Calcule o perímetro do triângulo OAB.

c) Calcule a área pintada de vermelho.

6. Considere a sequência definida por $a_n = \frac{\pi}{4} \cdot n + \frac{\pi}{3}$ na qual n é um número natural não nulo. Calcule o valor de sen (a_{16}). $\frac{\sqrt{3}}{2}$



7. Nesta figura, estão representados os arcos de medidas 1 radiano, 3 radianos e 5 radianos.

Analise as afirmações e decida se cada uma delas é verdadeira ou falsa. Anote as respostas em seu caderno.

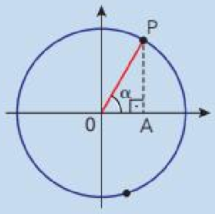
a) sen 3 < sen 1 V

b) cos 5 > cos 1 F

c) sen 3 < sen 5 F

d) sen 5 > cos 5 F

e) sen 1 > cos 1 V



8. Na circunferência trigonométrica a seguir, o ponto P é a extremidade de um arco de medida α.

a) Quais são as medidas dos segmentos OA e PA em função do ângulo α?

b) Qual é a medida do segmento OP?

c) Prove que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Respostas no Manual do Professor.

9. O limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica é igual a $\alpha = \frac{\alpha_1}{12 - q}$ em que α^1 é o primeiro termo e q é a razão da progressão geométrica. Além disso, esse limite só existe se $-1 < q < 1$. Assim, calcule o valor da expressão

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{24} + ...\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{27} + ...\right) - \frac{3}{2}$$

Resposta no Manual do Professor.

10. Indique as medidas de dois arcos α e β do 2º quadrante de tal maneira que sen α > sen β.

Resposta possível: $\alpha = 91°$ e $\beta = 100°$.

11. Qual é o período e o conjunto imagem de cada uma das funções a seguir?

a) $f(x) = -4 + 3 \cdot sen\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

b) $f(x) = 1 - \cos(4x)$

c) $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

a) Período 4π e Im(f) = [−7, −1].

b) Período $\frac{\pi}{2}$ e Im(f) = [0, 2].

c) Período 3π e Im(f) = [−2, 2].

12. Qual é o valor mínimo de cada uma das funções a seguir? E qual é o valor máximo?

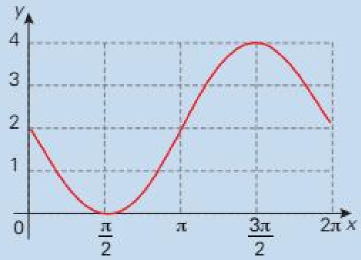
a) $f(x) = 7 - 2$ sen $(3x)$ a) Os valores mínimo e máximo são, respectivamente, iguais a 5 e 9.

b) $f(x) = -1 + 3\cos(x - \pi)$ b) Os valores mínimo e máximo são, respectivamente, iguais a −4 e 2.

c) $f(x) = \frac{4}{1 - 3\cos(x)}$ c) Os valores mínimo e máximo são, respectivamente, iguais a −2 e 1.

13. Qual é o valor máximo e qual é o valor mínimo da função definida por $f(x) = 1 + 3\cos^2(x)$?

Valor mínimo é 1; valor máximo é 4.



14. Observe um período completo do gráfico da função $f = A + B \cdot$ sen $(C \cdot x)$, com A, B e C constantes reais.

a) Qual é o período da função f? a) Período: 2π

b) Qual é o conjunto imagem da função f? b) Im(f) = [0, 4]

c) A função f pode ser t por $f(x) = 2 - 2 \cdot$ sen (x)? Justifique sua resposta. c) $f(x) = 2 - 2 \cdot$ sen (x)

15. No gráfico a seguir, está representado um período completo da função f, definida por $f(x) = 3 \cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)$.

Cada vez que escolhemos um ponto P pertencente ao gráfico da função e não pertencente ao eixo das abscissas, é determinado um triângulo OAP.

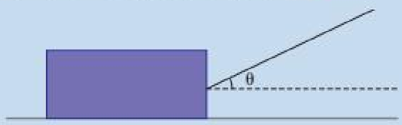
Figuras: © DAE

a) Qual é a medida da altura máxima do triângulo OAP? a) 3 u.c.

b) Qual é a área máxima do triângulo OAP? b) 6π u.a.

16. Há uma relação que permite calcular o trabalho de uma força F no deslocamento d de um corpo T = F · d · cos θ, conforme ilustrado abaixo:

a) Nessa relação, qual é o valor do ângulo θ para se ter o maior valor possível para T? 0°



b) Obtenha o trabalho realizado em um percurso de 5 m, sendo $\theta = 60°$ e F = 10 N. T = 25 N · m

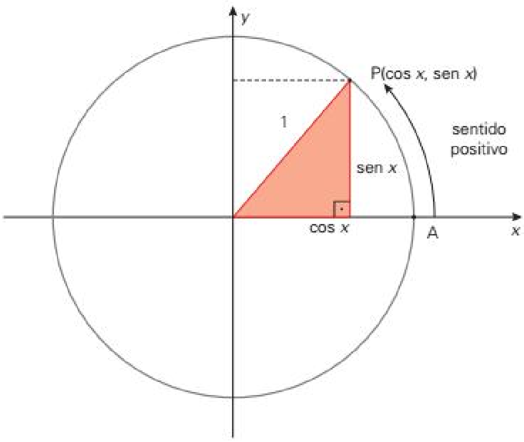
17. Elabore uma situação semelhante à atividade anterior, relacionando a Física com a Matemática. Depois, troque com um colega para que cada um resolva a situação que o outro criou. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 5

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Quando definimos seno e cosseno de um arco em uma circunferência trigonométrica, vimos que a todo arco corresponde um valor para o seno e outro valor para o cosseno. No plano cartesiano, esses valores são as coordenadas do ponto correspondente à extremidade do arco.

Observe a seguir um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 1 e os catetos sendo o seno e o cosseno do ângulo x:



Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:

$$1^2 = (\text{sen}\, x)^2 + (\cos x)^2$$

$$\downarrow (\text{sen}\, x)^2 = \text{sen}^2 x \text{ e } (\cos x)^2 = \cos^2 x$$

$$1 = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$$

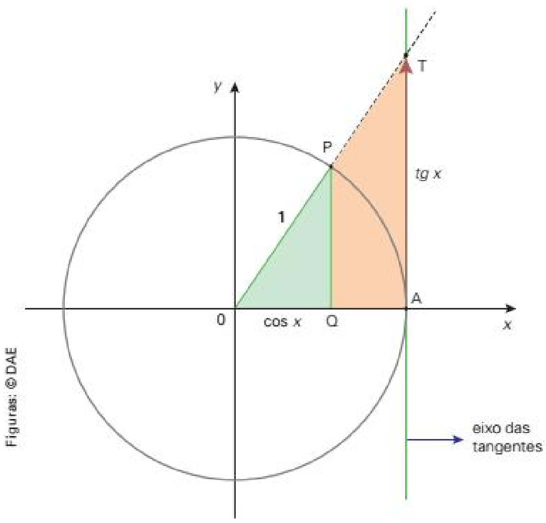
relação trigonométrica

> Para qualquer arco real x, vale a relação trigonométrica:
>
> $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Essa relação permite que, conhecendo uma das duas razões trigonométricas (seno ou cosseno) e o quadrante a que pertence o arco x, determinemos a outra razão trigonométrica. Tal relação é conhecida por **relação fundamental da Trigonometria.**

OBSERVAÇÃO:
Além da relação fundamental da Trigonometria, existem outras relações trigonométricas que veremos neste capítulo. Antes, observaremos a ideia geométrica de tangente de um arco na circunferência trigonométrica.

A tangente de um arco na circunferência



Na circunferência trigonométrica, marcamos um arco AP de medida x. Ligamos a extremidade desse arco ao centro da circunferência e prolongamos esse segmento até encontrar o eixo das tangentes no ponto T (o eixo das tangentes é paralelo ao eixo das ordenadas, passando pela origem A dos arcos), conforme indicado na figura acima. O segmento orientado AT se estiver para cima do eixo das abscissas será positivo, mas se estiver para baixo do eixo das abscissas será negativo. No segmento AT, A é a origem do arco. O segmento AT representa a tangente do arco x.

Observando que os triângulos retângulos OPQ e OTA são semelhantes, temos:

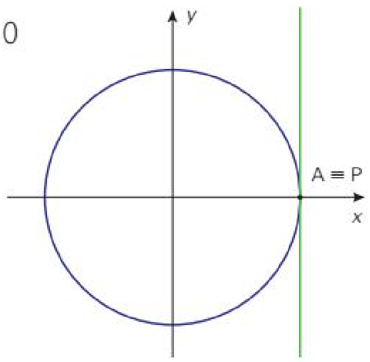
$$\frac{AT}{QP} = \frac{OA}{OQ}$$

$$\frac{\text{tg}\,x}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$$

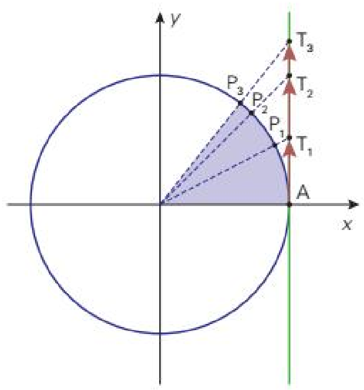
Essa relação trigonométrica também poderia ser obtida aplicando a tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo OPQ, mas a interpretação geométrica da tangente apresentada na figura acima nos permite observar o comportamento da tangente quando o arco x varia ao longo da circunferência trigonométrica.

Agora, observe a seguir, não apenas os valores que a tangente assume, como também os sinais em cada quadrante e os arcos para os quais a tangente não é definida.

- $x = 0$



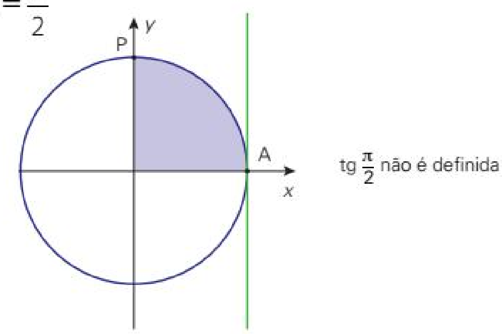
- Para arcos do 1º quadrante (posições P_1, P_2 e P_3):



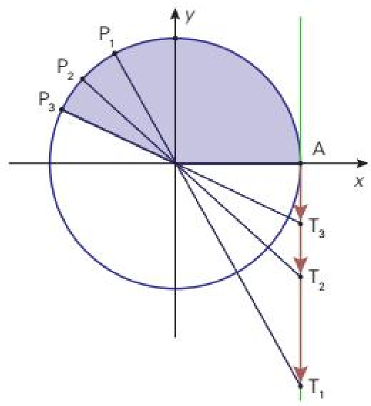
Figuras: © DAE

À medida que x aumenta, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, aumenta o valor da tangente. Além disso, para x no 1º quadrante, a tangente é positiva.

- $x = \frac{\pi}{2}$

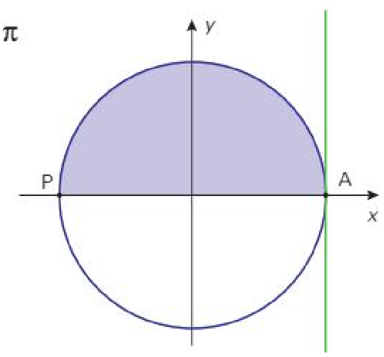


- Para arcos do 2º quadrante (posições P_1, P_2 e P_3):



À medida que x aumenta, para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, aumenta o valor da tangente. Note que $AT_1 < AT_2 < AT_3$. Além disso, para x no 2º quadrante, a tangente é negativa.

- $x = \pi$



Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

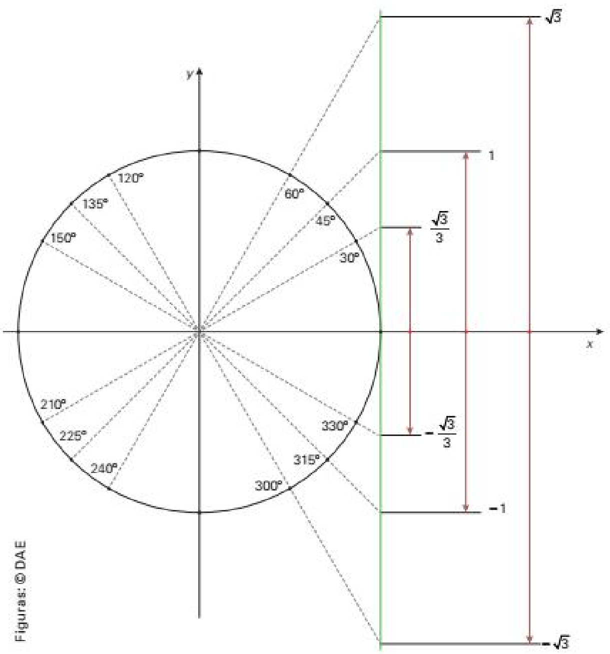
1. Aumentando-se as medidas dos arcos no 3º quadrante, o que ocorre com a tangente?
2. É correto dizer que se o arco no 3º quadrante se aproxima de 270° a tangente tende ao infinito?
3. E no 4º quadrante, aumentando-se as medidas dos arcos, o que ocorre com a tangente?

Observações:

1. Conhecendo o sinal de sen x e o sinal de cos $\boldsymbol{x}$, o sinal da tg x é determinado utilizando a relação $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$.

2. No caso de $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$, de acordo com as ilustrações anteriores, a reta contendo o segmento que liga o centro da circunferência trigonométrica à extremidade do arco é paralela ao eixo das tangentes. Desse modo, não existe a tangente. Além disso, observe que o cosseno desses dois arcos se anula.

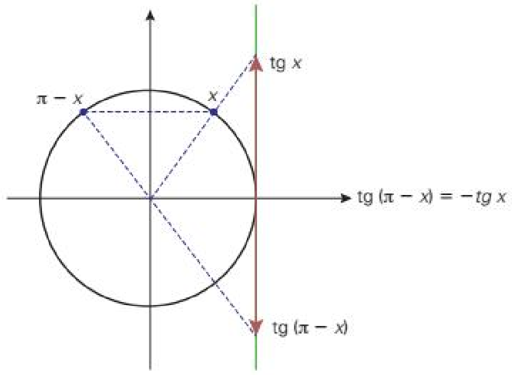
No capítulo anterior, vimos que podemos calcular o seno e o cosseno de um arco com extremidade no 2º quadrante, no 3º quadrante ou no 4º quadrante em função das mesmas razões seno e cosseno de um arco do 1º quadrante. Na figura a seguir, observe os valores das tangentes de alguns arcos notáveis.



Figuras: © DAE

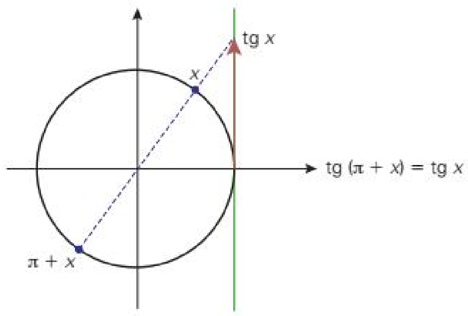
De modo geral, seja x um arco com extremidade no 1º quadrante, temos:

- Arco com extremidade no 2º quadrante.



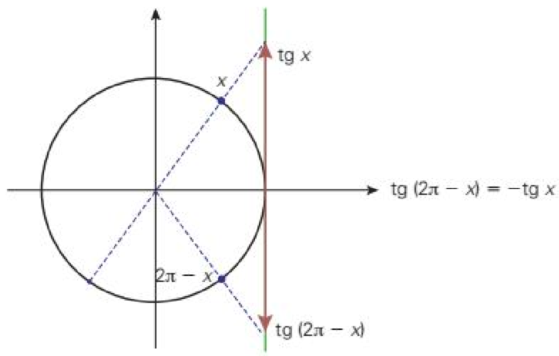
Note que os arcos de medidas x e $\pi - x$, indicados na figura acima, têm extremidades em pontos simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

- Arco com extremidade no 3º quadrante.



Nesse caso, as extremidades dos arcos x e $\pi + x$ são pontos simétricos em relação à origem do sistema de coordenadas cartesianas.

- Arco com extremidade no 4º quadrante.



Agora, os arcos x e $2\pi - x$ têm extremidades em pontos simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Outras razões trigonométricas

Até aqui vimos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na circunferência. Além disso, obtivemos duas relações trigonométricas importantes:

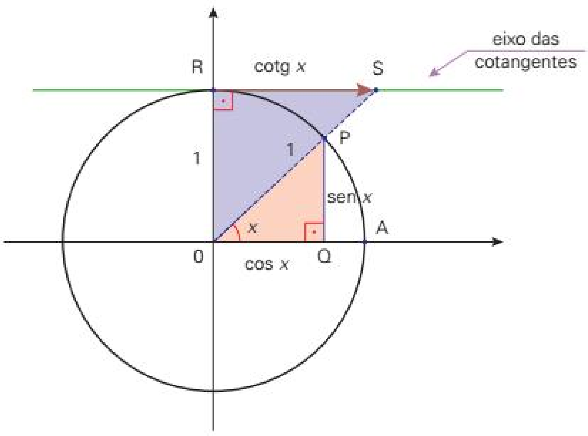
$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \left(\cos x \neq 0\right)$$

Agora, veremos, também na circunferência trigonométrica, as razões trigonométricas cotangente, cossecante e secante.

A cotangente de um arco na circunferência



Na circunferência trigonométrica, marcamos um arco AP de medida x. Ligamos a extremidade desse arco ao centro da circunferência e prolongamos esse segmento até encontrar o eixo das cotangentes no ponto S (o eixo das cotangentes é paralelo ao eixo das abscissas, passando pelo ponto R), conforme indicado na figura acima. O segmento orientado RS se estiver para a direita do eixo das ordenadas será positivo, mas se estiver para a esquerda do eixo das ordenadas será negativo. O segmento RS representa a cotangente do arco x.

Observando que os triângulos ORS e OPQ são semelhantes, temos:

$$\frac{RS}{OQ} = \frac{OR}{PQ}$$

$$\frac{\text{cotg}\, x}{\cos x} = \frac{1}{\text{sen}\, x} \Rightarrow \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \quad (\text{sen}\, x \neq 0)$$

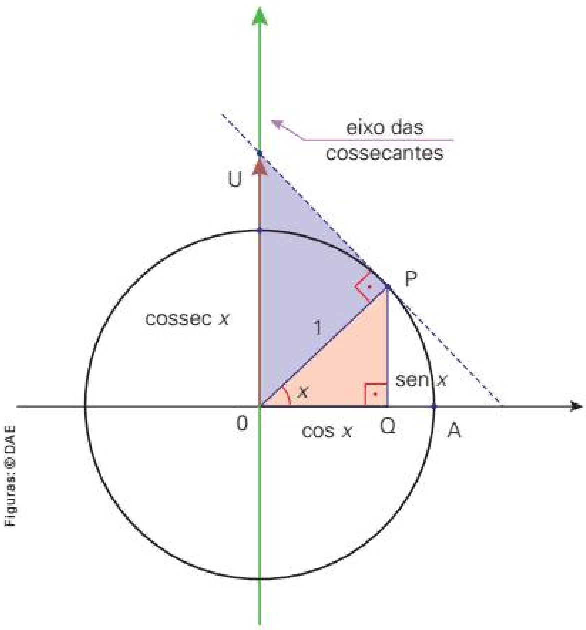
Observações:

1. Para os valores em que a cotangente e a tangente são definidas, podemos dizer que uma é o inverso da outra. Além disso, essas razões trigonométricas têm os mesmos sinais nos quadrantes.

2. Não faremos a análise da cotangente dos arcos ao longo de uma volta na circunferência. Para o cálculo da cotangente de um arco, podemos utilizar, como acima observado, os valores do cosseno e do seno desse arco.

A cossecante de um arco na circunferência

Marcamos o arco AP de medida x na circunferência trigonométrica. Traçamos uma reta tangenciando a circunferência no ponto P até encontrar o eixo das ordenadas, que é também o eixo das cossecantes, no ponto U, conforme indicado na figura a seguir. O segmento orientado OU se estiver para cima do eixo das abscissas será positivo, mas se estiver para baixo do eixo das abscissas será negativo. O segmento OU representa a cossecante do arco de medida x.



Figuras: © DAE

Observando que os triângulos OUP e OPQ são semelhantes, temos:

$$\frac{OU}{OP} = \frac{OP}{PQ}.$$

$$\frac{\text{cossec}\, x}{1} = \frac{1}{\text{sen}\, x} \Rightarrow \text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \left(\text{sen}\, x \neq 0\right)$$

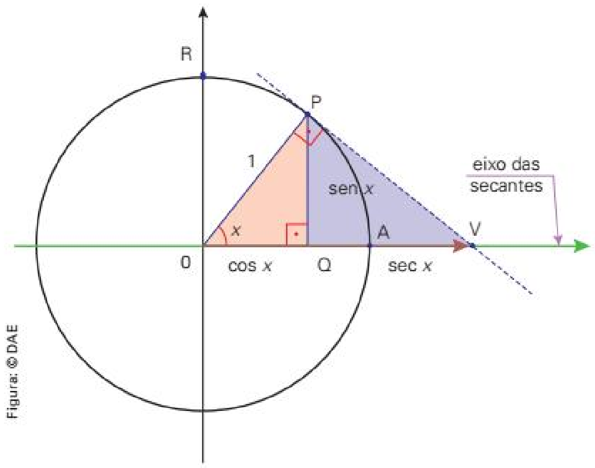
Observações:

1. Para os arcos em que é definida, a cossecante de um arco pode ser compreendida como o inverso do seno desse mesmo arco. Além disso, cossecante e seno têm os mesmos sinais nos quadrantes.

2. Não faremos a análise da cossecante dos arcos ao longo de uma volta na circunferência. Para o cálculo da cossecante de um arco, podemos utilizar, como acima observado, os valores do seno desse arco.

A secante de um arco na circunferência

Marcamos o arco AP de medida x na circunferência trigonométrica. Traçamos uma reta tangenciando a circunferência no ponto P até encontrar o eixo das abscissas, que é também o eixo das secantes, no ponto V, conforme indicado na figura a seguir. O segmento orientado OV se estiver para a direita do eixo das ordenadas será positivo, mas se estiver para a esquerda do eixo das ordenadas será negativo. O segmento OV representa a secante do arco de medida x.



Utilizando a semelhança entre os triângulos OPV e OPQ, temos:

$$\frac{OV}{OP} = \frac{OP}{OQ}$$

$$\frac{\sec x}{1} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0)$$

Observações:

1. Para os arcos em que é definida, a secante de um arco pode ser compreendida como o inverso do cosseno desse mesmo arco. Além disso, secante e cosseno têm os mesmos sinais nos quadrantes.

2. Não faremos a análise da secante dos arcos ao longo de uma volta na circunferência. Para o cálculo da secante de um arco, podemos utilizar, como acima observado, os valores do cosseno desse arco.

As relações apresentadas até aqui são conhecidas como relações trigonométricas. Resumimos no quadro a seguir essas relações para um arco x, considerando as condições de existências, são:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \qquad \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

Exemplo:

Vamos obter outras duas relações trigonométricas denominadas relações decorrentes. As duas são obtidas com base na relação fundamental da Trigonometria. Observe.

- Dividimos a relação fundamental

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$):

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$$

- Dividimos a relação fundamental

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\text{sen}^2 x$ ($\text{sen}\, x \neq 0$):

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \Rightarrow \text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$$

Equações trigonométricas

Assim como existem equações polinomiais, equações exponenciais e equações logarítmicas, por exemplo, também existem equações trigonométricas. São exemplos de equações trigonométricas:

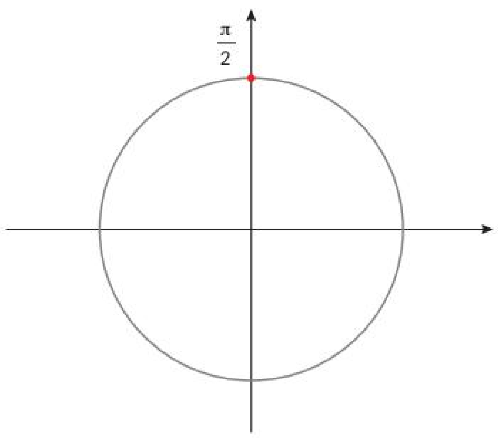
- $\text{sen}\,(x) = -1$
- $\cos\,(4x) = 0{,}5$
- $\text{sen}(x) \cdot \cos(x) = 0$
- $\text{tg}^2 x - 4\,\text{tg}x + 3 = 0$

Um problema a ser enfrentado na resolução de uma equação trigonométrica é que, quando esse tipo de equação admite mais de uma solução, precisamos generalizar suas soluções. Essa generalização requer a compreensão de que, ao encontrar uma solução ou mais na primeira volta da circunferência trigonométrica, temos infinitos outros arcos côngruos que também são soluções.

Exemplo:

Consideremos a equação $\text{sen}\,x = 1$ e observemos suas soluções.

- A princípio, pensando na primeira volta, indicamos o arco de medida $\frac{\pi}{2}$ como solução:



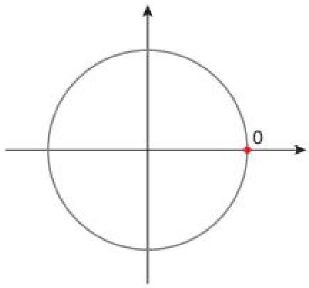
- Porém, existem infinitos outros arcos que também são soluções dessa equação. Por exemplo, todos os arcos a seguir têm extremidade no mesmo ponto indicado na figura acima; portanto, também são soluções dessa equação:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{\pi}{2} - 2\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi; \frac{\pi}{2} - 4\pi; \frac{\pi}{2} + 6\pi; \frac{\pi}{2} - 6\pi$$

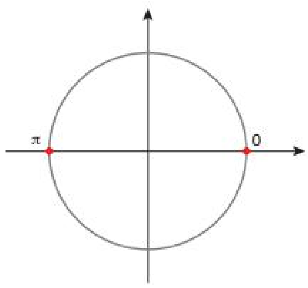
- Vamos representar a expressão geral de todos os arcos côngruos àquele da primeira volta. Dessa forma, podemos dizer que todas as soluções da equação dada são da forma:

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \left(\text{com } k \in \mathbb{Z}\right)$$

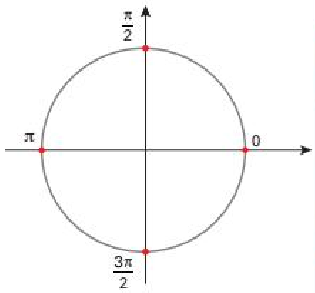
Antes de considerar outros exemplos de equações trigonométricas, é importante que você observe as seguintes generalizações para determinados arcos indicados na circunferência trigonométrica:



$x = k \cdot 2\pi$	
VALORES DE k	ARCOS
0	0
1	2π
–1	-2π
2	4π
–2	-4π
⋮	⋮



$x = k \cdot \pi$	
VALORES DE k	ARCOS
0	0
1	π
–1	$-\pi$
2	2π
–2	-2π
⋮	⋮

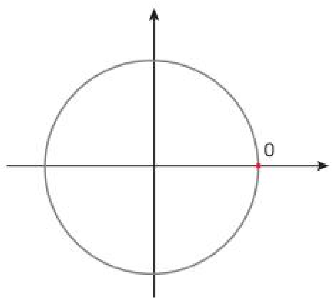


$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$	
VALORES DE k	ARCOS
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$
–1	$-\frac{\pi}{2}$
2	π
–2	$-\pi$
⋮	⋮

A seguir, observe como podemos obter as soluções de algumas equações trigonométricas relacionadas a seno, cosseno ou tangente de arcos.

Exemplos:

1. Vamos obter todas as soluções da equação trigonométrica $\cos\,(x) = 1$.



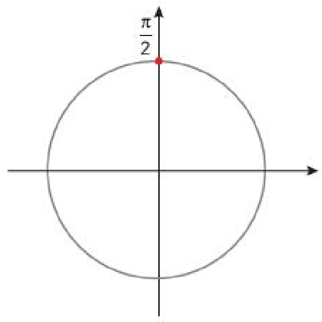
Figuras: © DAE

- Na primeira volta da circunferência, localizamos as extremidades dos arcos que satisfazem tal equação, como na figura anterior.
- Generalizamos as infinitas soluções dessa equação:

$$x = k \cdot 2\pi \quad (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

2. Considere a equação trigonométrica sen $(2x) = 1$. Vamos obter uma expressão que forneça todas as soluções dessa equação e, depois, escrever as soluções que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$.

- Localizamos na circunferência a extremidade do arco $2x$ tal que sen $(2x) = 1$.



- Arcos que têm extremidade em $\frac{\pi}{2}$ são da forma $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$. Dessa maneira, temos a expressão de todas as soluções:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

- Como k é um número inteiro, com base na expressão anterior, atribuímos valores a k para obter as soluções no intervalo $[0, 2\pi]$:

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

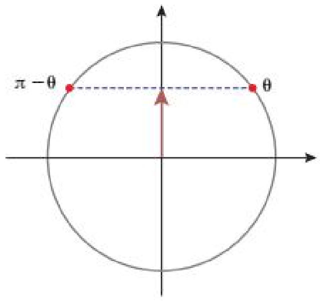
$$k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4} \ (\text{fora do intervalo})$$

Assim, existem duas soluções para essa equação no intervalo considerado: $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$

Observação:

Por causa da diversidade de tipos de equações e maneiras de representar as soluções, muitas vezes nos deparamos com a dificuldade em generalizar tais soluções. Com o objetivo de facilitar essa tarefa, apresentamos três casos envolvendo as razões seno, cosseno ou tangente. Em cada caso, apresentamos um exemplo.

1º caso: equação na incógnita x da forma sen x = sen θ.



Se as extremidades dos arcos de medida x e θ são simétricas em relação ao eixo das ordenadas, como sugere a figura acima, temos que as soluções desse tipo de equação podem ser dadas por:

$$x = \theta + k \cdot 2\pi$$

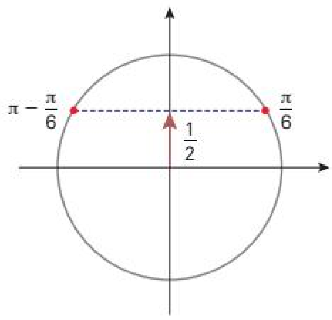
ou

$$x = \pi - \theta + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Exemplos:

Vamos resolver a equação sen $x = \frac{1}{2}$.

- Nesse caso, as extremidades dos arcos na circunferência trigonométrica são os pontos representados na circunferência a seguir.



Figuras: © DAE

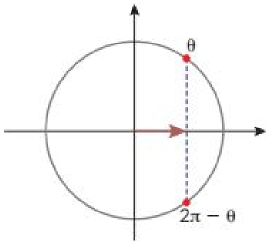
- As soluções dessa equação são representadas por:

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

2º caso: equação na incógnita x da forma $\cos x = \cos \theta$.



Se as extremidades dos arcos de medida x e θ são simétricas em relação ao eixo das abscissas, como sugere a figura acima, temos que as soluções desse tipo de equação podem ser dadas por:

$$x = \theta + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = -\theta + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

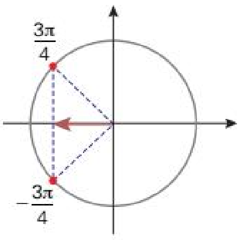
Porém, essas duas expressões podem ser resumidas em uma expressão apenas:

$$x = \pm\theta + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Exemplo:

Vamos resolver a equação $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Nesse caso, as extremidades dos arcos na circunferência trigonométrica são os pontos representados na circunferência a seguir.



- Obtendo as soluções na primeira volta:

– no 2º quadrante, temos $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$;

– no 3º quadrante, temos $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

- As soluções dessa equação são representadas por:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

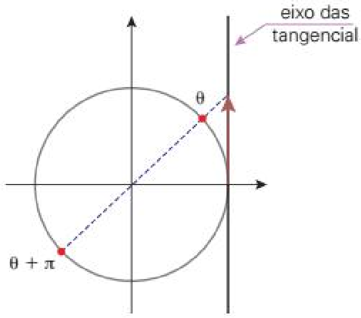
ou

$$x = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Resumindo essas duas expressões em uma expressão apenas, temos:

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

3º caso: equação na incógnita x da forma $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \theta$.



Se as extremidades dos arcos de medida x e θ são simétricas em relação ao centro da circunferência, como sugere a figura acima, temos que as soluções desse tipo de equação podem ser dadas por:

$$x = \theta + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = \theta + \pi + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

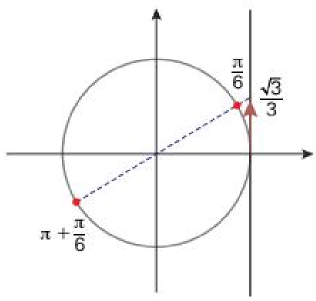
Nesse caso, essas duas expressões também podem ser representadas por uma só:

$$x = k \cdot \pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Exemplo:

Vamos resolver a equação $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- Nesse caso, as extremidades dos arcos na circunferência trigonométrica são os pontos representados na circunferência a seguir.



Figuras: © DAE

- As soluções dessa equação são representadas por:

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Resumindo essas duas expressões em uma expressão apenas, temos:

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Exercícios resolvidos

1. Simplifique a expressão, $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\sec x}$ com $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

$$\frac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{cotg}(x)}{\sec(x)} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}+\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}}{\dfrac{1}{\cos(x)}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)}{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x)}}{\dfrac{1}{\cos(x)}} =$$

$$= \frac{1}{\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x)}\cdot\cos(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{cossec}(x)$$

Assim, $\dfrac{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{cotg}(x)}{\sec(x)} = \operatorname{cossec}(x)$.

2. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

a)

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi\ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$ ou

$x = \dfrac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi\ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \text{ ou } x = \dfrac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b)

$\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi\ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$ ou

$x = \dfrac{7\pi}{4} + k\cdot 2\pi\ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{4} + k\cdot 2\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c)

$\operatorname{tg}(x) = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot\pi\ (\text{com } k \in \mathbb{Z})$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + k\cdot\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

1. Então, $\operatorname{sen} x = -\dfrac{12}{13}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{12}{5}$, $\sec x = -\dfrac{13}{5}$, $\operatorname{cossec} x = -\dfrac{13}{12}$ e $\operatorname{cotg} x = \dfrac{5}{12}$.

2. Logo, $\operatorname{sen} x = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos x = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\sec x = \sqrt{10}$, $\operatorname{cossec} x = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ e $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{3}$.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Se $\cos x = -\dfrac{5}{13}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule os valores de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cossec} x$ e $\operatorname{cotg} x$.

2. Se $\operatorname{tg} x = 3$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule os valores de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cossec} x$ e $\operatorname{cotg} x$.

3. Calcule o valor de k tal que $\operatorname{sen} x = x = \dfrac{k-1}{2}$ e $\cos x = \dfrac{k}{8}$
$k = 4$

4. Simplifique a expressão $[1 + \operatorname{tg}^2 x]\cdot[1 - \operatorname{sen}^2 x]$, com $\cos x \neq 0$. 1

5. Mostre que é verdadeira a igualdade trigonométrica, na qual $\dfrac{2-\operatorname{sen}^2-2\cos x}{1-\cos x} = 1-\cos x$ $= 1 - \cos x$, com $\cos x \neq 1$. Resposta no Manual do Professor.

6. Se $\operatorname{sen} x = m$ e $\cos x = n$, calcule, em função de m e n, o valor de $[\operatorname{sen} x + \cos x]^2$. $1 + 2\cdot m\cdot n$

7. Sabendo que $\operatorname{tg}^2 x - 4\cdot\sec x + 5 = 0$, calcule o valor de $\cos x$. $\cos x = \dfrac{1}{2}$

8. A expressão $\dfrac{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x}{\sec x - \cos x}$ é equivalente a $\operatorname{cotg}^n x$, para $\cos x \neq 0$, $\cos x \neq \pm 1$ e $\operatorname{sen} x \neq 0$. Calcule o valor de n.
$n = 3$

9. Considerando a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

a) determine as soluções dessa equação no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) escreva a expressão que representa todas as soluções dessa equação. Respostas no Manual do Professor.

10. Qual é o número de soluções da equação $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $[0, 4\pi]$? No intervalo $[0, 4\pi]$, essa equação apresenta quatro soluções.

11. Determine as soluções para a equação $\operatorname{tg}(x) = 1$ no intervalo $[-\pi, 2\pi]$. Resposta no Manual do Professor.

12. Calcule a soma das raízes da equação $2\cdot\operatorname{sen}^2(x) - 3\cdot\operatorname{sen}(x) + 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.
Resposta no Manual do Professor.

13. Qual é a menor raiz positiva da equação $81^{\cos x(4x+\pi)} = 9$? $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}\right\}$

14. Considere as funções $f(x) = 3x$ e $g(x) = -1 + 2\cdot\cos(x)$.

a) Determine a função $g(f(x))$. $g(f(x)) = -1 + 2\cos(3x)$

b) Resolva a equação $g(f(x)) = 1$. $S = \left\{x \in R \,\middle|\, x = k\cdot\dfrac{2\pi}{3}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

15. Considerando $2\cdot\operatorname{sen}^2(x) - 10\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + 8\cdot\cos^2(x) = 0$, calcule os possíveis valores para $\operatorname{tg}(x)$.

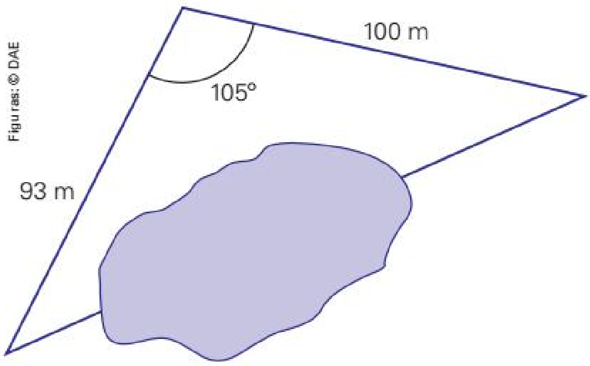
$\operatorname{tg}(x) = 1$ ou $\operatorname{tg}(x) = 4$.

CAPÍTULO 6

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

No levantamento topográfico de uma área, era necessário demarcar uma região na forma triangular como sugere a figura abaixo. Chegou-se à conclusão de que era possível obter diretamente no local as medidas de dois dos lados e do ângulo entre eles. Havia uma dificuldade de acesso para obter a medida aproximada do terceiro lado: parte de um lago estava dentro dessa região.

Figuras: © DAE



Utilizando a lei dos cossenos, assunto estudado no volume 1 desta coleção, e uma calculadora, foi possível obter a medida desconhecida. Considerando x a medida desconhecida, temos:

$$x^2 = 93^2 + 100^2 - 2 \cdot 93 \cdot 100 \cdot \cos 105°$$

$$x^2 = 8649 + 10000 - 18600 \cdot \cos 105°$$

$\downarrow$ calculadora: $\cos 105° \cong -0{,}2588$

$$x^2 \cong 18649 - 18600 \cdot (-0{,}2588)$$

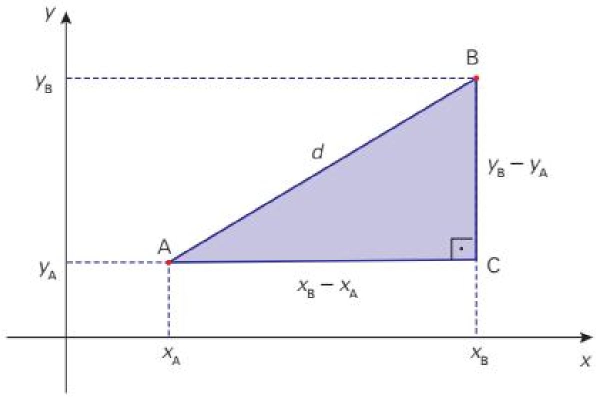
$$x^2 \cong 23462{,}68 \Rightarrow x \cong 153{,}18 \text{ m}$$

Portanto, a medida do terceiro lado dessa região triangular é, aproximadamente, 153,18 m.

Note que, no cálculo acima, apareceu o cosseno do arco 105°. Como esse arco corresponde à soma do arco de 45° com o arco de 60°, com base no conhecimento do seno e do cosseno desses dois arcos podemos determinar cos 105° por meio de uma relação trigonométrica que envolve a adição de arcos. Veremos a seguir.

Fórmulas para adição e subtração de arcos

Vamos retomar o cálculo da distância entre dois pontos de um plano cartesiano conhecidas suas coordenadas. Assim, considere, no plano cartesiano representado a seguir, os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.



A distância d entre os pontos A e B, indicada no triângulo retângulo acima, corresponde à medida da hipotenusa em que os catetos têm medidas $AC = |x_B - x_A|$ e $BC = |y_B - y_A|$. Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$d^2 = (|x_B - x_A|)^2 + (|y_B - y_A|)^2$$

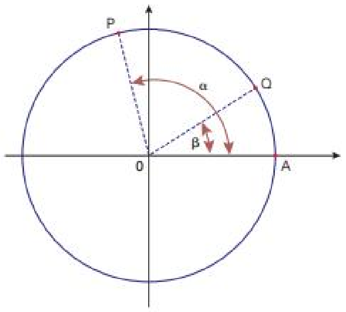
$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Vamos utilizar a relação que fornece a distância entre dois pontos quaisquer de um plano cartesiano em função das coordenadas desse pontos para obter a fórmula do cosseno da diferença de dois arcos.

Cosseno da diferença de dois arcos

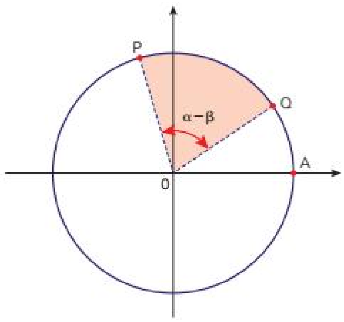
Na circunferência trigonométrica abaixo, vamos considerar dois arcos de medidas α e β, cujas extremidades estão indicadas pelos pontos P e Q, respectivamente.

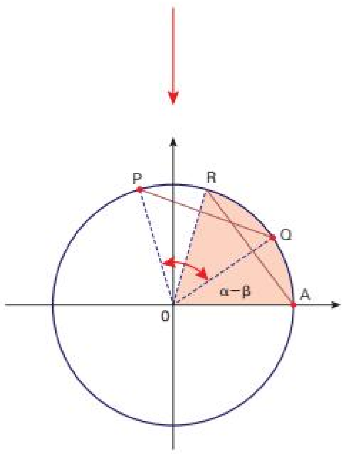


Como a circunferência é trigonométrica, esses pontos têm as seguintes coordenadas:

$$P(\cos\alpha, \text{sen}\alpha) \text{ e } Q(\cos\beta, \text{sen}\beta)$$

Vamos indicar, nessa mesma circunferência, o ponto R correspondente à extremidade do arco de medida igual à diferença entre as medidas dos arcos AP e AQ, isto é:





Figuras: © DAE

Observando que os arcos QP e AR são de mesma medida, as coordenadas do ponto R são dadas por:

$$R[\cos(\alpha-\beta), \text{sen}(\alpha-\beta)]$$

Além disso, os segmentos QP e AR têm o mesmo comprimento. Assim, considerando a distância entre dois pontos, as coordenadas dos pontos P, Q e R e também o ponto A(1, 0), temos:

$$d_{AR} = d_{QP}$$

Calculando separadamente essas distâncias:

- $d_{AR}=\sqrt{[1-\cos(\alpha-\beta)]^2+[0-\text{sen}(\alpha-\beta)]^2}$
  $d_{AR}=\sqrt{1-2\cos(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)+\text{sen}^2(\alpha-\beta)}$
  $d_{AR}=\sqrt{1-2\cos(\alpha-\beta)+1}$
  $d_{AR}=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}$

- $d_{QP}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\text{sen}\alpha-\text{sen}\beta)^2}$
  $d_{QP}=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos^2\beta+\text{sen}^2\alpha-2\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta+\text{sen}^2\beta}$
  $d_{QP}=\sqrt{\underbrace{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}_{1}+\underbrace{\cos^2\beta+\text{sen}^2\beta}_{1}-2\cos\alpha\cdot\cos\beta-2\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta}$
  $d_{QP}=\sqrt{2-2\cos\alpha\cdot\cos\beta-2\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta}$

Como tais distâncias são iguais, fazemos:

$$\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}=\sqrt{2-2\cos\alpha\cdot\cos\beta-2\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}\beta}$$

Elevando ao quadrado os dois membros dessa igualdade, podemos escrever:

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cdot\cos\beta-2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$

$$-2\cos(\alpha-\beta)=-2\cos\alpha\cdot\cos\beta-2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$

O cosseno da soma de dois arcos de medidas α e β é dado por:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$

Cosseno da soma de dois arcos

Utilizando a relação anterior para o cosseno da diferença de dois arcos, podemos obter outra relação trigonométrica para o cosseno da soma de dois arcos:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$$

$\downarrow$ fórmula anterior

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)$$

$\downarrow \cos(-\beta)=\cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

O cosseno da soma de dois arcos de medidas α e β é dado por:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Exemplo:

Vamos retornar à situação apresentada no início deste capítulo e calcular cosseno de 105º com base nos valores de cosseno e seno dos arcos 45º e 60º:

$$\cos 105^\circ=\cos(45^\circ+60^\circ)$$

$$\cos 105^\circ=\cos 45^\circ\cdot\cos 60^\circ-\operatorname{sen} 45^\circ\cdot\operatorname{sen} 60^\circ$$

$$\cos 105^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\Rightarrow\cos 105^\circ=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Seno da diferença de dois arcos

A relação que permite calcular o seno da diferença de dois arcos pode ser obtida considerando inicialmente arcos complementares na circunferência trigonométrica:

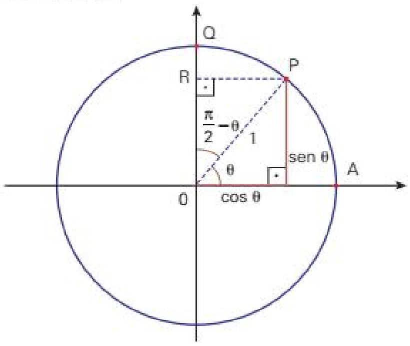


Figura: © DAE

Observando o triângulo ORP, temos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{\cos\theta}{1}=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{1}=\operatorname{sen}\theta$$

Note que os arcos θ e $\frac{\pi}{2}-\theta$ são complementares. Desse modo temos que, se dois arcos são complementares, o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Com base nesse resultado podemos obter a relação trigonométrica correspondente ao seno da diferença de dois arcos de medidas α e β:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$\downarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

O seno da diferença de dois arcos de medidas α e β é dado por:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

Seno da soma de dois arcos

A relação que permite calcular o seno da soma dos arcos de medidas α e β pode ser obtida com base na relação anterior, isto é:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)]$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta)-\operatorname{sen}(-\beta)\cdot\cos\alpha$$

$\downarrow \cos(-\beta)=\cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-(-\operatorname{sen}\beta)\cdot\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

O seno da soma de dois arcos de medidas α e β é dado por:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

Tangente da soma e tangente da diferença de dois arcos

Vamos obter, com base nas ideias anteriores, as relações que permitem calcular a tangente da soma e a tangente da diferença de dois arcos de medidas α e β.

- Soma dos arcos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

Dividindo o númerador e o denominador da fração por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Deixamos para você demonstrar a fórmula da tangente da diferença de dois arcos.

A tangente da soma e a tangente da diferença de dois arcos de medidas α e β são dadas por:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \text{ e}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

EXPLORANDO

Resolva os exercícios no caderno.

Utilize uma calculadora e, com o auxílio de um colega, explore a relação da tangente da soma de arcos.

1. Elabore uma tabela em seu caderno, como a sugerida a seguir, atribuindo valores em grau para os ângulos A, B e C internos de um triângulo não retângulo.

	A	B	C
1º triângulo	♦	♦	♦
2º triângulo	♦	♦	♦
3º triângulo	♦	♦	♦
4º triângulo	♦	♦	♦

2. Faça outra tabela em seu caderno, conforme sugerido a seguir, com os valores das correspondentes tangentes dos ângulos presentes na tabela anterior. Utilize uma calculadora.

	tg A	tg B	tg C
1º triângulo	♦	♦	♦
2º triângulo	♦	♦	♦
3º triângulo	♦	♦	♦
4º triângulo	♦	♦	♦

3. Para cada um dos triângulos acima, calcule para preencher a tabela a seguir:

	tg A + tg B + tg C	tg A · tg B · tg C
1º triângulo	♦	♦
2º triângulo	♦	♦
3º triângulo	♦	♦
4º triângulo	♦	♦

4. Comparando os valores de $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ e $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$, qual conclusão você obteve?

5. Demonstre que, se $A + B + C = 180°$, com A, B e C ângulos diferentes de 90°, tem-se $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$.

Fórmulas de duplicação de arcos

Após obtermos as fórmulas de seno, cosseno e tangente da soma e da diferença de arcos, podemos também estabelecer relações que expressam essas mesmas razões trigonométricas para o dobro de um arco em função do próprio arco. São as chamadas fórmulas de duplicação de arcos.

Seno do dobro de um arco

Na fórmula do seno da soma de dois arcos de medidas α e β, vamos substituir essas medidas por *x*, ou seja:

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\,\beta+\text{sen}\,\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\text{sen}(x+x)=\text{sen}\,x\cdot\cos x+\text{sen}\,x\cdot\cos x$$
$$\text{sen}(2x)=2\cdot\text{sen}\,x\cdot\cos x$$

$$\boxed{\text{sen}(2x)=2\cdot\text{sen}\,x\cdot\cos x}$$

Exemplos:

São exemplos da aplicação da relação trigonométrica do seno do dobro de um arco:

- $\text{sen}(90°)=2\cdot\text{sen}(45°)\cdot\cos(45°)$
- $\text{sen}(2\pi)=2\cdot\text{sen}\,\pi\cdot\cos\pi$
- $\text{sen}(45°)=2\cdot\text{sen}\left(\frac{45°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{45°}{2}\right)$
- $\text{sen}(\alpha)=2\cdot\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- $\text{sen}(4x)=2\cdot\text{sen}(2x)\cdot\cos(2x)$

Cosseno do dobro de um arco

Na fórmula do cosseno da soma de dois arcos de medidas α e β, vamos substituir essas medidas por *x*, ou seja:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$$
$$\cos(x+x)=\cos x\cdot\cos x-\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x$$
$$\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x$$

$$\boxed{\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x}$$

Exemplos:

São exemplos da aplicação da relação trigonométrica do cosseno do dobro de um arco:

- $\cos(90°)=\cos^2(45°)-\text{sen}^2(45°)$
- $\cos(2\pi)=\cos^2(\pi)-\text{sen}^2(\pi)$
- $\cos(4x)=\cos^2(2x)-\text{sen}^2(2x)$
- $\cos(\alpha)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Observação:

Duas outras relações podem ser obtidas para o cosseno do dobro de um arco. Basta observar a relação fundamental da Trigonometria e a relação $\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x$, isto é:

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x$$
$$\cos(2x)=1-\text{sen}^2 x-\text{sen}^2 x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos(2x)=1-2\text{sen}^2 x$$
$$\cos(2x)=\cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos(2x)=2\cos^2 x-1$$

Tangente do dobro de um arco

Na fórmula da tangente da soma de dois arcos de medidas α e β, vamos substituir essas medidas por *x*, ou seja:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta}$$

$$\text{tg}(x+x)=\frac{\text{tg}\,x+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x\cdot\text{tg}\,x}$$

$$\text{tg}\,(2x)=\frac{2\cdot\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x^2x}$$

$$\boxed{\text{tg}(2x)=\frac{2\cdot\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2x}}$$

Exemplos:

São exemplos da aplicação da relação trigonométrica da tangente do dobro de um arco:

- $tg(60°) = \dfrac{2 \cdot tg(30°)}{1 - tg^2(30°)}$

- $tg(2\pi) = \dfrac{2 \cdot tg(\pi)}{1 - tg^2(\pi)}$

- $tg(6x) = \dfrac{2 \cdot tg(3x)}{1 - tg^2(3x)}$

- $tg(\alpha) = \dfrac{2 \cdot tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

Aplicações das fórmulas de duplicação de arcos

O quadro a seguir resume as três fórmulas de duplicação de arcos:

$$sen(2x) = 2 \cdot sen x \cdot cos x$$

$$cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$$

$$tg(2x) = \frac{2 \cdot tg x}{1 - tg^2 x}$$

Apresentamos a seguir exemplos da utilização dessas fórmulas. Procure observá-los com atenção e troque ideias com seus colegas a respeito dos resultados.

Exemplos:

1. Vamos calcular sen (2β) considerando que sen β − cos $\beta = \dfrac{1}{2}$.

- Um procedimento para obter o valor de sen (2β) é elevar ao quadrado a igualdade fornecida, ou seja:

$$(sen\beta - cos\beta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$sen^2\beta - 2 \cdot sen\beta \cdot cos\beta + cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

$$1 - sen(2\beta) = \frac{1}{4}$$

$$-sen(2\beta) = -\frac{3}{4} \Rightarrow sen(2\beta) = \frac{3}{4}$$

Nesse procedimento, fizemos aparecer duas relações importantes: a relação fundamental da Trigonometria e também a relação que fornece o dobro do arco.

2. Utilizando as fórmulas de duplicação de arcos, podemos obter a fórmula que permite calcular o seno do triplo de um arco em função do seno desse arco.

- Expressamos o arco 3θ como a soma dos arcos 2θ e θ e utilizamos a fórmula do seno da soma de dois arcos, ou seja:

$$sen(3\theta) = sen(2\theta + \theta)$$

$$sen(3\theta) = sen(2\theta) \cdot cos\theta + sen\theta \cdot cos 2\theta$$

- Substituindo sen (2θ) = 2sen θ cos θ e cos (2θ) = = $cos^2\theta - sen^2\theta$ na igualdade acima, temos:

$$sen(3\theta) = 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta \cdot cos\theta + sen\theta \cdot \left(cos^2\theta - sen^2\theta\right)$$

$$sen(3\theta) = 2 \cdot sen\theta \cdot cos^2\theta + sen\theta \cdot cos^2\theta - sen^3\theta$$

- Pela relação fundamental da Trigonometria, podemos substituir $cos^2\theta$ por $1 - sen^2\theta$:

$$sen(3\theta) = 2 \cdot sen\theta \cdot \left(1 - sen^2\theta\right) + sen\theta \cdot \left(1 - sen^2\theta\right) - sen^3\theta$$

$$sen(3\theta) = 2 \cdot sen\theta - 2 \cdot sen^3\theta + sen\theta - sen^3\theta - sen^3\theta$$

$$sen(3\theta) = 3 \cdot sen\theta - 4 \cdot sen^3\theta$$

Exercícios resolvidos

1. Se $\text{sen}(x)=\frac{5}{13}$, $\cos(y)=\frac{3}{5}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}<y<2\pi$, calcule:

a) cos (*x*) e sen (*y*).

b) sen (*x* – *y*) e cos (*x* + *y*).

a) $\cos^2(x)=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2 \therefore \cos(x)=\frac{12}{13}$ e

$\text{sen}^2(y)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 \therefore \text{sen}(y)=-\frac{4}{5}$

b) $\text{sen}(x-y)=\text{sen}(x)\cdot\cos(y)-\text{sen}(y)\cdot\cos(x)=$

$=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{12}{13}=\frac{63}{65}$

$\cos(x+y)=\cos(x)\cdot\cos(y)-\text{sen}(x)\cdot\text{sen}(y)=$

$=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{56}{65}$

2. Se tg (*a*) = 7 e tg (*b*) = 2, calcule o valor de tg (*a* – *b*).

$\text{tg}\,(a-b)=\frac{\text{tg}(a)-\text{tg}(b)}{1+\text{tg}(a)\cdot\text{tg}(b)}=\frac{7-2}{1+7\cdot 2}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

3. Considere a função *g* definida por

$g(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(x)+\frac{1}{2}\cdot\text{sen}(x).$

a) Determine o período e o conjunto imagem da função *g*.

b) Calcule os valores de $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

a) $g(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos(x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\text{sen}(x)$

$=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$p=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$ e $\text{Im}(g)=[-1,1]$

b) $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=1$ e

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$

4. Se $\text{sen}(18°)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calcule o valor de cos (36°).

$\cos(36°)=\cos(2\cdot 18°)$

$\cos(36°)=1-2\cdot\text{sen}^2(18°)$

$\cos(36°)=1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$

$\cos(36°)=1-2\cdot\left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right)$

$\cos(36°)=1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$

$\cos(36°)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

5. O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e $\cos(\beta)=\frac{\sqrt{7}}{4}$.
Calcule o valor de cos (α).

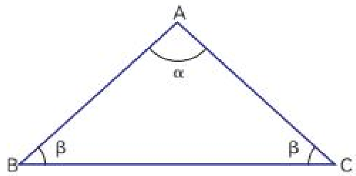


Figura: © DAE

$\alpha+2\beta=180° \therefore \alpha=180°-2\beta$

$\cos(\alpha)=\cos(180°-2\beta)$

$\cos(\alpha)=-\cos(2\beta)$

$\cos(\alpha)=-\left[2\cdot\cos^2(\beta)-1\right]$

$\cos(\alpha)=-2.\cos^2(\beta)+1$

$\cos(\alpha)=-2\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2+1=-2\cdot\frac{7}{16}+1=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

Exercícios propostos

$\text{sen}(15°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos(15°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule os valores de sen (15°) e cos (15°).

2. Calcule o valor de tg (15°). $2-\sqrt{3}$

3. Se tg (*x*) = 3 e tg (*x* + *y*) = 13, calcule o valor de tg (*y*). $\frac{1}{4}$

4. Simplifique a expressão $y=\frac{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$ $y=\text{tg}(a)$

5. Calcule o valor de *x* em cada expressão:

a) *x* = sen 25° · cos 5° + sen 5° · cos 25° $x=\frac{1}{2}$

b) *x* = cos 61° · cos 29° – sen 61° · sen 29° $x=0$

6. Utilizando as fórmulas para adição e subtração de arcos, prove que:

sen (*x* + *y*) · sen (*x* – *y*) = sen² *x* – sen² *y*

7. Considere a função *f* definida por

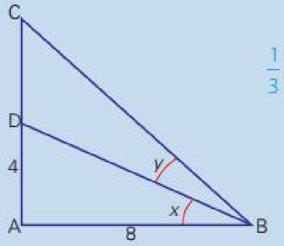
$f(x)=\text{sen}(3x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos(3x).$

a) Determine o período e o conjunto imagem da função *f*.

b) Calcule os valores de *f*(0) e $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Resposta no Manual do Professor.

8. Na figura a seguir, os triângulos ABC e ABD são retângulos em A, e D é o ponto médio de AC. Calcule o valor de tg (y).



$\frac{1}{3}$

9. Calcule o valor aproximado do módulo da resultante R correspondente às aplicações de duas forças F1 e F2, ambas de módulo 6, que formam um ângulo de medida 75° no ponto em que são aplicadas. $R \cong 9{,}52\,N$

10. Se $\text{sen}(x) = \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule os valores de sen (2x) e cos(2x). $\text{sen}(2x) = \frac{24}{25}$ e $\cos(2x) = \frac{7}{25}$.

11. Se tg (x) = $\frac{1}{2}$, calcule:

a) tg (2x) $tg\,(2x) = \frac{4}{3}$

b) tg (4x) $tg\,(4x) = -\frac{24}{7}$

12. No triângulo retângulo da figura abaixo, calcule o valor de sen (2α) – sen (2β). sen (2α) – sen (2β) = 0

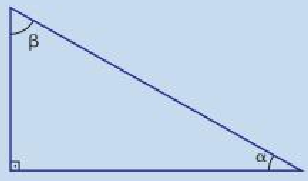


Figura: © DAE

13. Qual é o maior valor que a função f definida por $f(x) = 10^{4 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x)}$ pode assumir? 100

14. Se tg (x) + cotg (x) = 10, calcule o valor de sen (2x). $\text{sen}\,(2x) = \frac{1}{5}$

15. Calcule o valor da expressão $\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^2$. $\frac{3}{2}$

16. Considere a função f definida por $f(x) = 2 \cdot \cos^4(x) - 2 \cdot \text{sen}^4(x)$.

a) Determine o período e o conjunto imagem da função f. Resposta no Manual do Professor.

b) Esboce o gráfico da função f no intervalo [0, 2π].

17. Qual é o conjunto imagem da função f definida por $f(x) = 10 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$? $Im(f) = [-5, 5]$

18. Demonstre que $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Resposta no Manual do Professor.

19. Crie uma equação trigonométrica em que apareça sen 2x. Entregue essa equação para um colega resolver. Você deverá resolver a equação elaborada pelo seu colega. Resposta pessoal.

Algumas conclusões

Resolva os exercícios no caderno.

Pense possíveis respostas às questões a seguir. Essas questões abrangem o estudo de Trigonometria. Caso sinta alguma dificuldade para responder, sugerimos que retome os conceitos principais que foram estudados até aqui.

Questões:

1. Quais são as unidades de medida de arcos que foram abordadas nesta Unidade?

2. Como você define um arco de 1 radiano?

3. Qual é a definição de seno na circunferência trigonométrica? Qual é a definição de cosseno na circunferência trigonométrica?

4. Em quais quadrantes da circunferência trigonométrica o seno e o cosseno têm o mesmo sinal?

5. Qual é o valor máximo e qual é o valor mínimo do seno e do cosseno de um arco na circunferência trigonométrica?

6. O que são arcos côngruos?

7. Conhecendo o valor da tangente de um arco, como podemos obter o valor da secante desse arco?

8. Quais são as fórmulas do seno, do cosseno e da tangente da soma de dois arcos? E da diferença de dois arcos?

9. Quais as fórmulas do seno, do cosseno e da tangente do dobro de um arco em função do arco?

10. As funções trigonométricas seno e cosseno são periódicas? Explique.

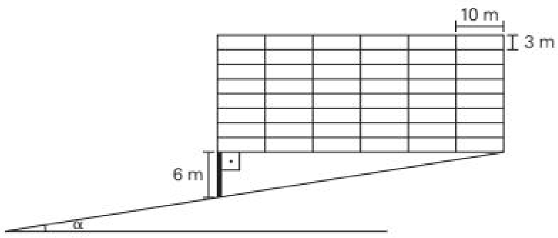
Troque ideias com os seus colegas e o professor. Comente suas respostas e ouça as de seus colegas. Juntos, façam uma lista das dificuldades que tiveram e descubram os assuntos que precisam ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (FGV-SP) Um edifício comercial tem 48 salas, distribuídas em 8 andares, conforme indica a figura. O edifício foi feito em um terreno cuja inclinação em relação à horizontal mede α graus. A altura de cada sala é 3 m, a extensão 10 m e a altura da pilastra de sustentação, que mantém o edifício na horizontal, é 6 m.

α	sen α	cos α	tg α
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405



Usando os dados da tabela, a melhor aproximação inteira para α é:

a) 4°
b) 5°
c) 6°
d) 7°
e) 8°

2. (Uern) Considerando que $\text{sen}^2\alpha = \frac{3}{4}$ com $0° < \alpha < 90°$

então o valor da expressão $\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\,\alpha\right) \cdot \text{tg}, \alpha$ é:

a) 1
b) 3
c) $\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}$

3. (PUC-RJ) Sabendo que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\text{sen}(x) = -\frac{1}{3}$

é correto afirmar que sen $(2x)$ é:

a) $-\frac{2}{3}$
b) $-\frac{1}{6}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
d) $\frac{1}{27}$
e) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

4. (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

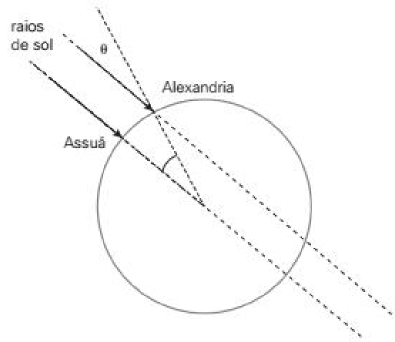
A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$ em que x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>.
Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro.
b) abril.
c) junho.
d) julho.
e) outubro.

5. (Fuvest-SP) Uma das primeiras estimativas do raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C. Sabendo que em Assuã, cidade localizada no sul do Egito, ao meio-dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria, nas mesmas condições, em Alexandria, cidade no norte do Egito. O estudioso observou que, em Alexandria, ao meio-dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou o ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios de sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã foi de, aproximadamente, 7 500 km.



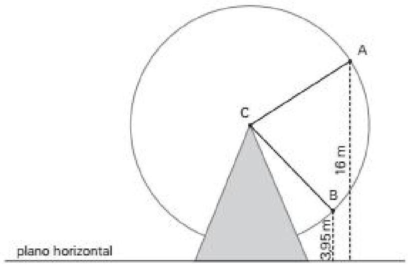
Figuras: © DAE

O mês em que foram realizadas as observações e o valor aproximado de θ são

(Note e adote: distância estimada por Eratóstenes entre Assuã e Alexandria $\approx$ 900 km; $\pi = 3$.)

a) junho; 7°.
b) dezembro; 7°.
c) junho; 23°.
d) dezembro; 23°.
e) junho; 0,3°.

6. (Uerj) O raio de uma roda-gigante de centro C mede $\overline{CA} = \overline{CB} = 10$ m. Do centro C ao plano horizontal do chão, há uma distância de 11 m. Os pontos A e B, situados no mesmo plano vertical, ACB, pertencem à circunferência dessa roda e distam, respectivamente, 16 m e 3,95 m do plano do chão. Observe o esquema e a tabela:



θ (graus)	sen θ
15º	0,259
30º	0,500
45º	0,707
60º	0,866

A medida, em graus, mais próxima do menor ângulo ACB corresponde a:

a) 45
b) 60
c) 75
d) 105

7. (UFSM-RS) Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

em que t é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco.

Analise as afirmativas:

I. A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.

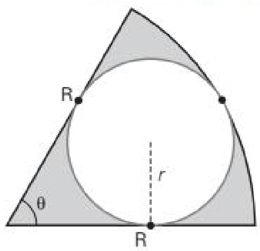
II. A pressão em $t = 2$ segundos é de 110 mmHg.

III. A amplitude da função $P(t)$ é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s):

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

8. (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe um círculo de raio r que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ. Respostas no Manual do Professor.

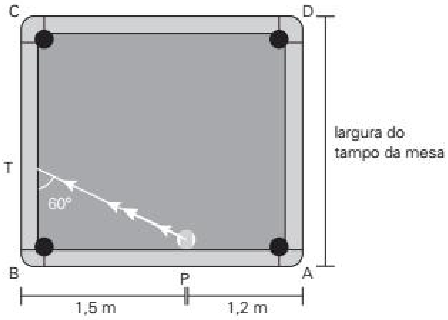


Figuras: © DAE

a) Para θ = 60º, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.

b) Determine o valor de cos θ no caso em que R = 4r.

9. (Unesp-SP – 2015) A figura representa a vista superior do tampo plano e horizontal de uma mesa de bilhar retangular ABCD, com caçapas em A, B, C e D. O ponto P, localizado em AB, representa a posição de uma bola de bilhar, sendo $\overline{PB}$ = 1,5 m e $\overline{PA}$ = 1,2 m. Após uma tacada na bola, ela se desloca em linha reta colidindo com BC no ponto T, sendo a medida do ângulo $P\hat{T}B$ igual a 60º. Após essa colisão, a bola segue, em trajetória reta, diretamente até a caçapa D.



Adilson Secco

Nas condições descritas e adotando $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, a largura do tampo da mesa, em metros, é próxima de:

a) 2,42
b) 2,08
c) 2,28
d) 2,00
e) 2,56

10. (UFSC) A tabela abaixo apresenta a previsão do comportamento das marés para o dia 7/8/14 no Porto de Itajaí, em Santa Catarina.

Hora	Altura (m)
00:38	0,8
06:02	0,1
12:02	1,0
19:47	0,3

Disponível em: <www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas>. Acesso em: 15 ago. 2014.

Em relação ao assunto e à tabela acima, é CORRETO afirmar que:

01) A partir da conjugação da força gravitacional entre os corpos do sistema Lua-Sol-Terra e da rotação da Terra em torno de seu eixo, é possível inferir que o movimento das marés é periódico e, como tal, pode ser representado por meio de uma função trigonométrica, seno ou cosseno.

02) O período médio do comportamento das marés, no dia 7/8/14, é de, aproximadamente, 6,38 h.

04) A amplitude da função trigonométrica que representa o movimento das marés, segundo os dados da tabela, é de, aproximadamente, 0,45 m.

08) O período da função $y = \text{sen}4\left(5x+\frac{2\pi}{3}\right)$ é $\frac{2\pi}{5}$.

16) Se sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor da expressão

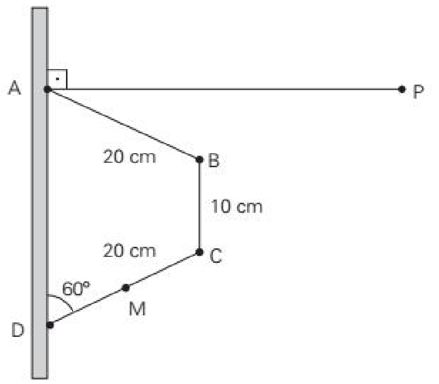
$E = \frac{\sec^2 x - 1}{\text{tg}^2 x + 1}$ é $\sqrt{2}$.

32) Sabendo que sen $x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{5}{13}$ com

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$, então $\cos(x+y) = \frac{64}{65}$.

$01 + 02 + 04 = 07$

11. (FGV-SP) Na figura, ABCD representa uma placa em forma de trapézio isósceles de ângulo da base medindo 60º. A placa está fixada em uma parede por $\overline{AD}$ e $\overline{PA}$ representa uma corda perfeitamente esticada, inicialmente perpendicular à parede.



Figuras: © DAE

Nesse dispositivo, o ponto P será girado em sentido horário, mantendo-se no plano da placa, e de forma que a corda fique sempre esticada ao máximo. O giro termina quando P atinge M, que é o ponto médio de $\overline{CD}$.

Nas condições descritas, o percurso total realizado por P, em cm, será igual a:

a) $\frac{50\pi}{3}$
b) $\frac{40\pi}{3}$
c) 15π
d) 10π
e) 9π

12. (Uepa) A ornamentação de carrocerias de veículos é uma tradição antiga que se inicia com o uso de transportes de carga motorizados no Brasil. A tradição de decorar carrocerias particulariza e traz personalidade a cada veículo por meio de cores, grafismos e elementos visuais pertinentes a cada cultura onde estão inseridos. Um dos moldes utilizados para pintar, fabricado em chapa metálica galvanizada e desenho cortado a *laser*, está representado na figura 1 a seguir. Inserindo um sistema cartesiano ortogonal na figura 1, obtém-se a figura 2, em que estão representadas as funções trigonométricas f_1, f_2, f_3 e f_4. Nessas condições e considerando que a lei de formação de cada uma das funções representadas na figura 2 são do tipo $y = f(x) = a + b\cdot\text{sen}(cx + d)$ com a, b, c e d números reais, é correto afirmar que:

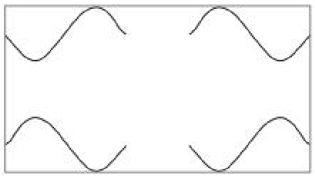


Figura 1: Moldes

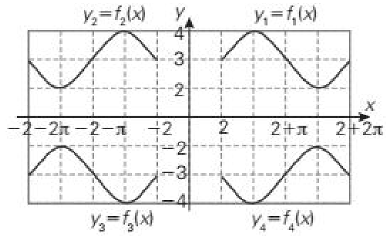


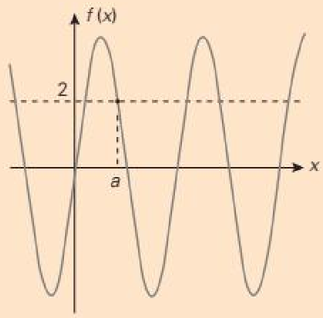
Figura 2: Moldes no sistema cartesiano

a) $y = f_1(x) = 3 + \text{sen}(x+2)$
b) $y = f_2(x) = 3 + \text{sen}(x-2)$
c) $y = f_3(x) = -3 + \text{sen}(x-2)$
d) $y = f_4(x) = -3 - \text{sen}(x-2)$
e) $y = f_1(x) = 3 - \text{sen}(x-2)$

DESAFIO

(Insper-SP) A figura mostra o gráfico da função *f*, dada pela lei

$f(x) = (\text{sen}\,x + \cos x)^4 - (\text{sen}\,x - \cos x)^4$



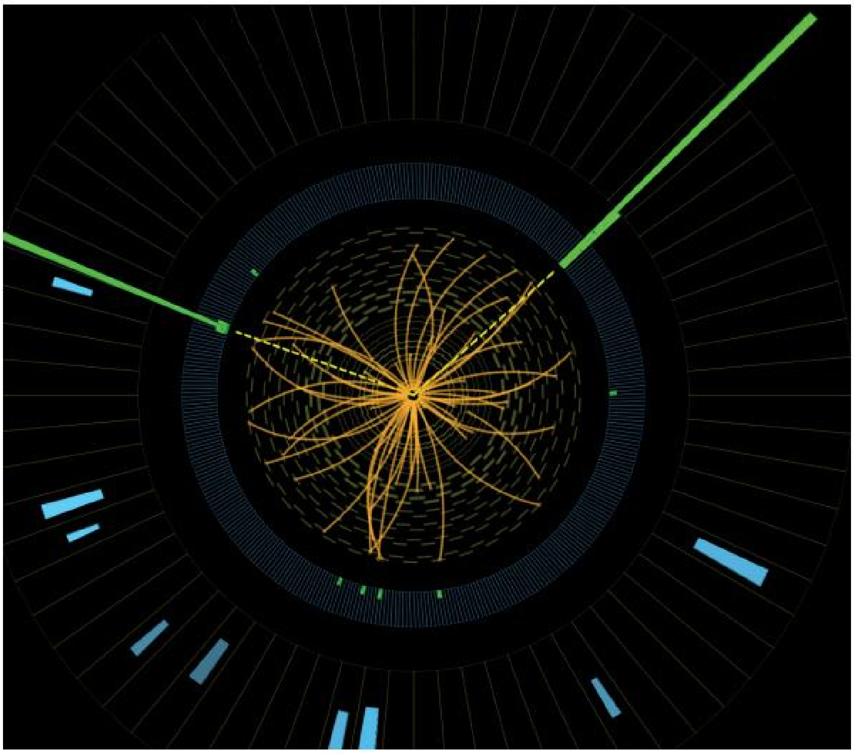
O valor de *a*, indicado no eixo das abscissas, é igual a:

a) $\frac{5\pi}{12}$
b) $\frac{4\pi}{9}$
c) $\frac{3\pi}{8}$
d) $\frac{5\pi}{6}$
e) $\frac{2\pi}{3}$

Alternativa **a**.

Respostas no Manual do Professor.

Bóson de Higgs é visto em ação pela primeira vez



Detecção do bóson de Higgs em ação no maior acelerador de partículas do mundo, o LHC (Large Hadron Collider). Foto de 2012.

O maior acelerador de partículas do mundo, o Grande Colisor de Hádrons (LHC, na sigla em inglês), conseguiu o primeiro vislumbre do bóson de Higgs em ação. Também conhecido como Partícula de Deus, o bóson de Higgs é uma partícula crucial no estudo da física quântica a ciência que estuda as coisas menores do que o átomo.

Por mais de 50 anos, essa partícula foi a peça que faltava para completar a teoria do Modelo Padrão da física, derivado do trabalho de Albert Einstein e seus sucessores no começo do século 20, e que abriu caminho para a física moderna. O experimento Atlas, do LHC, foi um dos detectores que ajudaram a descobrir a existência do bóson de Higgs em 2012.

[...]

Segundo a teoria, o bóson de Higgs deu massa à matéria expelida pelo Big Bang há 14 bilhões de anos, o que permitiu o surgimento de tudo o que existe no cosmos. Segundo Peter Higgs, que sugeriu a existência do bóson de Higgs, todas as partículas não possuíam massa e eram iguais logo após a grande explosão que deu origem ao universo.

Conforme o cosmos esfriou, um campo de força invisível, o campo de Higgs, se formou com seus respectivos bósons (um tipo de partícula subatômica). Esse campo permanece no cosmos e qualquer partícula que interaja com ele recebe uma massa através dos bósons. Quanto mais interagem, mais pesadas se tornam. As partículas que não interagem permanecem sem massa. Portanto, as partículas só conseguiram ganhar massa devido ao bóson de Higgs.

O bóson de Higgs foi idealizado, portanto, para explicar como algumas partículas portadoras de força como os bósons W têm massa, enquanto outras não, como o fóton. Quando tentaram calcular quantas vezes os bósons W precisam interagir uns com os outros para conseguir massa, os resultados foram fisicamente impossíveis sem a presença do bóson de Higgs.

O LHC funciona ao colidir prótons em velocidades próximas à da luz. De vez em quando, um desses prótons emite um bóson W. Logo, analisar a interação de bósons W é uma forma de testar como o Higgs trabalha.

DARAYA, Vanessa. *Bóson de Higgs é visto em ação pela primeira vez.* Exame.com, 21 jul. 2014. Disponível em: <http://exame.abril.com.br/tecnologia/noticias/boson-de-higgs-e-visto-em-acao-pela-primeira-vez>. Acesso em: 24 fev. 2016.

Questões e investigações

1. O LHC é um acelerador de partículas com 27 km de extensão enterrado 100 metros por debaixo da terra, com quatro detectores de partículas (Atlas, Alice, CMS e LHCb) com mais ou menos 12 500 toneladas cada um. Um acelerador de partículas é basicamente um tubo circular grande o suficiente para que as partículas possam girar até atingirem a velocidade desejada. Pesquise mais a respeito do LHC: O que significa essa sigla? Onde o LHC está situado? Quando o LHC foi construído? Quem construiu o LHC?

© 2008-2016 CERN/Maximilien Brice

Vista aérea do European Organization for Nuclear Research (CERN), onde está o LHC. Foto de 2008.

2. Sabendo a extensão do LHC e considerando $\pi \cong 3$, qual será aproximadamente o tamanho do raio do LHC?

3. Seja *x* o ângulo central referente ao arco percorrido por uma partícula entre os detectores Alice e Atlas. Utilize a lei do cosseno para encontrar, em função de *x*, a distância em linha reta entre esses dois detectores.

4. Considere que uma partícula parte do detector CMS em sentido anti-horário, como na figura abaixo. Esboce o gráfico da função que relaciona a distância entre essa partícula e a reta *t*, tangente ao colisor no ponto CMS, e calcule o ângulo percorrido pela partícula.

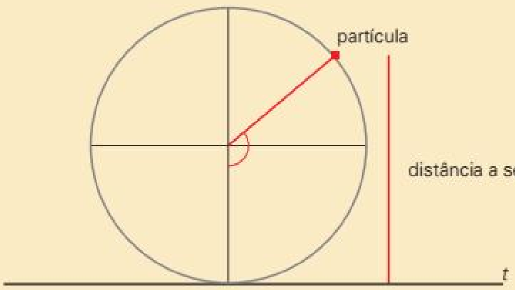


Figura: © DAE

5. Encontre uma função trigonométrica dos senos que modele o gráfico esboçado na resposta do item anterior.

6. Encontre uma função trigonométrica dos cossenos que modele esse mesmo gráfico.

7. Encontre uma função genérica que modele esse movimento para um acelerador de partículas de raio *n*.

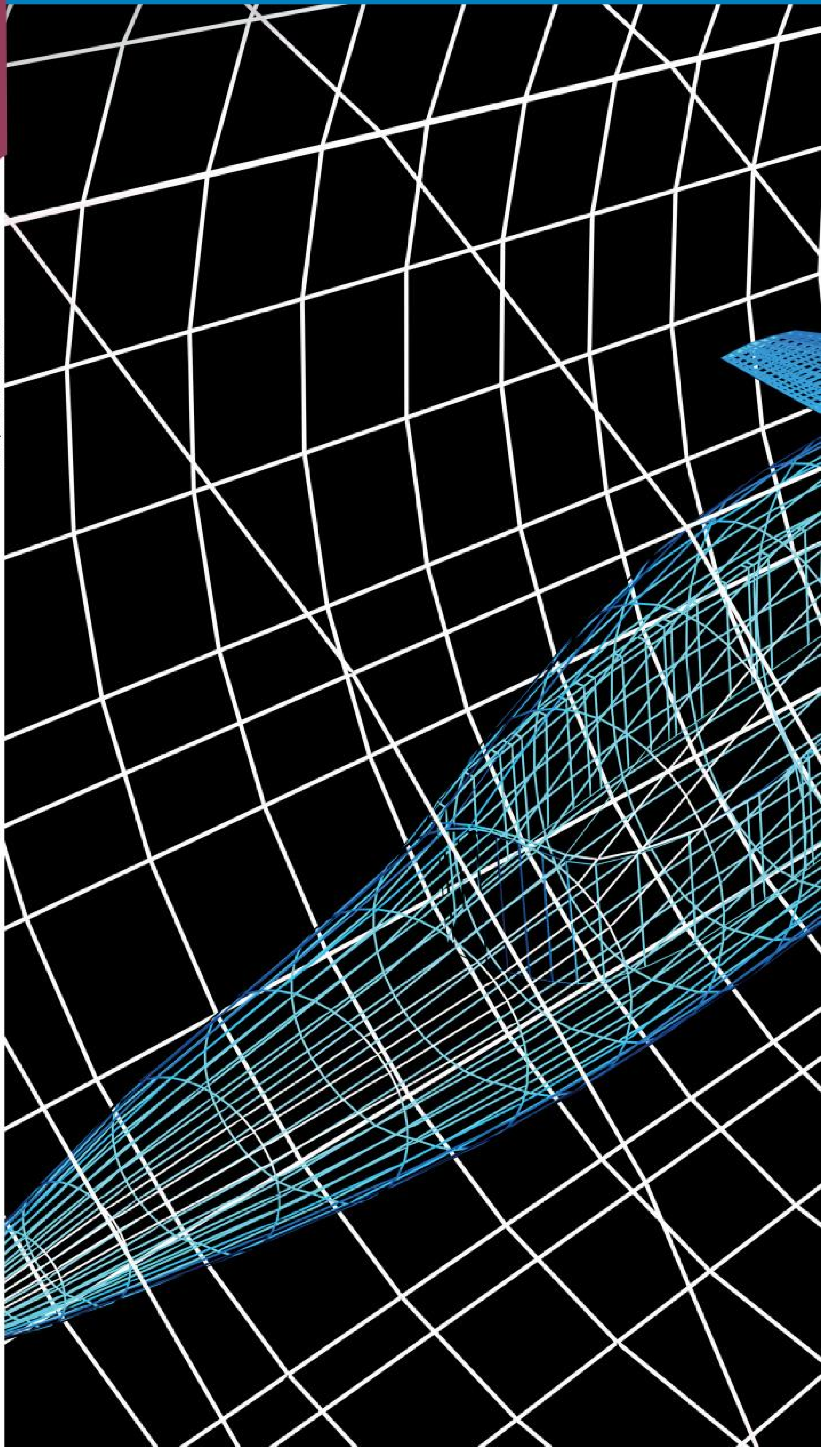
UNIDADE

3

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

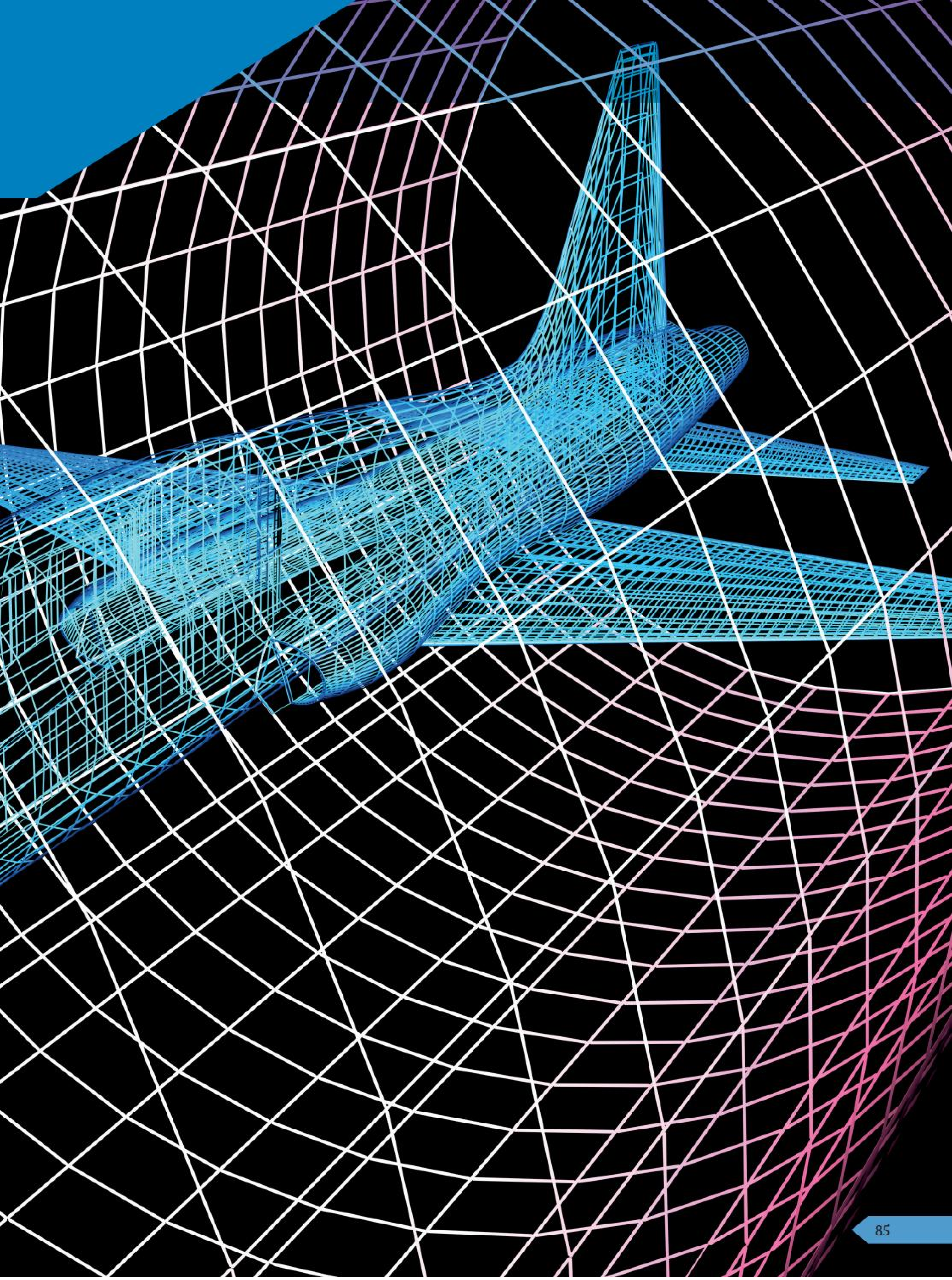
A computação gráfica representa um recurso largamente utilizado não apenas em projetos de construções, mas também na produção de filmes. Matrizes e vetores estão ligados a esse recurso gráfico.

Nesta Unidade, estudaremos um pouco sobre matrizes, determinantes e sistemas lineares.



blackjack/Shutterstock.com

Simulação de um modelo de aeronave que sendo analisado no túnel de vento para efeitos aerodinâmicos em sua estrutura.



CAPÍTULO

7 MATRIZES E DETERMINANTES

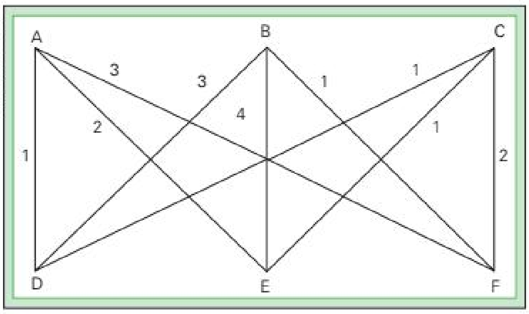
Os profissionais que trabalham na Bolsa de Valores consultam diariamente índices econômicos, decisões políticas que afetam os investimentos, gráficos que indicam tendências, tabelas contendo valores etc.

As informações podem ser organizadas de maneiras diferentes. Uma das formas utilizadas com mais frequência é a apresentação de dados, principalmente os numéricos, em tabelas. Basta olharmos os jornais, as revistas ou até mesmo um calendário, onde os dias de um mês estão dispostos em linhas e também em colunas, que registram os dias da semana.

Observe a situação a seguir.

A região Norte de um país tem os aeroportos A, B e C, enquanto a região Sul desse mesmo país tem os aeroportos D, E e F. O esquema a seguir ilustra a rede de conexões entre os aeroportos dessas duas regiões. Os números indicam a quantidade de linhas aéreas que há na rota de um aeroporto ao outro. Na outra figura há cinco tabelas, mas apenas uma representa corretamente o que é mostrado no esquema. Observe.

Figuras: © DAE



I. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ II. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

III. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

IV. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ V. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. O que significa o número 4 na linha que liga os aeroportos B e E?
2. Se uma pessoa está no aeroporto A da região Norte e deseja ir para o aeroporto F da região Sul, quantas possibilidades de escolha de uma linha aérea ela terá?
3. Qual é a única tabela correta?

Na Matemática, matrizes são tabelas formadas por linhas e colunas. Quando uma matriz tem o mesmo número de linhas e de colunas, associamos a ela um número chamado **determinante**. Neste capítulo e no próximo, além de matrizes e determinantes, estudaremos a resolução de sistemas de equações lineares.

Conceitos iniciais de matrizes

Ao participar de uma gincana de Ciências Exatas, Leandro elaborou uma tabela de duas entradas (disciplina e média por etapa), formada pelos resultados das avaliações realizadas em quatro etapas:

	1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	4ª etapa
Matemática	9,5	8,0	5,0	7,5
Física	7,5	8,0	8,5	10,0
Química	6,5	10,0	9,5	8,5

Consultando as informações da tabela, verificamos que Leandro obteve nota 10 na 2ª etapa da avaliação de Química. Essa nota também está presente na linha das notas de Física, na coluna, referente à 4ª etapa. Além disso, podemos constatar que, entre todas as avaliações, o menor resultado é 5. Esse resultado está na primeira linha e na terceira coluna (3ª etapa de Matemática).

Ao citarmos os exemplos anteriores, consideramos apenas a tabela formada pelos valores, isto é:

9,5	8,0	5,0	7,5
7,5	8,0	8,5	10,0
6,5	10,0	9,5	8,5

As linhas (filas na horizontal) referem-se aos resultados das disciplinas, e as colunas (filas na vertical) indicam as notas correspondentes às avaliações realizadas em cada etapa.

Essa mesma tabela poderia ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 9{,}5 & 8{,}0 & 5{,}0 & 7{,}5 \\ 7{,}5 & 8{,}0 & 8{,}5 & 10{,}0 \\ 6{,}5 & 10{,}0 & 9{,}5 & 8{,}5 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 9{,}5 & 8{,}0 & 5{,}0 & 7{,}5 \\ 7{,}5 & 8{,}0 & 8{,}5 & 10{,}0 \\ 6{,}5 & 10{,}0 & 9{,}5 & 8{,}5 \end{bmatrix}$$

Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos em linhas e colunas, recebe o nome de **matriz**. Os elementos de uma matriz sempre aparecem entre parênteses ou entre colchetes, como indicado acima.

Nesse exemplo, temos uma matriz formada por 3 linhas e 4 colunas, ou, de uma forma mais simples, matriz $3 \cdot 4$ (lemos: matriz três por quatro).

Sendo m e n números naturais, uma matriz do tipo $m \times n$ é uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Observações:

1. Cada um dos $m \times n$ números reais que formam a matriz é denominado elemento dessa matriz.
2. Podemos nos referir a uma matriz $m \times n$ das seguintes maneiras: matriz do tipo $m \times n$ ou matriz de ordem $m \times n$. Essas duas maneiras serão utilizadas indistintamente aqui.

Exemplo:

São exemplos de matriz:

Matriz de ordem $3 \cdot 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2{,}1 & 4 \\ 5 & 0{,}2 \\ 9 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Matriz de ordem $2 \cdot 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ **matriz quadrada**: número de linhas igual ao número de colunas

Matriz de ordem $2 \cdot 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 1 & \sqrt{5} \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz de ordem $3 \cdot 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix} \rightarrow$ **matriz coluna**: formada por apenas 1 coluna

Matriz de ordem $1 \cdot 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 8 & 33 & 1 \end{bmatrix}$ – **matriz linha**: formada por apenas 1 linha

As matrizes quadradas $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, ... ou $n \cdot n$ são ditas matrizes quadradas de ordem 1, de ordem 2, de ordem 3, ... ou de ordem n, respectivamente.

Representação de uma matriz

A representação de uma matriz genérica ocorrerá da seguinte forma: para indicar uma matriz, utilizamos uma letra maiúscula; para indicar cada um dos elementos de uma matriz, utilizamos uma letra minúscula acompanhada por um índice que indica a linha e a coluna ocupada por esse elemento na matriz (localização do elemento). O índice é composto por dois números: o primeiro indica a linha e o segundo, a coluna em que podemos localizar o elemento na matriz.

Exemplo:

Vamos representar uma matriz genérica A de ordem $4 \cdot 3$:

- Temos 12 elementos nessa matriz (4 linhas por 3 colunas).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

- Assim, por exemplo, a_{11} é o elemento localizado na 1ª linha e na 1ª coluna. Já o elemento a_{42} está localizado na 4ª linha e na 2ª coluna.

De modo geral, uma matriz A do tipo $m \cdot n$ (formada por m linhas e n colunas) pode ser indicada da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Forma abreviada de representação de uma matriz A de ordem $m \cdot n$:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

sendo i e j números inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, e a_{ij} um elemento qualquer de A.

A representação abreviada permite também construir certas matrizes a partir de uma lei de formação que relaciona seus elementos. Nesse tipo de notação, i e j são números inteiros positivos que indicam a posição do elemento a na matriz A, isto é, indicam a linha e a coluna, respectivamente, em que podemos localizar esse elemento.

Exemplo:

Vamos obter a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ cujos elementos satisfazem a relação:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + 2j, \text{ para } i \neq j \\ 2i - j, \text{ para } i = j \end{cases}$$

- Escrevemos a matriz quadrada A de ordem 3 da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Conforme a lei de formação dada, temos:

$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ $\quad a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ $\quad a_{31} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$
$a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ $\quad a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ $\quad a_{32} = 3 + 2 \cdot 2 = 7$
$a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$ $\quad a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$ $\quad a_{33} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

Portanto, a matriz procurada é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Igualdade de matrizes

Quando duas matrizes são iguais?

Como uma matriz é uma tabela formada por elementos (números reais) dispostos em linhas e colunas, duas condições devem ser verificadas para que duas matrizes sejam iguais: devem ter a mesma ordem e, além disso, os elementos correspondentes (situados na mesma posição) também devem ser iguais.

Assim, por exemplo, vamos considerar as matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 12 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Note que essas duas matrizes são de mesma ordem. Assim, para que a igualdade entre elas seja verificada, basta que os elementos correspondentes sejam iguais, ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 12 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Igualdade de duas matrizes

Em símbolos, sendo as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

Para todo i e j, tal que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

Vamos verificar a igualdade entre as matrizes A e B, considerando que $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, tal que $a_{ij} = i - j$ e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Inicialmente, precisamos determinar os elementos da matriz da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Conforme a lei de formação dada:

$$a_{11} = 1 - 1 = 0 \qquad a_{21} = 2 - 1 = 1$$
$$a_{12} = 1 - 2 = -1 \qquad a_{22} = 2 - 2 = 0$$
$$a_{13} = 1 - 3 = -2 \qquad a_{23} = 2 - 3 = -1$$

Assim, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Comparando os elementos correspondentes dessas duas matrizes, concluímos que elas são iguais.

Observação:

Quando todos os elementos de uma matriz são iguais a zero, dizemos que ela é nula.

Exemplo:

A matriz nula $O_{3 \times 2}$ é tal que:

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz linha é aquela que possui apenas uma linha e matriz coluna é aquela que possui apenas uma coluna. Vimos que existem matrizes quadradas, isto é, matrizes em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Existem outras matrizes que, devido às suas características, recebem denominações especiais:

Matriz transposta

Considere as matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 9 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Enquanto a matriz A é do tipo $3 \cdot 2$, a matriz B é do tipo $2 \cdot 3$. Observe que os elementos da 1ª linha da matriz A são os elementos da 1ª coluna da matriz B, os elementos da 2ª linha da matriz A são os elementos da 2ª coluna da matriz B e, finalmente, os elementos da 3ª linha da matriz A são os mesmos elementos da 3ª coluna da matriz B. Nesse caso, dizemos que uma matriz é a transposta da outra.

Dada uma matriz A do tipo m x n, denomina-se **transposta de A** (representamos por A^t) a matriz do tipo n x m, que é obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas da matriz A.

- **Matriz triangular e matriz diagonal**

Quando temos uma matriz quadrada A de ordem n, os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ formam a diagonal principal dessa matriz. Além disso, temos elementos que formam a diagonal secundária de uma matriz quadrada. Observe a seguir:

diagonal secundária

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonal principal

Exemplo:

Vamos destacar os elementos da diagonal principal e os elementos da diagonal secundária da matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Elementos da diagonal principal: 2, 7 e 8.
- Elementos da diagonal secundária: 1, 7 e 9.

Observações:

1. Os elementos a_{ij} que formam a diagonal principal da matriz são tais que os dois números que indicam suas posições são iguais, isto é, $i = j$.
2. Já os elementos que compõem a diagonal secundária satisfazem a seguinte condição em relação aos seus índices: $i + j = n + 1$.

Considere agora as duas matrizes quadradas A e B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Conforme destacado, todos os elementos de A que estão abaixo da diagonal principal são nulos. Já na matriz B os elementos que estão acima da diagonal principal são todos nulos.

Quando todos os elementos situados acima ou abaixo da diagonal principal de uma matriz quadrada são nulos, ela é chamada **matriz triangular**.

Observações:

1. Utilizando símbolos, dizemos que uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é triangular quando $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ou $i < j$.
2. Quando todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal de uma matriz quadrada são nulos, ela é chamada **matriz diagonal**.

São exemplos de matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Toda matriz que é diagonal é também triangular?
2. Utilizando símbolos, qual é a relação entre os índices dos elementos da matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ para que ela represente uma **matriz diagonal**?

- **Matriz identidade**

Considere as matrizes quadradas A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todos os elementos situados acima e também abaixo da diagonal principal são nulos, essas duas matrizes são diagonais. Observe que todos os elementos dessas duas matrizes que estão na diagonal principal são iguais a 1. Matrizes diagonais com essas características recebem a denominação de **matrizes identidades**.

Quando todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal de uma matriz quadrada são nulos e os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ela é chamada **matriz identidade**.

Representamos uma matriz identidade de ordem n por I_n. Assim, temos as seguintes matrizes identidades:

$I_1 = (1) \rightarrow$ matriz identidade de ordem 1

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matriz identidade de ordem 2

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matriz identidade de ordem 3

$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matriz identidade de ordem 4

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matriz identidade de ordem n

Observação:

Uma matriz identidade de ordem n qualquer pode ter seus elementos representados pela seguinte lei de formação:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

1. Os elementos de uma matriz $A = (a_{ij})_{4\times3}$ são tais que $a_{ij} = 2_{i+j}$

a) Qual é o número de elementos da matriz A?

b) Escreva a matriz A.

a) O número de elementos da matriz A é $4 \cdot 3 = 12$.

b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\text{x}1+1 & 2\text{x}1+2 & 2\text{x}1+3 \\ 2\text{x}2+1 & 2\text{x}2+2 & 2\text{x}2+3 \\ 2\text{x}3+1 & 2\text{x}3+2 & 2\text{x}3+3 \\ 2\text{x}4+1 & 2\text{x}4+2 & 2\text{x}4+3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

2. Determine os valores de x, y e z sabendo que a matriz

$\begin{pmatrix} x-2 & 0 \\ 2x+y-z & y+3 \end{pmatrix}$ é nula.

$\begin{pmatrix} x-2 & 0 \\ 2x+y-z & y+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x-2=0 \therefore x=2$

$y+3=0 \therefore y=-3$

$2x+y-z=0 \rightarrow 2\text{x}2+(-3)-z=0 \therefore z=1$

3. Uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times4}$ é definida por

$a_{ij} = \begin{cases} i+j, \text{ se } i=j \\ i-j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

a) Escreva a matriz A.

b) Escreva a matriz transposta da matriz A.

a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

4. Considere a matriz quadrada $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \\ 10 & -17 & 4 & 23 \\ 0 & 6 & -8 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Calcule a soma de todos os elementos da terceira coluna da matriz M.

b) Qual é a soma de todos os elementos da terceira linha da matriz M^t?

a) A soma dos elementos da terceira coluna da matriz M é $5+(-1)+4+(-8)=0$.

b) Basta somar os elementos da terceira coluna da matriz M, ou seja, $5+(-1)+4+(-8)=0$.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Considere a matriz A, conforme abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & \sqrt{2} & 0 & \frac{3}{5} \\ 7 & 3 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{2} & -1 \\ 5 & 8 & -\sqrt{3} & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Qual é o número de linhas da matriz A? 3

b) Qual é o número de colunas da matriz A? 5

c) O elemento da terceira linha e da terceira coluna é racional ou irracional? $-\sqrt{3}$ é irracional.

d) O elemento da segunda linha e da quarta coluna é racional ou irracional? $\frac{1}{2}$ é racional.

2. Na matriz $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, calcule o valor de $a_{12} - a_{22}$. 4

3. Os elementos de uma matriz $M = (m_{ij})_{3\times3}$ são tais que:

$$M_{ij} = \begin{cases} i^j, \text{se } i < j \\ 2, \text{se } i = j \\ i + j, \text{se } i > j \end{cases}$$

a) Qual é o número de elementos da matriz M?

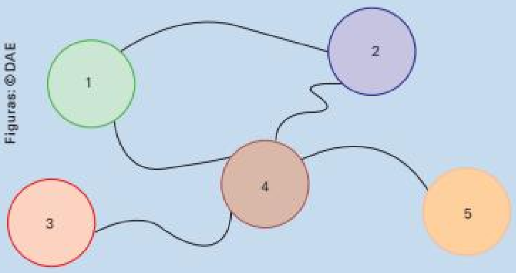
b) Escreva a matriz M.

c) Calcule a soma dos elementos da segunda coluna da matriz M. Respostas no Manual do Professor.

4. Obtenha os valores de x e y sabendo que as matrizes $\begin{pmatrix} x+y & 5 \\ -1 & x-y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ são iguais. $x = 4$ e $y = 3$.

5. Determine os valores de x, y e z que satisfazem a equação $\begin{pmatrix} 1 \\ x^2+y^2+z^2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

6. O croqui abaixo mostra as rodovias que ligam cinco cidades quaisquer de uma região.



Figuras: © DAE

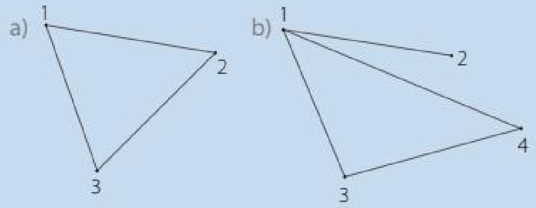
Construa uma matriz $D = (d_{ij})_{5\times5}$ satisfazendo as seguintes condições:

- $d_{ij} = 0$, se não existir uma rodovia que ligue as cidades i e j.
- $d_{ij} = 1$, se existir uma rodovia que ligue as cidades i e j ou se $i = j$. Resposta no Manual do Professor.

7. Dados n pontos em um plano, numerados de 1 a n, podemos associar uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ tais que seus elementos satisfazem as regras a seguir:

- $a_{ij} = 1$, se existir um segmento que une os pontos i e j ou se $i = j$.
- $a_{ij} = 0$, se não existir um segmento que une os pontos i e j.

Assim, construa a matriz correspondente a cada uma das figuras a seguir: Resposta no Manual do Professor.



8. Com relação ao exercício anterior, represente uma figura que esteja associada à matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta no Manual do Professor.

9. Elabore um croqui parecido com o da atividade que mostra a ligação entre as cidades, porém relacionando seis cidades. Construa então uma matriz $D = (d_{ij})_{6\times6}$ conforme as mesmas condições estabelecidas naquela atividade. Resposta pessoal.

10. Denomina-se traço de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Calcule o traço da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$, em que seus elementos são tais que $a_{ij} = 2_i + 3_j$. 30.

11. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & 7 & 6 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Escreva a matriz transposta da matriz A.

b) O que é possível observar com relação à matriz A e sua transposta? Resposta no Manual do Professor.

12. Observe a seguinte definição: "Uma matriz M é denominada simétrica se $M = M^t$".

a) Verifique se a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ é simétrica.

b) Calcule os valores de x e y sabendo que a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & y \\ x & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ é simétrica. $x = -2$ e $y = 7$.

13. Elabore em seu caderno uma matriz quadrada de 3ª ordem que seja simétrica. Depois, apresente-a aos colegas. Resposta pessoal.

Adição de matrizes

Após caracterizar e observar tipos diferentes de matrizes, vamos agora ver como podemos efetuar a adição de duas matrizes de mesma ordem. Ao iniciar esta unidade abordamos um exemplo de matriz a partir de uma tabela contendo os resultados das avaliações da participação de Leandro em uma gincana escolar de Ciências Exatas:

	Leandro			
	1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	4ª etapa
Matemática	9,5	8,0	5,0	7,5
Física	7,5	8,0	8,5	10,0
Química	6,5	10,0	9,5	8,5

↓ matriz A correspondente aos valores dessa tabela

$$A = \begin{pmatrix} 9{,}5 & 8{,}0 & 5{,}0 & 7{,}5 \\ 7{,}5 & 8{,}0 & 8{,}5 & 10{,}0 \\ 6{,}5 & 10{,}0 & 9{,}5 & 8{,}5 \end{pmatrix}$$

Vamos considerar que Júlia também participou dessa gincana, representando a mesma escola, e que as notas obtidas por ela estão representadas na tabela e na matriz B:

	Júlia			
	1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	4ª etapa
Matemática	6,5	7,0	8,0	9,5
Física	7,5	8,5	8,5	9,0
Química	10,0	10,0	8,5	9,5

↓ matriz B correspondente aos valores dessa tabela

$$B = \begin{pmatrix} 6{,}5 & 7{,}0 & 8{,}0 & 9{,}5 \\ 7{,}5 & 8{,}5 & 8{,}5 & 9{,}0 \\ 10{,}0 & 10{,}0 & 8{,}5 & 9{,}5 \end{pmatrix}$$

Se o regulamento da gincana diz que o resultado por escola é fornecido pela soma das notas de seus dois participantes, podemos elaborar a seguinte tabela:

	Leandro + Júlia			
	1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa	4ª etapa
Matemática	16,0	15,0	13,0	17,0
Física	15,0	16,5	17,0	19,0
Química	16,5	20,0	18,0	18,0

Procedemos da mesma forma com as matrizes a seguir, que apresentam os dados das tabelas. Observe.

$$A+B = \begin{pmatrix} 9{,}5+6{,}5 & 8{,}0+7{,}0 & 5{,}0+8{,}0 & 7{,}5+9{,}5 \\ 7{,}5+7{,}5 & 8{,}0+8{,}5 & 8{,}5+8{,}5 & 10{,}0+9{,}0 \\ 6{,}5+10{,}0 & 10{,}0+10{,}0 & 9{,}5+8{,}5 & 8{,}5+9{,}5 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 16{,}0 & 15{,}0 & 13{,}0 & 13{,}0 \\ 15{,}0 & 16{,}5 & 17{,}0 & 19{,}0 \\ 16{,}5 & 20{,}0 & 18{,}0 & 18{,}0 \end{pmatrix}$$

O que acabamos de fazer foi a adição entre duas matrizes de mesma ordem.

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B que resulta na matriz C, também do tipo $m \times n$, na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e de B.

Utilizando símbolos, podemos escrever:

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes de mesma ordem $m \times n$, a soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})$, de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

vamos obter a matriz X correspondente à soma das três matrizes dadas.

- Adicionamos os elementos correspondentes dessas três matrizes.

$$X = A + B + C$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2+(-7)+8 \\ 0+5+3 \\ 1+4+7 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Subtração de matrizes

Quando a soma de duas matrizes de mesma ordem é a matriz nula, dizemos que elas são opostas. Nesse caso, os elementos correspondentes também são opostos. Temos, assim, o conceito de matriz oposta:

Denomina-se matriz oposta de uma matriz dada A (representamos por –A) a matriz cujos elementos são opostos dos correspondentes da matriz A.

A adição de uma matriz com o oposto de outra matriz nos sugere como podemos efetuar a subtração entre matrizes de mesma ordem, ou seja:

Sendo A e B duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a diferença entre A e B, representada por A – B, é a soma da matriz A com o oposto da matriz B, isto é: A – B = A + (–B).

Em símbolos:

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes de mesma ordem $m \times n$, a diferença A – B é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exemplo:

Vamos determinar os valores de *x*, *y* e *z* para que a igualdade a seguir seja verificada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ y & 8 \\ 1 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 6 \\ -3 & 1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

- Note que no primeiro membro da igualdade temos a diferença entre matrizes. Como a diferença entre elas é a soma da primeira com a oposta da segunda, podemos escrever essa mesma igualdade da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ y & 8 \\ 1 & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & -6 \\ 3 & -1 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

- Adicionando as duas matrizes, obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} 2-x & 5-6 \\ y+3 & 8-1 \\ 1-7 & z+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-x & -1 \\ y+3 & 7 \\ -6 & z+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como os elementos correspondentes devem ser iguais, conforme igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 2-x=1 \Rightarrow x=1 \\ y+3=10 \Rightarrow y=7 \\ z+9=1 \Rightarrow z=-8 \end{cases}$$

Observação:

Existem outros resultados da adição de matrizes que são conhecidos como propriedades. Você pode constatar a validade de tais propriedades por meio de exemplos. Assim, dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem, valem as propriedades:

- comutativa: A + B = B + A
- associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
- elemento neutro (a matriz O é a matriz nula de mesma ordem que a matriz A): A + O = = O + A = A
- elemento oposto (a matriz –A é a matriz oposta de A e O a matriz nula de mesma ordem): A + (–A) = (–A) + A = O

Como as propriedades básicas da adição e da subtração de matrizes são análogas às propriedades da adição e subtração de números reais, ao efetuar uma dessas operações com matrizes de mesma ordem, observamos o mesmo procedimento adotado para os números reais. Assim, por exemplo, observe as duas equações a seguir (uma relacionada à matriz e outra com números reais):

1ª equação: $x - 7 = 9$

Para resolver essa equação, isolamos *x* no primeiro membro da igualdade:

$x - 7 = 9$

$x - 7 + 7 = 9 + 7$

$x + 0 = 16 \Rightarrow x = 16$

2ª equação: X − A = B, sendo X, A e B matrizes quadradas de ordem 2.

Para resolver essa equação, isolamos a matriz X no primeiro membro da igualdade:

$$X - A = B$$

$$X - A + A = B + A$$

$$X + O = B + A \Rightarrow X = B + A$$

A equação envolvendo matrizes acima é chamada **equação matricial**.

Multiplicação por um número real

Para compreender como podemos multiplicar uma matriz A por um número real *k*, vamos considerar o caso particular de que esse número seja natural, isto é, a partir da adição de uma matriz A com ela mesma *k* vezes.

Assim, vamos considerar a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e obter a matriz resultante da adição A + A + A adicionando os elementos correspondentes, isto é:

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 4+4+4 & 2+2+2 & 1+1+1 \\ -3-3-3 & 5+5+5 & 6+6+6 \end{bmatrix}$$

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

Note que obter o resultado da adição A + A + A é o mesmo que calcular 3 · A, isto é, multiplicar todos os elementos da matriz dada por 3:

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo, multiplicamos uma matriz por um número natural. Se o número for real, a ideia é a mesma, isto é, multiplicamos todos os elementos da matriz pelo correspondente número real.

Dado um número real *k* e uma matriz A, de ordem $m \times n$, a matriz que se obtém multiplicando por *k* todos os elementos de A é a matriz $k \cdot A$, de mesma ordem.

Usando a notação de matrizes, podemos escrever:

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz de ordem $m \times n$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k \cdot A$ é a matriz $B = (b_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, vamos determinar uma matriz X, de mesma ordem dessas duas matrizes, que satisfaz a equação matricial 2X + A + 3B = O, considerando que O é a matriz nula de ordem 3.

- Substituímos as matrizes na igualdade:

$$2X + A + 3B = 0$$

$$2X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 12 & 3 & -3 \\ 0 & 15 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2X + \begin{bmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 14 & 5 & 4 \\ -2 & 16 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Como o resultado da adição é a matriz nula, então a matriz 2X deve ser a matriz oposta da matriz, ou seja:

$$2X = -\begin{bmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 14 & 5 & -2 \\ -2 & 16 & 22 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -3 \\ -14 & -5 & 2 \\ 2 & -16 & -22 \end{bmatrix}$$

- A matriz que aparece no segundo membro da igualdade é o dobro da matriz X. Dessa forma, devemos dividir seus elementos por 2 (que é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{2}$) para obter a matriz X:

$$X=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-10 & -3 & -3\\ -14 & -5 & 2\\ 2 & -16 & -22\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-5 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ -7 & -\frac{5}{2} & 1\\ 1 & -8 & -11\end{bmatrix}$$

Sendo r e s dois números reais e A e B duas matrizes de mesma ordem, verifique, por meio de exemplos (você deverá elaborar), a veracidade das seguintes igualdades:

(I) $(r+s)\cdot A = r\cdot A + s\cdot A$

(II) $r\cdot(A+B) = r\cdot A + r\cdot B$

(III) $(r\cdot s)\cdot A = r\cdot(s\cdot A)$

Apresente os exemplos elaborados acima para os demais colegas.

Exercícios resolvidos

1. Dadas as matrizes

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -3 & 6 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$ e

$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$, obtenha a matriz A + B.

$$A+B=\begin{pmatrix}1+(-2) & -2+1 & 2+(-2)\\ -3+0 & 6+(-4) & 3+2\\ 2+1 & 4+(-3) & 0+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

2. Com relação às matrizes anteriores, obtenha o elemento c_{23} da matriz C = 3A − 4B.

Temos que: $c_{23}=3\cdot a_{23}-4\cdot b_{23}\Rightarrow c_{23}=3\cdot 3-4\cdot 2=1.$

3. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, obtenha a matriz $C = A^t - 2A - 3B^t$.

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}-3\times\begin{pmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & -8\\ 2 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -9\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 18\\ -12 & -6\end{pmatrix}$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, obtenha: Respostas no Manual do Professor.

a) a matriz A + B;
b) a matriz A − B.

2. Ainda com relação às matrizes A e B do exercício anterior, obtenha a matriz 2A + 3B.
Respostas no Manual do Professor.

3. Escreva, em seu caderno, se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

V a) Sendo A e B matrizes de mesma ordem, A + B = B + A.

V b) Sendo A, B e C matrizes de mesma ordem, A + (B + C) = (A + B) + C.

F c) Sendo A e B matrizes de mesma ordem, A − B = B − A.

F d) Se A + B = O, em que O é a matriz nula da mesma ordem que as matrizes A e B, então B é a matriz transposta da matriz A.

V e) Se A + B = O, em que O é a matriz nula da mesma ordem que as matrizes A e B, então B é a matriz oposta da matriz A.

4. Com relação às matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, responda:

a) Qual é a matriz A^t?
b) Qual é a matriz B^t?
c) Qual é a matriz $A^t + B^t$?
d) Qual é a matriz A + B?
e) Qual é a matriz $(A + B)^t$?
f) Qual é relação entre $(A + B)^t$ e $A^t + B^t$?

Respostas no Manual do Professor.

5. Uma matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ é definida por $a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ se } i<j\\ 2, \text{ se } i=j\\ 3, \text{ se } i>j\end{cases}$

a) Escreva a matriz A.
b) Escreva a matriz $A + 2\cdot A^t - 3\cdot I_3$, em que I_3 é a matriz identidade de ordem 3.

Respostas no Manual do Professor.

6. Determine os valores de m e de n de modo que:

$$\begin{pmatrix}n+1 & -1\\ -3 & 2m-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 9\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4m & 8\\ -5 & n-2\end{pmatrix}.$$

$m = 5$ e $n = 13$.

7. Os alunos de uma escola foram classificados, por sexo, pelo nível de ensino e se tinham ou não hábito de leitura. Os resultados estão apresentados nas tabelas a seguir:

	Ensino Fundamental	
	Masculino	**Feminino**
Mantêm hábito de leitura	238	256
Não mantêm hábito de leitura	42	22

	Ensino Médio	
Mantêm hábito de leitura	295	325
Não mantêm hábito de leitura	235	195

a) Qual é o número total de alunos do sexo masculino dessa escola? a) 810

b) Qual é o número total de alunos dessa escola que mantém o hábito de leitura? b) 1 114

c) Escreva uma matriz de ordem 2 que mostre os alunos da escola divididos por sexo e pelo hábito ou não de leitura, independentemente do nível de ensino. Resposta no Manual do Professor.

8. Dadas as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determine a matriz X, de modo que $(X+B)^t=A$.
Resposta no Manual do Professor.
Observação: Se $A=B^t$, então $A^t=B$.

9. Obtenha a matriz X na equação $2X+A-B=3C$, em que:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } C=\begin{bmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$ Resposta no Manual do Professor.

10. Resolva o sistema de equações a seguir, no qual X e Y são matrizes. Resposta no Manual do Professor.

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 13 & 21 \end{bmatrix} \\ X-Y=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \end{cases}$$

11. Se os elementos da matriz X são números naturais, determine as soluções da equação matricial

$$x+x^t=\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$ Resposta no Manual do Professor.

Multiplicação de matrizes

Entre as operações relacionadas às matrizes, é a multiplicação que desperta mais interesse em Matemática Superior, quando do estudo da Álgebra Linear. Neste momento, o estudo de matrizes é restrito às conceituações e aos procedimentos. Em outras palavras, podemos dizer que estamos fornecendo uma ferramenta de aplicação posterior.

Partindo de uma situação, vamos multiplicar duas matrizes.

Nas duas tabelas a seguir temos as médias de um aluno em determinado curso de Ciências Exatas e os pesos dessas médias conforme o bimestre:

	Médias bimestrais			
	1º bimestre	**2º bimestre**	**3º bimestre**	**4º bimestre**
Matemática	6	7	4	8
Física	5	6	9	7
Química	8	8	7	6

	Pesos por bimestre
1º bimestre	1
2º bimestre	2
3º bimestre	3
4º bimestre	4

Vamos calcular o total de pontos obtidos em cada uma das disciplinas ao longo dos quatro bimestres, conforme pesos estabelecidos:

- Matemática $\rightarrow 6\cdot1+7\cdot2+4\cdot3+8\cdot4=64$
- Física $\rightarrow 5\cdot1+6\cdot2+9\cdot3+7\cdot4=72$
- Química $\rightarrow 8\cdot1+8\cdot2+7\cdot3+6\cdot4=69$

As duas tabelas acima podem ser associadas a duas matrizes, que representaremos por A e B. A matriz $A(3\cdot4)$ é formada pelas médias bimestrais, já a matriz $B(4\cdot1)$ é formada pelos pesos dos bimestres.

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 & 7 \\ 8 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Como na matriz A cada linha apresenta as médias de uma disciplina em cada bimestre, e a matriz B contém uma coluna formada pelos pesos, para saber quantos pontos foram obtidos em cada disciplina no final dos quatro bimestres multiplicamos as notas pelos correspondentes pesos e adicionamos os resultados. Essa ideia sugere o seguinte esquema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 & 7 \\ 8 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6\cdot1+7\cdot2+4\cdot3+8\cdot4 \\ 5\cdot1+6\cdot2+9\cdot3+7\cdot4 \\ 8\cdot1+8\cdot2+7\cdot3+6\cdot4 \end{bmatrix}}_{AB}$$

Note que, ao proceder desse modo, obtivemos uma matriz formada pelos totais de pontos. Essa matriz é chamada **matriz produto de A por B**, e é representada por AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 64 \\ 72 \\ 69 \end{bmatrix}$$

Na situação apresentada, os elementos da matriz AB foram calculados da seguinte maneira: cada elemento de uma linha da matriz A foi multiplicado pelo correspondente elemento da coluna da matriz B, e os produtos obtidos, para cada linha e coluna, foram adicionados. A ordem da matriz AB é 3 · 1, ou seja, 3 linhas da matriz A e 1 coluna da matriz B.

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, o produto AB é a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, tal que cada elemento c_{ik} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna k da matriz B, e adicionando-se os produtos obtidos. Em símbolos, temos:

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$
para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Observações:

1. Para obter o produto é necessário observar que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

2. Note também que a matriz correspondente ao produto possui o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

Exemplo:

Vamos multiplicar as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ pela matriz } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Dispomos lado a lado as matrizes e multiplicamos ordenadamente os elementos de uma linha da matriz A pelos correspondentes nas colunas da matriz B, isto é:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)+(-1)\cdot4+(-2)\cdot0 & 3\cdot0+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot3 \\ 0\cdot(-1)+5\cdot4+2\cdot0 & 0\cdot0+5\cdot(-1)+2\cdot3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 20 & 1 \end{bmatrix}$$

- Observe o que ocorre quando invertemos a ordem das matrizes na multiplicação:

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1\cdot3+0\cdot0 & -1\cdot(-1)+0\cdot5 & (-1)\cdot(-2)+0\cdot2 \\ 4\cdot3+(-1)\cdot0 & 4\cdot(-1)+(-1)\cdot5 & 4\cdot(-2)+(-1)\cdot2 \\ 0\cdot3+3\cdot0 & 0\cdot(-1)+3\cdot5 & 0\cdot(-2)+3\cdot2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 12 & -9 & -10 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim, comparando as matrizes AB e BA, nesse exemplo, observamos que elas são diferentes.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Elabore uma matriz quadrada A de 2ª ordem. Depois, obtenha os produtos $A \cdot I$ e $I \cdot A$. Eles são iguais?
2. Dadas as matrizes $A_{5 \cdot 3}$ e $B_{3 \cdot 4}$, o produto $A \cdot B$ existe? Qual é a ordem da matriz $A \cdot B$?
3. Dadas as matrizes $A_{5 \cdot 3}$ e $B_{4 \cdot 4}$, o produto $A \cdot B$ existe?

Propriedades do produto de duas matrizes

Na multiplicação entre matrizes podem ser observadas algumas propriedades que não serão demonstradas aqui e estão condicionadas à existência das operações indicadas.

Supondo A, B e C matrizes para as quais estão definidas as operações indicadas, valem as seguintes propriedades:

- associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- distributiva à direita em relação à adição: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- distributiva à esquerda em relação à adição: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Você pode constatar essas propriedades por meio de exemplos. Sugerimos que você elabore matrizes A, B e C, para as quais as operações acima sejam válidas, e observe a veracidade dessas propriedades.

Além dessas propriedades, devemos considerar um importante resultado restrito à multiplicação de matrizes quadradas de mesma ordem

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes quadradas de ordem n, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n, então as matrizes A e B são denominadas **matrizes inversas**.

Observação:

Sendo B a matriz inversa da matriz A, escrevemos: $B = A^{-1}$.

Exemplo:

Vamos verificar se as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ são matrizes inversas.

- Calculamos o produto $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ (-4) \cdot 3 + 3 \cdot 4 & (-4) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

- Calculamos o produto $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) & 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Comparando os dois resultados concluímos que $A \cdot B = B \cdot A = I_2$. Sendo assim, as matrizes A e B são inversas entre si.

Exemplo:

O cálculo envolvendo matriz inversa permite resolver certas equações matriciais. Assim, por exemplo, vamos considerar que as matrizes quadradas A e B de mesma ordem n, na equação $A \cdot X = B$, sejam duas matrizes quadradas invertíveis (admitem inversas). Para obter a matriz X, multiplicamos à esquerda os dois membros pela matriz inversa A^{-1}.

$A \cdot X = B$

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$

- Propriedade associativa

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$I_n \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

Nessa equação matricial, a matriz X, também quadrada de ordem n, é dada por $A^{-1} \cdot B$.

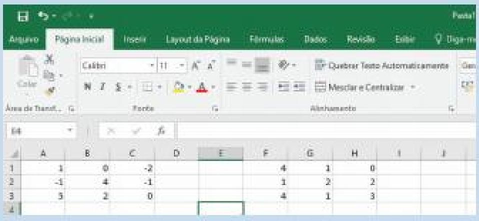
EXPLORANDO

Se você tem acesso a alguma planilha eletrônica, pode efetuar a multiplicação de matrizes com esse importante recurso. Como exemplo, vamos mostrar como pode obter o produto das matrizes A e B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

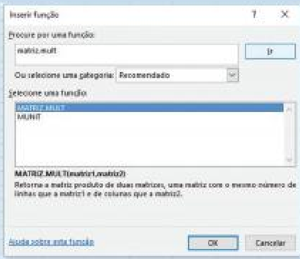
Acompanhe as etapas:

1ª etapa – Depois de abrir a planilha eletrônica, represente as matrizes A e B, deixando espaço de pelo menos uma coluna entre elas.

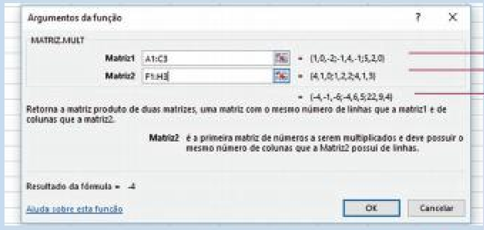


Figuras: © DAE

2ª etapa – Escolha, com o cursor, uma célula vazia (observe que escolhemos na ilustração anterior a célula E4). Pressione "*fx*" e digite "MATRIZ.MULT." em "Procure por uma função". A seguir, clique "OK".



3ª etapa – Na nova tela, você deverá especificar as células correspondentes aos elementos das duas matrizes. No nosso exemplo, deverá digitar "A1:C3" para a primeira matriz (observe que imediatamente ao lado do espaço que você digitou aparece {1.0.-2;-1.4.<1;5.2.0}, correspondente aos elementos da 1ª, da 2ª e da 3ª linha da matriz A) e "F1:H3" para a segunda matriz (no quadro ao lado aparecerá {4.1.0;1.2.2;4.1.3}, correspondente aos elementos da 1ª, da 2ª e da 3ª linha da matriz B. Observe a ilustração a seguir:



Elementos da matriz A

Elementos da matriz B

Elementos da matriz AB

Note que nessa tela, imediatamente após digitar o último elemento da matriz B, aparecerá abaixo desses elementos a linha contendo "={<4.<1.<6;<4.6.5;22.9.4}. Esses são os elementos da matriz produto. Se você clicar em "OK" na planilha, aparecerá "<4" na célula em branco que você selecionou antes de pressionar "*fx*".

1. Utilize a planilha eletrônica e faça multiplicações entre matrizes.
2. Verifique, com a planilha eletrônica, se as multiplicações que você já efetuou em seu caderno ou propostas no livro estão corretas.

Exercícios resolvidos

1. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ obtenha}$$

a) a matriz $A \cdot B$;

b) a matriz $B \cdot A$.

$$\text{a) } A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 16 \\ 10 & 24 & 38 \\ 16 & 38 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 56 \\ 35 & 44 \end{bmatrix}$$

2. Indique se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa, sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem.

a) $A \cdot B = B \cdot A$

b) $(A + B)^2 + A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$

c) $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$

d) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

e) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - A \cdot B + B \cdot A - B^2$

a) Falsa.

b) Falsa. $(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$

c) Falsa. $(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A^2 - AB - BA + B^2$

d) Falsa. $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

e) Verdadeira.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Marque V se a afirmação for verdadeira e F se for falsa.

a) É possível efetuar o produto de uma matriz do tipo $3 \cdot 4$ por outra matriz do tipo $4 \cdot 5$.

b) O produto de uma matriz do tipo $2 \cdot 3$ por outra matriz do tipo $3 \cdot 2$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

c) Só é possível efetuar o produto de matrizes que sejam do mesmo tipo. V, V, F.

2. Marque V se a afirmação for verdadeira e F se for falsa.

a) Sendo as matrizes $A = (a_{ij})_{a \cdot b}$, $B = (b_{ij})_{b \cdot c}$ e $C = (c_{ij})_{c \cdot d}$, temos que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. V.

b) Sendo as matrizes $A = (a_{ij})_{a \cdot b}$, $B = (b_{ij})_{a \cdot b}$ e $C = (c_{ij})_{b \cdot c}$, temos que $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$. V.

3. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Obtenha a matriz $A \cdot B$.

b) Obtenha a matriz $A \cdot C$.

c) Dadas três matrizes não nulas A, B e C, diga se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

"Se $A \cdot B = A \cdot C$, então $B = C$." Resposta no Manual do Professor.

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

a) Obtenha a matriz $A \cdot B$.

b) Dadas duas matrizes não nulas A e B, diga se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

"Se $A \cdot B = O$, onde O é a matriz nula, então $A = O$ ou $B = O$."
Resposta no Manual do Professor.

5. Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3x3}$, definidas por $a_{ij} = 2i + 3j$ e $b_{ij} = \begin{cases} i^j, \text{se } i + j = 4 \\ j^i, \text{se } i + j \neq 4 \end{cases}$.

Se a matriz $C = A \times B$, calcule o elemento da segunda linha e da terceira coluna da matriz C.
Resposta no Manual do Professor.

6. Lucas resolveu fazer as compras dos ingredientes que necessitava para preparar lasanhas para sua família. Pesquisou os preços desses ingredientes em três supermercados, montando a tabela a seguir:

Supermercado	Massa (kg)	Carne moída (kg)	Creme de leite (caixa)	Presunto (kg)	Queijo (kg)
A	R$ 8,00	R$ 12,00	R$ 3,50	R$ 25,00	R$ 24,00
B	R$ 8,50	R$ 13,00	R$ 4,00	R$ 24,00	R$ 22,00
C	R$ 7,50	R$ 14,00	R$ 3,50	R$ 22,00	R$ 23,00

Ele previu que seriam necessários 2 quilogramas de massa, 1 quilograma de carne moída, 4 caixas de creme de leite, 1 quilograma de presunto e 1 quilograma de queijo. Os preços dos ingredientes, em reais, nos três supermercados e as quantidades necessárias de cada um dos ingredientes podem ser organizados em duas matrizes, P e Q.

$$P = \begin{bmatrix} 8{,}00 & 12{,}00 & 3{,}50 & 25{,}00 & 24{,}00 \\ 8{,}50 & 13{,}00 & 4{,}00 & 24{,}00 & 22{,}00 \\ 7{,}50 & 14{,}00 & 3{,}50 & 22{,}00 & 23{,}00 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Obtenha a matriz C, que indica o custo total dos ingredientes necessários em cada um dos supermercados.

b) Qual é o preço médio dos ingredientes que Lucas precisa comprar para preparar as lasanhas, considerando os três supermercados? b) R$ 90,33

Respostas no Manual do Professor.

7. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ calcule:

a) A^2;

b) A^3;

c) A^4;

d) A^n, em que n é um número natural diferente de zero.

Respostas no Manual do Professor.

8. Qual das matrizes a seguir é a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

9. Sendo A a matriz do exercício anterior, considere a equação $A \cdot X = B$. Uma das maneiras para determinar a matriz X, que é solução da equação, é multiplicar os dois membros da igualdade $A \cdot X = B$ pela matriz inversa de A, como vimos anteriormente. A partir desse procedimento, determine a matriz X, tal que $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$X = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$ Resposta no Manual do Professor.

10. Se A e B são matrizes invertíveis de mesma ordem, obtenha a matriz X em cada uma das equações a seguir:

a) $A \cdot X = B$;

b) $X \cdot A = B$;

c) $A \cdot X \cdot B = I$;

d) $B \cdot X \cdot A = B$;

e) $A^{-1} \cdot X = B$.

Respostas no Manual do Professor.

11. Elabore três matrizes A, B e C quadradas de ordem 2. A seguir, obtenha as seguintes matrizes:

a) $(A \cdot B) \cdot C$ e $A \cdot (B \cdot C)$;

b) $A \cdot (B + C)$ e $A \cdot B + A \cdot C$;

c) $(A + B) \cdot C$ e $A \cdot C + B \cdot C$. Resposta pessoal.

Determinantes de matrizes

A cada matriz quadrada podemos associar um número real denominado **determinante da matriz**. Assim, sendo A uma matriz quadrada, representaremos por $|A|$ ou $\det(A)$ o determinante dessa matriz.

$$\underbrace{A}_{\text{matriz quadrada}} \longrightarrow \underbrace{|A|}_{\text{número real}}$$

Antes de mostrar como obter o determinante de uma matriz quadrada, vamos, por meio de um sistema de duas equações com duas incógnitas, observar as matrizes correspondentes. Assim, considere as matrizes A, B e X, tais que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nessas matrizes, considere ainda que a, b, c, d, e e f representam números reais conhecidos, ao passo que as letras x e y são incógnitas que precisamos determinar, de tal maneira que:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Os valores de x e y indicados acima são obtidos a partir da resolução de um sistema de equações, conforme estudado no Ensino Fundamental.

Tais valores são:

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Observação:

O denominador dessas duas frações, como veremos mais adiante, é o número real correspondente ao determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Já os numeradores dessas duas frações correspondem aos determinantes de duas matrizes associadas ao sistema.

- **Determinante de uma matriz de ordem 1**

O determinante da matriz $A = (a_{11})$ de ordem 1 é o próprio elemento a_{11}, isto é:

$\det(A) = a_{11}$.

Exemplo:

Na matriz $B = (-10)$, temos que:

$\det(B) = -10$

Observação:

O determinante de uma matriz é representado por duas barras verticais no lugar dos parênteses ou colchetes que normalmente utilizamos para representar uma matriz. Embora seja o mesmo símbolo de módulo de um número, é empregado de forma diferente.

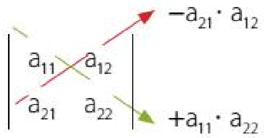
- **Determinante de uma matriz de ordem 2**

O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

de ordem 2 é o número real resultante de $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$, isto é:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Normalmente utilizamos um esquema para obter esse determinante:



Assim, como sugere o esquema, para calcular o determinante de uma matriz de ordem 2, adicionamos o produto dos elementos da diagonal principal com o oposto do produto dos elementos da diagonal secundária da matriz.

Exemplo:

Vamos calcular o determinante da matriz $T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$.

- Conforme definição, temos que:

$$\det(T) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\det(T) = 2 \cdot (-5) - 9 \cdot (-3)$$

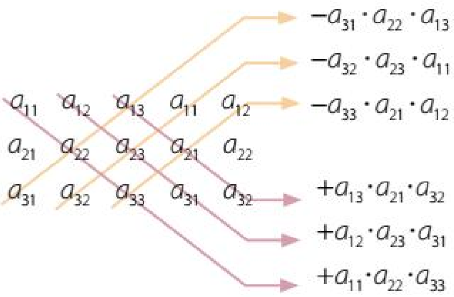
$$\det(T) = -10 + 27 \Rightarrow \det(T) = 17$$

- **Determinante de uma matriz de ordem 3**

O determinante de uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de ordem 3 é o número real resultante de $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$, isto é:

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

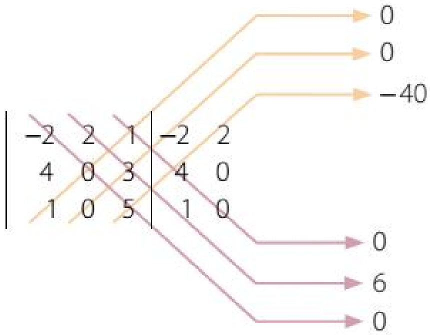
Normalmente, para o cálculo do determinante de ordem 3, utilizamos um esquema prático conhecido como **regra de Sarrus**. Nesse procedimento, devemos repetir a 1ª e a 2ª coluna à direita da matriz; depois, como sugere o esquema a seguir, devemos manter o sinal do produto da diagonal principal e de todas as diagonais paralelas a ela, e trocar o sinal do produto da diagonal secundária e de todas as diagonais paralelas a ela:



Exemplo:

Vamos calcular o determinante e da matriz. $V = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

- De acordo com a regra de Sarrus, repetimos a 1ª e a 2ª coluna à direita da 3ª coluna e multiplicamos os elementos correspondentes:



$$\det(V) = 0 + 6 + 0 + 0 + 0 - 40$$

$$\det(V) = -34$$

Determinante de uma matriz de ordem superior a 3

Até aqui, vimos como calcular o determinante de uma matriz quadrada até ordem 3. Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem maior que 3, vamos conceituar o cofator de um elemento de uma matriz.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem n, sendo $n \geqslant 2$, denominamos cofator c_{ij} do elemento a_{ij} o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante D_{ij} da matriz obtida quando se retira de A a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Em símbolos:

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$

Exemplo:

Vamos, a partir da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, genérica de ordem 3, indicar os cofatores de alguns de seus elementos.

- Cofator do elemento a_{11}:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Cofator do elemento a_{31}:

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

- Cofator do elemento a_{23}:

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, vamos obter os cofatores c_{22}, c_{13} e c_{32}.

- $c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 3 - 1 \cdot 0) \Rightarrow c_{22} = 6$

- $c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 \cdot 6 - 1 \cdot 1) \Rightarrow c_{13} = -19$

- $c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 5 + 3 \cdot 0) \Rightarrow c_{32} = -10$

Um procedimento para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem igual ou maior que dois envolve o conceito de cofator. É o teorema de Laplace (1749-1827), que apresentaremos sem demonstração.

> **Teorema de Laplace**
>
> Considere a matriz $A = (a_{ij})$ quadrada de ordem n, $n \geqslant 2$. O determinante dessa matriz é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou de uma coluna qualquer da matriz A pelos respectivos cofatores.

Exemplo:

Vamos considerar a matriz

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, genérica de ordem 3 e,

utilizando o teorema de Laplace, mostrar como calcular o determinante dessa matriz.

- Escolhemos, por exemplo, a 1ª linha dessa matriz. De acordo com o teorema de Laplace, o determinante de A pode ser calculado por:

$$\det(A) = a_{11} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot c_{12} + a_{13} \cdot c_{13}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Se escolhermos a 3ª coluna dessa matriz, o determinante de A pode ser calculado, segundo o teorema de Laplace, por:

$$\det(A) = a_{13} \cdot c_{13} + a_{23} \cdot c_{23} + a_{33} \cdot c_{33}$$

$$\det(A) = a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Observação:

Pelo exemplo, seguindo o teorema de Laplace, para o cálculo do determinante de ordem 3, precisamos calcular 3 determinantes de ordem 2.

Exemplo:

Vamos calcular o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, utilizando o teorema de Laplace.

- Como na 3ª linha da matriz existem 2 elementos nulos, o cálculo do determinante de M será facilitado se escolhermos essa linha (bastará calcular um determinante de ordem 2):

$$\det(M) = 0 \cdot c_{31} + 0 \cdot c_{32} + 2 \cdot c_{33}$$
$$\det(M) = 2 \cdot c_{33}$$
$$\det(M) = 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\det(M) = 2 \cdot 1 \cdot (14 + 3) \Rightarrow \det(M) = 34$$

Observações:

1. O cálculo do determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, de ordem 4, pode ser feito a partir de 4 determinantes de ordem 3. Basta escolher 1 linha ou 1 coluna e aplicar o teorema de Laplace.

2. Não abordaremos aqui determinantes de matrizes de ordem maior que 4.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Em relação ao exemplo, explique como seria calcular o determinante da matriz A utilizando o teorema de Laplace para a 2ª linha.
2. E para a 2ª coluna, como seria o cálculo do determinante utilizando o teorema de Laplace?

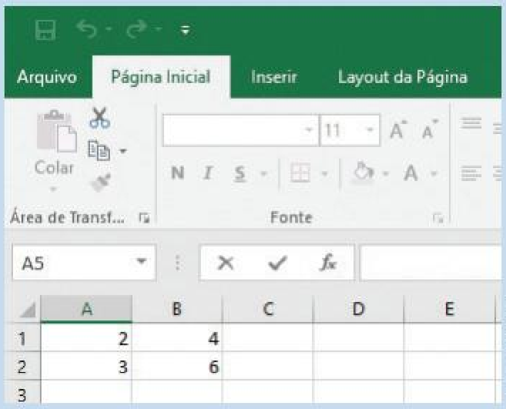
EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Assim como você conseguiu obter o produto de matrizes, você também pode utilizar a planilha eletrônica para calcular os determinantes. Ao entrar na planilha eletrônica, escolha a função "MATRIZ.DETERM" e, em seguida, informe os elementos da matriz quadrada cujo determinante deseja calcular. Vamos exemplificar destacando alguns passos no cálculo do determinante da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

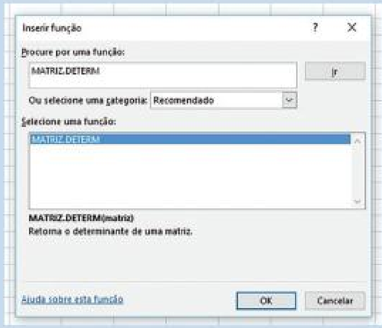
1ª etapa – Digite os elementos da matriz A e coloque o cursor numa célula em branco.



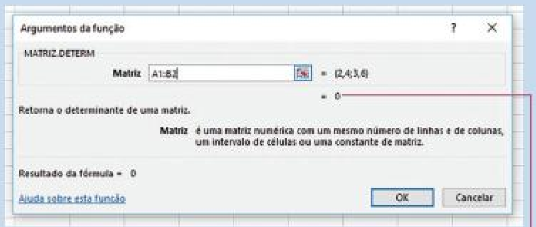
Figuras: © DAE

2ª etapa – Clique em "*fx*" e digite "MATRIZ.DETERM" no campo "Procure por uma função".

Aperte o botão "Ir", seguido de "OK".



3ª etapa – No campo "Matriz", digite "A1:B2", correspondente às células da planilha em que aparecem os elementos da matriz. Nessa mesma tela, aparece o determinante.



Determinantes da matriz AB

1. Explore essa ferramenta calculando os determinantes de matrizes quadradas que você elaborar.
2. Retome os determinantes que você já calculou ao longo deste capítulo e confira alguns resultados utilizando a ferramenta eletrônica mencionada.

Propriedades dos determinantes

O cálculo de determinantes pode ser simplificado por meio do conhecimento de algumas propriedades que apresentamos a seguir. As demonstrações dessas propriedades foram omitidas. Entretanto, com base no teorema de Laplace ou na regra de Sarrus, procuramos justificá-los por meio de determinantes de matrizes genéricas de ordem 3.

> Se todos os elementos de uma linha ou de uma coluna de uma matriz quadrada são nulos, seu determinante é igual a zero.

Para justificar essa propriedade, considere, por exemplo, a matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, em que a segunda coluna tem todos os elementos iguais a zero. Assim, pelo teorema de Laplace, considerando a segunda coluna, temos:

$$\det(A) = 0 \cdot c_{12} + 0 \cdot c_{22} + 0 \cdot c_{32}$$
$$\det(A) = 0$$

Exemplo:

Considerando a matriz $M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, conforme o teorema de Laplace, seu determinante é igual a zero.

- Observando que todos os elementos da 3ª linha são iguais a zero, vem:
  $$\det(M) = 0 \cdot c_{31} + 0 \cdot c_{32} + 0 \cdot c_{33} + 0 \cdot c_{34}$$
  $$\det(M) = 0$$

> Se duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada forem iguais, seu determinante será igual a zero.

Vamos considerar a matriz

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$, em que a 1ª e a 3ª linhas têm os elementos correspondentes iguais. Assim, de acordo com a regra de Sarrus, temos:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$
$$\det(A) = 0$$

Observação:

Fizemos a verificação para a matriz quadrada de ordem 3, porém essa propriedade é válida para matriz quadrada de qualquer ordem. Essa mesma observação é válida para as outras propriedades a seguir.

> Se duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada tiverem seus elementos correspondentes proporcionais, seu determinante será igual a zero.

Vamos considerar a matriz

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{pmatrix}$, em que a 1ª e a 3ª linhas têm os elementos correspondentes proporcionais. Assim, segundo a regra de Sarrus, temos:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ka_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot ka_{11} + a_{21} \cdot ka_{12} \cdot a_{13} - ka_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot ka_{13} - ka_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$
$$\det(A) = 0$$

> Se todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) de uma matriz quadrada são multiplicados por um mesmo número real *k*, seu determinante fica multiplicado por *k*.

Vamos considerar as matrizes A e B a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Observe que a 2ª coluna da matriz B tem os elementos da 2ª coluna da matriz A multiplicados por *k*. Calculando os determinantes dessas duas matrizes pela regra de Sarrus, temos:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$
$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

$$\det(B) = a_{11} \cdot ka_{22} \cdot a_{33} + ka_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot ka_{32} \cdot a_{13}$$
$$-a_{31} \cdot ka_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot ka_{12} \cdot a_{33} - ka_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$
$$\det(B) = k \cdot \det(A)$$

Exemplo:

Considere as matrizes quadradas

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ 12 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

As duas primeiras linhas das matrizes são iguais. A 3ª linha da matriz P tem os elementos correspondentes iguais aos elementos da 3ª linha de M multiplicados por 3, então:

$$\det(P) = 3 \cdot \det(M)$$

Se todos os elementos de uma matriz quadrada de ordem *n* são multiplicados por um mesmo número real *k*, seu determinante fica multiplicado por *k·n*.

Consideremos as matrizes A e B, tais que os elementos da matriz B foram obtidos da matriz A multiplicando-os por *k*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

- Vamos calcular o determinante da matriz A pela regra de Sarrus:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$
$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

- Agora, também pela regra de Sarrus, calculamos o determinante da matriz B:

$$\det(B) = ka_{11} \cdot ka_{22} \cdot ka_{33} + ka_{12} \cdot ka_{23} \cdot ka_{31} +$$
$$+ka_{21} \cdot ka_{32} \cdot ka_{13} - ka_{31} \cdot ka_{22} \cdot ka_{13}$$
$$-ka_{21} \cdot ka_{12} \cdot ka_{33} - ka_{32} \cdot ka_{23} \cdot ka_{11}$$

$$\det(B) = k^3 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + k^3 \cdot (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) +$$
$$k^3 \cdot (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) - k^3 \cdot (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13})$$
$$-k^3 \cdot (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}) - k^3 \cdot (a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11})$$

$$\det(B) = k^3 \cdot \det(A)$$

Exemplo:

Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 2, tal que seu determinante é igual a 10, vamos calcular o determinante da matriz $B = 5 \cdot A$.

- Como a matriz B é obtida a partir da matriz A, multiplicando-se todos os seus elementos por 5, conforme propriedade apresentada, temos:

$$\det(B) = \det(5 \cdot A)$$

$$\det(B) = 5^2 \cdot \det(A)$$

$$\det(B) = 25 \cdot 10 \Rightarrow \det(B) = 250$$

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Verifique, por meio de exemplos, as seguintes propriedades dos determinantes:

1. Sendo A uma matriz quadrada e A^t a matriz transposta, descubra a relação que existe entre $\det(A^t)$ e det(A). A que conclusão você conseguiu chegar?
2. Sendo I_n uma matriz identidade de ordem *n*, mostre que $\det(I^n) = 1$.

Teorema de Binet

Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem e $A \cdot B$ a matriz correspondente ao produto das duas matrizes, então $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Exemplo:

Vamos considerar as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ para verificar a validade do teorema de Binet.

- Calculamos os determinantes das matrizes A e B. Depois, multiplicamos esses resultados:

$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \Rightarrow \det(A) = -2$

$\det(B) = -1 \cdot 8 - 4 \cdot 1 \Rightarrow \det(A) = -12$

$\det(A) \cdot \det(B) = -2 \cdot (-12) \Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = 24 \text{ (I)}$

- Obtemos a matriz A · B e calculamos seu determinante:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 8 \\ 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 11 & 25 \\ 14 & 34 \end{bmatrix}$$

$\det(A \cdot B) = 11 \cdot 34 - 14 \cdot 25 \Rightarrow \det(A \cdot B) = 24 \text{ (II)}$

Comparando (I) e (II), concluímos que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Seja A uma matriz quadrada invertível e A^{-1} sua matriz inversa, tem-se que:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- Vimos que, se A é uma matriz quadrada de ordem n, A^{-1} é sua matriz inversa e I_n é a matriz identidade de ordem n, então:

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

- Pelo teorema de Binet, temos:

$A^{-1} \cdot A = I_n$

$\det(A^{-1} \cdot A) = \det(I_n)$

$\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Observações:

1. Para uma matriz quadrada A, tem-se que, se $\det(A) \neq 0$, a matriz A admite uma única inversa A^{-1}. Neste caso, dizemos que a matriz A é invertível.
2. Para uma matriz quadrada A, tem-se que, se $\det(A) = 0$, a matriz A não admite inversa. Neste caso, dizemos que a matriz A não é invertível.

Exercícios resolvidos

1. Obtenha o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 15 - 3 = 12$$

2. Determine os valores de x que satisfazem a equação

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix}$$

$x^2 - 3x - 3 = 5x - 3$

$x^2 - 8x = 0 \therefore x = 0 \text{ ou } x = 8$

$S = \{0; 8\}$

3. Uma matriz $A = (a_{ij})_{3 \cdot 3}$ é definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{se } i < j \\ 2i, \text{se } i = j \\ 2j, \text{se } i > j \end{cases}$$

a) Escreva a matriz A.

b) Obtenha o determinante da matriz A utilizando a regra de Sarrus.

c) Obtenha o mesmo determinante da matriz A utilizando o teorema de Laplace.

a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\det(A) = 48 + 30 + 32 - 32 - 36 - 40 = 2$

c) Utilizando a regra de Laplace na primeira linha da matriz, temos:

$\det(A) = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$

$\det(A) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot (24 - 20) + 3 \cdot (-1) \cdot (12 - 10) + 4 \cdot 1 \cdot 0$

$\det(A) = 8 - 6$

$\det(A) = 2$

4. O determinante de uma matriz A de ordem 3 é igual a 8.

Calcule o valor de:

a) det(2A);

b) det(–A);

c) $\det\left(\dfrac{1}{2} \cdot A\right)$.

a) $\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 8 = 64$

b) $\det(-A) = (-1)^3 \cdot \det(A) = -1 \cdot 8 = -$

c) $\det\left(\dfrac{1}{2} \cdot A\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \det(A) = \dfrac{1}{8} \cdot 8 =$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule os determinantes indicados a seguir.

a) $|7|$ 7

b) $|-10|$ -10

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ 13

d) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}$ -9

2. Uma matriz $A = (a_{ij})_{2 \cdot 2}$ é definida por $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + j, \text{se } i \leq j \\ 2^i - j, \text{se } i > j \end{cases}$

Calcule o determinante da matriz A. 3

3. Calcule os determinantes a seguir.

a) 1

$\begin{vmatrix} \text{sen}(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \text{sen}(x) \end{vmatrix}$

b) $\cos(x + y)$

$\begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ \text{sen}(y) & \cos(y) \end{vmatrix}$

c) $\text{sen}(x - y)$

$\begin{vmatrix} \text{sen}(x) & 2 & \cos(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(y) & -2 & \cos(y) \end{vmatrix}$

4. Resolva a equação: $S = \{0; 1\}$

$$\begin{vmatrix} 4^x & 8^x & 2^x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine os valores reais de k, tais que $\det(A + kB) = 0$.
$k = -2$ ou $k = 10$.

6. Com relação à matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ x & x+3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) o determinante da matriz A; $x^2 - 8x + 7$

b) o valor de x para o qual o determinante da matriz A assume o valor mínimo; $x = 4$

c) o valor mínimo que o determinante da matriz A pode assumir. -9

7. Obtenha o cofator de cada um dos elementos a_{12}, a_{23} e a_{31} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. $C_{12} = 7$, $C_{23} = -4$ e $C_{31} = -6$

8. Calcule cada um dos determinantes a seguir:

a) 55

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

b) 112

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

c) 242

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

9. Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ a & b & c & d \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule o determinante dessa matriz em função de a, b, c e d.
$10a + 30b - 30c - 10d$
Sugestão: desenvolva o determinante a partir da terceira linha e utilize o teorema de Laplace.

10. Explique, com base nas propriedades de determinantes, por que cada um dos determinantes a seguir é igual a zero.

a)

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ A primeira e a terceira linha são iguais.

b)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ A segunda coluna é nula.

c)

$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 8 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ A primeira e a terceira linha são proporcionais.

15. b) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

11. Considerando que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$, calcule:

a) 20 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) 40 $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$

c) 80 $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

12. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, calcule o valor de det(A · B). −2

13. Responda às seguintes questões com relação às matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Existe o determinante da matriz A? Não.

b) Existe o determinante da matriz B? Não.

c) Existe o determinante da matriz A · B? Sim.

d) Existe o determinante da matriz B · A? Sim.

e) É possível que exista o determinante do produto de duas matrizes sem que existam os determinantes de cada uma das matrizes que compõem o produto? Sim.

14. Duas matrizes quadradas de ordem 3 são tais que det(A) = 5 e det(B) = 15. Então, calcule o valor dos seguintes determinantes:

a) det(2A); 40

b) det(B^t); 15

c) det(2 · A^{-1} · B^t). 24

15. O cálculo do determinante de algumas matrizes não precisa ser necessariamente feito utilizando as regras estudadas, pois apresenta resultados imediatos. Um exemplo é quando estamos diante de matrizes triangulares.

a) Calcule o determinante das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

det(A) = 30, det(B) = 10 e det(C) = 6.

utilizando a regra de Sarrus.

b) O que você observou no cálculo dos determinantes das matrizes A, B e C? Escreva uma propriedade que permita calcular o determinante de uma matriz triangular qualquer.

16. Denomina-se matriz de Vandermonde ou matriz das potências toda matriz quadrada do tipo:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 & \cdots & (a_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_1)^{n-1} & (a_2)^{n-1} & (a_3)^{n-1} & \cdots & (a_n)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Assim, o determinante de uma matriz de Vandermonde, denotado por det(V), é igual a:

$(a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) \cdot (...) \cdot (a_n - a_1) \cdot (a_n - a_2) \cdot \cdot (a_{n} - a_3) \cdot (...) \cdot (a_n - a_{n-1})$.

Obtenha o determinante da seguinte matriz de Vandermonde: −2

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Pelos meados do século XIX os matemáticos alemães estavam de cabeça e ombros acima dos de outras nacionalidades no que se referia à análise e à geometria, com as universidades de Berlim e Gottingen na liderança e com a publicação centrada no Journal de Crelle. A álgebra, por outro lado, foi durante algum tempo quase um monopólio britânico, com Trinity College, Cambridge, à frente e o Cambridge Mathematical Journal como principal veículo de publicação. Peacock e De Morgan eram ambos de Trinity, como também Cayley, que contribuiu fortemente tanto para a álgebra quanto para a geometria, especialmente quanto ao uso de determinantes; mas Cayley foi também um dos primeiros a estudar matrizes, outro exemplo da preocupação britânica com forma e estrutura em álgebra.

Essa obra proveio de uma memória de 1858 sobre a teoria das transformações. Se, por exemplo, aplicamos após a transformação

$$T1 \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

uma outra transformação

$$T2 \quad \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

o resultado (que aparecera já antes, por exemplo nas *Disquisitiones arithimeticae* de Gauss em 1801) é equivalente à transformação composta

$$\text{T1T2}\ \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y, \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}$$

Se, de outro lado, invertermos a ordem de T1 e T2, de modo que T2 é a transformação

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$$

e T1 é a transformação,

$$n^2 - \left[\frac{n(n+3)}{2} - 1\right] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

então, essas duas aplicações sucessivamente equivalem à transformação única

$$\text{T1T2}\ \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y, \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y \end{cases}.$$

A troca da ordem das transformações em geral produz um resultado diferente. Expresso na linguagem das matrizes,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

mas,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cd + Dd \end{pmatrix}$$

Como as matrizes são iguais se, e somente se, todos os elementos correspondentes são iguais, é claro que mais uma vez estamos diante de um exemplo de multiplicação não comutativa.

A definição da multiplicação de matriz é a indicada acima, e a soma de duas matrizes (de iguais dimensões) é definida como a matriz obtida somando os elementos correspondentes das matrizes.

Assim,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + A & b + B \\ c + C & d + D \end{pmatrix}.$$

A multiplicação de uma matriz por um escalar K é definida pela equação

$$K \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{pmatrix}$$

A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

que é usualmente denotada por I, deixa toda matriz quadrada de segunda ordem invariavelmente por multiplicação; por isso é chamada de matriz identidade para multiplicação. A única que deixa outra matriz invariavelmente por adição é evidentemente a matriz zero (nula)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que é portanto a matriz identidade da adição. Com essas definições, podemos pensar nas operações sobre matrizes como nas de uma "álgebra", passo que foi dado por Cayley e pelos matemáticos americanos Benjamin Pierce (1809-1880) e seu filho Charles S. Pierce (1839-1914). Os Pierces desempenharam na América algo do papel que Hamilton, Grassmann e Cayley tinham tido na Europa.

O estudo da álgebra de matrizes e outras não comutativas foram em toda parte um dos principais fatores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstrata da álgebra, especialmente no século XX.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

QUESTÕES

Orientações e respostas no Manual do Professor.

De acordo com o texto:

1. Quais são as contribuições matemáticas associadas a Arthur Cayley?
2. Quais são os elementos que compõem uma matriz quadrada de segunda ordem, que deixa todas as outras matrizes de segunda ordem invariavelmente por multiplicação?
3. Quais os elementos que compõem uma matriz quadrada de segunda ordem que deixa todas as outras matrizes de segunda ordem invariavelmente por adição?

CAPÍTULO

8 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

alice-photo/Shutterstock.com

Modelo de uma cadeia de átomos.

Você já trabalhou com equações em Química?

Ao escrever uma equação química, é fundamental observar se a quantidade de átomos presentes em cada elemento químico é a mesma em ambos os lados da equação. Para efetuar o balanceamento, colocamos o "coeficiente estequiométrico" (número inteiro) antes dos símbolos que representam os compostos. Apenas para exemplificar, vamos considerar a seguinte equação química:

$$C_6H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

Como desejamos "balancear", temos de obter quatro coeficientes estequiométricos na equação. Representando esses coeficientes por x, y, z e w, temos:

$$xC_6H_6 + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O$$

Como o número de átomos de cada elemento deverá ser o mesmo nos dois lados da equação química, então:

- elemento C (carbono): $6x = z$
- elemento H (hidrogênio): $6x = 2w$
- elemento O (oxigênio): $2y = 2z + w$

Chegamos a três equações que devem ser verificadas simultaneamente, isto é, chegamos a um sistema formado por três equações de quatro incógnitas:

$$\begin{cases} 6x = z \\ 6x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases}$$

Neste capítulo vamos estudar a resolução de sistemas de equações lineares. Depois, voltaremos ao sistema apresentado acima, obtendo sua solução. Precisamos compreender inicialmente algumas noções sobre o que é uma equação linear, um sistema de equações lineares e também o que significa solução de uma equação e solução de um sistema de equações lineares.

Equações e sistemas de equações lineares

As três equações obtidas na situação sobre o balanceamento são exemplos de equações lineares, cada uma delas formada por duas ou três incógnitas:

- equação linear nas incógnitas x e z: $6x = z$
- equação linear nas incógnitas x e w: $6x = 2w$
- equação linear nas incógnitas y, z e w: $2y = 2z + w \rightarrow$

Denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e x_n são as incógnitas, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e a_n são os coeficientes reais e b é um número real correspondente ao termo independente das incógnitas.

Exemplo:

Na equação linear $4x - 2y + z - w = 0$, temos:

- incógnitas: x, y, z e w
- coeficientes: 4, −2, 1 e −1
- termo independente: 0

Observação:

Em uma equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são sempre iguais a 1. Além disso, em uma equação linear não temos termo misto, ou seja, aquele que contém o produto de duas incógnitas.

Exemplo:

As equações $2x^2 - 7y + 9z = 1$ e $xy - 3w = 9$ não são equações lineares.

Solução de uma equação linear

O que é solução de uma equação?

Por meio de exemplos, vamos compreender o que significa solução de uma equação linear.

1. Dada a equação $x - 3y = 6$ (equação linear com duas incógnitas), vamos verificar se os pares ordenados (3, −1) e (4, 5) são soluções. Consideraremos que o 1º elemento do par ordenado representa a 1ª incógnita, enquanto o 2º elemento representa a 2ª incógnita. Assim, a ordem dos elementos nos pares ordenados segue a ordem alfabética das incógnitas, e não a ordem em que as incógnitas aparecem na equação.

- Para verificar se (3, −1) é solução da equação, substituímos x por 3 e y por −1:

  $x - 3y = 6$

  $\downarrow x = 3$ e $y = -1$

  $3 - 3 \cdot (-1) = 6$

  $6 = 6 \rightarrow$ sentença verdadeira $\Rightarrow$ (3, −1) é solução

- Para verificar se (4, 5) é solução da equação, substituímos x por 4 e y por 5:

  $x - 3y = 6$

  $\downarrow x = 4$ e $y = 5$

  $4 - 3 \cdot 5 = 6$

  $-11 \neq 6 \Rightarrow$ (4, 5) não é solução

2. Dada a equação $4x - 2y + z = 10$ (equação linear com três incógnitas), vamos verificar se as ternas ordenadas (1, 2, 10) e (5, −1, −4) são soluções. Consideraremos que o 1º elemento da terna ordenada representa a 1ª incógnita, o 2º elemento representa a 2ª incógnita e o 3º elemento, a 3ª incógnita.

- Para verificar se (1, 2, 10) é solução da equação, substituímos x por 1, y por 2 e z por 10:

  $4x - 2y + z = 10$

  $\downarrow x = 1, y = 2$ e $z = 10$

  $4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 10 = 10$

  $10 = 10 \rightarrow$ sentença verdadeira $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ (1, 2, 10) é solução

- Para verificar se (5, −1, −4) é solução da equação, substituímos x por 5, y por −1 e z por −4:

  $4x - 2y + z = 10$

  $\downarrow x = 5, y = -1$ e $z = -4$

  $4 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) - 4 = 10$

  $18 \neq 10 \Rightarrow$ (5, −1, −4) não é solução

Dada a equação linear de n incógnitas $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, dizemos que a sequência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução da equação se a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

Sistemas de equações lineares

Retomando a situação apresentada no início do capítulo sobre o balanceamento estequiométrico, deparamos com três equações lineares, que devem ser verificadas simultaneamente:

$$\begin{cases} 6x = z \\ 6x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases}$$

Dizemos que essas três equações formam um sistema de equações lineares. Nessa situação, o sistema é formado por três equações lineares com quatro incógnitas.

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Denomina-se sistema linear $m \times n$ o conjunto S de m equações lineares em n incógnitas, que pode ser representado por: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ as incógnitas; a_{11}, $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{mn}$ os coeficientes reais; e b_1, $b_2, b_3, \ldots, b_n$ os números reais que representam os termos independentes das incógnitas.

Observação:

Quando todos os termos independentes das incógnitas são nulos, o sistema é chamado **sistema linear homogêneo**.

Veja a seguir exemplos de sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 4x+3y=9 \\ 9x+2y=0 \end{cases}$

- O sistema é linear 2×2, isto é, formado por 2 equações com 2 incógnitas (x e y).

b) $\begin{cases} x-y+4z=1 \\ 2x+9y-3z=10 \\ 3x+y+9z=-2 \end{cases}$

- O sistema é linear 3×3, isto é, formado por 3 equações com 3 incógnitas (x, y e z).

c) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$

- O sistema é linear 2×3 e homogêneo, isto é, formado por 2 equações com 3 incógnitas (x, y e z).

Assim como falamos em solução de uma equação linear, também temos de abordar a solução de um sistema de equações lineares. Observe o exemplo a seguir.

Observação:

Considerando o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$, vamos verificar se o par ordenado $(2, -1)$ é solução desse sistema.

- Checamos se $(2, -1)$ é solução da 1ª equação substituindo x por 2 e y por -1:

  $2x - 3y = 7$

  $\downarrow x = 2$ e $y = -1$

  $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$

  $7 = 7 \rightarrow$ sentença verdadeira $\Rightarrow (2, -1)$ é solução.

- Verificamos se $(2, -1)$ é solução da 2ª equação substituindo x por 2 e y por -1:

  $3x - 2y = 8$

  $\downarrow x = 2$ e $y = -1$

  $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 8$

  $8 = 8 \rightarrow$ sentença verdadeira $\Rightarrow (2, -1)$ é solução.

Como o par ordenado é solução das duas equações, dizemos que é solução do correspondente sistema de equações lineares.

Dado um sistema de equações lineares $m \times n$, formado por m equações com n incógnitas, denomina-se solução desse sistema a sequência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$, que é solução de cada uma das m equações dess sistema.

Assim, pelo que vimos até aqui, resolver um sistema de equações lineares formado por m equações com n incógnitas consiste em obter a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que é solução de cada uma das equações que formam o sistema.

Ao longo do Ensino Fundamental estudamos a resolução de sistemas formados por duas equações com duas incógnitas, que retomaremos nestes exemplos, observando os procedimentos que normalmente são utilizados:

1. Vamos resolver o sistema linear $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 2 \end{cases}$

- Utilizando o método da adição, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 2 \end{cases} + \\ \hline 2x = 12 \\ x = 6 \end{array}$$

- Substituindo na primeira equação (poderia ser na segunda), vem:

$$6 - y = 10$$
$$y = -4$$

Portanto, o sistema admite uma solução representada pelo par ordenado $(6, -4)$. Podemos dizer que o conjunto solução desse sistema é $S = \{(6, -4)\}$.

Observação:

Como esse sistema admite apenas uma solução, dizemos que o sistema é possível e determinado.

2. Vamos resolver o sistema linear $\begin{cases} x - y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

- Para utilizar o método da adição, multiplicamos a segunda equação, membro a membro, por -1 e depois adicionamos as duas equações:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x - y = 10 \\ -x + y = -2 \end{cases} + \\ \hline 0 = 8 \end{array}$$

Como a "igualdade" obtida é absurda, dizemos que o sistema dado não apresenta solução. Assim, não existe um par ordenado que verifica simultaneamente essas duas equações.

Observação:

Como esse sistema não admite solução, dizemos que ele é impossível. Nesse caso, o conjunto solução é o conjunto vazio.

3. Vamos resolver o sistema linear

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -3x + 3y = -6 \end{cases}$$

- Para utilizar o método da adição, multiplicamos a primeira equação, membro a membro, por 3 e depois adicionamos as equações obtidas:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ -3x + 3y = -6 \end{cases} + \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Como a igualdade representa numericamente uma identidade, dizemos que o sistema dado apresenta infinitas soluções. Note que, para obter soluções desse sistema, podemos atribuir valores a uma das incógnitas e obter o valor correspondente para a outra:

- Para $x = 0$, temos, substituindo na 1ª equação dada:

  $x - y = 2$

  $\downarrow x = 0$

  $0 - y = 2$

  $y = -2 \Rightarrow (0, -2)$ é solução.

- Para $x = 2$, temos, substituindo na 1ª equação dada:

  $x - y = 2$

  $\downarrow x = 2$

  $2 - y = 2$

  $y = 0 \Rightarrow (2, 0)$ é solução.

- Para $x = -2$, temos, substituindo na 1ª equação dada:

$x - y = 2$

$\downarrow x = -2$

$-2 - y = 2$

$y = -4 \Rightarrow (-2, -4)$ é solução.

- Para $x = \alpha$ (α representa um número real qualquer), temos, substituindo na 1ª equação dada:

$x - y = 2$

$\downarrow x = \alpha$

$\alpha - y = 2$

$y = -2 + \alpha \Rightarrow (\alpha, -2 + \alpha)$ é solução.

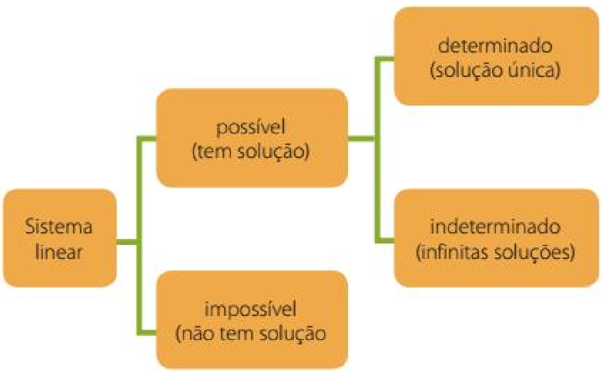
Observações:

1. Como esse sistema admite infinitas soluções, ele é possível e indeterminado.
2. As soluções desse sistema podem ser representadas por $(\alpha, -2 + \alpha)$, sendo α um número real qualquer.

Questões e reflexões

Nos exemplos apresentados utilizamos o método da adição para resolver um sistema linear. Que outro método poderia ser utilizado?
Respostas no Manual do Professor.

Embora tenhamos apresentado apenas três exemplos envolvendo a resolução de sistemas formados por duas equações lineares com duas incógnitas, podemos dizer que os sistemas de equações lineares, quanto às suas soluções, podem ser classificados em:



Escalonamento

Para resolver um sistema formado por duas equações lineares com duas incógnitas, em geral utilizamos o método da adição, podendo até usar outros métodos (comparação, substituição). Vamos observar agora um procedimento simples para a resolução de equações lineares: o método do escalonamento.

Inicialmente precisamos compreender, por meio de exemplos, o que significa um sistema linear escalonado, para então entender como o chamado escalonamento é feito para a resolução de sistemas.

- Considere o sistema S_1:

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} x - 2y = 9 \\ 3y = 1 \end{cases}$$

Note que nesse sistema a primeira equação tem as incógnitas x e y, enquanto a segunda tem apenas a incógnita y. Para resolver esse sistema, bastaria determinar o valor de y na segunda equação e, a partir dele, retornar à primeira para obter o valor de x.

- Considere o sistema S_2:

$$S_2 \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 2y - 3z = 8 \\ 5z = 10 \end{cases}$$

Temos nesse sistema as três incógnitas (x, y e z) na 1ª equação, duas incógnitas (y e z) na 2ª equação e apenas a incógnita z na 3ª equação. Podemos dizer que "de cima para baixo" nesse sistema, o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação. Na 2ª equação, o coeficiente de x é nulo e na 3ª equação, os coeficientes de x e y são nulos.

Questões e reflexões

Observando o sistema S_2, explique como você poderia resolvê-lo da forma como ele está.
Respostas no Manual do Professor.

Considere o sistema S_3:

$$S_3 \rightarrow \begin{cases} 5x - y + 2z = 0 \\ 3y - 9z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Note que, também nesse sistema, o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação, considerando "de cima para baixo".

Um sistema de equações lineares é dito escalonado quando:

- todas as equações apresentam as incógnitas em uma mesma ordem;
- o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não nulo de cada equação aumenta de uma equação para outra.

Existem ainda alguns cuidados sobre esse procedimento, que serão citados quando mostrarmos efetivamente como resolver um sistema de equações lineares pelo método do escalonamento.

A importância de considerar um sistema de equações lineares na forma escalonada está no fato de facilitar a sua resolução, pois a cada equação que compõe o correspondente sistema o número de incógnitas envolvidas diminui. A palavra "escalonado" nos remete à interpretação relacionada à "forma de escada". Observe, por exemplo, as equações do sistema S_2 mencionado anteriormente:

$$\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 0 \\ 2y - 3z &= 8 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Para saber como escalonar um sistema de equações lineares, devemos compreender o conceito de equivalência de sistemas. É por meio desse conceito que podemos transformar um sistema dado não escalonado em outro sistema escalonado que tenha a mesma solução.

Dois sistemas de equações lineares são ditos equivalentes quando possuem a mesma solução.

Exemplo:

Os sistemas lineares abaixo são equivalentes, pois ambos admitem apenas o par ordenado (13, 7) como solução:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Assim, precisamos transformar sistemas lineares em sistemas lineares escalonados equivalentes, já que sua resolução fica simplificada. Devemos conhecer procedimentos que nos auxiliem nessa transformação. Apresentamos agora, sem demonstrar, os seguintes procedimentos:

Para obter um sistema equivalente a um sistema de equações lineares, podem ser efetuadas quaisquer das seguintes transformações:

I. Trocar a posição de duas equações no sistema.

II. Multiplicar os dois membros de uma equação qualquer do sistema por um número real diferente de zero.

III. Multiplicar uma equação por um número real diferente de zero e adicionar o resultado a outra equação do sistema.

Exemplo:

Em cada caso a seguir, os sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes:

a) $S_1 \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 7 \\ x - y - z = 15 \end{cases}$ e

$S_2 \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 15 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$

- Podemos obter S_2 a partir de S_1 trocando a posição das duas equações:

b) $S_1 \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ x + y - z = 15 \end{cases}$ e

$S_2 \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ 3x - 2y + 3z = 22 \end{cases}$

- Para obter S_2 a partir de S_1 mantemos a 1ª equação e substituímos a 2ª equação pela soma da 1ª com a 2ª equação.

c) $S_1 \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ x + y - z = 15 \end{cases}$ e

$S_2 \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ 7x + 2y - z = 82 \end{cases}$

- Para obter S_2 a partir de S_1 mantemos a 1ª equação e substituímos a 2ª equação pela soma da 1ª com a 2ª equação multiplicada, membro a membro, por 5.

Essas três operações, observadas nos exemplos anteriores, permitem obter sistemas lineares não escalonados em sistemas lineares escalonados, para então resolvê-los.

Observação:

É possível que, ao escalonarmos um sistema linear, a última equação apresente todos os coeficientes das incógnitas nulos. Assim, temos duas possibilidades:

- **Termo independente das incógnitas nulo** – o sistema apresenta infinitas soluções (sistema possível e indeterminado).
- **Termo independente das incógnitas não nulo** – o sistema não apresenta solução (sistema impossível).

Cada uma dessas duas possibilidades deverá ser devidamente interpretada para que possamos tirar conclusões a respeito das soluções do sistema. Analise cada um dos seguintes exemplos:

1. Vamos escalonar e resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

- Mantemos a 1ª equação. Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por –3. Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por –2. Eliminamos assim o termo em x nas duas últimas equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & \cdot (-3) \quad \cdot (-2) \\ 3x - 2y - z = 4 & + \\ 2x - 2y + z = 1 & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -5y - 4z = -2 \\ -4y - z = -3 \end{cases}$$

- Nesse novo sistema equivalente, mantemos as duas primeiras equações. Para anular o coeficiente de y na 3ª equação, multiplicamos a 2ª equação por –4, a terceira por 5 e adicionamos essas duas equações obtidas. O resultado é a nova 3ª equação. Observe:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -5y - 4z = -2 & \cdot (-4) \\ -4y - z = -3 & \cdot (5) \end{cases} \Big] +$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -5y - 4z = -2 \\ 11z = -7 \end{cases}$$

- Como o sistema obtido é equivalente ao dado e está escalonado, para resolvê-lo obtemos na ordem os valores de z, de y e, finalmente, de x:

$$11z = -7 \Rightarrow z = -\frac{7}{11}$$

Substituímos esse resultado na 2ª equação:

$$-5y - 4 \cdot \left(-\frac{7}{11}\right) = -2$$

$$-5y = -2 - \frac{28}{11} \Rightarrow y = \frac{10}{11}$$

Finalmente, substituímos y e z na 1ª equação:

$$x + \frac{10}{11} + \left(-\frac{7}{11}\right) = 2$$

$$x = 2 - \frac{3}{11} \Rightarrow x = \frac{19}{11}$$

Portanto, o sistema apresentado é possível e determinado. O conjunto solução é

$$\left\{\left(\frac{19}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{7}{11}\right)\right\}$$

2. Vamos escalonar e resolver o sistema

$$\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-z=7 \end{cases}$$

- Mantemos a 1ª equação. Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por −1. Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por −2. Eliminamos assim o termo em x nas duas últimas equações:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 & \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \\ x - y + z = 2 & + \\ 2x + y - z = 7 & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ -3y + 3z = -3 \\ -3y + 3z = -3 \end{cases}$$

- Nesse novo sistema equivalente, mantemos as duas primeiras equações. Para anular o coeficiente de y na 3ª equação, substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por −1:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ -3y + 3z = -3 & \cdot(-1) \\ -3y + 3z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ -3y + 3z = -3 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ -3y + 3z = -3 \end{cases}$$

- Abandonamos a 3ª equação, já que todos os coeficientes e o termo independente são nulos. Assim, o sistema equivalente escalonado é formado por duas equações e três incógnitas. Para resolvê-lo, podemos substituir z por α, que estaria representando um número real qualquer.

$$\begin{cases} x + 2y - 2\alpha = 5 \\ -3y + 3\alpha = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2y = 5 + 2\alpha \\ -3y = -3 - 3\alpha \end{cases}$$

- Podemos obter y em função de α:

$-3y = -3 - 3\alpha$

$3y = 3 + 3\alpha \Rightarrow y = 1 + \alpha$

- Substituindo na 1ª equação, temos:

$x + 2y = 5 + 2\alpha$

$x + 2 \cdot (1 + \alpha) = 5 + 2\alpha$

$x + 2 + 2\alpha = 5 + 2\alpha \Rightarrow x = 3$

Portanto, o sistema apresentado é possível e indeterminado, isto é, apresenta infinitas soluções da forma $\{(3, 1 + \alpha, \alpha)\}$, sendo α um número real. Atribuindo valores a α, obtemos soluções para o sistema.

Questões e reflexões

1. Atribua valores para α e obtenha soluções para o sistema do exemplo.
2. Qual é o valor de α para que o sistema apresente como solução uma terna ordenada cuja soma é igual a 10?

Respostas no Manual do Professor.

3. Vamos escalonar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \\ 2x+3y-2z=5 \end{cases}$$

- Mantemos a 1ª equação. Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por −4. Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª equação multiplicada por −2. Eliminamos assim o termo em x nas duas últimas equações:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 & \cdot(-4) \quad \cdot(-2) \\ 4x - y + 4z = 1 & + \\ 2x + 3y - 2z = 5 & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 7y - 8z = -7 \\ 7y - 8z = 1 \end{cases}$$

- Nesse novo sistema equivalente, mantemos as duas primeiras equações. Para anular o coeficiente de y na 3ª equação, substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por −1:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 7y - 8z = -7 & \cdot\,(-1) \\ 7y - 8z = 1 & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 7y - 8z = -7 \\ 0z = 8 \end{cases}$$

Note que a última equação não admite qualquer número real que multiplicado por zero resulte 8 (a última equação apresenta todos os coeficientes das incógnitas nulos e o termo independente diferente de zero). Como essa equação não admite solução, dizemos que o sistema é impossível, ou seja, o sistema não tem solução. Portanto, $S = \varnothing$.

Nesses três exemplos, vamos observar os sistemas apresentados e os sistemas equivalentes após escalonamento:

após escalonamento

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -5y - 4z = -2 \\ 11z = -7 \end{cases}$$

sistema possível e determinado: obtivemos z na última equação e voltamos às outras para obter x e y

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 5 \\ -3y + 3z = -3 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

sistema possível e determinado: obtivemos uma identidade numérica na última equação

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 7y - 8z = -7 \\ 0z = 8 \end{cases}$$

sistema impossível: obtivemos uma impossibilidade numérica na última equação

Observação:

Nesses exemplos, utilizamos sistemas lineares 3×3 (3 equações com 3 incógnitas). O processo do escalonamento de um sistema linear pode ser empregado para sistemas em que o número de equações é diferente do número de incógnitas.

Exemplo:

Vamos resolver o sistema linear formado por 3 equações com 4 incógnitas.

$$\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ -2x + 2y - 2z - 4w = 0 \\ 2x - y + z - w = 1 \end{cases}$$

- Conforme as operações que transformam um sistema linear em outro equivalente, temos:

$$\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 & \cdot\,(2) & \cdot\,(-2) \\ -2x + 2y - 2z - 4w = 0 & + & \\ 2x - y + z - w = 1 & & + \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ 0w = 0 \longrightarrow \text{Equação pode ser eliminada} \\ y - z - 5w = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ y - z - 5w = 1 \end{cases}$$

- Como, após o escalonamento, o sistema equivalente é formado por 2 equações com 4 incógnitas, substituímos z e w por α e β, respectivamente, representando números reais. Obtemos então as outras duas incógnitas em função de α e β:

$$\begin{cases} x - y + \alpha + 2\beta = 0 \\ y - \alpha - 5\beta = 1 \end{cases}$$

Isolamos y na 2ª equação e substituímos na 1ª para obter x:

$y - \alpha - 5\beta = 1 \Rightarrow y = 1 + \alpha + 5\beta$

$x - (1 + \alpha + 5\beta) + \alpha + 2\beta = 0$

$x - 1 - \alpha - 5\beta + \alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow x = 1 + 3\beta$

Assim, o sistema apresenta infinitas soluções da forma $\{(1 + 3\beta, 1 + \alpha + 5\beta, \alpha, \beta)\}$, com α e β reais.

Exercícios resolvidos

1. Calcule o valor de m sabendo que a terna ordenada (1; 2; 3) é solução da equação linear $2x + m \cdot y - z = 9$.

$2 \cdot 1 + m \cdot 2 - 3 = 9 \rightarrow 2m = 10 \therefore m = 5$

2. Em uma lanchonete, dois sucos e dois sanduíches custam R$ 6,40 e três sucos e quatro sanduíches custam R$ 11,60. Se uma família pedir cinco sucos e cinco sanduíches, quanto irá pagar?

Sendo x e y, respectivamente, os preços do suco e do sanduíche, temos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6,40 \\ 3x + 4y - 11,60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - 4y = 12,80 \text{ (I)} \\ 3x + 4y = 11,60 \text{ (II)} \end{cases}$$

(I) + (II)

$-x = -1,20 \therefore x = 1,20$

$3x + 4y = 11,60 \rightarrow 3 \cdot 1,20 + 4y = 11,60 \therefore y = 2,00$

Assim, se uma família pedir cinco sucos e cinco sanduíches irá gastar $5 \cdot 1,20 + 5 \cdot 2,00 =$ R$ 16,00.

3. Classifique e resolva cada um dos sistemas lineares a seguir:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y - 1 \end{cases} \therefore x = 3 \text{ e } y = 2$

(sistema possível e determinado)

$S = \{(3, 2)\}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x - 6y = -9 \text{ (I)} \\ 3x - 6y = 9 \text{ (II)} \end{cases}$

(I) + (II)

$0 = 0$ (sistema possível e indeterminado)

$x + 2y = 3 \therefore x = 3 - 2y$

$S = \{(3 - 2\alpha, \alpha)\}, \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2 \text{ (I)} \\ -2x - 4y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$

(I) + (II)

$0 = 4$ (sistema impossível)

$S = \varnothing$

4. Na vitrine de uma loja foi fixado o seguinte cartaz:

Calça + camisa por R$ 130,00
Calça + bermuda por R$ 160,00
Bermuda + camisa por R$ 110,00

Considerando que os valores unitários de cada mercadoria não foram alterados quando vendidos de dois em dois, quanto uma pessoa terá de desembolsar se comprar uma calça, uma camisa e uma bermuda?

Sendo x, y e z, respectivamente, os preços unitários de uma calça, de uma camisa e de uma bermuda, temos:

$$\begin{cases} x + y = 130,00 \text{ (I)} \\ x + z = 160,00 \text{ (II)} \\ z + y = 110,00 \text{ (III)} \end{cases}$$

(I) + (II) + (III)

$2x + 2y + 2z = 400,00$

$x + y + z = 200,00$

Assim, a pessoa precisará desembolsar R$ 200,00.

5. Resolva e classifique o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y + 3z = -7 \\ y + z = 3 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3z = -7 \\ y + z = 3 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

$-2z = 4 \therefore z = -2$

$y + z = 3 \rightarrow y + (-2) = 3 \therefore y = 5$

$x - y + 3z = -7 \rightarrow x - 5 + 3 \cdot (-2) = -7 \therefore x = 4$

O sistema é possível e determindado

$S = \{(4; 5; -2)\}$

6. Com relação ao sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + 3z = 20 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$, responda:

a) Qual é a forma escalonada desse sistema?

b) Qual é o conjunto solução desse sistema?

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + 3z = 20 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ -y + z = 2 \\ -5y - 2z = -25 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ -y + z = 2 \\ -7z = -35 \end{cases}$

$-7z = -35 \therefore z = 5$

$-y + z = 2 \rightarrow -y + 5 = 2 \therefore y = 3$

$x + y + z = 9 \rightarrow x + 3 + 5 = 9 \therefore x = 1$

$S = \{(1, 3, 5)\}$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Com relação à equação $3x - 2y + 5z = 13$, responda:

a) A equação é linear? Sim.

b) A terna ordenada (1; –2; 1) é solução da equação? Não.

c) A terna ordenada (2; –1; 1) é solução da equação? Sim.

2. Verifique se a terna ordenada (1; –2; 3) é solução do sistema de equações lineares a seguir: Não.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 5x + 3y - 4z = 1 \end{cases}$$

3. Classifique cada uma das equações a seguir da seguinte maneira: Respostas no Manual do Professor.

- A equação possui uma única solução.
- A equação possui infinitas soluções.
- A equação não possui solução.

a) $5 \cdot x = 15$ Respostas no Manual do Professor.

b) $0 \cdot x = 0$

c) $0 \cdot x = 2$

d) $2 \cdot x = 0$

4. Uma pessoa dirigiu-se ao caixa eletrônico de um banco para efetuar um saque de R$ 60,00. O caixa opera apenas com cédulas de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 20,00.

a) Sendo x, y e z, respectivamente, as quantidades de cédulas de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 20,00, escreva uma equação que represente uma relação entre x, y e z.

b) Sabendo que a pessoa recebeu duas cédulas de R$ 20,00, escreva as possibilidades para os valores de x e y.

c) Escreva todas as soluções da equação que representa a relação entre x, y e z.

Respostas no Manual do Professor.

5. Observe a equação química a seguir:

$$xCaO + yP_2O_5 \rightarrow zCa_3(PO_4)_2$$

a) Escreva um sistema de equações que relacione os coeficientes x, y e z.

b) Resolva o sistema obtido anteriormente em função de z.

c) Determine os menores coeficientes inteiros positivos que formam a solução do sistema e escreva a equação balanceada.

Respostas no Manual do Professor.

6. Faça o balanceamento das equações químicas a seguir:

a) $H_2S + SO_2 \alpha \rightarrow H_2O + S$ $2H_2S + SO_2 \rightarrow 2H_2O + 3S$

b) $FeS_2 + O_2 \rightarrow Fe_3O_4 + SO_2$ $3FeS_2 + 8O_2 \rightarrow Fe_3O_4 + 6SO_2$

7. No sistema escalonado a seguir, escreva se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y + z = 5 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

a) O valor de z é um número primo. V

b) O valor de y é um número ímpar. F

c) O valor de x é um número negativo. V

d) A soma de x, y e z é igual a 4. V

e) $x + z = y$. V

8. Que sistemas a seguir estão na forma escalonada? Todos, exceto o **c**.

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y - 3z = -5 \\ 3z = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ y + 2z = 6 \\ x + 3z = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + w + t = 10 \\ 2z - w + 2t = -1 \\ w - 3t = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 3z = -6 \end{cases}$

9. Resolva e classifique o seguinte sistema de equações:

Sistema possível e indeterminado.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

10. Uma pessoa foi até uma agência bancária trocar um cheque no valor de R$ 200,00. No momento em que ela foi atendida, só existiam cédulas de R$ 10,00, R$ 20,00 e R$ 50,00 disponíveis. Sabendo que a pessoa recebeu exatamente oito cédulas, as equações que representam as relações entre x, y e z formam o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 10x + 20y + 50z = 200 \end{cases}$$

a) Escreva o sistema anterior após dividir a segunda equação por 10.

b) Multiplique a primeira equação por –1, adicione à segunda equação e escreva a equação obtida no lugar da segunda equação.

c) Escreva o conjunto solução do sistema em função da variável z.

d) Encontre todas as soluções do sistema.

Respostas no Manual do Professor.

11. Classifique e resolva os seguintes sistemas lineares.

a) $\begin{cases} x-y+z=8 \\ 2x+y+z=9 \\ -3x+y+2z=-2 \end{cases}$

a) O sistema é possível e determinado. S = {(3; −1; 4)}

b) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$

b) O sistema é possível e indeterminado.

c) O sistema é impossível.

c) $\begin{cases} x+y+3z=-5 \\ 2x-3y+z=4 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases}$

12. Vamos considerar o seguinte sistema de equações lineares escalonado nas incógnitas *x*, *y* e *z*, em que *a* e *b* são números reais: Respostas no Manual do Professor.

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ \quad 4y-5z=11 \\ \qquad az=b \end{cases}$$

Observando o que foi estudado sobre a resolução de um sistema linear por escalonamento, responda:

a) Qual é a condição para que esse sistema seja possível e determinado, isto é, admita apenas uma solução?

b) Quais são os valores de *a* e *b* para que esse sistema admita infinitas soluções, isto é, seja possível e indeterminado?

c) Qual é a condição para que esse sistema seja impossível, isto é, não admita solução?

13. Junte-se a um colega para elaborar:

a) um sistema linear formado por três equações e três incógnitas que não admita solução;

b) um sistema linear escalonado formado por três equações e três incógnitas que admita apenas uma solução;

c) um sistema linear homogêneo formado por três equações e três incógnitas que admita infinitas soluções.

Depois, apresentem os sistemas elaborados à classe, explicando-os. Respostas pessoais.

Matrizes e sistemas lineares

Um sistema de equações lineares pode, como já foi dito nesta unidade, ser representado por meio de um produto de matrizes. Assim, por exemplo, vamos considerar o sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ -x-y+2z=0 \\ x-9y+3z=5 \end{cases}$$

Com esse sistema, formamos as matrizes A, X e B:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$ matriz dos coeficientes das incógnitas das equações

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow$$ matriz das incógnitas das equações

$$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$ matriz dos termos independentes das equações

Assim, o sistema linear poderá ser representado por meio do produto de matrizes:

$A \cdot X = B$

ou

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Vamos representar o sistema linear correspondente à igualdade:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Efetuamos inicialmente o produto das matrizes no primeiro membro da igualdade:

$$\begin{pmatrix} 2x + 1y - 1z + 3w \\ 1x + 1y + 2z - 2w \\ 3x + 2y + 1z + 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pela igualdade de matrizes, escrevemos o seguinte sistema linear homogêneo (os termos independentes são todos nulos):

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 0 \\ x + y + 2z - 2w = 0 \\ 3x + 2y + z + 4w = 0 \end{cases}$$

Regra de Cramer

Para sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, existe outro procedimento, além do escalonamento, que podemos utilizar em determinadas situações para obter os valores de cada uma das incógnitas: é a **regra de Cramer**. Essa regra foi publicada em 1750 por Gabriel Cramer (1704-1752). Retomando a situação apresentada no início do capítulo anterior, sua resolução recai no seguinte sistema linear 2 x 2:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Comentamos também que, ao resolver esse sistema, chegaríamos aos valores de x e y em função dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes nas equações:

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Esses valores poderiam ser obtidos pelo escalonamento do sistema linear. Entretanto, note que o denominador das duas frações acima representa o determinante da matriz quadrada A formada pelos coeficientes das incógnitas:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - bc$$

Além disso, os numeradores das duas frações podem ser obtidos a partir de determinantes das matrizes A_x e A_y. Essas duas matrizes, por sua vez, são formadas substituindo os coeficientes de x pelos termos independentes (matriz A_x) e os coeficientes de y pelos termos independentes (matriz A_y):

$$A_x = \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_x) = ed - bf$$

$$A_y = \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_y) = af - ce$$

Dessa forma, caso o sistema linear apresentado seja possível e determinado, o valor de cada uma das incógnitas poderá ser obtido por

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{|A_x|}{|A|} \quad \text{e} \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{|A_y|}{|A|}$$

Observação:

Nessas igualdades deveremos ter $\det(A) \neq 0$.

De um modo geral, temos:

Se a equação matricial $A \cdot X = B$ representa um sistema linear $n \times n$ (número de equações igual ao número de incógnitas), então cada uma das incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ poderá ser obtida por:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

em que $|A|$ é o determinante da matriz dos coeficientes e $|A_i|$ é o determinante da matriz dos coeficientes, substituindo-se a i-ésima coluna pelos termos independentes das n equações do sistema.

Exemplo:

Utilizando a regra de Cramer, vamos obter os valores das incógnitas *x*, *y* e *z* no sistema de equações

$$\begin{cases} x-3y+z=-4 \\ -x+2y-5z=15 \\ 2x+y-2z=11 \end{cases}$$

- Iniciamos com o cálculo do determinante formado pelos coeficientes das incógnitas:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4+30-1-4+6+5=32$$

- Calculamos então os determinantes $|A_x|$, $|A_y|$ e $|A_z|$:

$$|A_x|=\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 15 & 2 & -5 \\ 11 & 1 & -2 \end{vmatrix}=16+165+15-22-90-20 \Rightarrow |A_x|=64$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 15 & -5 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix}=-30+40-11-30+8+55 \Rightarrow |A_y|=32$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix}=22-90+4+16-15-33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A_z|=-96$$

- Pela regra de Cramer, obtemos os valores de *x*, *y* e *z*:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{64}{32} \Rightarrow x=2$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{32}{32} \Rightarrow y=1$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{-96}{32} \Rightarrow z=-3$$

Portanto, a solução do sistema é {(2, 1, −3)}.

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Com o aplicativo Winplot, podemos explorar um pouco mais a interpretação geométrica da solução de um sistema formado por equações lineares. Com o auxílio de um colega e dispondo de um computador, vamos observar as três possibilidades quanto à solução de um sistema de equações lineares: uma solução apenas, infinitas soluções e nenhuma solução.

- 1º exemplo: $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$

1ª etapa – Depois de selecionar "2-dim", em "Janela", escolha a opção "implícita" e digite a primeira equação. Aparecerá o gráfico correspondente. Em seguida, repita a operação digitando a segunda equação.

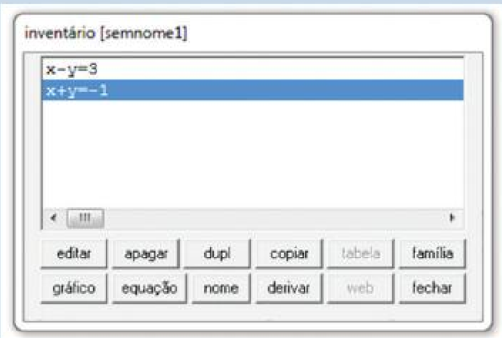
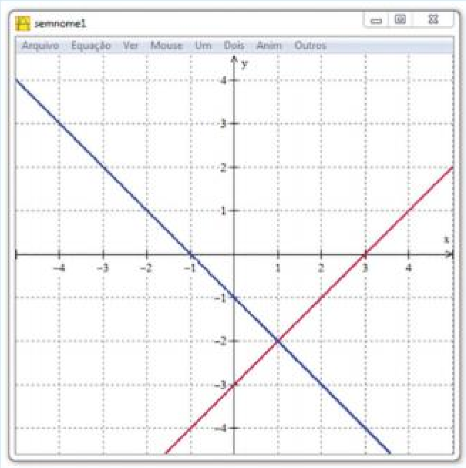


Figura: © DAE

O gráfico resultante está representado a seguir. Note que, neste caso, as duas retas se interceptam no ponto de coordenadas (1, –2). O par ordenado representa a solução do sistema e, como ele é único, o sistema é possível e determinado.

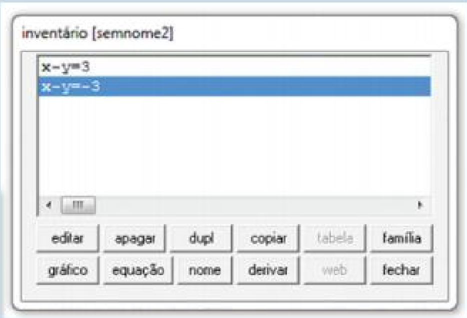


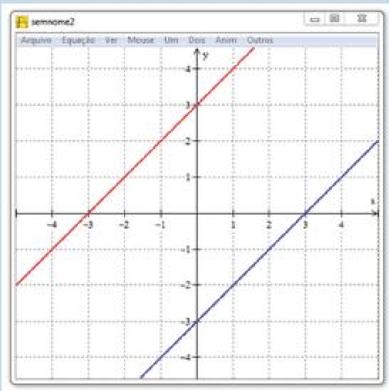
Figuras: © DAE

2ª etapa – Para marcar o ponto, clique na barra de ferramentas em "Dois" e escolha a opção "Interseções". Nela, clique em "marcar ponto". No gráfico, o ponto de intersecção aparecerá indicado.

- 2º exemplo: $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$

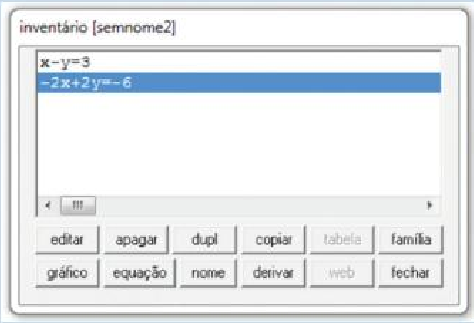
Procedendo de forma análoga ao 1º exemplo, obterá o gráfico a seguir. Como as retas são paralelas, elas não se interceptam. Assim, o sistema não terá solução, ou seja, o sistema é impossível.

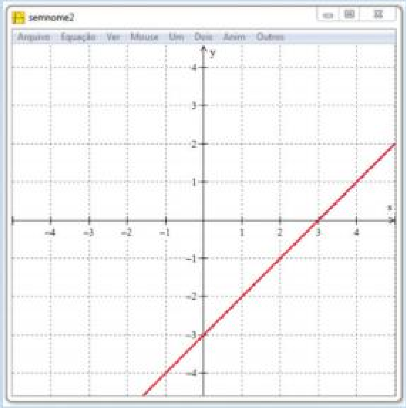




- 3º exemplo: $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2x + 2y = -6 \end{cases}$

Procedendo de forma análoga aos dois exemplos anteriores, você obterá o gráfico a seguir. Como as retas são coincidentes, isto é, têm infinitos pontos em comum, o sistema apresenta infinitas soluções. Dizemos que é possível e indeterminado.





Figuras: © DAE

QUESTÕES

1. Procure inicialmente construir os três gráficos exemplificados utilizando um aplicativo para construir gráficos.

2. Elabore uma explicação sobre os três resultados gráficos, relacionando-os com a resolução dos sistemas apresentados.

3. Elabore outros sistemas de equações lineares formados por duas equações a duas incógnitas e, utilizando o aplicativo, obtenha a interpretação geométrica das soluções desses sistemas.

Exercícios resolvidos

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Sendo A a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes, escreva esse sistema na forma matricial.

$$A \cdot X = B \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Resolva pela regra de Cramer o sistema apresentado anteriormente.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6 \text{ e } |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{-6}{-3} = 2 \text{ e } y = \frac{6}{-3} = -2 \rightarrow S = \{(2; -2)\}$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+y-z=-3 \\ x-y+2z=2 \\ -x+3y-4z=-4 \end{cases}$$

Escreva o sistema na forma de equação matricial.
Resposta no Manual do Professor.

2. Resolva o sistema do exercício anterior pela regra de Cramer. $S = \{(-1; 1; 2)\}$

3. Elabore um sistema linear formado por duas equações com duas incógnitas e resolva pela regra de Cramer.
Resposta pessoal.

4. Dado o sistema $\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 3x+7y-9z=2 \\ 2x+5y-7z=-2 \end{cases}$, determine os valores de x, y e z pela regra de Cramer. $S = \{(21; -6; 2)\}$

5. Resolva cada sistema linear abaixo, representado na forma matricial, utilizando a regra de Cramer:
Respostas no Manual do Professor.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. Para saber se um sistema $n \times n$ é possível e determinado, basta calcular o determinante dos coeficientes e verificar se ele é diferente de zero.

Verifique se os sistemas a seguir têm solução única.

a) $\begin{cases} x-3y=7 \\ -2x+y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x+4y=7 \\ 4x-8y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x+z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+z-w=2 \\ x-2z+3w \\ 4x+3z-2w=-1 \\ -3x+5z+7w=2 \end{cases}$

a) O sistema tem solução única.
b) O sistema não tem solução única.
c) O sistema tem solução única.
d) O sistema tem solução única.

Algumas conclusões

Procure responder ou mesmo pensar a respeito de possíveis respostas para algumas questões envolvendo o estudo de matrizes, determinantes e sistemas lineares desta unidade. Caso sinta alguma dificuldade, sugerimos que retome os conceitos principais:

1. O que significa uma matriz 2×3?

2. Qual é a condição necessária para que possamos adicionar duas matrizes?

3. É possível multiplicar uma matriz de ordem 4×3 por uma matriz 3×2?

4. O que é matriz identidade?

5. Toda matriz quadrada admite determinante?

6. Se duas linhas de uma matriz quadrada de ordem 3 forem iguais, qual será o valor do determinante?

7. Se uma matriz quadrada A de ordem 3 tem determinante igual a 5, qual é o valor do determinante da matriz 2A?

8. O que significa sistema linear possível e determinado?

9. Quantas soluções admite um sistema linear possível e indeterminado?

10. Ao escalonar um sistema formado por três equações com as incógnitas x, y e z, a última equação resultou em $k \cdot z = 10$, sendo k um número real. Qual é o valor de k para que o sistema seja impossível?

Troque ideias com os colegas a respeito das respostas para as questões acima. Depois, registre as dificuldades que encontrou e os assuntos que devem ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (UEL-PR) Uma reserva florestal foi dividida em quadrantes de 1 m² de área cada um. Com o objetivo de saber quantas samambaias havia na reserva, o número delas foi contado por quadrante da seguinte forma:

Número de samambaias por quadrante — Número de quadrantes

$$A_{7\times1}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\end{bmatrix} \qquad B_{7\times1}=\begin{bmatrix}8\\12\\7\\16\\14\\6\\3\end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} da matriz A corresponde ao elemento b_{ij} da matriz B, por exemplo, 8 quadrantes contêm 0 (zero) samambaia, 12 quadrantes contêm 1 samambaia.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a operação efetuada entre as matrizes A e B, que resulta no número total de samambaias existentes na reserva florestal.

a) $A^t \times B$

b) $B^t \times A^t$

c) $A \times B$

d) $A^t + B^t$

e) $A + B$

2. (Uema) Uma matriz $A(m \times n)$ é uma tabela retangular formada por $m \times n$ números reais (a_{ij}), dispostos em m linhas e n colunas. O produto de duas matrizes $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times p} = (b_{ij})$ é uma matriz $C_{m\times pt} = (c_{ij})$, em que o elemento c_{ij} é obtido da multiplicação ordenada dos elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando os elementos resultantes das multiplicações. A soma de matrizes é comutativa, ou seja, $A + B = B + A$.

Faça a multiplicação das matrizes A e B e verifique se esse produto é comutativo, ou seja: $A \times B = B \times A$.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}0&1&-2\\1&-2&3\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Resposta no Manual do Professor.

3. (Enem) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4 × 4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

4. (UFSC) Se a terna (a, b, c) é solução do sistema $\begin{cases}x+2y+z=9\\2x+y-z=3\\3x-y-2z=-4\end{cases}$, então calcule o valor numérico de $(a+b+c)$. 06

5. (Unicamp-SP) Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases}x+2y+3z=20\\7x+8y-mz=26,\end{cases}$$

Onde m é um número real. Sejam $a < b < c$ números inteiros consecutivos tais que $(x, y, z) = (a, b, c)$ é uma solução desse sistema. O valor de m é igual a:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

6. (Uern) Pedro e André possuem, juntos, 20 cartões colecionáveis. Em uma disputa entre ambos, em que fizeram apostas com seus cartões, Pedro quadriplicou seu número de cartões, enquanto André ficou com apenas $\frac{2}{3}$ do número de cartões que possuía inicialmente. Dessa forma, o número de cartões que Pedro ganhou na disputa foi:

a) 6 b) 10 c) 12 d) 14

7. (Enem) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

8. (Fuvest-SP) Em uma transformação química, há conservação de massa e dos elementos químicos envolvidos, o que pode ser expresso em termos dos coeficientes e índices nas equações químicas. Respostas no Manual do Professor.

a) Escreva um sistema linear que represente as relações entre os coeficientes *x*, *y*, *z* e *w* na equação química $xC_8H_{18} + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O$.
b) Encontre todas as soluções do sistema em que *x*, *y*, *z* e *w* são inteiros positivos.

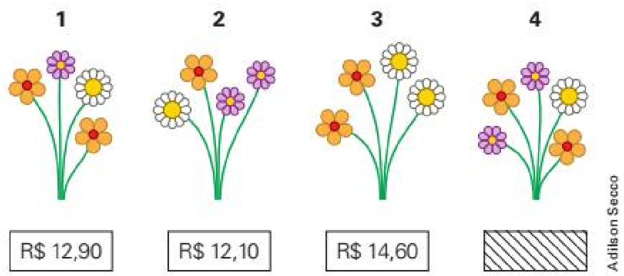
9. (Unicamp-SP) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde *a* e *b* são números reais. Se $A^2 = A$ e A é invertível, então:

a) $a = 1$ e $b = 1$
b) $a = 1$ e $b = 0$
c) $a = 0$ e $b = 0$
d) $a = 0$ e $b = 1$

10. (Udesc) Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e invertível, se det(3A) = det(A2), então det(A) é igual a:

a) 9
b) 0
c) 3
d) 6
e) 27

11. (Unesp) Em uma floricultura, os preços dos buquês de flores se diferenciam pelo tipo e pela quantidade de flores usadas em sua montagem. Quatro desses buquês estão representados na figura a seguir, sendo que três deles estão com os respectivos preços.



De acordo com a representação, nessa floricultura o buquê 4, sem preço indicado, custa:

a) R$ 15,30
b) R$ 16,20
c) R$ 14,80
d) R$ 17,00
e) R$ 15,50

12. (Uepa) A produção na atividade agrícola exige escolhas racionais e utilização eficiente dos fatores produtivos. Para administrar com eficiência e eficácia uma unidade produtiva agrícola é imprescindível o domínio da tecnologia e do conhecimento dos resultados dos gastos com os insumos e serviços em cada fase produtiva da lavoura. Um agricultor decidiu diversificar a plantação nas três fazendas que possui plantando feijão, milho e soja. A quantidade de sacos de 60 kg produzidos com as colheitas de feijão, milho e soja por fazenda e a receita total obtida em cada uma das fazendas estão registradas no quadro abaixo.

Fazendas	Quantidade de sacos de 60 kg produzidos			Receita total por fazenda (em R$)
	Feijão	Milho	Soja	
A	1.200	800	1.500	206.000,00
B	800	600	1.200	151.000,00
C	1.500	1.000	2.000	265.000,00

Tomando por base as informações contidas no quadro, esse agricultor vendeu o saco de milho por:

a) R$ 25,00
b) R$ 40,00
c) R$ 60,00
d) R$ 65,00
e) R$ 80,00

13. (Uece) Para cada inteiro positivo *n*, defina a matriz $M_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A soma dos elementos da matriz produto $P = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \dots M_{21}$ é:

a) 229
b) 231
c) 233
d) 235

DESAFIO

(Unesp) Considere a equação matricial $A + BX = X + 2C$, cuja incógnita é a matriz X e todas as matrizes são quadradas de ordem *n*. A condição necessária e suficiente para que esta equação tenha solução única é que:

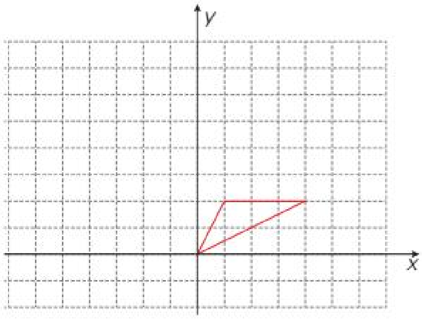
a) $B - I \neq O$, onde I é a matriz identidade de ordem *n* e O é a matriz nula de ordem *n*.
b) B seja invertível.
c) $B \neq O$, onde O é a matriz nula de ordem *n*.
d) $B - I$ seja invertível, onde I é a matriz identidade de ordem *n*.
e) A e C sejam invertíveis.

Respostas no Manual do Professor.

Transformações no plano

Ampliar ou reduzir figuras no plano, girar, mover em alguma direção. Esses são os movimentos mais simples que se pode fazer com uma imagem na tela do computador. Por trás da tela, no entanto, há uma operação matricial ocorrendo na programação de acordo com cada um desses movimentos.

Considere por exemplo o triângulo abaixo:



Gráficos: © DAE

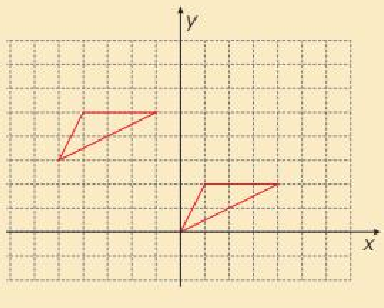
Ele é formado pelas coordenadas (0,0); (1,2); (4,2). Na forma de matriz, podemos dizer que esse triângulo é representado por $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Para fazê-lo girar x graus em torno da origem, basta multiplicar sua representação matricial pela matriz $M = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$. Assim, se quisermos rotacionar esse triângulo em 90°, bastará realizar o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Questões e investigações

1. Desenhe em um plano cartesiano o triângulo original que aparece no livro e o triângulo rotacionado obtido pelo produto acima.
2. Calcule as coordenadas dos vértices de um triângulo que seja produzido pela rotação de 60° do triângulo original.
3. Para ampliar ou reduzir o triângulo em questão, basta multiplicar sua forma matricial por um número real positivo. Sabendo disso, determine as coordenadas de um triângulo cujas arestas sejam o triplo das arestas dadas e de outro cujas arestas representem 30% das arestas dadas.
4. Para deslocar o triângulo em alguma direção, basta somar o mesmo par ordenado a cada um dos pares que determinam seu vértice. Veja o deslocamento abaixo:



5. Que matriz foi somada à matriz do triângulo original para gerar o novo triângulo?

   Encontre o seno e o cosseno do ângulo que transforma por rotação ao redor da origem o segmento AB de extremidades A = (2;1,5) e B = (4;3) no segmento CD de extremidades C = (0;2,5) e D = (0,5).
6. Considere o trio ordenado (x, y, z) como a representação de um ponto no espaço. Determine os valores de x, y e z de modo que esse ponto seja transformado no ponto (1,1,1) pela matriz M definida abaixo:

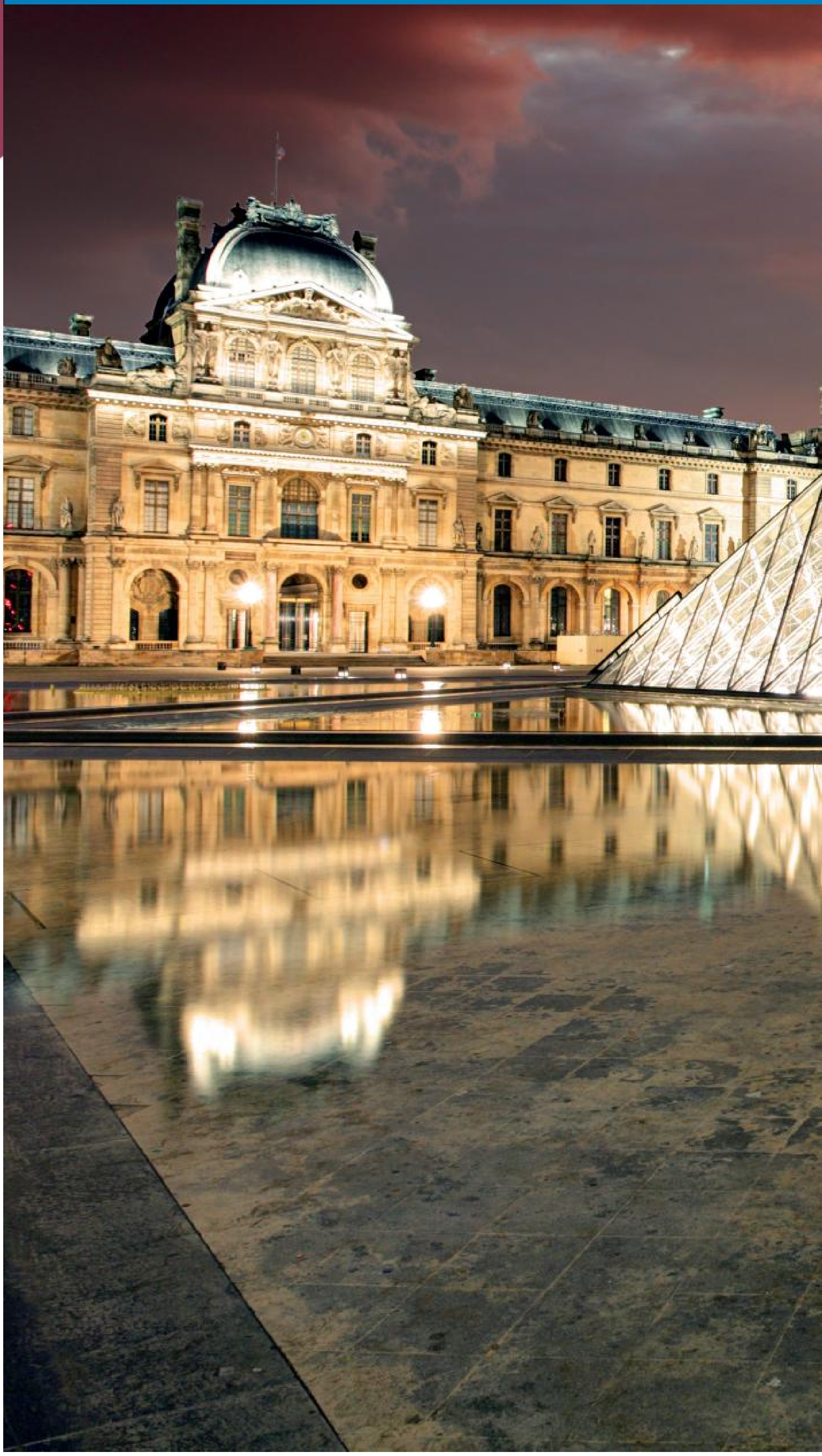
$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

UNIDADE 4

GEOMETRIA ESPACIAL

As formas geométricas podem ser observadas em construções. Algumas vezes, o antigo e o moderno estão, lado a lado representando nossa evolução.

Na presente unidade, ampliamos o conhecimento a respeito de Geometria, seu modelo axiomático e também seus aspectos métricos.



TTstudio/Shutterstock.com

Museu do Louvre, Paris, França. Um dois maiores museus do mundo com mais de 8 milhões de visitantes por ano. Foto de 2015.

CAPÍTULO

9 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Textos de história da Matemática costumam associar o início da Geometria à necessidade de demarcações de terras após as enchentes no Rio Nilo. Difícil é indicar quem teria sido o primeiro a pensar matematicamente, ou seja, qual personagem pode ser considerado o grande marco para o surgimento da Matemática. Gregos, como Tales e Pitágoras, são citados como responsáveis por importantes teorias. Ambos, por volta do ano 600 a.C., apresentaram conhecimentos geométricos de forma mais organizada e sistematizada. Cerca de 300 anos depois, outro nome surge nesse cenário: Euclides de Alexandria. O legado de Euclides está fortemente relacionado à forma como organizou não apenas seu próprio conhecimento como também o de seus antepassados. Ao longo dessa unidade, conheceremos um pouco mais sobre Euclides.

Neste capítulo, estudaremos a Geometria de Posição. Assim, vamos conhecer um pouco mais as ideias que acabaram dando sustentação à geometria de Euclides.

Leia atentamente o texto a seguir, elaborado com o objetivo de situar-lhe em relação a algumas ideias importantes.

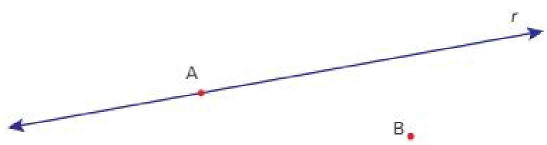
Primeiras noções

Antes de apresentar alguns postulados e teoremas dessa teoria axiomática, vamos retomar algumas ideias já vistas no Ensino Fundamental a respeito de Geometria. São ideias sobre a posição entre um ponto e uma reta e também entre retas de um plano.

Posições relativas de pontos e retas no plano

As posições entre pontos, entre ponto e reta ou entre retas, quando estudadas no plano, fazem parte da Geometria de Posição no Plano.

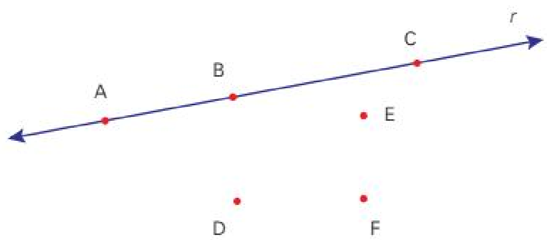
Relação entre um ponto e uma reta



Temos duas possibilidades: o ponto pertence ou o ponto não pertence à reta. Na representação acima, temos:

- O ponto A pertence à reta: $A \in r$.
- O ponto B não pertence à reta: $B \notin r$.

Relação entre três pontos



Temos duas possibilidades: três pontos são ou não colineares. Na representação acima, temos:

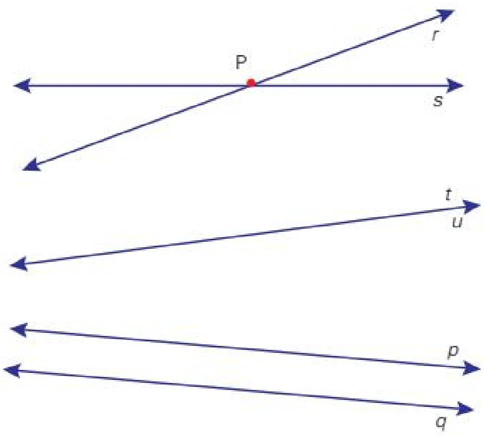
- Os pontos A, B e C são colineares (existe uma reta que passa pelos três pontos).
- Os pontos D, E e F não são colineares (não existe uma reta que passa pelos três pontos).

Observação:

Dois pontos distintos são sempre colineares, isto é, sempre existe uma reta que passa por eles.

Relação entre duas retas de um plano

Temos três possibilidades: duas retas podem ter apenas um ponto em comum; duas retas podem ter infinitos pontos em comum, ou duas retas não têm ponto em comum.



- As retas r e s têm apenas um ponto em comum. São ditas **concorrentes**:

  $r \cap s = \{P\}$

- As retas t e u têm infinitos pontos em comum. São ditas **coincidentes**:

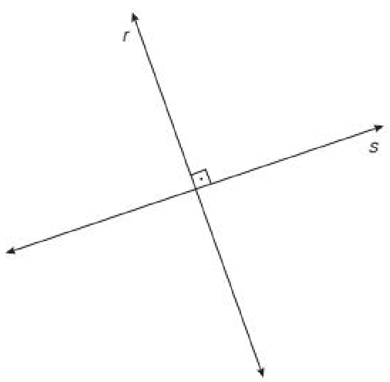
  $t \cap u = t = u$

- As retas p e q não têm pontos em comum. São ditas **paralelas**:

  $p \cap q = \{\varnothing\}$

Observações:

1. Quando duas retas distintas são concorrentes e formam um ângulo reto, são ditas perpendiculares.



As retas r e s são perpendiculares.

Representamos por: $r \perp s$

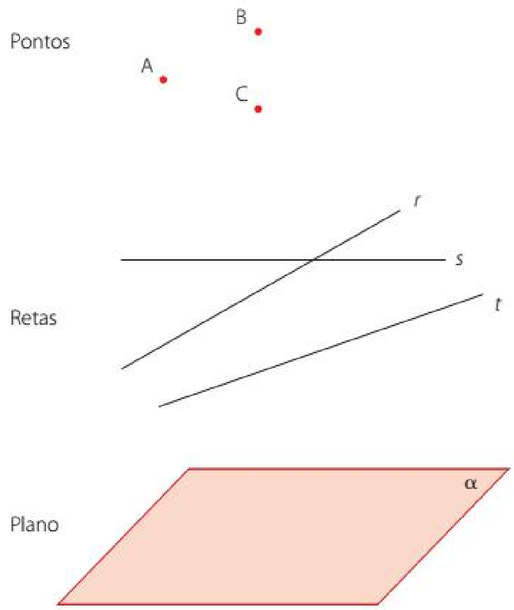
2. No estudo da Geometria Euclidiana, vamos, sempre que possível, utilizar modelos para representar elementos geométricos, a fim de facilitar a compreensão das definições, dos postulados e também dos teoremas. Além disso, utilizaremos, quando necessário, as notações da teoria dos conjuntos.
3. Os postulados, teoremas e definições abordados a seguir serão enumerados para que possamos melhor identificá-los.
4. As relações vistas anteriormente serão consideradas conhecidas na teoria a seguir. Assim, por exemplo, quando consideramos o ângulo entre duas retas concorrentes, queremos dizer o menor dos ângulos formados.

Noções primitivas

Inicialmente, consideramos os seguintes elementos básicos:

- ponto.
- reta.
- plano.

Esses elementos são considerados **primitivos**, isto é, não são definidos. Mesmo que não sejam dadas quaisquer definições deles, temos a noção do que significam. Indicaremos pontos por letras maiúsculas (A, B, C, ...), retas por letras minúsculas (r, s, t, ...), e planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ).



Figuras: © DAE

A seguir, apresentamos as primeiras definições:

- Definição 1:
  Espaço é o conjunto formado por todos os pontos.

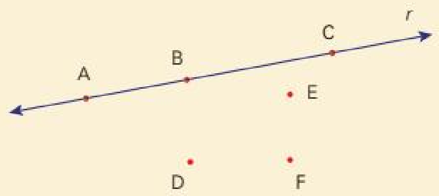
- Definição 2:
  Figura geométrica é qualquer conjunto não vazio de pontos.

- Definição 3:
  Duas ou mais figuras são ditas **coplanares** se todos os seus pontos pertencem ao mesmo plano.

Agora apresentamos algumas propriedades relacionadas aos elementos primitivos. São as chamadas proposições primitivas ou **postulados**.

Postulado 1:

Numa reta e fora dela existem tantos pontos quantos quisermos.

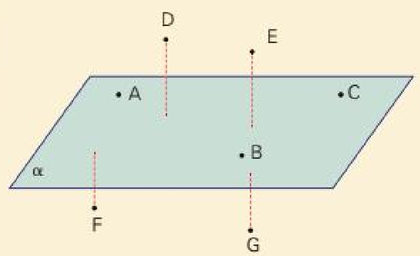


Observe que o modelo indica apenas alguns pontos que pertencem e outros que não pertencem à reta.

Postulado 2:

Num plano e fora dele existem tantos pontos quantos quisermos.

Figuras: © DAE



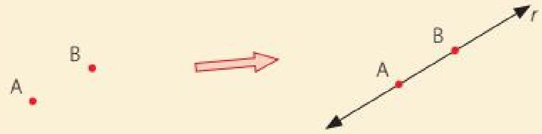
Observe que o modelo indica apenas alguns pontos que pertencem e outros que não pertencem ao plano.

Questões e reflexões

Os postulados 1 e 2 são ditos postulados da existência. Em sua opinião, qual o motivo dessa denominação?

Postulado 3:

Dois pontos distintos do espaço determinam uma única reta.

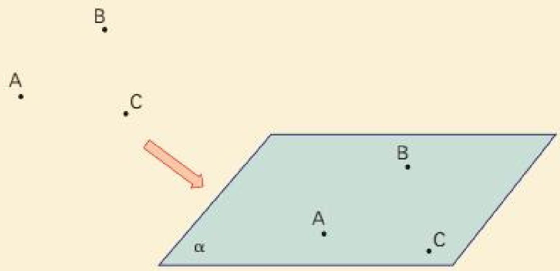


Esse postulado pode ser reformulado da seguinte maneira: por dois pontos distintos do espaço, passa uma única reta. Note que, quando dizemos que a reta *r*, conforme modelo a seguir, fica determinada por dois pontos distintos A e B, isso significa que existe uma única reta que passa pelos pontos A e B.

A reta *r*, representada acima, também pode ser representada por AB ou BA (lemos: reta AB ou reta BA).

Postulado 4:

Dados três pontos distintos não colineares do espaço, existe um único plano que os contém.



Esse postulado também pode ser assim enunciado: três pontos não colineares determinam um único plano. Também poderíamos dizer que "por três pontos distintos não colineares passa um único plano". Observe a representação a seguir:

Observação:

Os postulados 3 e 4 são conhecidos como **postulados da determinação**.

Exemplo:

O tripé, como ilustrado ao lado, é um exemplo da necessidade de utilização de uma superfície plana. Como três pontos distintos não colineares determinam um único plano, temos que a estrutura formada pelo tripé fornece uma estabilidade necessária para o apoio de câmeras fotográficas ou filmadoras.

Figuras: © DAE

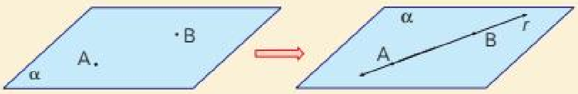
Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

Em sua opinião, qual é o motivo de uma mesa com quatro pés geralmente balançar e uma com três pés não balançar?

Postulado 5:

Se uma reta possui dois pontos distintos num plano, ela está contida nesse plano.

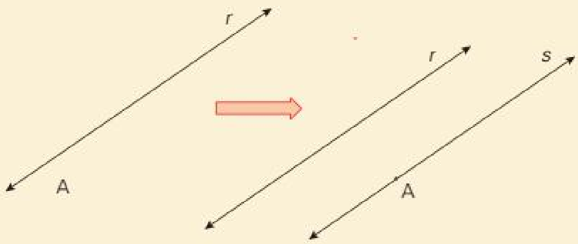


$A \in \alpha$ e $B \in \alpha$ $\overline{AB} \subset \alpha$

Esse postulado é conhecido como **postulado da inclusão** e também pode ser assim enunciado: se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então todos os seus pontos pertencem ao plano.

Postulado 6:

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.



$A \notin r$ $A \in s$, e s é paralela a r ($r // s$).

Em outras palavras, esse postulado pode ser enunciado como: por um ponto fora de uma reta dada passa uma única reta paralela à reta dada.

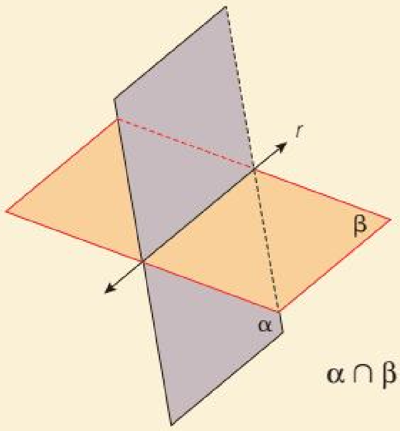
Antes de enunciar o postulado sobre a interseção de planos, devemos considerar a seguinte definição:

- Definição 4:

  Dois planos distintos que têm um ponto em comum são chamados **planos secantes**.

Postulado 7:

Se dois planos distintos têm em comum um ponto, então eles têm pelo menos outro ponto em comum.



$\alpha \cap \beta = r$

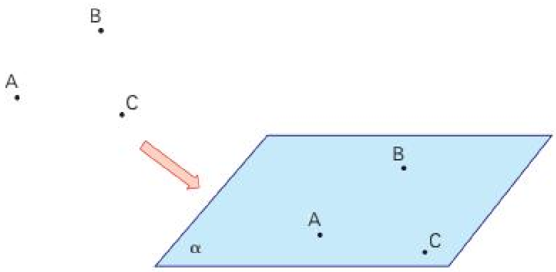
Veremos adiante, por meio de um teorema, que, se dois planos têm um ponto em comum, sua interseção será uma reta, como sugere a figura acima.

Observação:

Apresentamos algumas definições e também alguns postulados. Apresentaremos a seguir outras definições e alguns teoremas para que possamos compreender um pouco mais sobre a determinação de planos, as posições relativas de dois planos, as posições relativas de uma reta e um plano e outras propriedades importantes.

Planos: determinação e posições relativas

No postulado 4, vimos que por três pontos distintos não colineares passa um único plano. Observe na ilustração a seguir que, a partir dos pontos A, B e C, não alinhados, podemos obter o plano α:



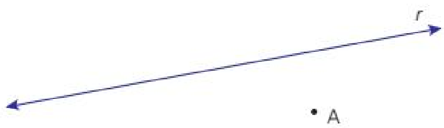
Figuras: © DAE

Existem outras três maneiras de determinar um plano, conforme os seguintes teoremas:

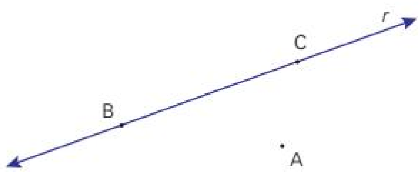
> **Teorema 1:**
>
> Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um único plano.

- Demonstração:

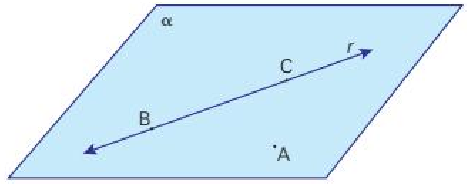
I. Vamos considerar a reta r e o ponto A não pertencente a r:



II. Pelo postulado 1, podemos considerar os pontos distintos B e C pertencentes à reta r.



III. Como os pontos A, B e C são distintos e não colineares, pelo postulado 4 existe um único plano α determinado por A, B e C. Pelo postulado 5, podemos concluir que a reta r está contida em α, já que os pontos B e C pertencem à reta r e ao plano α.



Portanto, α é o único plano que contém a reta r e o ponto A.

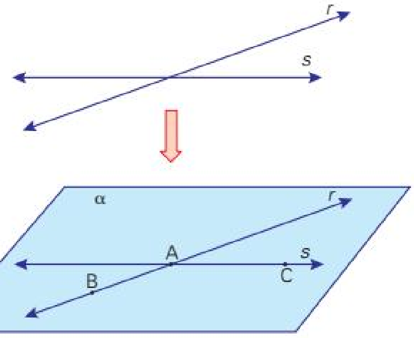
Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Discuta com seus colegas a demonstração do teorema 1, examinando as passagens I, II e III.
2. Em sua opinião, os desenhos ilustrativos nessa demonstração podem ser eliminados?

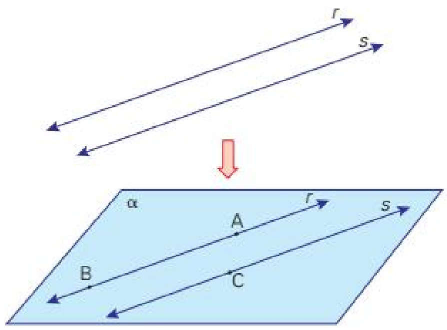
> **Teorema 2:**
>
> Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Omitiremos a demonstração. Observe, entretanto, o que sugerem as ilustrações a seguir:



> **Teorema 3:**
>
> Duas retas paralelas determinam um único plano.

Omitiremos a demonstração desse teorema, entretanto, observe o que ilustração a seguir sugere.



Veremos agora as posições relativas entre dois planos. Uma das posições já foi mencionada na definição de planos secantes (ver definição 4). Porém, dois planos também podem ser paralelos.

- Definição 5:

  Dois planos distintos são **paralelos** quando não têm ponto em comum.

Na ilustração a seguir, os planos distintos α e β são paralelos: $\alpha \cap \beta = \varnothing$. Não existe ponto em comum.

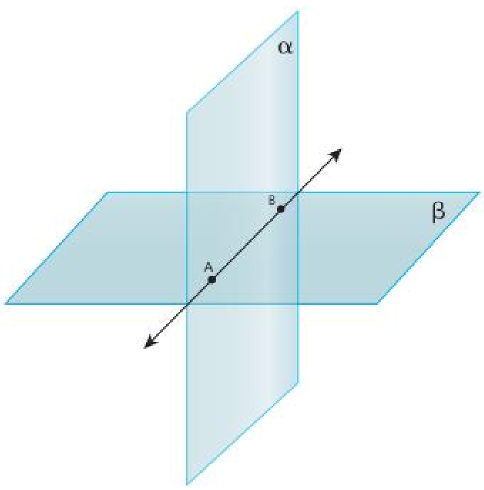
Figuras: © DAE

Observação:

Se dois planos no espaço têm todos os pontos em comum, são denominados planos coincidentes. Assim, se α e β são planos coincidentes, tem-se: $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$.

Teorema 4:

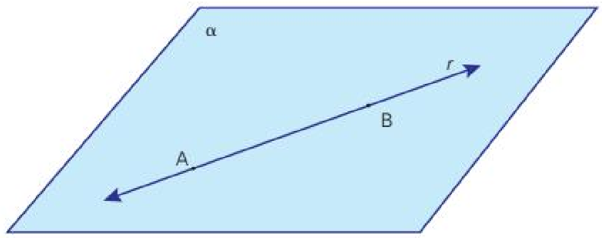
Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.



Não faremos a demonstração desse teorema. Entretanto, como sugere a figura anterior, a reta que passa por A e B é a que representa a intersecção desses dois planos secantes. Observe-a.

Planos e retas: posições relativas

Veremos as posições relativas entre uma reta e um plano. Conforme o postulado 5 (postulado da inclusão), uma possibilidade é a reta estar contida no plano:

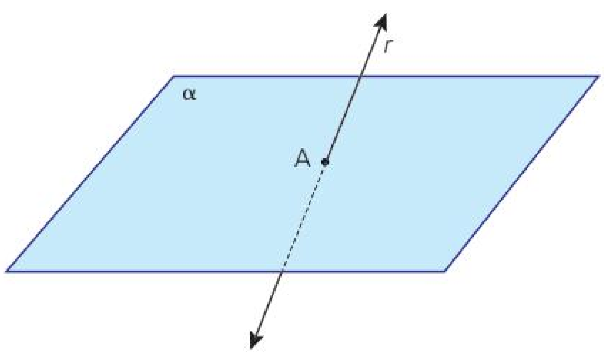


Se a reta r e o plano α têm em comum dois pontos distintos, a reta está **contida** no plano: $r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = r$.

Existem ainda duas outras possibilidades que são apresentadas por definição:

- Definição 6:

  Se uma reta e um plano têm em comum um único ponto, dizemos que a reta e o plano são **secantes**.

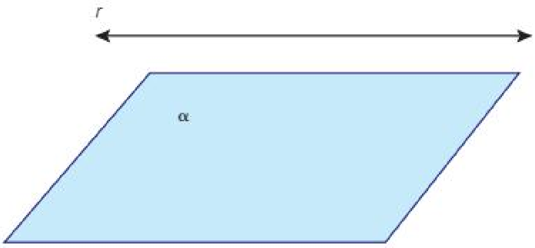


O ponto A (onde a reta "fura" o plano) é dito traço da reta r no plano α. Assim, temos: $r \cap \alpha = \{A\}$.

- Definição 7:

  Se uma reta e um plano não têm nenhum ponto em comum, dizemos que eles são paralelos.

Figuras: © DAE



De acordo com a ilustração, a reta r e o plano α não possuem pontos em comum, ou seja: $r \cap \alpha = \varnothing$.

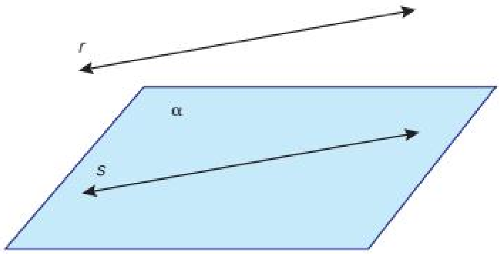
Essas são as posições relativas entre reta e plano: reta contida no plano; reta e plano secantes; e reta e plano paralelos. Existem duas propriedades dessas posições relativas que podem ser resumidas nos teoremas 5 e 6.

Teorema 5:

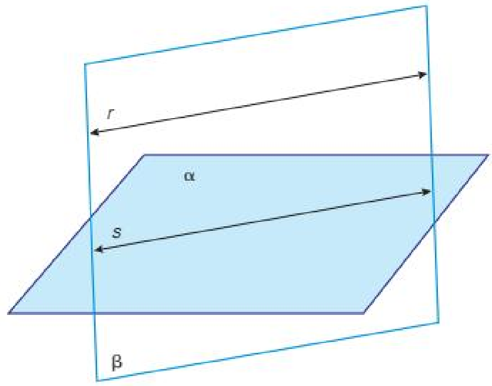
Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

- Demonstração:

  I. Conforme enunciado do teorema, vamos considerar que a reta r não está contida no plano α, que a reta r é paralela a uma reta s e que a reta s está contida no plano α.



  II. Como as retas r e s são paralelas, elas determinam, conforme o teorema 3, um plano β. Além disso, tem-se que $\alpha \cap \beta = s$.



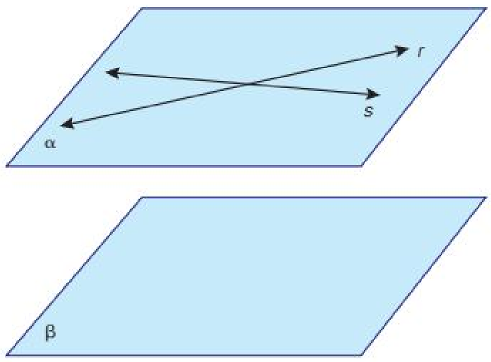
  III. Vamos supor que a reta r e o plano α tenham em comum o ponto A. Como r está contida em β, temos que o ponto A também pertence ao plano β. Assim, o ponto A pertence aos planos α e β, ou seja, pertence à intersecção desses dois planos: pertence à reta s.

  IV. Essa última conclusão é absurda, pois entra em contradição com o fato de r e s serem paralelas (item I). Essa contradição ocorreu ao supor que a reta r e o plano α tinham em comum o ponto A (item III). Isso significa que r e α não podem ter ponto em comum, ou seja, r é paralela a α.

Teorema 6:

Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Não faremos a demonstração desse teorema. Observe, conforme ilustração abaixo, que esse teorema permite verificar o paralelismo entre dois planos.



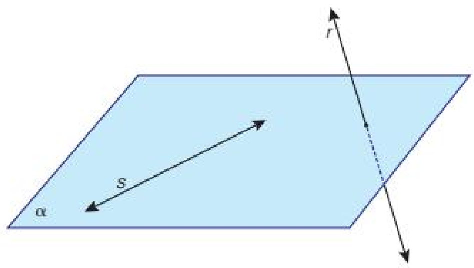
Retas: posições relativas

Ao iniciar este capítulo, retomamos as posições relativas entre duas retas de um plano: **concorrentes** (quando apresentam um ponto em comum), **coincidentes** (quando têm infinitos pontos em comum) ou **paralelas** (quando não apresentam pontos em comum). Nessas três possibilidades, as retas analisadas são coplanares. Entretanto, existe outra possibilidade:

- Definição 8:

  Se duas retas não têm nenhum ponto em comum e não existe plano que as contenha, elas são ditas retas **reversas**.

Figuras: © DAE



Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Se duas retas não têm nenhum ponto em comum, então elas são paralelas?
2. Se duas retas são reversas, então elas não têm nenhum ponto em comum?

EXPLORANDO

Resolva os exercícios no caderno.

Orientações e respostas no Manual do Professor.

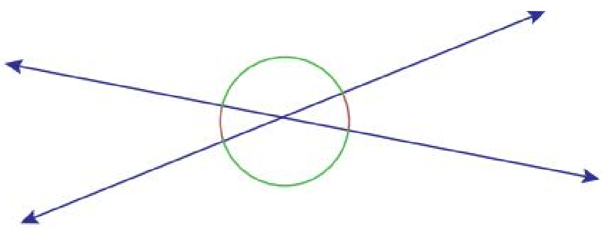
Existem diversas propriedades envolvendo retas e planos e suas posições relativas que não foram mencionadas anteriormente. Em algumas delas, que apresentaremos a seguir como propriedades (teoremas), você pode construir modelos (desenhos, representações) para verificar a validade. Pode, por exemplo, utilizar um lápis para representar uma reta e a superfície da carteira para representar um plano.

Junto com mais alguns colegas, procure elaborar representações para explicar à turma cada uma das seguintes propriedades:

1. Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a infinitas retas contidas no plano.
2. Se uma reta é paralela a um plano, então ela é reversa com infinitas retas desse plano.
3. Se uma reta é secante com um plano, então ela é concorrente com infinitas retas desse plano.
4. Se uma reta é secante com um plano, então ela é reversa com infinitas retas desse plano.
5. Se uma reta está contida num plano, então ela é paralela ou concorrente com infinitas retas desse plano.
6. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta contida em um deles é paralela ao outro plano.
7. Se um plano intercepta dois planos paralelos, então as intersecções serão retas paralelas.

Perpendicularismo

Ao considerar duas retas concorrentes, sabemos que elas formam quatro ângulos (dois a dois congruentes, pois são opostos pelo vértice), como ilustra a figura a seguir.



Sobre esses ângulos, existem as seguintes definições (já vistas no Ensino Fundamental):

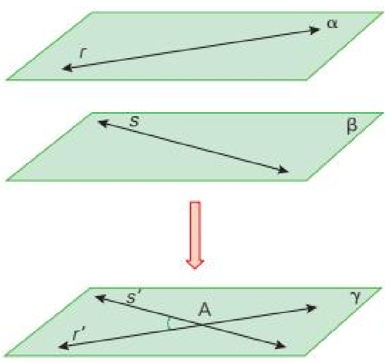
- Quando esses quatro ângulos são congruentes, cada um deles é denominado **ângulo reto**, e as retas são chamadas **retas perpendiculares**.
- Se as retas concorrentes não são perpendiculares, dizemos que elas são **retas oblíquas**.

Anteriormente, abordamos retas reversas (definição 8). Agora precisamos definir o ângulo entre duas retas reversas.

- Definição 9:

O **ângulo entre duas retas reversas** é o ângulo formado por duas retas concorrentes, paralelas às retas dadas.

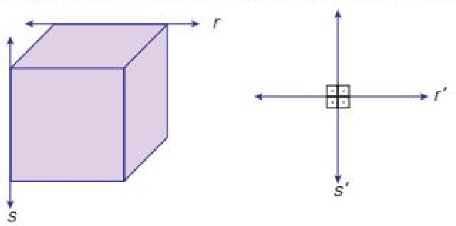
Para compreender melhor essa definição, considere um ponto A qualquer e as retas *r'* paralela à reta *r* e *s'* paralela à reta *s*, ambas passando pelo ponto A.



Figuras: © DAE

No plano γ, paralelo aos planos α e β, o ângulo *r'As'* corresponde ao ângulo entre as retas reversas *r* e *s*. É importante observar que podemos considerar o ângulo entre duas retas reversas como o ângulo formado por uma delas e uma reta concorrente que seja paralela à outra reta.

Observe, na figura a seguir, que o ângulo formado pelas retas reversas *r* e *s*, que contêm duas arestas de um cubo, é reto. Dizemos que tais retas são ortogonais.



- Definição 10:

Quando duas retas são reversas e formam um ângulo reto, são denominadas **retas ortogonais**.

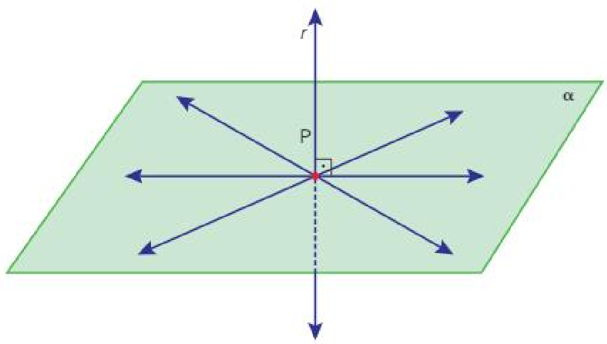
Perpendicularismo: reta e plano

Vimos quando uma reta e um plano são secantes. Agora vamos definir quando uma reta é perpendicular a um plano.

- Definição 11:

Quando uma reta é secante a um plano num ponto e perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto, dizemos que a **reta é perpendicular ao plano**.

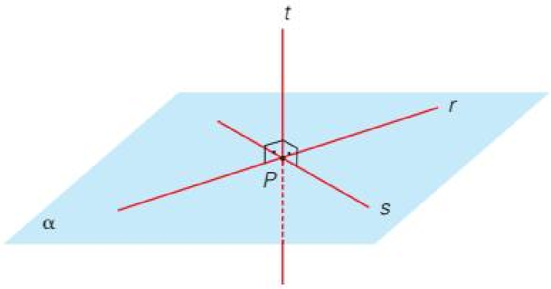
Utilizamos a representação a seguir a fim de compreender melhor essa definição:



Na representação acima, a reta *r* é perpendicular ao plano α, pois é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto P (ponto de interseção da reta *r* com o plano). O teorema a seguir, que não demonstraremos, estabelece de forma mais simples quando uma reta é perpendicular a um plano.

Teorema 7:

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



Conforme o teorema, a reta t é perpendicular às retas concorrentes r e s contidas no plano α. Dessa forma, podemos dizer que a reta t é perpendicular ao plano α.

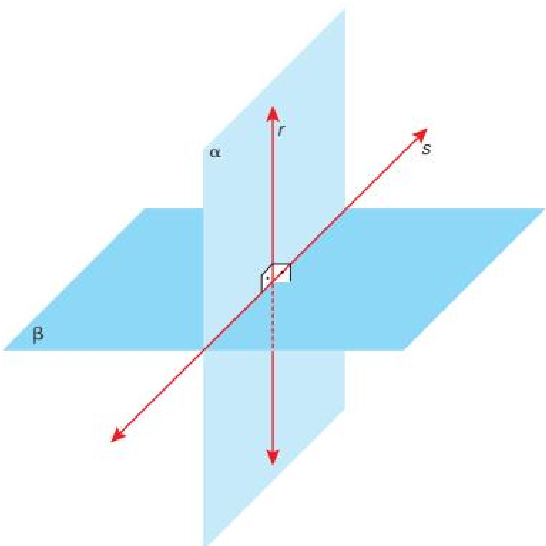
Observação:

Outra definição pode ser considerada: Se uma reta e um plano são secantes e a reta não é perpendicular ao plano, dizemos que a **reta é oblíqua ao plano**.

Perpendicularismo: planos

E quando dois planos são perpendiculares?

Quando dois planos são secantes e um deles contém uma reta perpendicular ao outro, dizemos que os **planos são perpendiculares**.



Figuras: © DAE

Note, na ilustração, que a reta r, contida no plano α, é perpendicular ao plano β. Conforme definição, dizemos que os dois planos são perpendiculares.

Observações:

A reta s, correspondente à intersecção dos dois planos, é perpendicular à reta r.

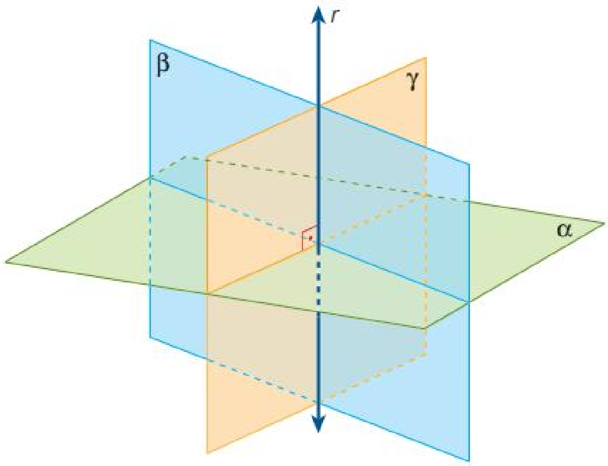
- Definição 12:

Se dois planos são secantes e não perpendiculares, são ditos **oblíquos**.

Optamos por não enunciar alguns teoremas decorrentes desse estudo por julgarmos suficiente, para o nosso objetivo, o que foi apresentado até aqui. Existem diversas propriedades que relacionam planos e retas que foram omitidos e que podem ser compreendidos por meio de modelos (ilustrações).

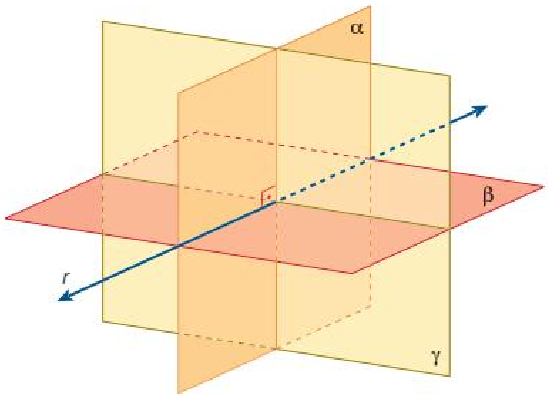
Exemplos:

1. Quando uma reta é perpendicular a um plano, todos os planos que a contêm são perpendiculares ao plano inicial.



Na representação acima, a reta r é perpendicular ao plano α. Além dos planos β e γ, que são perpendiculares ao plano α, poderíamos construir tantos planos quantos desejássemos contendo a reta r e sendo perpendiculares ao plano α.

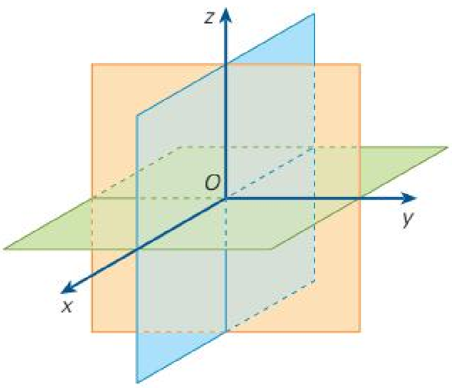
2. Se dois planos α e β se intersectam segundo uma reta r e se γ é outro plano perpendicular a cada um dos planos α e β, então γ é perpendicular à reta r.



Figuras: © DAE

Observação:

Considerando, no exemplo anterior, que os planos α e β são perpendiculares; que o plano γ é outro plano perpendicular a cada um dos planos α e β; e que, além disso, três eixos orientados nas intersecções, dois a dois, desses planos, teremos a ideia do sistema de coordenadas tridimensionais:



Note que o espaço fica dividido em 8 partes (octantes). Cada ponto do espaço será localizado por três coordenadas (x, y, z).

Projeções ortogonais e distâncias

No Volume 1 desta coleção, vimos aspectos da Geometria Plana e também apresentamos algumas ideias da Geometria Analítica. Ainda nesta unidade, vamos abordar problemas métricos da Geometria Espacial. Antes, precisamos compreender como calcular a distância entre dois pontos quaisquer, a distância de um ponto a uma reta, de um ponto a um plano, a distância entre duas retas paralelas, entre duas retas reversas, a distância entre um plano e uma reta paralela ao plano e a distância entre dois planos. Iniciamos com o conceito de projeção ortogonal.

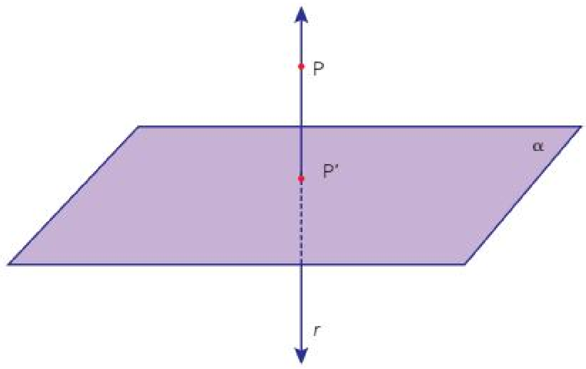
- **Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano**

  Quando uma reta é perpendicular a um plano, a interseção da reta com o plano é um ponto. Esse ponto é conhecido como **pé** da reta perpendicular ao plano.

Na representação acima, temos que:

- Definição 13:

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.



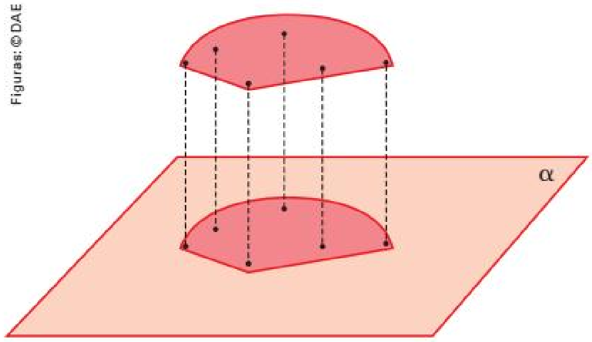
- P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano de projeção α indicado.
- A reta r, que contém os pontos P e P', é perpendicular ao plano α e "fura" o plano no ponto P'.

- **Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano**

- Definição 14:

Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre esse plano.

Figuras: © DAE



Na representação acima, consideramos apenas alguns pontos e suas projeções.

- **Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano**

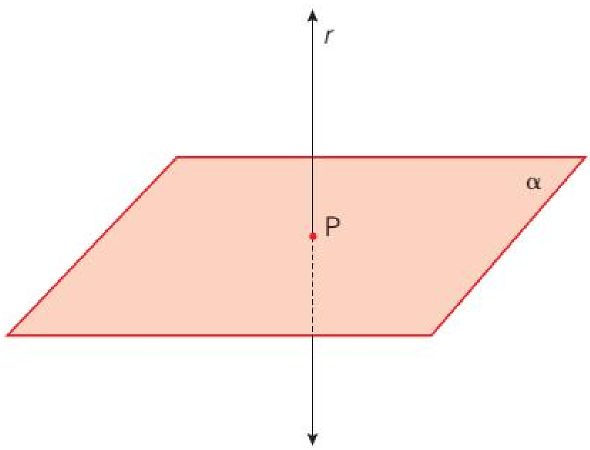
Existem dois casos a considerar na projeção ortogonal de uma reta sobre um plano, conforme definição a seguir.

- Definição 15:

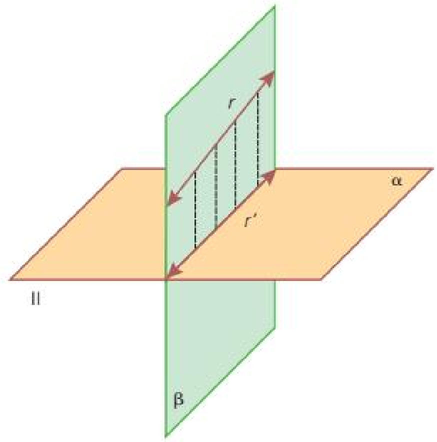
I. Se a reta *r* é perpendicular ao plano α, sua projeção ortogonal sobre o plano é o ponto em que *r* "fura" o plano.

II. Se a reta *r* não é perpendicular ao plano α, sua projeção ortogonal sobre o plano é a intersecção de α com o plano β, perpendicular a α, conduzido por *r*.

Representamos a seguir os dois casos dessa definição.



O ponto P é a projeção ortogonal da reta *r* sobre o plano α.



II

A reta *r'* é a projeção ortogonal da reta *r* sobre o plano α. Observe que o plano β é perpendicular ao plano α.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

Observando a definição de projeção ortogonal de uma reta sobre um plano, nos dois casos, responda:

1. Como você define a projeção ortogonal de um segmento de reta AB, perpendicular ao plano α, sobre o plano α?
2. E se o segmento AB não for perpendicular ao plano α, como você define a projeção ortogonal desse segmento sobre o plano α?

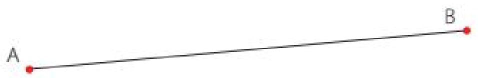
Distâncias

As definições a seguir relacionam o conceito de distância com os elementos ponto, reta e plano. Embora sejam sete definições, elas são importantes para o estudo de Geometria Espacial Métrica.

- **Distância entre dois pontos**

- Definição 16:

A distância entre dois pontos distintos A e B é a medida do segmento AB em uma dada unidade de comprimento.



Representamos a medida de $\overline{AB}$ por $d_{A,B}$ ou AB.

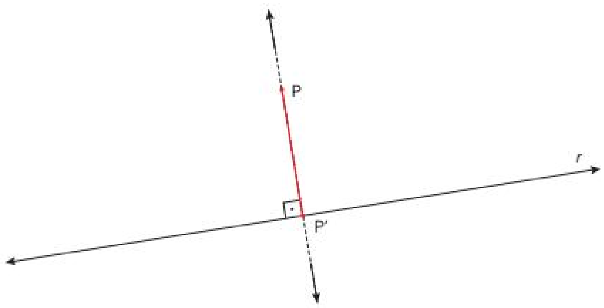
Observação:

Caso os dois pontos sejam coincidentes, a distância entre eles é igual a zero.

- **Distância de um ponto a uma reta**

- Definição 17:

Dados um ponto P e uma reta *r*, podemos traçar uma reta que passa por P e é perpendicular a *r* no ponto P'. A distância do ponto P à reta *r* é a distância entre os pontos P e P'.



Podemos dizer que a distância de um ponto a uma reta é a menor das distâncias do ponto aos pontos da reta. Conforme ilustração acima, a distância do ponto P à reta *r* é igual ao comprimento do segmento PP', em que P' é a projeção ortogonal de P sobre a reta *r*.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

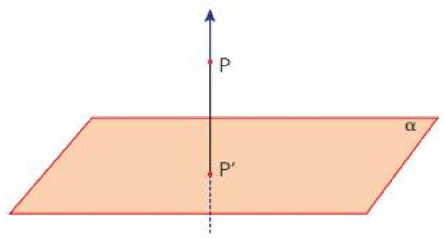
É possível que a distância entre um ponto e uma reta seja igual a zero? Justifique sua resposta.

- **Distância de um ponto a um plano**

- Definição 18:

Dados um ponto P e um plano α, podemos determinar P', que é a projeção ortogonal de P sobre o plano α. A distância do ponto P ao plano α é a distância entre os pontos P e P'.

Figuras: © DAE



Aqui podemos dizer que a distância de um ponto a um plano é a menor das distâncias do ponto aos pontos do plano, ou seja, a distância do ponto P ao ponto P' que corresponde à sua projeção ortogonal sobre o plano.

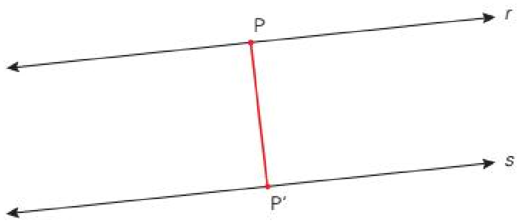
Observação:

Caso o ponto P pertença ao plano, a distância dele ao plano será igual a zero.

- **Distância entre retas paralelas**

- Definição 19:

Dadas duas retas *r* e *s*, paralelas entre si, a distância entre essas retas é a distância de um ponto P qualquer de uma delas até a outra.



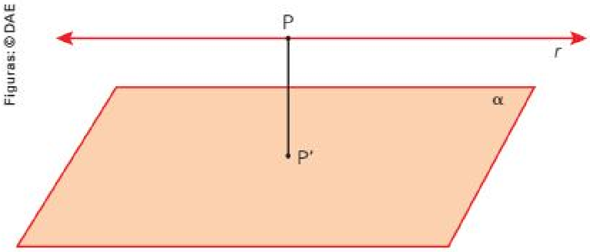
Assim, para determinar a distância entre duas retas que são paralelas, consideramos um ponto de uma das retas e, a seguir, calculamos a distância desse ponto à outra reta.

- **Distância entre reta e plano**

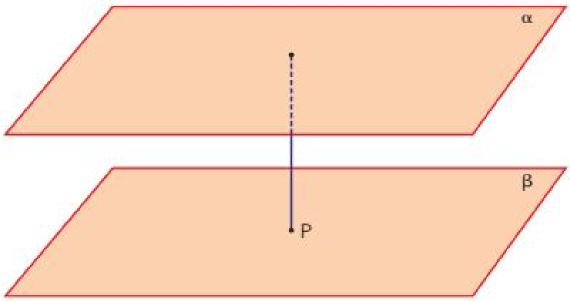
> - Definição 20:
>
> A distância entre um plano α e uma reta r, paralela a α, é a distância entre um ponto qualquer P da reta r ao plano α.

Dessa forma, para obter a distância entre um plano e uma reta paralela ao plano, devemos considerar um ponto P da reta e, a seguir, determinar a distância dele ao ponto P' correspondente à projeção ortogonal do ponto P ao plano.

Figuras: © DAE



> - Definição 21:
>
> A distância entre dois planos α e β paralelos é a distância de um ponto P qualquer de um deles ao outro plano.



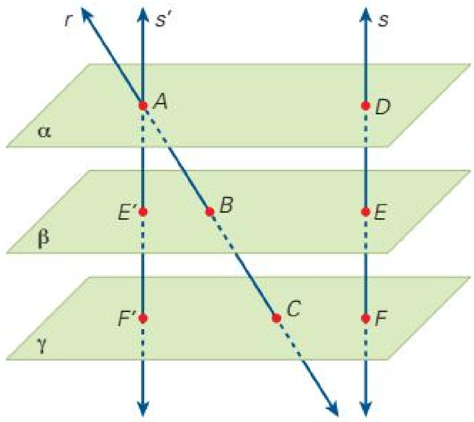
- **Distância entre dois planos paralelos**

Note, conforme ilustração, que podemos considerar um ponto P pertencente ao plano β e, em seguida, calcular a distância desse ponto ao plano α.

Observação:

1. Quando temos dois planos coincidentes, a distância entre eles é igual a zero.

2. Na Geometria Plana, vimos o teorema de Tales sobre retas paralelas. Se considerarmos um feixe de planos paralelos, como sugerido na figura a seguir, podemos enunciar o seguinte teorema:



Um feixe de planos paralelos determina segmentos de medidas proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer aos planos.

- Observe, na representação acima, que as retas secantes são r e s. Traçando a reta s' paralela a s, pelo teorema de Tales, temos:

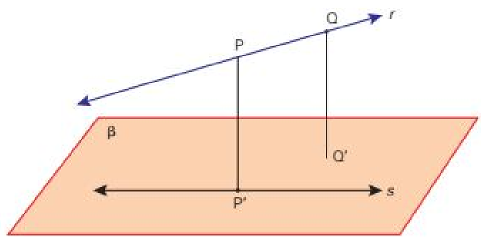
$$\frac{AB}{AE'} = \frac{BC}{E'F'} = \frac{AC}{AF'}$$

- Como AE' = DE, E'F' = EF e AF' = DF, na proporção anterior, temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

- **Distância entre retas reversas**

> - Definição 22:
>
> A distância entre duas retas reversas é a distância de um ponto qualquer de uma delas ao plano que passa pela outra e é paralelo à primeira.



Na figura anterior, a distância entre as retas reversas *r* e *s* representadas pode ser a distância do ponto P à sua projeção ortogonal sobre o plano β indicado, ou pode ser a distância do ponto Q à sua projeção ortogonal Q' sobre o plano β.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

É possível definir a distância entre duas retas reversas como distância de ponto a reta? Justifique sua resposta.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A **geometria de posição**, também chamada de **geometria Euclidiana**, é um dos mais antigos legados culturais da humanidade e representa a primeira ideia de geometria.

De caráter sensitivo e essencialmente perceptivo, a geometria, palavra cujo significado etimológico é dado por *geo = terra* e *metria = medir*, vai além da intenção de "medir as coisas da terra", sugerida pelo próprio significado da palavra. Ela traz em si uma conexão bastante ampla com beleza, estética, harmonia, arte, contemplação e um invejável aspecto prático na resolução de problemas do cotidiano.

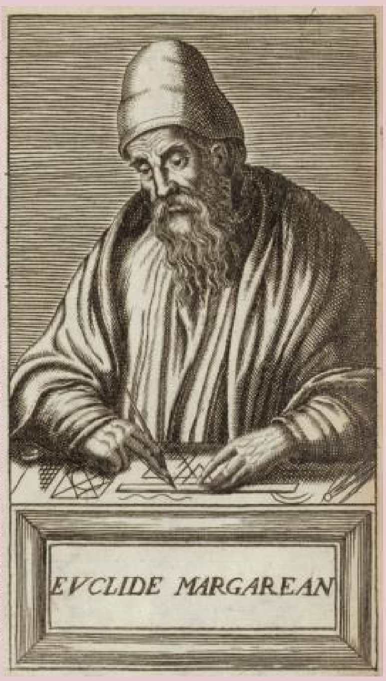
Esse conjunto de aspectos fascinou a humanidade desde os seus primórdios. As grandes culturas da antiguidade, sem exceção, deram à geometria uma conotação quase divina.

"O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo é, de todos os corpos, o mais perfeito."
(Aristóteles, 384-322 a.C.)

A geometria espacial chega ao ápice na antiguidade com os denominados Geômetras Alexandrinos. Arquimedes, com seus estudos sobre as esferas e o cilindro, e Euclides, com seu livro denominado de *Os Elementos*, onde sistematizava todos os conhecimentos acumulados até então pelo seu povo, fornecendo desta forma ordenação por meio de uma linguagem científica.

A preciosa obra *Os Elementos*, que estabelece os princípios da geometria até os dias atuais, é reverenciada por todos os grandes sábios. Bertrand Russel, o último dos considerados grandes sábios, escreveu a seguinte frase:

Os Elementos, de Euclides, é certamente um dos maiores livros já escritos.



Coleção particular/Look and Learn/Elgar Collection/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Euclides de Alexandria (360 a.C-295 a.C.)

O que impressiona é a época em que a obra foi escrita, e as imensas dificuldades de toda a ordem para escrevê-la. Euclides foi quem organizou e sistematizou as descobertas geométricas, aritméticas e algébricas de seus predecessores. A obra conta com um conjunto impressionante de 13 livros e 465 proposições. A sua consistência é tão forte que já justificou mais de mil edições desde a invenção da imprensa e tem sido frequentemente considerada responsável por uma influência sobre a mente humana, maior que qualquer outro livro, em todos os tempos, exceção da Bíblia.

No primeiro livro de *Os Elementos*, consta uma das primeiras proposições:

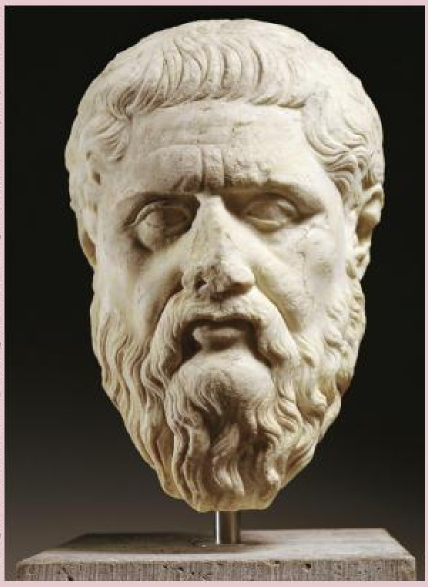
Ponto é aquilo que não tem partes.

Esta proposição se conclui no livro XIII, com a construção dos poliedros regulares. A geometria de posição está fundamentada nos primeiros livros desta obra.

Pitágoras de Samos, discípulo de Thales de Mileto, foi responsável pelo estudo da geometria (forma) com a aritmética (número). Na Geometria Espacial, trabalhou em especial com o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e a esfera. A "harmonia das esferas" era para os pitagóricos a origem de tudo.

Para Platão, a explicação de tudo, como tudo existia, estava nos cinco sólidos perfeitos: o cubo (terra), o tetraedro (fogo), o octaedro (ar), o icosaedro (água) e o dodecaedro (elemento que permearia todo o Universo).

De Agostini Picture Library/G. Dagli Orti/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil



Busto de Platão (c. 427 a.C.-c.347 a.C.).

Os interesses pelos poliedros e o estudo da Geometria Espacial, que era o assunto preferido entre matemáticos e filósofos gregos, parecem ter ficado adormecidos por mais de mil anos (Idade das Trevas) até despertar novamente o interesse dos pensadores durante os séculos que se seguiram ao "Renascimento Italiano".

Durante o período denominado historicamente de "Renascimento" ocorreu o resgate ao estudo de toda ciência adormecida até aquele momento. Diversos matemáticos, como Leonardo Fibonacci (1170-1240), retomam os estudos sobre Geometria Espacial e, em 1220, escreve a "Practica Geometriae", uma coleção sobre Trigonometria e Geometria (abordagem nas teorias de Euclides e um análogo tridimensional do teorema de Pitágoras).

Em 1615, Joannes Kepler (1571-1630) rotula o "Steometria" (stereo – volume/metria – medida), o cálculo de volume. A palavra volume vem de *volumen*, que é a propriedade de um barril (vinho, azeite etc.) de rolar com facilidade.

Para o filósofo e matemático Gottfriend Wilheim Leibniz (1646-1716), por exemplo:

"Deus é o geômetra onipotente para quem o mundo é um imenso problema matemático".

Reunindo ideias de diversos pensadores, podemos descrever a geometria como sendo a linguagem pela qual o homem tenta traduzir e sistematizar o mundo físico em que vive.

Historicamente, a matemática tem dois berços importantes: A Índia, de onde vem a álgebra, e a Grécia Antiga, de onde vem a geometria. É importante salientar que essas "duas áreas da matemática" surgiram separadas até o século XVI, quando o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado o "pai da filosofia moderna", reuniu as duas áreas correntes, naquilo que mais tarde denotou-se **Geometria Analítica**.

Fonte de pesquisa: <http://profclaytonpalma.netspa.com.br/MATEMATICA1SERIE/geometriaeuclidiana.pdf> e <http://fasciniomatematico.blogspot.com.br/2010/08/historia-da-geometria-espacial.html>. Acesso em: 6 fev. 2016.

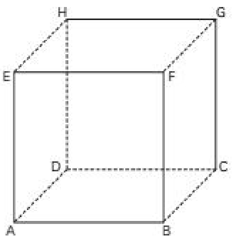
QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

De acordo com o texto, responda:

1. Quais geômetras levaram o estudo da geometria espacial ao ápice na Antiguidade?
2. Qual era a explicação de tudo, de como tudo existia, para Platão?
3. Qual foi o matemático responsável por unir as áreas da álgebra a da geometria?

Exercícios resolvidos

1. Observe o cubo da figura.



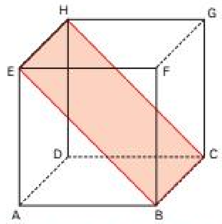
Figuras: © DAE

a) Represente o cubo e a intercseção do plano que contém os pontos B, C e H com o cubo.

b) O ponto E pertence ao plano que contém os pontos B, C e H?

c) O centro do cubo pertence ao plano que contém os pontos B, C e H?

a)



b) Sim, pois os pontos B, C, E e H são coplanares.

c) Sim. Basta observar que o centro do cubo é a intersecção dos segmentos BH e CE, e ambos estão no plano que passa por B, C e H.

2. Quantos planos distintos passam por:

a) Um ponto?

b) Dois pontos distintos?

c) Três pontos distintos não alinhados?

d) Quatro pontos distintos, dos quais três quaisquer nunca estão alinhados?

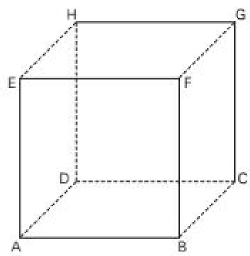
a) Infinitos.

b) Infinitos.

c) Um único plano.

d) Um único plano se os pontos forem coplanares ou nenhum se os pontos não forem coplanares.

3. Considere o cubo representado na figura a seguir:



Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**.

a) A reta que passa pelos pontos A e B é paralela ao plano determinado pelos pontos C, D e H.

b) A reta que passa pelos pontos B e F é perpendicular ao plano determinado pelos pontos A, B e C.

c) A reta que passa pelos pontos F e G é reversa à reta que passa pelos pontos A e D.

d) A reta que passa pelos pontos A e B é ortogonal à reta que passa pelos pontos C e G.

e) A reta que passa pelos pontos F e H é ortogonal à reta que passa pelos pontos A e C.

a) Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois as retas são paralelas.

d) Verdadeira.

e) Verdadeira.

4. Responda:

a) Duas retas *r* e *s*, que são distintas e ortogonais a uma terceira reta *t*, são sempre paralelas entre si?

b) Se um plano α contém uma reta perpendicular a um plano β, então o plano β contém uma reta perpendicular ao plano α?

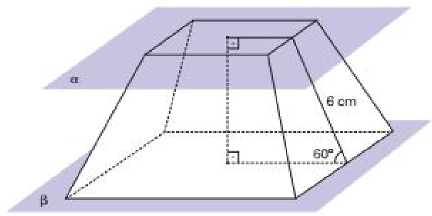
a) Não. As retas podem ser paralelas, reversas ou concorrentes entre si.

b) Sim, pois os dois planos são perpendiculares entre si.

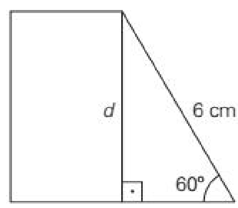
5. Duas retas reversas, *r* e *s*, são projetadas ortogonalmente sobre um mesmo plano de projeção. Quais as possíveis posições relativas das projeções de *r* e *s* sobre esse plano?

As projeções ortogonais de duas retas reversas sobre um plano podem ser duas retas paralelas, duas retas concorrentes ou uma reta e um ponto não pertencentes a ela.

6. O desenho a seguir representa um sólido geométrico denominado tronco de pirâmide. Os planos α e β são paralelos. Conforme indicações no desenho, calcule a distância entre esses dois planos.



Considere a figura a seguir.



Temos que:

$$\text{sen}60° = \frac{d}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{6}$$

$$d = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Assim, a distância entre os planos é de $3\sqrt{3}$ cm.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Indique, em seu caderno, as afirmações que são verdadeiras e aquelas que são falsas.

a) Os três vértices de um triângulo são coplanares. V

b) A intersecção de dois planos pode ser formada apenas por um ponto. F

c) A intersecção de dois planos pode ser formada por infinitos pontos. V

2. Responda:

a) Podem três pontos distintos pertencer a uma mesma reta? Justifique sua resposta utilizando um dos postulados ou um dos teoremas.
Sim, conforme o postulado 2.

b) Três pontos distintos quaisquer são sempre colineares?
Não.

c) Quantas retas ficam determinadas por três pontos distintos não alinhados? Três.

d) Quantos planos ficam determinados por quatro pontos distintos não coplanares? Quatro.

e) Por uma reta passam quantos planos? Infinitos.
Respostas no Manual do Professor.

3. Indique, em seu caderno, quais das afirmações a seguir são verdadeiras e quais são falsas:

a) Três pontos distintos colineares são coplanares. V

b) Por três pontos distintos não alinhados passa um único plano. V

c) Dois pontos distintos determinam um único plano. F

d) Por um ponto passa uma única reta. F

e) Dois pontos são sempre coplanares. V

f) Três pontos distintos não podem ser colineares. F

g) Uma reta que tem um ponto sobre um plano está contida nesse plano. F

h) Uma reta contida num plano tem um único ponto que pertence a esse plano. F

4. Indique, em seu caderno, quais afirmações a seguir podem garantir a determinação de um plano:

I. Três pontos distintos não alinhados.

II. Uma reta e um ponto não pertencente a ela.

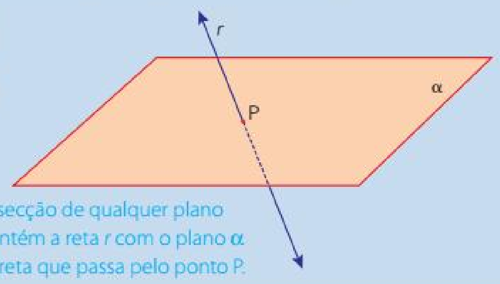
III. Duas retas concorrentes entre si.

IV. Duas retas distintas e paralelas entre si.

As quatro afirmações garantem a determinação de um plano.

5. Na representação a seguir, a reta r "fura" o plano α no ponto P. Como podem ser as intersecções do plano α com os planos que contêm a reta r?

Figuras: © DAE



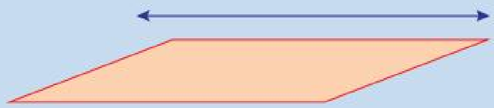
A intersecção de qualquer plano que contém a reta r com o plano α é uma reta que passa pelo ponto P.

6. Considere que os planos α e β têm em comum três pontos distintos e não colineares. Qual a posição relativa desses dois planos? Coincidentes.

7. Quantos planos ficam determinados por quatro pontos do espaço? Em seu caderno, justifique sua resposta por meio de ilustrações ou utilizando postulados e teoremas já estudados. Respostas no Manual do Professor.

8. Indique, em seu caderno, se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Caso necessário, consulte os enunciados dos teoremas, dos postulados e das definições dadas.

I. Uma reta é paralela a um plano se, e somente se, ela é paralela a uma reta do plano. F



II. Dados dois planos secantes, uma reta de um deles é paralela ao outro se, e somente se, ela é paralela à reta de intersecção dos dois planos. V

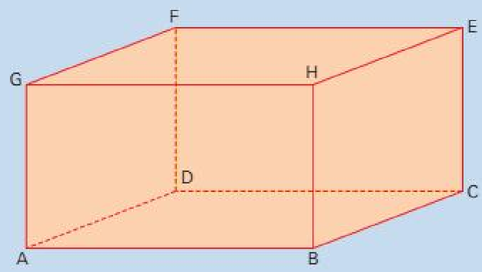
III. Se um plano α corta (intersecta) o plano β segundo a reta s, então ele corta qualquer plano paralelo a β segundo uma reta paralela a s. V

IV. Uma reta que não é paralela a um plano está contida nesse plano. F

V. Se α e β são planos secantes, existe reta contida em α que é paralela a β. V

VI. Dadas duas retas reversas r e s, existe um plano que contém r e é paralelo a s. V

9. A figura a seguir representa um paralelepípedo. Identifique se as retas indicadas são paralelas, perpendiculares ou reversas:



a) AB e GH. Paralelas.

b) BH e EH. Perpendiculares.

c) FG e CD. Reversas.

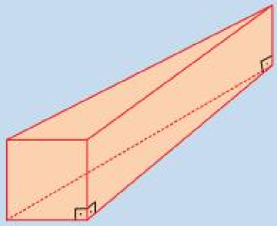
d) EH e AB. Reversas.

e) GH e DC. Paralelas.

f) DF e AD. Perpendiculares.

10. A figura representa um prisma reto de base triangular.

Figuras: © DAE



Os segmentos AB, BD, DC, AC, AF, BF, CE, DE e EF são as arestas desse sólido. Elabore em seu caderno afirmações sobre retas que contêm essas arestas, de tal forma que:

a) sejam retas paralelas.

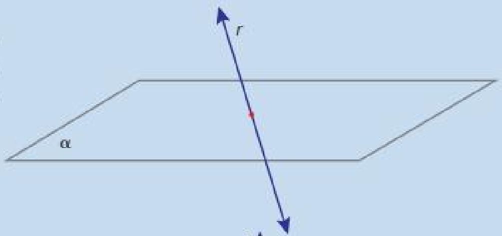
b) sejam retas coplanares.

c) sejam retas ortogonais.

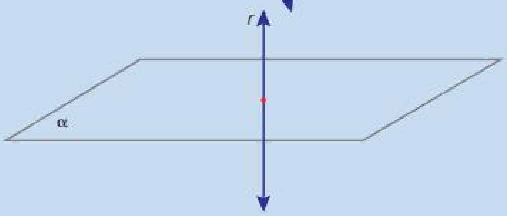
d) sejam retas concorrentes. Resposta pessoal.

11. Na figura a seguir, a reta *r* é paralela ao plano α. Quantos planos perpendiculares ao primeiro e que passam pela reta *r* podem ser construídos? Um único plano.

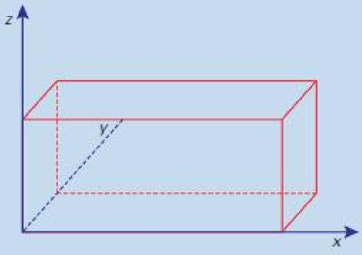
12. Na figura a seguir, a reta *r* é oblíqua ao plano α. Quantos planos perpendiculares ao primeiro e que passam pela reta *r* podem ser construídos? Um único plano.



13. Na figura a seguir, a reta *r* é perpendicular ao plano α. Quantos planos perpendiculares ao primeiro e que passam pela reta *r* podem ser construídos? Infinitos.



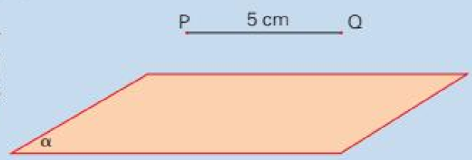
14. Observe, na figura a seguir, um paralelepípedo retângulo e um sistema de coordenadas tridimensionais, cuja origem é um dos vértices do paralelepípedo.



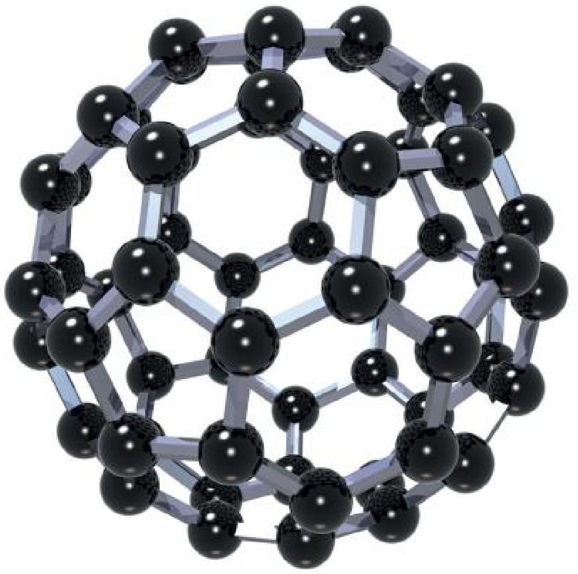
Considerando como positivo o sentido indicado pelas setas e que as dimensões do paralelepípedo são iguais a 5, 1 e 2, quais as coordenadas dos seus oito vértices?

(0; 0; 0), (5; 1; 0), (5; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 2), (5; 0; 2), (5; 1; 2) e (0; 1; 2).

15. Represente em seu caderno a projeção ortogonal do segmento PQ (paralelo ao plano α) sobre o plano α e calcule o comprimento do segmento P´Q´. Resposta no Manual do Professor.



POLIEDROS



Science Photo Library/Latinstock

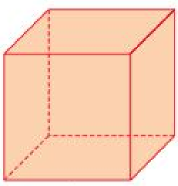
Arranjo feito por computador mostrando uma estrutura formada com átomos de carbono.

É comum falarmos de formas geométricas associadas a objetos e a construções. Entretanto, estruturas moleculares são exemplos interessantes empregados para descrever ligações químicas.

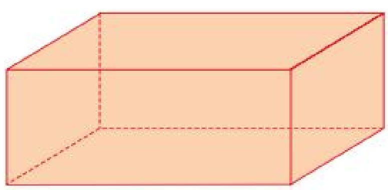
Observe, por exemplo, a ilustração acima, que representa um arranjo espacial de substância simples de carbono – um arranjo geodésico de átomos de carbono. A estrutura ilustrada é formada por hexágonos e pentágonos.

Converse com seu professor de Química sobre outras estruturas espaciais e pesquise um pouco mais a respeito. Essa pesquisa poderá ser apresentada para a turma toda.

Ao longo do Ensino Fundamental são estudadas formas geométricas não planas, denominadas sólidos geométricos. Entre essas formas, normalmente encontramos:

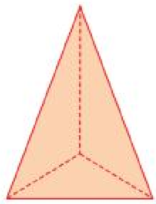


cubo

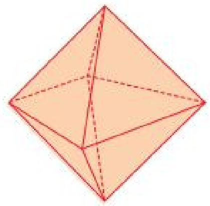


paralelepípedo

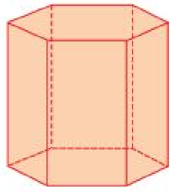
Figuras: © DAE



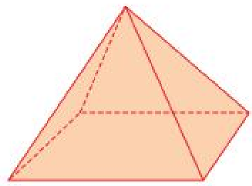
tetraedro



octaedro



prisma



pirâmide

Esses são alguns exemplos de sólidos que, devido às suas características, são definidos como poliedros.

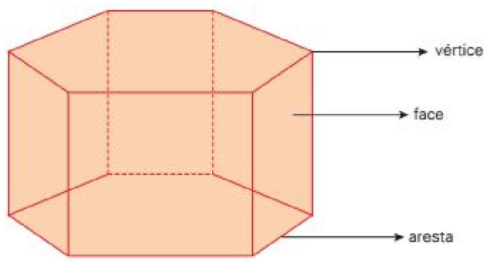
Poliedros são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos.

Observação:

Em cada um desses poliedros é possível encontrar e indicar vértices, arestas e faces. São os elementos de um poliedro.

Exemplo:

Considere o seguinte poliedro.



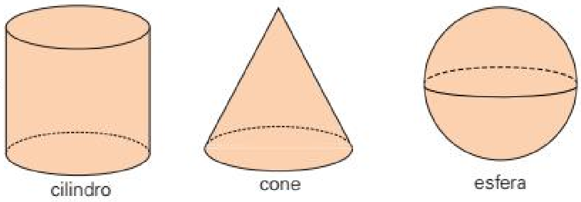
Questões e reflexões

Respostas no Manual do professor.

1. Pesquise o significado da palavra poliedro.
2. No poliedro representado acima, quantos são os vértices? E as faces? E as arestas?

É claro que, além dos poliedros, você já conhece alguns corpos redondos. Como exemplos, observe as ilustrações:

Figuras: © DAE



Nesta unidade, não abordaremos os corpos redondos. Nosso estudo será restrito aos principais poliedros, deixando para o próximo volume o estudo de cilindros, cones e esferas.

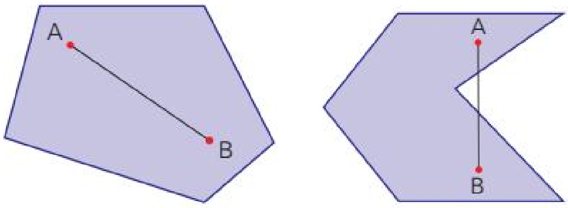
Noção de poliedro

Em cada poliedro, como vimos, as faces são superfícies planas poligonais que limitam o poliedro. Duas faces quaisquer não estão no mesmo plano. As arestas limitam as faces e são formadas na intersecção de dois, e somente dois, polígonos. Os pontos de interseção de três ou mais arestas de um poliedro são os vértices.

Quando você estudou polígonos, viu que suas denominações são dadas a partir do número de ângulos (ou de lados). Os poliedros têm as denominações dadas a partir do número de faces. Observe alguns exemplos:

Número de faces	Nome do poliedro
4 (tetra)	Tetraedro
5 (penta)	Pentaedro
6 (hexa)	Hexaedro
8 (octa)	Octaedro
10 (deca)	Decaedro
12 (dodeca)	Dodecaedro
20 (icosa)	Icosaedro

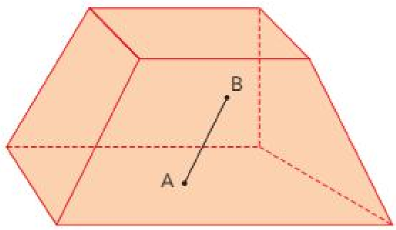
Na Geometria Plana, existem duas denominações para polígonos: convexos e não convexos. Uma forma de caracterizar um polígono convexo é observando se o segmento formado a partir de dois pontos internos quaisquer sempre é interno ao polígono. Isso não ocorre quando o polígono é não convexo:



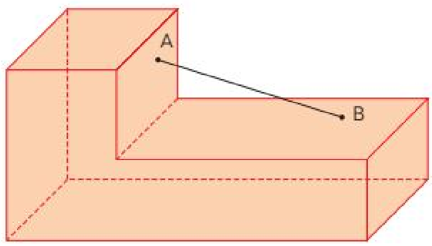
polígono convexo

polígono não convexo

Em relação aos poliedros, também há duas denominações: **convexo** e **não convexo**. Um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido nele. Já no poliedro não convexo, isso não ocorre:



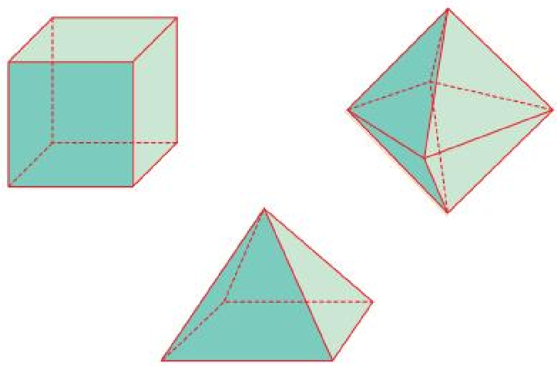
poliedro convexo



poliedro não convexo

Embora em alguns exemplos e exercícios possamos trabalhar com poliedros não convexos, nosso estudo estará direcionado para os poliedros convexos.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), ao estudar os chamados poliedros convexos, descobriu uma relação matemática envolvendo o número de vértices, faces e arestas. Antes de apresentarmos formalmente essa descoberta feita por Euler, observe os poliedros a seguir:



Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Conte o número de faces, arestas e vértices em cada um desses poliedros e organize as informações em uma tabela.
2. Para cada poliedro, compare a soma do número de faces e de vértices com o número de arestas. A que conclusão você chegou?

Respostas no Manual do Professor.

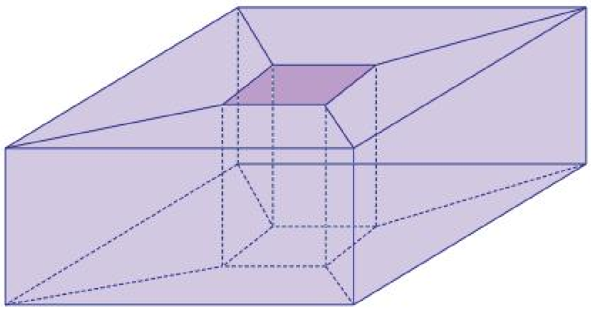
Relação de Euler:

Num poliedro convexo, sendo **F** o número de faces, **V** o número de vértices e **A** o número de arestas, vale a relação:

$$V + F = A + 2$$

Não faremos a demonstração dessa relação matemática obtida por Euler. A seguir, apresentamos alguns exemplos que permitem conhecer um pouco mais sobre essa relação.

Vamos verificar se a relação de Euler, apresentada anteriormente, vale para o poliedro não convexo, representado a seguir (o poliedro tem uma parte "oca"):



Figuras: © DAE

- Observando o poliedro representado, temos por contagem que:

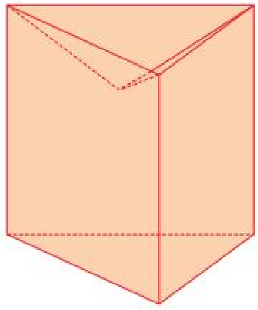
$$F = 16, V = 16 \text{ e } A = 32$$

- A relação de Euler, para esse poliedro, não é verificada:

$$V + F \neq A + 2$$

$$16 + 16 \neq 32 + 2$$

No exemplo anterior, o poliedro era não convexo. Vamos agora observar a relação de Euler para outro poliedro também não convexo, conforme representado a seguir:



- Embora o poliedro seja não convexo, a relação de Euler é verificada, pois:

$$V + F = A + 2$$

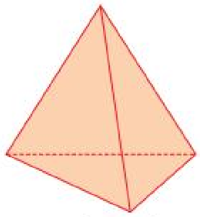
$$7 + 7 = 12 + 2$$

Observação:

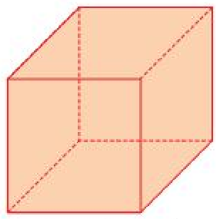
Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler. Porém, nem todo poliedro que satisfaz a relação de Euler é convexo.

Poliedros regulares

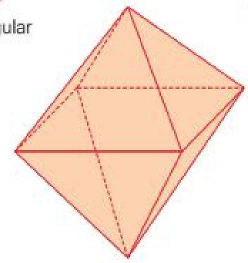
Abaixo estão representados cinco poliedros:



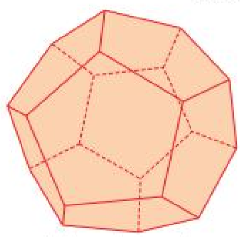
tetraedro regular



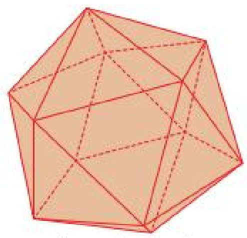
hexaedro regular



octaedro regular



dodecaedro regular



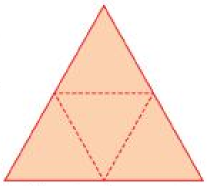
icosaedro regular

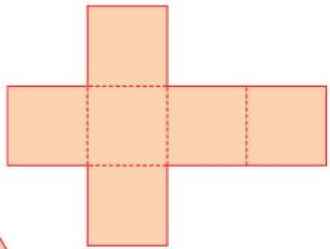
Podemos organizar em uma tabela algumas características quantitativas desses poliedros:

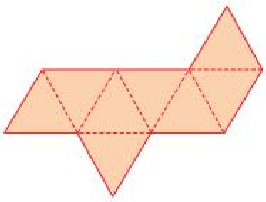
	Nº de lados por face	Nº de arestas que concorrem por vértice
Tetraedro	3	3
Hexaedro	4	3
Octaedro	3	4
Dodecaedro	5	3
Icosaedro	3	5

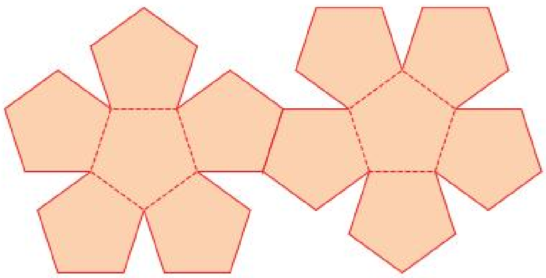
Se construíssemos modelos utilizando cartolina e depois fizéssemos uma planificação de cada um desses poliedros, teríamos:

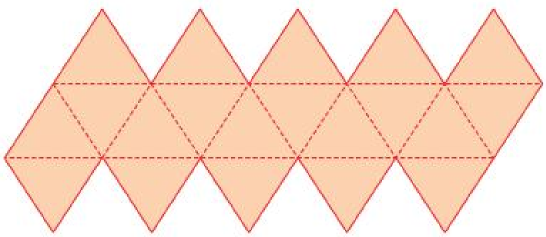
Figuras: © DAE


planificação do tetraedro


planificação do cubo


planificação do octaedro


planificação do dodecaedro


planificação do icosaedro

Note que cada face de um mesmo poliedro está representada por um mesmo polígono regular (superfície poligonal regular). Esses poliedros são ditos regulares.

Um poliedro convexo é regular quando:

- Suas faces são polígonos regulares e congruentes.
- Em cada vértice concorre o mesmo número de arestas.

Há uma propriedade (teorema) sobre poliedros convexos regulares (também conhecidos como poliedros de Platão), cujo enunciado pode ser assim escrito:

Existem apenas cinco classes de poliedros regulares convexos.

Vamos fazer a demonstração dessa propriedade.

- Vamos considerar um poliedro regular com F faces, V vértices e A arestas. Sendo n o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorrem em cada vértice, temos:

$$2 \cdot A = n \cdot F = p \cdot V$$

- Podemos, a partir dessas relações, expressar o número de arestas e o número de vértices em função do número de faces, isto é:

$$A = \frac{n \cdot F}{2} \text{ e } V = \frac{n \cdot F}{p}$$

- Substituindo essas expressões na relação de Euler, temos:

$$V + F = A + 2$$

$$\frac{n \cdot F}{p} + F = \frac{n \cdot F}{2} + 2$$

$$\frac{2 \cdot n \cdot F + 2 \cdot p \cdot F}{2p} = \frac{n \cdot p \cdot F + 4 \cdot p}{2p}$$

$$2nF + 2pF = npF + 4p$$

$$2nF + 2pF - npF = 4p$$

$$F(2n + 2p - np) = 4p$$

- Nessa última igualdade, como F, p e n são números naturais, precisamos garantir que também será natural não nulo o número correspondente ao denominador da fração.

$$F = \frac{4p}{2n + 2p - np} \quad \text{(I)}$$

Assim, temos:

$$2n + 2p - np > 0$$
$$2n > np - 2p$$
$$2n > p(n - 2)$$
$$\frac{2n}{n-2} > p$$

- Lembrando que p é o número de arestas que concorrem em cada vértice, então $p \geqslant 3$ (não existe poliedro em que concorrem por vértice menos que 3 arestas). Assim, retornando à desigualdade anterior, temos:

$$\frac{2n}{n-2} > p \geqslant 3$$

- O que acarreta em:

$$\frac{2n}{n-2} > 3$$

- Observando o denominador da fração, teremos que $n - 2 \geqslant 1$, ou seja, $n \geqslant 3$. Resolvendo a inequação, vem:

$$\frac{2n}{n-2} > 3$$
$$2n > 3n - 6$$
$$-n > -6 \qquad n < 6$$

- Como $n \geqslant 3$ e $n < 6$, então $3 \leqslant n < 6$. Assim, teremos três valores naturais para n: $n = 3$; $n = 4$ e $n = 5$. Vamos analisar essas possibilidades substituindo esses valores em (I) e observando que p é um número natural que representa a quantidade de arestas que concorrem em cada vértice:

$$n = 3 \rightarrow F = \frac{4p}{6-p} \rightarrow \begin{array}{l} p = 3 \rightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{array}$$

$$n = 4 \rightarrow F = \frac{4p}{8-2p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 \text{ (hexaedro)}$$

$$n = 5 \rightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 12 \text{ (dodecaedro)}$$

Portanto, teremos apenas 5 poliedros que são regulares.

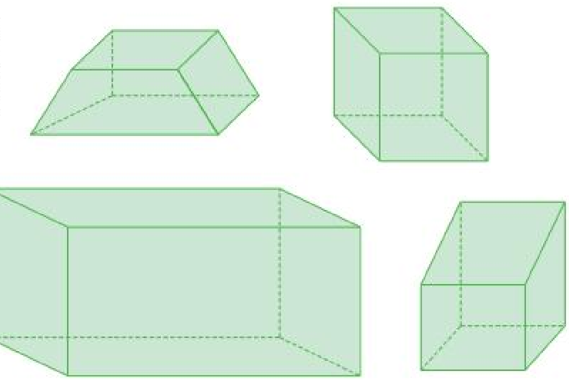
Classes de poliedros

Vamos considerar agora classes de poliedros que possuem 4 faces (tetraedros), 6 faces (hexaedros), 8 faces (octaedros), 12 faces (dodecaedros) ou 20 faces (icosaedros), mas que não sejam necessariamente regulares, tendo cada face o mesmo número de arestas. Poderíamos construir a seguinte tabela:

Poliedros	Nº de faces	Nº de arestas que concorrem por vértice
Tetraedros	4	3
Hexaedros	6	3
Octaedros	8	4
Dodecaedros	12	3
Icosaedros	20	5

Exemplo:

Vamos considerar a classe dos hexaedros, isto é, aqueles poliedros que têm exatamente 6 faces, conforme quatro modelos representados a seguir:



Figuras: © DAE

Observando que esses poliedros têm, cada um, 6 faces ($F = 6$) e 4 arestas por face ($n = 4$), não precisamos fazer contagem direto na figura para determinar os elementos que estão faltando. Assim, podemos determinar A (número de arestas):

$$2A = nF$$
$$2A = 4 \cdot 6 \Rightarrow A = 12$$

Na relação de Euler, podemos agora obter V (número de vértices):

$$V + F = A + 2$$
$$V + 6 = 12 + 2 \Rightarrow V = 8$$

Além disso, se quisermos determinar o número total de arestas que concorrem em cada vértice, basta determinar p na igualdade:

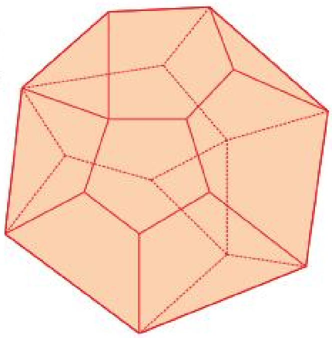
$$pV = nF$$

$$p \cdot 8 = 4 \cdot 6 \Rightarrow p = 3$$

Soma das medidas dos ângulos

Já que as faces dos poliedros são polígonos, também podemos determinar a soma das medidas dos ângulos das faces desses polígonos. Vamos considerar como exemplo o seguinte poliedro:

Figuras: © DAE



Observando esse poliedro, é possível dizer que ele tem 16 faces: 5 triangulares, 6 quadrangulares e 5 pentagonais. No Volume 1 desta coleção, empregamos uma relação matemática para determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo (n é o número de lados do polígono):

$$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$

Para determinar a soma das medidas dos ângulos internos de todas as faces do poliedro, calculamos inicialmente a soma dessas medidas em cada face:

- Triangular:

  $n = 3 \rightarrow S_{F_3} = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$

- Quadrangular:

  $n = 4 \rightarrow S_{F_4} = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$

- Pentagonal:

  $n = 5 \rightarrow S_{F_5} = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$

Portanto, a soma das medidas dos ângulos de todas as faces do poliedro convexo é:

$$S_F = 5 \cdot S_{F_3} + 6 \cdot S_{F_4} + 5 \cdot S_{F_5}$$
$$S_F = 5 \cdot 180° + 6 \cdot 360° + 5 \cdot 540°$$
$$S_F = 5\,760°$$

Há uma maneira diferente de chegar a essa medida. Retornando ao poliedro representado, podemos, por contagem, verificar que são 18 vértices. Essa informação pode ser utilizada para estabelecer a soma das medidas dos ângulos de todas as faces do poliedro. Basta conhecer a seguinte propriedade:

> A soma das medidas de todos os ângulos internos das faces de um poliedro convexo (S_F) é dada pela expressão:
>
> $$S_F = (V - 2) \cdot 360°$$
>
> em que V é o número total de vértices desse poliedro.

- Demonstração:

  Consideremos $n_1, n_2, n_3, ..., n_F$ os números de lados dos polígonos das faces 1, 2, 3, ..., F de um poliedro convexo (numeramos as faces do poliedro). Adicionando os números de lados dos polígonos que compõem as faces do poliedro, obtemos como soma 2A (cada lado é uma aresta que está ao mesmo tempo em duas faces):

  $$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F = 2A \quad \text{(I)}$$

- Vamos calcular a soma das medidas de todos os ângulos internos dos polígonos que representam as faces dos poliedros utilizando a relação $S = (n - 2) \cdot 180°$:

  $S_F = (n_1 - 2) \cdot 180° + (n_2 - 2) \cdot 180° +$
  $+ (n_3 - 2) \cdot 180 + ... + (n_F - 2) \cdot 180°$
  $S_F = (n_1 + n_2 + n_3 + ... n_F - 2 - 2 - 2 ... - 2) \cdot 180°$
  $S_F = (n_1 + n_2 + n_3 + ... n_F - 2 \cdot F) \cdot 180°$ (II)

- Substituindo (I) em (II):

  $S_F = (2A - 2 \cdot F) \cdot 180°$
  $S_F = (A - F) \cdot 360°$

- Utilizando da relação de Euler que $A - F = V - 2$, essa igualdade fica:

  $S_F = (A - F) \cdot 360°$
  $S_F = (V - 2) \cdot 360°$

Retornando ao exemplo, podemos agora calcular mais rapidamente a soma das medidas dos ângulos das faces do poliedro correspondente substituindo apenas o número de vértices na relação que acabamos de demonstrar, isto é:

$$S_F = (V - 2) \cdot 360°$$
$$S_F = (18 - 2) \cdot 360° \Rightarrow S_F = 5\,760°$$

Exercícios resolvidos

1. Em um poliedro convexo, o número de vértices é igual a $\frac{2}{3}$ do número de arestas, e o número de faces é igual a $\frac{3}{4}$ do número de vértices. Determine a quantidade de arestas, de vértices e de faces do poliedro.

Sendo V a quantidade de vértices, A a de arestas e F a de faces, temos que:

$V = \frac{2}{3} \cdot A$

$F = \frac{3}{4} \cdot V = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot A = \frac{A}{2}$

$V + F = A + 2 \rightarrow \frac{2}{3} \cdot A + \frac{A}{2} = A + 2 \rightarrow$

$\rightarrow 4A + 3A = 6A + 12 \therefore A = 12 \rightarrow F = 6$ e

$V = 8$

2. A soma das medidas dos ângulos internos das faces de um poliedro convexo regular é igual a 1 440°. Sabendo que suas faces são triangulares, determine o número de arestas e o de faces desse poliedro e faça um desenho dele.

Sendo V a quantidade de vértices, A a de arestas e F a de faces, temos que:

$1\,440° = (V - 2) \cdot 360°$

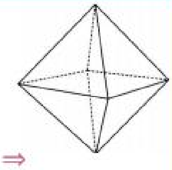
$4 = V - 2 \rightarrow V = 6$

$2A = 3F$

$V + F = A + 2 \rightarrow 6 + F = \frac{3F}{2} + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = 8$

Logo, $A = 12$.



O poliedro regular é o octaedro.

3. Em um poliedro convexo, formado apenas por faces triangulares e quadrangulares, o número de faces quadrangulares, de faces triangulares e o total de faces formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Sabe-se ainda que o número de vértices do poliedro é 8. Calcule o número de arestas desse poliedro.

Sendo x, y e $x + y$, respectivamente, os números de faces quadrangulares, triangulares e o total de faces, V a quantidade de vértices, A a de arestas e F a de faces, temos que:

$(x\,; y\,; x + y)$ PA $\rightarrow y - x = x + y - y \therefore y = 2x$

$2A = 4 \cdot x + 3 \cdot y \rightarrow 2A = 4 \cdot x + 3 \cdot 2x \therefore A = 5x$

$V + F = A + 2 \rightarrow 8 + x + 2x = 5x + 2 \therefore x = 3$

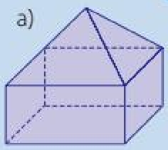
$A = 5x = 5 \cdot 3 = 15$

Exercícios propostos

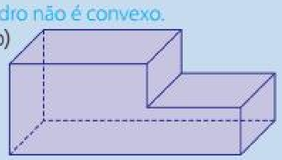
Resolva os exercícios no caderno.

1. Diga se cada um dos poliedros a seguir é convexo ou não convexo. a) O poliedro é convexo. b) O poliedro não é convexo.

a)



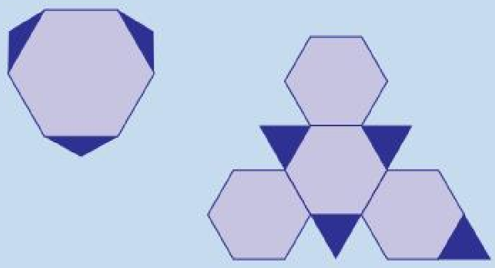
b)



2. Um poliedro convexo possui 8 faces e 18 arestas. Qual é o número de vértices desse poliedro? 12

3. O tetraedro truncado é um poliedro convexo formado por 4 faces triangulares e 4 faces hexagonais, conforme sugere a figura.

Figuras: © DAE



Calcule o número de vértices do tetraedro truncado. 12

4. Um poliedro convexo possui uma face pentagonal, 5 faces quadrangulares e 5 faces triangulares.

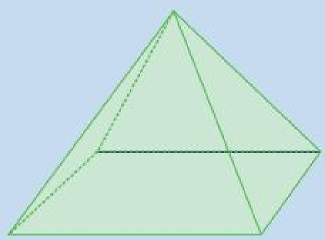
a) Calcule o número de vértices desse poliedro.

b) Faça uma figura de um poliedro que satisfaça as condições do enunciado.

Respostas no Manual do Professor.

5. Após fazer algumas observações a respeito das quantidades de arestas, vértices e faces de um poliedro convexo, um aluno escreveu em seu caderno a conclusão: "Em um poliedro convexo, quando o número de vértices é igual ao número de faces, o número de arestas é par". Utilizando a relação de Euler, diga se a conclusão obtida pelo aluno é verdadeira ou se foi mera coincidência dos casos observados. Verdadeira.

6. Uma pirâmide quadrangular regular é formada por uma base quadrangular e quatro faces laterais triangulares. Assim, calcule os números de faces, arestas e vértices de uma pirâmide regular que possui 12 faces laterais triangulares. São 13 faces, 24 arestas e 13 vértices.



7. Um poliedro convexo apresenta apenas faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o poliedro tem 8 vértices e que o número de faces triangulares é igual ao dobro do número de faces quadrangulares. Calcule:

a) a soma das medidas dos ângulos internos das faces desse poliedro. 2 160°

b) o número de arestas desse poliedro. 15

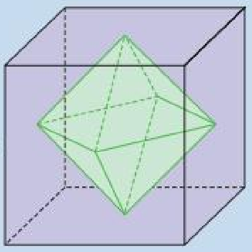
8. Um poliedro convexo possui 32 vértices e é formado apenas por faces triangulares, quadrangulares e octogonais. Os números de faces octogonais, quadrangulares e triangulares são diretamente proporcionais aos números 2, 5 e 8, respectivamente. Calcule o número de arestas desse poliedro. 60

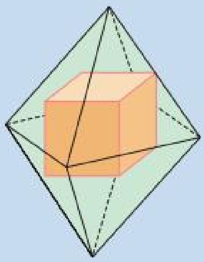
9. Um poliedro convexo possui 20 arestas e é formado apenas por faces triangulares e uma face quadrangular. Seccionando-o por um plano, destaca-se dele um novo poliedro convexo que possui uma face quadrangular a mais e quatro faces triangulares a menos que o poliedro original. Calcule o número de vértices e de arestas do novo poliedro. São 8 vértices e 16 arestas.

10. Monte em seu caderno uma tabela que contenha as seguintes informações sobre os poliedros regulares: nome, formato das faces, número de faces, número de arestas e número de vértices. Resposta no Manual do professor.

11. Quando os vértices de um poliedro são os centros das faces de outro poliedro, estes são chamados **duais** ou **conjugados**. Assim, o hexaedro regular e o octaedro regular são duais.

Figuras: © DAE



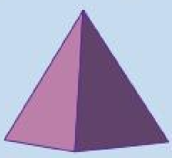


a) Qual relação você observa entre o número de vértices de um e o número de faces do outro, se dois poliedros são duais? São iguais.

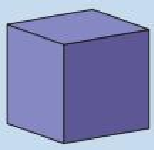
b) Existe um poliedro regular que é dual dele mesmo. Qual é esse poliedro? O tetraedro.

12. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos das faces de cada um dos poliedros regulares representados nas figuras a seguir:

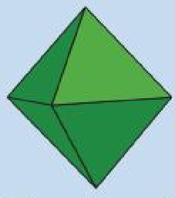
a) Tetraedro regular.



b) Hexaedro regular.

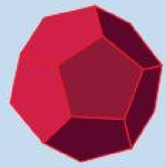


c) Octaedro regular.



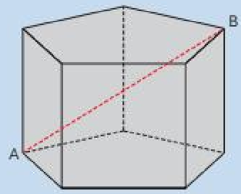
e) Icosaedro regular.

d) Dodecaedro regular.



a) 720°
b) 2 160°
c) 1 440°
d) 6 480°
e) 3 600°

13. Diagonal de um poliedro é um segmento de reta que une dois vértices não pertencentes à mesma face. Por exemplo, no poliedro da figura a seguir, o segmento AB é uma de suas diagonais.



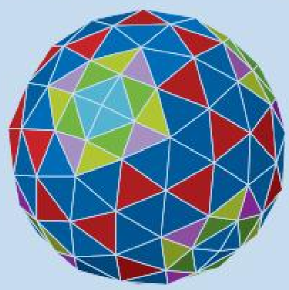
Desse modo, obtenha o número total de diagonais do:

a) tetraedro regular. Zero.

b) hexaedro regular. Quatro.

c) octaedro regular. Três.

14. Um poliedro convexo é formado por 224 faces triangulares, como mostra a figura a seguir.



a) Calcule o número de arestas desse poliedro. 336

b) Calcule o número de vértices desse poliedro. 114

15. A figura a seguir representa um poliedro estrelado.

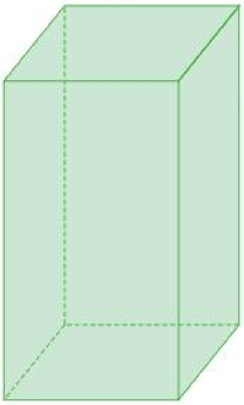
Junto com um colega, pesquise sobre os poliedros estrelados. Invente um problema e apresente-o para os demais colegas da turma resolverem.

Resposta pessoal.

PRISMAS

Ao observar a fotografia de um edifício, como a indicada a seguir, constatamos que sua forma geométrica lembra um poliedro. Assim, enquanto o edifício é uma forma real, o poliedro ao lado representa uma forma idealizada.

Rubens Chaves / Pulsar Imagens



Figuras: © DAE

Um prédio pode se assemelhar a estrutura de um poliedro. Edifício do BNDES, Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2012.

O poliedro representado é formado por 6 faces, 8 vértices e 12 arestas. Veremos, a seguir, que tal poliedro é denominado prisma. Nosso interesse em estudar o prisma está relacionado com medidas tais como área e volume.

Prismas e seus elementos

Nas duas figuras a seguir, os planos paralelos α e β são interceptados por uma reta r. No plano α, temos representado um polígono.

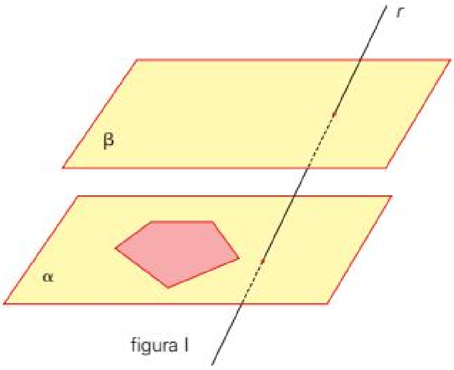


figura I

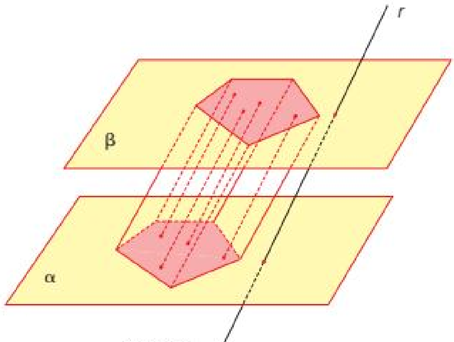
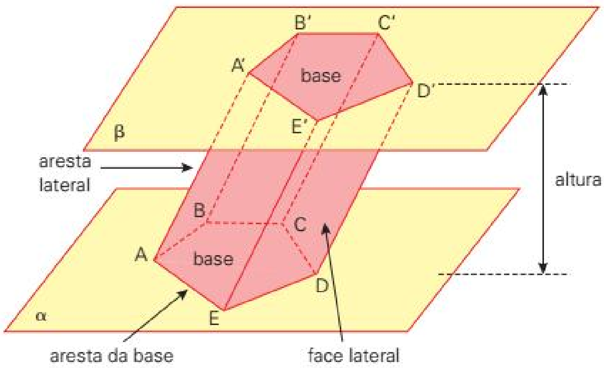


figura II

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta dada r, com uma extremidade num ponto pertencente ao polígono do plano α e a outra extremidade no plano β, denomina-se **prisma**, conforme a figura II.

Um prisma é um poliedro que possui duas faces congruentes e paralelas (os dois polígonos que estão nos planos α e β) e, além disso, as outras faces são paralelogramos cujos lados são obtidos ligando-se os vértices correspondentes das duas faces paralelas.

No prisma obtido, temos os seguintes elementos:

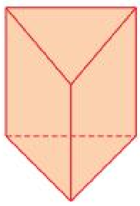


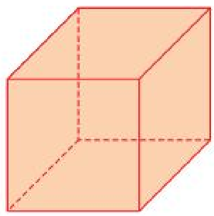
- **Bases**: são os polígonos convexos congruentes situados nos planos paralelos.
- **Arestas da base**: são os lados dos polígonos que formam as bases.
- **Arestas laterais**: são os segmentos AA′, BB′, CC′, DD′e EE′, todos paralelos entre si.

- **Faces laterais**: são os paralelogramos AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E e EE'A'A.
- **Altura**: é a distância entre dois planos paralelos (distância entre as bases do prisma).

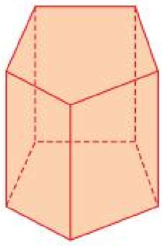
Podemos classificar um prisma conforme certas características, por exemplo:

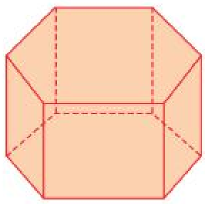
- **Quanto ao número de arestas da base**: como as bases de um prisma são polígonos congruentes, podemos conceber quantos prismas quisermos conforme imaginemos suas bases. Como exemplo, temos:


prisma triangular

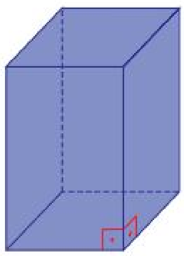

prisma quadrangular

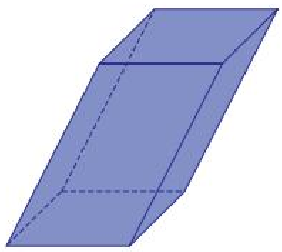
Figuras: © DAE


prisma pentagonal


prisma hexagonal

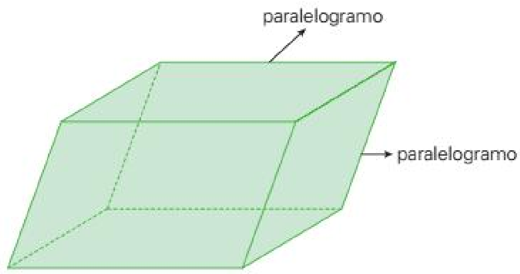
- **Quanto à inclinação das arestas laterais**: se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, temos um **prisma reto**. Se, porém, as arestas laterais são não perpendiculares (oblíquas) aos planos das bases, temos um **prisma oblíquo**. Exemplificando:


prisma reto

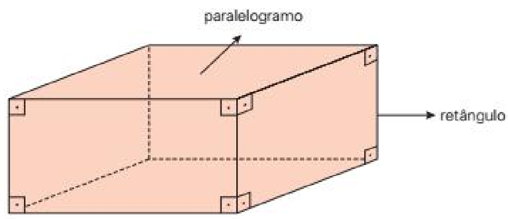

prisma oblíquo

São dadas denominações diferentes para os prismas quadrangulares, conforme suas características. Assim, de interesse para o nosso estudo, temos:

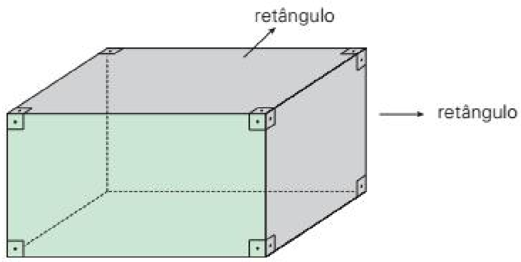
- **Paralelepípedo**: é um prisma cujas bases são paralelogramos.



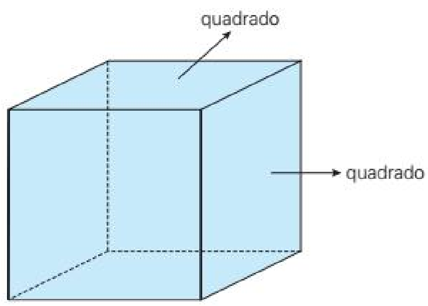
- **Paralelepípedo reto**: quando as bases são paralelogramos e as faces laterais são retângulos, dizemos que o paralelepípedo é reto.



- **Paralelepípedo retângulo** ou **bloco retangular** ou **retorretângulo**: quando as bases e as faces laterais são retângulos.



- **Cubo**: quando as bases e as faces laterais são quadrados.

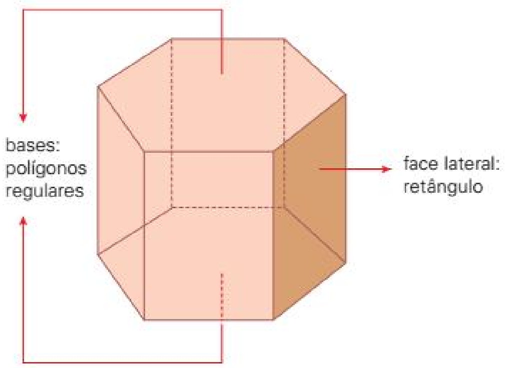


Observação:

Podemos dizer que um cubo é um caso particular de um paralelepípedo retorretângulo.

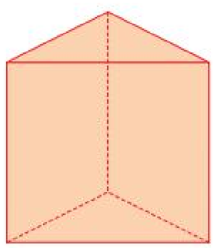
Prisma regular

Há um caso particular de prisma reto que devemos considerar. Quando, num prisma reto, os polígonos das bases são regulares, temos o **prisma regular**. Pelo fato de o prisma ser reto, as faces laterais serão formadas por retângulos congruentes.

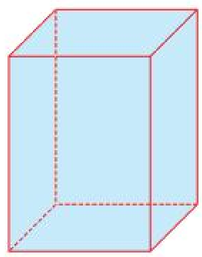


Figuras: © DAE

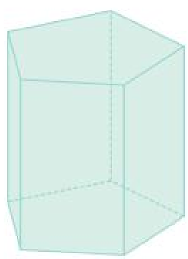
No prisma acima (denominado prisma reto hexagonal regular), as seis faces laterais são retângulos congruentes, e as duas bases são hexágonos regulares. São exemplos de prismas regulares:



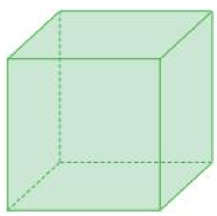
prisma triangular
(base: triângulo equilátero)



prisma quadrangular
(base: quadrado)



prisma pentagonal
(base: pentágono regular)



cubo: (hexaedro)
(base: quadrado)

Quando as bases de um prisma reto são polígonos regulares ele é denominado **prisma regular**.

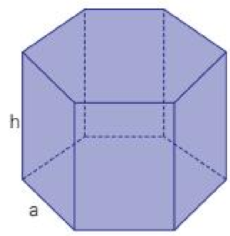
Área da superfície de um prisma

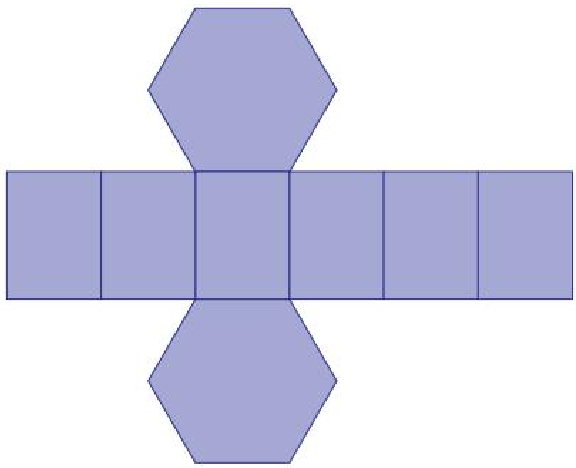
villorejo/Shutterstock.com

Imagine que um fabricante de embalagens lance no mercado, por ocasião de uma data comemorativa, uma embalagem como a sugerida na imagem acima. Há um custo de material que deve ser obtido para o cálculo do valor de venda. Para saber qual é esse custo, é necessário, entre outros, calcular a área total dessa embalagem, ou seja, quanto de material será utilizado para sua confecção.

A embalagem mostrada tem a forma de um prisma. Logo, precisaremos saber calcular a área de um prisma.

Considerando como exemplo um prisma regular hexagonal, a figura a seguir representa o prisma de altura h e medida da aresta da base a, e sua planificação:





Nesse prisma, como em qualquer outro, quando pensamos no cálculo das áreas, devemos pensar nos polígonos das bases, na superfície lateral (reunião das faces laterais) e também na superfície total (reunião das bases com a superfície lateral):

- Área da base (A_b): área de um dos polígonos das bases;
- Área lateral (A_L): soma das áreas das faces laterais;
- Área total (A_t): soma da área lateral e das áreas das bases.

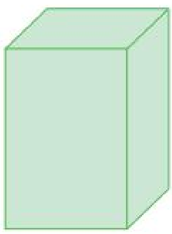
A área total de um prisma, simbolizada por A_t, pode ser calculada pela relação:

$$A_t = A_L + 2 \cdot A_b$$

em que A_b é a área de cada base e A_L é área lateral.

Exemplos:

1. Vamos calcular a área total do prisma regular conforme representado na figura a seguir, em que a aresta da base mede 3 cm e a altura é igual a 6 cm.



Figuras: © DAE

- Área de cada base (área de um quadrado):

  $A_b = 3^2 = 9 \rightarrow A_b = 9\ cm^2$

- Área lateral (área de 4 retângulos 6 cm por 3 cm):

  $A_L = 4 \cdot (6 \cdot 3) = 72 \rightarrow A_L = 72\ cm^2$

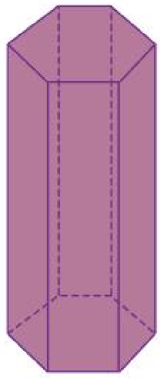
- Área total:

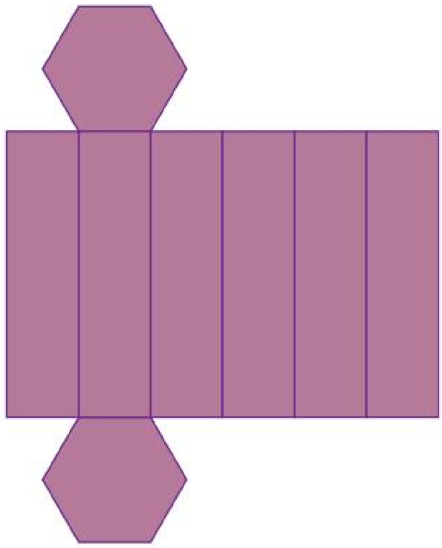
  $A_t = A_L + 2 \cdot A_b$

  $A_t = 72 + 2 \cdot 9 \rightarrow A_t = 90\ cm^2$

  Portanto, a área total desse prisma é igual a 90 cm².

2. Considere um prisma hexagonal regular em que a altura é igual a 8 cm e a medida da aresta da base é igual a 2 cm. Vamos calcular a área total desse prisma.





- Utilizando a relação que estabelece a área de um hexágono regular de lado *a*, temos:

  $A_b = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

  $A_b = 6 \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 6\sqrt{3}\ cm^2$

- Área lateral:

  $A_L = 6 \cdot a \cdot h$

  $A_L = 6 \cdot 2 \cdot 8 \Rightarrow A_L = 96\ cm^2$

- Cálculo da área total (considerando $\sqrt{3} \cong 1{,}73$):

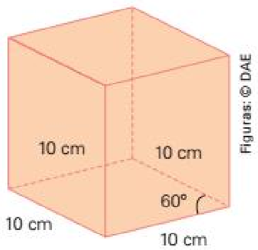
  $A_t = A_L + 2 \cdot A_b$

  $A_t = 96 + 2 \cdot 6\sqrt{3}$

  $A_t \cong 96 + 20{,}76 \Rightarrow A_t \cong 116{,}76\ cm^2$

Exercícios resolvidos

1. A base de um prisma reto é um losango cujos lados medem 10 cm e um dos ângulos internos mede 60°, como mostra a figura.



Se a medida da altura do prisma é igual à medida da maior diagonal de cada uma das bases, calcule:

a) a área de cada uma das bases.
b) a área lateral.
c) a área total.

a) Podemos dividir esse losango em dois triângulos equiláteros cujos lados medem 10 cm. Assim, a área procurada é igual a:

$$A = 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

b) A medida da maior diagonal do losango é igual a duas vezes a medida da altura de um triângulo equilátero cujos lados medem 10 cm, ou seja,

$2 = \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$ cm $= 10\sqrt{3}$ cm. Assim, a área lateral é igual a $4 \cdot 10\sqrt{3}\text{cm}^2 + 400\sqrt{3}\text{cm}^2 = 500\sqrt{3}\text{cm}^2$

c) $A_t = 2 \cdot 50\sqrt{3}\text{cm}^2 + 400\sqrt{3}\text{cm}^2$

2. Calcule a área total de um prisma triangular regular cujas arestas são todas iguais a x.

Esse prisma é formado por 2 triângulos equiláteros e 3 quadrados, todos com medida do lado igual a x cm. Assim:

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot x^2 = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6 \cdot x^2}{2}$$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{x^2(\sqrt{3}+6)}{2}\text{cm}^2$$

3. Uma caixa de bombons tem o formato de prisma hexagonal regular, cuja aresta da base mede 3 cm e a aresta lateral mede 4 cm. Calcule a área total desse prisma.

A área do hexágono regular da base é igual a 6 vezes a área de um triângulo equilátero, ambos com aresta medindo 3 cm. A área lateral é igual a 6 retângulos. Logo:

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot x^2 = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6 \cdot x^2}{2}$$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{x^2(\sqrt{3}+6)}{2}\text{cm}^2$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em um prisma hexagonal regular, as arestas da base medem $2\sqrt{3}$cm, e a área total é igual $156\sqrt{3}\text{cm}^2$. Determine a medida da altura desse prisma. 10 cm

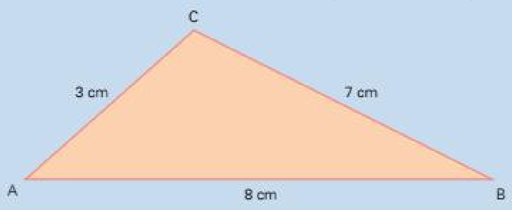
2. As bases de um prisma reto são triângulos retângulos cujos catetos medem 5 cm e 12 cm. A medida da altura é igual à medida das hipotenusas dos triângulos das bases. Calcule a área total desse prisma. 450 cm²

3. Em um prisma pentagonal regular, a medida das arestas das bases é 10 cm, e a altura mede 8 cm. Calcule a área lateral desse prisma. 400 cm²

4. A área de um triângulo qualquer pode ser calculada pela fórmula:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

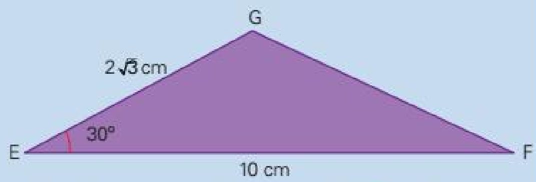
em que p é o semiperímetro do triângulo cujos lados medem a, b e c. Considere o triângulo ABC da figura:



a) Calcule a área do triângulo ABC. $6\sqrt{3}\text{cm}^2$

b) Calcule a área total de um prisma cuja altura mede 10 cm e cuja base seja o triângulo ABC. $(12\sqrt{3} + 180)\text{cm}^2$

5. A área de um triângulo também pode ser calculada pela seguinte fórmula: $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)$, sendo α a medida do ângulo formado pelos lados cujas medidas são a e b. Considere o triângulo EFG da figura.

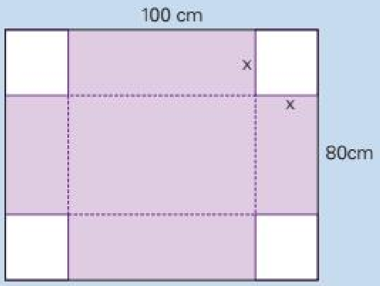


a) Calcule a área do triângulo EFG. $5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

b) Calcule a área lateral de um prisma cuja base é o triângulo EFG e cuja altura mede 12 cm. $(120 + 24\sqrt{3} + 24\sqrt{3}\text{cm}^2$

6. Para construir uma caixa sem tampa, uma pessoa dispõe de uma folha de papelão com formato retangular, cujas dimensões são 100 cm de comprimento e 80 cm de largura. Em cada um dos cantos dessa folha serão recortados quadrados cujos lados medem x cm, como mostra a figura. Em seguida, dobra-se na área tracejada e colam-se as arestas comuns com uma fita.

Figuras: © DAE

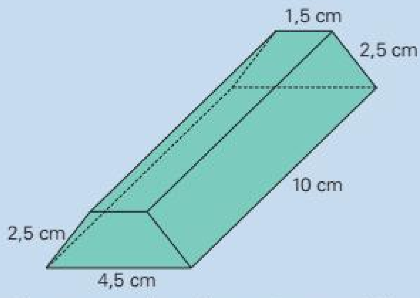


a) Qual será a área da superfície externa da caixa se $x = 20$ cm? a) 6 400 cm²

b) Qual deverá ser o valor de *x* para que a área da superfície externa da caixa seja igual a 7 100 cm²? b) 15 cm

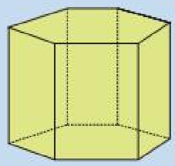
7. Em um prisma hexagonal regular, cuja altura mede 15 cm, a área lateral é igual ao dobro da área de cada uma das bases. Calcule a área total desse prisma. $1\,800\sqrt{3}$ cm²

8. Um chocolate é comercializado no formato de prismas retos trapezoidais, conforme mostra a figura.



Supondo que esses chocolates sejam envolvidos com papel alumínio de modo que não haja sobra de material, qual é a área de papel utilizada em cada chocolate? 122 cm²

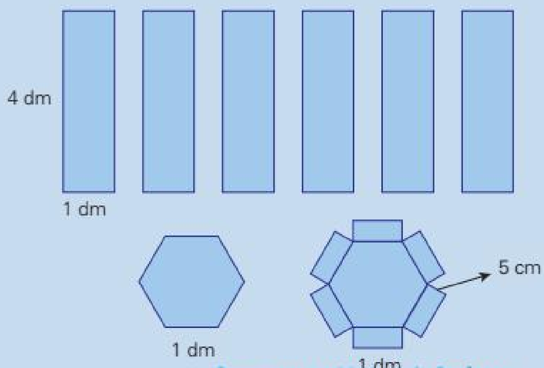
9. A figura mostra um prisma reto cujas bases são hexágonos convexos.



a) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos das faces do prisma hexagonal representado na figura? 3 600°

b) Qual é o número de diagonais desse prisma? 18

10. Para confeccionar uma caixa para presentes, uma pessoa utilizou o seguinte material.



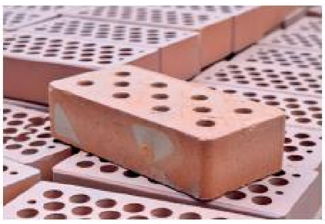
Respostas no Manual do Professor.

Utilizando cola para unir convenientemente as faces laterais e as bases, constrói-se uma caixa com o formato de um prisma hexagonal regular. Para confeccionar a tampa, serão utilizadas abas com 5 cm de largura.

a) Faça um desenho para representar a caixa após ser montada.

b) Calcule a área da quantidade de material utilizada para confeccionar a caixa. (Utilize a aproximação $\sqrt{3} \cong 1{,}730$ $\cong 32{,}19$ cm²

Paralelepípedo e cubo



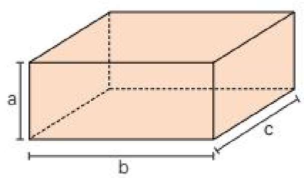
Petlia Roman/Shutterstock

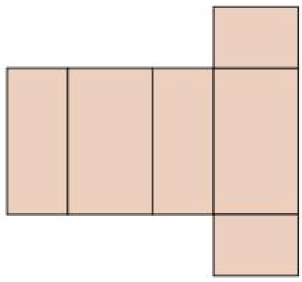
Christian Chan/Shutterstock

Tanto o paralelepípedo quanto o cubo são exemplos de prismas cujas formas são parecidas com objetos diversos. Assim, vamos detalhar as relações que permitem calcular não apenas a área de suas superfícies, como também as relações métricas envolvendo as medidas das arestas e diagonais.

Cálculo da área total do paralelepípedo retângulo e do cubo

A área total do paralelepípedo reto-retângulo pode ser determinada pela soma das áreas dos seis retângulos (suas faces), conforme planificação a seguir.



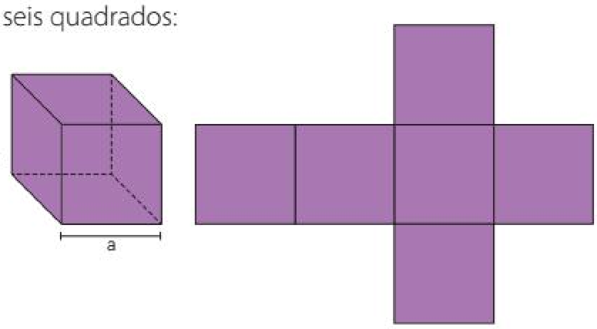


$$A_t = ab + ab + ac + ac + bc + bc$$
$$A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$
$$A_t = 2(ab + ac + bc)$$

A área total A_t de um paralelepípedo retângulo de dimensões *a*, *b*, e *c* é dada por:

$$\mathbf{A_t = 2\,(ab + ac + bc)}$$

Observando que o cubo é um paralelepípedo reto com as três dimensões iguais, podemos determinar a área total considerando a soma das áreas de seis quadrados:



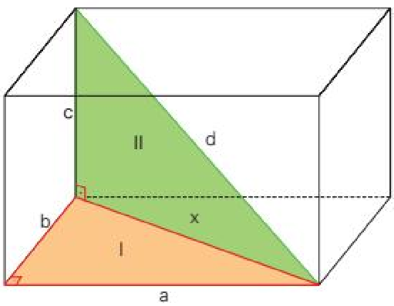
Figuras: © DAE

$$A_t = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$
$$A_t = 6a^2$$

A área total A_t de um cubo de aresta medindo *a* é dada por $\mathbf{A_t = 6a^2}$.

Cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo e do cubo

Na figura a seguir, o paralelepípedo retângulo representado tem dimensões *a*, *b* e *c*. Nesse paralelepípedo, vamos considerar como *d* a medida da diagonal do paralelepípedo e *x* a medida da diagonal de uma das faces do paralelepípedo:



Observando o triângulo retângulo (I) na face do paralelepípedo e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(I)}$$

Já no triângulo retângulo (II), também pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

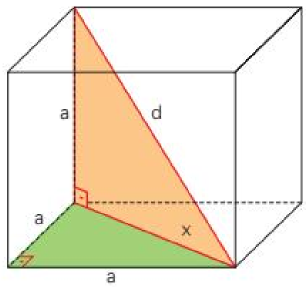
$$d^2 = x^2 + c^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II):

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \mathrm{d} = \sqrt{a^a + b^2 + c^2}$$

A medida da diagonal *d* de um paralelepípedo retângulo de arestas medindo *a*, *b* e *c* é dada por:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Como o cubo é um caso particular do paralelepípedo retângulo, na figura a seguir poderíamos inicialmente obter a medida da diagonal *x* da face e depois obter a medida da diagonal do cubo. Porém, basta considerar a fórmula da diagonal do paralelepípedo, em que as três arestas têm a mesma medida *a*, ou seja:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$
$$d = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$$

A medida da diagonal *d* de um cubo de arestas medindo *a* é dada por:

$$d = a\sqrt{3}$$

Exemplos:

1. Dado um paralelepípedo reto de arestas medindo 10 cm, 8 cm e 6 cm, vamos calcular a medida da diagonal e a área total desse sólido.

- Cálculo da medida da diagonal:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$d = \sqrt{10^2 + 8^2 + 6^2}$

$d = \sqrt{200} \Rightarrow d = 10\sqrt{2}$ cm

- Cálculo da área total:

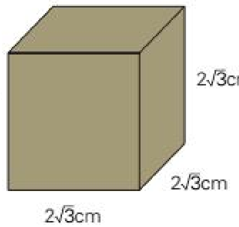
$A_t = 2(ab + ac + bc)$

$A_t = 2 \cdot (10 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 8 \cdot 6)$

$A_t = 376 \text{ cm}^2$

2. Considerando o cubo de aresta medindo $2\sqrt{3}$ cm, conforme indicado na figura, vamos determinar as medidas da diagonal do cubo e também da área total desse cubo.

Figuras: © DAE



- Cálculo da medida da diagonal do cubo:

$d = a\sqrt{3}$

$d = 2\sqrt{3}\sqrt{3} \Rightarrow d = 6$ cm

Cálculo da área total:

$A_t = 6a^2$

$A_t = 6 \cdot (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow A_t = 72 \text{ cm}^2$

Exercícios resolvidos

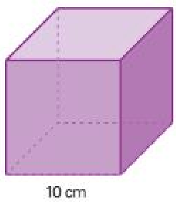
1. A área total de um cubo aumenta 96 cm² ao aumentar em 2 cm suas arestas. Qual é a medida da aresta do cubo antes do aumento?

Sendo x a medida da aresta antes do aumento, temos:

$6 \cdot (x + 2)^2 = 6 \cdot x^2 + 96 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 16 \therefore$
$\therefore x = 3$ cm

Assim, a medida da aresta do cubo antes do aumento é de 3 cm.

2. No cubo da figura, as arestas medem 10 cm. Calcule:



a) a medida das diagonais das faces.

b) a medida das diagonais do cubo.

a) A diagonal d da face de um cubo de lado x é dada por $d = x\sqrt{2}$. Assim, $d = 10\sqrt{2}$ cm.

b) A diagonal D de um cubo de lado x é dada por $D = x\sqrt{3}$. Assim, $D = 10\sqrt{3}$ cm.

3. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são, em metros, expressas por três números pares consecutivos. Se a área total desse paralelepípedo é igual a 376 m², calcule a medida de suas diagonais.

Sendo $x - 2$, x e $x + 2$ as dimensões do paralelepípedo, temos:

$376 = 2 \cdot [(x - 2) \cdot x + (x + 2)(x + 2) + x(x + 2)] \rightarrow$

$\rightarrow 188 = 3x^2 - 4 \rightarrow x^2 = 64 \therefore x = 8$ m

Se $x = 8$, então as arestas medirão $(8 - 2)$ cm, 8 cm e $(8 + 2)$ cm, isto é, 6 cm, 8 cm e 10 cm.

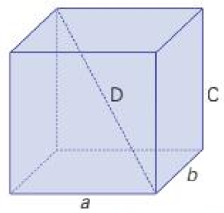
Assim, temos:

$d = \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2}$

$d = \sqrt{200}$

$d = 10\sqrt{2}\ \alpha = 10\sqrt{2}$ cm

4. Considere que a medida da diagonal do cubo, conforme representada na figura a seguir, seja D unidades de comprimento. Obtenha uma expressão que forneça a área total A_t desse cubo em função da diagonal D.



- Inicialmente vamos obter a medida da aresta a de um cubo em função de sua diagonal D:

$$D = a\sqrt{3}$$

$$\frac{D}{\sqrt{3}} = a$$

- Agora expressamos a área em função da da diagonal:

$$A_t = 6 \cdot a^2$$

$$A_t = 6 \cdot \left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$A_t = 6 \cdot \frac{D^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A_t = 2 \cdot D^2$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Se a soma das medidas das arestas de um cubo é igual a 96 cm, quais as medidas das diagonais das faces desse cubo? $8\sqrt{2}$ cm

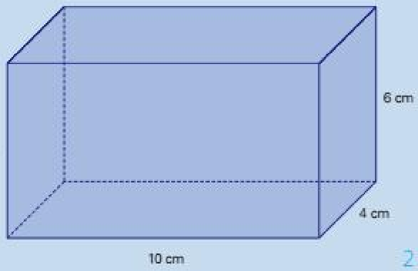
2. Em um cubo, as diagonais das faces medem 4 dm. Calcule:

a) a medida das diagonais desse cubo. $2\sqrt{6}$ dm

b) a área total desse cubo. 48 dm²

3. Em um paralelepípedo retângulo, as dimensões são 10 cm, 6 cm e 4 cm. Calcule:

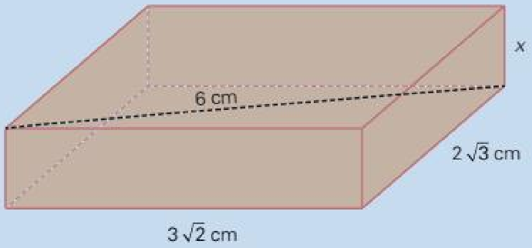
Figuras: © DAE



$2\sqrt{38}$ cm

a) a medida das diagonais do paralelepípedo.

b) a área total do paralelepípedo. b) 248 cm²



4. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são $2\sqrt{3}$cm $3\sqrt{3}$ cm e *x*. Determine o valor de *x* sabendo que as diagonais desse paralelepípedo medem 6 cm. $\sqrt{6}$ cm

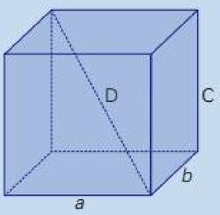
5. Em um paralelepípedo retângulo, as dimensões são a, *b* e *c*.

a) Sendo D a medida das diagonais do paralelepípedo, expresse D^2 em função de a, *b* e *c*. $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

b) Sendo S a área total do paralelepípedo, expresse S em função de *a*, *b* e *c*. $S = 2ab + 2ac + 2bc$

c) Desenvolva a expressão $(a + b + c)^2$. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

d) Escreva $(a + b + c)^2$ em função de D^2 e S. $(a + b + c)^2 = D^2 + S$



6. Se aumentarmos a medida das arestas de um cubo em 20%, qual será o aumento percentual:

a) da medida das diagonais desse cubo? 20%

b) da área total desse cubo? 44%

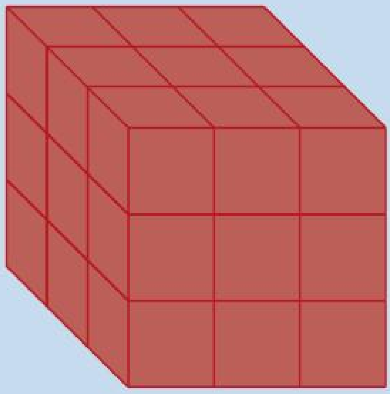
7. Um cubo cujas arestas medem $2\sqrt{3}$cm e um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são dadas, em cm, por três números diretamente proporcionais a 2, 3 e 4, têm a mesma área total. Calcule:

a) a área total do cubo. 312 cm²

b) as dimensões do paralelepípedo. $2\sqrt{6}$ cm, $3\sqrt{6}$ cm e $4\sqrt{6}$ cm

c) a medida das diagonais do paralelepípedo. $\sqrt{174}$ cm

8. Um cubo, cujas arestas medem 30 cm, foi pintado de vermelho e, em seguida, cortado em cubos menores, cujas arestas medem 10 cm, como mostra a figura.



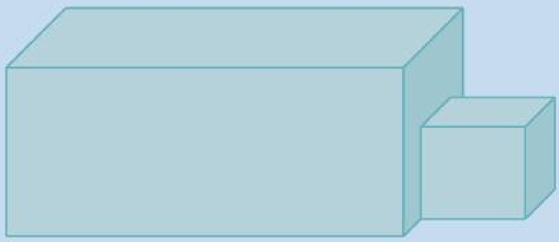
a) Qual é o número total de cubos menores que foram obtidos? 27

b) Quantos cubos menores têm apenas uma face pintada de vermelho? 6

c) Quantos cubos menores têm exatamente duas faces pintadas de vermelho? 12

d) Quantos cubos menores têm exatamente três faces pintadas de vermelho? 8

9. Com base na figura a seguir, invente e resolva um problema relacionando um prisma regular de base quadrada e um cubo. Resposta pessoal.



EXPLORANDO Resolva os exercícios no caderno.

Orientações e respostas no Manual do Professor.

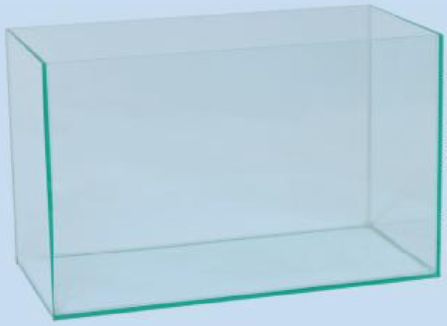
Junto com alguns colegas, explore o que foi estudado a respeito do paralelepípedo retângulo, conforme os seguintes itens:

chuckstock/Shutterstock.com

Exemplo de uma sala de aula.

1. As salas de aula geralmente têm a forma de um grande paralelepípedo retângulo. Com o auxílio de uma trena, obtenha, em sua sala de aula, as medidas:
   a) do comprimento.
   b) da largura.
   c) da altura.
2. Calcule a área total de sua sala de aula.
3. Considere que as paredes e o teto de sua sala de aula deverão ser pintados. Quantos metros quadrados serão pintados? Não esqueça de excluir janelas e portas.
4. A turma decidiu construir um aquário na sala de aula. Ele terá o formato de um paralelepípedo reto-retângulo. Decida as medidas do aquário e calcule a área do vidro que será utilizado.

   Obs.: pesquise sobre os cuidados que devem ser tomados em relação à construção de um aquário e apresente-os à classe.

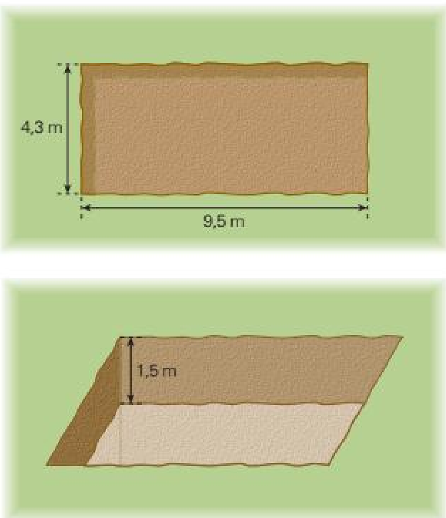


Discovod/Shutterstock.com

Modelo de aquário para a atividade proposta.

Volume do prisma

Uma piscina será construída em um terreno plano. Para ter uma boa ideia de como será a piscina, na ilustração abaixo evidenciamos a vista superior e o "corte" feito no terreno.

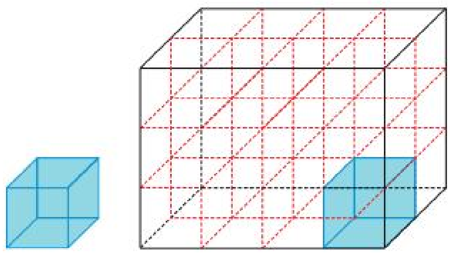


Figuras: © DAE

Com as medidas indicadas, teremos de calcular aproximadamente o volume de terra que será retirado e também a capacidade dessa piscina. Para tanto, precisamos saber como calcular o volume de um prisma, isto é, medir o "espaço" que um prisma ocupa.

Assim como ocorreu com medidas lineares (comprimentos) e medidas de superfícies (áreas), também para medir o espaço (volume) ocupado por um objeto estabelecemos uma unidade de comparação. A unidade utilizada é um cubo unitário.

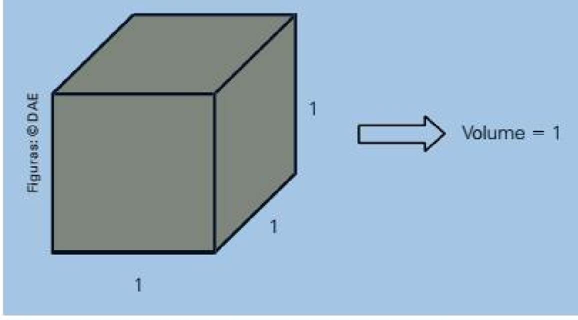
Se utilizarmos o cubo como unidade de medida de volume, podemos obter o volume do sólido (paralelepípedo retângulo) representado a seguir:



Comparando o cubo com o paralelepípedo, podemos dizer que se a unidade de volume do cubo é U, então o volume V do paralelepípedo representado será

$$V = 24\ U$$

Um cubo de aresta unitária (medida de 1 unidade de comprimento) é o cubo unitário. O volume desse cubo é 1:



Assim, teremos, para cada unidade de comprimento, uma unidade correspondente de volume, ou seja:

- Um cubo de 1 cm de aresta tem 1 cm^3 de volume.
- Um cubo de 1 dm de aresta tem 1 dm^3 de volume.
- Um cubo de 1 m de aresta tem 1 m^3 de volume.

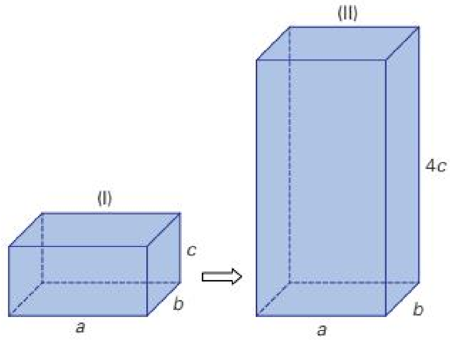
Podemos dizer que o volume de um sólido qualquer será o número que expressa a quantidade de vezes que o sólido considerado contém o cubo unitário. Como nem sempre deparamos com sólidos que tenham formas "regulares", determinar o número de vezes que eles contêm o cubo unitário não é evidente. Necessitamos, então, estabelecer fórmulas para o cálculo do volume de determinados sólidos geométricos.

Considerando que um cubo unitário tem volume 1 e representando esse fato por $V(1, 1, 1) = 1$, vamos obter o volume de paralelepípedos retângulos. Note que qualquer paralelepípedo retângulo tem três medidas: comprimento (a), largura (b) e altura (c). Representaremos esse volume por V(a, b, c).

Observe que o volume de um paralelepípedo reto é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isso significa que, mantendo fixas duas de suas dimensões e multiplicando a outra dimensão por um número natural não nulo n, o volume também será multiplicado por n.

Vamos analisar alguns exemplos.

1. Na ilustração a seguir, vamos considerar, por exemplo, um bloco retangular de medidas a, b e c. Fixando as medidas a e b, enquanto multiplicamos c por 4, teremos outro bloco retangular à direita.



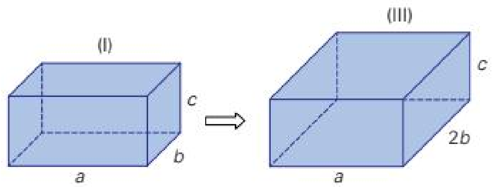
Pela figura, podemos dizer que o volume do sólido I é proporcional ao volume do sólido II. A razão de proporção é 4:

$$\frac{V(a, b, 4c)}{V(a, b, c)} = 4$$

$$V(a, b, c) = 4 \cdot V(a, b, c)$$

Assim, o sólido II tem volume 4 vezes o volume do sólido I.

2. Agora, vamos considerar um bloco retangular I de medidas a, b e c em que fixamos as medidas a e c e multiplicamos a medida b por 2. Obtemos, assim, o bloco retangular III.



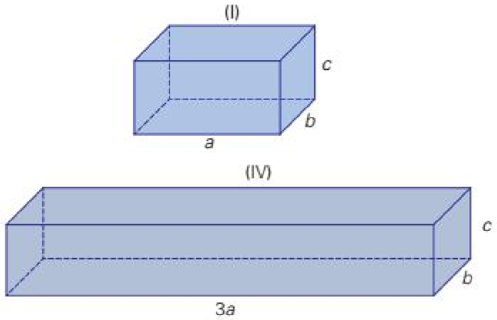
- Conforme a ilustração, podemos dizer que o volume do sólido III é proporcional ao volume do sólido I. A razão de proporção é 2:

$$\frac{V(a, 2b, 4c)}{V(a, b, c)} = 2$$

$$V(a, 2b, c) = 2 \cdot V(a, b, c)$$

Assim, o sólido III tem volume 2 vezes o volume do sólido I.

3. Conforme ilustração a seguir, vamos considerar o bloco retangular I de medidas a, b e c e o bloco IV, cujas medidas são $3a$, b e c. Fixamos b e c, e multiplicamos a por 3:



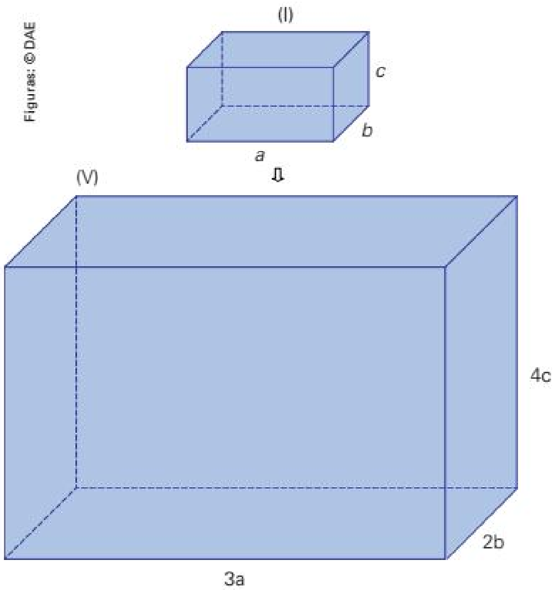
- Podemos dizer que o volume do sólido IV é proporcional ao volume do sólido I. A razão de proporção é 3:

$$\frac{V(3a, b, 4c)}{V(a, b, c)} = 3$$

$$V(3a, b, c) = 3 \cdot V(a, b, c)$$

4. A partir do bloco retangular I de medidas a, b e c, construímos um bloco retangular V cujas arestas têm medidas multiplicadas respectivamente por 3, 2 e 4, conforme figura:

Figuras: © DAE



O volume do sólido V é o volume do sólido I multiplicado por 24, ou seja:

$V(3a, 2b, 4c) = 3 \cdot V(a, 2b, 4c)$

$V(3a, 2b, 4c) = 3 \cdot 2 \cdot V(a, b, 4c)$

$V(3a, 2b, 4c) = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (a, b, c)$

$V(3a, 2b, 4c) = 24 \cdot V(a, b, 4c)$

O que observamos nesses exemplos, de forma intuitiva, para números naturais também vale quando as medidas das arestas são representadas por números reais. Podemos utilizar o raciocínio exemplificado para calcular o volume de um paralelepípedo retangular em função de um cubo unitário. Assim, sendo a, b e c as medidas das arestas de um paralelepípedo retangular, temos que seu volume é:

$V(a, b, c) = V(a \cdot 1, b, c)$

$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = a \cdot V(1, b \cdot 1, c)$

$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b \cdot 1, c)$

$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c)$

$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c \cdot 1)$

$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \cdot V(1, 1, 1)$

O volume de um paralelepípedo retangular é o produto das medidas reais positivas de suas arestas. Em símbolos, sendo V o volume e a, b e c as medidas das arestas, temos:

$\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$

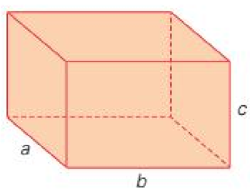
Como o volume do cubo unitário é 1, temos que:

$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \cdot V(1, 1, 1)$

$V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \cdot 1 \Rightarrow V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$

Observações:

1. Considerando como base, por exemplo, a face do paralelepípedo retangular que tem medidas a e b, sendo $A_b = a \cdot b$ a área dessa base, a medida c representará a altura h do sólido. Assim, podemos escrever:

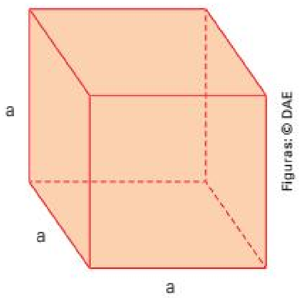


$V = a \cdot b \cdot c$

$V = (a \cdot b) \cdot c \rightarrow V = A_b \cdot h$

Dessa forma, podemos dizer que o volume de um paralelepípedo retangular é o produto da área da base pela medida da altura. Esse resultado será utilizado para determinar o volume de um prisma.

2. Como um cubo é um paralelepípedo retangular em que as arestas têm medidas iguais, temos que:



$V = a \cdot b \cdot c$

$V = a \cdot a \cdot a \rightarrow V = a^3$

O volume de um cubo cuja aresta mede a é o cubo da medida dessa aresta. Daí utilizarmos a expressão "ao cubo" para a potência de exponente três.

Vamos calcular agora o volume de terra que deve ser retirado do solo para fazer a piscina, conforme situação apresentada anteriormente.

- Como o "buraco" tem a forma de um paralelepípedo retangular, vamos calcular seu volume a partir das medidas das arestas:

  $V = a \cdot b \cdot c$

  $V = (4,3\ \text{m}) \cdot (9,5\ \text{m}) \cdot (1,5\ \text{m})$

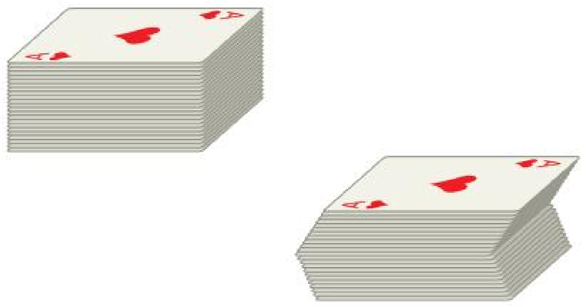
  $V = 61,275\ \text{m}^3$

  Observação:

  Considerando que um recipiente oco que ocupa um espaço de 1 m³ tem capacidade de 1 000 litros, podemos dizer que a capacidade máxima do "buraco" (piscina a ser construída) no exemplo anterior é de 61 275 litros.

Volume do prisma e princípio de Cavalieri

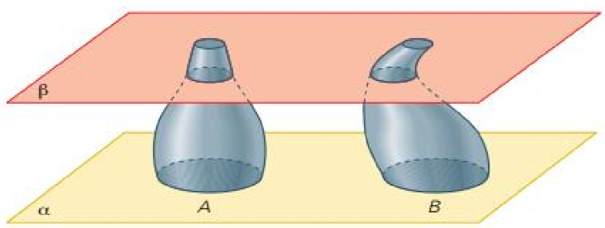
Embora o **princípio de Cavalieri** envolva conceitos mais avançados sobre medidas, ele será útil aqui para compreender como obter o volume de um prisma a partir do volume de um paralelepípedo retângulo visto anteriormente. Antes de formalizar esse princípio, vamos considerar duas pilhas de cartas de baralho, como sugerem as ilustrações a seguir.



Ora, as duas pilhas são formadas por cartas de mesmo tamanho, e cada pilha tem a mesma quantidade de cartas. O que muda de uma pilha para outra é a forma de empilhar as cartas. Intuitivamente acreditamos que as duas pilhas de cartas ocupam o mesmo espaço, isto é, têm o mesmo volume. Além disso, se imaginarmos um plano horizontal seccionando as duas pilhas, as interseções desse plano com as pilhas serão formadas por retângulos de mesma área (área de uma carta). Esse tipo de raciocínio leva ao princípio de Cavalieri. Adotaremos esse princípio sem demonstração.

Vamos imaginar outra situação que permitirá, mais uma vez de forma intuitiva, compreender o que diz esse importante princípio que enunciaremos a seguir.

Consideremos que os dois sólidos geométricos A e B, representados a seguir, estejam apoiados em um mesmo plano horizontal α. Vamos supor agora que esses dois sólidos sejam cortados por um plano paralelo ao plano α. A esse plano paralelo chamaremos plano β.



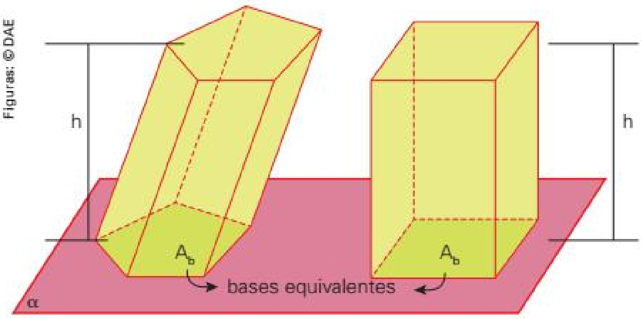
Se **qualquer** plano β paralelo ao plano α "cortar" os dois sólidos em seções de mesma área, os dois sólidos terão o mesmo volume. Chegamos ao princípio enunciado pelo italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647), conhecido por princípio de Cavalieri:

> São dados dois sólidos e um plano. Se qualquer plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo superfícies de mesma área (superfícies equivalentes), então esses sólidos têm o mesmo volume (sólidos equivalentes).

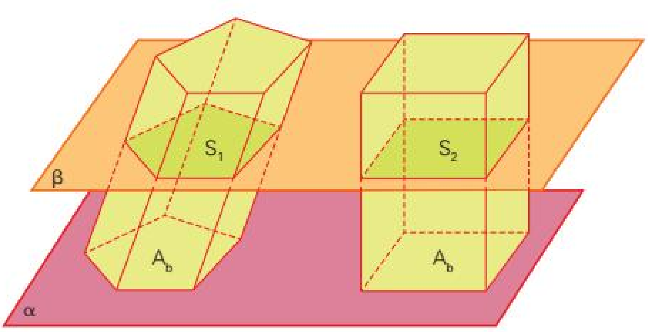
Note que esse princípio exige que as áreas sejam iguais qualquer que seja o plano paralelo ao plano dado seccionando os sólidos. Decorre disso que as bases desses dois sólidos devem ter a mesma área e também que esses dois sólidos precisam ter a mesma altura.

Utilizando o princípio de Cavalieri e o volume de um paralelepípedo retângulo, podemos agora obter o volume de um prisma. Assim, consideremos a seguir um prisma e um paralelepípedo retângulo de mesma altura *h* e bases com a mesma área A_b (as bases contidas no plano α).

Figuras: © DAE



Todo plano horizontal β, paralelo ao plano α, que secciona esses dois sólidos, determina no prisma uma seção de área S_1, que é igual à área de sua base, e no paralelepípedo uma seção de área S_2, que é igual à área de sua base.



Como as áreas das bases do prisma e do paralelepípedo são iguais, temos também que:

$$S_1 = S_2 = A_b$$

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume:

volume do prisma = volume do paralelepípedo

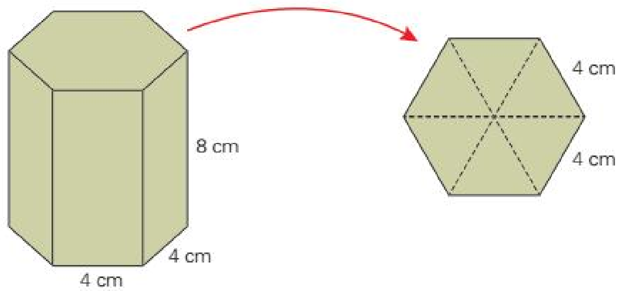
Neste capítulo, fizemos a observação de que o volume de um paralelepípedo retângulo é a área da base multiplicada pela altura. Logo:

volume do prisma = (área da base) · (altura)

> O volume **V** de um prisma de altura *h* e área da base A_b é dado por:
>
> $$V = A_b \cdot h$$

Exemplos:

1. Vamos calcular o volume de um prisma regular hexagonal, sabendo que sua altura é 8 cm e que a aresta de sua base mede 4 cm.



- Cálculo da área da base (área de um hexágono regular):

$$A_b = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

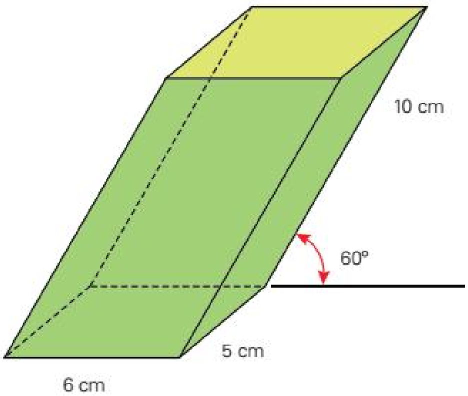
- Cálculo do volume:

$$V = A_b \cdot h$$

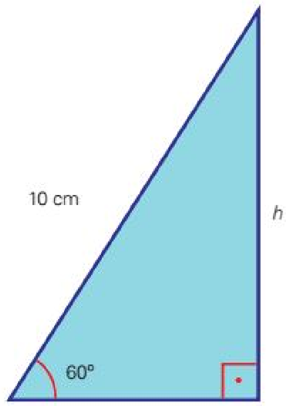
$$V_b = 24\sqrt{3} \cdot 8 \Rightarrow V = 192\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

2. Na figura a seguir, temos representado um prisma quadrangular oblíquo. Vamos calcular o volume desse prisma, considerando que a base é um retângulo.

Figuras: © DAE



- Como o ângulo que o prisma forma com o plano da base tem medida 60º e a aresta lateral mede 10 cm, podemos determinar a altura *h* desse prisma por meio da razão trigonométrica seno de um ângulo agudo num triângulo retângulo:



$$\text{sen } 60° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 5\sqrt{3}\text{cm}$$

- Cálculo do volume, observando que a área da base é a área de um retângulo:

$$V = A_b \cdot h$$

$$V_b = (6 \cdot 5) \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow h = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule o volume de um cubo cuja área total é igual a 150 dm².

Sendo *x* a medida das arestas do cubo, temos:

$6 \cdot x^2 = 150 \Rightarrow x^2 = 25 \therefore x = 5$ dm

$V_{CUBO} = 5^3 \Rightarrow V_{CUBO} = 125\ \text{dm}^3$

2. Em um prisma hexagonal regular, a área de cada face lateral é igual à metade da área de cada uma das bases. Se a altura do prisma mede 9 cm, calcule seu volume.

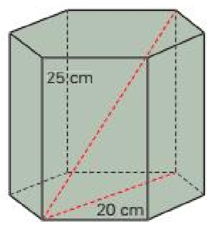
Sendo *x* a medida das arestas da base, temos:

$$x \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \rightarrow x\sqrt{3} = 12 \therefore$$

$$\therefore x = 4\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$$V_{PRISMA} = \frac{6 \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 9\ V = 648\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

4. Em um prisma hexagonal regular, as maiores diagonais medem 25 cm, e as maiores diagonais das bases medem 20 cm, como mostra a figura.



Obtenha o volume desse prisma. (Utilize a aproximação $\sqrt{3} \cong 1{,}73$.)

Sendo *h* a medida da altura do prisma, temos:

$25^2 = 20^2 = H^2 \therefore H = 15$ cm

O hexágono da base pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros de lado 10 cm. Assim:

$$V_{PRISMA} = 6 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 = 2\,250\sqrt{3} \cong 3\,892{,}5$$

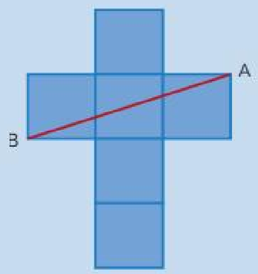
$$V_{PRISMA} \cong 3\,892{,}5\ \text{cm}^3$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o volume de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 4 cm, 10 cm e 15 cm.
600 cm^3

2. A figura a seguir mostra um cubo planificado.



Figuras: © DAE

Área total = 300 u^2

Volume = $250\sqrt{2}$ u^3

Se a distância entre os pontos A e B é igual a $10\sqrt{5}$, calcule a área total e o volume desse cubo.

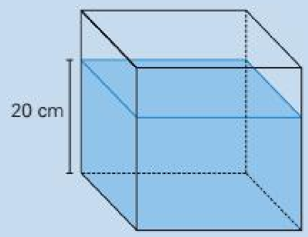
3. Um cubo, cujas arestas medem 20 cm, e um paralelepípedo, cujas dimensões são em cm, expressas por 10, 50 e x, são equivalentes.

a) O que significa dizer que dois sólidos são equivalentes? Possuem o mesmo volume.

b) Qual é o valor de x? 16 cm

c) Qual é a área total do paralelepípedo? 2 920 cm^2

4. Um cubo, cujas arestas medem 30 cm, está parcialmente preenchido com água, como mostra a figura.



Se a água contida no cubo for transferida para um paralelepípedo retângulo cujas dimensões da base são 20 cm e 10 cm e cuja altura mede 100 cm, decida se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

a) A água não atingirá a metade da altura do paralelepípedo. F

b) A água transbordará, pois a capacidade do paralelepípedo é menor que a capacidade do cubo. F

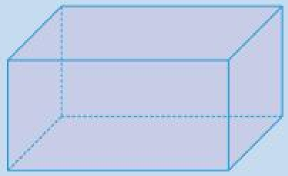
c) A água atingirá mais de três quartos da altura do paralelepípedo. V

5. Sabe-se que duas das dimensões de um paralelepípedo retângulo são iguais entre si, que a área total é igual a 210 dm^2 e que a soma das dimensões é igual a 18 dm.

a) Quais são as dimensões do paralelepípedo? a) As dimensões do paralelepípedo podem ser 5 dm, 5 dm e 8 dm ou 7 dm, 7 dm e 4 dm.

b) Calcule o volume do paralelepípedo.

b) O volume do paralelepípedo pode ser igual a 200 dm^3 ou 196 dm^3.



6. Responda:

a) Qual sólido tem volume maior: um cubo de arestas medindo 5 cm ou um paralelepípedo reto em que as arestas medem 2 cm, 4 cm e 6 cm?

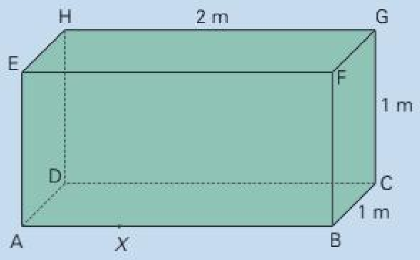
O volume do cubo é maior que o volume do paralelepípedo reto.

b) Qual é a medida da aresta de um cubo que tem o mesmo volume de um paralelepípedo reto em que as arestas medem 2 cm, 4 cm e 8 cm? b) 4 cm.

7. Em um paralelepípedo retângulo, as dimensões, em metros, formam uma progressão aritmética. Se a soma das dimensões é igual a 27 metros e a área total do paralelepípedo é igual a 454 metros quadrados, calcule seu volume. 585 m^3

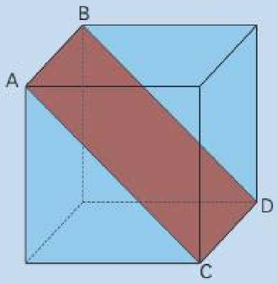
8. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são 2 m, 1 m e 1 m, como mostra a figura a seguir.

Figuras: © DAE



O ponto X pertence ao segmento AB e AX = x. Calcule o valor de x de modo que XC = XH. 0,75 m

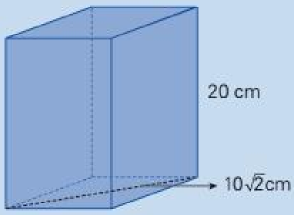
9. A interseção entre um plano e um cubo é o retângulo ABCD, como mostra a figura.



Se o perímetro do retângulo ABCD é igual a $(4 + 4\sqrt{2}m)$, calcule o volume do cubo. 8 m^3

10. Elabore um problema sobre a equivalência de volumes de um cubo e de um paralelepípedo. Resolva-o e apresente-o para a turma. Resposta pessoal.

11. Em um prisma quadrangular regular, as diagonais das bases medem $10\sqrt{5}$ e a altura mede 20 cm, conforme a figura. Calcule o volume desse prisma. 2 000 cm^3



12. Em um prisma hexagonal regular, as arestas da base medem 20 cm e a medida da altura é igual à medida do apótema da base. Calcule:

a) a área de cada uma das bases. a) $600\sqrt{3}$ cm^3

b) a medida da altura do prisma. b) $10\sqrt{3}$ cm^3

c) o volume do prismas. c) 18 000 cm^3

13. Em uma piscina, cujas dimensões são 10 metros de comprimento, 6 metros de largura e 1,5 metro de profundidade, a água foi tratada com cloro. Se para cada 1000 litros de água colocam-se 10 gramas de cloro, calcule a massa de cloro necessária para tratar toda a água da piscina. 0,9 kg

14. A área lateral de um prisma quadrangular regular é igual a 1600 cm^2, e o volume é igual a 10 000 cm^3. Calcule:

a) a área de cada uma das bases. 625 cm^2

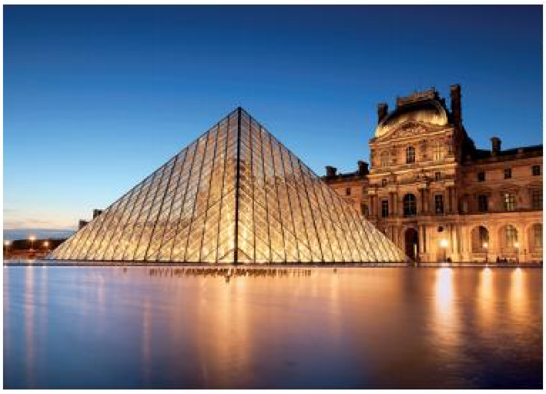
b) a área total. 2 850 cm

CAPÍTULO 12 PIRÂMIDES

Nas duas ilustrações a seguir, temos pirâmides construídas em épocas e em locais diferentes: é o contraste entre o antigo e o novo. Foram erguidas também com objetivos completamente diferentes.


Robertharding/Alamy/Fotoarena

Necrópole de Gizé (Gizé, Egito), onde estão localizadas as pirâmides de Quéops, Quéfren e Miquerinos, construídas por volta de 2700 a.C. Foto de 2015.

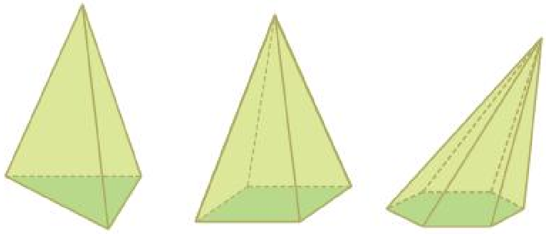

Sean Hsu/Shutterstock.com

Pirâmide do Louvre (Paris, França), construída em 1989. Foto de 2015.

Considerando, por exemplo, a pirâmide de Quéops, quais são suas dimensões? Qual é o volume ocupado por essa pirâmide? Qual a área total da pirâmide francesa?

Para responder a essas e outras possíveis questões relacionadas às construções dessas pirâmides, vamos estudar os poliedros denominados pirâmides.

Observe, a seguir, a representação de algumas pirâmides:



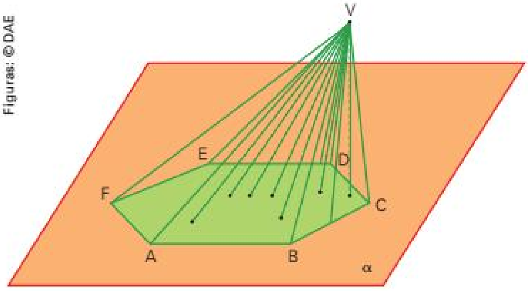
pirâmide triangular pirâmide quadrada pirâmide hexagonal

Veremos em seguida como obter uma pirâmide, quais são suas características e seus elementos. Assim como ocorreu com o prisma, o nosso interesse maior está na determinação das áreas e do volume de uma pirâmide.

Pirâmide e seus elementos

Na figura a seguir, temos um polígono convexo ABCDEF de seis lados num plano α e um ponto V fora desse plano.

Figuras: © DAE

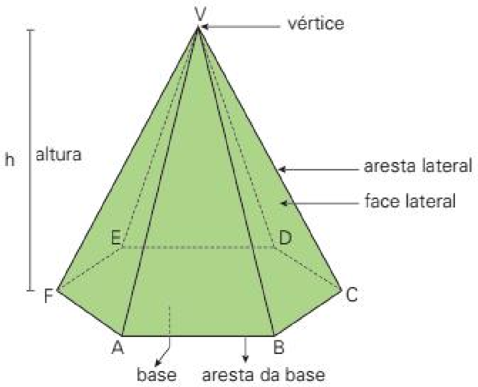


Para obter uma pirâmide, precisamos tomar segmentos de reta, todos com uma extremidade no ponto V e outra extremidade nos pontos do polígono (região poligonal). A reunião de todos os possíveis segmentos assim construídos é um sólido geométrico denominado **pirâmide**.

Note que a pirâmide, como citado anteriormente, é um poliedro. Esse poliedro possui uma face contida no plano α (base da pirâmide) e outras faces, que são triângulos cujos lados são obtidos ligando-se o ponto V com vértices pertencentes ao polígono (linha poligonal) contido em α.

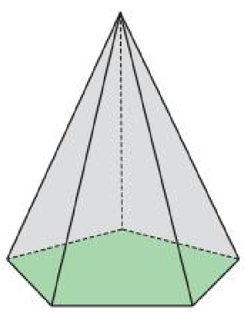
Vamos identificar numa pirâmide alguns de seus elementos:

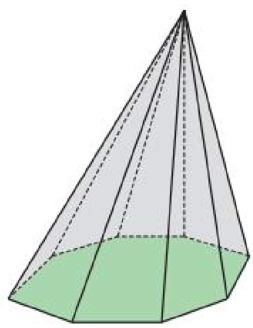
Figuras: © DAE



- **Base**: é o polígono convexo situado no plano α.
- **Vértice**: é o ponto V não pertencente ao plano α.
- **Arestas da base**: são os lados do polígono que forma a base.
- **Arestas laterais**: são os segmentos AV, BV, CV, DV, EV e FV.
- **Faces laterais**: são os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEF e VFA.
- **Altura**: é a distância do vértice da pirâmide ao plano da base.

Assim como os prismas, as pirâmides também podem ser designadas com base em certas características, tais como o polígono que forma a base. Observe os exemplos:


pirâmide pentagonal


pirâmide octogonal

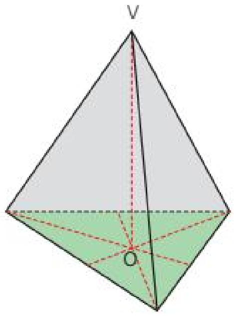
Observação:

Como a base de uma pirâmide é um polígono, podemos conceber quantos polígonos quisermos conforme imaginemos sua base.

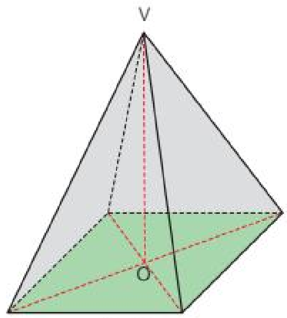
Pirâmides regulares

Se o polígono da base de uma pirâmide é um polígono convexo regular (medidas das arestas iguais) e as arestas laterais são congruentes entre si, a pirâmide é denominada **pirâmide regular**.

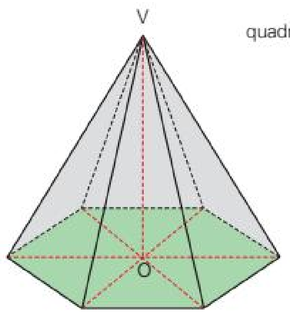
São exemplos de pirâmides regulares:



pirâmide triangular regular



pirâmide quadrangular regular



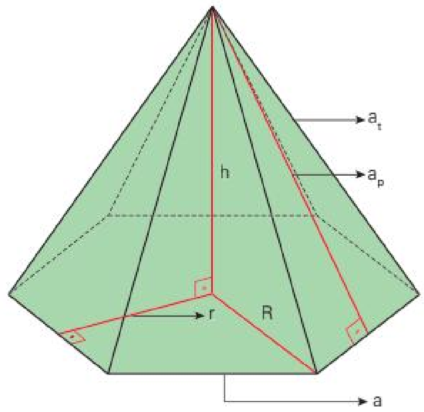
pirâmide hexagonal regular

São características de uma pirâmide regular:

- As faces laterais são triângulos isósceles congruentes.
- A projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro do polígono da base.

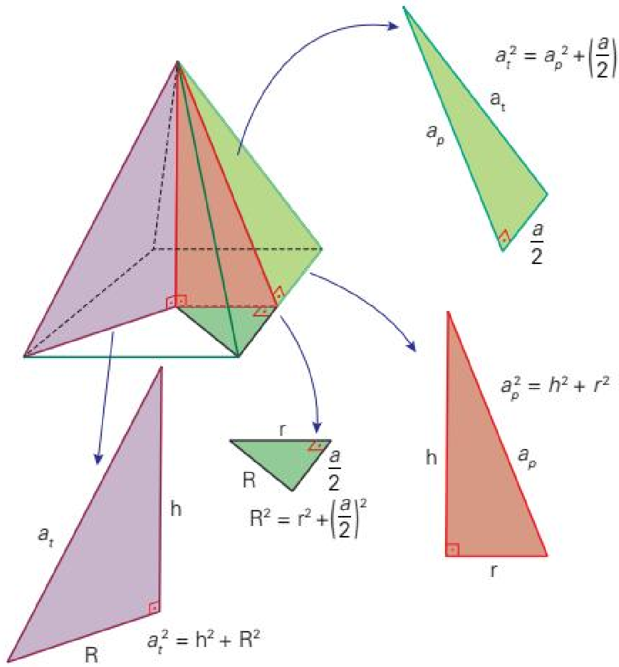
O nosso estudo concentra-se em pirâmides regulares. Por isso destacamos a seguir, em uma pirâmide regular, alguns elementos importantes que auxiliarão no cálculo da área e do volume de pirâmides:

Figuras: © DAE



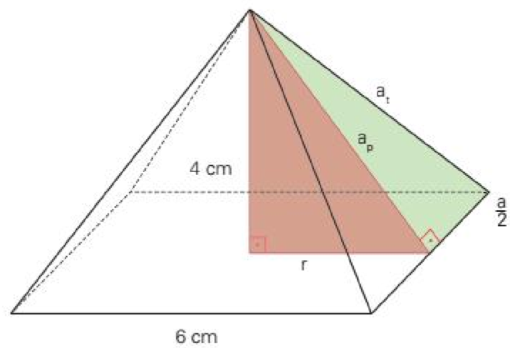
- ***h*** (altura da pirâmide): segmento que liga o vértice da pirâmide ao centro do polígono da base.
- ***r*** (apótema da base da pirâmide): segmento que liga o centro do polígono da base com o ponto médio da aresta da base (raio da circunferência inscrita ao polígono da base).
- $\boldsymbol{a_p}$ (apótema da pirâmide): segmento que liga o vértice da pirâmide ao ponto médio da aresta da base (altura do triângulo isósceles correspondente à face lateral).
- $\boldsymbol{a_L}$ (aresta lateral da pirâmide): medida do segmento que liga o vértice da pirâmide ao vértice do polígono da base.
- ***a*** (aresta da base da pirâmide): lado do polígono da base da pirâmide.
- **R**: raio da circunferência que circunscreve o polígono da base.

Em qualquer uma das pirâmides regulares destacadas anteriormente, podemos obter relações métricas entre as medidas de alguns desses elementos. Para facilitar a visualização dessas relações, vamos considerar uma pirâmide regular em que destacamos quatro triângulos retângulos. Nesses triângulos retângulos, considerando o teorema de Pitágoras, obtemos relações métricas envolvendo os elementos citados.



Exemplo:

Numa pirâmide quadrangular regular, o lado da base mede 6 cm e a altura 4 cm. Vamos calcular a medida do apótema da pirâmide e também a medida da aresta lateral dessa pirâmide.



- A altura, o apótema da base e o apótema da pirâmide formam um triângulo retângulo, tal que:

$$a_p^2 = r^2 + h^2$$

$$a_p^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow a_p = 5\text{ cm}$$

- A aresta lateral, o apótema da pirâmide e a metade da medida da aresta da base formam um triângulo retângulo, tal que:

$$a_L^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a_p^2$$

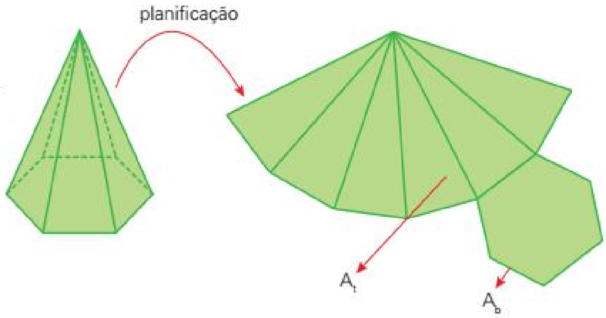
$$a_L^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 5^2 \rightarrow a_L = \sqrt{34}\text{ cm}$$

Área da superfície de uma pirâmide

Como podemos calcular a área da superfície de uma pirâmide?

Se planificarmos um modelo de uma pirâmide, compreenderemos mais facilmente como é formada a superfície total e como calcular sua área:

Figuras: © DAE



- **Área da base** (A_b): área do polígono da base (região poligonal).
- **Área lateral** (A_L): soma das áreas das faces laterais.
- **Área total** (A_t): soma da área lateral com a área da base.

A área total da superfície de uma pirâmide, representada por A_t, pode ser calculada pela relação:

$$A_t = A_L + A_b$$

em que A_b é a área da base e A_L é a área lateral da pirâmide.

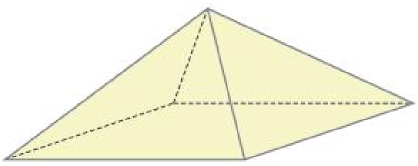
Exercícios resolvidos

1. Em uma pirâmide quadrangular regular, a área da base é igual a 64 cm² e a altura mede 3 m.

a) Faça um desenho que represente essa pirâmide.

b) Calcule a medida do apótema da pirâmide.

c) Calcule a área total da pirâmide.



b) Sendo x a medida das arestas da base e a_p o apótema da pirâmide, temos:

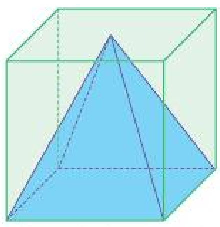
$x^2 = 64 \therefore x = 8$ m

$(a_p)^2 = 3^2 + 4^2 \therefore a_p = 5$ m

c) $A_t = 64 + 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 5}{2}$

$A_t = 144 \text{ m}^2$

2. Uma pirâmide é construída a partir de um cubo cujas arestas medem $5\sqrt{2}$ m, de modo que sua base coincide com uma das faces do cubo e o vértice é o centro da face oposta à base. Observe a figura.



Obtenha a área lateral da pirâmide.

Sendo a_p o apótema da pirâmide, temos:

$$(a_p)^2 = (5\sqrt{2})^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow (a_p)^2 = 50 + \frac{50}{4} \rightarrow$$

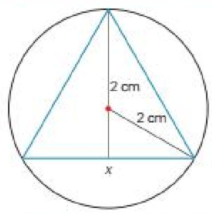
$$\rightarrow (a_p)^2 = \frac{250}{4} \therefore a_p = \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{m}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{2} = 25\sqrt{20}$$

$$A_L = 50\sqrt{5} \text{ m}^2$$

3. Uma das faces de um tetraedro regular está inscrita em uma circunferência de raio 2 m. Calcule a área total desse tetraedro.

Sendo x a medida das arestas do tetraedro, temos:



Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, o raio da circunferência é igual a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero. Assim:

$$2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$x = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

Logo:

$$A_{Total} = 4 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

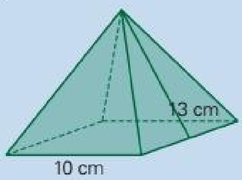
$$A_{Total} = 12\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em uma pirâmide quadrangular regular, o apótema mede 13 cm e as arestas da base medem 10 cm, como mostra a figura.

Figuras: © DAE



Obtenha a medida da altura dessa pirâmide. 12 cm

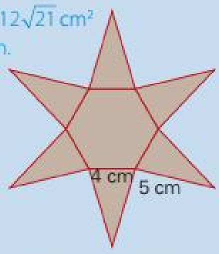
2. O apótema da base de uma pirâmide triangular regular mede $2\sqrt{3}$ metros. Se a altura da pirâmide mede 12 metros, calcule:

a) a medida das arestas laterais. $8\sqrt{3}$m

b) a medida do apótema da pirâmide. $2\sqrt{39}$m

3. Calcule a área lateral e a medida da altura de uma pirâmide hexagonal regular cuja planificação está representada na figura.

A área lateral é $12\sqrt{21}$ cm² e a altura é 3 cm.



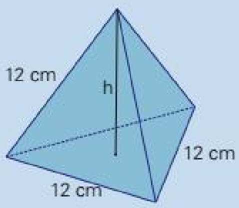
4. A pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide, é a maior das três pirâmides de Gizé.

Joana Kruse/Alamy/Fotoarena

Uma réplica dessa pirâmide, tal que sua altura mede 74 cm e as arestas da base quadrada medem 114 cm, foi construída em isopor. Deseja-se pintar externamente a base e as faces laterais dessa réplica. Qual a área total a ser pintada? (Utilize a aproximação $\sqrt{349} \cong 18,7$.)

Aproximadamente 34 314 cm².

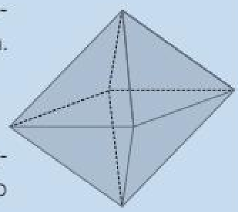
5. Na figura, as arestas do tetraedro regular medem 12 cm. Determine:



a) a medida da altura do tetraedro regular. $4\sqrt{6}$ cm

b) a área total do tetraedro regular. $144\sqrt{3}$ cm²

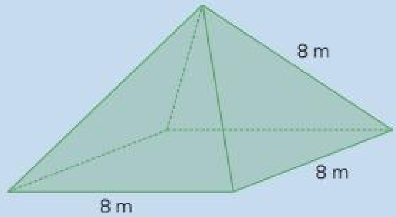
6. Na figura, as arestas do octaedro regular medem 5 cm. Calcule: $50\sqrt{3}$ cm²



a) a área total desse octaedro.

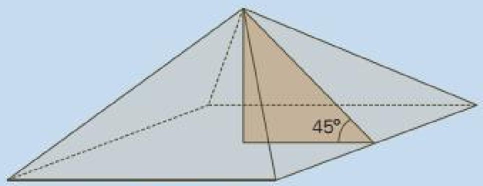
b) a distância entre dois vértices não consecutivos do octaedro. $5\sqrt{2}$ cm

7. Em uma pirâmide quadrangular, todas as arestas medem 8 metros, como mostra a figura a seguir.



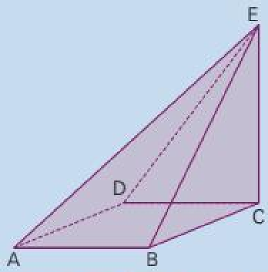
Calcule a razão entre as medidas do apótema e da altura da pirâmide. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

8. Calcule a área total de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas da base medem 12 metros e as faces laterais formam com o plano da base um ângulo de 45°. (Utilize a aproximação $\sqrt{2} \cong 1,41$.)



Aproximadamente 347,04 m².

9. Na pirâmide ABCDE da figura a seguir, o segmento CE é perpendicular ao plano que contém a base ABCD.



Se a base ABCD é um quadrado cujos lados medem 2 metros e CE = CA, calcule:

a) as medidas dos segmentos BE e AE.

a) BE = $2\sqrt{3}$m e AE = 4 m.

b) a medida do ângulo BAE (utilize a lei dos cossenos). b) 60°

c) a área total da pirâmide (utilize as aproximações $\sqrt{2} \cong 1,41$ e $\sqrt{3} \cong 1,73$).

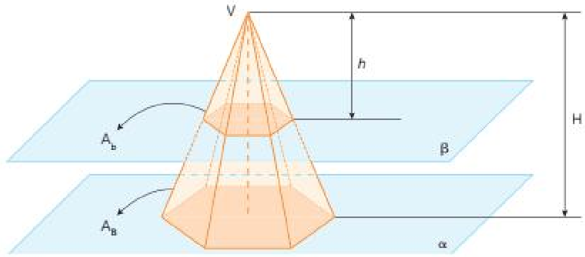
c) Aproximadamente 16,56 m².

10. Elabore um problema sobre a área total de uma pirâmide em que a base é um hexágono regular. Em seguida, apresente-o a um colega para que ele possa resolver, e resolva o problema elaborado por ele. Resposta pessoal.

Volume da pirâmide

O cálculo do volume de uma pirâmide pode ser efetuado a partir do volume de um prisma de mesma base, como veremos adiante. Antes, vamos observar um resultado importante que obtemos quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo ao plano da base. Observe a figura:

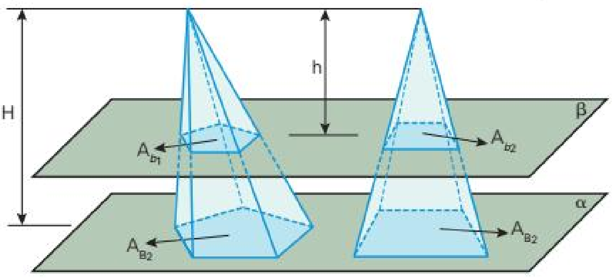
Figuras: © DAE



O plano β, paralelo ao plano α que contém a base, determina uma seção, um polígono semelhante ao polígono correspondente à base da pirâmide. Além disso, o plano β divide a pirâmide em dois sólidos geométricos: um **tronco de pirâmide** (formado pelas bases de áreas A_b e A_B) e uma **pirâmide menor** (de base A_b). Se considerarmos as duas pirâmides (a de altura H e a de altura *h*), podemos dizer que são semelhantes. Se a razão de semelhança entre as medidas lineares é $\frac{h}{H}$, então a razão entre as áreas das bases dessas duas pirâmides é:

$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Como nosso objetivo é calcular o volume de uma pirâmide, vamos considerar duas etapas. Inicialmente, vamos considerar o princípio de Cavalieri para duas pirâmides de mesma altura H e de bases equivalentes (mesma área), como ilustrado a seguir:



O plano β, paralelo ao plano α, determina nas duas pirâmides seções equivalentes. Como vimos anteriormente, podemos escrever:

$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \text{ e } \frac{A_{b_2}}{A_{B_2}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

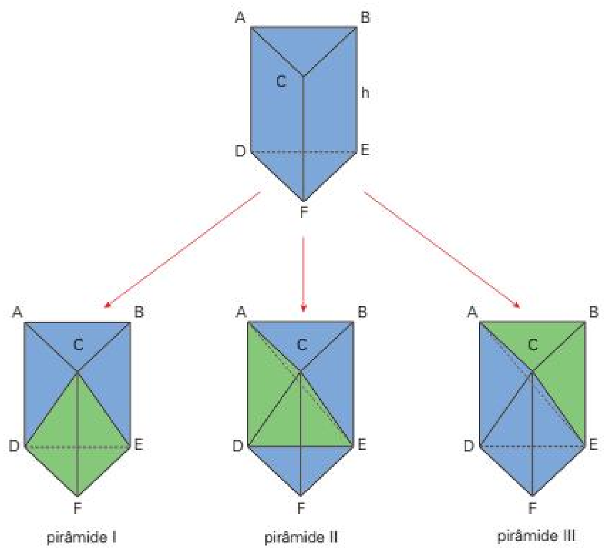
Comparando esses dois resultados, é imediato que:

$$\frac{A_{b_1}}{A_{B_1}} = \frac{A_{b_2}}{A_{B_2}}$$

Assim, conforme princípio de Cavalieri, temos que os volumes das duas pirâmides são iguais, isto é:

> Pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais possuem volumes iguais.

Com base nesse resultado, precisamos agora estabelecer como calcular o volume de uma pirâmide. Faremos isso com a decomposição de um prisma de base triangular (já sabemos como calcular o volume de um prisma) em três pirâmides, como sugere a ilustração a seguir:



Vamos comparar duas a duas essas pirâmides (destacadas em verde):

- Comparando as pirâmides I e III:

  Na pirâmide I, temos que a base é o triângulo DEF e a altura *h* é a mesma altura do prisma dado. Já na pirâmide III, consideramos como base o triângulo ABC e a altura *h* também é a mesma altura do prisma. Como as áreas das bases dessas duas pirâmides são iguais e, além disso, possuem a mesma altura, dizemos que os volumes também são iguais, isto é:

$$V_I = V_{III}$$

- Comparando as pirâmides II e III:

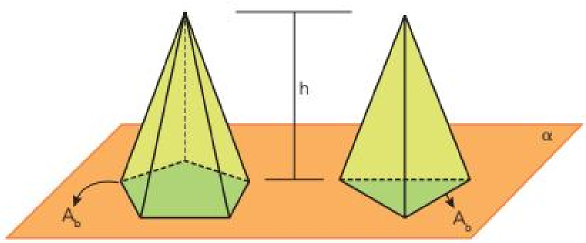
  Na pirâmide II, temos que a base é o triângulo ADE, enquanto na pirâmide III tomamos como base o triângulo ABE. Note que cada um desses dois triângulos tem como área a metade da área do retângulo ABED, isto é, os dois triângulos têm mesma base. Além disso, a altura dessas duas pirâmides, conforme bases consideradas, é a distância do ponto C ao plano que contém o retângulo ABED, ou seja, as duas pirâmides também possuem a mesma altura. Portanto, tendo mesma área da base e mesma altura, possuem volumes iguais, isto é:

$$V_{II} = V_{III}$$

- Assim, pelo que vimos até aqui, e considerando que V é o volume do prisma, podemos escrever que:

$$V_I = V_{II} = V_{III} \text{ e } V_I + V_{II} + V_{III} = V$$

Portanto, podemos dizer que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a **um terço do volume de um prisma de mesma base e de mesma altura**. Para uma pirâmide qualquer, o volume pode ser obtido de acordo com o princípio de Cavalieri. Assim, dada uma pirâmide qualquer, devemos considerar uma pirâmide triangular que tenha base equivalente e mesma altura da pirâmide dada.



Figuras: © DAE

Conforme o princípio de Cavalieri, podemos dizer que a pirâmide dada tem o mesmo volume da pirâmide triangular. Isso sugere o seguinte resultado:

O volume V de uma pirâmide de altura h e de área da base A_b é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Exemplos:

1. Vamos calcular o volume aproximado da pirâmide de Quéops, considerando que a base é um quadrado cuja medida da aresta é aproximadamente 230 m, e a altura, aproximadamente 147 m.

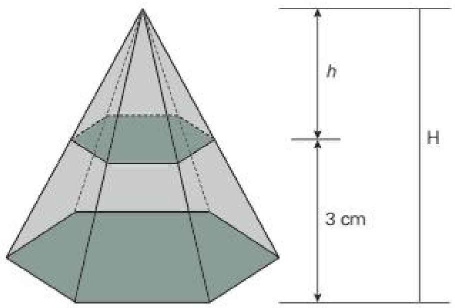
- Como pirâmide tem base quadrada, vamos utilizar a fórmula vista anteriormente para calcular o volume:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 147 \Rightarrow V = 2\,592\,100 \text{ m}^3$$

2. Na pirâmide representada a seguir, a área da base é igual a 36 cm², e a área da seção indicada, feita a 3 cm da base (paralela ao plano da base), é 9 cm². Vamos determinar o volume dessa pirâmide.



- Como as duas pirâmides são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

$$\frac{9}{36} = \left(\frac{H-3}{H}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{H-3}{H} \Rightarrow H = 6 \text{ cm}$$

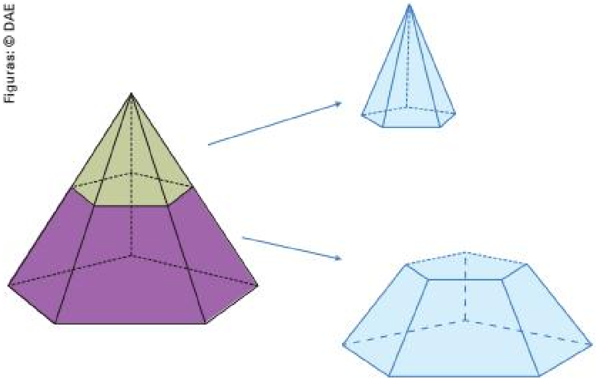
- Calculando o volume V, obtemos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 \Rightarrow V = 72\,\text{cm}^3$$

Quando secionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base, não contendo o vértice, ela fica dividida em dois sólidos: uma pirâmide (o sólido que contém o vértice) e outro sólido que contém a base da pirâmide, denominado **tronco de pirâmide**.

Figuras: © DAE



As duas pirâmides são semelhantes (a menor é uma "cópia" reduzida da maior). Para calcular, por exemplo, o volume do tronco, basta subtrair do volume da pirâmide maior o volume da pirâmide menor:

$$V_{\text{tronco}} = V_{\text{pirâmide maior}} - V_{\text{pirâmide menor}}$$

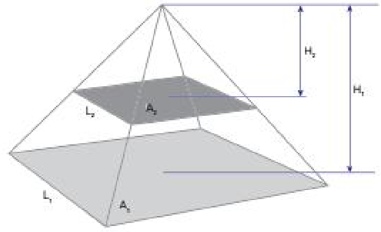
Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

Considerando a figura abaixo, as bases das duas pirâmides paralelas e $\frac{H_2}{H_1} = k$ (constante de proporcionalidade), responda:

1. Em função de k, qual é a razão entre as áreas das bases dessas pirâmides, isto é, $\frac{A_2}{A_1}$?

2. E a razão entre os volumes dessas pirâmides, isto é, $\frac{V_2}{V_1}$?



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Quando estudamos Geometria, normalmente associamos o nome de Euclides de Alexandria. Entretanto, dois outros nomes devem ser destacados também: Arquimedes e Apolônio. O texto abaixo permite a você ter uma ideia da importância desses três personagens gregos.

Os três geômetras gregos mais importantes da antiguidade foram Euclides (c. 300 a.C.), Arquimedes (287 – 212 a.C.) e Apolônio (c. 225 a.C.). Não é exagero dizer que quase tudo o que se fez de significativo em geometria, até os dias de hoje, e ainda hoje, tem sua semente original em algum trabalho desses três grandes eruditos.

Os três foram escritores prolíficos. Assim, embora os *Elementos* sejam de longe seu trabalho mais importante – e na verdade a obra de geometria mais importante de toda a história –, Euclides escreveu vários outros tratados de geometria, sendo que temos algum conhecimento a respeito de cerca de oito deles.

Cerca de dez tratados matemáticos de Arquimedes sobreviveram até nossos dias, e há vestígios de vários trabalhos seus que se perderam. Dos que restaram, três são sobre geometria plana e dois sobre geometria


Gemaeldegalerie Alte Meister, Dresden, Alemanha/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.)

Anônimo (escola inglesa).
Apolônio de Tiana, século XIX. Litografia.

sólida. Esses trabalhos não são compilações de realizações de predecessores, mas criações altamente originais, marcando Arquimedes como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e certamente o maior da Antiguidade. Num de seus trabalhos dedicado à geometria plana, Arquimedes inaugurou o clássico método dos perímetros para calcular, e achou que π está situado entre 223/71 e 22/7, ou que, com duas casas decimais, π é dado por 3,14. Esse procedimento de Arquimedes foi o ponto de partida da longa história da busca de aproximações cada vez mais acuradas para o valor de π, alcançando-se, em 1967, a fantástica aproximação de 500 000 casas decimais*. Em seus outros trabalhos de geometria plana, Arquimedes antecipou alguns dos métodos do cálculo integral.

Em um de seus trabalhos de geometria sólida encontramos, pela primeira vez, as fórmulas corretas para as áreas da superfície esférica e da calota esférica e para os volumes da esfera e do segmento esférico de uma base.

Há uma suposição geométrica explicitamente enunciada por Arquimedes no seu trabalho *Sobre a esfera e o cilindro* que merece menção especial: é um dos cinco postulados geométricos assumidos no início do trabalho, que se tornou conhecido como "axioma de Arquimedes". Um enunciado simples do postulado é: *Dados dois segmentos de reta não iguais, há sempre algum múltiplo do menor que supera o maior.* Em alguns tratamentos modernos da geometria, este axioma faz parte da base postulacional para introduzir o conceito de continuidade. É interessante notar o fato de que no fim do século XIX e início do século XX foram construídos sistemas geométricos que negam o axioma de Arquimedes, dando origem assim às chamadas geometrias não arquimedianas.

Embora Apolônio tenha sido um astrônomo de méritos, e embora tenha escrito sobre vários temas da matemática, sua fama se deve principalmente a *Secções cônicas*, uma obra extraordinária e monumental graças à qual adquiriu o cognome, entre seus contemporâneos, de "o grande geômetra". *Secções cônicas* é um estudo exaustivo a respeito dessas curvas, que supera completamente todos os trabalhos anteriores sobre o assunto. Foi Apolônio que criou os termos "elipse", "parábola" e "hipérbole". Devido a comentários posteriores, temos conhecimento do conteúdo de seis outros trabalhos sobre geometria de Apolônio. Um deles ocupa-se da construção, com régua e compasso, de um círculo tangente a três círculos dados; esse problema instigante é conhecido hoje como "o problema de Apolônio". Em outro trabalho encontramos o chamado círculo de Apolônio, que hoje faz parte dos cursos superiores de geometria.

Com a morte de Apolônio, a época de ouro da geometria grega chegou ao fim. Os geômetras menores que se seguiram pouco mais fizeram do que preencher detalhes e talvez desenvolver independentemente certas teorias cujos germes já estavam contidos nos trabalhos dos três grandes predecessores.

*Hoje já temos aproximações de mais de 1 000 000 de casa decimais.

EVES, Howarde. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*: Geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. p. 10 e 11.

QUESTÕES

Resolva os exercícios no caderno.

De acordo com o texto:

1. Pesquise o significado de "escritores prolíficos".

2. Qual das curvas de Apolônio representa também o gráfico de função quadrática estudado no Volume 1 desta coleção?

3. Qual dos números 22/7 ou 223/71 está mais próximo do número irracional?

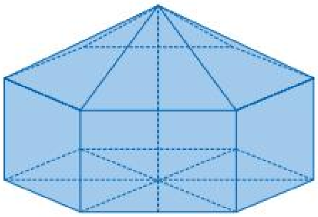
Exercícios resolvidos

1. Obtenha o volume de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas das bases medem 5 metros e a altura mede 12 metros.

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 12$

$V_{\text{pirâmide}} = 100\text{m}^3$

2. A tenda de um circo é formada por um prisma hexagonal regular e por uma pirâmide também hexagonal regular, como mostra a figura.



As arestas da base medem 20 metros, a altura do prisma mede 15 metros, e a altura total da tenda mede 25 metros. Qual é o volume interno da tenda? (Utilize a aproximação $\sqrt{3} \cong 1{,}73$).

$$V = \frac{6 \cdot 20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 =$$
$$= 9\,000\sqrt{3} + 2\,000\sqrt{3} = 11\,000\sqrt{3} \cong$$
$$\cong 11\,000 \cdot 19\,030 \text{ m}^2$$

Portanto, o volume V é aproximadamente 19 030 metros cúbicos.

3. O volume de um tetraedro regular é igual a $18\sqrt{2}$ cm³. Determine a medida das arestas desse tetraedro.

Sejam x e h a medida das arestas e a medida da altura do tetraedro, respectivamente. Assim:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = h^2 + \frac{x^2}{3} \therefore$$
$$\therefore h = \frac{x\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$
$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{3} = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$$

Assim,

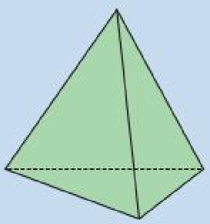
$$\frac{x^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2} \rightarrow x^3 = 216 \therefore x = 6\text{cm}.$$

A aresta do tetraedro mede 6 cm.

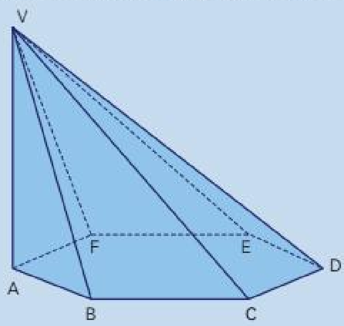
Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular cujas arestas da base medem 6 decímetros e cujo apótema mede $3\sqrt{3}$ decímetros. $18\sqrt{2}$ dm³



2. A base de uma pirâmide é um hexágono regular ABCDEF. O segmento de reta que une o ponto A ao vértice V da pirâmide é perpendicular ao plano que contém a base.



$216\sqrt{3}$ cm³

Se AV = AD e AB = 6 cm, qual é o volume da pirâmide?

3. As faces laterais de uma pirâmide quadrangular regular são triângulos equiláteros, cada um com área igual a $9\sqrt{3}$ dm².

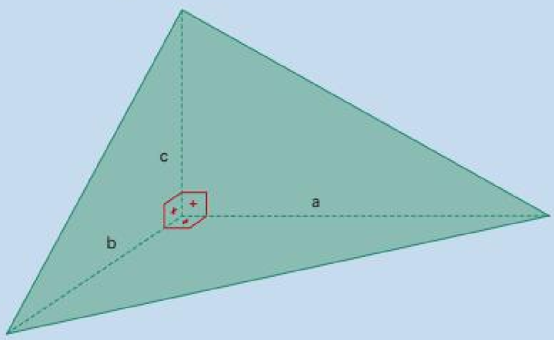
Determine:

a) a medida das arestas da base. a) 6 dm

b) a medida da altura da pirâmide. b) $3\sqrt{2}$ dm

c) o volume da pirâmide. c) $32\sqrt{2}$ dm³

4. Na figura a seguir está representado um tetraedro trirretangular.

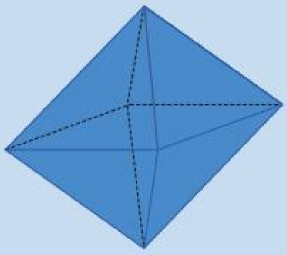


a) Escreva uma expressão que calcule o volume do tetraedro em função de *a*, *b* e *c*. $V = \frac{a \cdot b \cdot c}{6} v^3$

b) Obtenha o volume de um tetraedro trirretangular em que a = 3 m, b = 5 m e c = 6 m. 15 m³

5. A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo cujos catetos medem 15 cm e 20 cm. Qual é o volume dessa pirâmide, sabendo que a medida de sua altura é igual ao dobro da medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo da base? 1 200 cm^3

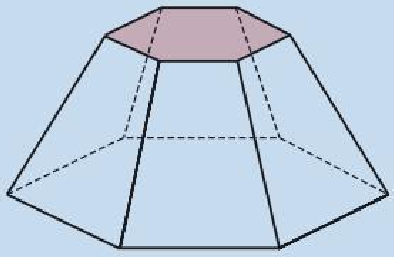
6. Qual é o volume de um octaedro regular cujas arestas medem $3\sqrt{3}$dm? $27\sqrt{6}$ dm^3



7. Uma pirâmide triangular regular, cujas arestas da base medem 12 cm, e um prisma regular, cuja base é um hexágono regular com lados de medida 8 cm, são equivalentes. Calcule a razão entre as alturas do prisma e da pirâmide, nessa ordem. $\frac{1}{8}$

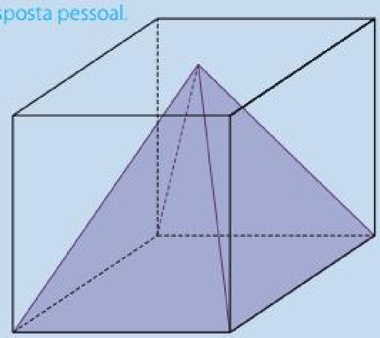
8. Para enfeitar uma estante, uma pessoa adquiriu uma réplica da pirâmide de Quéops, feita com ferro maciço. Os lados do quadrado da base têm medida 14 cm, e a altura mede 9 cm. Se a densidade do ferro é igual a 7,9 g/cm^3, qual a massa aproximada dessa réplica da pirâmide? 4 645,2 gramas.

9. Uma pirâmide foi cortada de modo que as bases ficassem paralelas e a uma distância de 5 cm uma da outra. A aresta da base maior mede 6 cm e a aresta da base menor mede 2 cm. Calcule o volume da pirâmide antes de ser cortada. $135\sqrt{3}$ cm^3



Figuras: © DAE

10. Invente um problema envolvendo volumes de uma pirâmide e de um cubo, conforme figura abaixo: Resposta pessoal.



Algumas conclusões

Procure responder ou mesmo pensar a respeito de possíveis respostas para algumas questões envolvendo o estudo de Geometria nesta unidade. Caso sinta alguma dificuldade em obter respostas, sugerimos retomar os conceitos principais:

1. Quais são os chamados entes primitivos da geometria euclidiana?
2. Como você diferencia postulado de teorema?
3. Quais elementos compõem um poliedro?
4. Num poliedro convexo, qual é a chamada relação de Euler?
5. O que caracteriza um prisma regular?
6. Como você calcula a área lateral de um prisma?
7. Qual a relação matemática que permite obter a área total de um prisma?
8. Como você calcula o volume de um prisma?
9. Considerando um paralelepípedo retangular e um cubo, quais as fórmulas que permitem calcular a área total e o volume desses sólidos?
10. Quais as relações matemáticas que permitem obter a área total e o volume de uma pirâmide?

Troque ideias com seus colegas a respeito das respostas para essas questões. Em seguida, liste as dificuldades encontradas e os assuntos que devem ser retomados.

1. (UERJ) Um fabricante produz embalagens de volume igual a 8 litros no formato de um prisma reto com base quadrada de aresta *a* e altura *h*. Visando à redução de custos, a área superficial da embalagem é a menor possível. Nesse caso, o valor de *a* corresponde, em decímetros, à raiz real da seguinte equação:

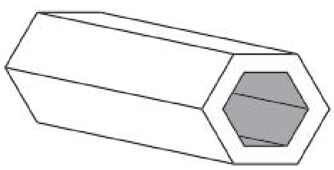
$$4a - \frac{32}{a^2} = 0$$

As medidas da embalagem, em decímetros, são:

a) $a = 1; h = 2$
b) $a = 1; h = 4$
c) $a = 2; h = 4$
d) $a = 2; h = 2$

2. (Uern) A peça geométrica, desenvolvida através de um *software* de modelagem em três dimensões por um estudante do curso de engenharia e estagiário de uma grande indústria, é formada a partir de dois prismas de base hexagonal regular e assemelha-se ao formato de uma porca de parafuso.

Figuras: © DAE



Considerando que o lado do hexágono maior mede 8 cm; que o comprimento do prisma é igual a 35 cm; e que o lado do hexágono menor mede 6 cm, então o volume da peça, de forma que se possa calcular, posteriormente, a quantidade de matéria-prima necessária à sua produção em massa em determinado período de tempo é, em cm^3: (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)

a) 1.064
b) 1.785
c) 2.127
d) 2.499

3. (Unesp-SP) Uma chapa retangular de alumínio, de espessura desprezível, possui 12 metros de largura e comprimento desconhecido (figura 1). Para a fabricação de uma canaleta vazada de altura *x* metros são feitas duas dobras, ao longo do comprimento da chapa (figura 2).

Figura 1

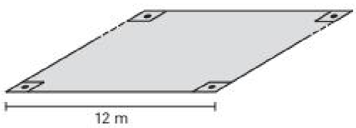
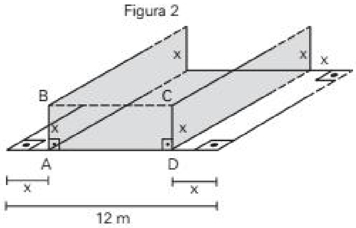


Figura 2



Se a área da secção transversal (retângulo ABCD) da canaleta fabricada é igual a 18 m^2, então a altura dessa canaleta, em metros, é igual a

a) 3,25
b) 2,75
c) 3,50
d) 2,50
e) 3,00

4. (Enem) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25% ficando com consistência cremosa. Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1.000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar. O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450
b) 500
c) 600
d) 750
e) 1.000

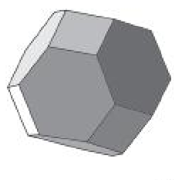
5. (PUC-RJ) O que acontece com o volume de um paralelepípedo quando aumentamos a largura e a altura em 10% e diminuímos a profundidade em 20%?

a) Não se altera.
b) Aumenta aproximadamente 3%.
c) Diminui aproximadamente 3%.
d) Aumenta aproximadamente 8%.
e) Diminui aproximadamente 8%.

6. (UECE) Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste polígono é

a) 90.
b) 72.
c) 60.
d) 56.

7. (UPF-RS) O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular. A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:

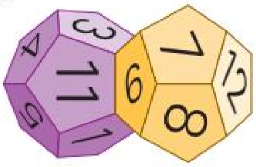


a) 2160°
b) 5760°
c) 7920°
d) 10080°
e) 13680°

8. (Enem) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces. Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6
b) 8
c) 14
d) 24
e) 30

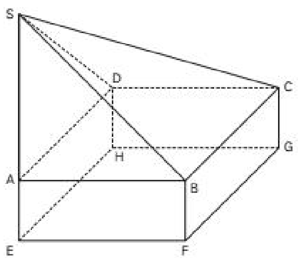
9. (Uerj) Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.



Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo. A soma V + F + A é igual a:

a) 102
b) 106
c) 110
d) 112

10. (Fuvest-SP) O sólido da figura é formado pela pirâmide SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFG. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que $\overline{AE} = 2$ cm, $\overline{AD} = 4$ cm e $\overline{AB} = 5$ cm.



A medida do segmento SA que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

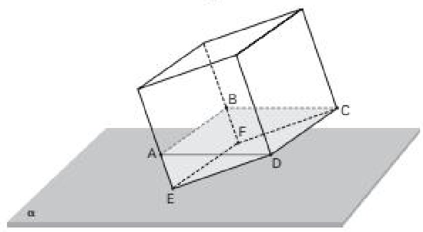
11. (Enem) O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm –1 e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

a) 18
b) 26
c) 30
d) 35
e) 60

12. (Uerj) Um cubo de aresta EF medindo 8 dm contém água e está apoiado sobre um plano α de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura abaixo representa o cubo com a água.



Figuras: © DAE

Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a $32\sqrt{5}$ dm².

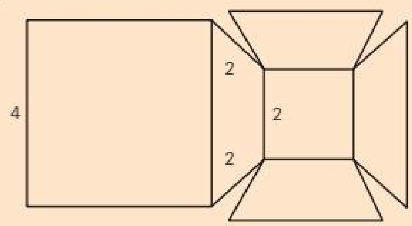
Determine o volume total, em dm³, de água contida nesse cubo. 128 dm³

13. (UEM-PR) Sobre as posições relativas entre pontos, retas e planos no espaço, assinale o que for **correto.**

01) Duas retas *r* e *s* são ortogonais quando são reversas e existe uma reta *t* paralela a *s* e perpendicular a *r*.
02) Se um plano α é paralelo a uma reta *r*, então todas as retas do plano α são paralelas a *r*.
04) É possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos.
08) Se um plano α intercepta os planos β e γ formando um ângulo de 90°, então os planos β e γ são paralelos.
16) Considere as retas *r*, *s* e *t*. Se *r* é reversa a *s* e a reta *s* é concorrente a *t*, então *r* e *t* são reversas. 01 + 04 = 05

DESAFIO

(UFGRS-RS) Considere a planificação do sólido formado por duas faces quadradas e por quatro trapézios congruentes, conforme medidas indicadas na figura representada abaixo.



O volume desse sólido é

a) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$
b) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $16\sqrt{2}$
e) $20\sqrt{2}$

As orientações e respostas encontram-se no Manual do Professor.

Mediana de Euler

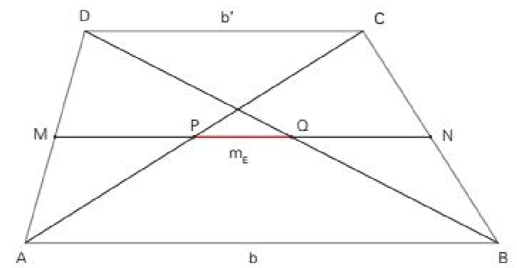
Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Paul Euler, nascido em 15 de abril de 1707 na Basileia (Suíça), foi dos mais importantes matemáticos não só de seu tempo como da atualidade. No ensino médio, temos contato com suas descobertas em especial no campo da geometria espacial, mas Euler era matemático e físico e teve grandes contribuições no desenvolvimento das notações matemáticas, no conceito de função, na trigonometria e em outras áreas avançadas da matemática, como cálculo, análise e teoria dos grafos, além da física mecânica, dinâmica e óptica, assim como na astronomia e até na música.

Na geometria espacial, seu resultado mais conhecido é a chamada *Relação de Euler*, vista nesta unidade. Entretanto, há ainda outro resultado geométrico que leva seu nome: é a *Mediana de Euler*, que veremos a seguir.

Mediana de Euler é o segmento que une os pontos médios das duas diagonais de um quadrilátero. Veja, na figura, esse segmento marcado pelos pontos PQ e de medida m_E.

Mediana de Euler $\quad m_E = \dfrac{b - b'}{2}$



No caso do trapézio (como na figura anterior), esse segmento está sobre a base média do quadrilátero. Note que a base média é o segmento MN que liga os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio. Sendo *b* a medida da base maior e *b'* a medida da base menor, MN mede (b + b')/2 e a mediana de Euler PQ mede (b – b')/2.

Para um quadrilátero ABCD qualquer de diagonais AC e BD (que não seja necessariamente um trapézio), a fórmula que fornece o valor da mediana de Euler é:

$$m_E = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2}$$

Uma observação interessante sobre as descobertas geométricas de Euler é que elas se aplicam tanto à geometria plana quanto à geometria espacial.

Questões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Considere um trapézio isósceles cujas bases medem 25 cm e 7 cm e os lados não paralelos medem ambos 15 cm. As diagonais desse trapézio medem 20 cm cada. Com esses dados, utilize a fórmula $m_E = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2}$ para calcular a distância entre os pontos médios das diagonais.
2. Utilize a fórmula mE =(b – b')/2 para calcular a mediana de Euler do trapézio no caso anterior.
3. O que se pode observar com base nos dos dois resultados anteriores?
4. Considere um retângulo de lados medindo 5 cm e 12 cm. Utilize o teorema de Pitágoras para calcular a medida das diagonais desse retângulo e, conhecendo esse valor, calcule a mediana de Euler desse retângulo.

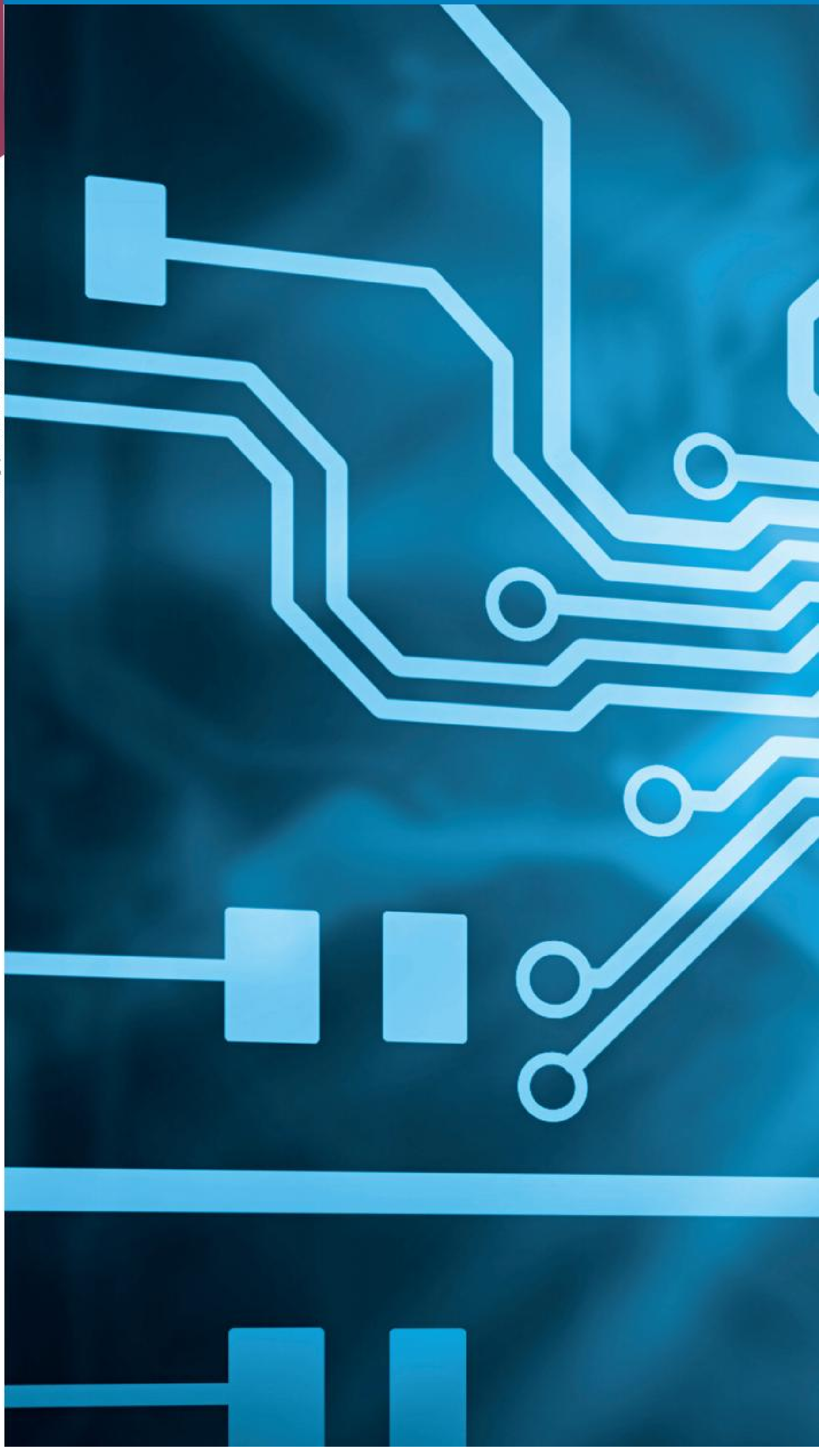
UNIDADE

5

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A proteção de informações das pessoas e dados de empresas presentes em arquivos digitais exige a utilização de senhas e outros aplicativos de segurança. Ao elaborar uma senha, formamos uma sequência de dígitos.

Em Análise Combinatória, estudamos o cálculo do número de possibilidades, tanto na formação de sequências quanto na escolha de elementos para formar grupos.



Sergey Nivens/Shutterstock.com

As senhas são cadeados do mundo virtual e as informações estarão a salvo enquanto estiverem protegidas por elas.

CAPÍTULO

13 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Quando lançamos um dado, são seis os resultados possíveis. Já quando lançamos dois dados e estamos interessados na sequência formada pelos resultados, encontramos 36 resultados possíveis. Esse é um exemplo de uma situação que envolve contagem.

Mega Pixel/Shutterstock.com

Ilustrações: Dawidson França

Na Análise Combinatória, desenvolvemos procedimentos e métodos de contagem para resolver essas e outras situações similares. Por exemplo, quantas são as placas de automóveis que podemos confeccionar no sistema de emplacamento vigente em nosso país?

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Questões e reflexões

1. Na ilustração anterior, identifica-se, por exemplo, que a placa de um dos automóveis, formada por 3 letras e 4 algarismos, tem o número 3826. A última letra é igual a Y. Não sabemos quais são as duas primeiras letras. Quantas são as possibilidades?
2. Já na outra placa, conhecemos as três letras e os dois primeiros algarismos. Quantas são as possíveis placas?

Princípio fundamental da contagem

Ingvar Bjork/Shutterstock.com

Uma situação simples envolvendo problemas de contagem é o de uma senha bancária ou mesmo um segredo de um cadeado de mala, como o que está indicado acima. Imagine, por exemplo, que você esqueceu a senha formada por três algarismos. Qual é o número máximo de tentativas para que você descubra o segredo e consiga abrir o cadeado?

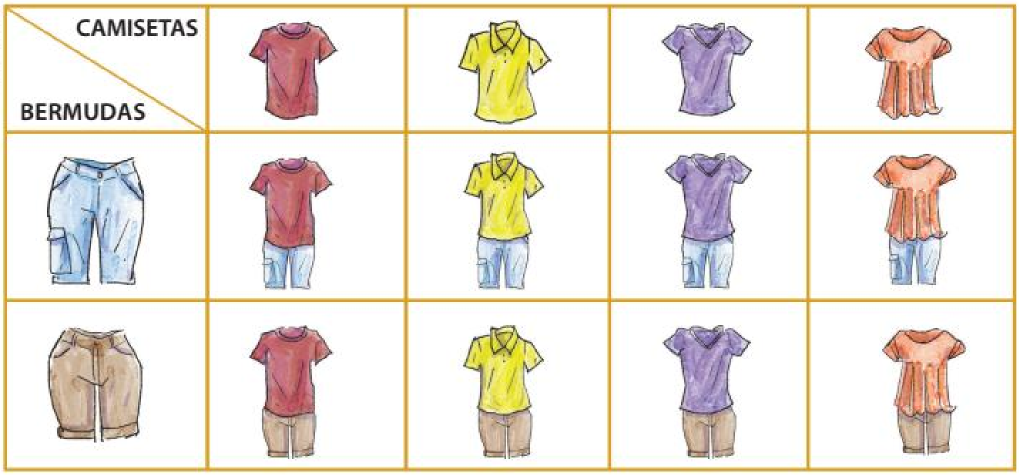
Voltaremos a essa pergunta ainda neste capítulo. Vamos considerar agora duas situações de contagem.

1ª situação

Lúcia separou 4 camisetas lisas e 2 bermudas em cima da cama para se vestir. Mas não tinha certeza de qual camiseta e bermuda utilizaria. Qual o número total de trajes diferentes que Lúcia poderá ter, utilizando uma camiseta e uma bermuda entre as que separou?

Uma forma de resolver seria formar todas as possibilidades, isto é, combinando uma a uma, como sugerimos na tabela de duas entradas a seguir:

Filipe Rocha

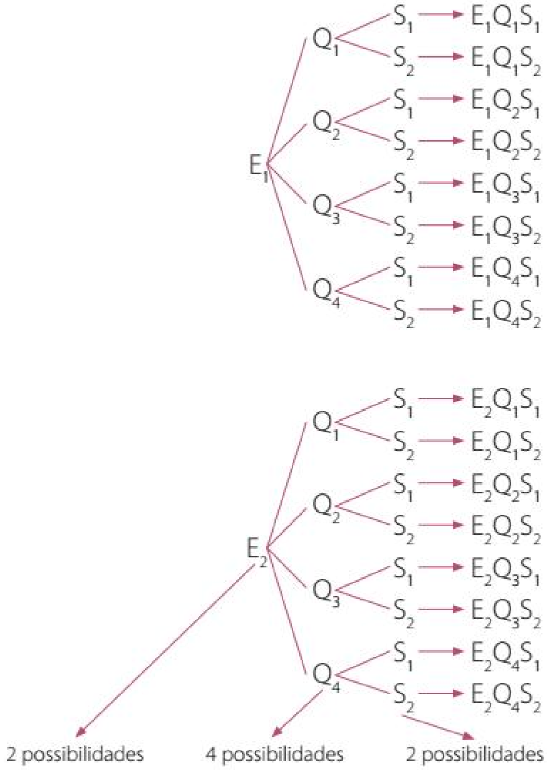


Pela tabela, podemos dizer que, dispondo de 4 camisetas e de 2 bermudas, o total de possibilidades de Lúcia se vestir é igual a 8. Para obter esse resultado sem elaborar a tabela, basta calcular o resultado da multiplicação $4 \cdot 2$, isto é, multiplicar o número de possibilidades que Lúcia tem de escolher uma camiseta pelo número de possibilidades que ela tem de escolher uma bermuda. Para cada camiseta que ela escolhe, há duas possibilidades diferentes de escolha de bermuda. Na situação apresentada, dizemos que o acontecimento "escolher uma camiseta e uma bermuda" é composto de duas etapas. Na primeira etapa deve-se escolher uma camiseta, e na segunda, uma bermuda.

2ª situação

Marcos trabalha em um restaurante que serve 2 tipos de entrada, 4 tipos de pratos quentes e 2 tipos de sobremesa. Qual o número total de possibilidades de uma pessoa escolher, nesse restaurante, uma entrada, um prato quente e uma sobremesa?

O esquema ao lado é conhecido como árvore das possibilidades. Dessa forma, podemos "construir" as possibilidades uma por uma. Representando as entradas por E_1 e E_2, os pratos quentes por Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 e as sobremesas por S_1 e S_2, temos:



Pelo esquema, temos 16 possibilidades. Também aqui não é necessário construir essa "árvore" para saber o total de possibilidades. Se existem 2 possibilidades para escolher a entrada, 4 para a escolha do prato quente e 2 para a sobremesa, o total de possibilidades é o resultado da multiplicação $2 \cdot 4 \cdot 2$, isto é, 16. Nessa situação, o acontecimento consiste em escolher uma entrada, um prato quente e uma sobremesa.

É claro que tanto a tabela quanto a árvore das possibilidades representam meios simples de resolver situações de contagem como as apresentadas anteriormente. Entretanto, em determinadas situações, esse procedimento de construção das possibilidades torna-se impraticável. O **princípio fundamental da contagem** permite calcular o total de possibilidades de ocorrência de um acontecimento composto de duas ou mais etapas:

> Se um acontecimento $\mathbf{A_1}$ pode ocorrer de $\mathbf{n_1}$ maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acontecimento $\mathbf{A_2}$ pode ocorrer de $\mathbf{n_2}$ maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ é dada pelo produto $\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}$.

Observações:

1. O princípio fundamental da contagem, embora tenha sido apresentado para um acontecimento formado por duas etapas, pode ser estendido para qualquer número de etapas.

A seguir, apresentamos exemplos de situações em que empregamos o princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo.

Exemplo:

Vamos calcular a quantidade de números naturais de três algarismos distintos que podemos formar.

O acontecimento "escolha de três algarismos distintos para formar um número natural" é composto de 3 etapas: escolha do algarismo das centenas, escolha do algarismo das dezenas e escolha do algarismo das unidades.

Centena	Dezena	Unidade

1ª etapa: escolha do algarismo da centena

Dispomos de 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Lembre-se de que o algarismo das centenas não pode ser igual a zero. Temos 9 possibilidades.

2ª etapa: escolha do algarismo da dezena

Como os algarismos devem ser diferentes, o algarismo da dezena deve ser diferente do algarismo da unidade. Além disso, o algarismo zero pode agora ser escolhido. Assim, temos 9 possibilidades.

3ª etapa: escolha do algarismo da unidade

Analogamente, o algarismo da unidade tem que ser diferente do algarismo da dezena e do algarismo da centena. Dessa forma, temos 8 possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo, sendo n o total de números com três algarismos distintos que podemos formar, o resultado é obtido pela multiplicação das quantidades de possibilidades em cada etapa:

$$n = 9 \cdot 9 \cdot 8$$
$$n = 648$$

O esquema a seguir permite analisar rapidamente a situação apresentada nesse exemplo:

Centena	Dezena	Unidade	
↓ 9	↓ 9	↓ 8	→ Possibilidades em cada etapa.
$n = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$			

Exemplos:

1. Vamos calcular a quantidade de números naturais formados por três algarismos.

Agora os algarismos não precisam ser distintos em cada número. Mesmo assim, o algarismo da centena não pode ser igual a zero.

Podemos dizer que o acontecimento "formar número natural com três algarismos" é composto de três etapas:

1ª etapa – escolher o algarismo da centena diferente de zero:

9 possibilidades

2ª etapa – escolher o algarismo da dezena:

10 possibilidades

3ª etapa – escolher o algarismo da unidade:

10 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, sendo n a quantidade de números naturais que podemos formar, temos:

$n = 9 \cdot 10 \cdot 10$

$n = 900$

O esquema a seguir permite analisar rapidamente a situação apresentada nesse exemplo:

Centena	Dezena	Unidade	
↓ 9	↓ 10	↓ 10	→ Possibilidades em cada etapa.
$n = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$			

2. Lançamos a mesma moeda para cima quatro vezes consecutivas. Quantas são as sequências de resultados possíveis quanto a cara ou coroa?

Fotos: Banco Central do Brasil

Observe que esse acontecimento (lançamento da moeda quatro vezes consecutivamente) é composto de quatro etapas. Como em cada etapa podem ocorrer apenas dois resultados (cara ou coroa), pelo princípio multiplicativo obtemos o total de sequências possíveis:

$n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow n = 16$

Vejamos quais são as sequências possíveis, representando cara por CA e coroa por CO:

(CA, CA, CA, CA) (CO, CA, CA, CA)
(CO, CA, CO, CO) (CO, CA, CA, CO)

(CA, CA, CA, CO) (CO, CO, CO, CO)
(CA, CO, CO, CO) (CO, CA, CO, CA)

(CA, CA, CO, CA) (CO, CO, CO, CA)
(CA, CA, CO, CO) (CO, CO, CA, CA)

(CA, CO, CA, CA) (CO, CO, CA, CO)
(CA, CO, CA, CO) (CA, CO, CO, CA)

3. Vamos escolher uma senha com 4 letras para poder acessar determinado programa de computador. Qual a quantidade total de senhas que podem ser formadas?

O acontecimento "escolher 4 letras" para formar uma senha é composto de quatro etapas. Como são 26 letras disponíveis e não há restrição quanto à repetição, existem 26 possibilidades para a realização de cada etapa. Dessa forma, sendo n o total de possíveis senhas, utilizando o princípio multiplicativo, temos:

$n = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26$

$n = 456\,976$

Resposta no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Retome a situação do cadeado do início do capítulo e calcule o número total de possíveis senhas que podem ser formadas, isto é, o número máximo de tentativas para que você descubra o segredo e consiga abrir o cadeado.

Retomando o exemplo anterior, vamos descobrir em quantas dessas senhas pelo menos uma letra é repetida.

- Primeiro calculamos o total de senhas em que as 4 letras sejam distintas, isto é, vamos analisar as possibilidades em cada uma das quatro etapas:

1ª etapa – escolher a 1ª letra da senha.

Número de possibilidades: 26.

2ª etapa – escolher a 2ª letra da senha, considerando que é diferente da primeira letra.

Número de possibilidades: 25.

3ª etapa – escolher a 3ª letra da senha, considerando que é diferente das duas primeiras.

Número de possibilidades: 24.

4ª etapa – escolher a 4ª letra da senha, considerando que é diferente das três primeiras.

Número de possibilidades: 23.

Pelo princípio multiplicativo, o total de possibilidades de escolher uma senha com 4 letras distintas dentre as 26 letras disponíveis é:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$$

- Agora subtraímos esse número do total de possibilidades de escolher uma senha com 4 letras quaisquer contendo as repetições. Sendo n quantidade a ser calculada, temos:

$n = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 - 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$

$n = 456\,976 - 358\,800 \Rightarrow n = 98\,176$

Portanto, são 98 176 possibilidades de termos senhas com, pelo menos, uma repetição de letra.

4. Vamos calcular a quantidade de divisores naturais do número 360 a partir de sua decomposição em fatores primos.

- Ao decompor o número 360 em fatores primos, encontramos:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

- Os divisores naturais do número 360 são, de acordo com a decomposição em fatores primos, números da forma:

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$$

Os valores de a, b e c são tais que: $a \in \{0; 1; 2; 3\}$, $b \in \{0; 1; 2\}$ e $c \in \{0; 1\}$. Podemos dizer que existem 4 possibilidades para a escolha de a, 3 possibilidades para a escolha de b e 2 possibilidades para a escolha de c. Logo, pelo princípio multiplicativo, sendo n a quantidade de divisores naturais de 360, então:

$n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow n = 24$

O quadro a seguir contém esses 24 divisores:

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 1$	$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$	$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$	$2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 8$
$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 5$	$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 10$	$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20$	$2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 40$
$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 6$	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$	$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 24$
$2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 15$	$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$	$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$
$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 9$	$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 18$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 36$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 72$
$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 45$	$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$

Observação:

Existem situações de contagem em que o número total de possibilidades é obtido pela adição de possibilidades e não pela multiplicação, denominado princípio aditivo. Vamos exemplificar!

Para ir de sua casa até o trabalho, Márcio pode ir de ônibus ou de carro. Considerando que há 3 linhas diferentes de ônibus e que Márcio tem 2 carros, de quantas maneiras diferentes, utilizando ônibus ou carro, ele poderá ir de sua casa ao trabalho?

- Ele poderá ir de ônibus ou carro (neste caso essas possibilidades se excluem). Assim, se ele escolher ônibus, terá 3 possibilidades. Caso escolha carro, outras 2. Se n é o total de maneiras diferentes de Márcio ir para o trabalho, então:

$$n = 3 + 2 = 5$$

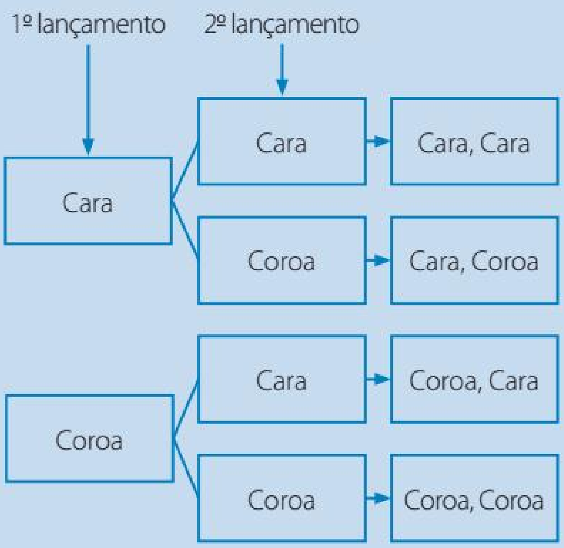
Portanto, são 5 possibilidades.

EXPLORANDO

Orientações e respostas no Manual do Professor.

O princípio multiplicativo, como você teve a oportunidade de verificar em alguns exemplos, é utilizado na resolução de problemas de contagem. Uma forma interessante de perceber as possibilidades, quando diante de um acontecimento envolvendo contagem, é esboçando a árvore das possibilidades.

Assim, por exemplo, se lançamos uma mesma moeda duas vezes consecutivamente, sabemos que no primeiro lançamento existem 2 resultados possíveis, e no segundo lançamento, também 2 resultados possíveis. Ao todo temos, pelo princípio multiplicativo, 4 sequências resultantes, conforme indicado na figura ao lado:



Vamos explorar um pouco mais esse recurso, construindo árvores de possibilidades.

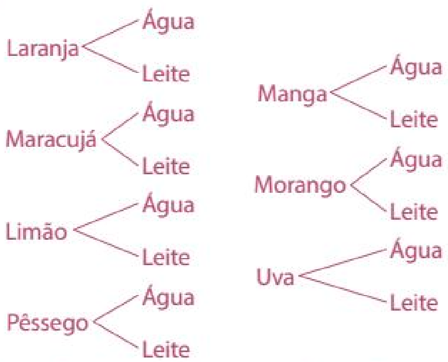
1. Elabore, junto com um colega, um problema de contagem e construa a árvore das possibilidades correspondente. Apresente o problema e a árvore das possibilidades para a sua turma.

2. Pesquise uma situação de cálculo de possibilidades relacionadas à disciplina de Biologia. Uma ideia é observar situações relacionadas à Genética. Em seguida, apresente à sua turma a situação pesquisada e, se possível, construa a árvore de possibilidades correspondente.

Exercícios resolvidos

1. Em uma lanchonete há 7 opções de frutas para o preparo dos sucos: laranja, maracujá, limão, pêssego, manga, morango e uva. Além disso, o suco pode ser preparado com água ou leite, não ambos. Construa primeiro uma árvore de possibilidades que mostre de quantas maneiras uma pessoa pode pedir um suco, escolhendo somente uma fruta. Em seguida, responda: qual o número total de sucos diferentes preparados com apenas uma fruta que a lanchonete oferece?

Para cada fruta temos a opção de ser preparada com água ou leite.



Assim, o número total de maneiras de escolher o suco é $7 \cdot 2 = 14$.

2. Para acessar o programa secreto de um computador, uma pessoa deve digitar uma senha de 7 dígitos, em que os 3 primeiros são letras distintas e os 4 últimos são algarismos distintos. Se podem ser utilizadas quaisquer das 26 letras do alfabeto e qualquer algarismo do sistema decimal, qual é o número máximo de tentativas que uma pessoa deve fazer para acessar o programa?

A pessoa tem 26 opções de letras para o primeiro dígito, 25 opções para o segundo e 24 opções para o terceiro. Já para o quarto dígito a pessoa tem 10 opções de algarismos; para o quinto, 9 opções; para o sexto, 8 opções; e para o sétimo, 7 opções. Assim, o total de senhas diferentes que podem ser formadas é $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$.

3. Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6:

a) quantos números de três algarismos distintos podemos formar?

b) quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

c) quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

Um número com 3 algarismos não pode começar com 0.

a) Para a primeira opção devemos retirar o 0, ficando com 6 possibilidades. Para a segunda opção, devemos tirar o algarismo que foi utilizado na primeira opção, ficando com 6 possibilidades. Para a terceira opção, devemos tirar os algarismos que foram utilizados na primeira e segunda opções, ficando com 5 possibilidades. Logo,
$6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ possibilidades.

b) Começando pela restrição para ser ímpar, temos 3 possibilidades para a terceira opção. Para a primeira opção devemos retirar o 0 e o algarismo utilizado na terceira opção, ficando com 5 possibilidades. Para a segunda opção, devemos tirar os algarismos que foram utilizados na primeira e terceira opções, ficando com 5 possibilidades. Logo,
$5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ possibilidades.

c) Temos que dividir em dois casos por conta do zero.
1º caso: o algarismo não termina com 0.
Começando pela restrição para ser par, temos 3 possibilidades para a terceira opção. Para a primeira opção devemos retirar o 0 e o algarismo utilizado na terceira opção, ficando com 5 possibilidades. Para a segunda opção, devemos tirar os algarismos que foram utilizados na primeira e terceira opções, ficando com 5 possibilidades. Logo,
$5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ possibilidades.
2º caso: o algarismo termina com 0.
Começando pela restrição para ser par, temos 1 possibilidade para a terceira opção. Para a primeira opção devemos retirar o 0, ficando com 6 possibilidades. Para a segunda opção, devemos tirar os algarismos que foram utilizados na primeira e terceira opções, ficando com 5 possibilidades. Logo,
$6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ possibilidades.

Assim, o total é $75 + 30 = 105$ possibilidades.

Observe que também poderíamos chegar a esse resultado subtraindo o total de números distintos, ou seja, $180 - 75 = 105$ números pares.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Escreva todos os números com 2 algarismos que podemos formar com os algarismos 1, 3, 5 e 6.
Resposta no Manual do Professor.

2. Utilizando os algarismos 2, 4, 5 e 7, escreva todos os números com 2 algarismos distintos.
Resposta no Manual do Professor.

3. Para fazer uma viagem, uma pessoa dispõe de 3 empresas de ônibus e 4 companhias aéreas. De quantas maneiras distintas essa pessoa pode escolher um ônibus ou um avião para viajar? 7

4. Para a identificação da nossa turma, será escolhida uma entre as 26 letras do alfabeto ou um entre os 10 algarismos. Qual o número de possibilidades para essa escolha? 36

5. Quando um dado comum é lançado, temos 6 resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Quantos são os resultados possíveis quando dois dados comuns são lançados? Representando cada resultado por um par ordenado, escreva o conjunto de todos os resultados possíveis.
Resposta no Manual do Professor.

6. Com os algarismos do sistema decimal, quantos números com quatro algarismos podem ser formados de modo que:
   a) seus algarismos sejam distintos? 4536
   b) seus algarismos possam ser repetidos? 9000
   c) sejam pares e seus algarismos sejam distintos? 2296
   d) sejam ímpares? 4500
   e) sejam múltiplos de 5 e seus algarismos sejam distintos? 952

7. No Brasil, as placas dos veículos são formadas por 3 letras, dentre as 26 do alfabeto, e 4 algarismos. Desconsiderando as placas em que todos os algarismos são iguais a zero, como, por exemplo, AGX-0000 e DCA-0000, responda:
   a) Qual é o número total de placas que podem ser confeccionadas nas quais as letras formam a sequência BIA? 9999
   b) Qual é o número total de placas que podem ser confeccionadas terminando com o número 2014? 17576

8. Ao dirigir-se ao caixa eletrônico de um banco para retirar dinheiro, Marina percebeu que tinha esquecido parcialmente a senha, formada por 6 algarismos. No entanto, lembrava-se de que a senha não tinha algarismos repetidos, o primeiro algarismo era 4 e o último era um algarismo ímpar. Qual é o número máximo de tentativas que Marina deverá fazer para digitar a senha correta? 8400

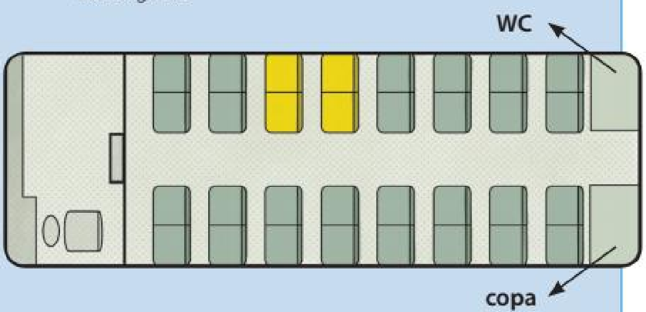
9. Considere o número 1500:
   a) Decomponha-o em fatores primos. $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$
   b) Calcule o número de divisores positivos desse número. 24
   c) Calcule o número de seus divisores positivos que sejam múltiplos de 3. 12

10. Um automóvel tem lugar para cinco pessoas, sendo 2 na frente e 3 atrás, como mostra a figura a seguir.

Ilustrações: Filipe Rocha

Uma família, composta por 2 adultos e 2 crianças deseja acomodar-se no veículo de modo que as crianças devam, obrigatoriamente, ir no banco de trás e qualquer um dos adultos possa dirigir. De quantas maneiras a acomodação pode ser feita? 12

11. Em um ônibus, duas moças e dois rapazes irão ocupar os dois bancos com dois lugares cada um, como mostra a figura:



Se cada banco deve ser ocupado por um homem e uma mulher, de quantas maneiras as 4 pessoas podem acomodar-se? 16

12. Dispondo dos algarismos 1, 2, 4, 7 e 9, quantos números múltiplos de 3 com três algarismos distintos podem ser formados? 24

13. Um número é denominado palíndromo se tiver a mesma leitura da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. Por exemplo, os números 1331 e 547745. Qual é o total de números palíndromos:
   a) com três algarismos? 90
   b) com quatro algarismos? 90
   c) com cinco algarismos, sendo o algarismo central igual a 3? 90

14. Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números com algarismos distintos e maiores de 3000 podem ser formados? 192

PERMUTAÇÕES

CAPÍTULO **14**

O princípio fundamental da contagem representa um procedimento de cálculo que permite resolver situações diversas. Entretanto, pela complexidade no próprio cálculo em algumas situações, precisamos ampliar esse procedimento utilizando até uma função presente numa calculadora científica, conforme destacado a seguir:

Figuras: © DAE

Caso, por exemplo, você digite o número 10 e aperte a tecla destacada, no visor da calculadora aparecerá o seguinte resultado:

Veremos neste capítulo que esse resultado está ligado aos chamados problemas de contagem. Antes, veremos o que é permutação simples.

Permutação simples

Vamos considerar 3 situações de contagem!

1ª situação:

Márcia, Laura, Rose, Tânia e Anita, após a participação na feira de ciências promovida pela escola, posaram para uma fotografia, como está ilustrado a seguir:

Filipe Rocha

Márcia Laura Rose Tânia Anita

Observando a ilustração, imagine que as cinco alunas mudem de lugar umas com as outras. De quantas maneiras diferentes, considerando apenas as mudanças de posição, elas poderiam se colocar lado a lado?

Aqui podemos considerar que o acontecimento consiste de cinco etapas. Como todas as alunas farão parte da fotografia, o que mudará de uma imagem para outra é a ordem delas lado a lado. Assim, no cálculo do total de possibilidades, cada etapa corresponde às possibilidades que temos de escolher a menina que ocupará determinada posição, isto é:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição
?	?	?	?	?

1ª etapa – escolha da aluna que ocupará a 1ª posição: 5 possibilidades

2ª etapa – escolha da aluna que ocupará a 2ª posição: 4 possibilidades

3ª etapa – escolha da aluna que ocupará a 3ª posição: 3 possibilidades

4ª etapa – escolha da aluna que ocupará a 4ª posição: 2 possibilidades

5ª etapa – escolha da aluna que ocupará a 5ª posição: 1 possibilidade

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, sendo n o número total de possibilidades, temos que:

$$n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 120$$

São 120 maneiras diferentes de posicionar, lado a lado, as 5 alunas para uma fotografia.

2ª situação:

Numa viagem de férias, Paulo passou uma semana em um hotel. No seu quarto havia um cofre, e ele precisou escolher uma senha com 4 dígitos para poder guardar alguns documentos importantes com segurança. Quando estava de saída, foi abrir o cofre para pegar os documentos e percebeu que tinha esquecido a senha. Sabia apenas que os algarismos utilizados eram 2, 5, 7 e 8, mas não lembrava a ordem. Resolveu, então, testar todas as sequências possíveis com esses 4 algarismos. Qual o total de senhas possíveis com esses 4 algarismos?

Michael Smolkin/Shutterstock.com

Cofre digital.

A escolha da senha consiste de quatro etapas, e, em cada uma delas, devemos escolher um algarismo entre os que estão no conjunto {2, 5, 7, 8}:

1º algarismo	2º algarismo	3º algarismo	4º algarismo
?	?	?	?

1ª etapa – escolha do 1º algarismo:
4 possibilidades

2ª etapa – escolha do 2º algarismo:
3 possibilidades

3ª etapa – escolha do 3º algarismo:
2 possibilidades

4ª etapa – escolha do 4º algarismo:
1 possibilidade

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, sendo n o número total de possibilidades de formar a senha com os 4 algarismos dados, temos:

$$n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 24$$

São 24 maneiras diferentes de formar uma senha com os 4 algarismos dados.

3ª situação:

Antônio, Lucas, Elias, Marcos, Pedro e Orlando são amigos e adoram defender o meio ambiente. Sempre que podem, visitam locais diferentes e, quando observam alguma agressão à natureza, denunciam aos órgãos competentes. Recentemente, resolveram criar uma página na internet para informar suas aventuras. Decidiram que o nome da página seria uma sigla formada com a primeira letra do nome de cada um deles. Assim, qual o número total de possíveis siglas com as iniciais dos nomes dos seis amigos?

Uma sigla possível seria:

A	L	E	M	P	O

O que vai mudar de uma sigla para outra é a ordem das letras. Assim, analogamente às duas situações anteriores, temos 6 possibilidades para a letra que deve ocupar a 1ª posição (da esquerda para a direita), 5 possibilidades para a letra que deve ocupar a 2ª posição, 4 possibilidades para a da 3ª posição, 3 possibilidades para a da 4ª posição, 2 possibilidades para a da 5ª posição e 1 possibilidade para a da 6ª posição (esse raciocínio é sempre baseado nas escolhas sucessivas das letras que vão ocupando as posições). Dessa forma, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 720$$

São 720 siglas diferentes. Cada sigla se diferencia da outra pela ordem das letras.

No exemplo, formamos sequências com letras; sequências desse tipo são também conhecidas como anagramas. Quando mudamos a ordem das letras que formam uma palavra, cada agrupamento formado é um **anagrama**.

As três situações apresentadas constituem exemplos de contagem que, em Análise Combinatória, são denominados problemas de permutação. Se pesquisarmos o que é permutação, encontraremos o significado ligado ao ato de misturar, de trocar de posição.

De modo geral, podemos dizer:

Dado um conjunto com n elementos, denomina-se **permutação** desses n elementos qualquer sequência de n elementos na qual apareçam todos os elementos do conjunto.

Se tivermos n elementos distintos e desejarmos calcular o número total de permutações que podemos formar com esses n elementos, basta considerarmos que eles serão posicionados um ao lado do outro, em n posições. A partir dessa ideia, calculamos o número de possibilidades existentes para a ocupação de cada posição (como se o evento tivesse n etapas):

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	(...)

(n − 2)ª posição	(n − 1)ª posição	nª posição

1ª posição: **n** possibilidades
2ª posição: **n − 1** possibilidades
3ª posição: **n − 2** possibilidades
4ª posição: **n − 3** possibilidades
...
$(n - 2)$ª posição: **3** possibilidades
$(n - 1)$ª posição: **2** possibilidades
nª posição: **1** possibilidade

Pelo princípio multiplicativo, o número total de maneiras existentes é obtido multiplicando-se esses números de possibilidades nas etapas:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot (\ldots) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Note que são agrupamentos ordenados (sequências) de n elementos. Assim, o que diferencia um agrupamento do outro é a ordem de seus elementos. Tais agrupamentos são conhecidos como **permutações simples**.

O número total de permutações simples de n elementos, representado por $\mathbf{P_n}$, é obtido por:

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot (\ldots) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Exemplo:

Na sala de aula, Marcos (M), Antônio (A), Pedro (P), João (J), Lucas (L) e Bruno (B) ocupam a mesma fileira de seis lugares. Considerando que em cada aula eles mudam de lugar entre si, quantas aulas são necessárias para esgotar todas as possibilidades de os seis amigos se acomodarem nas seis carteiras?

No esquema a seguir apresentamos algumas possibilidades de os alunos (observe as iniciais dos nomes) ocuparem os seis lugares.

	Possibilidade 1	**Possibilidade 2**	**Possibilidade 3**	**...**
Lugar 1	M	M	M	...
Lugar 2	A	A	A	...
Lugar 3	P	P	P	...
Lugar 4	J	J	L	...
Lugar 5	L	B	J	...
Lugar 6	B	L	B	...

A cada disposição no esquema corresponde uma permutação dos 6 amigos. O número total de possibilidades é obtido pela permutação simples de 6 elementos:

$$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_6 = 720$$

Portanto, são 720 permutações. Como cada permutação corresponde a uma troca das posições que eles ocupam nos 6 lugares, em 720 aulas eles esgotam todas as possibilidades.

Fatorial de um número natural

Ao calcular a permutação de elementos, em situações diversas de contagem, como aquelas que exemplificamos anteriormente, você terá de realizar multiplicações tais como:

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Essas multiplicações podem ser muito extensas. Basta imaginar, por exemplo, o cálculo do número total de permutações de 20 elementos de um conjunto. Teríamos que escrever:

$$P_{20} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Como tais resultados aparecem em problemas de contagem, criou-se um símbolo para tornar a escrita mais abreviada: é o **fatorial de um número natural**.

> O fatorial do número natural n ($n \geqslant 2$), indicado por n! (lemos: fatorial de n ou n fatorial) é o produto dos números naturais de 1 a n, ou seja:
>
> $$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (\ldots) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
>
> Para $n = 0$, define-se: $0! = 1$
>
> Para $n = 1$, define-se: $1! = 1$

Observações:

1. Como o fatorial de um número natural $n \geqslant 2$ é o produto dos números naturais de 1 a n, podemos dizer que o número total de permutações simples de n elementos pode ser calculado por:

$$P_n = n!$$

2. Uma consequência imediata da definição de fatorial de n é que, para qualquer número natural $n \geqslant 2$, podemos escrever:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

A partir dessa última observação, vamos compreender agora a conveniência de termos definido $0! = 1$ e $1! = 1$. Se estendermos o conceito de fatorial de n para os casos particulares $n = 1$ e $n = 0$, a consequência $n! = n \cdot (n-1)!$ deve ser conservada. Assim, substituindo nessa consequência n, temos:

Para $n = 2$

$n! = n \cdot (n-1)!$

$2! = 2 \cdot (2-1)!$

$2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1 = 1!$

Dessa forma, é conveniente considerar que $1! = 1$.

Para $n = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$

$1! = 1 \cdot (1-1)!$

$1 = 1 \cdot 0! \Rightarrow 1 = 0!$

Assim, é conveniente considerar que $0! = 1$.

No próximo capítulo veremos, por meio de situações envolvendo o cálculo com combinações, um pouco mais a respeito da conveniência de definir fatorial de 1 e fatorial de zero como 1.

O cálculo envolvendo o fatorial de um número natural permite algumas simplificações, conforme apresentamos nos exemplos a seguir.

Exemplos:

1. Vamos calcular o valor de $\dfrac{34! + 35!}{36!}$

Desenvolvemos o fatorial de 36 e o fatorial de 35 até chegar ao fatorial de 34. Em seguida, simplificamos o fatorial de 34:

$$\frac{34! + 35!}{36!} = \frac{34! + 35 \cdot 34!}{36 \cdot 35 \cdot 34!}$$

$$\frac{34! + 35!}{36!} = \frac{34!(1 + 35)}{36 \cdot 35 \cdot 34!}$$

$$\frac{34! + 35!}{36!} = \frac{1 + 35}{36 \cdot 35} \Rightarrow \frac{34! + 35!}{36!} = \frac{1}{35}$$

2. Vamos resolver a equação $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{6}$.

Inicialmente desenvolvemos o fatorial de $n + 1$ até chegar ao fatorial de $n - 1$:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{(n+1) \cdot n} = \frac{1}{6}$$

Resolvemos a equação correspondente:

$(n+1) \cdot n = 6$

$n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -3 \\ n = 2 \end{cases}$

Observando que só definimos o fatorial de um número natural, concluímos que apenas $n = 2$ é solução da equação.

Outras situações com permutação

No cálculo envolvendo contagem, a utilização do conceito de fatorial de um número natural será útil.

A seguir, apresentamos exemplos de problemas de contagem envolvendo permutação, porém com certas restrições. São situações de contagem que necessitam de mais cuidado quando de sua resolução. Embora a teoria para a resolução seja a mesma estudada até aqui, sugerimos uma leitura cuidadosa de cada exemplo e uma discussão dos procedimentos adotados, caso necessário, com seus colegas.

Exemplo:

Vamos calcular o total de anagramas formados com as letras da palavra ATOR que:

a) iniciem pela letra A;

b) iniciem por uma consoante.

a) Como todos os anagramas devem iniciar com a letra A, fixamos a letra A na primeira posição; assim, as outras 3 letras deverão ocupar as três posições restantes. Sendo n o total de resultados possíveis, temos:

$n = P_3$

$n = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 6$

Portanto, são 6 anagramas que iniciam pela letra A.

b) Como devem iniciar por uma consoante, existem duas possibilidades para a 1ª posição. Uma dessas consoantes ocupará essa posição, e a outra, com as duas vogais, ocupará uma das três posições restantes:

T	?	?	?

ou

R	?	?	?

Sendo n o total de anagramas, temos:

$n = 2 \cdot P_3$

$n = 2 \cdot 3!$

$n = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 12$

Exemplos:

1. Considerando o conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, vamos formar números com 6 algarismos distintos, utilizando os elementos desse conjunto. Assim, quantos desses números são pares?

Como os números deverão ser pares, o algarismo da unidade deverá ser 4, 6 ou 8. Escolhendo um deles para ser o algarismo das unidades, os demais deverão ser "permutados", isto é:

?	?	?	?	?	4

ou

?	?	?	?	?	6

ou

?	?	?	?	?	8

Sendo n o total de números que podemos formar, então:

$n = 3 \cdot P_5$

$n = 3 \cdot 5!$

$n = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow n = 360$

Portanto, são 360 números que podemos formar de acordo com as condições estabelecidas.

2. Numa festa de final de ano, os amigos Maria, Joana, Carla, Pedro e André posaram lado a lado para uma fotografia. Vamos calcular o número de maneiras possíveis de eles se posicionarem conforme as seguintes condições:

a) os dois meninos devem ficar sempre um ao lado do outro;

b) as três meninas devem ficar sempre uma ao lado da outra.

a) Como os dois meninos devem ficar sempre juntos, vamos considerá-los como se fossem uma pessoa só. Dessa forma, teríamos quatro "pessoas" para permutar (M, J, C, PA):

$P_4 = 4!$

Note que Pedro e André podem permutar suas posições entre si (André e Pedro ou Pedro e André):

$P_2 = 2!$

Sendo n o número total de possibilidades, temos:

$n = P_2 \cdot P_4$

$n = (2!) \cdot (4!)$

$n = 2 \cdot 24 \Rightarrow n = 48$

Portanto, são 48 possibilidades.

b) Como as três meninas devem ficar sempre juntas, vamos considerá-las como se fossem uma pessoa só. Dessa forma, teríamos três "pessoas" para permutar (MJC, P, A):

$P_3 = 3!$

Note que as três meninas podem permutar suas posições entre si e continuarão juntas:

$P_3 = 3!$

Sendo n o número total de possibilidades, temos:

$n = P_3 \cdot P_3$

$n = (3!) \cdot (3!)$

$n = 6 \cdot 6 \Rightarrow n = 36$

Portanto, são 36 possibilidades.

Exercícios resolvidos

1. Com relação à palavra ALUNOS, calcule:

a) o número total de anagramas.

b) o número total de anagramas que começam pela letra A.

c) o número total de anagramas que têm as vogais juntas.

d) o número total de anagramas que têm as vogais juntas e em ordem alfabética.

e) o número total de anagramas que têm as vogais em ordem alfabética.

a) $P_6 = 6! = 720$

b)

$\boxed{A}$ ___ ___ ___ ___ ___

Fixando a letra A no começo, sobram 5! maneiras de reorganizar as demais letras. Assim,

$5! = 120$.

c)

$\boxed{AUO}$ ___ ___ ___

Considerando as vogais como um "bloquinho", são 4! maneiras de reorganizar o bloquinho mais as três consoantes, e 3! maneiras de reorganizar as letras dentro do "bloquinho". Assim,

$4! \cdot 3! = 144$.

d)

$\boxed{AOU}$ ___ ___ ___

Considerando as vogais como um "bloquinho" são 4! maneiras de reorganizar o bloquinho mais as três consoantes, e não apenas 1 maneira de organizar as letras dentro do "bloquinho" em ordem alfabética. Assim,

$4! \cdot 1! = 24$.

e)

De todos os anagramas da palavra ALUNOS, podemos fixar as consoantes em determinada posição e permutar entre as vogais, montando assim grupos de 6 (3!) anagramas. Dos 6 anagramas de cada grupo, apenas em um anagrama as vogais aparecem em ordem alfabética. Assim,

$\dfrac{P_6}{3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$

2. Resolva a equação $\dfrac{n! \cdot (n+2)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!} = 35$.

$\dfrac{n! \cdot (n+2)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!} = 35 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{n \cdot (n-1)! \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!} = 35 \rightarrow$

$n \cdot (n+2) = 35 \rightarrow n^2 + 2n - 35 = 0$

$\therefore n = 5$ ou $n = -7$ (não convém)

Logo, $n = 5$.

3. Considere a expressão $x(n) = \dfrac{n!\,(n^2 - 1)}{(n+1)!}$. Determine o valor de $x(2017)$.

Observando o produto notável no numerador dessa fração e considerando que o denominador pode ser escrito em função do fatorial de n, temos:

$x(n) = \dfrac{n!\,(n^2-1)}{(n+1)!}$

$x(n) = \dfrac{n!\,(n+1) \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot n!}$

$x(n) = (n-1)$

$x(2017) = 2017 - 1 \rightarrow x(2017) = 2016$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Calcule o número de permutações que podem ser feitas com:

a) 4 elementos. 24

b) 5 elementos. 120

c) 6 elementos. 720

2. Com as letras da palavra JURO, forme todas as sequências possíveis, considerando que todas as letras devem aparecer em cada sequência.
Resposta no Manual do Professor.

3. Considere 10 algarismos distintos para criar senhas.

a) Qual é o número total de senhas possíveis de serem formadas? 3 628 800

b) Dessas senhas, quantas iniciam com o algarismo 2? 362 880

c) Do total de senhas possíveis, quantas terminam com o algarismo zero? 362 880

d) Do total de senhas possíveis, quantas começam com um algarismo par? 1 814 400

e) Quantas senhas começam com um algarismo ímpar? 1 814 400

4. Calcule o valor de:

a) $5!$ 120

b) $10!$ 3 628 800

c) $4! + 6!$ 744

d) $7! - 5!$ 4 920

e) $\dfrac{9!}{7!}$ 72

f) $\dfrac{12!}{10!\,3!}$ 22

5. Indique, em seu caderno, se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

a) $0! = 1$ V

b) $(m + n)! = m! + n!$, em que m e n são números naturais. F

c) $(m - n)! = m! - n!$, em que m e n são números naturais e $m \geqslant n$. F

d) $(m \cdot n)! = m! \cdot n!$, em que m e n são números naturais. F

e) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (...) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = (n + 2)!$ V

6. Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ $n^2 + n$

b) $\dfrac{(n-2)!}{(n-1)!}$ $\dfrac{1}{n-1}$

c) $\dfrac{100! + 101!}{99!}$ 10 200

7. Resolva a equação $(n - 5)! = 5\,040$. 12

8. Calcule o número de anagramas das palavras:

a) aluno. 120

b) escola. 720

9. Considere a sequência dada pelo termo geral $a_n = \dfrac{(n^2 - 4) \cdot (n + 1)!}{(n + 2)!}$

Calcule o valor de a_{2012}. $a_{2012} = 2010$

10. O número 13! pode ser escrito na forma $2^m \cdot k$, na qual m é um número natural e k é um número natural ímpar. Calcule o valor de m. $m = 10$

11. Utilizando a igualdade $n \cdot n! = (n + 1)! - n!$, calcule o valor da expressão $2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + 9 \cdot 9!$
$10! - 2! = 3\,628\,798$

12. Mostre que para todo n natural não nulo é válida a igualdade $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (...) \cdot 2n = 2^n \cdot n!$.
Resposta no Manual do Professor.

13. Com relação à palavra FELIZ, calcule:

a) o número total de anagramas que começam por uma vogal. 48

b) o número total de anagramas que começam e terminam com uma consoante. 36

14. Um dos anagramas da palavra ESCOLA é ALECOS. Observe que, nesse anagrama, duas vogais e duas consoantes não ocupam posições adjacentes. Assim, calcule:

a) o número total de anagramas da palavra ESCOLA. 720

b) o número total de anagramas da palavra ESCOLA que não possuem duas vogais nem duas consoantes em posições adjacentes. 72

15. Uma criança formou uma fila com 10 bolas de cores diferentes, como mostra a figura:

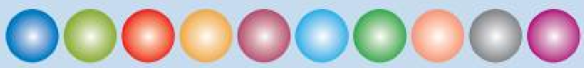


Figura: © DAE

Em seguida, começou a trocar uma ou mais bolas de lugar e pensou: "Vou formar todas as filas possíveis". Qual é o número de filas diferentes que a criança poderá formar? $10! = 3\,628\,800$

16. Com relação à palavra IMAGENS, calcule:

a) o número total de anagramas. 5 040

b) o número total de anagramas que têm as vogais juntas. 720

c) o número total de anagramas que têm as vogais juntas e em ordem alfabética. 120

d) o número total de anagramas que têm as vogais em ordem alfabética. 840

Permutação com repetição

Até aqui as situações propostas para resolução envolviam permutações com elementos distintos, chamadas de permutações simples. Mas o que acontece se tivermos elementos repetidos? Um exemplo bem simples seria imaginar o cálculo dos anagramas de uma palavra que apresentasse letras iguais. A seguir, formamos todos os anagramas com as letras da palavra BALA:

BALA	AABL	ALBA
BLAA	ABLA	LABA
BAAL	ABAL	LBAA
AALB	ALAB	LAAB

Pela contagem direta, chegamos à conclusão de que são 12 os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra BALA. Mas como podemos chegar a essa quantidade sem construir os anagramas? Como a letra A aparece duas vezes na palavra, vamos inicialmente utilizar um artifício, colocando um asterisco numa dessas letras, e considerar que elas são distintas. Assim, teremos que a quantidade n de anagramas da palavra "BALA*" pode ser calculada pela permutação simples de 4 elementos:

$$n = P_4$$
$$n = 4! = 24$$

BALA*	AA*BL	ALBA*	BA*LA	A*ABL	A*LBA
BLAA*	ABLA*	LABA*	BLA*A	A*BLA	LA*BA
BAA*L	ABA*L	LBAA*	BA*AL	A*BAL	LBA*A
AA*LB	ALA*B	LAA*B	A*ALB	A*LAB	LA*AB

Como a letra A aparece 2 vezes para cada um dos 4! anagramas formados, há outro idêntico com as letras A nas mesmas posições (note que as três primeiras colunas, com exceção do asterisco, são iguais às três últimas colunas). Assim, o número n de anagramas que formamos é:

$$n = \frac{P_4}{P_2}$$

$$n = \frac{4!}{2!}$$

$$n = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} \Rightarrow n = 12$$

Vamos considerar a seguir outro exemplo para compreender melhor como é o cálculo de permutação que envolve elementos repetidos.

Exemplo:

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra TENET presente num curioso e antigo quadrado mágico? Observe esse quadrado representado a seguir.

S	A	**T**	O	R
A	R	**E**	P	O
T	**E**	**N**	**E**	**T**
O	P	**E**	R	A
R	O	**T**	A	S

A palavra central é um **palíndromo**, isto é, a palavra que mantém o mesmo sentido quando é lida de frente para trás e de trás para a frente.

Vamos construir todos os anagramas possíveis, conforme a seguir (discuta com seus colegas uma maneira de construir todos os anagramas):

TTEEN	NTEET	EETTN	NTETE	TETEN
TTNEE	NEETT	ETTEN	NETET	TNEET
NTTEE	EENTT	TTENE	EETNT	TNTEE

TNETE	TENET	NETTE	ENTTE	ETENT
TENTE	TEETN	ENTET	ETETN	ETNTE
TETNE	TEENT	ENETT	ETNET	ETTNE

Se considerarmos que as cinco letras são diferentes, temos P_5 anagramas. Entretanto, as permutações entre as letras iguais não produzem novos anagramas (2 letras T e 2 letras E). Dessa forma, dividimos P_5 por $P_2 \cdot P_2$ para calcular n (total de anagramas):

$$n = \frac{P_5}{P_2 \cdot P_2}$$

$$n = \frac{5!}{2!\,2!}$$

$$n = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} \Rightarrow n = 30$$

Dados n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, n_3 são iguais a a_3, ..., n_k são iguais a a_k, sendo $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$, o número de permutações possíveis desses elementos é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, ..., n_k} = \frac{n!}{(n_1!) \cdot (n_2!) \cdot (n_3!) \cdot (...) \cdot (n_k!)}$$

Exemplos:

1. Quantos são os anagramas das letras da palavra OSSOS?

A palavra contém 5 letras, das quais duas são iguais a O e três são iguais a S. Assim, conforme a relação matemática anterior, temos:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{(2!) \cdot (3!)}$$

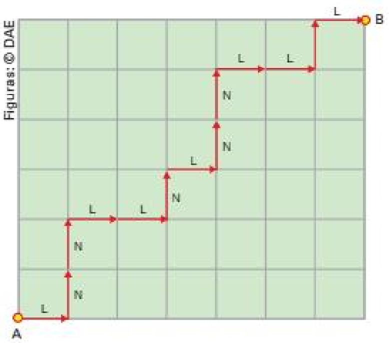
$$P_5^{2,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} \Rightarrow P_5^{2,3} = 10$$

Observe a seguir os 10 anagramas:

OOSSS	SSSOO	SOOSS	SSOOS	OSOSS
OSSSO	SOSSO	SOSOS	SSOSO	OSSOS

2. Na malha quadriculada abaixo está representado um esquema de parte das ruas de um bairro numa cidade planejada. Cada linha representa uma rua, e cada quadrado, um quarteirão. Considere que você está no ponto A e deseja ir até o ponto B, andando para o norte (N) ou para o leste (L). Note que um caminho já está destacado:

Figuras: © DAE



Vamos calcular a quantidade de caminhos diferentes para ir de A até B, caminhando apenas para o norte (N) e para o leste (L).

Observando a figura, concluímos que, conforme as condições impostas, em qualquer caminho que escolhermos para fazer, temos que andar 6 "quarteirões" para o norte e 7 para o leste.

No caminho indicado, temos uma sequência de 13 (6 + 7 = 13) "quarteirões", que podemos representar por:

(L, N, N, L, L, N, L, N, N, L, L, N, L).

Qualquer outro caminho que escolhermos fazer será obtido permutando esses 13 "quarteirões", havendo repetição de 7 para leste e 6 para norte. Assim, sendo **n** o número total de caminhos possíveis, temos:

$$n = P_{13}^{7,6}$$

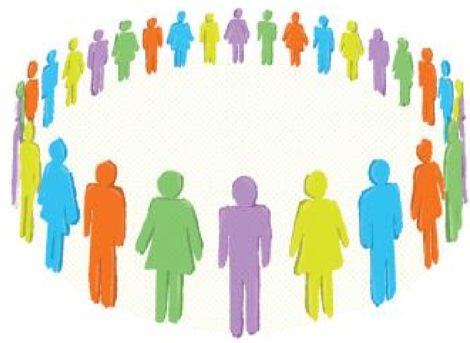
$$n = \frac{13!}{(7!) \cdot (6!)}$$

$$n = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{(7!) \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow n = 1716$$

Permutação circular

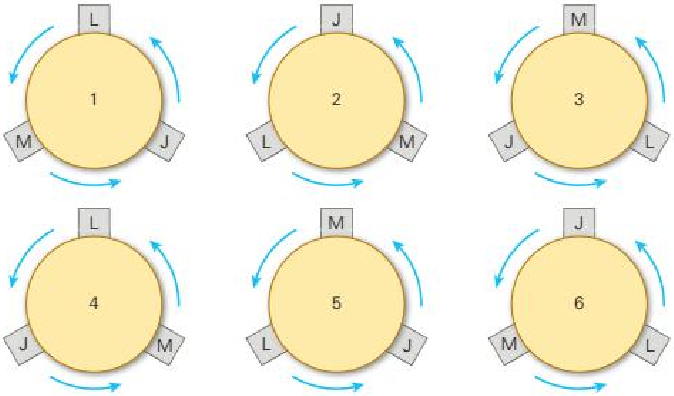
Há uma situação um pouco diferente relacionada à permutação conhecida como permutação circular. Dizemos que uma permutação de n elementos distintos é denominada circular quando eles são dispostos em círculo em n lugares. Nesse caso, dizemos que, nessa "disposição", uma permutação se diferencia da outra quando não coincidem por rotação.



Exemplos:

1. As amigas Lúcia, Maria e Joana irão sentar-se junto a uma mesa circular com 3 lugares. De quantas maneiras diferentes isso poderá ocorrer se considerarmos que uma forma de elas se posicionarem se diferencia da outra apenas pela rotação?

Se pensarmos na permutação simples de 3 elementos, teremos 3! possibilidades, indicadas a seguir:



As três primeiras disposições (indicadas por 1, 2 e 3) coincidem entre si, considerando a rotação indicada pelas setas. Também isso ocorre com as três últimas disposições (indicadas por 4, 5 e 6). Dessa forma, se representarmos por $\mathbf{PC_3}$ o total de permutações circulares de 3 elementos, teremos:

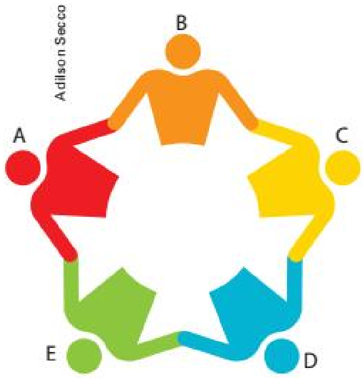
$$PC_3 = 2$$

Observação:

Enquanto nas permutações simples importam os lugares que os elementos ocupam, nas permutações circulares interessa apenas a posição relativa dos elementos entre si.

Voltando ao exemplo, e considerando o sentido anti-horário indicado pela seta, temos, nas três primeiras disposições, que Lúcia precede Maria, que precede Joana, que precede Lúcia. Isso indica que a posição relativa das três amigas é a mesma. Já nas três últimas disposições, Lúcia precede Joana, que precede Maria, que precede Lúcia. Novamente, aqui a posição relativa das três amigas é a mesma.

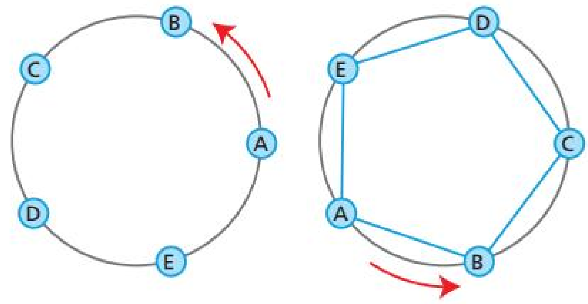
Adilson Secco



2. Vamos considerar que as cinco crianças estejam brincando de roda. Na figura a seguir, elas estão indicadas pelas letras A, B, C, D e E. Queremos calcular o número total de permutações circulares dessas crianças, isto é,

$$PC_5 = ????$$

Como, na permutação circular, o que vai interessar é a posição relativa entre os elementos, aqui devemos observar quem está ao lado de quem. Assim, duas rodas serão iguais quando, em ambas, cada criança for ladeada pelas mesmas crianças, tanto à sua esquerda quanto à sua direita. Apenas para exemplificar, as duas rodas esquematizadas a seguir são consideradas iguais:

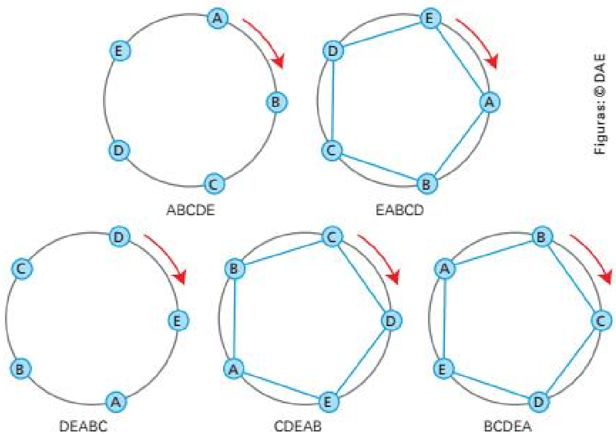


Se observarmos, nas duas figuras, o sentido indicado pela seta a partir da criança A, temos que A precede B, que precede C, que precede D, que precede E, que precede A.

Vamos, agora, descobrir quantas dessas permutações circulares são iguais. Se posicionássemos essas crianças em fila (não circular), o total de maneiras diferentes de organizá-las seria permutação simples de 5, isto é:

$$P_5 = 5! = 120$$

Porém, temos que determinar quantas dessas permutações simples correspondem à mesma permutação circular. Vamos partir de uma disposição circular e descobrir a quantas permutações simples ela corresponde:



Figuras: © DAE

Como as permutações circulares representadas são iguais (percorra a circunferência num mesmo sentido começando, por exemplo, pela criança A), dizemos que cada desenho está representando uma permutação simples. Assim, cada permutação circular corresponde a cinco permutações simples diferentes. Então, para calcular o número total de permutações circulares, dividimos as permutações simples por 5, isto é:

$$PC_5 = \frac{P_5}{5}$$

$$PC_5 = \frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5}$$

$$PC_5 = 4! \Rightarrow PC_5 = 24$$

Se considerarmos, analogamente, outras permutações circulares com outros números de elementos, teremos:

Permutação circular de 6 elementos →

$$\rightarrow PC_6 = \frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5!}{6} = 5!$$

Permutação circular de 7 elementos →

$$\rightarrow PC_7 = \frac{7!}{7} = \frac{7 \cdot 6!}{7} = 6!$$

Permutação circular de 8 elementos →

$$\rightarrow PC_8 = \frac{8!}{8} = \frac{8 \cdot 7!}{8} = 7!$$

De modo geral, tem-se:

O número total de permutações circulares de *n* elementos distintos é determinado por:

$$\mathbf{PC_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!}$$

Exercícios resolvidos

1. Considerando os anagramas da palavra CALCULADORA:

a) quantos são?

b) quantos têm as vogais juntas?

a)

São 11 letras das quais temos: duas letras C, três letras A, duas letras L, uma letra U, uma letra D, uma letra O e uma letra R. Assim:

$$P_{11}^{2,2,3} = \frac{11!}{2!\,2!\,3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!}$$

$$= 1\,663\,200$$

b)

$\boxed{\text{AAAUO}}$ ____ ____ ____ ____ ____ ____

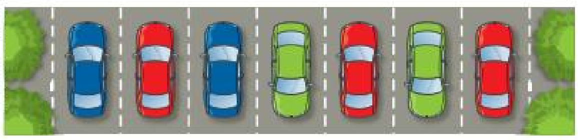
Juntando as vogais num "bloquinho", temos para permutar: um "bloquinho", duas letras C, duas letras L, uma letra D e uma letra R. Ainda há a permutação dentro do "bloquinho": três letras A, uma letra U e uma letra O. Assim:

$$P_6^{2,2} \cdot P_5^{3} = \frac{6!\,5!}{2!\,2!\,3!} =$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 3\,600$$

2. Nas 7 vagas do estacionamento de um comércio, nas 7 vagas há 3 carros vermelhos, 2 azuis e 2 verdes.

Adilson Secco



Se levarmos em consideração apenas a cor dos carros,

a) de quantos modos esses carros podem estar distribuídos nesse estacionamento?

b) de quantos modos esses carros podem estar distribuídos nesse estacionamento, de modo que os carros de mesma cor estejam sempre lado a lado?

a) Levando em consideração apenas a cor dos carros, temos:

$$P_7^{2,2,3} = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 210$$

b) Levando em consideração apenas a cor dos carros, dividindo-os em três "bloquinhos" de cores, temos:

$P_3 = 3! = 6$

3. Para uma reunião em uma empresa, dez pessoas irão sentar-se ao redor de uma mesa redonda, entre elas o diretor e o vice-diretor. Calcule:

a) de quantas maneiras distintas essas dez pessoas podem sentar-se ao redor da mesa;

b) de quantas maneiras distintas essas dez pessoas podem sentar-se ao redor da mesa de modo que o diretor e o vice-diretor fiquem lado a lado.

a) Trata-se de uma permutação circular. Assim:

$PC_{10} = (10 - 1)! = 9! = 362\,880$

b) Juntando o diretor e o vice-diretor num "bloquinho", temos 9 elementos para permutar ao redor da mesa e dois elementos para permutar dentro do "bloquinho". Assim:

$PC_9 \cdot P_2 = (9 - 1)!\,2! = 8!\,2! = 80\,640$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

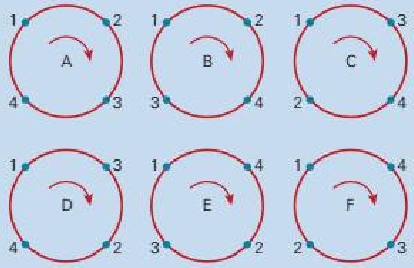
1. Escreva todos os anagramas possíveis das letras da palavra ASA. AAS, ASA, SAA

2. Considere as letras da palavra MASSA.

a) Qual o total de anagramas que podem ser formados com essas letras? 30

b) Desses anagramas, quantos começam pela letra M? 6

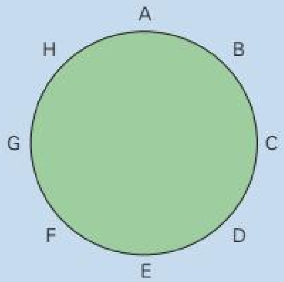
3. Os desenhos a seguir estão representando as permutações circulares de quatro pessoas. Em cada um dos desenhos está indicado um sentido para considerar. Assim, por exemplo, no desenho A, podemos observar que as ordens 1-2-3-4, 2-3-4-1, 3-4-1-2 e 4-1-2-3 representam a mesma disposição circular.



Em seu caderno, escreva para cada desenho B, C, D, E e F as disposições circulares correspondentes, como observadas no desenho A.

Resposta no Manual do Professor.

4. De quantas maneiras podemos dispor oito pessoas (A, B, C, D, E, F, G e H) em torno de uma mesa circular, como mostra a figura? 5 040

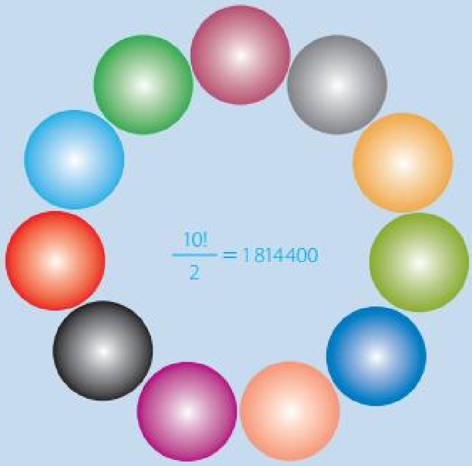


5. Um grupo de sete amigos, entre eles o casal de namorados Bianca e Marcos, irão se sentar ao redor de uma mesa circular. Sabendo que os dois namorados devem se sentar obrigatoriamente lado a lado, calcule o total de maneiras de os amigos se acomodarem. 240

6. Qual o total de maneiras de dispor quatro rapazes e três moças em uma mesa circular, de modo que as moças fiquem juntas? 144

7. Para realizar uma atividade, um professor selecionou quatro meninos e quatro meninas. Em seguida, solicitou que eles se sentassem ao redor de um círculo, de modo que ficassem alternadamente um menino e uma menina. Calcule o número total de maneiras em que os alunos podem se organizar para a atividade seguindo a orientação do professor. 144

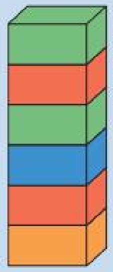
8. Uma pulseira é formada por 11 esferas justapostas e de cores distintas, como mostra a figura. Consideramos que duas pulseiras são idênticas se uma delas puder ser obtida a partir de outra por meio de uma rotação. Sendo assim, quantas pulseiras diferentes podem ser obtidas?



9. Observe, na figura ao lado uma pilha formada por blocos coloridos

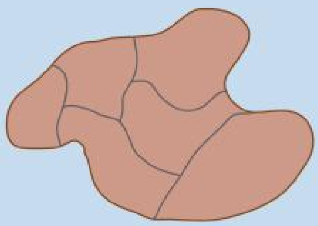
a) Qual é o total de maneiras diferentes de empilhar os blocos? 180

b) Qual é o total de maneiras de empilhar os blocos de modo que blocos de mesma cor permaneçam sempre juntos? 24



Figuras: © DAE

10. Observe o mapa de uma pequena cidade composta por seis bairros:



Calcule o total de maneiras de pintar o mapa dessa cidade, sendo dois bairros de verde, dois de azul, um de vermelho e um de amarelo. 180

11. Cinco rapazes e cinco moças desejam tirar uma fotografia ocupando os cinco degraus de uma escada de modo que em cada degrau permaneça um rapaz e uma moça. Quantas fotografias diferentes podem ser tiradas? $P_5 \cdot P_5 \cdot (P_2)^5 = 460\,800$

12. Com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7, 8 e 9, quantos números de sete algarismos distintos podem ser formados, de modo que os algarismos 3 e 8 sempre ocupem posições adjacentes e os algarismos 1 e 5 jamais ocupem posições adjacentes? 960

COMBINAÇÕES E ARRANJOS

CAPÍTULO 15

Nas situações de contagem (agrupamentos de elementos), de um modo geral, existem duas "atitudes intuitivas": a de **escolher** e a de **misturar**. Quando resolvemos até aqui situações relacionadas ao princípio multiplicativo ou mesmo aquelas apresentadas no capítulo de permutações (simples, com repetição ou mesmo circular), utilizamos o procedimento de misturar.

Vamos agora ampliar essas ideias estudando também aquelas situações em que precisamos fazer escolhas de elementos. Assim, por exemplo, imagine que você pretende comprar 5 bolas de sorvete de sabores diferentes a partir de 8 sabores disponíveis. Qual é o número total de possibilidades nessa escolha?

M. Unal Ozmen/ Shutterstock.com

Questões e reflexões

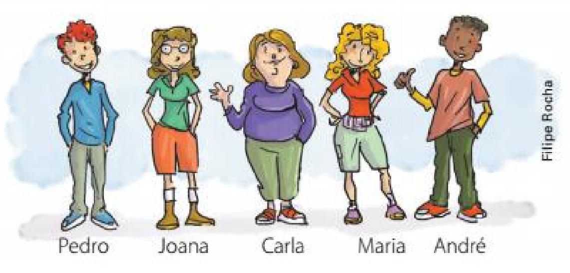
Resposta no Manual do Professor.

Pense em como determinar o número total de escolhas de 5 bolas de sorvete de sabores diferentes a partir de 8 sabores disponíveis. Represente os sabores por letras e faça todas as combinações possíveis.

Combinações simples

Considere a seguinte situação:

Três dos cinco jovens abaixo serão escolhidos para formar uma equipe de trabalho escolar.



Filipe Rocha

Qual é o número total de grupos que poderemos formar com 3 dos 5 jovens?

Note que nem todos os elementos disponíveis serão utilizados, somente 3 dos 5. Além disso, a ordem em que os elementos serão escolhidos não é importante. Mesmo que a ordem dos elementos não faça diferença, vamos iniciar considerando que queremos determinar, pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de essas pessoas ocuparem sucessivamente 3 posições (a partir daí podemos determinar o número possível de escolhas, conforme pergunta):

1ª posição	2ª posição	3ª posição

- Número de possibilidades para a 1ª posição: 5.
- Número de possibilidades para a 2ª posição: 4.
- Número de possibilidades para a 3ª posição: 3.

Então, pelo princípio multiplicativo, temos 60 possibilidades ($5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$).

- Como não interessa a ordem deles e quando utilizamos o princípio multiplicativo essa ordem é levada em consideração, significa que alguns agrupamentos foram repetidos. Assim, por exemplo, se três dos jovens forem Maria, Joana e Carla, os agrupamentos a seguir, embora sejam iguais, foram computados como diferentes entre os 60 calculados:

Maria – Joana – Carla
Maria – Carla – Joana
Joana – Maria – Carla
Joana – Carla – Maria
Carla – Joana – Maria
Carla – Maria – Joana

- Esses 6 grupos representam a permutação dos 3 jovens considerados (3! = 6). Assim, sendo n número total de grupos com 3 pessoas que podemos formar a partir dos 5 jovens, temos:

$$n = \frac{60}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

No quadro abaixo, temos os 10 grupos possíveis:

Maria – Joana – Carla	Maria – Pedro – André
Maria – Joana – Pedro	Joana – Carla – Pedro
Maria – Joana – André	Joana – Carla – André
Maria – Carla – Pedro	Joana – Pedro – André
Maria – Carla – André	Carla – Pedro – André

Essa situação apresentada corresponde à ideia de formar subconjuntos com 3 elementos a partir de 5 elementos disponíveis. Representando os jovens pelas letras M, J, C, P e A (iniciais de seus nomes), formamos subconjuntos de {M, J, C, P, A} com 3 elementos em cada um:

{M, J, C}, {M, P, A}, {M, J, P}, {J, C, P}, {M, J, A},

{J, C, A}, {M, C, P}, {J, P, A}, {M, C, A}, {C, P, A}

Observação:

Em Análise Combinatória, esse tipo de agrupamento em que a ordem dos elementos não faz diferença é conhecido como combinação. De modo geral, dizemos que a essência das situações de **combinação** está na formação de subconjuntos a partir dos elementos de um conjunto dado.

O raciocínio que empregamos para chegar à resposta do exemplo anterior pode também ser empregado em outras situações similares. Contudo, vamos apresentar uma fórmula que você também pode utilizar para obter a quantidade de combinações. Embora possamos dizer que vamos escolher objetos, para simplificar, utilizaremos a denominação de elementos associados aos conjuntos.

Considere um conjunto com ***n*** elementos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n\}$ e que queremos escolher ***p*** desses elementos ($p \leq n$) para formar subconjuntos com ***p*** elementos. Cada escolha desses elementos é denominada **combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*.**

Assim como fizemos no exemplo anterior, vamos calcular inicialmente o total de possibilidades de ocupação de p posições, isto é:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	(...)	(p − 1)ª posição	pª posição

Número de possibilidades para a 1ª posição: n

Número de possibilidades para a 2ª posição:

$$n - 1$$

Número de possibilidades para a 3ª posição:

$$n - 2$$

...

Número de possibilidades para a $(p - 1)$ª posição:

$$n - p + 2$$

Número de possibilidades para a pª posição:

$$n - p + 1$$

Então, pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades é:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (...) \cdot (n - p + 2) \cdot (n - p + 1)$$

Como não interessa a ordem dos elementos e, quando utilizamos o princípio multiplicativo, essa ordem é levada em consideração, significa que alguns agrupamentos com p elementos foram repetidos. Como cada agrupamento tem p elementos, existem p! sequências com esses elementos. Assim, sendo C_n^p (lemos combinação de n elementos p a p), o número total de subconjuntos com p elementos que podemos formar é dado por

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (...) \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1)}{p!}$$

Há uma fórmula um pouco mais simples que essa. Para obtê-la, multiplicamos o numerador e o denominador do segundo membro por (n − p)!, isto é:

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (...) \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{p!(n-p)!}$$

$$\downarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (...) \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)! = n!$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

O número total de combinações simples de ***n*** elementos tomados ***p*** a ***p***, com $n \geq p$, é calculado por:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo:

Retornando ao exemplo do início do capítulo, temos que escolher 3 jovens entre os 5 disponíveis. Vamos calcular o número total de escolhas possíveis:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2 \cdot 1} \Rightarrow C_5^3 = 10$$

Ao efetuarmos combinações simples de n elementos tomados p a p, estamos formando subconjuntos com p elementos. Assim, vejamos alguns casos particulares:

- $n = p$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\downarrow n = p$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1 \Rightarrow C_n^n = 1$$

Isso significa que um conjunto A com n elementos admite um único subconjunto com n elementos (o próprio conjunto A).

- $n > p$ e $p = 0$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\downarrow p = 0$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1n!} = 1 \Rightarrow C_n^0 = 1$$

Isso significa que um conjunto A com n elementos admite um único subconjunto com zero elemento (o conjunto $\varnothing$).

- $n = p = 0$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\downarrow n = p = 0$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \Rightarrow C_0^0 = 1$$

Isso significa que um conjunto A com zero elemento admite um único subconjunto com zero elemento (o conjunto A é o próprio conjunto vazio).

Observação:

O fatorial de zero e o fatorial de 1 foram definidos no capítulo anterior como iguais a 1. Isso é conveniente para o cálculo do número de subconjuntos, por exemplo, com qualquer número de elementos no subconjunto.

Exemplos:

Observe o cálculo envolvendo combinações simples de elementos.

1. Quantos subconjuntos admite o conjunto $A = \{3, 4, 5, 6\}$?

- Cálculo do número de subconjuntos com zero elemento:

$$C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{1 \cdot 4!} = 1 \Rightarrow C_4^0 = 1$$

- Cálculo do número de subconjuntos com um elemento:

$$C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = 4 \Rightarrow C_4^1 = 4$$

- Cálculo do número de subconjuntos com dois elementos:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 6 \Rightarrow C_4^2 = 6$$

- Cálculo do número de subconjuntos com três elementos:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!1} = 4 \Rightarrow C_4^3 = 4$$

- Cálculo do número de subconjuntos com quatro elementos:

$$C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4!}{4! \cdot 1} = 1 \Rightarrow C_4^4 = 1$$

Sendo n o total de subconjuntos de A, temos que:

$$n = C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$$

$$n = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 \Rightarrow n = 16$$

2. Considere que um conjunto A tem 10 elementos. Então, determine:

a) o número de subconjuntos de A que possuem 3 elementos;

b) o número de subconjuntos de A que possuem 7 elementos.

a) Devemos escolher 3 elementos entre os 10 disponíveis. O total de possibilidades é:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{10}^3 = 120$$

Portanto, são 120 subconjuntos com 3 elementos em cada subconjunto.

b) Devemos escolher 7 elementos entre os 10 disponíveis. O total de possibilidades é:

$$C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_{10}^{7} = 120$$

Portanto, são 120 subconjuntos com 3 elementos em cada subconjunto.

Observação:

Nesse exemplo, os dois resultados são iguais. Isso ocorre porque, a cada vez que retiramos 3 elementos (de um total de 10) para formar um subconjunto, sobram 7 elementos para formar outro subconjunto agora com 7 elementos.

3. Em um departamento de uma empresa trabalham 9 funcionários. Destes, 5 serão escolhidos para participar de um congresso no final do ano. De quantas formas podem ser escolhidas essas 5 pessoas?

- Já que a ordem das pessoas na escolha não importa, temos um problema de combinação. Como são 9 pessoas disponíveis e devemos escolher 5, temos:

$$C_{9}^{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_{9}^{5} = 126$$

Portanto, são 126 possibilidades quanto à escolha de 5 funcionários entre os 9 disponíveis.

Observação:

Poderíamos ter obtido esse total de possibilidades utilizando o princípio multiplicativo (observe a seguir), ou seja, não é necessária a utilização de fórmula para a resolução de problemas de contagem que se referem ao número de escolhas de elementos.

- Vamos supor que a ordem das pessoas, inicialmente, importe. Utilizando o princípio multiplicativo, vamos analisar as possibilidades de posicionar em linha (ou fila) 5 pessoas a partir de 9 disponíveis:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição

Número de possibilidades para a 1ª posição: 9.

Número de possiblidades para a 2ª posição: 8.

Número de possibilidades para a 3ª posição: 7.

Número de possibilidades para a 4ª posição: 6.

Número de possibilidades para a 5ª posição: 5.

Pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras de posicionarmos as 5 pessoas é dado por:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

- Sabemos, porém, que a ordem na escolha das pessoas não importa. Assim, cada grupo de 5 elementos foi computado 5! vezes. Para determinar o número de formas de escolher 5 pessoas, devemos dividir o resultado anterior por 5!, ou seja:

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Exemplo:

Na figura a seguir, indicamos oito pontos de uma circunferência. Cada segmento que tem suas extremidades numa circunferência representa uma corda dessa circunferência. Vamos calcular quantas cordas podem ser formadas ligando esses pontos destacados dois a dois.

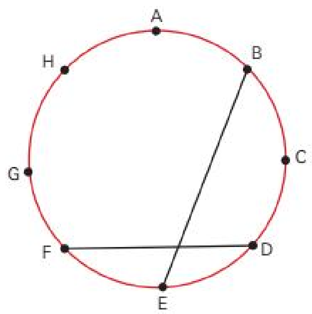


Figura: © DAE

- Vamos formar todas as sequências possíveis com as letras A, B, C, D, E, F, G e H (que representam os pontos marcados na circunferência), isto é, vamos calcular o número de maneiras de posicionar 2 das 8 letras:

1ª posição	2ª posição

Número de possibilidades para a 1ª posição: 8.

Número de possibilidades para a 2ª posição: 7.

Pelo princípio multiplicativo, o total de maneiras de posicionar duas letras é dado por: $8 \cdot 7$.

- Como o segmento BE é o mesmo que o segmento EB, a ordem na escolha dos pontos para formar os segmentos não importa. Assim, cada grupo de dois elementos (letras que representam os pontos) foi computado 2! vezes. Para determinar o número de maneiras de formar segmentos, devemos dividir o resultado anterior por 2!, isto é:

$$\frac{8 \cdot 7}{2!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$$

Portanto, são 28 cordas que podem ser formadas.

- Como não importa a ordem dos pontos escolhidos para formar as cordas da circunferência, temos uma situação de combinação simples, isto é,

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = 28$$

Observação:

O número d de diagonais de um polígono convexo com n vértices (n lados) pode ser calculado considerando que devemos ligar os vértices dois a dois e, do número de resultados obtidos, subtrair o número de lados. Assim, tem-se:

$$d = C_n^2 - n$$

$$d = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n$$

$$d = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot 1(n-2)!} - n$$

$$d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n$$

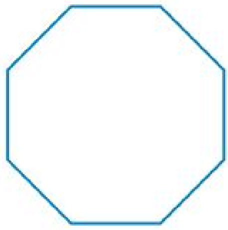
$$d = \frac{n \cdot (n-1) - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Exemplo:

Vamos calcular o número de diagonais do octógono representado a seguir.

- Conforme relação anterior, temos:



$$d = C_8^2 - 8$$

$$d = \frac{8!}{2!(8-2)!} - 8$$

$$d = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} - 8 \Rightarrow d = 20$$

Exercícios resolvidos

1. Quinze moradores se candidataram para as três vagas de síndico de um condomínio. De quantos modos diferentes essas três vagas podem ser preenchidas?

São grupos de 3 pessoas dentre 15. Assim:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{12!\,3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!\,3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

São 455 maneiras diferentes de escolher os 3 síndicos.

2. Na escola onde Bruna estuda, 12 equipes distintas disputam quatro vagas para uma competição interescolar, sendo que Bruna participa de uma das equipes.

a) De quantos modos diferentes essas quatro vagas podem ser preenchidas?

b) De quantos modos diferentes essas quatro vagas podem ser preenchidas, se uma das equipes é a de que Bruna participa?

a) São grupos de 4 equipes dentre 12. Assim:

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!\,4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

São 495 maneiras diferentes de essas 4 equipes serem escolhidas.

b) Se uma equipe já ocupa uma das quatro vagas, sobram 3 vagas para as outras 11 equipes. Assim:

$$C_{11}^3 = \frac{11!}{8!\,3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!\,3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$$

São 165 maneiras diferentes de essas 4 equipes serem escolhidas, sendo que uma dessas equipes é a de que Bruna participa.

3. Em um plano foram marcados 7 pontos, 3 a 3, não colineares. Qual é o número total de retas distintas que podem ser determinadas com esses 7 pontos?

Para determinar uma reta é necessário escolher dois pontos, independentemente da ordem. Assim:

$$C_7^2 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!\,2 \cdot 1} = 21$$

Logo, é possível determinar ao todo 21 retas.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Para preparar uma deliciosa salada de frutas, Ana dispõe das seguintes opções:

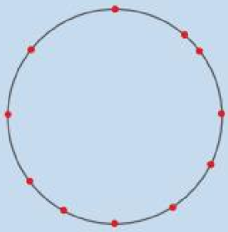
a) Se Ana escolher exatamente 3 das 6 opções de frutas disponíveis, quantas saladas distintas ela poderá preparar? 20

b) Se Ana escolher exatamente 4 das 6 opções de frutas disponíveis, sendo que 1 delas é manga, quantas saladas distintas ela poderá preparar? 10

Fotos: Maks Narodenko/Shutterstock.com; Valentyn Volkov/Shutterstock.com; MichaelJayBerlin/Shutterstock.com; Maks Narodenko/Shutterstock.com; Abramova Elena/Shutterstock.com; Sergio33/Shutterstock.com

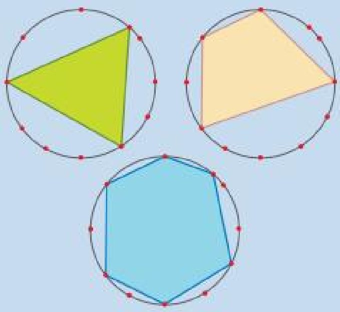
2. De um grupo de 5 rapazes e 4 moças, será formada uma comissão com exatamente 3 rapazes e 2 moças. Qual é o número total de comissões diferentes que podem ser formadas? 60

3. Em uma circunferência, são marcados 11 pontos, como mostra a figura.



Escolhendo 3 ou mais pontos, dentre os 11 pontos, e unindo-os convenientemente, formam-se polígonos convexos. Observe alguns exemplos:

Figuras: © DAE



Assim, calcule:

a) o número total de triângulos que podem ser formados. 165

b) o número total de hexágonos convexos que podem ser formados. 462

c) o número total de polígonos convexos que podem ser formados. 1 981

4. Um professor de Matemática dispõe de 8 questões de Geometria e 6 de Álgebra. Qual o número de provas diferentes com 8 questões que esse professor poderá elaborar, de modo que nelas constem pelo menos 2 questões de Geometria e 2 questões de Álgebra? 2 954

5. Um campeonato de futebol é disputado por 20 equipes, que jogam entre si duas vezes (primeiro e segundo turnos).

a) Qual o número total de jogos disputados por cada uma das 20 equipes? 38

b) Qual o número total de jogos disputados no campeonato? 380

6. Considere o conjunto X = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}.

a) Qual o número de subconjuntos de X com 3 elementos? 56

b) Qual o número de subconjuntos de X com no máximo 3 elementos? 93

c) Qual o número de subconjuntos de X com pelo menos 6 elementos? 37

7. Em uma escola lecionam 18 professores, sendo 10 do sexo masculino e 8 do sexo feminino. Um grupo com 5 professores será formado para acompanhar os alunos do terceiro ano na viagem de formatura.

a) Qual é o número total de grupos distintos que podem ser formados com, pelo menos, 3 professores do sexo masculino? 5 292

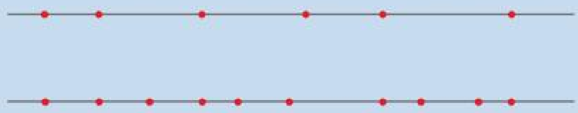
b) Qual é o número total de grupos distintos que podem ser formados com, no máximo, 2 professores do sexo masculino? 3 276

8. Considere o conjunto A = {1; 2; 5; 8; 10; 14; 17; 18; 20}. De quantas maneiras podemos escolher 3 elementos desse conjunto de modo que:

a) a soma dos 3 números seja par? 38

b) a soma dos 3 números seja ímpar? 46

9. Em uma reta *r* são marcados 6 pontos e em uma reta *s*, paralela à reta *r*, são marcados 10 pontos, como mostra a figura:



a) Calcule o número total de triângulos que podem ser formados com vértices nos pontos das retas *r* e *s*. 420

b) Calcule o número total de quadriláteros que podem ser formados com vértices nos pontos das retas *r* e *s*. 675

10. De quantas maneiras um grupo de 12 pessoas pode ser dividido em 3 grupos menores, todos com 4 pessoas? 5 775

11. Um torneio de vôlei de praia será disputado por 8 duplas no sistema mata-mata, ou seja, a cada jogo a dupla perdedora é eliminada do torneio.

Muzsy/Shutterstock.com

a) De quantas maneiras pode ser organizada a primeira rodada do torneio? 105

b) Qual o número total de jogos que serão disputados no torneio? 7

12. Em um hospital trabalham 9 médicos e 12 enfermeiros. Uma comissão de 2 médicos e 3 enfermeiros deve ser formada. Sabendo que existem 2 médicos que não se relacionam bem e não podem fazer parte da mesma comissão, calcule o número total de comissões que podem ser formadas. 7 700

Combinações e arranjos

Vimos até aqui diversos exemplos ligados a contagens e escolhas. Agora vamos considerar outros que ampliam a forma como procedemos no cálculo. Analise a situação a seguir!

Situação:

Na ilustração abaixo, sete pessoas estão presentes num encontro de final de ano. Considerando que quatro dessas pessoas ocuparão quatro cadeiras em linha, queremos determinar o número de maneiras de isso ocorrer.

eladora/Shutterstock.com

Kostsov/Shutterstock.com

- O cálculo do número de maneiras de posicionar quatro dessas sete pessoas nas cadeiras pode ser pensado em duas etapas. Primeiro calculamos o número de maneiras de escolher quatro dessas sete pessoas, isto é:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!}$$

- Agora que temos o número de maneiras de escolher as quatro pessoas, precisamos calcular o número de maneiras de posicioná-las em fila, isto é:

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição

Para cada grupo de quatro pessoas que escolhemos, o número de maneiras de posicioná-las lado a lado (ou em fila) é $P_4 = 4!$

Como são duas etapas para realizar esse evento (escolhemos quatro pessoas e as posicionamos nas cadeiras), o número total de maneiras de isso ocorrer é o produto do número de formas de realizar cada uma dessas etapas. Se n representa esse número, temos:

$$n = (C_7^4) \cdot (P_4)$$

$$n = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 4!$$

$$n = \frac{7!}{3!}$$

$$n = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \Rightarrow n = 840$$

Portanto, existem 840 maneiras diferentes de posicionar quatro de sete pessoas nas cadeiras colocadas lado a lado.

- Outra maneira de resolver seria pensar em calcular o número de formas diferentes de posicionar essas pessoas em quatro posições, utilizando apenas o princípio multiplicativo.

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição

Número de possibilidades para a 1ª posição: 7.

Número de possibilidades para a 2ª posição: 6.

Número de possibilidades para a 3ª posição: 5.

Número de possibilidades para a 4ª posição: 4.

Assim, pelo princípio multiplicativo, sendo n o número total de maneiras de posicionar essas quatro pessoas nas cadeiras, chegamos ao mesmo resultado, isto é:

$$n = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Observação:

As situações de contagem em que a ordem ou posição dos elementos interessam são denominadas arranjos simples. Tais situações podem ser resolvidas por meio do princípio multiplicativo.

Quando dispomos de n elementos de um conjunto e formamos sequências (interessa a ordem desses elementos) de p desses elementos, cada uma dessas sequências é conhecida como arranjo simples (os elementos são distintos). Para calcular o total desses arranjos, obtemos primeiro o total de possibilidades de ocupação das p posições, isto é:

Número de possibilidades para a 1ª posição: n

Número de possibilidades para a 2ª posição:

$$n - 1$$

Número de possibilidades para a 3ª posição:

$$n - 2$$

Número de possibilidades para a (p – 1)ª posição:

$$n - p + 2$$

Número de possibilidades para a pª posição:

$$n - p + 1$$

Então, pelo princípio multiplicativo, o número total de arranjos simples desses p elementos, que representamos por A_n^p, é:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (...) \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando e dividindo o segundo membro dessa igualdade por $(n - p)!$

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (...) \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (...) \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\downarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (...) \cdot (n-p+2) \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)! = n!$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Dados n elementos distintos, o número de arranjos desses elementos tomados p a p, sendo $n \geqslant p$, é determinado por:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observação:

Considerando que $C_n^p = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ e $P_n = n!$, então podemos dizer que: $A_n^p = C_n^p \cdot P_n$

Exemplo:

Considere que a senha de acesso a um banco pela internet seja composta por uma sequência de 3 letras distintas (entre as 26 disponíveis) seguida por uma sequência de 4 algarismos distintos. Qual é o total de senhas que podem ser assim elaboradas?

Devemos determinar o número de sequências formadas por 3 letras distintas e 4 algarismos distintos, nesta ordem:

letra	letra	letra	algarismo	algarismo	algarismo	algarismo

Dessa forma, sendo n o número total de possibilidades de formar essa senha, temos que:

$$n = A_{26}^3 \cdot A_{10}^4$$

$$n = \frac{26!}{(26-3)!} \cdot \frac{10!}{(10-4)!}$$

$$n = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23!}{23!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!}$$

$$n = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \Rightarrow n = 78\,624\,000$$

Combinações condicionadas

Existem situações de contagem, envolvendo escolha de elementos, que são especiais. Nelas são impostas restrições ou condições de formação conhecidas como combinações condicionadas. Vamos considerar a seguir uma situação em que são solicitados quatro agrupamentos conforme condições estabelecidas.

Situação:

Um grupo de 20 alunos de uma turma do Ensino Médio está reunido para tomar algumas decisões em nome da turma. São 15 meninas e 5 meninos. De quantas maneiras eles podem formar uma comissão de 10 alunos de modo que:

a) nenhum membro da comissão seja menino?

b) todos os meninos participem da comissão?

c) tenha exatamente um menino na comissão?

d) pelo menos um membro da comissão seja menino?

Cada um desses itens representa uma situação diferente de escolha contendo uma restrição (condição). Ao formar comissões de alunos, não interessa a ordem deles na comissão, a menos que sejam estipulados, por exemplo, cargos na comissão. Sendo assim, fazemos apenas escolhas, isto é, combinamos.

a) Como nenhum membro da comissão será menino, escolhemos 10 meninas entre as 15 presentes:

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!\,(15-10)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{15}^{10} = 3\,003$$

Portanto, são 3 003 possibilidades de formar essa comissão.

b) Como todos os 5 meninos devem participar da comissão, precisaremos escolher 5 entre as 15 meninas:

$$C_5^5 \cdot C_{15}^5 = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} \cdot \frac{15!}{5!\,(15-5)!} =$$

$$= \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_5^5 \cdot C_{15}^5 = 3003$$

Portanto, são 3 003 possibilidades de formar essa comissão.

c) Agora a comissão terá 1 menino e 9 meninas. Assim, precisamos escolher 1 menino entre os 5 e, depois, escolher 9 meninas entre as 15:

$$C_5^1 \cdot C_{15}^9 = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} \cdot \frac{15!}{9!\,(15-9)!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4!}{1! \cdot 4!} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_5^1 \cdot C_{15}^9 = 25025$$

Portanto, são 25 025 possibilidades de formar essa comissão.

d) Como a comissão terá, pelo menos, um menino, temos as seguintes possibilidades:

1 menino e 9 meninas: $C_5^1 \cdot C_{15}^9$

2 meninos e 8 meninas: $C_5^2 \cdot C_{15}^8$

3 meninos e 7 meninas: $C_5^3 \cdot C_{15}^7$

4 meninos e 6 meninas: $C_5^4 \cdot C_{15}^6$

5 meninos e 5 meninas: $C_5^5 \cdot C_{15}^5$

Como escolhemos 1 menino e 9 meninas, ou 2 meninos e 8 meninas, ou ..., 5 meninos e 5 meninas, o resultado será dado pela seguinte soma:

$$C_5^1 \cdot C_{15}^9 + C_5^2 \cdot C_{15}^8 + C_5^3 \cdot C_{15}^7 + C_5^4 \cdot C_{15}^6 + C_5^5 \cdot C_{15}^5$$

Entretanto, há outra maneira de chegar a esse resultado. Se quisermos que pelo menos um membro da comissão seja menino, o que não interessa é formar comissões que só tenham meninas. Assim, do total de comissões que podemos formar com 10 alunos a partir dos 20 disponíveis, retiramos aquelas comissões em que os 10 alunos sejam meninas, isto é:

$$C_{20}^{10} - C_{15}^{10}$$

Exercícios resolvidos

1. Cinco amigos decidiram fazer uma viagem em 1 carro com 5 lugares. De quantos modos diferentes eles podem se acomodar nos 5 lugares do carro:

a) se todos podem dirigir?

b) se apenas 3 podem dirigir?

a) Como cada acomodação no carro caracteriza um modo diferente, temos que:

$$A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 120$$

Logo, são 120 maneiras diferentes.

b) Temos que escolher 1 dentre os 3 para dirigir e os outros 4 para ocupar os outros 4 lugares. Assim:

$$A_3^1 \cdot A_4^4 = \frac{3!}{(3-1)!} \cdot \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{0!} = 3 \cdot 24 = 72$$

Logo, são 72 maneiras diferentes.

2. Em 1 empresa com 400 funcionários, 10 mulheres e 20 homens se candidataram para formar 1 comissão de 5 pessoas que irá representar os funcionários em assembleias no sindicato.

a) Quantas comissões distintas podem ser formadas?

b) Quantas comissões distintas podem ser formadas, tendo cada comissão 2 mulheres e 3 homens?

c) Quantas comissões distintas podem ser formadas com pelo menos 1 mulher?

a) São comissões de 5 pessoas dentre 30. Assim:

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{25!\,5!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25!}{25!\,5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 142\,506$$

São 142 506 maneiras diferentes de formar essa comissão com 5 funcionários dentre os trinta.

b) São 2 vagas dentre as 10 mulheres e 3 vagas dentre os 20 homens. Assim:

$$C_{10}^2 \cdot C_{20}^3 = \frac{10!}{8!\,2!} \cdot \frac{20!}{17!\,3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!\,2 \cdot 1} \cdot$$

$$\cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17!\,3 \cdot 2 \cdot 1} = 45 \cdot 1\,140 = 51\,300$$

São 51 300 maneiras diferentes de formar essa comissão com 5 funcionários dentre os 30, sendo 2 mulheres e 3 homens.

c) O total de comissões com pelo menos 1 mulher é igual ao total de comissões menos o total de comissões formadas apenas por homens. Assim:

$$C_{50}^5 - C_{20}^5 = \frac{30!}{25!\,5!} - \frac{20!}{15!\,5!} = 142\,506 -$$

$$- \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!\,5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 142\,506 - 15\,504 = 127\,002$$

São 127 002 maneiras diferentes de formar essa comissão com 5 funcionários dentre os 30, com pelo menos 1 mulher.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9, calcule:

a) a quantidade total de números com quatro algarismos distintos que podem ser formados. 1 680

b) a quantidade total de números pares com quatro algarismos distintos que podem ser formados. 630

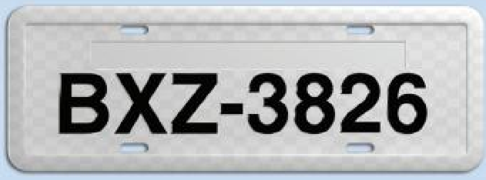
c) a quantidade total de números múltiplos de cinco com quatro algarismos distintos que podem ser formados. 210

2. Na final de uma prova de natação, três dos 8 nadadores são brasileiros.

a) Quantos são os resultados possíveis para os 3 primeiros colocados da prova? 336

b) Quantos são os resultados possíveis para os 3 primeiros colocados da prova, de modo que, pelo menos, um brasileiro esteja entre eles? 276

3. As placas dos veículos são formadas por 3 letras seguidas de 4 algarismos.



Dawidson França

a) Calcule o número total de placas que podem ser formadas por 3 letras distintas (escolhidas entre as 26 letras do alfabeto) e 4 algarismos distintos.

b) Calcule o número total de placas que podem ser formadas pelas letras AVN, nessa ordem, e por quatro algarismos distintos.

Respostas no Manual do Professor.

4. Cinco amigos vão ao cinema. Ao chegarem à sala em que o filme será exibido, percebem que em apenas uma fileira existem lugares consecutivos em quantidade suficiente para que todos se acomodem. Como não querem sentar em lugares separados, decidem que vão ocupar aquela fila. Sabendo que são 7 lugares consecutivos disponíveis, calcule de quantas maneiras os 5 amigos podem se acomodar sem que haja uma ou mais poltronas vazias entre 2 amigos quaisquer. 360

5. Em uma cidade, os números de telefones são formados por 8 algarismos, sendo os quatro primeiros formam o prefixo.

a) Calcule o número total de telefones cujo prefixo é 3027 e em que todos os oito algarismos são distintos entre si. 360

b) Calcule o número total de telefones cujo prefixo é 3232 e em que os últimos quatro algarismos, independentemente dos algarismos do prefixo, são distintos entre si. 5 040

6. Para organizar a formatura, uma turma de estudantes do curso de Matemática resolveu criar uma comissão, formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Dos 53 alunos da turma, apenas 15 se candidataram para fazer parte da comissão. Se a escolha será feita por sorteio, de quantas maneiras diferentes a comissão pode ser formada? 32 760

7. A uma festa, compareceram 120 pessoas.

a) Qual é o número máximo de apertos de mão distintos possíveis? 7 140

b) Sabendo que 20% das pessoas não se conhecem e supondo que elas não se cumprimentem, qual é o número máximo de apertos de mão possíveis? 6 864

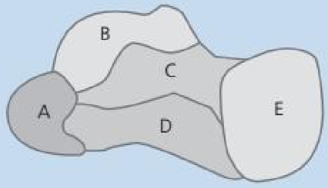
8. A diretoria de uma empresa é formada pelo presidente e 10 outros membros.

a) De quantas maneiras podemos escolher 4 pessoas da diretoria, de modo que o presidente esteja presente? 120

b) De quantas maneiras podemos escolher 4 pessoas da diretoria, de modo que o presidente não esteja presente? 210

9. Em um grupo de 10 pessoas, 4 serão sorteadas para receber prêmios distintos: 1 viagem para uma cidade brasileira a ser definida posteriormente, 1 televisão, 1 aparelho de DVD e um telefone celular. Qual o número total de maneiras de o sorteio ser realizado? 5 040

10. Na figura a seguir, observa-se o "mapa" de um pequeno país, dividido em 5 regiões, denominadas A, B, C, D e E.



Figuras: © DAE

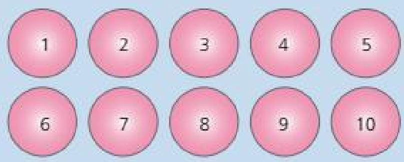
Para colorir o "mapa", dispõe-se de 7 cores distintas. Além disso, regiões fronteiriças não podem ter uma mesma cor.

a) Qual o total de maneiras de colorir o mapa de maneira que as 5 regiões tenham cores distintas? 2 520

b) Qual o total de maneiras de colorir o mapa de modo que apenas as regiões A e E tenham a mesma cor? 840

c) Qual o total de maneiras de colorir o mapa de modo que tanto as regiões A e E quanto as regiões B e D tenham a mesma cor? 210

11. Dez bolas são numeradas de 1 a 10, como mostra a figura.



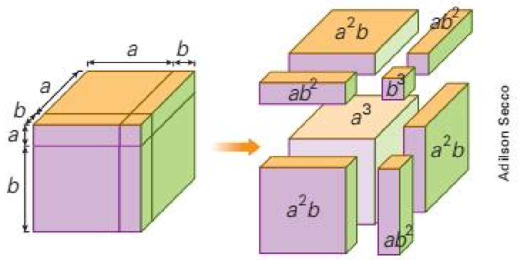
De quantas maneiras podemos distribuir essas 10 bolas em 2 caixas distintas, de modo que nenhuma caixa fique vazia? 1 022

12. Se x, y e z são números naturais, qual o número de soluções da equação $x + y + z = 8$? 45

CAPÍTULO 16

BINÔMIO DE NEWTON

Existem situações em que a Álgebra e a Geometria estão relacionadas. Assim, por exemplo, observe na ilustração a seguir um cubo de aresta medindo $a + b$ e à direita dois cubos e seis paralelepípedos retângulos obtidos a partir do cubo inicial.



- O volume do cubo à esquerda pode ser dado pela expressão:

$$(a + b)^3$$

- Adicionando os volumes dos seis paralelepípedos retângulos à direita e os dois cubos, temos:

$$a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Como os volumes são iguais, temos a seguinte igualdade algébrica:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Esse resultado é o cubo da soma de um binômio.

Neste capítulo iremos ampliar nosso conhecimento sobre potências envolvendo binômios.

Propriedades das combinações

Ao obter o número de combinações em situações de contagem, existem alguns resultados que poderiam ser determinados sem efetuar cálculos. Bastaria conhecer algumas das propriedades relacionadas às combinações. Apresentaremos essas propriedades a partir de situações de contagem tendo em vista o "triângulo de Pascal" formado pelos chamados "números combinatórios" (também conhecidos como "números binomiais" ou "coeficientes binominais").

Triângulo de Pascal

C_0^0		1
$C_1^0\ C_1^1$		1 1
$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$	Calculando as combinações	1 2 1
$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$	$\rightarrow$	1 3 3 1
$C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$		1 4 6 4 1
$C_5^0\ C_5^1\ C_5^2\ C_5^3\ C_5^4\ C_5^5$		1 5 10 10 5 1
$C_6^0\ C_6^1\ C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$		1 6 15 20 15 6 1
⋮		⋮

Para facilitar a compreensão dos resultados, vamos apresentar seis situações relacionadas à formação de subconjuntos de um conjunto dado. A primeira, a terceira e a quinta situações são exemplos diretos do cálculo de número de subconjuntos, enquanto a segunda, a quarta e a sexta situações são aqui apresentadas para que possamos generalizar resultados.

1ª situação:

Considere o conjunto A = {a, b, c, d, e, f, g}. Vamos calcular a quantidade de subconjuntos de A que tenham exatamente:

a) 5 elementos.

b) 2 elementos.

- Estamos diante de um problema de escolha de elementos (combinação):

a) Escolheremos 5 elementos dentre os 7 disponíveis. Assim, o número de possibilidades de isso ocorrer é:

$$C_7^5 = \frac{7!}{5! \cdot (7 - 5)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2 \cdot 1} = 21$$

b) Escolheremos 2 elementos dentre os 7 disponíveis. Assim, o número de possibilidades de isso ocorrer é:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21$$

Observação:

Os dois resultados são iguais. A justificativa para essa igualdade está no fato de que, para cada subconjunto de 5 elementos, dos 7 disponíveis, haverá um subconjunto com 2 elementos. Assim, vale a igualdade:

$$C_7^5 = C_7^2$$

2ª situação:

Considere o conjunto A formado por n elementos. Sendo p um número natural tal que $p \leqslant n$, vamos calcular a quantidade de subconjuntos de A que tenham exatamente:

a) p elementos.

b) $n - p$ elementos.

- Estamos diante de um problema de escolha de elementos (combinação).

a) Escolheremos p elementos dentre n elementos. Assim, o número de possibilidades de isso ocorrer é:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

b) Escolheremos $n - p$ elementos dentre n elementos. Assim, o número de possibilidades de isso ocorrer é:

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot [n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Observação:

Os dois resultados são iguais. A justificativa está no fato de que, para cada subconjunto de p elementos dos n elementos disponíveis, haverá um subconjunto com $n - p$ elementos. Assim, vale a igualdade:

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad [p + (n-p) = n]$$

De modo geral, vale a propriedade:
$C_n^p = C_n^{n-p}$
em que $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p$.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

Retorne ao triângulo de Pascal e observe que os números combinatórios equidistantes dos extremos são iguais. Assim, qual o valor de k, para que $C_6^2 = C_6^k$, sendo $k \neq 2$?

3ª situação:

Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Vamos calcular a quantidade total de subconjuntos de A que podem ser formados.

- Vamos escolher elementos para formar subconjuntos de A que tenham:

0 elemento: $C_7^0 = \frac{7!}{0!\,(7-0)!} = 1$

1 elemento: $C_7^1 = \frac{7!}{1!\,(7-1)!} = 7$

2 elementos: $C_7^2 = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = 21$

3 elementos: $C_7^3 = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$

4 elementos: $C_7^4 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = 35$

5 elementos: $C_7^5 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = 21$

6 elementos: $C_7^6 = \frac{7!}{6!\,(7-6)!} = 7$

7 elementos: $C_7^7 = \frac{7!}{7!\,(7-7)!} = 1$

- Como queremos o total n de subconjuntos, temos:

$n = C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7$

$n = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1$

$n = 128$

Portanto, são 128 subconjuntos que podem ser formados a partir dos 7 elementos do conjunto A.

Outra maneira de calcular a quantidade de subconjuntos é considerar que existem 2 possibilidades para cada elemento do conjunto A em relação a qualquer subconjunto formado: pertencer ou não pertencer ao subconjunto. Assim, sendo B um dos subconjuntos do conjunto A, e considerando cada elemento de A, temos:

$a \in B$ ou $a \notin B \Rightarrow 2$ possibilidades

$b \in B$ ou $b \notin B \Rightarrow 2$ possibilidades

$c \in B$ ou $c \notin B \Rightarrow 2$ possibilidades

$d \in B$ ou $d \notin B \Rightarrow 2$ possibilidades

$e \in B$ ou $e \notin B \Rightarrow 2$ possibilidades

$f \in B$ ou $f \notin B \Rightarrow 2$ possibilidades

$g \in B$ ou $g \notin B \Rightarrow 2$ possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, o total n de subconjuntos de A é:

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$n = 2^7 = 128$$

Assim, comparando os dois resultados obtidos, temos a seguinte igualdade:

$$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7$$

4ª situação:

Considere o conjunto A formado por n elementos. Vamos calcular a quantidade de subconjuntos que admite o conjunto A.

- Podemos formar subconjuntos com 0 elemento, ou com 1 elemento, ou com 2 elementos, ou ..., com $n - 1$ elementos ou com n elementos. Assim, o total de subconjuntos, utilizando combinações é:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^{n-1} + C_n^n$$

- Outra maneira de calcular é considerar que existem duas possibilidades para cada elemento do conjunto A em relação a qualquer subconjunto formado: pertencer ou não pertencer ao subconjunto. Pelo princípio multiplicativo, considerando os n elementos de A, temos:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 (\ldots) \cdot 2}_{n \text{ elementos}} = 2^n$$

Como são duas maneiras de obter o mesmo resultado, temos:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

De modo geral, vale a propriedade da soma dos números combinatórios:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

em que $n \in \mathbb{N}$.

5ª situação:

Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Vamos calcular a quantidade total de subconjuntos de A com:

a) 5 elementos;

b) 5 elementos, sendo b pertencente a todos esses subconjuntos.

c) 5 elementos, sendo b não pertencente a esses subconjuntos.

a) Devemos escolher 5 elementos entre 7 disponíveis:

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = 21$$

São 21 subconjuntos de A com 5 elementos em cada um.

b) Devemos escolher apenas 4 elementos (o elemento b já foi escolhido) entre 6 disponíveis (tiramos o elemento b). Assim, temos:

$$C_{7-1}^{5-1} = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = 15$$

São 15 subconjuntos de A com 5 elementos em cada um, visto que em cada um deles figura o elemento b.

c) Devemos escolher apenas 5 elementos entre 6 disponíveis (o elemento b não poderá ser escolhido), ou seja:

$$C_{7-1}^5 = C_6^5 = \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = 6$$

São 6 subconjuntos de A com 5 elementos em cada um, visto que em nenhum deles figura o elemento b.

Observação:

Note que, se adicionarmos os resultados dos itens b e c, chegaremos ao valor obtido no item a. A justificativa está no fato de que no item a temos todos os subconjuntos de A com 5 elementos. Considerando qualquer um desses subconjuntos, temos duas possibilidades para o elemento *b*: pertencer ou não pertencer. Se adicionarmos o número de subconjuntos a que *b* pertence com o número de subconjuntos a que *b* não pertence, teremos o total de subconjuntos calculado no primeiro item, isto é:

$$C_6^4 + C_6^5 = C_7^5$$

6ª situação:

Considere que um conjunto A tenha exatamente *n* elementos, sendo *k* um deles. Vamos calcular o número total de subconjuntos de A com:

a) *p* elementos ($p < n$).

b) *p* elementos, visto que o elemento *k* figura em todos esses subconjuntos.

c) *p* elementos, visto que o elemento *k* não figura em qualquer desses subconjuntos.

a) Como devemos escolher *p* elementos de *n*, o número de maneiras de isso ocorrer é:

$$C_n^p$$

b) Como *k* deve ser um dos *p* elementos, escolheremos outros $p - 1$ elementos dentre os restantes $n - 1$ disponíveis:

$$C_{n-1}^{n-1}$$

c) Como *k* não pode ser escolhido, deveremos escolher *p* elementos entre os $n - 1$ elementos disponíveis:

$$C_{n-1}^p$$

Adicionando o total de subconjuntos de *p* elementos a que o elemento *k* pertence com o total de subconjuntos de *p* elementos aos quais *k* não pertence, resultará no total de subconjuntos com *p* elementos do conjunto A, ou seja:

Sendo *n* e *p* números naturais, com $n > p$, vale a seguinte relação (denominada relação de Stifel) entre os números combinatórios:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Algebricamente, podemos comprovar esse resultado:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,[(n-1)-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p!\,[(n-1)-p]!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)\,(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!\,(n-p-1)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!\,p + (n-1)!\,(n-p)}{p(p-1)!\,(n-p)\,(n-p-1)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!\,[p + (n-p)]}{p(p-1)!\,(n-p)\,(n-p-1)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{n\,(n-1)!}{p(p-1)!\,(n-p)\,(n-p-1)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Como afirmamos anteriormente, essa relação permite construir mais facilmente o triângulo de Pascal formado pelos números combinatórios, conforme você poderá observar pela indicação a seguir:

C_0^0	1
$C_1^0\ C_1^1$	1 1
$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$	1 2 1
$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$	1 3 3 1
$C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$	1 4 6 4 1
$C_5^0\ C_5^1\ C_5^2\ C_5^3\ C_5^4\ C_5^5$	1 5 10 10 5 1
$C_6^0\ C_6^1\ C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$	1 6 15 20 15 6 1
⋮	⋮

No triângulo, a soma de dois números combinatórios consecutivos de uma mesma linha resultará no número combinatório da linha seguinte que está na mesma coluna do segundo dos números somados (aquele da direita). Assim, na figura, por exemplo temos:

$$C_5^2 + C_5^3 = C_6^3$$

Exercícios resolvidos

1. Resolva a equação $C_{15}^{5} = C_{15}^{x+2}$.

Há duas possibilidades: $C_{15}^{5} = C_{15}^{5}$ ou $C_{15}^{5} = C_{15}^{10}$. Assim:

$x + 2 = 5$ ou $x + 2 = 10 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 8$

2. Antes de viajar, João deve escolher quantas camisetas entre 8 distintas deve colocar na mala. Se ele vai levar no mínimo uma camiseta, de quantas maneiras diferentes pode escolher essas camisetas para pôr na mala?

João deve escolher 1, 2, 3, 4, ... 7 ou 8 camisetas.

Assim:

$C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = 2^8 - C_8^0 =$
$= 2^8 - 1 = 255$

Logo, João tem 255 maneiras diferentes de escolher quantas e quais camisetas levar dentre as 8 camisetas.

3. Sabendo que $C_m^p = x$ e $C_{m+1}^{p+1} = y$ vamos obter, em função de x e de y, o valor de C_m^{p+1}.

Conforme relação de Stifel para a linha m do triângulo de Pascal, temos: $C_m^p + C_m^{p+1} = C_{m+1}^{p+1}$

Substituímos nessa relação os dados apresentados em função de x e de y: $x + C_m^{p+1} = y$

$$C_m^{p+1} = y + x$$

Portanto, a resposta em função de x e de y é $y - x$.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Considere o conjunto $A = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i\}$.

a) Qual é o número de subconjuntos de A que têm exatamente 3 elementos? 84

b) E o total de subconjuntos de A com 6 elementos? 84

c) Qual é o número de subconjuntos de A que tem exatamente 4 elementos? 126

d) E o total de subconjuntos de A com 5 elementos? 126

e) Qual é o total de subconjuntos que admite o conjunto A? 512

2. Indique, em seu caderno, se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

a) $C_9^4 = 126$ V

b) $C_{11}^3 = C_{11}^8$ V

c) $C_7^2 + C_7^3 = C_8^5$ V

d) $C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + ... + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1\,024$ F

e) Se $C_8^3 = C_{10}^{x+1}$, então $x = 2$ F

3. Calcule a soma das soluções da equação $C_{13}^4 = C_{13}^{3x-1}$. 5

4. Considere que um conjunto A tem 11 elementos.

a) Calcule o número de subconjuntos com exatamente três elementos. 165

b) Calcule o número total de subconjuntos do conjunto A. 2 048

5. Daniel faz parte de um grupo de estudos formado por 10 pessoas. De quantas maneiras podem ser escolhidas pelo menos 4 pessoas desse grupo, de modo que Daniel seja uma delas? 466

6. Para realizar uma pesquisa, um professor observou que, se quisesse escolher 8 alunos de uma turma, teria o mesmo número de possibilidades caso desejasse escolher 12 alunos da mesma turma. Qual é o número total de alunos dessa turma? 20

7. No salão de um clube, existem 10 lustres presos ao teto. Dependendo do evento e da região do salão onde é necessária uma maior iluminação, são acesos no mínimo 4 e no máximo 8 lustres. Qual é o número total de maneiras de iluminar o salão desse clube? 837

8. No triângulo de Pascal representado a seguir, observamos algumas das suas linhas.

Linha 0: C_0^0

Linha 1: $C_1^0 \quad C_1^1$

Linha 2: $C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

Linha 3: $C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

Linha 4: $C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$

Escreva, em função de n, a soma de todos os elementos das linhas n, $n + 1$ e $n + 2$. $7 \cdot 2^n$

9. Resolva a equação $C_{19}^5 + C_{19}^{x+3} = C_{20}^6$. $x = 3$ ou $x = 10$

10. Há uma notação abreviada da soma dos elementos de uma linha completa do triângulo de Pascal. Observe:

$$\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k = C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + (...) + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 2^{10}$$

(Lemos: somatório de todas as combinações de 10 tomados k a k, em que k varia de 0 a 10.)

Calcule o valor de x em cada uma das seguintes igualdades:

a) $\sum_{k=1}^{10} C_{11}^k = x$ 2 046

b) $\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k = x$ 4 096

11. Uma pizzaria oferece oito sabores diferentes de *pizzas* doces. Uma pessoa, podendo não escolher nenhuma *pizza* ou até oito *pizzas*, poderá fazê-lo de quantas maneiras? 256

12. A partir de 9 pessoas, quantos grupos é possível formar de modo que todos os grupos tenham no mínimo uma pessoa? 511

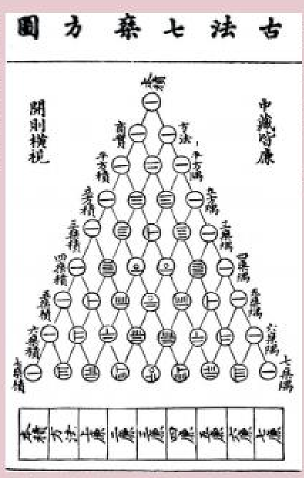
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Agora vamos abordar alguns dos nomes ligados ao triângulo aritmético ou, como é mais conhecido, Triângulo de Pascal. Também falaremos sobre o famoso Binômio de Newton.

O Triângulo de Blaise Pascal (1623-1662) poderia ser chamado de Triângulo de Chu Shï-kie (c. 1303). Esse matemático foi contemporâneo da expansão mongol pela Europa Oriental. Observando as datas em que viveram os dois personagens citados, constatamos a diferença de três séculos. Em 1303, Chu Shï-kie teria desenhado a figura abaixo.

Coleção particular/Ken Welsh/The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

Blaise Pascal (1623-1662).



Si Yuan Yu Jian/Zhu Shijie

Triângulo desenhado pelo chinês Chu Shï-kie, em 1303.

Nos círculos aparecem algarismos chineses que indicam os números presentes no chamado Triângulo de Pascal. Há ainda outras referências que indicam que o matemático persa Omar Khayyam (c. 1048-1122), portanto, dois séculos antes de Shï-kie, detinha tal conhecimento. A explicação está no fato de Omar Khayyam ter sido o descobridor do Teorema Binômio, como aponta Lancelot Hogben. Aliás, esse autor diz textualmente que "na realidade, a série do Triângulo de Pascal é obra de Omar Khayyam".

É difícil afirmar quem foi de fato o descobridor ou mesmo o inventor de algo. Em relação à denominação mais utilizada – Triângulo de Pascal –, talvez a "consagração" deva-se ao fato de Blaise Pascal ter estudado muito mais a fundo a disposição dos elementos no triângulo, bem como provado suas propriedades. Outros nomes também são normalmente ligados ao triângulo, entre eles o do italiano Niccolò Fontana Tartaglia (c. 1449-1557). Há ainda quem diga da existência de referências anteriores a Cristo.

Talvez a denominação para o que entendemos como Binômio de Newton pudesse ser também Binômio de Khayyam, ou outro nome. O fato é que Khayyam, além do triângulo numérico, já mencionado, também teria se debruçado sobre o desenvolvimento da potência de um binômio. Outro nome que aparece ligado a esse assunto é o do alemão Michael Stifel (1486-1567), que sugeriu uma forma interessante de desenvolver a expressão $(x + a)^n$, sendo n um número natural:

$$
\begin{array}{l}
x + a = (x + a)^1 \\
\cdot\ x + a \\
\hline
x^2 + ax \\
\quad + ax + a^2 \\
\hline
x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \\
\quad \cdot\ x + a \\
\hline
x^3 + 2ax^2 + a^2x \\
\quad + ax^2 + 2a^2x + a^3 \\
\hline
x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3 \\
\qquad \cdot\ x + a \\
\hline
x^4 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + a^3x \\
\quad + ax^3 + 3a^2x^2 + 3a^3x + a^4 \\
\hline
x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4 \\
\qquad \cdot\ x + a \\
\hline
x^5 + 4ax^4 + 6a^2x^3 + 4a^3x^2 + a^4x \\
\quad + ax^4 + 4a^2x^3 + 6a^3x^2 + 4a^4x + a^5 \\
\hline
x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 = (x + a)^5
\end{array}
$$

Não se pode negar que Isaac Newton (1642-1727) tenha seu nome ligado ao desenvolvimento da potência de um binômio, porém, outros personagens também deram suas contribuições.

Constatamos, assim, que o conhecimento pode ser desenvolvido por personagens diferentes, em épocas e locais diferentes. A história da Matemática testemunha diversos exemplos desse tipo, não apenas em relação ao triângulo aritmético ou à forma como um binômio é desenvolvido.

Texto elaborado de HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. São Paulo: Globo, 1946.

As fontes de consultas utilizadas pelos próprios historiadores, por mais fidedignas que possam ser consideradas, também contêm suas limitações, principalmente no que se refere a registros. Ao final do texto há um procedimento atribuído a Michael Stifel para desenvolver expressões da forma $(x + a)^n$. Mencionamos como calcular até a potência $(x + a)^5$. Continuando o procedimento de Stifel, desenvolva em seu caderno as seguintes potências:

- $(x + a)^6$
- $(x + a)^7$

QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

De acordo com o texto, responda:

1. A qual matemático poderia ser atribuída a construção do triângulo de Pascal?
2. A qual matemático poderia ser atribuída a descoberta do Binômio de Newton?

Fórmula do desenvolvimento de um binômio

Agora que já vimos as propriedades dos números combinatórios, vamos obter potências de binômios.

Na história da Matemática, diversos personagens em épocas diferentes também pensaram em modos de desenvolver os termos da potência de um binômio. Nomes como Pascal, Stifel, Stevin e Newton, de alguma forma, deram suas contribuições.

Há uma relação matemática (não demonstraremos aqui) que permite obter o desenvolvimento da potência n-ésima do binômio $x + a$. Ela é conhecida como fórmula do binômio de Newton:

Sendo n um número natural, tem-se que:
$(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 a^1x^{n-1} + C_n^2 a^2x^{n-2} + ... C_n^{n-2}a^{n-2}x^2 + C_n^{n-1}a^{n-1}x^1 + C_n^n a^n$

Vimos que os números combinatórios do triângulo de Pascal podem ser obtidos rapidamente considerando alguns resultados:

C_0^0	1
$C_1^0\ C_1^1$	1 1
$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$	1 2 1
$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$	1 3 3 1
$C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$	1 4 6 4 1
$C_5^0\ C_5^1\ C_5^2\ C_5^3\ C_5^4\ C_5^5$	1 5 10 10 5 1
$C_6^0\ C_6^1\ C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$	1 6 15 20 15 6 1
$\vdots$	$\vdots$

Observe agora os exemplos de desenvolvimento de potências de alguns binômios, considerando os resultados anteriores:

$(x + a)^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 a^1x^1 + C_2^2 a^2$
$(x + a)^2 = 1x^2 + 2a^1x^1 + 1a^2$

$(x + a)^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 a^1x^2 + C_3^2 a^2x^1 + C_3^3 a^3$
$(x + a)^3 = 1x^3 + 3a^1x^2 + 3a^2x^1 + 1a^3$

$(x + a)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 a^1x^3 + C_4^2 a^2x^2 + C_4^3 a^3x^1 + C_4^4 a^4$
$(x + a)^3 = 1x^4 + 4a^1x^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x^1 + 1a^4$

Respostas no Manual do Professor.

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

1. Ao desenvolver a potência $(x + a)^6$, quantos serão os termos?
2. Quais são esses termos?

Exemplos:

A seguir alguns exemplos do desenvolvimento de potências naturais de alguns binômios.

$(2x + 1)^4 = C_4^0(2x)^4 + C_4^1(1)(2x)^3 + C_4^2(1)^2(2x)^2 + C_4^3(1)^3(2x) + C_4^4(1)^4$

$(2x + 1)^4 = 1(16x)^4 + 4(1)(8x^3) + 6(1)(4x^2) + 4(1)(2x) + 1(1)$

$(2x + 1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

$(y - 2)^5 = [y + (-2)]^5 = C_5^0 y^5 + C_5^1(-2)y^4 + + C_5^2(-2)^2 y^3 + C_5^3(-2)^3 y^2 + C_5^4(-2)^4 y^1 + C_5^5(-2)^5$

$(y - 2)^5 = 1y^5 + 5(-2)y^4 + 10(4)y^3 + 10(-8)y^2 + 5(16)y^1 + 1(-32)$

$(y - 2)^5 = y^5 - 10y^4 + 40y^3 - 80y^2 + 80y - 32$

Bem, agora que já vimos a fórmula do desenvolvimento da potência de um binômio, vamos observar que podemos utilizá-la para fazer aproximações em cálculos com números decimais. Por exemplo, imagine que você tenha que calcular a seguinte potência: $0{,}995^7$.

Considerando apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento do binômio $(1 - 0{,}005)^7$ (os demais termos, caso queira calcular, serão muito próximos de zero), temos uma boa aproximação da potência:

$0{,}995^7 = (1 - 0{,}005)^7$

$0{,}995^7 \cong C_7^0(1)^7 + C_7^1(-0{,}005)^1 \cdot (1)^6$

$0{,}995^7 \cong 1(1) + 7(-0{,}005) \cdot (1)$

$0{,}995^7 \cong 0{,}965$

Caso você queira conferir, utilize uma calculadora científica. Dependendo do modelo da calculadora, ela fornecerá o valor, com nove casas decimais, como sendo 0,965520646. Sem a calculadora, utilizando os dois primeiros termos do desenvolvimento da potência, chegamos a uma boa aproximação, você não acha?

Já mostramos anteriormente que a soma dos números combinatórios de uma linha completa do triângulo de Pascal é uma potência natural de base 2, isto é:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Utilizando a fórmula do desenvolvimento de um binômio, também podemos obter esse mesmo resultado:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + ... + C_n^{n-2} a^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} a^{n-1} x^1 + C_n^n a^n$$

$$\downarrow x = a = 1$$

$$(1+1)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^1 \cdot 1^{n-1} + C_n^2 1^2 \cdot 1^{n-2} + ... + C_n^{n-2} 1^{n-2} \cdot 1^2 + C_n^{n-1} 1^{n-1} \cdot 1^1 + C_n^n 1^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$$

Fórmula do termo geral

Agora vamos examinar uma situação um pouco diferente. Digamos que temos de desenvolver a potência a seguir, mas desejamos apenas saber qual é o quinto termo, considerando potências decrescentes de x em $(2x + 1)^{13}$.

Será que precisamos desenvolver todo esse binômio para descobrir qual é o quinto termo? Outra questão: quantos são os termos desse desenvolvimento?

Vimos que:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + ... + C_n^{n-2} a^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} a^{n-1} x^1 + C_n^n a^n$$

Note que, no segundo membro dessa igualdade, da esquerda para a direita, as potências de x são decrescentes, enquanto as potências de a são crescentes. Se considerarmos, na ordem em que aparecem, as denominações desses termos como $T_1, T_2, T_3, T_4, ..., T_{n+1}$, é possível constatar a existência de $n + 1$ termos, isto é,

$$(x+a)^n = \underbrace{C_n^0 x^n}_{T_1} + \underbrace{C_n^1 a x^{n-1}}_{T_2} + \underbrace{C_n^2 a^2 x^{n-2}}_{T_3} + ... + \underbrace{\mathbf{C_n^k a^k x^{n-k}}}_{T_{k+1}} + ... + \underbrace{C_n^{n-1} a^{n-1} x}_{T_n} + \underbrace{C_n^n a^n}_{T_{n+1}}$$

- O termo de ordem $k + 1$, destacado acima, pode ser utilizado como termo geral do desenvolvimento. Isso significa que, à medida que atribuímos valores a k, obtemos termos do desenvolvimento.

O termo geral do desenvolvimento de $(x + a)^n$, sendo n um número natural, é dado por:

$\mathbf{T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}}$ para $k \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq k \leq n$.

Observação:

Como $(x + a)^n = (a + x)^n$, vamos convencionar que o desenvolvimento é efetuado conforme potências decrescentes de x (ou da expressão que estiver no lugar de x).

Exemplo:

Vamos retornar à potência $(2x + 1)^{13}$ e determinar o quinto termo.

- Como queremos o 5º termo, fazemos $k = 4$ na fórmula do termo geral:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^k \cdot x^{n-k}$$
$$\downarrow k = 4$$
$$T_{4+1} = C_{13}^4 \cdot 1^4 \cdot (2x)^{13-4}$$
$$T_5 = \frac{13!}{4!(13-4)!} \cdot 1 \cdot 2^9 \cdot x^9 \Rightarrow T_5 = 366\,080x^9$$

Portanto, o quinto termo do desenvolvimento é $366\,080x^9$.

Observação:

Soma dos coeficientes – Caso você queira determinar a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de um binômio, não é necessário fazer o desenvolvimento completo. Basta observar que, ao substituir as variáveis no binômio pelo número 1, obtemos a soma dos coeficientes.

Exemplo:

Obtenha a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento do binômio $(3x + y)^4$

- Vamos desenvolver o binômio e obter a soma dos coeficientes numéricos:

$$(3x+y)^4 = C_4^0 \cdot y^0 \cdot (3x)^4 + C_4^1 \cdot y^1 \cdot (3x)^3 + C_4^2 \cdot y^2 \cdot (3x)^2 + C_4^3 \cdot y^3 \cdot (3x)^1 + C_4^4 \cdot y^4 \cdot (3x)^0$$
$$(3x+y)^4 = 1 \cdot 1 \cdot 81 \cdot x^4 + 4 \cdot y \cdot 27 \cdot x^3 + 6 \cdot y^2 \cdot 9 \cdot x^2 + 4 \cdot y^3 \cdot 3 \cdot x + 1 \cdot y^4 \cdot 1$$
$$(3x+y)^4 = 81 \cdot x^4 + 108 \cdot y \cdot x^3 + 54 \cdot y^2 \cdot x^2 + 12 \cdot y^3 \cdot x + 1 \cdot y^4$$

Soma dos coeficientes: $81 + 108 + 54 + 12 + 1 = 256$

- Agora, observe o que acontece quando substituímos as variáveis por 1:

$$(3x+y)^4 = 81 \cdot x^4 + 108 \cdot y \cdot x^3 + 54 \cdot y^2 \cdot x^2 + 12 \cdot y^3 \cdot x + 1 \cdot y^4$$
$$\downarrow x = y = 1$$
$$(3 \cdot 1 + 1)^4 = 81 \cdot 1^4 + 108 \cdot 1 \cdot 1^3 + 54 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1^3 \cdot 1 + 1 \cdot 1^4$$
$$4^4 = 81 + 108 + 54 + 12 + 1$$

Assim, bastaria substituir no primeiro membro da igualdade as variáveis pelo número 1, ou seja:
Soma dos coeficientes $= (3 \cdot 1 + 1)^4 = 4^4 = 256$

Exercícios resolvidos

1. Com relação ao desenvolvimento do binômio $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{10}$, determine:

b) o sexto termo.

d) o termo independente de x.

a) $T_6 = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^5 \cdot (x^2)^5 = 252 \cdot \frac{1}{x^{15}} \cdot x^{10} = 252 \cdot \frac{1}{x^5}$

b) $T_{p+1} = C_{10}^p \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^p \cdot (x^2)^{10-p}$

$T_{p+1} = C_{10}^p \cdot x^{-3p} \cdot x^{20-2p}$

$T_{p+1} = C_{10}^p \cdot x^{20-5p}$

$20 - 5p = 0 \therefore p = 4 \rightarrow T_5 = C_{10}^4 \cdot x^0 = 210$

2. Calcule o coeficiente do termo em x^4 no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$.

$T_{p+1} = C_{13}^p \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^p \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{13-p}$

$T_{p+1} = C_{13}^p \cdot \frac{2^p}{x^{\frac{p}{3}}} \cdot x^{\frac{13-p}{2}}$

$T_{p+1} = C_{13}^p \cdot 2^p \cdot x^{-\frac{p}{3}+\frac{13-p}{2}}$

$-\frac{p}{3}+\frac{13-p}{3} = 4 \rightarrow -2p + 39 - 3p = 24 \therefore p = 3 \rightarrow$

$\Rightarrow T_4 = C_{13}^3 \cdot 2^3 \cdot x^4 = 2288 \cdot x^4$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Obtenha todos os termos do desenvolvimento de $(y-2)^3$. $(y-2)^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$.

2. Utilizando o procedimento estudado sobre o desenvolvimento dos termos da potência de um binômio, desenvolva: Respostas no Manual do Professor.

a) $(3m-1)^4$

b) $(2m+1)^4$

c) $\left(\sqrt{2}-2\right)^3$

d) $\left(\sqrt{3}+3\right)^3$

3. Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x+3)^3$ b) $(x+2y)^4$ c) $(2a+3b)^5$

Respostas no Manual do Professor.

4. Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento dos seguintes binômios:

a) $(2x+y)^5$ 243

b) $(3x-4y)^7$ -1

c) $\left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - y\right)^4$ $\frac{1}{16}$

5. Resolva o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = 64 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

$x = 1$ e $y = -2$

6. Utilizando apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento da potência de um binômio, obtenha aproximações para:

a) $1{,}02^{15} = (1+0{,}02)^{15}$ $1{,}02^{15} \cong 1{,}3$

b) $1{,}97^6 = (2-0{,}03)^6$ $1{,}97^6 \cong 58{,}24$

7. Em relação ao desenvolvimento de $(2x+y)^{13}$, responda:

a) Quantos são os termos? 14

b) Qual é o primeiro termo? $8\,192 \cdot x^{13}$

c) Qual é o último termo? y^{13}

d) Qual é o oitavo termo? $109\,824 \cdot y^7 \cdot x^6$

8. Determine o termo médio do desenvolvimento do binômio $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$. $70 \cdot x^6$

9. Calcule a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento do binômio $(2x+3y)^4$. 625

10. Calculando o respectivo coeficiente, determine o termo em x^9 do binômio $\left(x^3+\frac{1}{y^2}\right)^{25}$. Resposta no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

Algumas conclusões

Procure responder ou mesmo pensar a respeito de possíveis respostas para algumas questões envolvendo o estudo de análise combinatória e binômio de Newton nesta unidade. Caso sinta alguma dificuldade em obter respostas, sugerimos retomar os conceitos principais:

1. Como você compreende o princípio fundamental da contagem?
2. Qual é o significado da palavra permutar?
3. O que significa fazer permutação simples de 6 elementos, por exemplo?
4. Como você define o fatorial de um número? A que conjunto numérico restringimos o fatorial de um número?
5. Como podemos calcular o número de subconjuntos com 3 elementos de um conjunto que possui 7 elementos?
6. Como você explica arranjos simples de 7 elementos tomados 4 a 4?
7. E o número de combinações simples de 7 elementos tomados 4 a 4?
8. Explique como formar o triângulo de Pascal.
9. Qual é a fórmula do termo geral do desenvolvimento da potência natural de um binômio?
10. É necessário desenvolver a potência de um binômio para sabermos o número de termos e a soma dos coeficientes? Explique.

Troque ideias com seus colegas a respeito das respostas para essas questões. Após, liste as dificuldades encontradas e os assuntos que devem ser retomados.

Vestibulares e Enem

Resolva os exercícios no caderno.

1. (UEG-GO) Numa lanchonete o lanche é composto por três partes: pão, molho e recheio. Se essa lanchonete oferece aos seus clientes duas opções de pão, três de molho e quatro de recheio, a quantidade de lanches distintos que ela pode oferecer é de

a) 9 b) 12 c) 18 d) 24

2. (Uerj) Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras B, M e C. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo: (B, B, M, C, M, C) ou (B, M, M, C, B, C) ou (C, M, M, B, B, C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

a) 6 b) 90 c) 180 d) 720

3. (PUC-RS) Um fotógrafo foi contratado para tirar fotos de uma família composta por pai, mãe e quatro filhos. Organizou as pessoas lado a lado e colocou os filhos entre os pais. Mantida essa configuração, o número de formas em que poderão se posicionar para a foto é

a) 4
b) 6
c) 24
d) 36
e) 48

4. (UFRGS-RS) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas abaixo.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7	...
Linha 0	1								
Linha 1	1	1							
Linha 2	1	2	1						
Linha 3	1	3	3	1					
Linha 4	1	4	6	4	1				
Linha 5	1	5	10	10	5	1			
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	

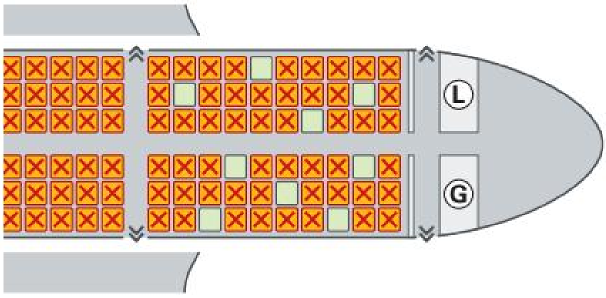
O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é:

a) 15
b) 91
c) 105
d) 120
e) 455

5. (PUC-RJ) A quantidade de anagramas da palavra CONCURSO é:

a) 2 520
b) 5 040
c) 10 080
d) 20 160
e) 40 320

6. (Enem) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2}$
b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$
c) $7!$
d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$
e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

7. (UPE) A vendedora de roupas está arrumando os cabides da vitrine de uma loja. Ela deve pendurar 5 camisas, 3 bermudas e 2 casacos na vitrine, de modo que cada peça fique uma do lado da outra sem sobreposição.

Quantas são as disposições possíveis nessa arrumação, de modo que as peças de um mesmo tipo fiquem sempre juntas, lado a lado na vitrine?

a) 30
b) 120
c) 1 440
d) 4 320
e) 8 640

8. (Enem) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \times 8! + (3!)^2$
b) $8! \times 5! \times 3!$
c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$
d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$
e) $\frac{16!}{2^8}$

9. (Uece) A turma K do Curso de Administração da UECE é formada por 36 alunos, sendo 22 mulheres e 14 homens. O número de comissões que podem ser formadas com alunos desta turma, tendo cada comissão três componentes e sendo assegurada a participação de representantes dos dois sexos em cada comissão, é

a) 5 236.

b) 6 532.

c) 3 562.

d) 2 635.

10. (Ufam) Em uma praça há 10 bancos vazios, sendo 5 deles de frente para um chafariz e 5 voltados para a rua. Chegaram a sua praça exatamente 10 amigos e todos resolveram sentar nos 10 bancos nas seguintes condições: 4 deles querem sentar de frente para o chafariz, 3 deles querem ver o movimento da rua e os demais não têm preferência. Nestas condições, a quantidade de formas diferentes que os 10 amigos podem sentar nos 10 bancos da praça é:

a) 4 320

b) 7 200

c) 43 000

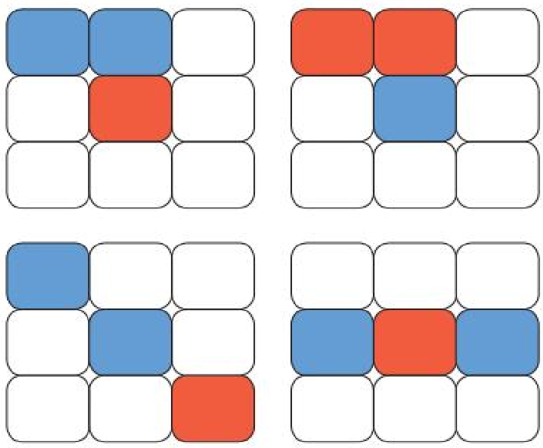
d) 43 200

e) 10!

11. (Uern) A soma dos algarismos do termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton é:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 7

12. (Uerj) Um painel de iluminação possui nove seções distintas, e cada uma delas acende uma luz de cor vermelha ou azul. A cada segundo, são acesas, ao acaso, duas seções de uma mesma cor e uma terceira de outra cor, enquanto as seis demais permanecem apagadas. Observe quatro diferentes possibilidades de iluminação do painel:



O tempo mínimo necessário para a ocorrência de todas as possibilidades distintas de iluminação do painel, após seu acionamento, é igual a x minutos e y segundos, sendo $y < 60$.

Os valores respectivos de x e y são:

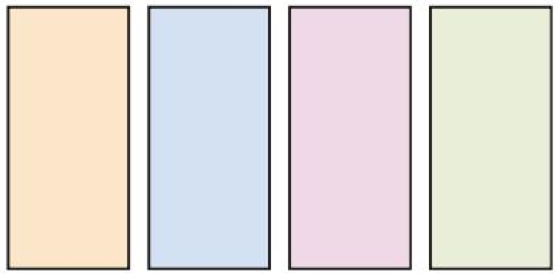
a) 4 e 12

b) 8 e 24

c) 25 e 12

d) 50 e 24

13. (Uepa) Um jovem descobriu que o aplicativo de seu celular edita fotos, possibilitando diversas formas de composição, dentre elas, aplicar texturas, aplicar molduras e mudar a cor da foto. Considerando que esse aplicativo dispõe de 5 modelos de texturas, 6 tipos de molduras e 4 possibilidades de mudar a cor da foto, o número de maneiras que esse jovem pode fazer uma composição com 4 fotos distintas, utilizando apenas os recursos citados, para publicá-las nas redes sociais, conforme ilustração abaixo, é:



a) 24×120^4.

b) 120^4.

c) 24×120.

d) 4×120.

e) 120.

14. (Uece) Um conjunto X é formado por exatamente seis números reais positivos e seis números reais negativos. De quantas formas diferentes podemos escolher quatro elementos de X, de modo que o produto destes elementos seja um número positivo?

a) 245.

b) 225.

c) 235.

d) 255.

DESAFIO

(IME-RJ) Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode se organizar para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas.) – 620

Respostas no Manual do Professor.

Os números de telefone

Alexandre Graham Bell nasceu em 3 de março de 1847, em Edimburgo. Conta a história que, em 1876, com então 29 anos, Graham Bell vivenciava a seguinte situação:

Alexandre Graham Bell apela para seu auxiliar falando junto ao transmissor do aparelho a que se dedicava: "Senhor Watson, venha cá. Preciso do senhor". Ao que Thomas August Watson, o eletricista ajudante, responde: "Senhor Bell, ouvi cada palavra que o senhor disse, distintamente". No dia 14 de fevereiro de 1876, Graham Bell solicita o registro de patente do seu invento, duas horas antes de Elisha Gray, que pesquisava sobre o mesmo assunto ao mesmo tempo que Bell. Obtida a patente, Bell e Watson retornam a trabalhar com afinco no transmissor de indução, aperfeiçoando-o, tendo em mente a Exposição do Centenário da Independência dos Estados Unidos naquele mesmo ano. A Exposição do Centenário é aberta no dia 4 de julho com a participação de milhares de pessoas, entre elas personalidades de fama internacional, inclusive o imperador do Brasil, D. Pedro II.

Texto extraído do *site:* MINISTÉRIO DAS COMUNICAÇÕES. <www.mc.gov.br/component/content/article/44-historia-das-comunicacoes/22463-historia-da-telefonia>. Acesso em: 22 maio 2016. Adaptado

Em 2002, exatamente 80 anos após sua morte, a conquista de Graham Bell foi revogada. O italiano Antonio Meucci foi então reconhecido pelo Congresso dos Estados Unidos como o verdadeiro inventor do aparelho, tendo vendido seu protótipo a Graham Bell em 1870.

Apenas um ano após o aparelho ter sido patenteado, chega ao Brasil a primeira empresa de telefonia, ligando o Palácio da Boa Vista (então residência de D. Pedro II) às casas dos ministros da Corte. Na época havia poucas linhas e, para fazer um telefonema, era preciso solicitar que uma atendente completasse a ligação, unindo a linha do emissor à linha do receptor da ligação. Para tal, a atendente tinha acesso ao nome de todas as pessoas que possuíam um telefone, não sendo preciso associá-las a um número.

Com o sucesso da invenção, o trabalho das telefonistas ficava gradativamente mais complexo, sendo preciso obter uma maneira de as ligações serem conectadas diretamente, por meio de algum código.

Surgiram assim os primeiros números de telefone, como forma de identificar o emissor e o receptor da ligação. Em 1970, o Brasil já possuía em torno de 9 mil linhas telefônicas, com 5 dígitos cada linha.

No final de 2015 já existiam cerca de 43 milhões de telefones fixos no Brasil, além de algo em torno de 283 milhões de telefones celulares. O aumento do número de linhas móveis não só fez com que o número de linhas fixas diminuísse como aumentou muito o número de linhas instaladas, mas sem uso. É por isso que os números de celulares possuem 9 dígitos, enquanto os telefones fixos possuem apenas 8.

Album/Prisma/Latinstock

Alexander Graham Bell (1847-1922) faz uma ligação entre Nova York e Chicago em 1892.

Questões e investigações

Respostas no Manual do Professor.

Resolva os exercícios no caderno.

1. Na década de 1990 havia em torno de 150 milhões de pessoas no Brasil. Cerca de 12% dessas pessoas tinham telefone. Se nessa época os prefixos existentes iam do 2 ao 7, quantos dígitos eram necessários para atender todas as linhas?
2. Em 2012, o nono dígito foi incluído em todos os celulares com DDD 11, acrescentando um 9 na frente dos números. Até o fim de 2016 a Anatel espera ter implementado o nono dígito em todos os celulares do país. Isso aumenta o número de linhas disponíveis porque o primeiro número tinha de ser 7, 8 ou 9. Com essa alteração, o primeiro número será 9 e o segundo pode passar a ser qualquer um, entre 0 e 9. Quantas linhas a mais ficarão disponíveis com a mudança?
3. Quantos números de nove dígitos começando com 9 podem ser formados sem dígitos repetidos? Quantos números de nove dígitos começando com 9 podem ser formados em que o zero apareça exatamente 4 vezes?

UNIDADE 6

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

A concepção de Matemática para muitos está ligada à ideia de exatidão.

Palavras como "provavelmente", "aproximadamente" mostram uma realidade diferente da utilização da Matemática em nosso cotidiano.

Tendo como origem os jogos de azar, o estudo da Probabilidade está intimamente ligado ao de Estatística. Nesta unidade, veremos noções importantes desses dois ramos do conhecimento.

Khongtham/Shutterstock.com

Quando se lança a sorte sobre o jogo as pessoas acreditam num resultado favorável e isso intrigava os matemáticos que sabiam que existia um cálculo envolvendo esses tipos de jogos.


12
9
14
11
8
16

CAPÍTULO

17 INTRODUÇÃO À TEORIA DAS PROBABILIDADES

Qual é o meio de transporte mais seguro: automóvel ou avião?


Atstock Productions/Shutterstock.com

Essa não é uma pergunta simples de ser respondida. As empresas que trabalham com seguros, com base em dados coletados a respeito dos acidentes acontecidos, podem responder melhor a esse tipo de questão. Estatisticamente chegam à conclusão daquele que *provavelmente* seria o tipo de transporte mais seguro. *Provavelmente*, pois não há certeza do que pode acontecer.

Há um ramo da Matemática, denominado **teoria das probabilidades**, que estuda os experimentos ou fenômenos aleatórios. Esses fenômenos, quando repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados geralmente diferentes, por isso são denominados aleatórios.

Nesta unidade, veremos a teoria das probabilidades. Ela teve origem nos chamados jogos de azar e hoje tem suas aplicações em Estatística e Biologia, por exemplo.

IDEIAS INICIAIS

Vamos considerar, de maneira intuitiva, algumas situações para que possamos iniciar o estudo de probabilidade. No próximo capítulo, veremos como utilizar a teoria das probabilidades para avaliar as ocorrências de alguns experimentos.

1ª situação:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Uma cartela foi confeccionada contendo todos os números naturais de 1 a 100, conforme representação acima.

Apenas um número dessa cartela será sorteado. Assim, responda:

a) É mais provável quem ser sorteado: Marta, que escolheu um número par, ou Lucas, que escolheu um número ímpar?

b) Suponha que você apostou com um colega que o resultado desse sorteio será um número múltiplo de 3. Seu colega disse que será um número múltiplo de 5. Quem tem mais possibilidade de acertar: você ou seu colega?

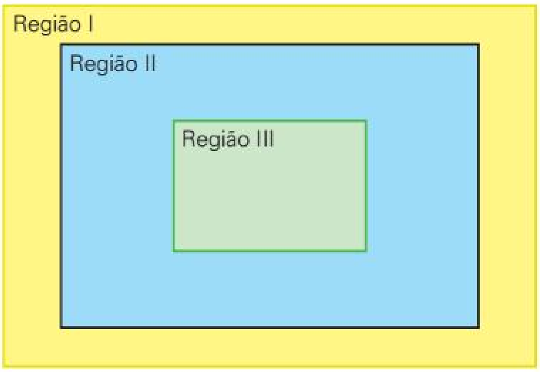
Comentários:

a) Nessa situação, como, na cartela, a quantidade de números ímpares é igual à quantidade de números pares, tanto Marta quanto Lucas têm iguais possibilidades: são 50 números pares e 50 números ímpares.

b) Em relação ao fato de o número sorteado ser múltiplo de 3 ou de 5, não se sabe qual resultado ocorrerá para esse sorteio; porém, existem mais números múltiplos de 3 do que de 5. Então, 1 é mais provável ocorrer, como resultado desse sorteio, um número que seja múltiplo de 3 ou um que seja múltiplo de 5?

2ª situação:

Figuras: ©DAE



A figura acima representa um "alvo" formado por apenas três retângulos que dividem a figura em três regiões coloridas. Imagine que você tenha lançado um dardo e saiba que ele atingiu internamente um dos três retângulos. Responda:

a) Em qual das regiões coloridas é mais provável que o dardo tenha atingido o alvo?

b) Em qual das regiões coloridas do alvo é menos provável que o dardo tenha atingido?

Comentários:

As duas perguntas acima podem ser respondidas observando as áreas dessas figuras planas, isto é, as áreas que poderiam ser atingidas. É mais provável, considerando que o dardo de fato atingiu internamente a figura, que o encontremos na superfície que tenha a maior área. Assim, devemos avaliar essas áreas antes de responder às questões. Com o auxílio de uma régua, você pode obter as medidas desses retângulos e calcular as áreas das regiões I, II e III.

3ª situação:

PKpix/Shutterstock.com

Marcos, ao abrir uma conta em um banco, elaborou uma senha eletrônica formada por seis dígitos (algarismos). O gerente orientou-o a não utilizar a data de nascimento (dia/mês/ano), por ser considerada uma senha de fácil obtenção por outras pessoas. Mesmo assim, Marcos acabou utilizando a data de seu nascimento: 21/04/76. Uma pessoa mal-intencionada, que não conhece a senha de Marcos, mas sabe o ano de seu nascimento, procura descobri-la por tentativas. Responda:

*	*	*	*	*	*
S	E	N	H	A	S

Será mais provável essa pessoa descobrir a senha de Marcos se, além do ano de nascimento, ela conhecer o dia de nascimento ou o mês de nascimento dele?

Comentários:

Os profissionais que trabalham em instituições financeiras, como em bancos, por exemplo, sempre orientam seus clientes em relação aos cuidados para não utilizar datas de nascimento, números de telefones, algarismos repetidos e números de documentos pessoais na formação de senhas. Normalmente, há uma orientação para que os clientes troquem as senhas após determinados períodos. Em relação à questão anterior, basta considerar que, dependendo do mês, que varia de 28 a 31 dias, e os números correspondentes aos meses são apenas 12.

As três situações apresentadas estão relacionadas a um importante ramo da Matemática chamado de **Probabilidade**. Ao analisar essas situações, intuitivamente, você deve ter elaborado respostas às perguntas que foram apresentadas. Além disso, o conhecimento sobre Análise Combinatória permite a você, em algumas situações, avaliar o número de possibilidades de ocorrência de determinado acontecimento, como veremos mais adiante ainda nesta unidade.

As situações apresentadas fazem parte do que denominamos **fenômenos aleatórios**. São experimentos que, embora possam ser repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados de ocorrência. Outro exemplo é o do lançamento de uma moeda perfeita e a verificação do resultado: cara ou coroa.

Dawidson França

O resultado é imprevisível. Não podemos determinar qual será o resultado antes de ele ocorrer. O interesse em estudar tais fenômenos está justamente no fato de não sabermos qual será o resultado. Assim, buscamos os resultados prováveis e, então, estudamos as probabilidades.

Exemplo:

A figura a seguir representa uma roleta contendo 12 números colocados nos círculos azuis e uma seta móvel. A seta gira de tal forma que sempre para indicando um dos 12 números. Ela não para entre dois números. Considere que Lúcia escolheu quatro desses números (5, 7, 10 e 11) e Antônio escolheu outros cinco números (2, 3, 8, 9 e 12). É mais provável que Lúcia acerte ou que Antônio acerte o número no qual a seta vai parar?

Adilson Secco

- Como Antônio escolheu mais números que Lúcia, é mais provável que ele acerte. Isso não significa que ele acertará.

Essa situação é considerada como exemplo de **experimento aleatório**.

Note que esse tipo de experimento (ou fenômeno) tem as seguintes características:

- podemos repeti-lo várias vezes nas mesmas condições;
- conhecemos o conjunto de todos os possíveis resultados;
- não é possível sabermos qual será o resultado antes de ocorrer.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Cite outros exemplos de fenômenos aleatórios.
2. Lance uma mesma moeda 50 vezes e anote, em seu caderno, os resultados. É correto dizer que 50% desses resultados foi cara e os outros 50%, coroa?

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

O estudo de um experimento aleatório passa pela compreensão de dois conceitos: o de **espaço amostral** e o de **evento**.

Em um experimento aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é denominado **espaço amostral**.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é **chamado de evento**.

Observações:

1. Estudaremos aqui os experimentos em que o espaço amostral é finito.
2. O conjunto correspondente ao espaço amostral é indicado pela letra grega maiúscula Ω (lemos: ômega). Já o conjunto correspondente ao evento será representado por uma letra maiúscula de nosso alfabeto.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de experimentos aleatórios observando o espaço amostral e também alguns eventos.

1. Vamos considerar o experimento em que há o lançamento de dois dados, um vermelho e outro azul, e observação dos números das faces voltadas para cima.

Elena Schweitzer/Dreamstime.com

- Espaço amostral:

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

O espaço amostral é formado por pares ordenados nos quais consideramos que o primeiro número de cada par é o resultado da face voltada para cima do dado vermelho, enquanto o segundo número de cada par indica o resultado da face voltada para cima do dado azul. Neste exemplo, indicamos o número de elementos do espaço amostral por $n(\Omega)$ é igual a 36, ou seja, $n(\Omega) = 36$.

- **Exemplos de eventos:**

Evento A – A soma dos resultados nos dois dados é igual a 2.

$A = \{(1,1)\}$

$n(A) = 1 \rightarrow$ O evento é formado por 1 resultado apenas (resultado que interessa).

Evento B – A soma dos resultados nos dois dados é igual a 4.

$B = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

$n(B) = 3 \rightarrow$ O evento é formado por 3 resultados.

Evento C – A soma dos resultados nos dois dados é igual a 7.

$C = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$n(C) = 6 \rightarrow$ O evento é formado por 6 resultados.

Evento D – Os resultados nos dois dados são sempre números ímpares.

$D = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

$n(D) = 9 \rightarrow$ O evento é formado por 9 resultados.

Evento E – A soma dos resultados nos dois dados é menor que 13.

$E = \Omega$, pois a soma dos resultados sempre é um número menor que 13.

$n(E) = 36 \rightarrow$ O evento é formado por 36 resultados.

Evento F – A soma dos resultados nos dois dados é menor que 1.

$F = \varnothing$, pois a soma dos resultados nunca é um número menor que 1.

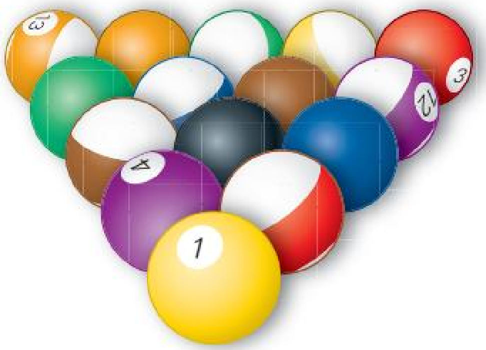
$n(F) = 0 \rightarrow$ O evento não possui resultado que interessa.

Observações:

1. O evento E é o próprio espaço amostral Ω. Nesse caso, dizemos que é um **evento certo**.

O evento F é um conjunto vazio (∅). Nesse caso, dizemos que é um **evento impossível**.

2. Consideremos o experimento em que 15 bolas de mesmo tamanho são numeradas de 1 a 15 e colocadas dentro de uma caixa. Uma bola será retirada aleatoriamente entre as 15 existentes na caixa. Vamos analisar o espaço amostral e alguns eventos.



- Espaço amostral:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$n(\Omega) = 15$

- Eventos:

Evento A – ocorrência de uma bola que tenha um número múltiplo de 3.

$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$n(A) = 5$

Evento B – ocorrência de uma bola que tenha um número que não é múltiplo de 3.

$B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

$n(B) = 10$

Observação:

O evento A é o complementar do evento B em relação ao espaço amostral Ω, assim como o evento B é o complementar do evento A em relação ao espaço amostral Ω. Dizemos que são dois **eventos complementares**.

3. Vamos considerar o experimento em que uma seta móvel é girada até que pare apontando para um dos 20 números que estão indicados, conforme sugere a figura a seguir.

- Espaço amostral:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$n(\Omega) = 20$

- Eventos:

Evento A – ocorrência do resultado que seja um número natural primo.

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$n(A) = 8$

Evento B – ocorrência do resultado que seja um número natural múltiplo de 4.

$B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

$n(B) = 5$

Evento C – ocorrência do resultado que seja um número natural múltiplo de 5.

$C = \{5, 10, 15, 20\}$

$n(C) = 4$

Evento D – ocorrência do resultado que seja um número natural múltiplo de 4 ou de 5.

$D = \{4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20\}$

$n(D) = 8$

Evento E – ocorrência do resultado que seja um número natural múltiplo de 4 e múltiplo de 5.

$E = \{20\}$

$n(E) = 1$

Observações:

1. Quando a intersecção de dois eventos é um conjunto vazio, dizemos que são eventos **mutuamente exclusivos**.

2. Note que o evento D é a **união** dos eventos B e C. Assim, escrevemos: $D = B \cup C$

3. Note que o evento E é a **intersecção** dos eventos B e C. Assim, escrevemos: $E = B \cap C$

Exercícios resolvidos

1. Duas moedas são lançadas ao mesmo tempo e, ao caírem, suas faces voltadas para cima são observadas.

a) Escreva o espaço amostral desse experimento.

b) Escreva o evento em que as faces voltadas para cima são iguais.

c) Escreva o evento em que as faces voltadas para cima são distintas.

Representando a face cara por "Ca" e a face coroa por "Co", temos:
a) {(Ca, Co), (Co, Ca), (Ca, Ca), (Co, Co)}
b) {(Ca, Ca), (Co, Co)}
c) {(Ca, Co), (Co, Ca)}

2. Um dado comum, cujas faces são numeradas de 1 a 6, é lançado e observa-se o número da face voltada para cima.

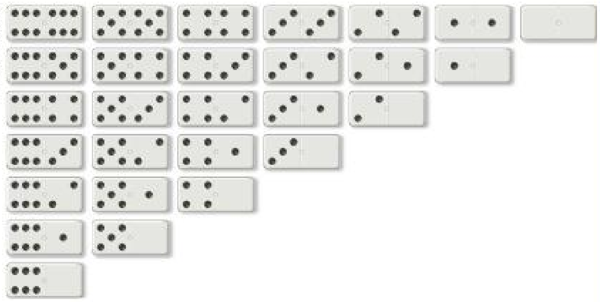
a) Escreva o espaço amostral desse experimento.

b) Escreva o evento: o número da face voltada para cima é par.

c) Escreva o evento: o número da face voltada para cima é primo.

a) O espaço amostral é o conjunto formado pelos resultados possíveis do experimento, isto é:
{1, 2, 3, 4, 5, 6}.
b) O evento será formado por todos os resultados pares:
{2, 4, 6}.
c) Como o evento deve ser formado apenas pelos resultados com números primos, temos:
{2, 3, 5}.

3. Em um jogo de dominó convencional, há 28 peças como as representadas a seguir. Cada peça contém uma linha que a divide em duas extremidades. Em cada extremidade, há um número de 0 (representado pelo branco) a 6 (representado por pequenos círculos pretos).


Adilson Secco

a) Escreva o evento em que pelo menos um dos dois números da peça é 3.

b) Escreva o evento em que apenas um dos dois números da peça é 3.

c) Escreva o evento em que os dois números da peça são pares.

a) {(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}
b) {(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}
c) {(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 4), (4, 6), (6, 6)}

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Experimente lançar uma moeda 10 vezes. Anote em seu caderno os resultados e responda:

a) quantas vezes resultou cara?

b) quantas vezes resultou coroa?

c) Agora, compare suas respostas com as de seus colegas e verifique se é verdade que em torno de 50% das vezes saiu cara e em torno de 50% das vezes saiu coroa. Respostas pessoais.

2. Se uma pessoa de sua turma escolar for sorteada, é mais provável ser uma pessoa:

a) do sexo masculino ou do sexo feminino?

b) que faz aniversário no primeiro ou no segundo semestre deste ano? Respostas pessoais.

3. Para o sorteio de um prêmio, um número será escolhido ao acaso entre todos os números naturais de 1 a 100. Três amigos apostaram que:

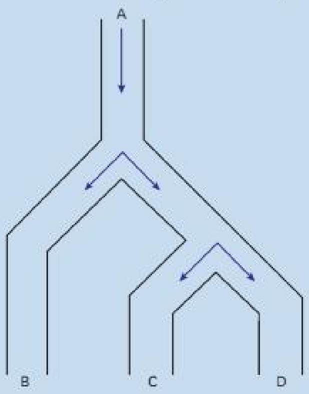
- amigo 1 – vai sair um número maior que 95;
- amigo 2 – vai sair um número com 1 algarismo;
- amigo 3 – vai sair um número com 2 algarismos.

Qual dos amigos tem:

a) menos possibilidade de ganhar? O amigo 1.

b) mais possibilidade de ganhar? O amigo 3.

4. O desenho abaixo representa as ramificações de determinado jogo. Uma bolinha entra pelo ponto indicado por A e sai, necessariamente, por um dos pontos (B, C ou D).



a) Qual é o ponto de saída mais provável? Ou quais são os pontos de saída mais prováveis?

b) Qual é o ponto de saída menos provável? Ou quais são os pontos de saída menos prováveis?
Respostas no Manual do Professor.

5. Considere que um experimento é chamado de aleatório quando, repetido sob as mesmas condições, apresenta, resultados geralmente diferentes entre os resultados possíveis. Escreva, em seu caderno, dois exemplos de experimentos aleatórios. Apresente-os para seus colegas. Resposta pessoal.

6. Observe abaixo o desenho de uma roleta numérica. Uma seta fixada no centro deverá girar até parar. Com relação ao número para o qual a seta apontará ao parar, responda:

Dawidson França

a) É mais provável que o resultado seja um número ímpar ou um número múltiplo de 3?

b) É mais provável que o resultado seja um número múltiplo de 5 ou um divisor de 20?
Respostas no Manual do Professor.

7. Escreva uma frase ou apresente um exemplo ligado ao significado de: Respostas pessoais.

a) pouco provável.

b) muito provável.

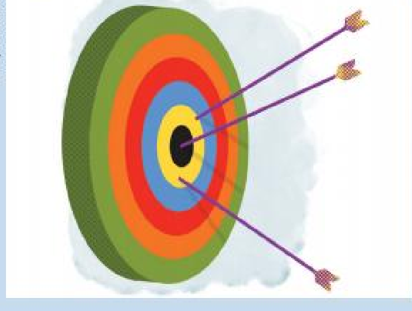
c) certo.

d) impossível.

8. De acordo com as regiões, temos: na região preta, 100 pontos; na amarela, 50 pontos; na azul, 30 pontos; na vermelha, 20 pontos; na alaranjada, 10 pontos; na verde: 5 pontos. Justificativa pessoal.

8. Um alvo circular tem seis cores, como mostra a imagem. Do centro para a extremidade as cores são preta, amarela, azul, vermelha, alaranjada e verde. Note que as faixas coloridas têm a mesma largura e são limitadas por circunferências. Cada competidor de tiro ao alvo lança 10 flechas e paga R$10,00 para competir. Você é o responsável pela competição e deverá pagar a metade da quantia total recebida para o ganhador, ou seja, aquele que obtiver mais pontos conforme a região que acertar no alvo. Se você tivesse de atribuir 100, 50, 30, 20, 10 e 5 pontos para os acertos nas regiões, como faria isso? Justifique suas escolhas.

Filipe Rocha



9. Considere que um dado será lançado em cima de uma mesa e será observado o número indicado na face oposta àquela em contato com a mesa. Elabore uma pergunta relacionada ao resultado que ocorrerá. Resposta pessoal.

10. Dois dados comuns são lançados e observam-se os números de suas faces voltadas para cima. Observando o espaço amostral, faça o que se pede.
Respostas no Manual do Professor.

(Consulte o exemplo dos dados, vermelho e azul, apresentado neste capítulo.)

a) Escreva o evento em que a soma dos números das faces voltadas para cima é 5.

b) Escreva o evento em que pelo menos um dos números das faces voltadas para cima é um número primo.

c) Escreva o evento em que a soma dos números das faces voltadas para cima é maior que 9.

11. Um dado e uma moeda são lançados. Registra-se a face voltada para cima na moeda e o número da face voltada para cima no dado. Respostas no Manual do Professor.

a) Escreva o evento em que se observa a face coroa na moeda e um número múltiplo de 4 no dado.

b) Escreva o evento em que se observa a face cara na moeda e um número múltiplo de 3 no dado.

c) Escreva o evento em que se observa a face coroa na moeda e um número par no dado.

12. Considere que um experimento é composto de duas etapas: primeiro, uma moeda é lançada e, em seguida, um dado é lançado. Respostas no Manual do Professor.

a) Escreva o espaço amostral correspondente a esse experimento.

b) Escreva todos os elementos do evento: sair cara na moeda e resultar um número ímpar no dado.

c) Escreva todos os elementos do evento: sair coroa na moeda e resultar um número múltiplo de 5 no dado.

13. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Escreva o número de elementos de cada evento.
Respostas no Manual do Professor.

a) Evento A: a carta retirada é o número 8.

b) Evento B: a carta retirada é de paus.

c) Evento C: a carta retirada é um ás de copas ou de espadas.

CAPÍTULO 18

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

A partir deste capítulo, veremos como avaliar melhor a ocorrência de resultados em fenômenos desse tipo. Como vimos, não conseguimos prever o resultado de um experimento aleatório. Então, o desejável é que possamos ao menos efetuar afirmações relacionadas à **probabilidade** de ocorrência.

Exemplo:

No lançamento de um dado, vamos observar a face voltada para cima. Considerando que o evento A seja sair um resultado múltiplo de 3, queremos responder à seguinte pergunta:

Qual é a probabilidade de esse evento ocorrer?

Já vimos o que é espaço amostral e também o que é evento. Precisamos agora compreender o que é probabilidade. Estudaremos aqui os experimentos em que o espaço amostral é finito.

PROBABILIDADE EM ESPAÇO AMOSTRAL FINITO

Utilizando o experimento em que há lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima, vamos atribuir um número real que represente a probabilidade de cada ocorrência de uma face (evento que chamamos **elementar**) ser o resultado do experimento. Como são seis faces numeradas, temos:

- Espaço amostral:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$

- Eventos elementares:

Evento {1} – ocorrência da face 1 → probabilidade p_1

Evento {2} – ocorrência da face 2 → probabilidade p_2

Evento {3} – ocorrência da face 3 → probabilidade p_3

Evento {4} – ocorrência da face 4 → probabilidade p_4

Evento {5} – ocorrência da face 5 → probabilidade p_5

Evento {6} – ocorrência da face 6 → probabilidade p_6

Os números p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 podem ser escolhidos de maneiras diferentes; porém, é conveniente que sejam números não negativos e, além disso, como a união desses eventos elementares corresponde ao espaço amostral, seria interessante que a soma desses valores resultasse 1 (ou 100%, por exemplo). Assim, considerando que o dado é equilibrado (não "viciado"), cada face tem probabilidade igual de ocorrência. Desse modo:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$$

e

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

Concluímos, então, que cada uma das faces tem "uma possibilidade em seis" de ocorrer, isto é, cada evento elementar desse espaço amostral tem $\frac{1}{6}$ de **probabilidade** de ocorrer.

Utilizamos esse exemplo de experimento para dar uma ideia do que vem a ser probabilidade. De modo geral, temos:

Seja $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um espaço amostral finito de um experimento aleatório.

Os números $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ são as probabilidades de ocorrências dos eventos elementares $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, ..., \{a_n\}$, respectivamente, desde que:

- **os números $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ sejam não negativos;**
- **$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$.**

Observação:

Outra maneira de definir: seja $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ vamos considerar o evento elementar $\{a_i\}$. A cada um desses eventos associamos um número real p_i que é chamado **probabilidade** de ocorrência do evento $\{a_i\}$ tal que $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ e $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$.

Exemplo:

Considere o experimento em que há lançamento de uma moeda de 1 real. Vamos calcular a probabilidade de ocorrência de cada face.

- Espaço amostral:

$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$

- Eventos elementares:

Evento A – ocorrência de face cara.

A = {cara} $\rightarrow$ probabilidade $p(\text{A})$

Evento B – ocorrência de face coroa.

B = {coroa} $\rightarrow$ probabilidade $p(\text{B})$

Como cada face tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é, $p(\text{A}) = p(\text{B})$ e $p(\text{A}) + p(\text{B}) = 1$ então, temos $p(\text{A}) = p(\text{B}) = \dfrac{1}{2}$.

Observação:

Em um momento de Questões e reflexões do capítulo anterior, sugerimos a você que lançasse uma mesma moeda 50 vezes e anotasse no caderno os resultados. Digamos que os resultados obtidos foram 28 caras e 22 coroas. Nesse caso, as razões $\dfrac{28}{50}$ e $\dfrac{22}{50}$ representam, respectivamente, as frequências relativas correspondentes ao evento {cara} e ao evento {coroa}. Observa-se que, à medida que se aumenta o número de lançamentos, as frequências relativas de ocorrências de cara e de coroa ficam cada vez mais próximas entre si. Dizemos que as frequências relativas tendem a ficar igual a $\dfrac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$.

PROBABILIDADE DE UM EVENTO

Vimos até aqui o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento elementar em um espaço amostral finito.

Mas quando esse evento não for elementar, isto é, quando o evento for um subconjunto qualquer do espaço amostral, como podemos calcular a probabilidade?

Para procurar a resposta para essa pergunta, vamos retomar o exemplo da roleta com 20 números.

Exemplo:

Vamos considerar o experimento em que uma seta móvel é girada até que pare apontando para um dos 20 números que estão indicados, conforme sugere a figura apresentada num exemplo do capítulo anterior. Vamos calcular a probabilidade de ocorrência de um número primo.

- Espaço amostral:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$n(\Omega) = 20$

- Evento:

Evento A – ocorrência do resultado que seja um número natural primo.

$\text{A} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$n(\text{A}) = 8$

O evento A é formado por eventos elementares e cada um tem a mesma probabilidade $\dfrac{1}{20}$ de ocorrência.

Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando todos os eventos elementares, desse espaço, têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Podemos considerar que:

$$p(\text{A}) = p(\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\})$$

$$p(\text{A}) = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) + p(\{7\}) + p(\{11\}) + p(\{13\}) + p(\{17\}) + p(\{19\})$$

$$p(\text{A}) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$$

$$p(\text{A}) = 8 \cdot \frac{1}{20} \Rightarrow p(\text{A}) = \frac{8}{20}$$

Assim, nesse experimento, a probabilidade de ocorrência do evento A pode ser determinada por:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de } \Omega}$$

De modo geral, se A é um evento qualquer de um espaço amostral equiprovável finito Ω, a probabilidade $p(A)$ de ocorrência desse evento é:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Observe que o cálculo de probabilidades em um espaço amostral finito equiprovável é, em geral, feito de uma maneira simples. Assim, vejamos um espaço amostral com ***n*** eventos elementares:

- Espaço amostral:

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ (conjunto com n elementos)

Seja p a probabilidade de ocorrência de cada evento elementar, temos:

$$p(\{a_1\}) = p(\{a_2\}) = p(\{a_3\}) = ... = p(\{a_n\}) = p$$

Considerando que a soma das probabilidades elementares é igual a 1:

$$p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + p(\{a_3\}) + ... + p(\{a_n\}) = 1$$

$$\underbrace{p + p + p + ... + p}_{n} = 1$$

$$n \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Como cada evento elementar tem a probabilidade $\frac{1}{n}$, então, considerando um evento A composto de k eventos elementares $(k \leq n)$, a probabilidade de ocorrência de A é:

$$p(A) = k \cdot \frac{1}{n}$$

$$p(A) = \frac{k}{n} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Observação:

A probabilidade de ocorrência de um evento A pode ser também escrita da seguinte maneira:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número total de casos possíveis do espaço amostral}}$$

Propriedades da probabilidade

Considerando Ω um espaço amostral finito e equiprovável, correspondente a um experimento aleatório, são válidas as propriedades seguintes.

Propriedade 1:

A probabilidade de ocorrência de um evento A igual ao próprio espaço amostral Ω é igual a 1.

$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1 \rightarrow$ Neste caso, dizemos que o evento é **certo**.

Propriedade 2:

A probabilidade de ocorrência de um evento A igual ao conjunto vazio é zero.

$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0 \rightarrow$ Neste caso, dizemos que o evento é **impossível**.

Propriedade 3:

A probabilidade de ocorrência de um evento A qualquer do espaço amostral Ω é tal que:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Justificativa:

Como A é um subconjunto de Ω, temos $n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega)$. Dividindo todos os termos dessa desigualdade por $n(\Omega) > 0$, temos:

$$\frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

$$p(\varnothing) \leq p(A) \leq p(\Omega) \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$$

Observação:

Na propriedade 3, o menor valor da probabilidade do evento A é igual a zero (evento impossível) e o maior valor é 1 (evento certo). Também é comum indicarmos a probabilidade utilizando a porcentagem. Assim, podemos dizer que um evento A tem probabilidade de ocorrência $p(A)$ tal que:

$$0\% \leq p(A) \leq 100\%$$

Propriedade 4:

A probabilidade de ocorrência de um evento A adicionada a probabilidade de ocorrência do evento $\overline{A}$ (complementar de A em relação ao espaço amostral Ω) é igual a 1, isto é:

$$p(A)+p(\overline{A})=1$$

Justificativa:

Pela teoria dos conjuntos temos $A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, como sugere o diagrama a seguir:

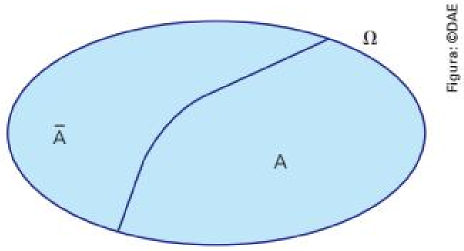


Figura: ©DAE

Assim, podemos escrever:

$$n(A)+n(\overline{A})=n(\Omega)$$

Dividindo, membro a membro por $n(\Omega)>0$, temos:

$$\frac{n(A)}{n(\Omega)}+\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow p(A)+p(\overline{A})=1$$

Observação:

A propriedade 4 pode ser assim interpretada: a probabilidade de ocorrer um evento A adicionada à probabilidade de não ocorrer esse evento A é certa.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de probabilidades.

1. No lançamento de um dado, vamos calcular a probabilidade de obter um número ímpar.

- Espaço amostral:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega)=6$

- Evento A:

$A = \{1, 3, 5\} \rightarrow n(A)=3$

- Cálculo da probabilidade de ocorrência do evento A:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$p(A)=\frac{3}{6}=0,5=50\%$$

2. De um baralho com 52 cartas (13 cartas de cada naipe: ouros, espadas, copas e paus), retiramos uma carta.


Angelo Gilardelli/Dreamstime.com

Vamos calcular a probabilidade de essa carta ser:

a) uma carta do naipe ouros (evento A).

b) um valete (evento B).

a) Como queremos determinar a probabilidade de a carta retirada ser uma carta de ouros, calculamos o quociente entre o número de situações favoráveis (número de cartas de ouros) e o número de resultados possíveis (número total de cartas do baralho), ou seja:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\text{número de cartas de ouros}}{\text{número total de cartas do baralho}}$$

$$p(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

b) Como no baralho são apenas 4 cartas de cada naipe, existem 4 valetes. Desse modo, temos:

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{\text{número de cartas valete}}{\text{número total de cartas do baralho}}$$

$$p(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

Questões e reflexões

Resposta no Manual do Professor.

Considere que a probabilidade de chover hoje, em certa cidade, seja igual a 0,75. Qual é a probabilidade de não chover nessa cidade?

Exercícios resolvidos

1. Em uma caixa, foram colocadas bolas. Cada bola foi identificada com um número do conjunto $X = \{13, 16, 19, ..., 1\,210\}$. Considerando que todas as bolas têm a mesma chance de serem sorteadas e que os números do conjunto x formam uma PA, qual é a probabilidade de uma bola identificada com um número múltiplo de 5 ser sorteada?

Seja N o número de bolas que foram colocadas na caixa, então, pela relação de termo geral da PA, temos:

$1\,210 = 13 + (N - 1) \cdot 3 \; N = 400$

Os números que são múltiplos de 5 e fazem parte do conjunto X têm de ser múltiplos de 3 e de 5, ou seja, múltiplos de 15.

Concluímos que o primeiro múltiplo de 5 no conjunto X é 25 e o último é 1 210.

Assim, os múltiplos de 5 que fazem parte do conjunto X, formam o conjunto $Y = \{25, 40, 55, ..., 1\,210\}$.

Seja M o número de elementos do conjunto Y, então, pela relação de termo geral da PA, temos:

$1\,210 = 25 + (M - 1) \cdot 15 \; M = 80$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$

2. Considere o conjunto M formado por todos os números ímpares de três algarismos. Qual é a probabilidade de ser selecionado desse conjunto um elemento que tenha três algarismos distintos?

$M = \{101, 103, 105, ..., 999\}$

Seja N o número de elementos do conjunto M, então, pela relação de termo geral da PA, temos:

$999 = 101 + (N - 1) \cdot 2 \; N = 450$

O total de números ímpares formados por três algarismos distintos é:

$8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{320}{450} = \frac{32}{45}$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em uma urna, foram colocadas 1 000 bolas identificadas pelos números naturais de 1 a 1 000. Se sortearmos, aleatoriamente, uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de que o número registrado na bola seja múltiplo de 7? 14,2%

2. Considere que as figuras I e II representem ramificações de um canal construído para separar as águas de determinado ponto de uma hidrelétrica. Uma bola de isopor foi colocada no ponto A e seguiu a correnteza no sentido dos entroncamentos de mesmo tamanho. Calcule a probabilidade de essa bola, em cada uma das situações (figuras I e II), chegar ao ponto B, considerando que as ramificações foram construídas com as mesmas medidas em cada caso.

Figura: ©DAE

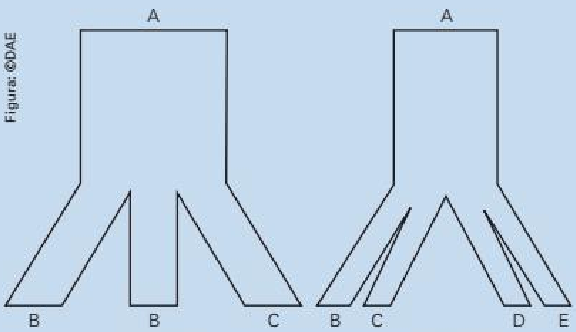


Figura I Figura II

Respostas no Manual do Professor.

3. Um baralho é composto de 52 cartas distribuídas em 4 naipes: espadas (♠), paus (♣), copas (♥) e ouros (♦). Cada naipe é composto de 13 cartas. Sabe-se ainda que 4 cartas são reis, um de cada naipe. Uma carta do baralho é retirada ao acaso, então, qual é a probabilidade de essa carta ser: a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{13}$

a) de copas?

b) um rei?

4. Em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, 25 alunos são do sexo masculino e 20 são do sexo feminino. Ao escolher um aluno dessa turma como representante, qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino? ≅ 55,56%

5. Dois dados comuns são lançados e os números das faces voltadas para cima são observados.

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{12}$

a) Qual é a probabilidade de que nos dois dados o número da face voltada para cima seja 6?

b) Qual é a probabilidade de que a soma dos números das faces voltadas para cima nos dois dados seja igual a 7?

c) Qual é a probabilidade de que a soma dos números das faces voltadas para cima nos dois dados seja igual ou superior a 7?

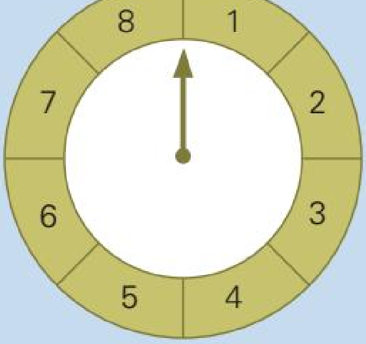
6. A previsão do tempo para amanhã, em determinada região, indica que a probabilidade de chover é 40% e a probabilidade de fazer frio é 70%. Então, responda:

a) Qual é a probabilidade de não chover nessa região?

b) Qual é a probabilidade de não fazer frio?
b) 30%

7. Uma roleta é dividida em oito regiões numeradas de 1 a 8, como mostra a figura abaixo.

Figura: ©DAE



Girando o ponteiro aleatoriamente e sabendo que a probabilidade de o ponteiro apontar para qualquer região, ao parar, é a mesma, calcule:

a) $\frac{1}{2}$
a) a probabilidade de o ponteiro apontar para uma região numerada com um número ímpar.

b) $\frac{1}{2}$
b) a probabilidade de o ponteiro apontar para uma região numerada com um número primo.

8. Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, formam-se todos os números de três algarismos distintos, e escreve-se cada um desses números em um cartão. Todos esses cartões são colocados em uma caixa e dela é retirado um cartão, ao acaso. Calcule a probabilidade de o número escrito no cartão retirado ser múltiplo de 3.
40%

9. Um casal planeja ter três filhos. Calcule a probabilidade de que:

a) os três filhos sejam do mesmo sexo. 25%

b) exatamente dois filhos sejam do sexo masculino.
37,5%

10. Em uma urna, foram colocadas bolas identificadas com os números do conjunto {1, 3, 5, ..., 1 999}.

a) Qual é o número total de bolas dessa urna? 1 000

b) Retirando uma bola ao acaso da urna, qual é a probabilidade de o número da bola ser múltiplo de 3?
b) 33,3%

11. Em uma caixa, são colocadas N bolas numeradas de 1 a N.

a) $\frac{6}{N^2 - N}$
a) Se três bolas forem retiradas simultaneamente dessa caixa, qual é a probabilidade de que os números nelas marcados sejam consecutivos?

b) 20%
b) Se N = 6, qual é o valor percentual dessa probabilidade?

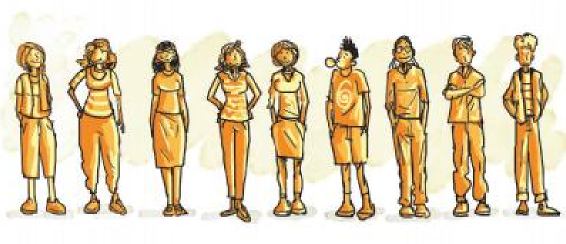
APLICAÇÕES DE PROBABILIDADES

Agora que já conhecemos o que vem a ser a probabilidade de ocorrência de um evento em um espaço amostral finito, vamos considerar alguns exemplos nos quais, no cálculo do número de situações favoráveis (número de elementos do evento) e também do número de resultados possíveis (número de elementos do espaço amostral), utilizaremos procedimentos estudados em Análise Combinatória.

Leia os exemplos a seguir e troque ideias com seus colegas a respeito dos procedimentos utilizados nos cálculos das probabilidades correspondentes.

1. Escolha de pessoas em um grupo

Filipe Rocha



Um grupo de alunos é formado por 4 meninos e 5 meninas. Maria e Roberto fazem parte desse grupo. Queremos escolher aleatoriamente 3 dos 9 alunos. Qual é a probabilidade de que Maria e Roberto estejam entre os 3 alunos escolhidos?

- Número de resultados possíveis (número de elementos do espaço amostral):

Calculamos o número de escolhas de 3 elementos entre 9 disponíveis, ou seja:

$$n(\Omega) = C_9^3$$

$$n(\Omega) = \frac{9!}{3!(9-3)!} \Rightarrow n(\Omega) = 84$$

- Número de situações favoráveis (número de elementos do evento A):

Como queremos calcular a probabilidade de que 2 dos 3 alunos escolhidos sejam Maria e Roberto, basta escolher 1 aluno entre os 7 restantes:

$$n(A) = C_7^1$$

$$n(A) = \frac{7!}{1!(7-1)!} \Rightarrow n(A) = 7$$

- Cálculo da probabilidade de ocorrência do evento A:

$$p(\text{A}) = \frac{n(\text{A})}{n(\Omega)}$$

$$p(\text{A}) = \frac{C_7^1}{C_9^3} = \frac{7}{84} \Rightarrow p(\text{A}) = \frac{1}{12}$$

2. Ganhar em determinada modalidade de loteria

Pedro Paulo Ferreira/Fotoarena

Uma pessoa faz uma aposta simples em determinada modalidade de loteria, isto é, ela escolhe 6 entre 60 números. Qual é a probabilidade de os 6 números escolhidos pela pessoa serem sorteados?

- Número de resultados possíveis (número de elementos do espaço amostral):

Como serão sorteados 6 dos 60 números, o total de maneiras de isso ocorrer é o número de combinações possíveis desses 60 números tomados 6 a 6, isto é, o número total de senas possíveis de serem formadas:

$$n(\Omega) = C_{60}^6$$

$$n(\Omega) = \frac{60!}{6!(60-6)!} \Rightarrow n(\Omega) = 50\,063\,860$$

- Número de situações favoráveis (número de elementos do evento A):

Note que, em uma aposta simples, a pessoa escolhe 6 números, isto é, ela participa com apenas 1 sena. Então:

$$n(\text{A}) = C_6^6$$

$$n(\text{A}) = \frac{6!}{6!(6-6)!} \Rightarrow n(\text{A}) = 1$$

- Cálculo da probabilidade de ocorrência do evento A:

$$p(\text{A}) = \frac{n(\text{A})}{n(\Omega)}$$

$$p(\text{A}) = \frac{C_6^6}{C_{60}^6} = \frac{1}{50\,063\,860} \Rightarrow p(\text{A}) = \frac{1}{50\,063\,860}$$

Questões e reflexões

Resolva os exercícios no caderno.

Respostas no Manual do Professor.

1. Considere que uma pessoa escolheu 7 dezenas (aposta não simples). Com quantas senas ela está concorrendo?

2. Quantas vezes o valor da aposta simples essa pessoa pagaria pelas 7 dezenas jogadas?

3. Qual é a probabilidade de essa pessoa ganhar apostando 7 dezenas?

3. Ganhar na loteria esportiva

Adriano Ishibashi/FramePhoto

Uma pessoa faz uma aposta simples na loteria esportiva, isto é, para cada um dos 14 jogos ela marca no cartão 1 resultado entre 3 resultados: coluna um (se vencer o time indicado nessa coluna), coluna do meio (se o resultado do jogo for empate) ou coluna dois (se vencer o time indicado nessa coluna). Além disso, essa pessoa poderá escolher, em um dos 14 jogos, mais um palpite (um duplo). Qual é a probabilidade de essa pessoa ganhar?

- Número de resultados possíveis (número de elementos do espaço amostral):

Como, para cada um dos jogos existem 3 possibilidades de resultado (coluna um, coluna do meio, coluna dois), pelo princípio multiplicativo, temos:

$$n(\Omega) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$n(\Omega) = 3^{14} \Rightarrow n(\Omega) = 4\,782\,969$$

- Número de situações favoráveis (número de elementos do evento A):

Note que a pessoa escolheu um resultado para cada jogo. Assim, ela ganhará se der exatamente um único resultado: aquele escolhido. Como, em um dos jogos, essa pessoa escolheu um palpite duplo, então, ela estará participando com duas situações favoráveis:

$$n(\text{A}) = 2$$

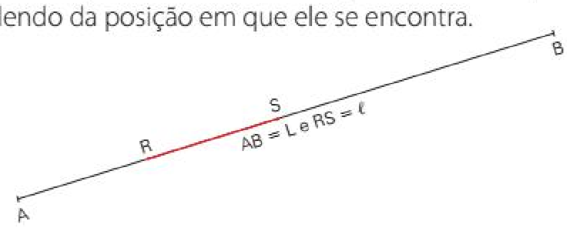
- Cálculo da probabilidade de ocorrência do evento A:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$p(A)=\frac{2}{3^{14}}\Rightarrow p(A)=\frac{2}{4\,782\,969}$$

4. Probabilidade geométrica: segmento

Vamos considerar que um segmento RS de comprimento ℓ e seja parte de outro segmento AB de comprimento L. Se escolhermos, ao acaso, um ponto P qualquer pertencente ao segmento AB, podemos calcular a probabilidade de esse ponto escolhido pertencer ao segmento RS. Para tanto, vamos admitir que essa probabilidade seja **proporcional aos comprimentos** dos dois segmentos, não dependendo da posição em que ele se encontra.



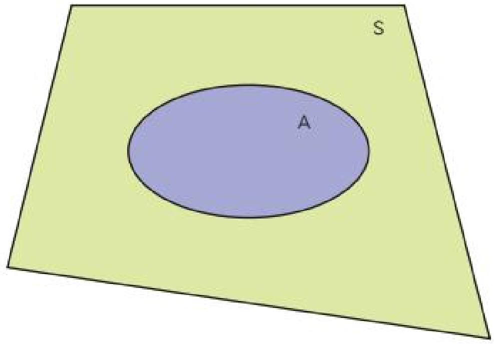
Nesse sentido, podemos dizer que a probabilidade será a própria constante de proporcionalidade entre os comprimentos dos segmentos RS e AB, nessa ordem:

$$p(\overline{RS})=\frac{RS}{AB}\Rightarrow p(\overline{RS})=\frac{\ell}{L}=c$$

(c: constante de proporcionalidade)

5. Probabilidade geométrica: superfície

Vamos considerar agora que uma superfície plana A seja parte de outra superfície S. Se escolhermos, ao acaso, um ponto P qualquer pertencente à superfície S, podemos calcular a probabilidade de esse ponto escolhido pertencer à superfície A. Para tanto, de maneira análoga ao segmento, vamos admitir que essa probabilidade seja **proporcional às áreas** das duas superfícies, não dependendo da posição em que ele se encontra.



Figuras: ©DAE

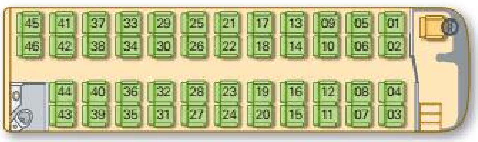
Assim, podemos dizer que a probabilidade será a própria constante de proporcionalidade entre a área de A e a de S, nessa ordem:

$$p(A)=\frac{\text{área de A}}{\text{área de S}}=k$$

(k: constante de proporcionalidade)

Exercícios resolvidos

1. João vai comprar uma passagem para viajar de ônibus. O ônibus tem 46 lugares, como mostra a figura.



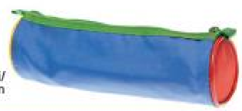
Adison Secco

Sabendo que todos os lugares estão disponíveis, qual é a probabilidade de João escolher aleatoriamente um lugar e ir sentado ao lado da janela?

Dos 46 lugares, 23 são ao lado da janela.

Logo, a probabilidade pedida é: $p=\frac{23}{46}=\frac{1}{2}$

2. No estojo de Sofia, há 3 canetas pretas, 4 canetas azuis e 2 canetas vermelhas.



Robert Babczynski/ Shutterstock.com

Se Sofia retirar, ao mesmo tempo, 2 canetas desse estojo, qual é a probabilidade de que as duas canetas retiradas sejam da mesma cor?

O total de maneiras de retirar 2 canetas desse estojo é obtido por:

$C_9^2=36$

O total de maneiras de retirar 2 canetas desse estojo que sejam da mesma cor, pode ser calculado de três modos:

- 2 canetas pretas $\rightarrow C_3^2=36$

- 2 canetas azuis $\rightarrow C_4^2=36$

- 2 canetas vermelhas $\rightarrow C_2^2=36$

Então, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{3+6+1}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em uma escola, uma pesquisa procurava revelar quantos alunos estavam matriculados em algum curso de idioma. Os resultados foram os seguintes:

Idioma	Quantidade de alunos
Inglês	500
Francês	100
Inglês e francês	20
Nenhum dos dois	220

Escolhendo, ao acaso, um dos alunos que participaram dessa pesquisa, calcule a probabilidade de que esse aluno esteja matriculado em apenas um dos dois cursos. 70%

2. Em uma caixa, foram colocadas 50 bolinhas numeradas de 1 a 50.

a) Se retirarmos uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de que o número nela marcado seja primo? a) = $\frac{3}{10}$

b) Se retirarmos, simultaneamente, duas bolas dessa caixa, qual é a probabilidade de que os dois números nelas marcados sejam primos? b) = $\frac{3}{35}$

3. O conjunto A é formado por todos os divisores naturais do número 60. Sorteando um dos elementos do conjunto A, qual é a probabilidade de que o número sorteado seja múltiplo de 3? 50%

4. Em um grupo de 10 pessoas, será formada uma comissão constituída de 4 pessoas.

a) Qual é o número total de comissões que podem ser formadas? 210

b) Se Paulo faz parte desse grupo, qual é a probabilidade de que ele faça parte da comissão formada? 40%

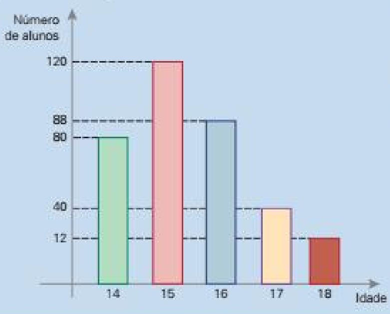
5. Em uma moeda viciada, a probabilidade de a face voltada para cima ser coroa é o triplo da probabilidade de ser cara. Qual é a distribuição das probabilidades de ocorrências das faces cara e coroa?

$p(\text{cara}) = \frac{1}{4}$;

$p(\text{coroa}) = \frac{3}{4}$

Banco Central do Brasil

6. Em uma escola, a distribuição dos alunos do Ensino Médio por idade (em anos completos) é representada no gráfico a seguir:



Gráficos: ©DAE

a) Qual é o número de alunos que estudam no Ensino Médio dessa escola? 340

b) Escolhendo um aluno aleatoriamente, qual é a probabilidade de ele ter, pelo menos, 16 anos? b) $\frac{7}{17}$

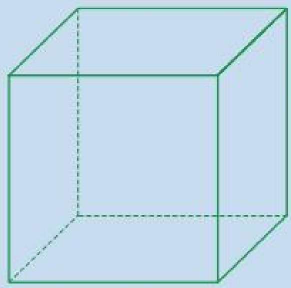
7. Em uma urna, são colocadas 100 bolas numeradas da seguinte maneira: as duas primeiras com o número 1, as duas seguintes com o número 2 e, assim, sucessivamente, até as duas últimas, com o número 50. Qual é a probabilidade de que duas bolas da urna sejam sorteadas de tal modo que os números nelas marcados sejam iguais? $\frac{1}{99}$

8. Em um dado "viciado", a probabilidade de um número sair na face voltada para cima é diretamente proporcional a esse número.

a) Qual é a probabilidade de o número da face voltada para cima ser igual a 5? $\frac{5}{21}$

b) Qual é a probabilidade de o número da face voltada para cima ser primo? $\frac{1}{21}$

9. Ao escolher, aleatoriamente, três vértices de um cubo, qual é a probabilidade de eles pertencerem a uma mesma face? $\frac{3}{7}$



Figuras: ©DAE

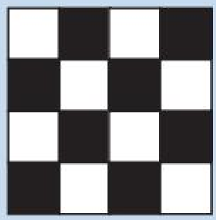
10. Cada um dos anagramas da palavra ALUNO foi escrito em um pedaço de papel. Em seguida, todos os papéis foram colocados em uma caixa. Calcule a probabilidade de se retirar um papel dessa caixa e o anagrama nele escrito:

a) apresentar as vogais juntas. a) 30%

b) apresentar as vogais em ordem alfabética. b) $\frac{1}{6}$

11. Em um grupo de 50 pessoas, 30 são mulheres. Se, nesse grupo, 5 são homens casados e 10 são mulheres solteiras, qual é a probabilidade de uma mulher casada ser escolhida nesse grupo? 40%

12. Um tabuleiro é dividido em células brancas e pretas, como mostra a figura.



Figuras: ©DAE

Escolhendo três células aleatoriamente, qual é a probabilidade de que elas tenham a mesma cor? 20%

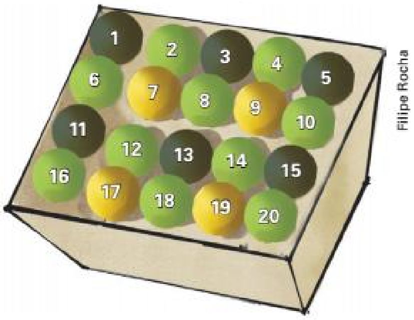
CAPÍTULO 19

ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Normalmente, quando adicionamos ou multiplicamos as probabilidades de ocorrências de eventos de um espaço amostral, podemos estar também trabalhando com a união de eventos, com a intersecção de eventos, com eventos que são independentes ou com eventos que são mutuamente exclusivos. Assim, este capítulo está intimamente ligado ao que foi estudado na teoria dos conjuntos.

PROBABILIDADE DA UNIÃO E DA INTERSECÇÃO

Vamos considerar a seguinte situação:



Em uma urna, estão colocadas 20 bolas de mesmo tamanho numeradas de 1 a 20. Uma bola será retirada aleatoriamente dessa urna. Vamos considerar quatro eventos:

Evento A – a bola retirada contém um número que é múltiplo de 2.

Evento B – a bola retirada contém um número que é múltiplo de 3.

Evento A ∩ B (evento A **e** evento B) – a bola retirada contém um número que é múltiplo de 2 **e** de 3.

Evento A ∪ B (evento A **ou** evento B) – a bola retirada contém um número que é múltiplo de 2 **ou** de 3.

Vamos calcular a probabilidade de ocorrência de cada um desses eventos.

- O espaço amostral para os quatro eventos é o mesmo, isto é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\} \rightarrow n(\Omega) = 20$$

- Calculando a probabilidade de ocorrência do evento A:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \rightarrow n(A) = 10$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$p(A) = \frac{10}{20}$$

- Calculando a probabilidade de ocorrência do evento B:

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \rightarrow n(B) = 6$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$p(B) = \frac{6}{20}$$

- Calculando a probabilidade de ocorrência do evento A ∩ B:

Inicialmente, vamos determinar o conjunto intersecção, ou seja, o conjunto formado pelos números do espaço amostral que são simultaneamente múltiplos de 2 e de 3:

$$A \cap B = \{6, 12, 18\} \rightarrow n(A \cap B) = 3$$

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$p(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

- Calculando a probabilidade de ocorrência do evento A ∪ B:

Nesse caso, vamos determinar os elementos do conjunto união, ou seja, o conjunto formado pelos números do espaço amostral que são múltiplos de 2 ou múltiplos de 3:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} \rightarrow$

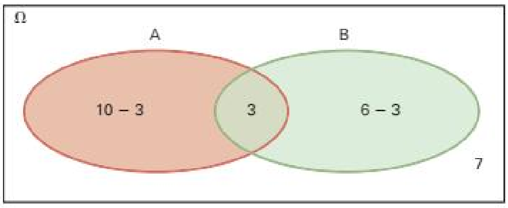
$\rightarrow n(A \cup B) = 13$

$$p(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)}$$

$$p(A \cup B) = \frac{13}{20}$$

Agora, observe que poderíamos determinar as probabilidades de ocorrências dos eventos $A \cap B$ e $A \cup B$ utilizando o diagrama de Venn. No diagrama a seguir, observe não apenas esses eventos como também o espaço amostral:

Figuras: © DAE



Na união dos conjuntos finitos A e B, vale a seguinte relação estudada na Teoria dos Conjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - (A \cap B)$$

Dividindo os dois membros dessa relação pelo número de elementos do espaço amostral considerado, obtemos:

$$\frac{(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Assim, de um modo geral, temos:

A probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B de um mesmo espaço amostral equiprovável, isto é, a probabilidade de ocorrer a união dos eventos A e B é igual à probabilidade de ocorrer o evento A mais a probabilidade de ocorrer o evento B menos a probabilidade de ocorrer simultaneamente A e B. Em símbolos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Retornando à situação anterior, temos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{13}{20}$$

Observação:

Quando $A \cap B = \varnothing$, temos $p(A \cup B) =$
$= p(A) + p(B)$.

Neste caso, dizemos que os eventos A e B são **mutuamente exclusivos**.

Exemplos:

1. A tabela abaixo foi elaborada com base em um levantamento feito em determinado município. Foram consultadas 1 000 pessoas que deveriam indicar o tipo de canal de televisão que habitualmente assistem:

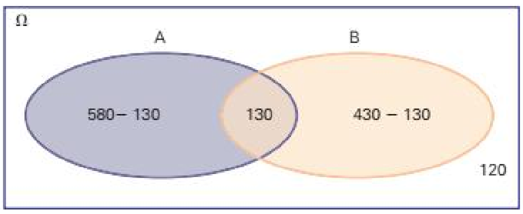
Tipo de canal	Número de pessoas
A	580
B	430
A e B	130
Nenhum	120

Considere que, após o levantamento, um pesquisador contratado por um dos tipos de canais resolva fazer uma entrevista com uma pessoa escolhida ao acaso entre as 1 000 consultadas. Qual é a probabilidade de essa pessoa habitualmente assistir:

a) ao tipo de canal A ou ao tipo de canal B?

b) a nenhum dos dois tipos de canal?

- Representando os dados da tabela por meio de um diagrama, temos:



Então, temos:

- no espaço amostral $\rightarrow$ $n(\Omega)=1000$
- no evento A $\rightarrow n(A)=580$
- no evento B $\rightarrow n(B)=430$
- no evento $A \cap B$ $\rightarrow n(A \cap B)=130$
- no evento X (nenhum tipo de canal) $\rightarrow$ $n(X)=120$

a) Calculando a probabilidade de a pessoa escolhida assistir ao tipo de canal A ou ao tipo de canal B:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{580}{1\,000} + \frac{430}{1\,000} - \frac{130}{1\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A \cup B) = \frac{880}{1\,000} = 88\%$$

b) Calculando a probabilidade de a pessoa escolhida não assistir a nenhum dos dois tipos de canais:

$$p(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)}$$

$$p(X) = \frac{120}{1000} \Rightarrow p(X) = 12\%$$

2. Em um baralho normal, há 52 cartas (13 cartas de cada naipe: ouros, espadas, copas e paus). Uma carta será retirada, aleatoriamente, desse baralho. Vamos determinar a probabilidade de a carta retirada ser uma dama ou um rei.


cloki/Shutterstock.com

- Espaço amostral:

$n(\Omega)=52$ $\rightarrow$ Formado por 52 elementos, isto é, o número de maneiras de escolhermos 1 carta aleatoriamente.

- Eventos:

Evento A – ocorrência de a carta retirada ser uma dama $\rightarrow$ 4 possibilidades

$n(A)=4$

Evento B – ocorrência de a carta retirada ser um rei $\rightarrow$ 4 possibilidades

$n(B)=4$

- Como queremos calcular a probabilidade de a carta retirada do baralho ser uma dama ou um rei, queremos calcular a probabilidade de ocorrer o evento $A \cup B$. Note que os eventos A e B são mutuamente exclusivos, pois $A \cap B = \varnothing$. Portanto:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - \frac{0}{52} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A \cup B) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

3. O serviço meteorológico da região Sul do Brasil informou que, para este fim de semana, a probabilidade de chover é 70%, a de fazer frio é 60% e a de chover e fazer frio é 50%. Vamos calcular a probabilidade de que no fim de semana, nos estados da região Sul:

a) não chova. c) chova ou faça frio.

b) não faça frio. d) não chova e não faça frio.

a) Os eventos "chover" (evento A) e "não chover" (evento $\overline{A}$) são complementares. De acordo com o enunciado, temos:

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

$$0{,}7 + p(\overline{A}) = 1$$

$$p(\overline{A}) = 0{,}3 \Rightarrow p(\overline{A}) = 30\%$$

b) Os eventos "fazer frio" (evento B) e "não fazer frio" (evento $\overline{B}$) são complementares. Conforme informações do enunciado, temos:

$$p(B) + p(\overline{B}) = 1$$

$$0{,}6 + p(\overline{B}) = 1$$

$$p(\overline{B}) = 0{,}4 \Rightarrow p(\overline{B}) = 40\%$$

c) Queremos calcular a probabilidade correspondente ao evento $A \cup B$ (chover ou fazer frio).

Segundo o enunciado, temos:

$p(A \cap B) = 50\%$ (ou 0,5)

Então:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}5$

$p(A \cup B) = 0{,}8 \Rightarrow p(A \cup B) = 80\%$

d) O evento "não chover e não fazer frio" é complementar do evento "chover ou fazer frio". Assim, temos que:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) + p(A \cup B) = 1$$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) + 0{,}8 = 1$$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2 \Rightarrow p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 20\%$$

Observação:

Ao estudar a Teoria dos Conjuntos, no volume 1 desta Coleção, vimos que uma das leis de Morgan afirma que o complementar da união de dois conjuntos é igual à intersecção dos complementares desses dois conjuntos. Assim, sejam $(\overline{A \cup B})$ e $(A \cup B)$ dois conjuntos complementares em relação ao espaço amostral Ω, temos:

$$(\overline{A \cap B}) + (A \cup B) = \Omega$$

$\downarrow$ *Lei de Morgan*

$$(\overline{A} \cap \overline{B}) + (A \cup B) = \Omega$$

Portanto, podemos afirmar que:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) + p(A \cup B) = 1$$

Exercícios resolvidos

1. Considere um conjunto formado por todos os anagramas da palavra ESCOLA.

a) Qual é o número total de elementos desse conjunto?

b) Escolhendo um dos elementos desse conjunto, qual é a probabilidade de que o anagrama comece com a letra C?

c) Escolhendo um dos elementos desse conjunto, qual é a probabilidade de que o anagrama termine com a letra O?

d) Escolhendo um dos elementos desse conjunto, qual é a probabilidade de que o anagrama comece com a letra C e termine com a letra O?

a) Anagramas da palavra ESCOLA:

$P_6 = 6! = 720$

Portanto, o número total de elementos desse conjunto é 720.

b) Anagramas da palavra ESCOLA que começam com a letra C:

$P_5 = 5! = 120$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

c) Anagramas da palavra ESCOLA que terminam com a letra O:

$P_5 = 5! = 120$

Assim, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

d) Anagramas da palavra ESCOLA que começam com a letra C e terminam com a letra O:

$P_4 = 4! = 24$

Então, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{120 + 120 - 24}{720} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$$

2. Uma urna contém 50 bolinhas, cada uma com um número de 1 a 50. Retira-se aleatoriamente uma bolinha e observa-se seu número. Qual é a probabilidade de esse número ser:

a) um múltiplo de 4?

b) um múltiplo de 5?

c) um múltiplo de 4 ou 5?

a) Múltiplos de 4 entre 1 e 50:

$A = \{4, 8, 12, ..., 48\}$

Seja N o número de elementos do conjunto A, então, pela relação de termo geral da PA, temos:

$48 = 4 + (N - 1) \cdot 4 \; N = 12$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

b) Múltiplos de 5 entre 1 e 50:

$B = \{5, 10, 15, ..., 50\}$

Seja N o número de elementos do conjunto B, então, pela relação de termo geral da PA, temos:

$50 = 5 + (N - 1) \cdot 5 \quad N = 10$

Então, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

c) Um múltiplo de 4 e 5 é um múltiplo de 20. São apenas 2 múltiplos de 20 entre 1 e 50 que é a intersecção entre os múltiplos de 4 e os de 5.

Assim, a probabilidade da união entre os multiplos de 4 e os de 5 é:

$$p = \frac{12 + 10 - 2}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Em uma caixa há 25 bolas: 10 são verdes e estão numeradas de 1 a 10; 5 são vermelhas e estão numeradas de 1 a 5; 10 são azuis e estão numeradas de 1 a 10.

a) Quantas bolas dessa caixa estão numeradas com um número par? 12

b) Se retirarmos uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de que ela seja azul ou verde? 80%

c) Se retirarmos uma bola dessa caixa, qual é a probabilidade de que ela seja verde ou numerada com um número par? 68%

2. Se dois dados, não "viciados", são lançados e os números de suas faces voltadas para cima são observados, qual é a probabilidade de que a soma desses números:

a) seja igual a 7?

b) seja igual a 10?

c) seja igual a 7 ou igual a 10?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{4}$

3. Se um dado e uma moeda, não "viciados", forem lançados simultaneamente e observarmos o número da face voltada para cima no dado e a face voltada para cima na moeda, qual é a probabilidade de que:

a) a face voltada para cima na moeda seja "cara"? 50%

b) o número da face voltada para cima no dado seja primo? 50%

c) a face voltada para cima na moeda seja "cara" ou o número da face voltada para cima no dado seja primo? 75%

4. Em uma universidade, foi realizada com os calouros uma pesquisa a respeito da popularidade dos dois maiores jornais da cidade. Essa pesquisa revelou que, dos 1 250 novos acadêmicos, 550 afirmaram ler o jornal A, 280 afirmaram ler o jornal B e 80 afirmaram ler ambos os jornais. Se escolhermos um calouro dessa universidade, ao acaso, qual é a probabilidade de ele:

a) não ser leitor de nenhum desses jornais? 40%

b) ser leitor de, pelo menos, um dos dois jornais? 60%

5. Considere que uma pesquisa foi feita entre os presidentes de clubes de futebol, jogadores, técnicos e imprensa esportiva sobre a possibilidade de o campeonato brasileiro de futebol seguir (SIM) ou não seguir (NÃO) o calendário do campeonato europeu (começar e terminar na mesma época). A tabela abaixo contém dados incompletos dessa pesquisa.(Considere que cada pesquisado disse **sim** ou **não**.)

a) Copie e complete, em seu caderno, esta tabela:

Pesquisados	Sim	Não	Total de entrevistados
Presidentes de clubes de futebol	25%		80
Jogadores	???	18%	500
Técnicos	32%		50
Imprensa esportiva	98%		100

b) Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre os entrevistados ter dito **sim**? E de ter dito **não**? Respostas no Manual do Professor.

6. Em um grupo com 10 pessoas, 5 têm olhos verdes, 7 têm cabelos castanhos e 3 têm olhos verdes e cabelos castanhos. Escolhendo uma pessoa desse grupo, qual é a probabilidade de ela ter olhos verdes ou cabelos castanhos? 90%

7. Em um experimento aleatório, a probabilidade de ocorrer o evento A é igual a $\frac{1}{2}$, de ocorrer o evento B é igual a $\frac{3}{8}$ e de ocorrer o evento $A \cap B$ é igual a $\frac{1}{4}$. Calcule a probabilidade de ocorrer o evento $A \cup B$. $\frac{5}{8}$

8. Escolhendo um número natural de 1 a 100, qual é a probabilidade de que ele seja um quadrado perfeito ou um cubo perfeito? 12%

9. Considere o conjunto formado por todos os anagramas da palavra BRASIL.

a) Qual é o número total de elementos desse conjunto? 720

b) Escolhendo um dos elementos desse conjunto, qual é a probabilidade de que o anagrama comece com a letra B? $\frac{1}{6}$

c) Escolhendo um dos elementos desse conjunto, qual é a probabilidade de que o anagrama termine com a letra L? $\frac{1}{6}$

d) Escolhendo um dos elementos desse conjunto, qual é a probabilidade de que o anagrama comece com a letra B ou termine com a letra L? 30%

10. A direção de uma escola decidiu que sortearia 3 dos 10 melhores alunos do Ensino Médio para ganhar uma viagem no fim do ano letivo. Se Douglas e Júlia, que são irmãos, estão entre os 10 melhores alunos, calcule a probabilidade de que:

a) Douglas esteja entre os 3 sorteados. 30%

b) Douglas ou Júlia estejam entre os 3 sorteados. $\frac{8}{15}$

c) nem Douglas nem Júlia estejam entre os 3 sorteados. $\frac{7}{15}$

11. Elabore um problema que envolva união de probabilidades. Resolva-o e apresente-o à turma. Resposta pessoal.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Agora que já vimos diversas situações referentes a adição de probabilidades em experimentos aleatórios, precisamos observar outro tipo de cálculo probabilístico chamado **probabilidade condicional**. Para isso, vamos considerar a seguinte situação:

Em uma comunidade com 200 pessoas adultas, das quais 120 são mulheres e 80 são homens, foi feito um levantamento a respeito da necessidade de destinar um espaço para a construção de um campo de futebol. Cada homem e cada mulher votaram **sim** (concordando) ou **não** (discordando). Após a pesquisa, foi divulgado o resultado, conforme a seguinte tabela:

	Sim	Não	Total
Mulheres	45	75	120
Homens	74	6	80
Total	119	81	200

Como a maioria votou **sim**, decidiram que uma dessas pessoas seria escolhida como representante da comunidade junto à empresa que construiria o campo de futebol. Vamos calcular a probabilidade de ocorrência do:

a) evento A – pessoa escolhida ser homem.

b) evento B – pessoa escolhida ter votado **sim**.

c) evento A ∩ B – pessoa escolhida ser homem e ter votado **sim**.

d) evento A | B – pessoa escolhida ser homem dado que tenha votado **sim**.

a) Seja $n(\Omega)$ o número de resultados possíveis na escolha de uma pessoa dessa comunidade, temos $n(\Omega) = 200$. Além disso, sabemos que $n(A) = 80$ (número de homens da comunidade). Portanto:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$p(A) = \frac{80}{200} = 0,40 \Rightarrow p(A) = 40\%$$

b) Seja $n(\Omega)$ o número de resultados possíveis na escolha de uma pessoa dessa comunidade, temos $n(\Omega) = 200$. Além disso, sabemos que $n(B) = 119$ (número de pessoas que votaram **sim**). Portanto:

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$p(B) = \frac{119}{200} = 0,595 \Rightarrow p(B) = 59,5\%$$

c) Seja $n(\Omega)$ o número de resultados possíveis na escolha de uma pessoa dessa comunidade, temos $n(\Omega) = 200$. Além disso, sabemos que $n(A \cap B) = 74$ (número de homens que votaram **sim**). Portanto:

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$p(A \cap B) = \frac{74}{200} = 0,37 \Rightarrow p(A \cap B) = 37\%$$

d) Vamos representar por $n(\Omega')$ o número de resultados possíveis na escolha de uma pessoa da comunidade que tenha votado **sim**. Desse modo, temos $n(\Omega') = 119$. Note que o espaço amostral mudou. Representando por $n(A \mid B)$ o número de possibilidades de escolha de um homem da comunidade dado que tenha votado **sim**, temos $n(A \mid B) = 74$. Portanto:

$$p(A \mid B) = \frac{n(A \mid B)}{n(\Omega')}$$

$$p(A \mid B) = \frac{74}{119} \cong 0,62 \Rightarrow p(A \mid B) \cong 62\%$$

Vamos analisar o que aconteceu no item **d** da situação acima.

Há outra maneira de calcular a probabilidade de escolha de um homem da comunidade dado que tenha votado **sim**. Observe o cálculo:

$$p(A \mid B) = \frac{74}{119} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$p(A \mid B) = \frac{\frac{74}{119}}{\frac{119}{200}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Denominamos $p(A \mid B)$ a probabilidade condicional de A em relação a B:

Dados dois eventos A e B do espaço amostral Ω finito e não vazio, a probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, indicada por $p(A|B)$ é:

$$p(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \quad ou \quad p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

Exemplo:

Existem casais que, ao constituir uma família, fazem o planejamento de quantos filhos desejam ter. Vamos considerar que um desses casais planejou ter três filhos. Qual é a probabilidade de que sejam três meninas, considerando que o primeiro filho é menina?

- Espaço amostral Ω:

Representando por m (menina) e por r (menino), temos as seguintes possibilidades para o nascimento dos três filhos:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(m,m,m),(m,m,r),(m,r,m),(r,m,m),(r,r,r),\\(r,r,m),(r,m,r),(m,r,r)\end{matrix}\right\}$$

$$n(\Omega)=8$$

Note que esse número de elementos do espaço amostral poderia ser obtido pelo princípio multiplicativo. Considerando que, para cada nascimento, existem 2 possibilidades (menina ou menino), para os três nascimentos, temos:

$$n(\Omega)=2\cdot 2\cdot 2=8$$

- Eventos:

Evento A – ocorrência de o casal ter três filhas meninas.

$$A=\{(m,m,m)\}\rightarrow n(A)=1$$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{8}$$

Evento B – ocorrência de o primeiro filho do casal ser menina.

$$B=\{(m,m,m),(m,m,r),(m,r,m),(m,r,r)\}\rightarrow n(B)=4$$

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{4}{8}$$

Evento $A\cap B$ – ocorrência de o casal ter três filhas meninas e o primeiro filho do casal ser menina.

$$A\cap B=\{(m,m,m)\}\rightarrow n(A\cap B)=1$$

$$p(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\frac{1}{8}$$

- Vamos calcular a probabilidade de ocorrência do evento $A \mid B$: os três filhos do casal são meninas, considerando que o primeiro filho é menina.

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

$$p(A|B)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{1}{4}$$

Observação:

Poderíamos calcular esse resultado utilizando a multiplicação de probabilidades: como já sabemos que o primeiro filho é menina, temos de calcular a probabilidade de segundo ser menina e o terceiro também ser menina. Isto é, bastaria fazer:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \text{ (multiplicação de probabilidades)}$$

PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

Vimos anteriormente que: dados dois eventos A e B do espaço amostral Ω finito e não vazio, a probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu o evento B, indicada por $p(A|B)$ é:

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

Dessa igualdade, obtemos:

$$p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A \mid B)$$

Podemos interpretar a igualdade obtida da seguinte maneira:

A probabilidade de ocorrer a intersecção dos eventos A e B (ocorrência simultânea de A e B, $A \cap B$) pode ser calculada pelo produto da probabilidade de ocorrer um deles (evento B) pela probabilidade de ocorrer o outro (evento A), considerando que o primeiro já ocorreu (evento $(A|B)$):

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B)$$

Vamos considerar duas situações envolvendo a multiplicação de probabilidades.

1ª situação:

Em uma pequena urna, foram colocadas 14 fichas de mesmas dimensões, das quais 5 são vermelhas e 9 são verdes. Uma dessas fichas é retirada da urna e, em seguida, **sem reposição**, uma nova ficha é extraída.

Adilson Secco

Vamos calcular a probabilidade:

a) de a primeira ficha retirada ser verde.

b) de a segunda ficha retirada ser verde, considerando que a primeira ficha retirada também tenha sido verde.

c) de a primeira e a segunda fichas retiradas serem verdes.

a) De um total de 14 fichas, 9 são verdes. Desse modo, para que a primeira ficha retirada seja verde, existem 9 situações favoráveis em um total de 14 resultados possíveis. Assim, representando essa probabilidade por $p(A)$, temos:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{14}$$

b) A probabilidade de a segunda ficha retirada ser verde está condicionada ao fato de que a primeira ficha retirada também tenha sido verde (de acordo com o enunciado, sem reposição). Assim, seja $p(B | A)$ a probabilidade de a segunda ficha retirada ser verde dado que a primeira ficha retirada também tenha sido dessa cor. Existem, agora, 8 situações favoráveis em um total de 13 resultados possíveis (o espaço amostral mudou). Portanto:

$$p(B|A) = \frac{n(B|A)}{n(\Omega')} = \frac{8}{13}$$

c) Precisamos calcular a probabilidade de ocorrência de ambas as fichas retiradas serem verdes, isto é, devem-se verificar o primeiro e o segundo eventos sucessivamente. Utilizando o princípio multiplicativo, vamos calcular o número de elementos do espaço amostral e o número de elementos do evento:

- Número de resultados possíveis (retirada da primeira ficha e, sem reposição, da segunda ficha): $n(\Omega) = 14 \cdot 13$
- Número de situações favoráveis (retirada da primeira ficha verde e, sem reposição, da segunda ficha também verde): $n(A \cap B) = 9 \cdot 8$
- Cálculo da probabilidade de ocorrer A e B, isto é, de ocorrer $A \cup B$:

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$p(A \cap B) = \frac{9 \cdot 8}{14 \cdot 13} = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = p(A) \cdot p(B|A)$$

Observação:

Na situação apresentada acima, a probabilidade de ocorrência de a ficha ser verde na segunda retirada (evento B) é afetada pela ocorrência de que a ficha tenha sido verde na primeira retirada (evento A).

Vamos considerar, agora, em relação à situação anterior, que a retirada é **com reposição** da primeira ficha retirada.

2ª situação:

Em uma pequena urna, foram colocadas 14 fichas de mesmas dimensões, das quais 5 são vermelhas e 9 são verdes. Uma dessas fichas é retirada da urna e, em seguida, **com reposição** da primeira ficha retirada, uma nova ficha é extraída. Vamos calcular a probabilidade de a primeira e a segunda fichas serem verdes.

- Eventos:

Evento A – a primeira ficha retirada é verde.

Neste caso, existem 9 situações favoráveis (9 fichas verdes: número de elementos do evento A) em um total de 14 resultados possíveis (14 fichas: número de elementos do espaço amostral). Então:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{9}{14}$$

Evento B – a segunda ficha retirada é verde.

Como houve reposição da primeira ficha retirada, existem 9 situações favoráveis (9 fichas verdes: número de elementos do evento B) em um total de 14 resultados possíveis (14 fichas: número de elementos do espaço amostral). Portanto:

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{9}{14}$$

Evento $A \cap B$ – a primeira e a segunda fichas retiradas são verdes.

Pelo princípio multiplicativo, temos:

- número de situações favoráveis
$\rightarrow n(A \cap B) = 9 \cdot 9$

- número de situações possíveis $\rightarrow n(\Omega) = 14 \cdot 14$

Assim, temos:

$$p(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}$$

$$p(A\cap B)=\frac{9\cdot 9}{14\cdot 14}=\frac{9}{14}\cdot\frac{9}{14}=p(A)\cdot p(B)$$

Observação:

Nessa situação que acabamos de ver, a ocorrência do evento B não é afetada pela ocorrência do evento A. Logo:

$$p(B|A)=p(B)$$

Assim, podemos escrever:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)=p(A)\cdot p(B)$$

Nesse caso, dizemos que os eventos A e B são independentes.

Quando, para dois eventos A e B de um espaço amostral Ω finito e não vazio, tem-se $p(A\cap B) = p(A) \cdot p(B)$ os eventos são ditos independentes.

Questões e reflexões

Respostas, no Manual do Professor.

Qual é a interpretação que você faz para dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral finito e não vazio, tais que $p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B)$?

Observação:

Se os eventos A_1, A_2, A_3...A_n, de um espaço amostral Ω finito e não vazio, forem independentes, vale a relação:

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3\cap ...\cap A_n)=$$
$$=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)\cdot ...\cdot p(A_n)$$

Exemplo:

Vamos considerar que um casal planeja ter três filhos. Seja o evento A ocorrência de pelos menos dois filhos do sexo masculino e seja o evento B ocorrência de pelos menos um filho de cada sexo). Os eventos A e B são independentes?

- Espaço amostral Ω:

Representando por ***m*** (sexo masculino) e por ***f*** (sexo feminino), temos para o nascimento dos três filhos:

$$\Omega=\{(m,m,m),(m,m,f),(m,f,m),(f,m,m),$$
$$(f,f,f),(f,f,m),(f,m,f),(m,f,f)\}$$

$$n(\Omega)=8$$

- Eventos:

Evento A – ocorrência de pelo menos dois filhos do sexo masculino.

$$A=\{(m,m,m),(m,m,f),(m,f,m),(f,m,m)\}\rightarrow n(A)=4$$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{4}{8}$$

Evento B – ocorrência de pelo menos um filho de cada sexo.

$$B=\left\{\begin{matrix}(m,m,f),(m,f,m),(f,m,m),(f,f,m),\\(f,m,f),(m,f,f)\end{matrix}\right\}\rightarrow n(B)=6$$

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{6}{8}$$

Evento $A \cap B$ – ocorrência de pelo menos dois filhos do sexo masculino e pelo menos um filho de cada sexo.

$$A \cap B = \{(m, m, f), (m, f, m), (f, m, m)\} \rightarrow n(A \cap B) = 3$$

$$p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

Os eventos A e B são independentes. Observando as probabilidades obtidas:

$$\frac{3}{8} = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8}$$
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Observação:

Uma consequência importante do conceito de probabilidade de ocorrência de um evento em um espaço amostral é a chamada **probabilidade complementar**. Quando, em um experimento aleatório, consideramos dois resultados apenas, o **sucesso** e o **fracasso** (ocorrer o evento ou não ocorrer o evento, respectivamente), e realizamos esse experimento n vezes em tentativas independentes (o resultado da ocorrência de um evento não interfere no resultado da ocorrência do outro evento), logo:

- evento A – sucesso (ocorrer o evento A);
- evento $\overline{A}$ – fracasso (não ocorrer o evento A).

Se considerarmos $\boldsymbol{p}$ a probabilidade de sucesso em cada tentativa, então a probabilidade $\boldsymbol{q}$ do fracasso será $\boldsymbol{q = 1 - p}$. A probabilidade de obter $\boldsymbol{k}$ sucessos em n tentativas pode ser calculada pela relação matemática:

$$\boldsymbol{p = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} \text{ ou } \boldsymbol{p = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}$$

Nessa relação, devemos considerar que $0 \leq k \leq n$. Além disso, observe que essa fórmula está relacionada com a fórmula do termo geral do desenvolvimento das potências naturais de um binômio.

Exemplo:

Em uma prova há 10 questões. São testes com 5 alternativas em cada um, e apenas uma das alternativas é a correta. Vamos calcular a probabilidade de um aluno "chutar" todas as respostas e acertar 7 questões.

- Probabilidade de acertar cada questão "chutando":

$$p = \frac{1}{5}$$

- Probabilidade de errar cada questão:

$$q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

- Probabilidade de acertar 7 das 10 questões:

$$p = C_{10}^{7} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

Exemplo:

Suponha que um casal que estudou genética analisou seus antecedentes e descobriu que a probabilidade de ter um filho de olhos azuis é 7/8. Se esse casal planejou ter 5 filhos, qual a probabilidade de exatamente 3 deles terem olhos azuis?

Vamos considerar que A representa o evento "o filho ter olhos azuis" e A o evento "o filho não ter olhos azuis"

- Probabilidade de um filho ter olhos azuis:

$$p = (A) = \left(\frac{7}{8}\right)$$

- Probabilidade de um filho não ter olhos azuis:

$$q = (\overline{A}) = \frac{1}{8}$$

- Sendo p a probabilidade do casal ter exatamente 3 dos 5 filhos com olhos azuis é:

$$p = C_5^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

- Observando que $C_5^3 = 10$,

$\left(\frac{7}{8}\right)^3 \cong 0{,}670$ e $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0{,}016$ teremos que a

probabilidade anterior é:

$p \cong 0{,}670 \cdot 0{,}016$

$p \cong 0{,}1072 \rightarrow p \cong 10{,}72\%$

Exercícios resolvidos

1. Dois dados não "viciados" foram lançados. Qual é a probabilidade de que a soma dos números das faces voltadas para cima tenha sido igual a 8 ou igual a 4, sabendo que essa soma não foi igual a 6?

Como a soma não foi igual a 6, não ocorreram os pares (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) e (5, 1).

Para que a soma seja igual a 8 ou igual a 4, devem ocorrer um dos seguintes pares:

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1)

Logo, a probabilidade de que a soma dos números das faces voltadas para cima tenha sido igual a 8 ou igual a 4, sabendo que essa soma não foi igual a 6, é:

$$\frac{8}{36-5}=\frac{8}{31}$$

2. Da turma do primeiro ano de Engenharia de uma universidade, 20 alunos foram reprovados em Cálculo Diferencial e Integral, 15 alunos foram reprovados em Geometria Analítica e 5 alunos foram reprovados nessas duas disciplinas. Se um aluno dos reprovados do primeiro ano de Engenharia dessa universidade for escolhido aleatoriamente, calcule a probabilidade de ele:

a) ter reprovado em Geometria Analítica, sabendo que foi reprovado em Cálculo Diferencial e Integral.

b) não ter reprovado em Cálculo Diferencial e Integral, sabendo que foi reprovado em Geometria Analítica.

O número total de alunos reprovados é igual a:

$20 + 15 - 5 = 30$

Sejam os eventos:

- evento G – ocorrência de o aluno ter sido reprovado em Geometria Analítica;
- evento CD – ocorrência de o aluno ter sido reprovado em Cálculo Diferencial e Integral;
- evento $\overline{CD}$ – ocorrência de o aluno não ter sido reprovado em Cálculo Diferencial e Integral.

Então:

$$a)\ p\left(G/CD\right)=\frac{p(G \text{ e } CD)}{p(CD)}=\frac{\frac{5}{30}}{\frac{20}{30}}=\frac{1}{4}=0{,}25=25\%$$

$$b)\ p\left(\overline{CD}/G\right)=\frac{p\left(\overline{CD} \text{ e } G\right)}{p(G)}=\frac{\frac{15-5}{30}}{\frac{15}{30}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

3. Em uma loja, dos 10 aparelhos de som que estão no estoque, 2 apresentam defeito. Se duas pessoas comprarem aparelhos de som nessa loja, qual é a probabilidade de que:

a) os 2 aparelhos apresentem defeito?

b) pelo menos 1 dos aparelhos apresente defeito?

$$10\begin{cases}2 \text{ defeituosos}\\ 8 \text{ não defeituosos}\end{cases}$$

$$a)\ p(2 \text{ defeituosos}) \rightarrow \underbrace{\frac{2}{10}}_{\text{def.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{9}}_{\text{def.}}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$$

b) p(pelo menos 1 defeituoso) →

$$\underbrace{\frac{2}{10}}_{\text{def.}}\cdot\underbrace{\frac{8}{9}}_{\text{não def.}}+\underbrace{\frac{8}{10}}_{\text{não def.}}\cdot\underbrace{\frac{2}{9}}_{\text{def.}}+\underbrace{\frac{2}{10}}_{\text{def.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{9}}_{\text{def.}}=\frac{16+16+2}{90}=\frac{34}{90}=\frac{17}{45}$$

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. Dois dados não "viciados" foram lançados simultaneamente. Verificou-se que a soma dos números das faces voltadas para cima foi igual a 7. Qual é a probabilidade de que em pelo menos um dos dados tenha ocorrido um número primo na face voltada para cima? $\frac{2}{3}$

2. Em um baralho comum, as 52 cartas são divididas em 4 naipes: paus, ouros, copas e espadas. Sabe-se que, das 13 cartas de cada naipe, 3 são figuras. Considerando que duas cartas de um baralho comum são escolhidas ao acaso, calcule a probabilidade de:

a) a primeira e a segunda carta serem figuras. $\frac{11}{221}$

b) a segunda carta ser uma figura, sabendo que a primeira carta escolhida também tenha sido uma figura. $\frac{11}{51}$

3. Três moedas não "viciadas" foram lançadas sucessivamente. Sabendo que as faces voltadas para cima nas três moedas não foram iguais, calcule a probabilidade de que nas duas primeiras moedas a face voltada para cima tenha sido "cara" e na terceira moeda tenha sido "coroa". $\frac{1}{6}$

4. A probabilidade de um atirador A errar o alvo é igual a 9%, e a probabilidade de o atirador B errar o mesmo alvo é igual a 11%. Um tiro foi dado e houve erro. Qual é a probabilidade de esse tiro ter sido dado pelo atirador A? 45%

Jorge Silva/Reuters/Latinstock

5. Estatísticas apontam que um time de futebol, quando joga "em casa", vence 80% dos jogos quando não está chovendo no momento da partida e 50% dos jogos quando está chovendo. Considere que a probabilidade de chover durante uma partida do campeonato na cidade natal desse time é igual a 20% e que ele vai disputar o próximo jogo "em casa".

a) Qual é a probabilidade de que no momento da próxima partida esteja chovendo e o time vença o jogo? 10%

b) Qual é a probabilidade de que no momento da próxima partida não esteja chovendo e o time vença o jogo? 64%

$\frac{5}{37}$ c) Considerando que o time venceu a partida, qual é a probabilidade de que tenha chovido durante o jogo?

6. Em um pequeno país, onde são consumidas muitas comidas ricas em gordura, 55% das pessoas são do sexo masculino, 50% das pessoas são obesas e 60% das mulheres não são obesas. Escolhendo, aleatoriamente, uma pessoa desse país, calcule a probabilidade de a pessoa:

a) ser obesa e do sexo feminino. 18%

$\frac{32}{55}$ b) ser obesa, sabendo que é do sexo masculino.

c) ser do sexo feminino, sabendo que é obesa. 36%

7. Três dados não "viciados" foram lançados e os números das faces voltadas para cima foram somados. Sabendo que a soma dos três números foi igual a 10, qual é a probabilidade de que os três números tenham sido primos? $\frac{2}{9}$

8. Um hospital divulgou as três doenças que oferecem maior risco de morte. Os percentuais de morte entre as pessoas que contraem cada uma das três doenças são:

- doença A $\rightarrow$ 80%;
- doença B $\rightarrow$ 75%;
- doença C $\rightarrow$ 60%.

Sabe-se ainda que entre as pessoas que chegam ao hospital com uma das doenças — A, B ou C — 30% são portadoras da doença A, 20% são portadoras da doença B e 50% são portadoras da doença C. Assim, sabendo que um paciente obteve a cura, qual é a probabilidade de que tivesse a doença C? $\frac{20}{31}$

9. Um exame laboratorial fornece resultado positivo em 90% dos casos em que o paciente realmente tem certa doença. Isso significa que em 10% dos casos ocorre um falso negativo. Já entre os pacientes que não têm a doença, apenas 1% dos casos aponta o resultado positivo. Se, em uma população, 5% das pessoas têm essa doença, qual é a probabilidade de:

a) uma pessoa ser escolhida ao acaso nessa população, submetida ao exame e o resultado ser positivo? 5,45%

$\frac{90}{109}$ b) que uma pessoa dessa população tenha a doença, sabendo que o resultado do exame foi positivo?

10. Os aproveitamentos dos três melhores cobradores de pênaltis de um time de futebol são iguais a 90%, 80% e 75%. Se, em um jogo, a decisão terminar empatada e for decidida nas cobranças de penalidades máximas, qual é a probabilidade de que: 54%

a) os três jogadores convertam suas cobranças?

b) os três jogadores não convertam suas cobranças? 0,5%

c) pelo menos um dos três jogadores converta sua cobrança? 99,5%

11. Dois amigos, João e Pedro, decidiram jogar dois dados para ver quem conseguia a maior pontuação. Combinaram que Pedro venceria caso o número da face voltada para cima em seu dado fosse igual ou superior ao número da face voltada para cima no dado de João. Quais são as probabilidades de cada um deles vencer o jogo? Resposta no Manual do Professor.

12. Em uma urna, foram colocadas 100 bolas numeradas de 1 a 100. Se duas bolas forem sorteadas dessa urna, sem reposição, qual é a probabilidade de que a soma dos números nelas marcados seja igual a 100? $\frac{49}{4950}$

13. Em uma turma de segundo ano do Ensino Médio estudam 40 alunos, dos quais 55% são meninos. Escolhendo, ao acaso, dois alunos dessa turma, qual é a probabilidade de que eles sejam de sexos diferentes? $\frac{33}{65}$

CAPÍTULO

20 INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA

Filipe Rocha

Todos os dias uma quantidade imensa de informações é transmitida para as pessoas. Grande parte delas tem como origem pesquisas e estudos estatísticos. Índices de inflação, de emprego e desemprego são analisados e divulgados pela mídia escrita e falada. No Brasil, existe um órgão responsável pela produção das informações oficiais a respeito dos diversos índices: o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

"Vivemos na era da informação."

Talvez você já tenha escutado essa frase, pois é notável que, a cada dia, a imprensa, de modo geral, veicula informações diversas provenientes de pesquisas estatísticas nas várias áreas do conhecimento, como: econômicas, sociais, educacionais, a respeito de segurança pública, entre outras. Muitas decisões são tomadas com base em dados de pesquisas estatísticas.

Filipe Rocha

Ao iniciar o estudo da teoria das probabilidades, no início desta Unidade, fizemos a seguinte pergunta:

Qual é o meio de transporte mais seguro: automóvel ou avião?

Enfatizamos que não era e não é uma pergunta simples de ser respondida, mas certamente é uma pergunta que interessa para as empresas que trabalham com seguros. Podemos apresentar uma resposta a essa pergunta, em termos de probabilidade, porém com base em dados coletados a respeito de acidentes ocorridos com esses meios de transporte. Para isso, entra em ação outra área do conhecimento: a Estatística.

Neste e no próximo capítulo, abordaremos algumas ideias importantes a respeito dessa área do conhecimento.

IDEIAS INICIAIS

A densidade demográfica média da população brasileira, conforme dados do último levantamento feito no Censo 2010, era 22,43 habitantes por quilômetro quadrado. A cada dez anos, essas informações são atualizadas por meio de coletas de dados. Assim, em 2020 teremos um novo Censo populacional.

Esses dados são obtidos por levantamentos estatísticos. O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) colhe tais informações, processa, analisa e produz resumos para divulgação. Esses resumos, por sua vez, são elaborados com recursos gráficos que permitem não apenas fornecer ao leitor as principais ideias da pesquisa, mas também chamar a atenção para aspectos comparativos, que permitem conhecer um pouco mais a nossa realidade.

A origem da palavra estatística vem do latim, derivando de *status*, cujo significado está relacionado com estado, situação. De modo um pouco mais amplo, podemos dizer que:

A **Estatística** é um ramo da Matemática constituído de um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que, entre outros tópicos, envolve:

- o planejamento do experimento a ser realizado;
- a coleta quantificada de dados;
- a inferência, o processamento e a análise das informações.

Pesquisa, população e amostra

Você já participou de alguma pesquisa?

Já pensou em elaborar uma para conhecer um pouco mais os hábitos de seus amigos, o comportamento das pessoas, o esporte preferido delas?


Filipe Rocha

Imagine uma pesquisa feita para identificar o esporte preferido da população brasileira. Será que o futebol é o esporte favorito dos brasileiros? Como podemos saber a resposta? Uma pesquisa precisa ser feita para termos uma ideia dessa resposta.

Existem diversas situações em que uma pesquisa se faz necessária. Dois conceitos aqui são importantes: **população** e **amostra**. Vamos analisar alguns exemplos.

1. Eleição do representante estudantil da escola

Nesse caso, a população é formada por todos os alunos matriculados na escola. Logo, para escolher quem será o representante estudantil, a população é formada por pessoas que possuem, em comum, as características: são alunos e estão matriculados na correspondente escola. Cada aluno com essas características constitui um elemento da população.

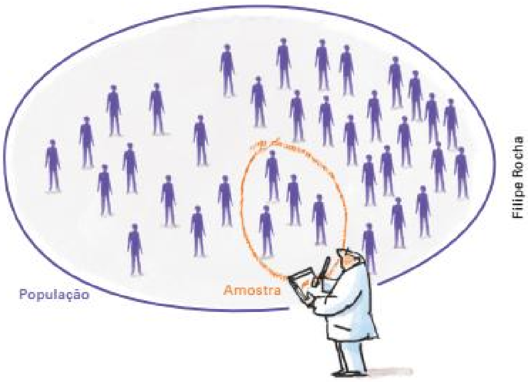
2. Eleição do presidente do Brasil

Aqui, a população é formada por todos os brasileiros que estão habilitados para votar. Note que, neste exemplo, não basta ser brasileiro para votar. É necessário que, legalmente, esteja em condições de votar.

3. Controle de qualidade de um produto

Uma fábrica de carrinhos de bebê deseja observar a qualidade dos carrinhos que produz. Nesse caso, dizemos que a população da pesquisa é formada por todos os carrinhos que são produzidos por essa fábrica. Cada carrinho representa um elemento da população estatística a ser observada.

E se desejarmos descobrir qual é o passatempo favorito das pessoas que vivem no Brasil? Nesse caso, a população estatística é a população brasileira. Evidentemente, não vamos perguntar a todos os brasileiros, um a um, a respeito do passatempo favorito. Então, como podemos fazer?



É aí que a Estatística utiliza a chamada **amostra**, ou seja, um grupo de brasileiros que nos permite ter uma ideia **representativa da população** como um todo, pelo menos de maneira aproximada. Por motivos de ordem prática, que estão relacionados às limitações de recursos financeiros ou mesmo de tempo, a Estatística utiliza amostras. Podemos dizer que a amostra em uma pesquisa é uma espécie de "redução da população", porém essa parte da população tem de ser representativa.

Exemplo:

Intenção de votos na escolha de um presidente

Na disputa do cargo de presidente, por exemplo, pesquisas estatísticas a respeito da intenção de votos são realizadas periodicamente ao longo dos dias que antecedem a eleição. Elas são feitas com base em uma amostra da população.

As pessoas geralmente dizem que nunca participaram de uma pesquisa referente, por exemplo, à intenção de votos na escolha do presidente brasileiro, mas isto ocorre porque a probabilidade de você participar de uma pesquisa dessa é muito pequena, pois a população brasileira é composta de cerca de 200 milhões de habitantes, e uma amostra para uma pesquisa pode ter, digamos, 2 500 pessoas.

Nessas pesquisas, existem critérios estatísticos que são utilizados para garantir que todo o eleitorado brasileiro esteja representado dentro das amostras. Quando bem definidos esses critérios, é possível, com uma amostra de 2 500 pessoas, produzir resultados com margem de erro de, por exemplo, no máximo dois pontos percentuais para mais ou para menos.

A nossa finalidade aqui não é levar você a fazer pesquisas, observando amostras de populações pesquisadas, mas fornecer elementos que permitam a você ser crítico diante de uma pesquisa cujos dados são divulgados, por exemplo, em jornal ou revista.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. Considere que em uma escola há 400 alunos, dos quais 100 são meninos e 300 são meninas. Se você fosse pesquisar dessa população apenas uma amostra correspondente a 10% do total de alunos (40 alunos) seria correto formar essa amostra com 20 meninos e 20 meninas?
2. Além do sexo, que outra informação seria interessante, por exemplo, para pesquisar o programa de TV favorito entre os alunos dessa escola?

Variáveis estatísticas

Vamos considerar que você é o responsável pelo projeto de um novo carro que será lançado no mercado no ano que vem.

A indústria em que você trabalha encomenda uma pesquisa para consultar o futuro consumidor quanto à preferência de cor do carro, à quantidade de portas, ao tamanho do porta-malas, à potência do motor, ao tipo de combustível, ao valor do carro etc.

Todas essas informações a serem obtidas junto aos consumidores são exemplos do que chamamos **variáveis de uma pesquisa**. De outra maneira, dizemos que, quando um pesquisador faz um estudo de uma população, seu interesse é direcionado para determinado aspecto (característica ou propriedade) que, de certo modo, é comum aos indivíduos que compõem essa população. É a variável da pesquisa.

São dois os tipos de variáveis: **qualitativas** e **quantitativas**.

A variável qualitativa é aquela, como a própria denominação indica, que exprime atributo ou qualidade dos indivíduos pesquisados.

São exemplos de variável qualitativa: sexo, cor de cabelo, cor dos olhos, nacionalidade, grau de instrução, entre outros. Note que, nesse tipo de variável, os dados não são numéricos.

Observação:

Uma variável qualitativa pode ser dita **ordinal**, quando existe uma ordem nos dados, ou simplesmente **nominal**, quando isso não acontece. Um exemplo de variável qualitativa ordinal seria o grau de instrução de uma pessoa. Já um exemplo de variável qualitativa nominal seria a cor dos olhos de uma pessoa.

A **variável quantitativa** é aquela, como a própria denominação indica, que exprime quantidade. Os dados tomados na pesquisa são expressos por números.

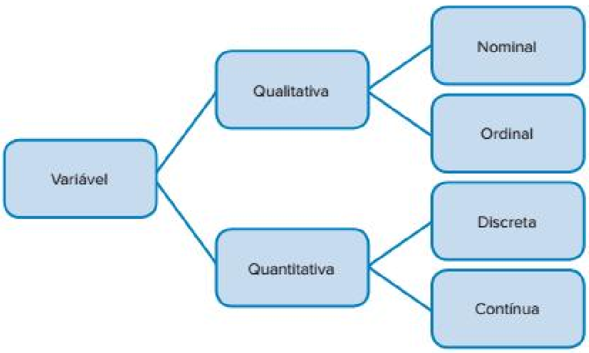
São exemplos de variável quantitativa: idade, altura, massa, quantidade de irmãos, salário mensal, quantidade de filhos, entre outros.

Observação:

Uma variável quantitativa pode ser classificada em **discreta** ou **contínua**.

As variáveis são discretas quando podem assumir um conjunto enumerável de valores geralmente obtidos por meio de contagem (números inteiros). Número de filhos é um exemplo de variável quantitativa discreta.

As variáveis são contínuas quando os valores são obtidos por meio de mensuração (números reais). A altura de uma pessoa é um exemplo de variável quantitativa contínua.



Quando você estudou os conjuntos numéricos no volume 1 desta coleção, viu que todo número que é inteiro é também real. Assim, por exemplo, se a massa de uma pessoa em uma pesquisa (variável contínua) é 75 kg (variável expressa por meio de um número inteiro), ela pode também ser considerada variável quantitativa discreta.

Na Estatística, porém, prefere-se fazer a distinção entre variável quantitativa discreta (aquela obtida por meio de uma contagem) e variável quantitativa contínua (aquela obtida por meio de uma medição).

FREQUÊNCIA ABSOLUTA E FREQUÊNCIA RELATIVA


Tetra Images/Brand X/Getty Images

Quantas horas você dorme diariamente?

Suponha que uma pesquisa entre 50 alunos do Ensino Médio, com idades entre 15 e 17 anos, foi feita para verificar a quantidade de horas inteiras de sono, em média, que cada aluno dormia por noite.

O resultado dessa pesquisa foi, inicialmente, representado em uma tabela. As quantidades de horas inteiras de sono, por noite, eram simplesmente anotadas à medida que os alunos forneciam esse valor:

6	7	8	4	8	6	5	7	8	6
4	8	7	7	8	10	6	7	7	9
7	6	10	10	4	7	10	8	6	7
5	8	5	7	9	10	7	7	9	8
7	6	8	6	7	7	5	5	6	8

Para que tenhamos uma melhor ideia dessas informações, podemos elaborar outra tabela contendo as frequências absolutas e as frequências relativas.

Frequência absoluta é o número de vezes que um valor de uma variável em uma pesquisa é citado. Representamos a frequência relativa por f_A.
Frequência relativa é a razão entre a frequência absoluta de uma variável e o total de citações. Representamos por f_R.

Assim, podemos construir a seguinte tabela:

Quantidade de horas Inteiras de sono (por noite)	Frequência absoluta (f_A)	Frequência relativa (f_R)
4	3	6%
5	5	10%
6	9	18%
7	15	30%
8	10	20%
9	3	6%
10	5	10%
TOTAL	50	100%

Observações:

1. A frequência relativa de um evento, apresentada na forma decimal ou porcentagem, pode ser associada à probabilidade de ocorrer esse evento.

2. A tabela que exibe a variável e suas frequências, absoluta e relativa, é denominada tabela de frequências.

Questões e reflexões

Resposta no Manual do Professor.

Considere que um dos 50 alunos pesquisados, de acordo com a tabela anterior, seja escolhido aleatoriamente. Qual é a probabilidade de o aluno escolhido dormir em média 10 horas inteiras de sono por noite?

Existem situações em que uma variável apresenta muitos valores diferentes. Isso torna inviável colocar na tabela uma linha para cada valor. Vamos exemplificar.

Considere que, na pesquisa anterior, entre os 50 alunos do Ensino Médio, foi observado a altura de cada um deles, obtendo-se os seguintes valores em metros:

1,54	1,56	1,58	1,74	1,85	1,80	1,64	1,66	1,76	1,77
1,81	1,68	1,67	1,77	1,62	1,63	1,61	1,59	1,69	1,79
1,69	1,57	1,83	1,72	1,73	1,65	1,90	1,91	1,88	1,87
1,72	1,53	1,55	1,62	1,60	1,70	1,49	1,82	1,79	1,64
1,63	1,66	1,77	1,71	1,51	1,81	1,76	1,49	1,65	1,66

Uma maneira de organizar esses valores é agrupando-os em intervalos (**classes**). Para tanto, procedemos da seguinte maneira (utilizando os dados da tabela anterior):

- Calculamos a diferença entre a maior e a menor altura. Obtemos assim a amplitude total:

$1{,}91 \text{ m} - 1{,}49 \text{ m} = 0{,}42 \text{ m}$

- Escolhemos o número de **classes**: neste exemplo, utilizaremos 5 classes para distribuir as alturas.
- Dividimos a amplitude total pelo número de classes, otendo assim a amplitude de cada classe (algumas vezes, faz-se necessário realizar arredondamentos):

$(0{,}42 \text{ m}) : 5 = 0{,}084 \text{ m} \rightarrow$ Vamos arredondar para 0,09 m.

- Elaboramos a tabela de frequências obtendo as classes, a partir da menor altura 1,49 m com a adição de 0,09. Convencionamos que cada classe é um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita (representado por $\mapsto$):

1ª classe: $1{,}49 \mapsto 1{,}58$ (fizemos: $1{,}49 + 0{,}09 = 1{,}58$)

2ª classe: $1{,}58 \mapsto 1{,}67$ (fizemos: $1{,}58 + 0{,}09 = 1{,}67$)

3ª classe: $1{,}67 \mapsto 1{,}76$ (fizemos: $1{,}67 + 0{,}09 = 1{,}76$)

4ª classe: $1{,}76 \mapsto 1{,}85$ (fizemos: $1{,}76 + 0{,}09 = 1{,}85$)

5ª classe: $1{,}85 \mapsto 1{,}94$ (fizemos: $1{,}85 + 0{,}09 = 1{,}94$)

Para elaborar a tabela de frequências, contamos o número de alturas em cada classe, obtendo assim a frequência absoluta de cada classe.

Alturas (em classes)	Frequência Absolula (f_A)	Frequência relativa (f_R)
$1{,}49 \mapsto 1{,}58$	8	16%
$1{,}58 \mapsto 1{,}67$	15	30%
$1{,}67 \mapsto 1{,}76$	10	20%
$1{,}76 \mapsto 1{,}85$	12	24%
$1{,}85 \mapsto 1{,}94$	5	10%
TOTAL	50	100%

Exercícios resolvidos

1. Observe alguns tipos de variáveis.

Cor dos olhos	Programa de TV preferido
Número de irmãos	Tempo de estudo fora da escola
Altura de uma pessoa	Mês de aniversário
Nome da mãe	Distância de uma casa até o ponto de ônibus
Se é portador de necessidades especiais	Quantidade de filhos
	Dia da semana preferido

Classifique essas variáveis em quantitativa (discreta ou contínua) ou qualitativa (nominal ou ordinal).

Variáveis quantitativas discretas: número de irmãos e quantidade de filhos.

Variáveis quantitativas contínuas: altura de uma pessoa, tempo de estudo fora da escola e distância de uma casa até o ponto de ônibus.

Variáveis qualitativas ordinais: mês de aniversário e dia da semana preferido.

Variáveis qualitativas nominais: cor dos olhos, nome da mãe, se é portador de necessidades especiais e programa de TV preferido.

2. Em uma escola com 400 alunos, foi feita uma pesquisa para verificar qual era o esporte favorito dos alunos. Os resultados estão expressos na tabela a seguir.

Esporte	Frequência absoluta (f_A)	Frequência relativa (f_R)
Futebol	x	38,75%
Basquete	74	A%
Vôlei	y	22,75%
Handebol	56	B%
Natação	z	C%
TOTAL	k	D%

Determine os valores de x, y, z, k, A, B, C e D.

k = 400

$B = \frac{56}{400} \cdot 100 = 14$; 18,5%

$A = \frac{74}{400} \cdot 100 = 18{,}5$; 14%

D = 100; 100%

$z = 400 - 155 - 74 - 91 - 56 = 24$

$C = \frac{24}{400} \cdot 100 = 6$; 6%

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. No momento da inscrição para um concurso vestibular, o candidato deve preencher um questionário socioeconômico. Observe a seguir algumas das perguntas.

a) Qual é seu sexo?

Masculino. Variáveis quantitativas: c, d, e, i, j.

Feminino. Variáveis qualitativas: a, b, f, g, h.

b) Qual é seu estado civil?

Solteiro(a).
Casado(a).
Separado(a).
Viúvo(a).

c) Quantas pessoas moram em sua casa?

d) Quantos anos você levou para concluir o Ensino Fundamental?

e) Quantos anos você levou para concluir o Ensino Médio?

f) Em que turno você cursou, ou está cursando, o Ensino Médio?

Diurno.
Noturno.
Maior parte no turno diurno.
Maior parte no turno noturno.

g) Sua casa é própria ou alugada?

h) Você possui computador em casa?

i) Se você respondeu sim à pergunta anterior, quantos?

j) Quantas horas semanais, em média, você "navega" na internet?

Todas as perguntas determinam uma variável. Classifique essas variáveis em quantitativas ou qualitativas.

2. Na questão anterior, você classificou cada uma das variáveis em quantitativas ou qualitativas.

a) Quais variáveis quantitativas são discretas? Variáveis quantitativas discretas: c, i.

b) Quais variáveis quantitativas são contínuas? Variáveis quantitativas contínuas: d, e, j.

3. Em uma cidade, sabe-se que a população formada por 30 400 pessoas está dividida da seguinte maneira:

- 16 720 são mulheres;
- 3 344 são mulheres com formação superior;
- 3 648 são homens com formação superior.

Utilizando a técnica de amostragem estratificada, se escolhermos uma amostra com 500 pessoas para representar a população dessa cidade, quantas pessoas a amostra deve ter:

a) do sexo masculino? 225

b) do sexo feminino com formação superior? 55

c) do sexo masculino com formação não superior? 165

4. Uma pesquisa foi realizada para avaliar o preço médio de uma diária para um casal, o número de estrelas e a quantidade de quartos dos hotéis de uma pequena cidade. O resultado é apresentado na tabela a seguir:

Hotel	Preço médio de uma diária (casal)	Número de estrelas	Quantidade de quartos
A	R$ 90,00	3	20
B	R$ 110,00	4	35
C	R$ 140,00	4	28
D	R$ 190,00	5	32

a) Quais são as variáveis da tabela anterior?

b) Classifique as variáveis em qualitativas ou quantitativas. Respostas no Manual do Professor.

c) Classifique as variáveis quantitativas em discretas ou contínuas.

5. Em uma eleição para governador de um Estado, as pesquisas, mesmo que tenham uma margem pequena de erro, não conseguem prever o resultado da eleição.


Filipe Rocha

Você concorda ou discorda dessa afirmação? Apresente sua resposta para a turma, justificando-a. Resposta pessoal.

6. Um dado é lançado 60 vezes e a quantidade de vezes que cada uma das faces saiu voltada para cima está apresentada na tabela a seguir:

1	2	3	4	5	6
9	12	15	9	6	9

a) Qual é a frequência absoluta da face 3? 15

b) Qual é a frequência relativa da face 2? 20%

c) Qual é a frequência relativa de uma face ímpar? 50%

7. A tabela a seguir mostra o resultado de uma pesquisa realizada com 500 casais de uma cidade sobre a quantidade de filhos que pensavam em ter.

Quantidade de filhos	Frequência absoluta	Frequência relativa
Nenhum	20	A%
Um	80	B%
Dois	x	52%
Três	65	C%
Mais que três	y	D%
Ainda não sabemos	z	10%
Total	500	E%

a) Determine os valores de x, y e z (frequências absolutas) indicados na tabela. $x = 260$, $y = 25$ e $z = 50$.

b) Quais são os valores correspondentes a A, B, C, D e E indicados na coluna de frequência relativa? A = 4%, B = 16%, C = 13%, D = 5% e E = 100%.

8. Os 200 alunos do terceiro ano de Ensino Médio de uma escola, quando questionados a respeito da área em que desejavam ingressar na universidade, responderam da seguinte maneira:

- biológica → 96
- tecnológica → 60
- humanística → 44

Qual é a porcentagem de alunos do terceiro ano dessa escola que:

a) pretende ingressar na área humanística? 22%

b) não pretende ingressar na área biológica? 52%

9. As alturas dos jogadores de uma seleção de vôlei estão apresentadas a seguir:

1,90 m	1,92 m	2,09 m	1,90 m	1,90 m
1,84 m	2,02 m	1,96 m	2,04 m	2,11 m
1,92 m	1,97 m	2,05 m	2,03 m	2,09 m

a) A variável "altura" é discreta ou contínua? Essa variável é contínua.

b) Qual é a frequência relativa das alturas inferiores a 2,00 m? $\frac{8}{15}$

c) Qual é a frequência absoluta das alturas superiores a 2,00 m? É 7 (alturas superiores a 2,00 m).

10. Em um dia de grande movimento bancário, os tempos de espera de 50 clientes, em minutos, foram registrados por um funcionário. Respostas no Manual do Professor.

15 – 17 – 23 – 12 – 15 – 9 – 21 – 14 – 19 – 10
12 – 23 – 21 – 20 – 28 – 22 – 17 – 19 – 18 – 20
13 – 10 – 14 – 23 – 22 – 15 – 16 – 15 – 11 – 19
17 – 21 – 25 – 19 – 24 – 19 – 12 – 15 – 20 – 11
18 – 13 – 18 – 20 – 17 – 26 – 25 – 21 – 15 – 20

a) Qual é a amplitude total dessa distribuição de dados?

b) Construa uma tabela de frequências absolutas e frequências relativas, agrupando os dados em classes de amplitude 5 minutos.

11. No fim de 2014, as duas maiores montadoras de automóveis de uma cidade divulgaram as quantidades de automóveis produzidos e vendidos nos dois últimos anos:

Montadora	2013	2014
A	200 000	300 000
B	50 000	100 000

Em seguida, cada montadora lançou uma propaganda:

- Montadora A: No ano de 2014, o aumento de nossas vendas, em relação ao ano anterior, foi o dobro do aumento de nossa maior concorrente.
- Montadora B: No ano de 2014, o aumento de nossas vendas, em relação ao ano anterior, foi o dobro do aumento de nossa maior concorrente.

Como as propagandas das duas montadoras foram iguais, é natural imaginarmos que uma delas está equivocada. Discuta com seus colegas as seguintes questões: Respostas no Manual do Professor.

a) A montadora A tem razão em fazer essa propaganda? Justifique.

b) A montadora B tem razão em fazer essa propaganda? Justifique.

c) Quais são as diferenças entre os argumentos utilizados pelas duas montadoras para fazer as propagandas?

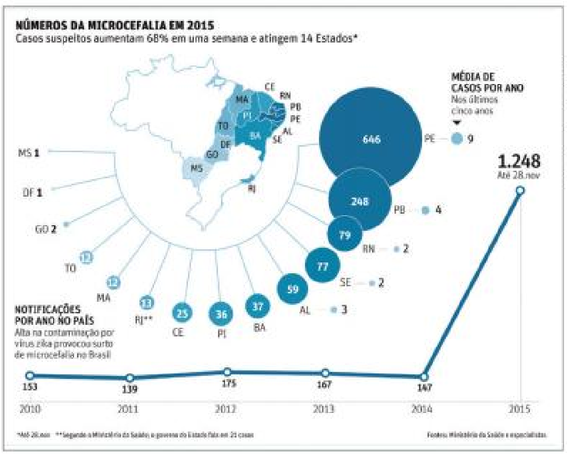
12. A distribuição das idades de 2 000 alunos de uma escola é dada pela tabela a seguir:

Idade (anos)	Frequência absoluta	Frequência relativa
[5,9]	460	A%
[9,13]	900	B%
[13,17]	520	C%
[17,21]	120	D%
Total	2 000	E%

a) Escreva, em seu caderno, os valores das frequências relativas indicadas na tabela pelas letras de A até E.
A = 23%, B = 45%, C = 26%, D = 6% e E = 100%.

b) Qual é o número de alunos dessa escola que têm idade igual ou superior a 13 anos? 640

ORGANIZANDO DADOS EM GRÁFICOS



Editoria de Arte/Folhapress

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 2 dez. 2015. Caderno Cotidiano, p. 2.

Os jornais apresentam informações contendo dados estatísticos por meio de gráficos e esquemas diversos. Observe, por exemplo, uma notícia do número de casos de microcefalia no ano de 2015 no Brasil. Essa informação foi extraída do jornal *Folha de S.Paulo*, em 2 de dezembro 2015, no Caderno Cotidiano, na página 2.

Nesse caso, os círculos azuis estão sendo utilizados para destacar o número de casos por estado. Quanto maior é o círculo, maior é o número de casos. Além disso, segmentos são empregados para evidenciar a evolução do número de casos registrados desde 2010 até 2015.

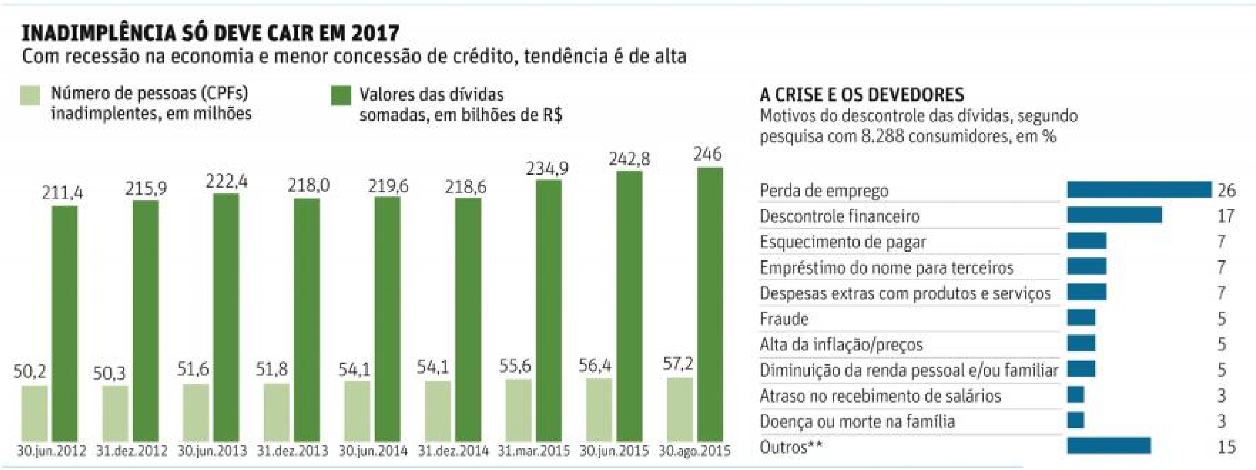
No Ensino Fundamental, você já observou a utilização de gráficos estatísticos. Os mais utilizados são: gráfico de colunas, gráfico de barras, gráfico de setores e gráfico de linhas.

A representação de informações em gráficos permite uma análise direta dos dados, além de fornecer uma visão de conjunto bem mais rápida.

Vejamos alguns exemplos da utilização desse importante recurso no tratamento das informações.

Exemplo:

É comum a utilização de mais de um tipo de gráfico em uma mesma reportagem. No jornal *Folha* *de S.Paulo*, em 7 de dezembro de 2015, na página A15, dois gráficos foram empregados para abordar a inadimplência dos brasileiros: um gráfico de colunas e um gráfico de barras.



Editoria de Arte/Folhapress

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 7 dez. 2015, p. A15.

Observe que no gráfico de colunas, à esquerda, duas grandezas são analisadas em períodos de 30 de junho de 2012 até 30 de agosto de 2015: número de pessoas (CPFs) inadimplentes, em milhões, e valores das dívidas somadas, em bilhões de R$. Já o gráfico de barras, à direita, apresenta os motivos, conforme pesquisa feita com 8 288 consumidores, que levam à inadimplência.

Questões e reflexões

Respostas no Manual do Professor.

1. O que é inadimplência?
2. Segundo os motivos da inadimplência, quantas das pessoas pesquisadas indicam que ela ocorre por causa da perda de emprego?

Observação:

No gráfico de colunas, os retângulos têm a mesma largura (horizontal) e as alturas (vertical) são proporcionais às frequências relativas ou às frequências absolutas das variáveis. Caso o gráfico seja de barras, os retângulos têm a mesma altura (vertical) e as larguras (horizontal) são proporcionais às frequências relativas ou às frequências absolutas das variáveis.

Exemplo:

Qual é a maior preocupação dos pais em relação ao futuro de seus filhos?

Em uma comunidade com 200 pessoas adultas, cada pessoa escolheu um e apenas um entre os cinco itens apontados. O resultado aparece na tabela a seguir.

Preocupação	Frequência absoluta (f_A)	Frequência relativa (f_R)
Saúde	42	21%
Segurança	30	15%
Educação	80	40%
Emprego	30	15%
Casamento	18	9%
Total	200	100%

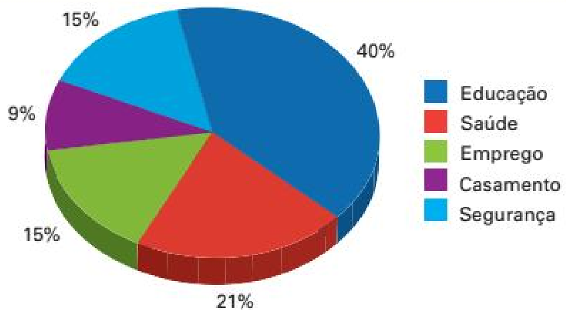


Gráfico: © DAE

Observação:

Em um gráfico de setores, o círculo é dividido em setores circulares cujas medidas dos ângulos são proporcionais às frequências correspondentes a cada setor.

Histogramas

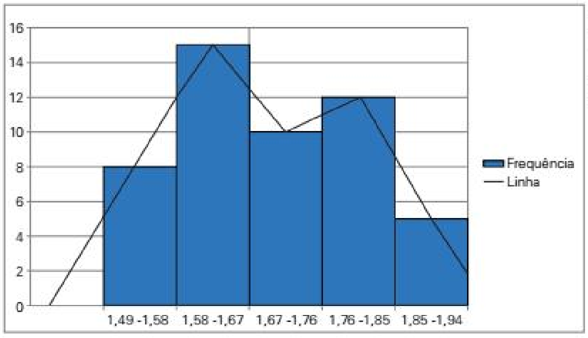
Como já abordamos alguns gráficos estatísticos conhecidos, vamos agora considerar o histograma.

Histograma é uma representação gráfica parecida com o gráfico de colunas e que, geralmente, é utilizada quando os valores assumidos por uma variável quantitativa estão agrupados em classes.

No histograma, os retângulos que formam o gráfico são contíguos, ou seja, os retângulos estão lado a lado e encostam-se. A base de cada retângulo corresponde a um segmento cujas extremidades correspondem aos valores extremos da classe. Além disso, a altura do retângulo é proporcional à frequência da classe considerada (frequência relativa ou frequência absoluta).

Para exemplificar, vamos construir o histograma conforme dados sobre as alturas de 50 alunos do Ensino Médio, conforme tabela a seguir. Observe que essas alturas estão divididas em cinco classes na tabela a seguir:

Alturas (em classes)	Frequência absolula (f_A)	Frequência relativa (f_R)
1,49 ↦ 1,58	8	16%
1,58 ↦ 1,67	15	30%
1,67 ↦ 1,76	10	20%
1,76 ↦ 1,85	12	24%
1,85 ↦ 1,94	5	10%
Total	50	100%



Gráficos: © DAE

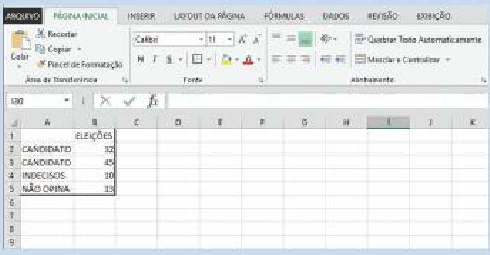
Observação:

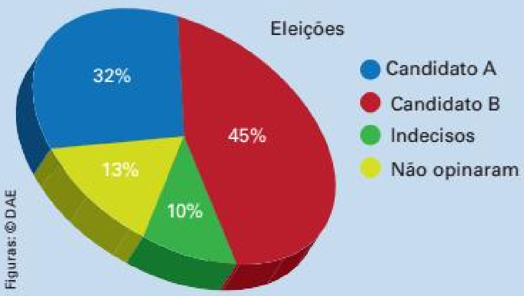
Os pontos médios das bases dos retângulos do histograma coincidem com os pontos médios dos intervalos das classes. Como no gráfico acima, os segmentos que ligam em sequência os pontos médios das bases superiores formam um gráfico de segmentos que é denominado polígono do histograma.

Existe um gráfico estatístico chamado pictorama, que não mencionamos aqui. Pesquise um exemplo da utilização desse gráfico e apresente-o à turma.

EXPLORANDO

Utilizando planilhas eletrônicas, podemos elaborar tabelas e gráficos diversos. Assim, por exemplo, podemos, com base nos dados de uma pesquisa eleitoral, construir uma tabela e, depois, um gráfico de setores, como ilustrado a seguir.





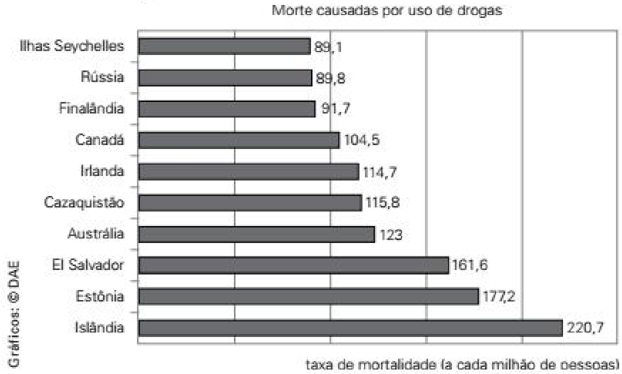
Figuras: © DAE

Em duplas ou em pequenos grupos, realizem as atividades abaixo:

1. Construam uma tabela com dados a respeito das alturas e massas dos alunos da turma.
2. Pesquisem em revistas e jornais informações que possam ser utilizadas na construção de algum tipo de gráfico estatístico. Depois, construam o gráfico com base nessas informações. Não se esqueçam de dar um título para o gráfico construído e de registrar a fonte dos dados pesquisados.
3. Elaborem e realizem uma pesquisa na escola. Após a realização dessa pesquisa, os dados devem ser apresentados, em tabelas e gráficos estatísticos, para toda a turma.

Exercícios resolvidos

1. (UFG-GO) O gráfico a seguir apresenta os dez países com a maior taxa de mortalidade decorrente do uso de drogas.



Na tabela a seguir encontra-se o número estimado de mortes causadas por uso de drogas por continente.

Número estimado de mortes por uso de drogas	
Região	**Número de mortes estimadas**
África	36 435
América do Norte	47 813
América Latina e Caribe	4 756
Ásia	104 116
Europa	15 469
Oceania	1 957
Total mundial	210 546

Fonte: *World Drug Reporter 2013* – UNODC (United Nations Office on Drugs and Crime).

Sabendo que a população da Islândia é de 320 137 habitantes, determine o percentual aproximado de mortes desse país em relação ao número de mortes estimadas para o continente europeu.

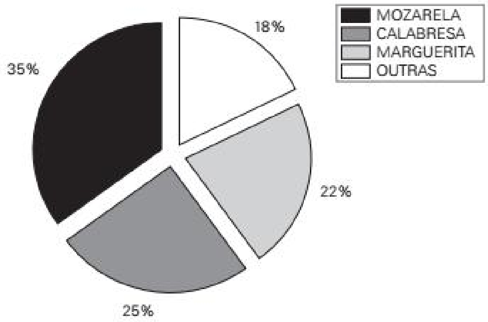
Seja x o número de mortes na Islândia, temos:

$$\frac{1000\,000}{320\,137} = \frac{220{,}7}{x} \Rightarrow x \cong 70{,}65$$

Portanto, o percentual aproximado de mortes desse país em relação ao número de mortes estimadas para o continente europeu é:

$$\frac{70{,}65}{15\,469} \cong 0{,}457\%$$

2. (Unicamp-SP) A *pizza* é, sem dúvida, o alimento preferido de muitos paulistas. Estima-se que o consumo diário no Brasil seja de 1,5 milhão de *pizzas*, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo. O gráfico a seguir exibe a preferência do consumidor paulista em relação aos tipos de *pizza*.



a) Se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, quantas *pizzas* são consumidas diariamente no Brasil?

b) Quantas *pizzas* de *mozarela* e de calabresa são consumidas diariamente no Estado de São Paulo?

a) De 1,5 milhão de *pizzas* consumidas diariamente no Brasil, desconsideramos 53% consumidos no Estado de São Paulo. Então:

$(1-0{,}53)\cdot 1{,}5\cdot 10^6 = 705\,000$

Logo, se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, são consumidas diariamente no Brasil 705 000 *pizzas*.

b) *Pizzas* de mozarela consumidas diariamente no Estado de São Paulo:

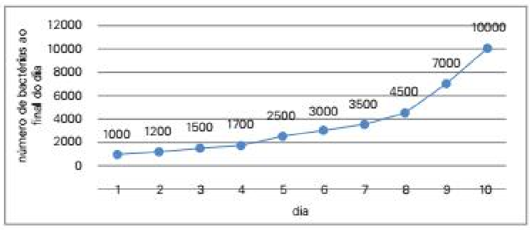
$0{,}53\cdot 0{,}35\cdot 1{,}5\cdot 10^6 = 278\,250$

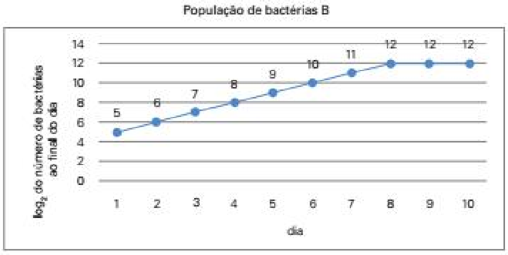
Pizzas de calabresa consumidas diariamente no Estado de São Paulo:

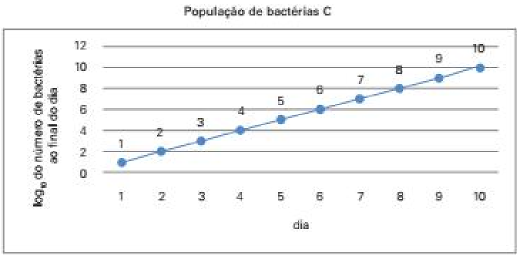
$0{,}53\cdot 0{,}25\cdot 1{,}5\cdot 10^6 = 198\,750$

Logo, são consumidas diariamente no Estado de São Paulo 278 250 *pizzas* de mozarela e 198 750 pizzas de calabresa.

3. (FGV-SP) Um biólogo inicia o cultivo de três populações de bactérias (A, B e C) no mesmo dia. Os gráficos seguintes mostram a evolução do número de bactérias ao longo dos dias.







A partir da informação dos gráficos, responda:

a) Em que dia o número de bactérias da população C ultrapassou o da população A?

b) Qual foi a porcentagem de aumento da população de bactérias B, entre o final do dia 2 e o final do dia 6?

c) Qual foi a porcentagem de aumento da população total de bactérias (colônias A, B e C somadas) entre o final do dia 2 e o final do dia 5?

a) Observe a população de bactérias C:

População de bactérias C	
Dia	Quantidade de bactérias
1	10
2	100
3	1 000
4	10 000
⋮	⋮

Então, no quarto dia, o número de bactérias da população C ultrapassou o da população A.

b) Variação pedida:

$$\frac{2^{10} - 2^6}{2^6} \cdot 100\% = 1\,500\%$$

Então, 1 500% foi a porcentagem de aumento da população de bactérias B, entre o final do dia 2 e o final do dia 6.

c) Resultado pedido:

$$\frac{2\,500 + 2^9 + 10^5 - (1200 + 2^6 + 10^2)}{1200 + 2^6 + 10^2} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{103\,012 - 1364}{1364} \cdot 100\%$$

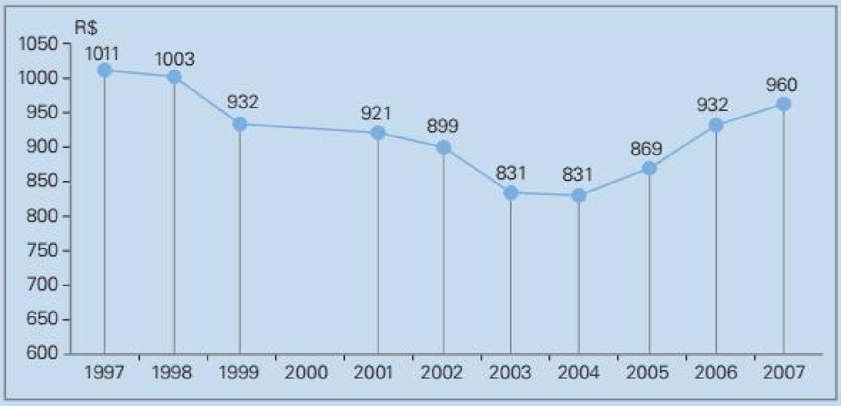
$$\cong 7452{,}20\%$$

Então, aproximadamente 7 452,20% foi a porcentagem de aumento da população total de bactérias (colônias A, B e C somadas) entre o final do dia 2 e o final do dia 5.

Exercícios propostos

Resolva os exercícios no caderno.

1. O gráfico abaixo mostra o rendimento médio mensal, real, de todos os trabalhos de pessoas com idade de 10 anos ou mais de idade.



Analise cada afirmação a seguir e indique, em seu caderno, V caso seja verdadeira ou F caso seja falsa.

I. O maior rendimento médio mensal real ocorreu no ano de 1997. V

II. De 2004 a 2007 o rendimento médio mensal real sempre aumentou. V

III. De 2006 a 2007 o aumento percentual do rendimento médio mensal real foi, aproximadamente, 3%. V

IV. O rendimento médio mensal real de 2007 teve uma perda de aproximadamente 5% em relação a 1997. V

V. A maior perda percentual entre dois anos consecutivos ocorreu de 1998 a 1999. F

2. A tabela a seguir mostra que o time do Flamengo é o clube de futebol com a maior torcida do Brasil, seguido pelo Corinthians.

Clube/estado	Percentual de torcedores
Flamengo-RJ	19%
Corinthians-SP	13%
São Paulo-SP	8%
Palmeiras-SP	7%
Outros	30%
Nenhum	23%

Essa pesquisa foi realizada pelo Datafolha, no início de 2010. Construa, em seu caderno, um gráfico de setores utilizando os percentuais da tabela acima.

3. A distribuição de salários de uma empresa está representada na tabela a seguir: Resposta no Manual do Professor.

Salário (em R$)	Frequência absoluta
[500, 1 500]	10
[1 500, 2500]	20
[2 500, 3 500]	50
[3 500, 4 500]	15
[4 500, 5 500]	5
Total	100

Construa, em seu caderno, um histograma dessa distribuição de salários.

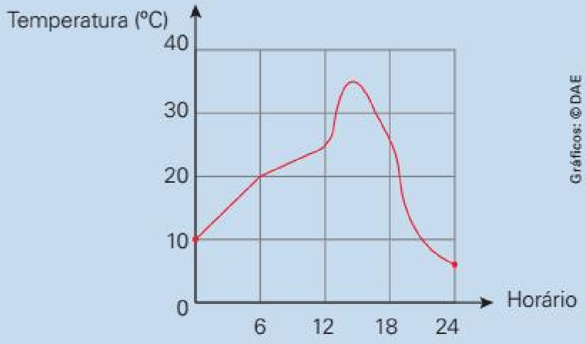
4. As quantidades de copos de suco vendidos por uma lanchonete em determinada semana estão representadas no gráfico a seguir:

a) Quantos copos de suco foram vendidos na quinta-feira? 50

b) Quantos copos de suco foram vendidos durante toda a semana? 360

c) É correto afirmar que, de sexta a domingo, as vendas corresponderam a mais da metade das vendas de toda a semana? Sim.

5. O gráfico a seguir mostra a variação de temperatura durante um dia, em determinada cidade.



Analise cada afirmação a seguir e, em seu caderno, indique V caso seja verdadeira ou F caso seja falsa.

I. A maior temperatura registrada nesse dia ocorreu entre 12 e 18 horas. V

II. A temperatura de 20 °C foi registrada duas vezes no dia. V

III. O dia terminou com uma temperatura menor que a inicial. V

6. Na tabela a seguir, vemos a frequência das idades, em anos, dos 1 000 alunos matriculados em uma academia.

Idade (em anos)	Frequência
[15, 25]	350
[25, 35]	310
[35, 45]	185
[45, 55]	85
[55, 65]	40
[65, 75]	25
[75, 85]	5
Total	1 000

a) Em seu caderno, construa um histograma para essa frequência de idades. Respostas no Manual do Professor.

b) Em seguida, construa o polígono do histograma que represente essa distribuição.

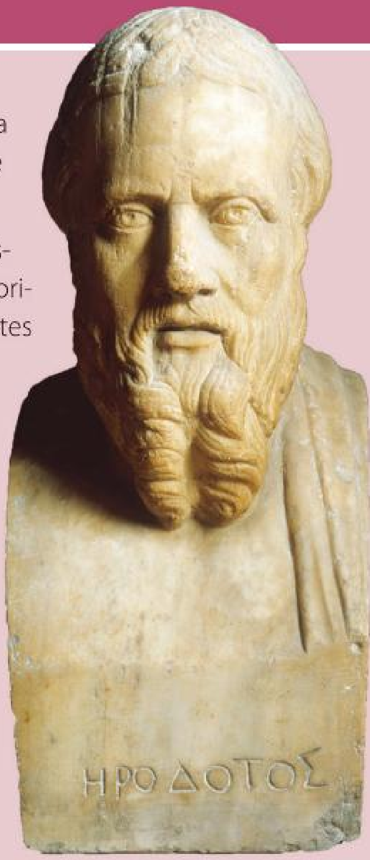
c) Qual é o percentual de alunos dessa academia com, pelo menos, 35 anos? 34%

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Uma possível definição de Estatística é a ciência encarregada de recolher, analisar e interpretar dados relativos a um conjunto de elementos. Mas como teria iniciado essa ciência?

O texto a seguir procura traçar alguns possíveis marcos da história da Estatística. Utilizamos como referência o livro publicado originalmente em espanhol, *Encuestas y precios*, do autor Andrés Nortes Checa, da coleção *Matematicas: cultura y aprendizaje,* volume 28, Editorial Síntesis, ano de 1995.



Museu Arqueológico Nacional de Nápoles. Foto: Nimatallah/akg-images/Latinstock

Heródoto (484 a.C – 425 a.C.).

As primeiras notícias são da época em que as sociedades primitivas começaram a se organizar: houve, em algum momento, a necessidade de tomadas de decisões que solicitavam dos governantes o conhecimento numérico a respeito dos recursos disponíveis e também da quantidade de habitantes. Então, tudo leva a acreditar que as primeiras estatísticas nasceram dessas necessidades: governantes de grandes civilizações querendo obter informações sobre bens e como eles estavam distribuídos na população existente.

Um marco importante para a Geometria está ligado ao fato das frequentes inundações do rio Nilo. Demarcações de terras que exigiam conhecimentos geométricos eram necessárias toda vez que as águas retornavam ao leito normal. Pode-se, então, inferir daí que também havia a necessidade de, frequentemente, se fazer registros (sempre atualizados) dos bens da população. Isso configura o que hoje podemos chamar de censo.

Também é de conhecimento que entre os antigos romanos havia a prática de cobrança de impostos. Ora, como eram cobrados tais impostos? É bem provável que existisse algum censo sobre populações e também sobre os bens que possuíam. Tudo indica que Heródoto, considerado o pai da História, mencionou a existência de dados sobre um levantamento feito por volta de 3050 a.C.

Nesse levantamento, procurava-se sondar a riqueza da população egípcia, tendo como finalidade maior averiguar que recursos humanos e econômicos estavam disponíveis para a construção das pirâmides. Na China, em 2238 a.C., também se realizou um censo geral de todo império, ordenado pelo imperador Yao.

Poderíamos considerar como primeira fase da Estatística aquela voltada ao estudo, por parte dos governantes, visando ao conhecimento das características da população e dos bens que possuíam, bem provavelmente visando à adequação de leis para a cobrança de impostos. Em uma segunda fase, também os levantamentos eram feitos buscando o conhecimento mais detalhado da população, porém os objetivos eram mais variados: saúde pública, número de nascimentos, número de mortes, sondagens sobre comércios. Nessa fase são citados dois personagens ingleses do século XVII: John Graunt e William Petty.

Coleção Particular. Foto: The Bridgeman Art Library/Keystone Brasil

William Petty (1623-1687).

Eles procuraram estabelecer leis quantitativas que pudessem de alguma maneira, explicar fenômenos sociais e políticos. Graunt é aclamado como precursor da Estatística, pois coletou dados demográficos reunidos em paróquias de Londres e, com base em estudos, chegou ao estabelecimento de leis demográficas. Graunt fez estimativas sobre a população, não apenas de Londres, mas de outras cidades. Petty foi seu discípulo. Uma terceira fase do desenvolvimento da Estatística está atrelada ao desenvolvimento do cálculo das probabilidades, ainda no século XVII. A ligação entre Estatística e as probabilidades permitiu o início da chamada inferência estatística. Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662) e Huygens (1629-1695) são personagens importantes dessa fase.

Gottfried Achenwall (1719 -1772) foi professor de uma universidade alemã. Ele introduziu a palavra "estatística" com significado ligado às coisas do Estado. Para ele, a Estatística ocupava-se com os fenômenos que favorecem ou podem favorecer ou defender a prosperidade do Estado.

Três nomes importantes são relacionados à quarta fase do desenvolvimento da Estatística, agora no século XIX. São eles: Ronald Fisher (1890-1962), Karl Pearson (1857-1936) e Francis Galton (1822-1911).

Eles promoveram um grande avanço em relação às fases anteriores. Deve-se a Pearson a chamada "inferência estatística"; a Galton deve-se a "regressão estatística"; e a Fischer, a "teoria da investigação". Atualmente, podemos dizer que a Estatística não se limita ao estudo da demografia e da economia. Seu campo de atuação está na análise de dados em áreas como Biologia, Medicina, Física, Psicologia, comércio, indústria, meteorologia, educação, entre outras. É claro que neste texto temos apenas alguns nomes e algumas etapas que marcaram o desenvolvimento da Estatística.

QUESTÕES Resolva os exercícios no caderno.

De acordo com o texto, responda:

1. O que mencionavam os dados feitos por Heródoto?
2. Quais foram os levantamentos mais detalhados da população do século XVII?
3. Quem foram os dois personagens que procuraram estabelecer leis quantitativas que pudessem de alguma maneira explicar fenômenos sociais e políticos?

Algumas conclusões

Pense possíveis respostas às questões a seguir. Essas questões abrangem o estudo de Probabilidade e Estatística. Caso sinta alguma dificuldade para responder, sugerimos que retome os conceitos principais que foram estudados até aqui.

Questões:

1. Como calculamos a probabilidade de ocorrência de um evento aleatório em um espaço amostral?
2. Qual é o valor da probabilidade de um evento certo? Qual é o valor da probabilidade de um evento impossível?
3. O que são eventos mutuamente exclusivos?
4. Qual é a relação matemática que permite calcular a probabilidade de ocorrência da união dos eventos A e B?
5. Quando dois eventos A e B são independentes?
6. O que é frequência absoluta?
7. E frequência relativa?
8. Qual é a diferença entre gráfico de coluna e gráfico de barra?
9. Qual é o ângulo de um setor circular de um gráfico de setores que corresponde a 25% do círculo?
10. Qual gráfico estatístico você utilizaria para analisar o lucro de uma empresa ao longo do primeiro semestre de um ano?

Troque ideias com seus colegas e o professor. Comente suas respostas e ouça as de seus colegas. Juntos, façam uma lista das dificuldades que tiveram e descubram os assuntos que precisam ser retomados.

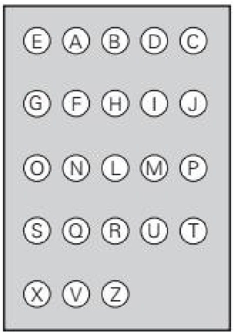
Resolva os exercícios no caderno.

1. (Uerj) Os consumidores de uma loja podem concorrer a brindes ao fazerem compras acima de R$ 100,00. Para isso, recebem um cartão de raspar no qual estão registradas 23 letras do alfabeto em cinco linhas. Ao consumidor é informado que cada linha dispõe as seguintes letras, em qualquer ordem:

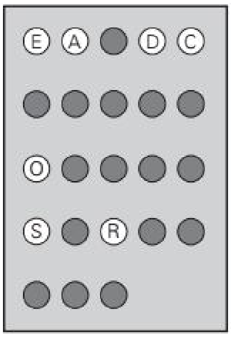
- linha 1 – {A, B, C, D, E};
- linha 2 – {F, G, H, I, J};
- linha 3 – {L, M, N, O, P};
- linha 4 – {Q, R, S, T, U};
- linha 5 – {V, X, Z}.

Observe um exemplo desses cartões, com as letras ainda visíveis:

Figuras: © DAE



Para que um consumidor ganhasse um secador, teria de raspar o cartão exatamente nas letras dessa palavra, como indicado abaixo:



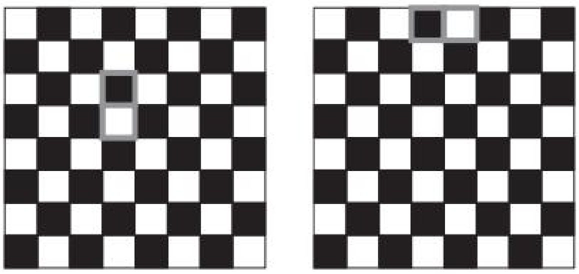
Considere um consumidor que receba um cartão para concorrer a um ventilador.

Se ele raspar as letras corretas em cada linha para formar a palavra VENTILADOR, a probabilidade de que ele seja premiado corresponde a:

a) $\frac{1}{15\,000}$ c) $\frac{1}{20\,000}$

b) $\frac{1}{18\,000}$ d) $\frac{1}{25\,000}$

2. (Unifesp) Um tabuleiro de xadrez possui 64 casas quadradas. Duas dessas casas formam uma dupla de casas contíguas se estão lado a lado, compartilhando exatamente um de seus lados. Veja dois exemplos de duplas de casas contíguas nos tabuleiros.



Dispõem-se de duas peças, uma na forma ☺, e outra na forma ☹, sendo que cada uma cobre exatamente uma casa do tabuleiro.

a) De quantas maneiras diferentes é possível colocar as peças ☺ e ☹ em duplas de casas contíguas de um tabuleiro de xadrez? 224

b) Considere as 64 casas de um tabuleiro de xadrez como sendo os elementos de uma matriz $A = (a_{ij})_{8 \cdot 8}$. Coloca-se a peça ☺, ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro tal que $i = j$. Em seguida, a peça ☹ será colocada, também ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro que esteja desocupada. Na situação descrita, calcule a probabilidade de que as peças ☺ e ☹ tenham sido colocadas em duplas de casas contíguas do tabuleiro. $\frac{1}{18}$

3. (UFRGS-RS) Escolhe-se aleatoriamente um número formado somente por algarismos pares distintos, maior do que 200 e menor do que 500. Assinale a alternativa que indica a melhor aproximação para a probabilidade de que esse número seja divisível por 6.

a) 20%

b) 24%

c) 30%

d) 34%

e) 50%

4. (UEMG) Em uma empresa, foi feita uma pré-seleção para sorteio de uma viagem. Esta pré-seleção se iniciou com a distribuição, entre os funcionários, de fichas numeradas de 1 a 23. Em seguida, foram selecionados os funcionários com as fichas numeradas, com as seguintes regras:

- Fichas com um algarismo: o algarismo tem que ser primo;
- Fichas com dois algarismos: a soma dos algarismos deverá ser um número primo.

Após essa pré-seleção, Glorinha foi classificada para o sorteio.

A probabilidade de Glorinha ganhar essa viagem no sorteio é de, aproximadamente:

a) 7%. b) 8%. c) 9%. d) 10%.

5. (Udesc) Em uma associação serão eleitos um presidente, um tesoureiro e dois revisores. Cada membro vota em um candidato para presidente, um para tesoureiro e um para revisor. Supondo que haja 4 candidatos para presidente, 3 para tesoureiro e 6 para revisor, então a probabilidade de todos os candidatos de um eleitor qualquer, que não anulou nem votou em branco, serem eleitos é de:

a) $\frac{1}{36}$
b) $\frac{1}{360}$
c) $\frac{1}{180}$
d) $\frac{1}{90}$
e) $\frac{1}{72}$

6. (Enem) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

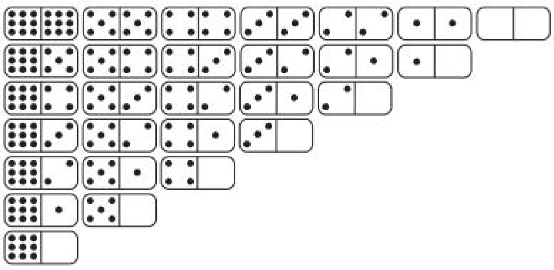
a) $\frac{1}{100}$
b) $\frac{19}{100}$
c) $\frac{20}{100}$
d) $\frac{21}{100}$
e) $\frac{80}{100}$

7. (IME-RJ) O time de futebol "X" irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, "X" é o favorito. A probabilidade de "X" ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é 0,9. Quando "X" não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é 0,02. Em um determinado jogo de "Y" contra "X" o time "X" foi o vencedor. Qual a probabilidade de "X" ter sido o favorito nesse jogo?

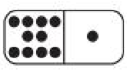
a) 0,80
b) 0,98
c) 180/181
d) 179/181
e) 170/181

8. (Uerj) Cada uma das 28 peças do jogo de dominó convencional, ilustradas abaixo, contêm dois números, de zero a seis, indicados por pequenos círculos ou, no caso do zero, por sua ausência.

Figuras: © DAE



Admita um novo tipo de dominó, semelhante ao convencional, no qual os dois números de cada peça variem de zero a dez. Observe o desenho de uma dessas peças:



$\frac{7}{22}$

Considere que uma peça seja retirada ao acaso do novo dominó. Calcule a probabilidade de essa peça apresentar um número seis ou um número nove.

9. (Fuvest-SP) De um baralho de 28 cartas, sete de cada naipe, Luís recebe cinco cartas: duas de ouros, uma de espadas, uma de copas e uma de paus. Ele mantém consigo as duas cartas de ouros e troca as demais por três cartas escolhidas ao acaso dentre as 23 cartas que tinham ficado no baralho. A probabilidade de, ao final, Luís conseguir cinco cartas de ouros é:

a) $\frac{1}{130}$
b) $\frac{1}{420}$
c) $\frac{10}{1771}$
d) $\frac{25}{7117}$
e) $\frac{52}{8117}$

10. (Enem) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7%
b) 30,0%
c) 44,1%
d) 65,7%
e) 90,0%

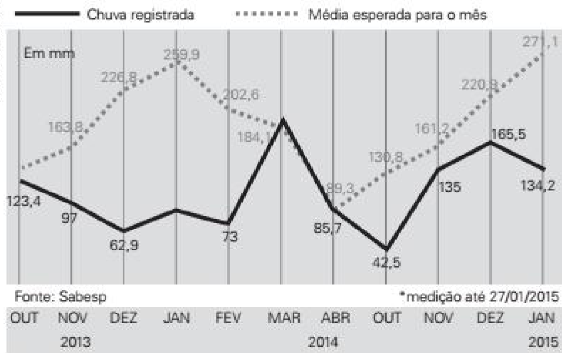
11. (Unesp-SP) Um dado viciado, que será lançado uma única vez, possui seis faces, numeradas de 1 a 6. A tabela a seguir fornece a probabilidade de ocorrência de cada face.

número na face	1	2	3	4	5	6
probabilidade de ocorrência da face	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Sendo X o evento "sair um número ímpar" e Y um evento cuja probabilidade de ocorrência seja 90%, calcule a probabilidade de ocorrência de X e escreva uma possível descrição do evento Y. Respostas no Manual do Professor.

12. (UEG-GO) Na figura a seguir, vê-se o gráfico comparativo entre a quantidade de chuva esperada e a quantidade de chuva registrada no sistema de Captação de Água Cantareira.

Gráfico: © DAE

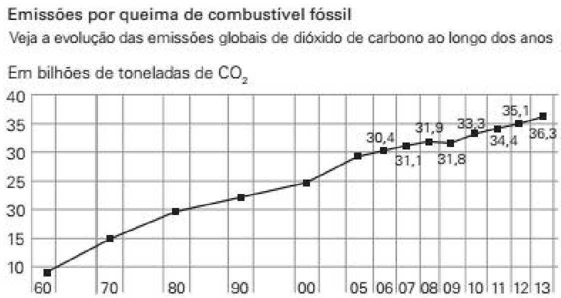


De acordo com o gráfico, o mês em que ocorreu a maior diferença entre o volume de chuva esperada e o volume de chuva registrada foi no mês de:

a) dezembro de 2013.
b) janeiro de 2014.
c) março de 2014.
d) janeiro de 2015.

13. (UFRGS-RS) O gráfico abaixo apresenta a evolução da emissão de dióxido de carbono ao longo dos anos.

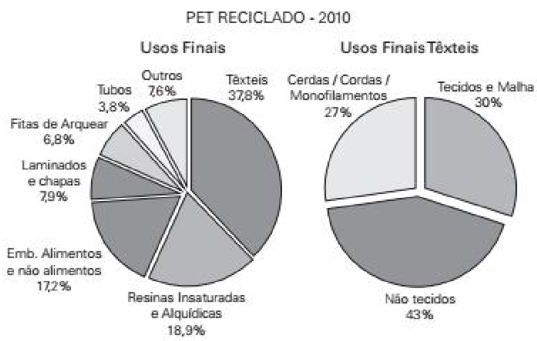
Gráficos: © DAE



Com base nos dados do gráfico, assinale a alternativa correta.

a) Ao longo do período, a emissão de dióxido de carbono apresentou crescimento constante.
b) Em relação aos anos 80, os anos 90 apresentaram emissão de dióxido de carbono 30% maior.
c) O ano de 2009 apresentou menor valor de emissão de dióxido de carbono da primeira década do século XXI.
d) De 2000 a 2013, houve crescimento percentual de 11,7% na emissão de dióxido de carbono.
e) Em relação a 2000, o ano de 2013 apresentou emissão de dióxido de carbono aproximadamente 50% maior.

14. (Enem) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de:

a) 16,0.
b) 22,9.
c) 32,0.
d) 84,6.
e) 106,6.

15. (FGV SP) Em uma rifa, são vendidos 100 bilhetes com números diferentes, sendo que 5 deles estão premiados. Se uma pessoa adquire 2 bilhetes, a probabilidade de que ganhe ao menos um dos prêmios é de:

a) $\frac{31}{330}$
b) $\frac{47}{495}$
c) $\frac{19}{198}$
d) $\frac{16}{165}$
e) $\frac{97}{990}$

16. (MACK SP) Se um dado honesto é arremessado 4 vezes, a probabilidade de obtermos, pelo menos, 3 resultados iguais é:

a) $\frac{5}{36}$
b) $\frac{12}{108}$
c) $\frac{5}{54}$
d) $\frac{7}{72}$
e) $\frac{15}{216}$

DESAFIO

Resposta no Manual do Professor.

(Unesp-SP) Renato e Alice fazem parte de um grupo de 8 pessoas que serão colocadas, ao acaso, em fila. Calcule a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Renato e Alice na fila que será formada.

Generalize uma fórmula para o cálculo da probabilidade do problema descrito acima com o mesmo grupo de "8 pessoas", trocando "4 pessoas" por "*m* pessoas", em que $1 \leq m \leq 6$. A probabilidade deverá ser dada em função de *m*.

Respostas no Manual do Professor.

A Medicina e a Biologia são ciências cujos resultados e afirmações são comumente baseados em estatísticas. A confiabilidade de um exame que detecta um vírus, por exemplo, depende de uma pesquisa amostral na qual é calculada a porcentagem de vezes que o exame acerta o resultado, ou seja, a porcentagem de vezes que o exame acusa um resultado positivo para uma pessoa que possui o vírus e um resultado negativo para uma pessoa que não possui o vírus.

Da mesma maneira, quando a comunidade científica faz uma afirmação do tipo "fumar causa câncer de laringe", essa conclusão é baseada na observação estatística de que os casos de câncer de laringe representam uma variável que se relaciona de modo dependente com a variável fumante ou não fumante. Isso não significa que todo o mundo que fuma terá câncer de laringe nem que todo o mundo que desenvolve câncer de laringe foi fumante, mas quer dizer que as duas variáveis são ligadas.

Um caso clássico de como a Estatística auxilia na orientação das políticas públicas relacionadas à saúde dos cidadãos é a orientação em relação à vacinação. Veja na matéria abaixo como a Estatística é usada nessa situação.

O perigo de não vacinar as crianças

[...]

Antes de ser erradicada com o uso maciço de vacinas, no final dos anos 1970, a varíola matou 300 milhões de pessoas, contando apenas o século XX. O sarampo, uma doença altamente contagiosa, foi responsável por cerca de 2,6 milhões de mortes por ano, antes de 1980, época em que começaram as intensas campanhas de vacinação. Já os casos de poliomielite, doença que pode causar paralisia infantil, apresentaram uma queda de 99% desde 1988, quando, mais uma vez, a prevenção com vacina teve início. Criadas em 1796, pelo médico britânico Edward Jenner, as vacinas deram início a uma revolução na medicina preventiva – tornando possível evitar a ocorrência de doenças letais e contagiosas. Há quem, no entanto, na contramão de todas as evidências científicas, opte por não vacinar seus filhos. [...]

"O que estamos percebendo é que há um aumento, mesmo que pequeno, no número de pais que buscam médicos que orientam a não vacinar a criança", diz Eitan Berezin, presidente do Departamento Científico Infeccioso da Sociedade Brasileira de Pediatria (SBP). [...]

"Os riscos de a criança desenvolver uma complicação séria em função da vacina são muito menores do que os de ela contrair a doença. Não há nem comparação. E isso não é algo que eu acho ou acredito, é um fato comprovado cientificamente", diz o pediatra americano Paul Offit, um dos maiores especialistas no assunto. [...]

As vacinas que costumeiramente são mais descartadas são a de sarampo, difteria, hepatite B e da gripe. "Desde a década de 1970 os casos dessas doenças são muito baixos. Esses pais nunca tiveram de lidar, de temer essas doenças, então deixam de vacinar acreditando que o filho não corre riscos", diz Edécio Cunha Neto, diretor do Laboratório de Investigação Médica de Imunologia Clínica e Alergia da USP. [...]

André Horta/Fotoarena

Criança sendo vacinada em Campanha Nacional de Vacinação. Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2015.

EXPLORANDO HABILIDADES E COMPETÊNCIAS

Há dentro dos programas de vacinação o que se costuma chamar de imunidade de rebanho. A ideia é que quando você vacina, no mínimo, 95% das crianças de uma comunidade, todas ficam protegidas. Nesses 5% restantes, explicam os especialistas, estariam aquelas que por algum motivo não podem tomar vacina. No grupo estão, segundo Renato Kfouri, presidente da Sociedade Brasileira de Imunizações (Sbim), crianças com câncer, aids, com insuficiência renal ou com outras doenças crônicas que comprometem o sistema imunológico. "Elas se protegem quando há a garantia de que as outras crianças não vão transmitir a doença para elas. Vacinar o filho é mais do que uma ação individual", diz. [...]

Se a criança não é vacinada, [...] obviamente se torna suscetível à doença – e pode se tornar um potencial agente de transmissão e até mesmo iniciar um surto.

YARAK, Aretha. O perigo de não vacinar as crianças. *Veja.com*. 11 mar. 2012. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/saude/o-perigo-de-nao-vacinar-as-criancas>. Acesso em: 9 mar. 2016.

Orientações e respostas no Manual do Professor.

Questões e investigações

Resolva os exercícios no caderno.

1. Considere que uma pesquisa a respeito dos efeitos colaterais de um medicamento tenha sido feita com 800 voluntários, dentre os quais metade ingeria o medicamento 3 vezes ao dia e a outra metade ingeria o medicamento 4 vezes ao dia. Com base nessa pesquisa, observou-se que, dentre as 315 pessoas que tiveram dor de cabeça durante o tratamento, 211 estavam ingerindo o medicamento 4 vezes ao dia. Desse modo, pode-se concluir que a probabilidade de uma pessoa não ter dor de cabeça ingerindo o medicamento 3 vezes ao dia é de quantos por cento?

2. Determinado antibiótico é vendido em cartelas com 10 comprimidos em cada uma. Um estudo a respeito do período de tratamento com esse antibiótico concluiu que apenas 10% das pessoas fazem o tratamento completo de 10 dias, ingerindo 2 comprimidos por dia; concluiu ainda que 30% das pessoas utilizam corretamente o remédio apenas até parar os sintomas da doença após 3 dias de tratamento, 50% utilizam corretamente o remédio apenas até terminar a primeira cartela, parando após 5 dias de tratamento, e o restante faz o tratamento durante uma semana. Responda às questões abaixo a respeito de um grupo de pessoas que estejam fazendo tratamento com esse antibiótico:

   a) Qual é a quantidade modal de comprimidos ingeridos por esse grupo?

   b) Qual é a média de comprimidos ingeridos por pessoa?

   c) Escolhendo uma pessoa desse grupo aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ela tenha ingerido mais de 10 comprimidos?

   d) Escolhendo uma pessoa desse grupo aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ela tenha ingerido menos de 15 comprimidos?

3. Leia este trecho da matéria apresentada anteriormente:

   "Os riscos de a criança desenvolver uma complicação séria em função da vacina são muito menores do que os de ela contrair a doença. Não há nem comparação. E isso não é algo que eu acho ou acredito, é um fato comprovado cientificamente", diz o pediatra americano Paul Offit, um dos maiores especialistas no assunto.

   YARAK, Aretha. O perigo de não vacinar as crianças. *Veja.com*. 11 mar. 2012. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/saude/o-perigo-de-nao-vacinar-as-criancas>. Acesso em: 9 mar. 2016.

   O que você acha que o pediatra quis dizer com "um fato comprovado cientificamente"?

4. Suponha que determinada doença transmissível por contato tenha um grau de contágio de 25% para não vacinados, ou seja, uma pessoa doente transmite o vírus para 25% das pessoas não vacinadas com quem ela tem contato. Suponha também que o estágio de transmissão se dá apenas nos 3 primeiros dias do ciclo viral e que qualquer pessoa doente restrinja seu contato social a uma média de 20 pessoas por dia. Considerando que $n\%$ é a porcentagem de pessoas que tomou a vacina, calcule a probabilidade de que o vírus se espalhe progressivamente em cada caso:

   a) para $n = 70\%$.

   b) para $n = 80\%$.

   c) para $n = 90\%$.

5. Considera-se que a imunidade de um rebanho é efetiva quando a porcentagem de pessoas vacinadas reduz a probabilidade de haver uma epidemia para menos de 1%. Nesse caso, qual é a porcentagem de pessoas que devem se vacinar para garantir a imunidade de um rebanho?

Bibliografia

Leituras complementares

Ao longo desta Coleção, você encontra alguns textos que selecionamos e que versam sobre conteúdos de Matemática, sobre o desenvolvimento da própria Matemática e, também, sobre a vida de importantes personagens, que oferecem valiosas contribuições para esse universo. Caso você queira ampliar um pouco esse contato por meio dos textos relacionados a esses temas, sugerimos algumas referências elaboradas numa linguagem semelhante, algumas vezes, aos romances. São textos que contêm informações e curiosidades diversas relacionadas à história da Matemática.

Boa leitura!

ATALAY, Bulent. *A Matemática e a Mona Lisa*: a confluência da arte com a ciência. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Mercuryo, 2007.

BELLOS, Alex. *Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática. Tradução de Berilo Vargas e Claudio Carina. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BENTLEY, Peter J. *O livro dos números*: uma história ilustrada da Matemática. Tradução de Maria Luiz X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2009.

DEVLIN, Keith. *O gene da Matemática*: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. Tradução de Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

________. *O instinto matemático*: Por que você é um gênio da Matemática. Tradução de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

DEWDNEY, A. K. *20 000 léguas matemáticas*: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2000.

DU SAUTOY, Marcus. *A música dos números primos*: a história de um problema não resolvido na Matemática. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2007.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Cia. das Letras, 1997.

GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Cia. das Letras, 1999.

LIVIO, Mario. A *equação que ninguém conseguia resolver*. Tradução de Jesus de Paula Assis. Rio de Janeiro: Record, 2008.

________. *Razão áurea*: a história de Fi, um número surpreendente. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2006.

NETZ, Reviel; NOEL, William. *O codex Arquimedes*. Tradução de Pedro Bernardo e Pedro Elói Duarte. Lisboa: Edições 70, 2007.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 356 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 1998.

Referências bibliográficas

As obras a seguir representam importantes referências para o estudo e a reflexão sobre a Matemática.

ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Tradução de Adalgisa Campos da Silva. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática?* Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Tradução de Alberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. 3. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências:* um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

________. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

HOGBEN, Lancelot Thomas. *Maravilhas da Matemática*: Influência da Matemática nos conhecimentos humanos. [S.l]. São Paulo. Globo, 1958.

LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: S.B.M., 1996. (Coleção do Professor de Matemática.)

MLODINOW, Leonard. *A janela de Euclides*: a história da Geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução de Enézio de Almeida. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA
padrões e relações

2

Manual do
PROFESSOR

Adilson Longen

Licenciado em Matemática, doutor e mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná. Autor de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Foi professor universitário e atualmente é professor de Matemática em escolas da rede particular.

1ª edição
São Paulo – 2016

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
2º ANO
ENSINO MÉDIO

Editora do Brasil

APRESENTAÇÃO

Procuramos neste manual não apenas abordar nossas concepções a respeito do ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática, mas também dar subsídios para auxiliar o professor na utilização dos três livros como um instrumento importante em sala de aula. Pensamos em fornecer, além das ideias gerais sobre os conteúdos e seus objetivos, contribuições a respeito da necessidade de reflexão sobre os assuntos que fazem parte do Ensino Médio. Essas reflexões também levam em conta a avaliação e seu importante papel dentro do processo como um todo. Sabemos, como professores, da urgência de adotar cada vez mais uma atitude reflexiva sobre nosso trabalho em sala de aula. Essa postura permite conduzir o aluno a uma formação matemática desejável nesse estágio da escolarização.

Um livro didático pode, por exemplo, incluir momentos que permitam a utilização de calculadoras e recursos no computador, mas é necessário que tanto a escola quanto o docente invistam tempo e se organizem para que isso seja possível. O cotidiano de um professor de Ensino Médio exige, entre outras coisas, estar "antenado" não apenas aos conteúdos que devem ser trabalhados mas também com a realidade dos alunos. O mundo dos adolescentes é cercado pela mídia e pelas tecnologias, que, para eles, o tornam muito mais "vivo". Se para nós, em algumas ocasiões, arrastar um *mouse* pode representar um grande avanço, para nossos alunos já é algo trivial. Aos poucos, aquela cena de um professor com um livro em uma das mãos e um toco de giz na outra deve sofrer transformações. Não que o livro ou o giz devam ser abandonados, mas o personagem que os segura precisa realmente buscar formas de envolver os alunos, de convencê-los da necessidade de ter uma boa formação matemática para, entre outras coisas, compreender melhor esse espetacular mundo das tecnologias.

Esperamos dar alguma contribuição a você, professor. Propomos talvez mais perguntas do que respostas, por entendermos que, por meio das interrogações, somos levados a reflexões e a novas dúvidas decorrentes dessas reflexões. Respostas serão dadas, outras questões serão levantadas. É o processo que nos move. É a forma como podemos evoluir. Esperamos que a leitura deste manual possa, de alguma forma, contribuir. Bom trabalho!

Sumário

1. O Ensino Médio – diretrizes ... 4
Finalidades do Ensino Médio ... 4
Desafios do Ensino Médio ... 4
Avaliação no Ensino Médio ... 4
O Exame Nacional do Ensino Médio ... 5
A formação do professor ... 6
2. A área de Matemática no Ensino Médio ... 7
Reflexões sobre a Matemática ... 7
Objetivos da Matemática na Educação Básica ... 8
Objetivos da Matemática no Ensino Médio ... 9
O Enem e a Matemática ... 10
3. Uma coleção de livros de Matemática no Ensino Médio ... 11
Distribuição dos conteúdos ... 11
Estrutura das unidades em cada volume ... 13
Componentes e personagens na construção do conhecimento ... 17
4. Referências ... 22
Avaliação ... 23
Formação do professor ... 23
História da Matemática ... 24
Conhecimentos Matemáticos ... 24
Outras leituras sobre a Matemática ... 24
Ensino e aprendizagem da Matemática ... 25
Sites recomendados ... 26
5. Uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem ... 26

1. O Ensino Médio – diretrizes

A Educação Básica, formada pela Educação Infantil, pelo Ensino Fundamental e pelo Ensino Médio, está fundamentada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. O conhecimento dessas diretrizes é desejável e necessário a todos aqueles que, de alguma maneira, atuam na Educação Básica. Apontaremos a seguir, resumidamente, algumas dessas ideias norteadoras e comentários para motivar sua discussão.

Finalidades do Ensino Médio

Para o Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, apontam-se as seguintes finalidades:

> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
>
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

BRASIL. Ministério da Educação. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)*. Lei n. 9.394, de 20 dez. 1996. Brasília, DF, p. 169. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Comentário

Ao ingressar no Ensino Médio, o aluno já adquiriu diversos conhecimentos sobre números, tratamento da informação, Geometria e Álgebra. Assim, as retomadas são naturalmente feitas visando ao aprofundamento e à consolidação desse aprendizado. O trabalho, por exemplo, no campo numérico exigirá do aluno uma boa compreensão do número real (racional ou irracional) para que possa ser feita uma ampliação com os números complexos.

O estudo de situações do cotidiano auxilia na compreensão da relação entre teoria e prática. Assim, o trabalho com medidas, Geometria e tratamento da informação pode ser direcionado nesse sentido. Além disso, o uso da calculadora e do computador possibilita que o aluno explore ferramentas para desenvolver conhecimentos em Matemática.

Desafios do Ensino Médio

A identidade e a diversificação no Ensino Médio são citadas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional como desafios a serem enfrentados:

> Um dos principais desafios da educação consiste no estabelecimento do significado do Ensino Médio, que, em sua representação social e realidade, ainda não respondeu aos objetivos que possam superar a visão dualista de que é mera passagem para a Educação Superior ou para a inserção na vida econômico-produtiva. Esta superação significa uma formação integral que cumpra as múltiplas finalidades da Educação Básica e, em especial, do Ensino Médio, completando a escolaridade comum necessária a todos os cidadãos. Busca-se uma escola que não se limite ao interesse imediato, pragmático e utilitário, mas, sim, uma formação com base unitária, viabilizando a apropriação do conhecimento e desenvolvimento de métodos que permitam a organização do pensamento e das formas de compreensão das relações sociais e produtivas, que articule trabalho, ciência, tecnologia e cultura na perspectiva da emancipação humana.

LDB, p. 170.

Comentário

Quando nós, professores, somos questionados pelos alunos "Para que serve estudar Geometria de Posição?" (ou outro conteúdo), não podemos dar a resposta pragmática "Cai no vestibular". O estudo desse tema, por exemplo, transcende em muito esse objetivo. O contato do aluno com o conhecimento do método axiomático permite ampliar seu poder de argumentação diante de situações não necessariamente referentes à Matemática. Diversas profissões, como a de advogado, exigem argumentações irrefutáveis e sem falhas.

Do mesmo modo, conhecer Matemática Financeira e Estatística permite não apenas resolver problemas colocados na forma de exercícios na disciplina de Matemática. A tomada de decisões em diversas profissões exige a análise profunda de informações estatísticas e de projeções financeiras que normalmente são apresentadas por meio de gráficos. Mesmo na vida particular, essa tomada de decisões pode afetar o bolso das pessoas: a compra parcelada de um carro, por exemplo. Quais são os juros embutidos?

Avaliação no Ensino Médio

Três são as dimensões básicas de avaliação conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica: avaliação da aprendizagem, avaliação institucional interna e externa e avaliação de redes de Educação Básica. Observe a seguir cada uma dessas dimensões.

> A *avaliação da aprendizagem*, que conforme a LDB pode ser adotada com vistas à promoção, aceleração de estudos e classificação, deve ser desenvolvida pela escola refletindo a proposta expressa em seu projeto político-pedagógico. Importante observar que a avaliação da aprendizagem deve assumir caráter educativo, viabilizando ao estudante a condição de analisar seu percurso e, ao professor e à escola, identificar dificuldades e potencialidades individuais e coletivas.
>
> A *avaliação institucional interna* é realizada a partir da proposta pedagógica da escola, assim como do seu plano de trabalho, que devem ser avaliados sistematicamente, de maneira que a instituição possa analisar seus avanços e localizar aspectos que merecem reorientação.
>
> A *avaliação de redes de ensino* é responsabilidade do Estado, seja realizada pela União, seja pelos demais entes federados. Em âmbito nacional, no Ensino Médio, ela está contemplada no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que informa sobre os resultados de aprendizagem estruturados no campo da Língua Portuguesa e da Matemática, lembrando-se o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), que mede a qualidade de cada escola e rede, com base no desempenho do estudante em avaliações do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP) e em taxas de aprovação.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica*. Brasília, DF, 4 maio 2011. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/abril.../15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf>. Acesso em: 15 abr. 2016.

Comentário

Temos nesse contexto o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), que, desde seu surgimento, vem passando por transformações gradativas e assumindo funções diferentes que visam à democratização do ensino. Atualmente, por exemplo, a pontuação obtida no Enem pode ser utilizada como forma de ingresso em instituições de Ensino Superior das seguintes formas:

- Pelo sistema de seleção unificada (Sisu) como fase única;
- Como primeira fase no processo de ingresso;
- Compondo com o vestibular tradicional o processo de ingresso;
- Para ocupação de vagas remanescentes do vestibular.

As mudanças estabelecidas a partir de 2009 no Enem estão também relacionadas a vários fatores. Um deles é a necessidade de reformulação do currículo do Ensino Médio (observando-se a Base Comum Nacional Curricular). Outro é proporcionar uma melhor qualidade no Ensino Médio brasileiro, pois esse exame avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos não de forma isolada, mas de forma conjunta.

O Exame Nacional do Ensino Médio

O Enem é composto de uma redação e de 180 questões e é realizado em dois dias. Essas questões estão divididas em quatro áreas do conhecimento (45 questões para cada área):

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;
- Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e suas Tecnologias.

As questões são elaboradas como base na Matriz de Referência (difundida pelo MEC), em que são descritas as competências e habilidades desejáveis para um aluno no fim do Ensino Médio. Elas estão fundamentadas em cinco eixos cognitivos comuns às quatro áreas do conhecimento:

> I. *Dominar linguagens (DL)*: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
>
> II. *Compreender fenômenos (CF)*: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
>
> III. *Enfrentar situações-problema (SP)*: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
>
> IV. *Construir argumentação (CA)*: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
>
> V. *Elaborar propostas (EP)*: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

BRASIL. Ministério da Educação. *Matriz de Referência do ENEM 2009*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/matriz_referencia_novoenem>. Acesso em: 15 abr. 2016.

Comentário

A teoria dos conjuntos, por exemplo, é uma parte dos assuntos abordados no Ensino Médio em que a linguagem matemática se faz presente. A simbologia empregada na Matemática representa uma simplificação na escrita, mas é dotada de significados importantes. Quando escrevemos $y = f(x)$, por exemplo, estamos indicando que a variável y depende da variável x, ou, conforme o contexto, que a grandeza representada por y é uma função da grandeza representada por x.

É desejável que o aluno, ao enfrentar uma situação-problema, compreenda inicialmente o que é proposto e, a seguir, tenha o hábito de elaborar mentalmente um plano para buscar uma solução. Essas são apenas duas etapas importantes na resolução de problemas que levam o aluno a enfrentar situações novas, além de tornar as aulas muito mais motivadoras.

A formação do professor

São inúmeras as preocupações em relação à formação do professor. Existem problemas crônicos e reconhecidos na formação desse profissional que acabam refletindo em seu desempenho em sala de aula. Nesse sentido, muitas escolas tomam iniciativas promovendo discussões, criando grupos de estudos e até incentivando professores a ingressar em cursos de formação continuada promovidos em suas comunidades. Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica, "é necessário repensar a formação dos professores para que possam enfrentar as novas e diversificadas tarefas que lhes são confiadas na sala de aula e além dela".

Essas preocupações já faziam parte do projeto de lei que propunha o II Plano Nacional de Educação, para o decênio 2011-2020. Nele são previstos, entre suas diretrizes, a valorização do professor, incluindo também o fortalecimento da formação inicial e continuada dos docentes. Sobre essa valorização, destacam-se as seguintes metas:

> • Meta 15: Garantir, em regime de colaboração entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, que todos os professores da Educação Básica possuam formação específica de nível superior, obtida em curso de licenciatura na área de conhecimento em que atuam.
>
> • Meta 16: Formar 50% dos professores da Educação Básica em nível de pós-graduação *lato* e *stricto sensu*, garantir a todos formação continuada em sua área de atuação.
>
> • Meta 17: Valorizar o magistério público da Educação Básica a fim de aproximar o rendimento médio do profissional do magistério com mais de onze anos de escolaridade do rendimento médio dos demais profissionais com escolaridade equivalente.
>
> • Meta 18: Assegurar, no prazo de dois anos, a existência de planos de carreira para os profissionais do magistério em todos os sistemas de ensino.

BRASÍLIA. Ministério da Educação. Plano Nacional de Educação 2011-2020. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7116-pl-pne-2011-2020&Itemid=30192>. Acesso em: 16 abr. 2016

Comentário

Sabemos que a escola carrega enormes preocupações ligadas a reformulações e atualizações. Exatamente neste ponto é que compreendemos se encontrar uma das oportunidades de contribuir para a formação continuada dos professores. Como existem essas preocupações quanto às constantes e necessárias atualizações, o docente, fazendo parte do chamado "projeto educativo da escola", naturalmente acaba se envolvendo com diversas questões ligadas ao seu papel: discussões sobre problemas de aprendizagem, comportamentos, elaboração de programas de cursos, de projetos diversos implantados pela escola, entre outras.

Além da formação contínua do professor realizada na própria escola, há outras possibilidades. Entre elas, destacamos a formação realizada presencialmente em faculdades e universidades e aquela efetuada por meio da educação a distância. Esta última, em crescimento em nosso país, exige suportes de comunicação, como acesso à internet e às plataformas utilizadas para os cursos. O procedimento desse tipo de formação baseia-se geralmente na articulação entre as atividades a distância (videoconferências) e as atividades presenciais.

No que diz respeito à questão social, cada vez mais o professor tem de conviver com os interesses de alunos e pais no dia a dia da escola e saber administrá-los. Se considerarmos o ponto de vista da escola, é exigida do professor a participação ativa não apenas nas definições dos rumos políticos e pedagógicos da instituição como também no gerenciamento de projetos de trabalho. Olhando pelo lado pessoal, o professor é continuamente solicitado a participar de discussões coletivas com seus colegas, além de preocupar-se com aquelas tarefas diárias que sua profissão exige. Desse modo, a escola é para o professor fonte primordial de questões para pesquisa.

Assim, cada vez mais o docente pode encontrar condições para obter o aprofundamento teórico necessário para enfrentar e resolver as questões encontradas no âmbito escolar. Tanto as instituições de formação presencial ou a distância quanto a mídia social vêm oferecendo oportunidades de participação em grupos de estudos na área de Educação Matemática.

Procure, em sua cidade, centros, geralmente ligados às universidades, que promovem cursos de pós-graduação e encontros para debater a educação. Além disso, existem revistas e boletins de Educação Matemática que podem ser assinados pela própria escola. No fim deste manual, sugerimos algumas referências sobre formação docente.

2. A área de Matemática no Ensino Médio

Quais são os principais objetivos da Matemática na Educação Básica? E os objetivos da Matemática no Ensino Médio? Essas perguntas exigem uma profunda reflexão sobre o que entendemos ser a Matemática, nosso objeto de estudo.

Reflexões sobre a Matemática

O que é Matemática? Como ensiná-la? O que ensinar?

Keith Devlin, professor do Departamento de Matemática da Universidade Stanford, é conhecido no Brasil por seus livros interessantes sobre o tema. Entre eles, dois se destacam: *O gene da Matemática* e *O instinto matemático*. Neste último, encontramos uma reflexão interessante em um de seus capítulos, cujo título é O que é Matemática?. Reproduzimos parte dessa reflexão a seguir.

> Os números surgiram logo que nossos antepassados reconheceram que conjuntos de, por exemplo, três bois, três lanças e três mulheres tinham algo em comum: o caráter tríplice. O padrão em questão é de numerosidade, isto é, tamanho de um conjunto. Os números propriamente ditos são objetos inventados para descrever esses padrões: o número 1 descreve o padrão da unidade, 2 descreve a duplicidade, e assim por diante.
>
> Uma vez que você tem números, pode ver padrões entre esses números, por exemplo, $2 + 3 = 5$, e assim surge a Aritmética. Padrões de forma, importantes na designação de quem possui tal ou qual pedaço de terra ou na construção de edifícios, deram origem à Geometria, uma palavra que deriva da expressão grega para "medição terrestre". Quando combina padrões de forma com padrões de números, você obtém a Trigonometria.
>
> No século XVII, Isaac Newton, na Inglaterra, e Gottfried Leibniz, na Alemanha, inventaram de forma independente o cálculo diferencial e integral, o estudo dos padrões de movimento contínuo e suas variações. Antes do cálculo, a Matemática se restringia essencialmente a padrões estáticos: contagem, medição e descrição de forma. Com a introdução de técnicas para lidar com movimentos e variações, os matemáticos puderam estudar o deslocamento dos planetas e de corpos em queda livre na Terra, o funcionamento de máquinas, o fluxo de líquidos, a expansão de gases, forças físicas como o magnetismo e a eletricidade, o voo, o crescimento das plantas e animais, a disseminação de epidemias, a flutuação dos lucros, e assim por diante.
>
> Aproximadamente na mesma época em que Newton e Leibniz estavam inventando o cálculo, os matemáticos franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662) trocaram uma série de cartas nas quais desenvolveram os fundamentos da área da Matemática conhecida como teoria da probabilidade, que estuda padrões que surgem quando você repete um evento aleatório muitas vezes, como o lançamento

de moedas ou dados. (O trabalho deles era totalmente motivado pelo desejo de seus ricos protetores de melhorar o desempenho nas mesas de apostas europeias.)

> A atual tecnologia computacional surgiu do estudo dos padrões do pensamento lógico, a área da Matemática conhecida com lógica formal.
>
> DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Tradução de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009. p. 36-37.

Compreendemos, assim como esse autor, que a Matemática trata de padrões. Também a Matemática que ensinamos nas escolas está repleta de padrões e, além disso, intimamente relacionada a outros temas. Essa é uma visão do que podemos considerar como sendo a Matemática.

Morris Kline é o autor do livro (em espanhol) *Matemáticas para los estudiantes de humanidades* (Matemática para os estudantes de humanidades). O primeiro capítulo dessa obra tem um título, no mínimo, intrigante: "Por que estudar Matemáticas?". Não vamos aqui discutir o plural por ele empregado ao referir-se a "matemáticas", mas observar uma interessante reflexão que ele promove sobre sua importância. Em determinada parte desse capítulo, Kline afirma:

> O tema tem muitas facetas ou, como alguém diria, tantas cabeças como a hidra mitológica. É possível considerar as matemáticas como linguagem, como classe particular de estrutura lógica, como corpo de conhecimentos sobre o número e o espaço, como série de métodos para extrair conclusões, com a essência do nosso conhecimento do mundo físico ou como mera atividade intelectual divertida. Mas seria muito difícil descrever com exatidão cada um desses aspectos em poucas palavras.
>
> KLINE, Morris. *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. Fondo de Cultura Económica de España, 1992. p. 13. (Tradução nossa.)

Um pouco mais adiante no texto de Kline, há algumas ideias que podemos utilizar como ponto de partida para refletir sobre a importância da Matemática:

> Dessas reflexões se chega à conclusão de que os sentidos, a medição e a experimentação, para não considerar senão três formas diferentes de adquirir conhecimento, são insuficientes em muitas situações. A razão é essencial. O advogado, o médico, o cientista e o engenheiro se valem da razão todos os dias para chegar a conhecimentos que de outra maneira seriam inacessíveis ou que somente seriam obtidos a custo em excesso elevado e enorme gasto de energia. As matemáticas, mais que nenhuma outra atividade humana, dependem do raciocínio para produzir conhecimentos.
>
> KLINE. p. 13.

Ao citarmos dois autores relacionados às pesquisas e à história dessa ciência, pretendemos evidenciar a grande dificuldade em definirmos Matemática ou em delinearmos essa disciplina no Ensino Médio. Se concordamos que a Matemática trabalha com padrões, também aceitamos que a partir desses padrões é essencial o entendimento e o estabelecimento das correspondentes relações, papel fundamental na elaboração do conhecimento matemático.

Apenas como exercício mental, sugerimos que você, caro professor, defina segundo seu ponto de vista o que é Matemática. Registre essa definição no início de um período letivo. No início do próximo período letivo, faça o mesmo e compare essas definições. É bem provável que sejam distintas, pois os estudos transformam nosso conhecimento e nossas concepções.

Objetivos da Matemática na Educação Básica

Em 2015, um documento resultante de um profundo estudo de especialistas foi apresentado à sociedade para uma etapa de discussões: a *Base Nacional Comum Curricular*. É a base para a renovação e também o aprimoramento da Educação Básica como um todo.

Na área de Matemática para a Educação Básica, destaca-se seu papel fundamental e a forma como seu conhecimento deve ser considerado:

A Matemática assume um papel fundamental para o pleno acesso dos sujeitos à cidadania. Em uma sociedade cada vez mais baseada no desenvolvimento tecnológico, os conhecimentos matemáticos tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas, tais como compreensão de dados em gráficos, realização de estimativas e percepção do espaço que nos cerca, entre outras.

O desenvolvimento desta área do conhecimento, a Matemática, foi e continua sendo por meio das relações que o homem estabelece com a sociedade em que vive. O conhecimento matemático é fruto da busca, pelo ser humano, de respostas a problemas que a sociedade lhe apresenta em suas práticas sociais. A Matemática não é, e não pode ser vista pela escola, como um aglomerado de conceitos antigos e definitivos a serem transmitidos ao/à estudante. Ao contrário, no processo escolar, é sempre fundamental que ele/a seja provado/a a construir e a atribuir significado aos conhecimentos matemáticos.

Dessa forma, a Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para os fenômenos que nos cercam. Esses modelos compreendem não somente os conceitos, mas as relações entre eles, procedimentos e representações de diversas ordens.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. (Proposta preliminar para consulta pública). Brasília, DF, 16 set. 2015. p. 127. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/BNCC-APRESENTACAO.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2016.

Um pouco mais adiante, nesse mesmo documento, aponta-se a apropriação do conhecimento matemático como condição fundamental para que o aluno da Educação Básica possa atingir plenamente a cidadania. Para tanto, é necessário o desenvolvimento de uma forma de raciocinar. A partir daí são apontados os seguintes objetivos gerais da área de Matemática para a Educação Básica:

- Estabelecer conexões entre os eixos da Matemática e entre esta e outras áreas do saber.
- Resolver problemas, criando estratégias próprias para sua resolução, desenvolvendo imaginação e criatividade.
- Raciocinar, fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar.
- Comunicar-se, utilizando as diversas formas de linguagens empregadas em Matemática.
- Utilizar a argumentação matemática apoiada em vários tipos de raciocínio.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 129.

Objetivos da Matemática no Ensino Médio

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (ainda em estudo), temos preocupações bem atuais com essa fase da Educação Básica:

O Ensino Médio caracteriza-se como a última etapa da Educação Básica. Não é uma etapa isolada e independente das anteriores, mas, sim, uma etapa complementar, que deve oferecer condições ao estudante para ampliar e consolidar as aprendizagens do Ensino Fundamental e desenvolver novas capacidades de interpretar e refletir sobre diferentes contextos. Para isso, no âmbito da escola, é necessário rever e redimensionar o currículo, de modo que a Matemática ao ser apresentada ao estudante evidencie sua relevância social e cultural e seu papel no desenvolvimento histórico da ciência.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 149.

Em nossa sociedade, temos uma diversidade de situações em que o conhecimento matemático é necessário: como um importante instrumento para lidar com situações cotidianas; como apoio a outras áreas do conhecimento; como uma maneira de conduzir o desenvolvimento de habilidades do pensamento.

Durante os três anos que compreendem o Ensino Médio, a Matemática representa uma parte do conhecimento humano extremamente importante não apenas para ler e interpretar nossa realidade mas também para ampliar e construir uma visão de mundo. Não podemos nos esquecer de que estamos formando alunos que se encontram em processo de escolha profissional.

Além do caráter instrumental, a Matemática que é abordada nessa importante etapa da escolarização coloca-se como uma ciência com características próprias e linguagem específica. Entretanto, tem uma função de integrar outras áreas do conhecimento, como as demais Ciências da natureza. Nesse sentido, devemos ter como preocupação a utilização de contextos diversos quando da abordagem de conteúdos dessa disciplina.

> A Matemática do Ensino Médio deve priorizar conceitos e procedimentos que possibilitem o estabelecimento de conexões tanto entre diversas ideias matemáticas, como com outras áreas do conhecimento, atentando para suas aplicações sociais. O estudo das funções, por exemplo, deve priorizar aspectos relacionados à variação entre grandezas, permitindo que o/a estudante desenvolva efetivamente o pensamento funcional, em substituição às habilidades relativas à simples manutenção simbólico-algébrica, normalmente privilegiada pela escola.
>
> *Base Nacional Comum Curricular*, 2015. p. 150.

Ao aprenderem a Matemática contextualizada e integrada, sempre que possível, com outras áreas do conhecimento ou até mesmo com questões do cotidiano, os alunos desenvolvem habilidades essenciais para a estruturação do pensamento, que os auxiliam cada vez mais na busca pela compreensão e interpretação de situações diversas. Desenvolvem também o hábito de argumentar e a capacidade de analisar e tomar decisões.

Compreendemos a necessidade do saber matemático na formação de habilidades de pensamento e como instrumento essencial em outras áreas do conhecimento. Acreditamos ainda que a formação do jovem pode ocorrer levando em conta a dimensão histórica do próprio conhecimento matemático, além, é claro, dos contextos necessários para aprender Matemática.

Com o acesso cotidiano relativamente fácil às tecnologias diversas, espera-se que a disciplina de Matemática, o professor e o aluno sejam inseridos em tais importantes recursos:

> O trabalho com a Matemática no Ensino Médio pode ser enriquecido por meio de propostas pautadas no uso de recursos tecnológicos como instrumentos que visem auxiliar na aprendizagem e na realização de projetos, sem anular o esforço da atividade compreensiva. Há diversos *softwares* disponíveis na Internet que se aplicam ao estudo das construções geométricas ou das funções. Há, ainda, planilhas eletrônicas que auxiliam na organização de dados e na elaboração de tabelas e gráficos.
>
> Para tanto, é necessário que a escola possibilite aos/às estudantes o acesso, de modo ético e responsável, a *softwares* e *sites* de pesquisa. A produção rápida e excessiva de informações na sociedade atual requer um eficiente pensamento analítico para compreender pesquisas de opinião, índices econômicos, doenças, problemas ambientais, entre outros.
>
> *Base Nacional Comum Curricular*, 2015. p. 150-151.

Resumindo o que abordamos até aqui sobre o Ensino Médio, precisamos construir uma Matemática em sala de aula que proporcione a nossos alunos uma visão dela como uma ferramenta útil para resolver problemas diversos de sua vida cotidiana e, na mesma medida, uma visão da Matemática como uma ciência logicamente estruturada.

Sendo assim, apresentamos os objetivos gerais da área de Matemática no Ensino Médio extraídos da Base Nacional Comum Curricular:

• Aplicar conhecimentos matemáticos em situações diversas, na compreensão das demais ciências, de modo a consolidar uma formação científica geral;

• Expressar-se oral, escrita e graficamente, valorizando a precisão da linguagem, na comunicação de ideias e na argumentação matemática;

• Compreender a Matemática como ciência, com sua linguagem própria e estrutura lógico-dedutiva;

• Estabelecer relações entre conceitos matemáticos de um mesmo campo e entre os diferentes eixos (Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções), bem como entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;

• Desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções, trabalhando coletivamente, respeitando o modo de pensar dos/as colegas e aprendendo com eles/as;

• Analisar criticamente os usos da Matemática em diferentes práticas sociais e fenômenos naturais, para atuar e intervir na sociedade;

• Recorrer às tecnologias digitais para descrever e representar matematicamente situações e fenômenos da realidade, em especial aqueles relacionados ao mundo do trabalho.

Base Nacional Comum Curricular, 2015. p. 151-152.

Note que a Base Nacional Comum Curricular já indica como eixos para a Matemática no Ensino Médio: Geometria; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade; Números e Operações; Álgebra e Funções.

O Enem e a Matemática

Apresentamos a seguir as sete competências e as 30 habilidades elencadas na Matriz de Referência para a prova de Matemática e suas Tecnologias. Embora sejam habilidades diferentes (H1 até H30), podemos encontrar em questões e situações diversas mais de uma habilidade envolvida. Citamos, após cada competência, um exemplo de questão do próprio Enem, com resolução e comentários.

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Com a implantação da Base Nacional Comum Curricular, é necessário que, como professores, tenhamos uma postura reflexiva permanente sobre os conteúdos trabalhados, de tal forma que possamos associar e elencar as competências e habilidades que estão sendo trabalhadas. Essa deve ser uma dinâmica presente em nossas aulas, para que também o aluno passe, de maneira clara e objetiva, a compreender cada vez mais a Matriz de Referência do Enem.

3. Uma coleção de livros de Matemática no Ensino Médio

Professor, agora que já abordamos as principais referências nacionais sobre o Ensino Médio, vamos procurar inserir nossa coleção de Matemática nesse importante estágio da escolarização. Observaremos a seguir a estrutura desse material de apoio na formação desses jovens ao longo dos três anos.

De modo geral, a **abordagem** que acreditamos ser adequada para o ensino da Matemática deve considerar a necessidade de contextos, observando aplicações, sempre que possível. A apresentação prematura de conceitos, por meio de uma estéril cadeia de definições e propriedades, nem sempre deve ser o caminho percorrido. Entendemos que o raciocínio dedutivo deve ser trabalhado e valorizado, porém de forma gradativa. É desejável que demonstrações sejam feitas sempre que auxiliem na construção do conhecimento matemático. Dependendo do conteúdo, podemos sugerir verificações empíricas de determinadas propriedades ou demonstrações (de natureza dedutiva) de outras propriedades, levando em conta o nível de interesse e de compreensão dos alunos.

Resumindo, na **metodologia** de ensino em que nos baseamos, o aluno deve ser participativo na construção do conhecimento, resolvendo e discutindo situações propostas. Deve ser continuamente incentivado a explorar determinados temas, a utilizar **ferramentas** como a calculadora e o computador em **investigações** que são conduzidas no desenvolvimento de alguns conteúdos, sempre que isso for possível. Não queremos, com isso, deixar de lado as chamadas sistematizações necessárias na consolidação dos conhecimentos adquiridos. Como professores, devemos interferir construtivamente por meio de indagações que instiguem os alunos. Se assim procedemos, também devemos saber escutar as conclusões, suposições e dificuldades que esses mesmos alunos ativos exponham.

Distribuição dos conteúdos

Os conteúdos que tradicionalmente compõem o Ensino Médio estão divididos em três volumes. Nesta coleção, cada volume, por sua vez, está dividido em unidades subdivididas em capítulos. Nos quadros a seguir há a descrição correspondente a essa distribuição, conforme nossa escolha.

1º ANO	
Unidade 1 Números e conjuntos	Capítulo 1 – Números reais Capítulo 2 – Noções básicas de conjuntos Capítulo 3 – Operações entre conjuntos
Unidade 2 Tópicos de Geometria Plana	Capítulo 4 – Figuras geométricas planas Capítulo 5 – Semelhança de figuras planas Capítulo 6 – Áreas de figuras planas
Unidade 3 Funções	Capítulo 7 – Relação de dependência entre grandezas Capítulo 8 – Introdução à Geometria Analítica Capítulo 9 – Função afim Capítulo 10 – Função quadrática
Unidade 4 Trigonometria no triângulo	Capítulo 11 – Trigonometria no triângulo retângulo Capítulo 12 – Trigonometria em um triângulo qualquer
Unidade 5 Funções exponenciais	Capítulo 13 – Potenciação nos reais Capítulo 14 – Função exponencial Capítulo 15 – Logaritmos Capítulo 16 – Função logarítmica
Unidade 6 Sequências numéricas	Capítulo 17 – Sequências Capítulo 18 – Progressão aritmética Capítulo 19 – Progressão geométrica

No Volume 1, a Unidade 2 representa uma retomada dos principais tópicos de Geometria Plana estudados no Ensino Fundamental. Escolhemos incluir tal assunto nesse volume, pois, no seguinte, além da chamada Geometria de Posição, desenvolvemos tópicos de Geometria Espacial.

2º ANO	
Unidade 1 Matemática Financeira	Capítulo 1 – Proporção e porcentagem Capítulo 2 – Juros simples Capítulo 3 – Juros compostos
Unidade 2 Trigonometria	Capítulo 4 – Trigonometria na circunferência Capítulo 5 – Relações trigonométricas Capítulo 6 – Transformações trigonométricas
Unidade 3 Matrizes, determinantes e sistemas lineares	Capítulo 7 – Matrizes e determinantes Capítulo 8 – Sistemas de equações lineares
Unidade 4 Geometria Espacial	Capítulo 9 – Geometria Espacial de Posição Capítulo 10 – Poliedros Capítulo 11 – Prismas Capítulo 12 - Pirâmides
Unidade 5 Análise combinatória	Capítulo 13 – Princípio fundamental da contagem Capítulo 14 – Permutações Capítulo 15 – Combinações e arranjos Capítulo 16 – Binômio de Newton
Unidade 6 Probabilidades e Estatística	Capítulo 17 – Introdução à teoria das probabilidades Capítulo 18 – Cálculo de probabilidades Capítulo 19 – Adição e multiplicação de probabilidades Capítulo 20 – Introdução à Estatística Capítulo 21 – Medidas de tendência central

Tradicionalmente, o estudo da Geometria Espacial é desenvolvido apenas no Volume 2. Optamos, porém, por deixar para o Volume 3 parte desse tema: cilindros, cones e esferas. Assim, esse importante assunto da Matemática do Ensino Médio não é esgotado em apenas um ano.

Introduzimos também no Volume 2 o estudo da Estatística até medidas de tendência central. Entretanto, no início do Volume 3, fazemos uma retomada e ampliamos com as medidas de dispersão.

3º ANO	
Unidade 1 Estatística e probabilidades	Capítulo 1 – Medidas de tendência central (retomada) Capítulo 2 – Medidas de dispersão Capítulo 3 – Probabilidades e Estatística
Unidade 2 Geometria Analítica	Capítulo 4 – Coordenadas cartesianas Capítulo 5 – A reta no plano cartesiano Capítulo 6 – Distância, área e ângulo Capítulo 7 – A circunferência no plano cartesiano
Unidade 3 Geometria Espacial	Capítulo 8 – Cilindros Capítulo 9 – Cones Capítulo 10 – Esferas
Unidade 4 Números complexos	Capítulo 11 – O conjunto dos números complexos Capítulo 12 – Operações na forma algébrica Capítulo 13 – Forma trigonométrica Capítulo 14 – Operações na forma trigonométrica
Unidade 5 Polinômios e equações algébricas	Capítulo 15 – Polinômios Capítulo 16 – Operações com polinômios Capítulo 17 – Equações algébricas Capítulo 18 – Teoremas e relações
Unidade 6 As cônicas	Capítulo 19 – Elipse Capítulo 20 – Hipérbole Capítulo 21 – Parábola

Não incluímos o estudo de limites e derivadas porque o consideramos adequado à etapa posterior ao Ensino Médio. São conhecimentos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, presentes em alguns cursos de graduação, sendo por isso mais restritos ao Ensino Superior.

Estrutura das unidades em cada volume

Vimos que cada um dos três volumes contém seis unidades, subdivididas em capítulos. Vamos descrever agora como cada unidade está estruturada, da abertura ao fechamento. Para facilitar, utilizamos algumas ilustrações retiradas dos volumes da coleção.

Desenvolvimento dos conteúdos

De modo geral, podemos dizer que cada capítulo é iniciado com alguma situação-problema, um exemplo que desencadeia os conteúdos. As situações apresentadas ou os exemplos dados referem-se a contextos variados, que podem se relacionar à própria Matemática e seus conteúdos, ao cotidiano ou até mesmo a outra disciplina.

Para o desenvolvimento dos conteúdos, utilizamos algumas seções que devem auxiliar o trabalho do professor e dos alunos nesse sentido. São elas:

Questões e reflexões

É desejável que o aluno tenha uma postura reflexiva e participativa no desenvolvimento do conteúdo trabalhado. Assim, uma forma de envolvê-lo é fazendo perguntas diversas, que podem, evidentemente, ser ampliadas pelo professor. Algumas vezes, tais perguntas são colocadas ao longo da teoria para sondar o conhecimento prévio do aluno, verificar sua compreensão e potencializar suas reflexões. Em outros momentos, as perguntas propostas têm o caráter de verificação imediata em meio a exemplos que foram desenvolvidos, conduzindo o aluno a alguma resolução.

Com essas questões esperamos respostas que também devem ser analisadas pelo professor como sondagem de aprendizagem, fornecendo indícios de compreensão ou de dúvidas, esperadas na construção do conhecimento. Embora tais respostas ou sugestões de respostas estejam no Manual do Professor, elas objetivam muito mais a opinião e o envolvimento do aluno do que qualquer preocupação com exatidão.

Exercícios resolvidos

Como os capítulos apresentam subdivisões, propomos diversos exemplos e exercícios resolvidos. Os exemplos estão distribuídos ao longo do capítulo e servem de apoio ao desenvolvimento do conteúdo, articulando a teoria com a resolução. Os exercícios resolvidos, por outro lado, constituem exemplos de como solucionar problemas matemáticos que dizem respeito àquele conteúdo, passo a passo.

Diante dos exercícios resolvidos e dos exemplos, sugerimos que o professor ora reproduza os passos da resolução na lousa, ora promova discussões, orientando o aluno a acompanhar no próprio livro as resoluções. Essa maneira de observar exemplos e exercícios resolvidos cria o hábito desejável de "caminhar por si só", de refletir sobre como fazer e de buscar a compreensão de forma independente.

Exercícios propostos

A aprendizagem de conceitos matemáticos ocorre quando os alunos conseguem estabelecer relações entre conteúdos e são capazes de compreendê-los. Para que isso ocorra e haja segurança ao fazer Matemática, é necessária a fixação de certos procedimentos e a manipulação das relações estabelecidas. Esse é um dos objetivos de tais exercícios. Eles devem ser encaminhados tão logo as explicações dos conteúdos correspondentes sejam dadas. De acordo com a escolha do professor, podem ser propostos para resolução individual em sala de aula ou em duplas. É fundamental também que sejam devidamente corrigidos na aula, como forma de verificação das ideias básicas desenvolvidas. É necessário observar as dúvidas levantadas pelos alunos, pois são elementos que permitem ao professor fazer, eventualmente, retomadas necessárias ou acrescentar mais exemplos e exercícios.

Como desejamos o desenvolvimento da autonomia dos alunos, sempre é recomendável que exercícios sejam selecionados como "tarefa" a ser executada fora da sala de aula. Indicamos, então, que a verificação de procedimentos e exercícios ocorra também entre os próprios alunos.

Por vezes, há mais exercícios relativos a determinados assuntos. Isso ocorre pela característica do tema, que pode ter uma quantidade maior de conceitos e procedimentos exigidos para sua compreensão e desenvolvimento.

Geralmente, as últimas atividades exigem do aluno algo mais que uma simples fixação. Não são atividades com grau elevado de complexidade, mas foram elaboradas procurando articulação com outros assuntos já estudados ou questionando os alunos de forma um pouco diferenciada em relação às primeiras atividades. O objetivo é propor situações diferentes para valorizar a busca de estratégias de resolução. Algumas vezes, os alunos deverão, por exemplo, elaborar enunciados com base em determinadas condições. O intuito é conduzir o aluno a observar como é a estrutura do enunciado de uma situação-problema e as relações entre seus dados.

Observação

Dificuldades são esperadas e devem ser utilizadas para promover debates em sala de aula. A discussão coletiva dessas atividades e sua resolução, observando formas diferentes de procedimentos e impressões dos alunos sobre como pensaram, devem ser valorizadas e conduzidas pelo professor.

Exercícios de vestibulares e Enem

Os alunos do Ensino Médio têm diversas expectativas que precisam ser levadas em consideração em sua formação. Uma delas é a legítima preocupação com o ingresso em uma universidade brasileira. Para tanto, é necessário que, desde o 1º ano desse estágio da escolarização, eles tenham o hábito de enfrentar situações presentes em questões de vestibular. Isso não quer dizer que a grande motivação do ensino aqui proposto seja o vestibular em si, e sim que essa é uma de suas finalidades.

No fim de cada unidade apresentamos uma diversidade de questões retiradas de exames de vestibular que envolvem os conteúdos trabalhados. Geralmente não são de imediata resolução, por isso consideramos importante que algumas delas sejam resolvidas coletivamente em sala de aula. Outras, a critério do professor, podem ser encaminhadas ou sugeridas aos alunos como autoavaliação. Aquelas com grau de complexidade maior na resolução podem ser utilizadas como componente da própria avaliação (em forma de trabalho em pequenos grupos). No fim do Manual do Professor, essas questões estão resolvidas.

Como o Enem também é uma preocupação de nossos alunos, incluímos questões que já fizeram parte desse importante exame brasileiro. Elas aparecem em meio às de vestibular. Mencionamos no Manual do Professor a habilidade (ou as habilidades) exigida na questão.

Sugerimos ao professor que, ao corrigir ou verificar coletivamente tais questões, as habilidades correspondentes sejam identificadas e comentadas para a turma toda. É um trabalho simples, mas fundamental para a formação e preparação do aluno para o Enem: habituá-lo a observar as habilidades que estão sendo exigidas dele.

No fechamento da unidade também apresentamos sugestões do trabalho com habilidades e competências, além das questões do Enem.

Todas as unidades trazem no fim uma questão desafiadora (a última da unidade). Embora o caráter de desafio possa ser considerado subjetivo de aluno para aluno, geralmente a questão escolhida exige um conhecimento da parte teórica com maior profundidade ou apresenta uma complexidade maior em sua resolução.

O desafio pode ser ampliado pelo professor, caso queira, e em conformidade com a turma. Atualmente, com as facilidades de acesso às informações e *sites* especializados de busca, é possível acessar não apenas outras questões de vestibular e do próprio Enem mas também questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBMs) e das Olimpíadas Brasileiras de Matemática da Escola Pública (OBMEPs).

Explorando

Em alguns momentos, ao longo da coleção, propomos atividades com características bem diferentes dos Exercícios Propostos ou dos Exercícios de Vestibulares e Enem. No Explorando, as atividades objetivam, entre outras coisas, como o próprio nome da seção indica, explorar determinado conteúdo ou situação. Compreendemos que a formação de nossos alunos no Ensino Médio precisa cada vez mais ser conduzida no sentido de valorizar e potencializar o aspecto investigativo. Além disso, as ferramentas computacionais e a calculadora representam meios presentes no cotidiano de nossos alunos que não podem ficar distantes da sala de aula.

O uso da calculadora, de instrumentos geométricos ou de ferramentas computacionais é sugerido em algumas dessas atividades. Assim, é preciso que haja, caso tais atividades sejam desenvolvidas em sala de aula, como sugerimos, uma prévia organização, solicitando que os alunos tragam os instrumentos necessários ou que a própria escola os disponibilize.

Observações

1. A calculadora pode ser empregada como instrumento, além das atividades sugeridas nesta seção. Por exemplo, existem exercícios em que o cálculo numérico é apenas auxiliar. Nesses casos, o uso da calculadora acaba liberando mais tempo para que o aluno possa refletir sobre o exercício e os resultados encontrados.

2. O computador faz parte do cotidiano do aluno. É um aliado importante a ser trazido para a sala de aula não apenas pelo interesse do aluno mas também por seu emprego na construção de gráficos, na elaboração de tabelas e na construção de planilhas. Não são somente gráficos estatísticos, mas gráficos de funções e gráficos de curvas diversas, como elipse, hipérbole e parábola.

3. Para a construção de gráficos, sugerimos dois aplicativos importantes e de acesso gratuito: Winplot e Geogebra.

Embora o número de atividades do Explorando seja relativamente pequeno, elas podem ser ampliadas pelo professor juntamente com as ideias criativas que os alunos apresentam quando estão diante de ferramentas computacionais, por exemplo. Uma investigação matemática muitas vezes começa com uma simples pergunta que o professor faz à turma ou até mesmo com uma curiosidade observada por um aluno. Nesse tipo de atividade, o envolvimento do aluno ocorre de forma imediata. Nosso papel, como professores, é estimular a curiosidade para que o aspecto investigativo faça parte do aprendizado.

Textos na Matemática

Com base no livro *Letramento no Brasil:* habilidades matemáticas, tivemos a ideia de elaborar atividades nesta coleção didática que representassem um convite à leitura de textos. Compreendemos que a Matemática não pode ser resumida, de modo tacanho, à busca de soluções de questões e de problemas. Como atividade humana que é, precisa também ser compreendida por sua história, pela identificação de personagens responsáveis por descobertas que a transformaram e pelas dificuldades encontradas nas buscas de explicações convincentes para determinada teoria.

Ao realizarmos um trabalho com textos da história da Matemática estamos, de certa maneira, procedendo a uma contextualização sociocultural. Nosso objetivo é, então, compreender o conhecimento científico como resultado de uma construção humana dentro de um processo histórico e social.

Apresentamos pelo menos um texto em cada unidade. Entretanto, conforme referências apresentadas no fim deste manual, outros também podem ser analisados e encaminhados pelo professor para leitura e análise de seus alunos.

Os textos que envolvem personagens da história da Matemática são geralmente muito bem aceitos e comentados pelos alunos. É importante dizer-lhes que determinados personagens recebem inteiramente o crédito de um feito, ao passo que outros que também deram contribuições permanecem no anonimato ou desconhecidos. Sabemos também que alguns não tiveram o merecimento devido, enquanto para outros o reconhecimento foi tardio.

Algumas dessas trajetórias de vida e/ou de superação são exemplos importantes para o conhecimento e a reflexão de nossos alunos. Como não se emocionar com a precocidade de Gauss e com a produção Matemática intensa de Euler, apesar de sua cegueira? Como não ficar triste diante do fim prematuro de um potencial extraordinário como o de Galois? Nossos alunos precisam também ver esse outro lado dessa atividade que denominamos Matemática.

Os textos versam não apenas sobre a história da Matemática e de personagens mas também sobre a história dos conteúdos. Por vezes, utilizamos a forma textual para abordar explicações necessárias para a compreensão de conteúdos diversos.

No fim de alguns textos elencamos questões ou sugestões de atividades que podem ser utilizadas para verificar a compreensão do texto ou para potencializar ampliações a critério do professor e dos próprios alunos.

Observação

Recomendamos, no fim do livro do aluno, algumas obras interessantíssimas para leitura. São referências que abordam a história da Matemática e algumas vezes de seus personagens, numa linguagem bem atraente. Sugerimos que os alunos leiam pelo menos um desses livros ao longo do ano. Talvez até essa leitura possa fazer parte de uma atividade de avaliação: por exemplo, depois de ler o livro, o aluno apresenta, de forma resumida, as ideias principais contidas nele.

Algumas conclusões

As unidades desta coleção contêm grandes temas subdivididos em outros. Esses temas são desenvolvidos em sala de aula durante determinado tempo, ocupando, muitas vezes, semanas. Assim, é aceitável e esperado, por exemplo, que nossos alunos apresentem dificuldades em relação ao domínio do que foi abordado. Mesmo que eles resolvam os exercícios propostos e participem ativamente das aulas, é natural e necessário que façam retomadas e resumos dos principais conceitos e ideias trabalhadas na unidade.

Assim, como uma espécie de roteiro, propomos uma reflexão sobre o que foi desenvolvido na unidade voltada ao conteúdo. Tal reflexão é conduzida por meio de dez questões que podem ser ampliadas pelo professor. Ao procurar a resposta para cada uma dessas questões, o aluno é remetido diretamente à verificação da aprendizagem. Não é necessário que ele apresente para a turma as respostas para tais questões, pois estamos diante de uma autoavaliação sobre o entendimento ou não do objeto de estudo.

Sugerimos que esse caráter de autoavaliação seja motivado pelo professor e utilizado como uma reflexão sobre as ideias principais que compõem o assunto estudado. Essa pode também ser uma maneira de criar o hábito de fazer resumos e retomadas de conteúdos.

Fechamento da unidade

Já abordamos neste manual as competências e habilidades do Enem. Sugerimos um trabalho ao longo do desenvolvimento dos conteúdos visando à compreensão das habilidades presentes na Matriz de Referência. Propusemos também questões nos Exercícios de Vestibulares e Enem que já fizeram parte desse exame. Mas podemos ir um pouco além.

Como fechamento da unidade, a seção que aqui apresentamos cumpre com o objetivo de ampliar o trabalho visando ao Enem. É o desenvolvimento das habilidades sendo realizado em um contexto diferente. Propomos a leitura de um texto de cunho formativo relacionado às Ciências, podendo também estar ligado à arte, modelagem matemática, inclusão social ou história da Matemática; enfim, procuramos diversificar. Depois da leitura de cada um desses textos, alguns questionamentos são sugeridos.

É importante que se compreenda que não se trata de uma leitura complementar ou de uma atividade que possa ser descartada. Ela está estruturada com a finalidade de proporcionar aos alunos um trabalho um pouco diferente em sua formação. Sugerimos que tais atividades façam parte da avaliação do aluno, como um componente de desenvolvimento de habilidades e de compreensão de texto. Nesse sentido, o encaminhamento em duplas ou trios seria o recomendado.

As respostas ou sugestões de respostas às questões são apresentadas no Manual do Professor.

Componentes e personagens na construção do conhecimento

O livro didático de Matemática é apenas um instrumento que apresenta os temas e fornece alguns possíveis caminhos a serem seguidos para o desenvolvimento dos conteúdos nele inseridos. A maneira como ele é trabalhado dia a dia em sala de aula, como é manipulado pelo aluno em seus estudos e pelo professor ao organizar seu trabalho e ao propor formas de avaliação são componentes decisivos para a construção do conhecimento. É uma verdadeira engrenagem que precisa ser montada para que funcione:

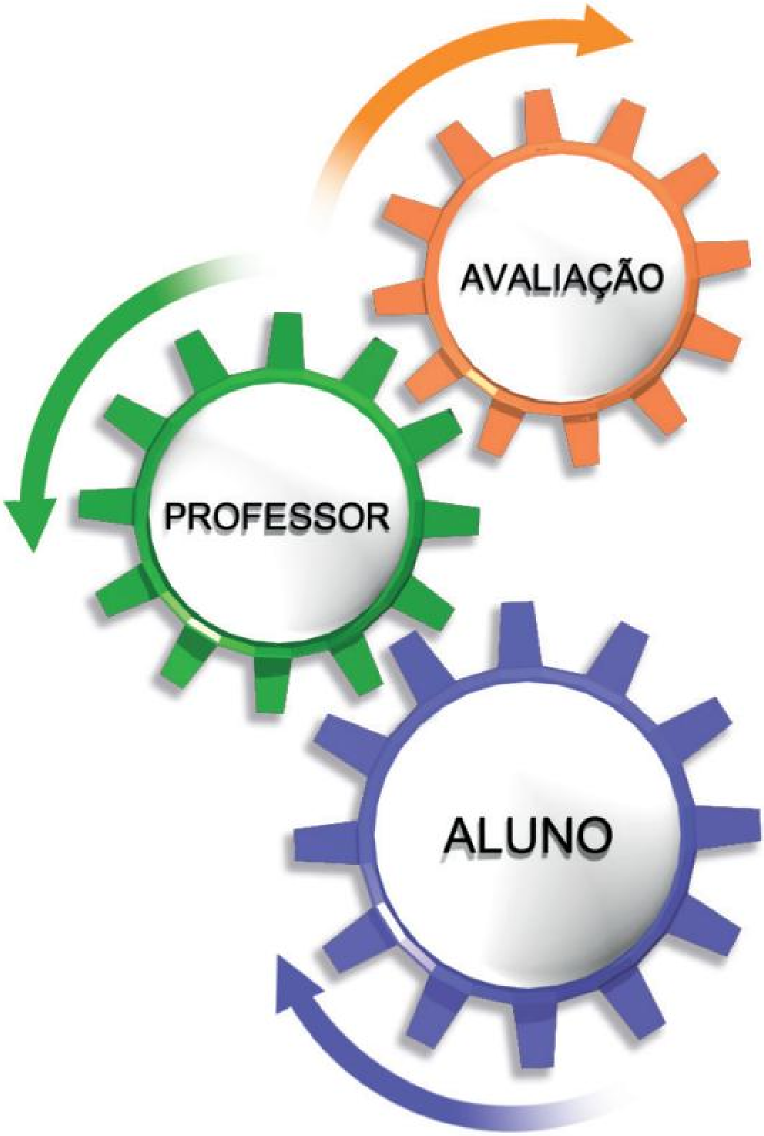


Figura: © DAE

Assim, precisamos analisar como relacionar esses componentes e personagens!

Professor, aluno e atitudes

Como este é um manual destinado ao professor, propomos algumas reflexões para que a construção do conhecimento resulte numa aprendizagem significativa para o aluno. Entendemos que outros tópicos poderiam aqui ser incorporados pelo docente durante sua atividade. O que temos a seguir é uma proposta para análise e discussão.

- O livro didático de Matemática é uma referência; entretanto, o papel do professor é fundamental. Sua postura deve estar ligada à ideia de facilitador, orientador e incentivador da aprendizagem. Sempre que possível, ele deve instigar o aluno e valorizar sua autonomia. Ao aluno, cabe o papel ativo na construção do conhecimento.

Ao considerarmos que o papel do aluno deve ser ativo, certamente teremos uma exigência bem maior do professor, que deverá saber ouvir e discutir impressões vindas do aluno. Na sala de aula, é recomendável que as carteiras não estejam sempre distribuídas em filas. As discussões devem colocar o aluno lado a lado, para que ele aprenda a ouvir e a defender seus argumentos.

Nesta coleção, esses momentos podem ocorrer diante do que chamamos Questões e reflexões, após a leitura de um Texto na Matemática, com a verificação de respostas e procedimentos quando de Exercícios propostos, na abertura e no fechamento da unidade e também no Explorando. Cabe ao professor, com sua experiência, administrar o encaminhamento de tais atividades.

- Os conceitos matemáticos precisam, sempre que possível, ser inicialmente trabalhados de forma intuitiva, por meio de exemplos e boas questões. Somente depois é que serão formalizados.

Quando abordamos as primeiras ideias de Geometria Analítica, nós, professores, podemos questionar os alunos sobre o que é necessário saber para localizar um ponto na superfície terrestre. Apenas nesse questionamento acabamos envolvendo não apenas o aluno mas também outra área do conhecimento: a Geografia.

Outro exemplo seria o primeiro contato dos alunos com o tema funções. Podemos solicitar a eles que informem a relação entre o número do calçado que utilizam e o tamanho dos seus pés. Estamos aqui diante do conceito de funções.

- Vivenciar, sempre que possível, alguns conteúdos desenvolvidos.

Quando iniciamos o estudo de probabilidades, por exemplo, podemos levar para a sala de aula moedas, dados, cartas de baralho, roletas, volantes de loteria esportiva, resultados da Mega-Sena e outros jogos conhecidos, propondo questões diversas.

Se o assunto é função quadrática, podem-se levar para a sala de aula pedaços de barbante com 20 metros de comprimento e solicitar que os alunos construam no chão, utilizando esses fios, alguns retângulos com 20 metros de perímetro. Depois, pergunta-se a eles, por exemplo: Quais são as medidas dos lados desses retângulos e quais são suas respectivas áreas? Em seguida, eles devem descobrir as medidas dos lados do retângulo que apresenta a maior área possível.

- Utilizar instrumentos tecnológicos, mesmo que para verificação de resultados.

Independentemente do livro didático, que já sugere atividades nesse sentido, proponha outras com a utilização de calculadoras. Quando o assunto estudado é, por exemplo, números irracionais, podemos pedir aos alunos que investiguem certas raízes quadradas com a calculadora, elevando os resultados ao quadrado para verificarem então o que ocorre.

Se o assunto é Trigonometria, além dos exercícios e atividades propostos no livro devemos estimular os alunos a sondar os valores das razões trigonométricas com o auxílio da calculadora.

Se o tema é Estatística, podemos encaminhar atividades coletivas de construção de tabelas e gráficos, por exemplo, com o auxílio de planilhas eletrônicas. Nossos alunos estão inseridos numa sociedade em que o computador é de uso diário. Talvez tenham dificuldades para construir os gráficos, daí o caráter investigativo e o direcionamento para o trabalho em grupo, em que as trocas auxiliam na superação das dificuldades esperadas.

- Propor leituras sobre a história da Matemática, os personagens, os assuntos.

Em Textos na Matemática, propomos momentos de leitura. Mais uma vez, além desses textos, outros podem ser selecionados e pesquisados pelo professor, que também pode solicitar que os próprios alunos pesquisem a respeito. Se estiverem, por exemplo, trabalhando com Geometria Plana, eles podem pesquisar textos em livros de história da Matemática sobre os números figurados ou sobre o método da exaustão.

- Incentivar a curiosidade e o espírito de pesquisa dos alunos.

Boas questões feitas por nós, professores, durante o desenvolvimento dos conteúdos despertam nos alunos a curiosidade. Se, por exemplo, estivermos abordando o plano cartesiano e citarmos Descartes e Fermat, podemos solicitar que façam uma pesquisa sobre o último teorema de Fermat.

Outro exemplo: ao abordarmos a progressão geométrica, podemos questionar os alunos sobre fractais e como obtê-los. Uma simples pesquisa na internet será suficiente para que eles deparem com imagens fantásticas geradas por computador tendo como base a teoria dos fractais.

- Desafiar a capacidade resolutiva dos alunos.

Bons desafios geram boas e diferentes estratégias de resolução. Muitas vezes, a forma como trabalhamos em sala de aula, mesmo sem querer, está viciada em procedimentos-padrão de resolução. Não é raro depararmos com raciocínios muitas vezes inimagináveis de nossos alunos. Como professores, não podemos, independentemente dos conteúdos estudados no livro didático, deixar de lado desafios lúdicos que provoquem positivamente os alunos, envolvendo-os cada vez mais. As sugestões, dadas anteriormente neste manual, de utilizar questões da OBM e da OBMEP representam essa valorização.

- Estimular os alunos a observar o aspecto lógico-dedutivo da Matemática.

No Ensino Médio, é necessário que enfatizemos em nossas aulas, sempre que possível, que as "verdades" matemáticas necessitam de demonstrações. Isso não precisa ficar restrito à Geometria, como tradicionalmente ocorre.

Assim, no estudo das equações algébricas, por exemplo, a demonstração do teorema das raízes imaginárias, acompanhando o que o livro propõe e discutindo rapidamente as passagens, deve merecer atenção dos alunos.

No estudo de logaritmos, as propriedades operatórias podem e devem ser justificadas passo a passo por meio das propriedades conhecidas de potenciação.

- A Matemática e a cidadania devem caminhar juntas.

Entendemos que o ambiente da sala de aula deve ser concebido como uma comunidade ativa. Cada aluno carrega uma história de vida, algumas vezes feita de dificuldades e superações, outras totalmente descompromissada e até alheia ao ambiente em construção. Cada pessoa tem suas próprias características. Somos diferentes fisicamente, temos gostos musicais diferentes, encaramos a vida de modo diferente, nossas atitudes diante de uma situação que a vida nos impõe não são as mesmas. As pessoas têm expectativas e sonhos que devem ser respeitados.

A Matemática representa uma ciência historicamente construída e necessita de um ambiente de sala de aula adequado para que seja desenvolvida e auxilie a formação do aluno como cidadão. Nesse sentido, nossas aulas não podem estar ao largo dos acontecimentos e questões sociais envolvendo aluno, escola e comunidade como um todo.

As informações e notícias fazem parte do cotidiano e nos são repassadas por meio de linguagens matemáticas. Porcentagens, gráficos e tabelas inundam a mídia e precisam de conhecimentos matemáticos para uma análise crítica, desejável em todo cidadão. A modelagem matemática, por exemplo, está presente em diversas áreas da atividade humana. A Matemática, portanto, precisa ser conduzida em nossas aulas como um instrumento importante para a interpretação do mundo em sua diversidade de contextos.

Quando procuramos em nossas aulas propiciar a criação de estratégias diferentes diante da abordagem de um assunto ou levamos o aluno a comprovar resultados, a justificar e a construir argumentos sólidos, favorecendo sua criatividade e desenvolvendo um trabalho coletivo que respeite opiniões diversas das suas, estamos formando um cidadão crítico.

Além desses procedimentos e atitudes que sugerimos acima – alguns dos quais possivelmente já presentes na rotina dos professores –, outros poderiam aqui ser elencados. São procedimentos que não exigem de nós, professores, grandes mudanças, mas alguns cuidados, algumas atitudes que certamente trazem um maior envolvimento dos alunos, uma aula muito mais dinâmica, em que eles são convidados a fazer Matemática, em vez de simplesmente assistirem a alguém encenando Matemática.

Professor, aluno e avaliação

Durante muito tempo, a avaliação dos alunos tinha a finalidade de medir seu desempenho. Por meio da atribuição de notas, sua natureza era classificatória. Nesse sentido, ela era utilizada para promover ou não o aluno para a série seguinte. Atualmente entendemos que a avaliação não pode ser reduzida a esse fim. É claro que essa maneira de pensar a avaliação está ligada ao contexto histórico em que era empregada. Sendo assim, vamos examinar diferentes ideias sobre a avaliação.

Usaremos como referência o livro *Avaliação e Educação Matemática*, de Paulo Abrantes, para observar diferentes concepções de avaliação assumidas ao longo do tempo. Caso o professor queira, no fim deste manual recomendamos outras obras para o estudo do tema.

Avaliação como medida

> Considerando o ensino associado à transmissão de conhecimentos (o professor falando e escrevendo no quadro), a aprendizagem é interpretada como a capacidade que o aluno possui de reproduzir o que lhe foi passado. Temos aí uma concepção de aprendizagem fortemente ligada à memorização. Nesse caso, a ênfase é no resultado, e diferentes formas de aprender não são levadas em consideração. Essa perspectiva de avaliação, denominada avaliação como medida, pressupõe que se pode medir e exprimir por meio de uma nota a aprendizagem do aluno. Essa nota (medida), por sua vez, é comparada à média das notas da turma à qual o aluno pertence, classificando-o em relação à sua turma.
>
> A avaliação como medida ocorre após certo número de aulas ou certa quantidade de conteúdos desenvolvidos. Caso o aluno tenha uma nota baixa, a responsabilidade de modo geral recai sobre ele mesmo. Imediatamente são levantadas justificativas para tal desempenho: falta de interesse do aluno, pouca capacidade de entendimento, dentre outras. Nessa perspectiva de avaliação, a parcela de responsabilidade do professor praticamente não é considerada. Essa é uma perspectiva danosa à formação dos alunos, pois a avaliação não permite compreender o modo como o aluno entendeu determinado conteúdo, o que inviabiliza ajustes no modo de ensinar.

ABRANTES, Paulo. *Avaliação e Educação Matemática*. Rio de Janeiro: MEM/USU-Gepem, [1995?]. p. 11-12. (Reflexões em Educação Matemática).

Avaliação como distância

> Associar a avaliação a uma medida levou, a certa altura, a uma preocupação com o rigor e a objetividade. Procuravam-se instrumentos que medissem os conhecimentos dos alunos de um modo "rigoroso" e independente da subjetividade da pessoa que decide, nomeadamente do professor.
>
> [...]
>
> Uma das consequências, em termos de avaliação, era deixar de considerar o modelo do professor e tomar como referência um conjunto de objetivos previamente definidos. As questões dos testes eram preparadas com base em matrizes de objetivos-conteúdos, isto é, tabelas de duas entradas nas quais uma das dimensões continha uma sequência dos tópicos do programa e a outra se referia aos níveis do domínio cognitivo da taxonomia de Bloom. O resultado da avaliação passava a ser encarado como uma medida de distância entre a resposta do aluno e o objetivo.

ABRANTES, [1995?]. p. 12.

Essa forma de avaliar ficou conhecida como **avaliação por objetivos**, que surgiu tendo como preocupação o rigor e a objetividade, isto é, procuravam-se instrumentos que medissem os conhecimentos dos alunos mais rigorosamente, independentemente da subjetividade do professor. Com base na avaliação por objetivos, duas novas formas de avaliação apareceram: **avaliação de diagnóstico** e **avaliação formativa**.

A avaliação de diagnóstico (expressão usada por Paulo Abrantes) tinha como finalidade verificar se o aluno tinha ou não os pré-requisitos necessários para aprender os próximos tópicos do programa.

Quanto à avaliação formativa, ela ocorria durante o processo de ensino e aprendizagem e tinha como meta detectar se os alunos estavam ou não prontos para "atingir os objetivos" que tinham sido previamente estabelecidos. Se o resultado apontasse que eles não estavam prontos, atividades de remediação (recuperação) lhes eram encaminhadas. Nessa forma de avaliar, curtos períodos de ensino eram seguidos por momentos formais de avaliação. Tanto a avaliação formativa como a de diagnóstico estão ligadas à avaliação como distância.

Avaliação como interpretação

> De acordo com uma nova visão de aprendizagem, não é importante apenas a correção ou incorreção das respostas do aluno numa dada prova de avaliação mas também os processos que o levam a produzir essas respostas. Mais do que controlar, a função do professor é interpretar, identificar problemas, gerar hipóteses explicativas. Mais do que medir o desvio em relação a comportamentos previamente determinados, importa compreender as razões do erro. O erro é uma fonte de informação essencial e não algo a ser tratado de um modo contabilístico ou que apenas se pretende evitar enquanto "comportamento observável". Se estamos doentes, não ficamos satisfeitos com um tratamento imediato que esconda os sintomas; queremos descobrir as causas da doença.
>
> ABRANTES, [1995?]. p. 14.

Conforme a citação acima sugere, a avaliação como interpretação é contínua, ocorrendo durante o processo de ensino e aprendizagem, e tem uma estreita ligação com esse processo. A preocupação principal nessa perspectiva de avaliar não é a medida que indica a distância em relação ao modelo estabelecido pelo professor ou ditado por aqueles comportamentos previamente estabelecidos como corretos ou esperados.

Acreditamos cada vez mais na avaliação como interpretação, por considerá-la muito mais que uma simples medida. Por meio dela, podemos, como professores, obter indícios do desenvolvimento do aluno na aquisição e no domínio de conceitos e procedimentos matemáticos. A avaliação, desse modo, não pode se resumir a uma prova – uma só forma de avaliar. Aspectos como participação durante as aulas, colaboração nas atividades, comportamentos e posicionamentos nas atividades em grupo, quando devidamente observados, podem fornecer fortes indícios sobre o real desenvolvimento dos alunos. Acreditamos em uma avaliação em que o objetivo central esteja ligado à dimensão educativa.

Não é apenas o aluno que está sendo avaliado. Mais que tudo isso, o ensino organizado por nós, professores, também está sendo avaliado. Resumindo, a forma de avaliação que concebemos inclui:

- momentos diferentes de avaliação (não apenas uma prova);
- formas diversas de avaliar (individualmente, em grupo, coletivamente);
- vários instrumentos (provas dissertativas, testes, pesquisas, comentários sobre leituras etc.);
- autoavaliação do aluno (o que permite reconhecer possíveis dificuldades a serem sanadas);
- observações contínuas dos alunos no processo como um todo (atitudes, intervenções orais, desenvolvimento de pequenas tarefas etc.);
- discussão com os alunos sobre as formas de avaliação que serão consideradas.

Discutir anteriormente com os alunos as formas de avaliação reforça a participação deles. Problemas do cotidiano da sala de aula, como a indisciplina, também devem ser colocados para a turma nesse momento como parte de um processo. As chamadas "regras do jogo" devem ser claras e cumpridas pelas duas partes, sob pena de surgirem incoerências e um desenvolvimento do trabalho bem aquém do desejável.

Falamos acima da necessidade de autoavaliação. Naturalmente, é preciso que os alunos saibam fazê-la. No fim de cada unidade da coleção, sugerimos em *Algumas conclusões* questões que podem ser utilizadas para verificar conceitos principais trabalhados. Além disso, propomos a seguir outras questões relacionadas a esse tipo de avaliação, e não apenas à assimilação de conteúdos.

Em relação às minhas atitudes

1. Nas atividades individuais que foram propostas para eu realizar, como me situo?

( ) Realizei com empenho.

( ) Poderia ter me empenhado mais.

( ) Simplesmente não tomei conhecimento.

( ) Outro: ____________________

2. Nas atividades em grupo que foram propostas, como foi meu comportamento?

( ) Participei ativamente.

( ) Poderia ter me envolvido mais.

( ) Em nada contribuí para a realização da atividade.

( ) Outro: ____________________

3. Quando em sala de aula, diante de uma dúvida, de que maneira me classifico como aluno?

( ) Procuro questionar.

( ) Deixo para depois, pois acredito que naturalmente essa dúvida será sanada.

( ) Omito-me, pois perguntar em sala de aula só atrapalha.

( ) Outro: ____________________

4. Quando em sala de aula um colega emite uma opinião, de que modo me posiciono?

( ) Simplesmente me omito.

( ) Acho que a opinião dele não deve ser considerada.

( ) Procuro refletir sobre a opinião dele e, às vezes, emito a minha.

( ) Outro: ____________________

5. Em relação àquelas questões mais difíceis que são propostas como forma de desafio, qual é meu comportamento?

( ) Não tenho a mínima curiosidade de resolver.

( ) Gosto de buscar a solução, mesmo que não consiga.

( ) Procuro identificar minhas dificuldades para eliminá-las, retomando conteúdo já estudado ou solicitando ajuda do professor.

( ) Outro: ____________________

Observação: Outras questões podem ser elaboradas e acrescentadas tanto pelo professor quanto pelos alunos. Fornecemos aqui apenas algumas sugestões.

Em relação aos conteúdos trabalhados

1. Quando o professor deu explicações, como me comportei?

( ) Não prestei total atenção às explicações dadas.

( ) Poderia ter prestado mais atenção e participado fazendo mais perguntas.

( ) Prestei muita atenção e participei emitindo opiniões e fazendo perguntas pertinentes.

( ) Outro: ____________________

2. Sobre a dificuldade de compreensão dos conteúdos, como os classifico?

( ) O conteúdo é muito difícil.

( ) O conteúdo é fácil, mas tenho dificuldade em compreender.

( ) O conteúdo é fácil e não apresento dificuldade em compreender.

( ) Outro: ____________________

3. Quais foram os exercícios em que não apresentei dificuldades para resolver e fiz individualmente sem nenhuma ajuda?

____

____

4. Quais foram os exercícios que resolvi com o auxílio de um colega ou outra pessoa?

____

____

5. De quais assuntos da unidade necessito fazer alguma retomada?

____

____

Observação: Outras questões podem ser elencadas pelo professor e pelos alunos.

É claro que essa autoavaliação deve ser um instrumento muito bem discutido. Mencionamos apenas algumas das possíveis questões para compor esse processo. Outras podem se mostrar também interessantes. Não temos dúvida em afirmar que os professores se encontram em melhor posição para verificar aprendizagens e julgar o progresso dos alunos quando contam com a contribuição destes para a composição do resultado final do processo de avaliação.

Com essas considerações, queremos pontuar que existem diferentes formas de avaliar e que não podemos deixar de pensar e discutir a avaliação.

No início desta discussão sobre a avaliação, apresentamos textos de Paulo Abrantes. Em seu estudo, ele utilizou uma pesquisa realizada por um grupo de pesquisadores, traduzida para a língua portuguesa como *Normas para a avaliação em Matemática escolar*. Segundo o documento, pensar em mudanças na avaliação não deve excluir a necessidade de outras mudanças interligadas:

- **Quanto aos conteúdos**. A mudança deve seguir em direção a uma variedade rica de tópicos matemáticos e situações problemáticas.

- **Quanto à aprendizagem**. A mudança a ser planejada deve caminhar em direção a problemas de investigação, deixando para trás a repetição e a memorização.

- **Quanto ao ensino**. A direção desejada é aquela em que o papel do professor deixa de ser o de simples "dizer" e passa a ser o de "questionar e ouvir".

- **Quanto à avaliação**. A mudança na visão de avaliação deve se voltar a um sistema baseado em evidências provenientes de fontes múltiplas, abandonando a confiança nos resultados de um teste único, e ao reconhecimento dos julgamentos profissionais dos professores, deixando para trás o uso exclusivo de evidências de origem externa.

Mencionamos esses tópicos para que nossa perspectiva de avaliação contemple conteúdos, aprendizagem e ensino. São necessárias profundas e frequentes discussões a respeito de avaliação que não podem ficar restritas a um momento, a uma forma ou apenas ao conteúdo.

4. Referências

Dividimos as referências em tópicos com o objetivo de facilitar possíveis e recomendáveis pesquisas. Algumas destas obras poderiam pertencer a mais de um tópico. São leituras que certamente remeterão o professor a outras referências. Além disso, nos *sites* de busca podemos conhecer outras obras. Diversos são os grupos em nosso país pesquisando o ensino e a aprendizagem da Matemática. Teses de doutorado e dissertações de mestrado também são encontradas facilmente.

Ainda que nosso trabalho como professor demande uma boa carga horária semanal, precisamos cada vez mais refletir sobre o que fazemos. Isso pode ser feito com a leitura crítica do que outras pessoas estão produzindo sobre avaliação em Matemática, história da Matemática e, de modo geral, ensino e aprendizagem da Matemática.

Boa leitura!

Avaliação

Embora neste manual já tenhamos abordado o assunto, a avaliação em Matemática precisa ser continuamente discutida e estudada. Elencamos a seguir algumas referências, incluindo a obra de Abrantes citada anteriormente, um trabalho interessantíssimo que gerou várias pesquisas.

ABRANTES, Paulo. *Avaliação e Educação Matemática.* Rio de Janeiro: MEM/USU-Gepem, [1995?]. (Reflexões em Educação Matemática). Disponível em: <www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Avalia%E7%E3o%20e%20EducaMatem%E1tica%20Paulo%20Abrantes.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2016.

BALLESTER, Margarida et al. *Avaliação como apoio à aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2003. (Inovação Pedagógica).

MORAES, Cesar Augusto do Prado. *Avaliação em Matemática*: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica. Jundiaí/SP: Pacto Editorial, 2012.

PERRENOUD, P. et al. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação. São Paulo: Artmed, 2002.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos (Coord./Org.). *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática:* métodos alternativos – Projeto Fundão. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática (UFRJ), 1997.

VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). *Avaliação em Matemática:* história e perspectivas atuais. Campinas/SP: Papirus, 2008.

Sugestão inicial: ***Avaliação em Matemática*****: história e perspectivas atuais**

Sinopse extraída do livro:

> O livro percorre o trajeto seguido pela avaliação escolar em Matemática no país desde os tempos do Brasil Império até os mais recentes exames promovidos por órgãos oficiais.
>
> Os resultados de pesquisas deste grupo de autores permitem ao leitor conhecer os processos e as modificações ao longo do tempo dos exames preparatórios – ritual de passagem que faz parte da história de nosso último século. A obra também faz uma reflexão sobre as práticas pedagógicas evidenciadas pelas provas de admissão no ensino secundário, desde a época de sua instituição até sua extinção na década de 1970. Além disso, traz uma análise das concepções docentes a respeito desse tema – causa de tanta controvérsia entre professores e alunos – e, finalmente, discute exames como Saeb, Enem, Provão e Sinaes, apontando novas perspectivas para a avaliação escolar em Matemática.

Formação do professor

A formação do professor passa, antes de qualquer coisa, por seu interesse em participar continuamente de discussões. Ela não pode ser resumida à leitura de uma ou outra obra, de um ou outro artigo. Precisa ser discutida. Sabemos da dificuldade, muitas vezes, da participação em encontros de discussão sobre nossa profissão, sobre a Matemática escolar, seu ensino e aprendizagem. Por isso, uma motivação para ampliações futuras de estudos pode estar nestas leituras:

ALMEIDA, Maria Isabel de. *O sindicato como instância formadora dos professores*: novas contribuições ao desenvolvimento profissional. Tese (Doutorado) – FE-USP. São Paulo, 1999.

CURY, Helena Noronha. *Formação de professores de Matemática*: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (Orgs.). *Formação de professores de Matemática*: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul/RS: IPR, 2012.

FIORENTINI, Dario (Org.). *Formação de professores de Matemática*: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas/SP: Mercado de Letras, 2003.

LIMA, Maria Socorro Lucena. *A formação contínua do professor nos caminhos e descaminhos do desenvolvimento profissional.* Tese (Doutorado) – FE-USP. São Paulo, 2001.

Sugestão inicial: ***Formação de professores de Matemática*****: explorando novos caminhos com outros olhares**

Sinopse extraída do livro:

> Os educadores matemáticos constituem um dos grupos profissionais que mais procuram se aventurar por novos caminhos e com outros olhares em relação à formação do professor, aos seus saberes e à sua prática docente.
>
> O leitor verá, nesta obra, que a tentativa de utilizar as tecnologias de informação e comunicação na formação de professores e no ensino de Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.
>
> As reflexões e estudos deste livro, produzidos sob a concepção da formação docente como um processo contínuo, sempre inconcluso e mediado por práticas reflexivas e investigativas, trazem subsídios teóricos e práticos à formação inicial do professor de Matemática e ao desenvolvimento de seu conhecimento profissional.

Próxima sugestão: ***Formação de professores de Matemática*****: reflexões e propostas**

Sinopse extraída do livro:

> Neste livro, docentes de cursos de formação de professores de Matemática, de instituições públicas e particulares, de várias regiões do Brasil, expõem suas práticas na docência e suas ideias sobre o que pode ser feito para modificar os currículos de Licenciatura em Matemática. A diversidade de disciplinas e de metodologias abordadas pode contribuir para o aprofundamento dos debates que já vêm sendo desenvolvidos, em documentos oficiais ou em fóruns de licenciaturas, sobre as reformulações curriculares nessa área.

História da Matemática

As obras abaixo listadas representam fontes de consulta. Não há necessidade de uma leitura ininterrupta. Assim, por exemplo, quando iniciamos determinado assunto, é interessante buscar nestas fontes algum texto que possa ser utilizado em sala de aula não apenas como apoio, mas também como forma de levar o aluno à compreensão da Matemática como uma ciência historicamente construída.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/ Edusp, 1996.

COLEÇÃO Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula. Vários autores. São Paulo: Atual, 1993.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas/SP: Editora da Unicamp, 2004.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre: Globo, 1958.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomos 1 e 2.

Sugestão de consulta: ***Introdução à história da Matemática***

Sinopse extraída do livro:

> Nesta obra clássica, Howard Eves narra a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos. Este livro é um verdadeiro curso de Matemática, detendo-se no exame de obras importantes – sem se limitar às pequenas histórias, notas biográficas e amenidades. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época abordada. Uma das obras mais completas da área da história da Matemática, pode ser utilizada por estudantes e professores tanto de Matemática quanto de História ou Educação.

Conhecimentos matemáticos

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1951.

COLEÇÃO do Professor de Matemática. Vários autores. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. 12 volumes.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DIEUDONNÉ, Jean. *A formação da Matemática contemporânea*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

HERSH, Reuben; DAVIS, Philip J. *A experiência matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006. 3 volumes. (Coleção do Professor de Matemática).

Sugestão de estudos: ***A experiência matemática***

Sinopse extraída do livro:

> Em quatro milênios, uma grande quantidade de material, conhecido como Matemática, evoluiu e tornou-se ligado, de várias maneiras, à nossa vida diária. Qual é a natureza da Matemática? Qual o seu significado? Quais as suas preocupações? Qual a sua metodologia? Como é criada e usada?
>
> Bem significativamente, foram feitas poucas tentativas por pesquisadores matemáticos para escrever sobre sua ciência de uma maneira interessante e compreensível pelo público em geral. Reconhecendo que sua própria fascinação com o significado e objetivo da Matemática é ainda mais forte do que sua fascinação com a produção real de Matemática, os autores oferecem uma viagem pessoal estimulante desta ciência e examinam o complexo de fatores que determina sua estrutura e aplicações.

Observação

Essa obra engloba conhecimentos matemáticos, além de história e filosofia da Matemática.

Outras leituras sobre a Matemática

As indicações a seguir representam leituras intrigantes e curiosas sobre conteúdos, emprego prático da Matemática e aspectos da história dessa ciência. A linguagem adotada pelos autores, algumas vezes, segue a dos romances de ficção. Alguns desses livros não são indicados apenas para nós, professores, mas também para nossos alunos.

ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

ATALAY, Bulent. *A Matemática e a* Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Mercuryo, 2007.

BARDI, Jason Socrates. *A guerra do cálculo*. Tradução de Aluizio Pestana da Costa. Rio de Janeiro: Record, 2008.

BELLOS, Alex. *Alex no País dos Números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática. Tradução de Berilo Vargas e Claudio Carina. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BENNETT, Deborah J. *Aleatoriedade*. Tradução de Waldéa Barcellos. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BERLINSKI, David. *O advento do algoritmo*: a ideia que governa o mundo. Tradução de Leila Ferreira de Souza Mendes. São Paulo: Globo, 2002.

BESSON, Jean-Louis (Org.). *A ilusão das estatísticas*. Tradução de Emir Sader. São Paulo: Editora Unesp, 1995.

DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Tradução de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

______. *O gene da Matemática*. Tradução de Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DEWDNEY, A. K. *20 000 léguas matemáticas*: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.

ELLENBERG, Jordan. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Tradução de George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

GARBI, Gilberto G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

GRANGER, Gilles Gaston. *O irracional*. Tradução de Álvaro Lorencini. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

KAPLAN, Robert. *O nada que existe*: uma história natural do zero. Tradução de Laura Neves. Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

LIVIO, Mario. *Razão áurea*: a história de fi, um número surpreendente. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2006.

MAOR, Eli. *e*: a história de um número. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MLODINOW, Leonard. *A janela de Euclides*: a história da Geometria – Das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução de Enézio de Almeida. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

Sugestão inicial: *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado

Sinopse extraída do livro:

> "Quando será que eu vou usar isso?" Essa é a clássica pergunta de nove entre dez alunos às voltas com cálculos, fórmulas e equações. Para muitos, de fato, a Matemática que aprendemos na escola é algo totalmente abstrato, muito distante do mundo prático e real. O matemático Jordan Ellenberg nos mostra, porém, que a Matemática está em todo lugar e se relaciona com questões do nosso cotidiano. Munidos dos instrumentos matemáticos adequados, podemos saber o verdadeiro significado de informações que antes considerávamos inquestionáveis.
>
> [...]
>
> Com rigor e irreverência, Ellenberg aborda os mais variados assuntos para explicar de modo simples e claro os conceitos mais complicados. Nada escapa desse amplo mosaico: o resultado das eleições presidenciais, o futuro da obesidade, a pintura renascentista italiana, o que o Facebook sabe (e o que ele não sabe) a seu respeito e até mesmo a existência de Deus.

Ensino e aprendizagem da Matemática

Acreditamos que estas referências também podem ser utilizadas para a formação do professor de Matemática. Indicamos obras de pesquisadores preocupados com o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, relacionadas à área denominada Educação Matemática. Em cada um destes livros outras obras são indicadas sobre assuntos diversos voltados a essa área de pesquisa

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Tendência em Educação Matemática).

BRITO, Márcia Regina Ferreira (Org.). *Solução de problemas e Matemática escolar*. Campinas/SP: Alínea, 2006.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação Matemática. São Paulo: Summus/Campinas/SP: Unicamp, 1986.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela (Orgs.). *Por trás da porta, que Matemática acontece?* Campinas/SP: FE-Unicamp/Cempem, 2003.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis (Org.). *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.

FOSSA, John A. (Org.). *Facetas do diamante*: ensaios sobre Educação Matemática e história da Matemática. Rio Claro/SP: Editora da SBHMat, 2000.

GIARDINETTO, José R. Boettger. Matemática escolar e Matemática da vida cotidiana. Campinas/SP: Autores Associados, 1999. (Polêmicas do Nosso Tempo).

MATOS, José Manuel; SERRAZINA, Maria de Lurdes. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).

Sugestão inicial: *Investigações matemáticas na sala de aula*

Sinopse extraída do livro:

> No Dicionário Aurélio, investigar significa: fazer diligências para achar, pesquisar, indagar, inquirir, examinar com atenção, esquadrinhar. É o que trata este livro, onde os autores, todos portugueses, abordam as investigações matemáticas e sua importância no ensino e no aprendizado de professores e alunos.
>
> Diversos estudos em educação mostram que investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento, e em numerosas experiências já empreendidas com o trabalho investigativo os alunos têm mostrado um grande entusiasmo pela Matemática. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar com problemas difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

Sites recomendados

Indicamos a seguir alguns endereços eletrônicos que podem ser utilizados pelos professores em sua formação continuada, no estudo da área de Educação Matemática, para verificar as pesquisas voltadas à história da Matemática e as reflexões sobre conteúdos e procedimentos.

<www.mathema.com.br>: diversas sugestões e reflexões envolvendo o ensino da Matemática.

<www.obmep.org.br>: provas resolvidas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

<www.obm.org.br>: provas resolvidas da Olimpíada Brasileira de Matemática.

<www.edumatec.mat.ufrgs.br>: atividades com uso de tecnologias de informática.

<www.sbem.org.br>: acesso a grupos de trabalhos e pesquisas, e calendário sobre eventos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem).

<www.cabri.com: acesso a uma comunidade virtual sobre a utilização do Cabri na Geometria.

<www.sbembrasil.org.br>: acesso à Educação Matemática em Revista.

<www.rbhm.org.br>: acesso à Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM).

<http://revistas.pucsp.br/emp>: acesso à Educação Matemática Pesquisa – Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Acessos em: 19 mai. 2016.

5. Uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem

O professor Ubiratan D'Ambrosio é conhecido por sua intensa dedicação às questões voltadas ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Alguns de seus artigos falam sobre a questão da formação do professor. No artigo "Formação de professores: o comentarista crítico e o animador cultural" (procure acessar), ele escreveu:

> O professor do futuro será valorizado pela sua ação como animador cultural e comentarista crítico.
>
> O professor que vê sua missão como ensinador de um conteúdo disciplinar tem seus dias contados e rapidamente será substituído por um vídeo ou um CD-ROM ou alguma nova peça de tecnologia ainda em desenvolvimento.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Formação de professores: o comentarista crítico e o animador cultural. Disponível em: <https:/sites.google.com/site/etnomath/14>. Acesso em: 16 fev. 2016.

Nesse mesmo artigo, Ubiratan D'Ambrosio faz uma extensa e importante reflexão sobre a formação do professor. Já no início, podemos encontrar um pequeno texto escrito por Helen Buckley, que reproduzimos como um ponto de partida para aqueles que querem refletir mais sobre nossa profissão:

> Era uma vez um menino bastante pequeno que contrastava com a escola bastante grande. Uma manhã, a professora disse:
>
> – Hoje nós iremos fazer um desenho.
>
> "Que bom!", pensou o menininho. Ele gostava de desenhar leões, tigres, galinhas, vacas, trens e barcos...
>
> Pegou a sua caixa de lápis de cor e começou a desenhar. A professora então disse:
>
> – Esperem, ainda não é hora de começar! – Ela esperou até que todos estivessem prontos.
>
> – Agora – disse a professora – nós iremos desenhar flores.
>
> E o menininho começou a desenhar bonitas flores com seus lápis rosa, laranja e azul. A professora disse:
>
> – Esperem! Vou mostrar como fazer. – E a flor era vermelha com caule verde. – Assim – disse a professora – agora vocês podem começar.
>
> O menininho olhou para a flor da professora, então olhou para a sua flor. Gostou mais da sua flor, mas não podia dizer isso... virou o papel e desenhou uma flor igual à da professora. Era vermelha com caule verde.
>
> Num outro dia, quando o menininho estava em aula ao ar livre, a professora disse:
>
> – Hoje nós iremos fazer alguma coisa com o barro.
>
> "Que bom!", pensou o menininho.
>
> Ele gostava de trabalhar com barro. Podia fazer com ele todos os tipos de coisas: elefantes, camundongos, carros e caminhões. Começou a juntar e amassar a sua bola de barro.
>
> Então, a professora disse:
>
> – Esperem! Não é hora de começar! – Ela esperou até que todos estivessem prontos. – Agora – disse a professora – nós iremos fazer um prato.
>
> "Que bom!", pensou o menininho. Ele gostava de fazer pratos de todas as formas e tamanhos.
>
> A professora disse:
>
> – Esperem! Vou mostrar como se faz. Assim, agora vocês podem começar.

E o prato era um prato fundo. O menininho olhou para o prato da professora, olhou para o próprio prato e gostou mais do seu, mas ele não podia dizer isso. Amassou seu barro numa grande bola novamente e fez um prato fundo, igual ao da professora.

E muito cedo o menininho aprendeu a esperar e a olhar e a fazer as coisas exatamente como a professora. E muito cedo ele não fazia mais coisas por si próprio. Então aconteceu que o menininho teve que mudar de escola. Essa escola era ainda maior que a primeira.

Um dia a professora disse:

– Hoje nós vamos fazer um desenho.

"Que bom!", pensou o menininho e esperou que a professora dissesse o que fazer. Ela não disse. Apenas andava pela sala.

Então veio até o menininho e disse:

– Você não quer desenhar?

– Sim, e o que é que nós vamos fazer?

– Eu não sei, até que você o faça.

– Como eu posso fazê-lo?

– Da maneira que você gostar.

– E de que cor?

– Se todo mundo fizer o mesmo desenho e usar as mesmas cores, como eu posso saber o desenho de cada um?

– Eu não sei... – E então, o menininho começou a desenhar uma flor vermelha com caule verde...

In:D'AMBROSIO, Ubiratan. Formação de professores: o comentarista crítico e o animador cultural. Disponível em: <https:/sites.google.com/site/etnomath/14>. Acesso em: 16 fev. 2016.

Boas reflexões diante dessa atividade humana cuja grande finalidade é formar um cidadão com **autonomia**.

Suryara Bernardi

Parte Específica – volume 2

Abordaremos aqui os conteúdos que compõem o Volume 2 desta coleção de Matemática para o Ensino Médio, descrevendo como estão articulados os capítulos na unidade, as seções e também como compreendemos as possibilidades de encaminhamento de seus conteúdos. Algumas vezes, falaremos dos objetivos a serem conquistados nessa proposta; outras, faremos observações de caráter prático, apontando sugestões e alertando para cuidados a serem tomados quando de certos desenvolvimentos teóricos.

Unidade 1 – Matemática Financeira

Capítulos	Principais objetivos
1. Proporção e porcentagem	Resolver situações-problema relacionadas ao cálculo com proporções e porcentagem.
2. Juro simples	Compreender o cálculo de juro simples e a determinação de montante gerado por aplicação financeira nessa modalidade.
3. Juros compostos	Estabelecer a fórmula do cálculo do montante gerado por uma aplicação financeira na modalidade de juros compostos.

Não é objeto aqui fazer um estudo completo a respeito de Matemática Financeira, mas levar aos alunos algumas ideias básicas que permitirão que eles conheçam um pouco mais a respeito de porcentagem, de juro simples e também de juros compostos. Se os conceitos correspondentes forem bem assimilados, o aluno poderá tomar decisões nas situações mais comuns do dia a dia que se referirem a questões financeiras sobre compra ou venda. Além disso, o estudo aqui proposto permite também que o aluno estabeleça algumas conexões com assuntos estudados no livro anterior, como função afim e progressão geométrica.

Sabemos que medidas tomadas por um governo num país distante do nosso acabam, de alguma forma, afetando nossa economia. Sendo assim, neste estágio da escolarização, é desejável que os alunos tenham algum conhecimento sobre Matemática Financeira. Alguns artigos de jornal ou revista que abordem questões econômicas podem ser trazidos para a sala de aula. A leitura desses artigos, seguida de pequenas discussões em classe, representa uma forma de envolvê-los em aspectos relevantes da Matemática Financeira.

Esse é um procedimento que não precisa estar relacionado apenas com o tempo do desenvolvimento desta unidade, podendo ser feito, por exemplo, uma ou duas vezes a cada final de mês.

Capítulo 1 – Proporção e porcentagem

Os assuntos Proporção e Porcentagem são trabalhados nos últimos quatro anos do Ensino Fundamental. No 1º ano desta coleção, trabalhamos com proporção ao abordar semelhança de figuras planas. O capítulo está dividido em três tópicos. No primeiro, iniciamos com uma situação de escalas de temperaturas. Como podemos converter uma temperatura apresentada em Celsius para a escala Fahrenheit? Normalmente, apenas a fórmula é apresentada ao aluno. Entendemos que essa fórmula pode ser obtida por meio de uma proporção entre as "diferenças" de temperaturas, colocando lado a lado dois termômetros (um em cada escala), como sugerimos numa ilustração. Esse é um contexto que permite um trabalho interdisciplinar com Física.

Logo após essa situação, retomamos algumas ideias a respeito de proporção. Os exemplos apresentados devem ser devidamente discutidos com a turma. São divisões de valores em partes direta e inversamente proporcionais. Nesse último caso, há um exemplo hipotético de divisão de lucros numa sociedade, conforme as quantias investidas pelos sócios individualmente.

No segundo tópico, procedemos com uma rápida retomada do cálculo de porcentagem. Espera-se que os alunos não apresentem quaisquer dificuldades, entretanto devem ser incentivados no enfrentamento das situações e exemplos propostos, pois tal assunto é extremamente prático e utilizado no cotidiano.

No terceiro tópico, a exigência será maior, mas representa algo prático, que acaba envolvendo mais os alunos. Procuramos aqui conduzir situações referentes a aumentos e a descontos. Consideramos importante dedicar um pouco mais de tempo discutindo com os alunos os exemplos propostos.

Observações e sugestões:

- Na disciplina de Física, há uma preocupação muito grande, em diversos momentos, de relacionar grandezas que são dependentes e algumas diretamente proporcionais e outras inversamente proporcionais. Deve-se deixar bem claro ao aluno que duas grandezas são consideradas diretamente proporcionais quando o quociente de valores correspondentes for constante. Se o produto de valores correspondentes for constante, as grandezas são ditas inversamente proporcionais. Deve-se, entretanto, alertar o aluno de que existem grandezas que não são nem diretamente e muito menos inversamente proporcionais.
- Assim, pode-se pedir aos alunos que busquem exemplos da Física que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou grandezas inversamente proporcionais. Os exemplos podem ser compartilhados, conforme resultado da busca dos alunos, com a turma toda.
- Por meio de exemplos simples, comente com os alunos que, quando precisarem calcular mentalmente certos percentuais, saibam inicialmente quanto é 1% e depois façam multiplicações correspondentes. Se precisamos calcular, por exemplo, 4% de determinado valor, obtemos 1% dividindo o valor por 100 e, então, multiplicamos o resultado por 4.

Questões e reflexões

Página 10

1. Basta substituir F por 75 na proporção apresentada no livro do aluno para obter o valor aproximado de 23,89 °C.

2. Basta substituir C por 25 na proporção apresentada no livro do aluno para obter o valor de 77 °F.

Como as duas temperaturas terão o mesmo valor, substituímos F por C (ou C por F) na proporção estabelecida, obtendo o valor –40 nas duas escalas.

Explorando

Página 12

Entendemos que a questão envolvendo escalas de temperaturas, no início do capítulo, deve ser explorada de maneira a permitir que os próprios alunos compreendam que podem elaborar escalas. Assim como existe a relação entre temperaturas nas escalas Celsius e Fahrenheit, também há entre as escalas Celsius e Kelvin. Portanto, temos duas atividades exploratórias.

1. Os alunos deverão obter a relação que permite converter temperatura da escala Celsius para a escala Kelvin e vice-versa. Nessa atividade, a resposta esperada é a relação matemática:

$$\frac{C - 0}{100 - 0} = \frac{K - 273}{373 - 273}$$

2. Nesta atividade, os alunos deverão inventar uma escala. A resposta dependerá dos valores que eles atribuirão às temperaturas correspondentes ao zero e ao 100 da escala Celsius.

Capítulo 2 – Juro simples

O capítulo sobre juro simples, além de ser de fácil compreensão, permite um trabalho mais rápido do que os outros dois que compõem a presente unidade. Entendemos que a relação que permite obter o juro simples aplicado a um capital após algum tempo deva ser explicada aos alunos conforme fizemos neste capítulo. Da mesma forma, o cálculo do montante.

Procuramos estabelecer relações entre assuntos diferentes: ao calcular os montantes obtidos por uma aplicação financeira na modalidade de juro simples ao longo de alguns períodos iguais e consecutivos de aplicação, obtemos valores que formam uma progressão aritmética. Essas conexões entre assuntos diversos contribuem não somente para o estabelecimento das relações existentes, como também ampliam o conhecimento de cada assunto individualmente.

Assim, os alunos constatam que, por meio da fórmula do termo geral da progressão aritmética, podem obter os montantes. A razão dessa progressão aritmética é o valor dos juros em cada período de aplicação. Outra conexão importante é relacionar juro simples com função afim. Por meio de um exemplo, mostramos que juro simples ao longo de períodos consecutivos pode ser obtido por meio de função afim. Analogamente, temos os montantes sendo determinados também por função afim.

Observações e sugestões:

- Devemos ter o cuidado, ao falar de juros, de alertar os alunos de que tanto a taxa quanto o tempo de aplicação devem se referir à mesma unidade de tempo. Assim, se falamos de uma taxa de 2%, precisamos deixar claro se é 2% ao mês, 2% ao ano, e assim por diante.
- Consideramos importante evidenciar aos alunos que a modalidade juro simples, numa transação financeira, é muito rara de ser utilizada. O comum é o emprego dos chamados juros compostos (juro sobre juro), conforme abordado no próximo capítulo.
- Outro cuidado: ao relacionarmos função afim com juro simples, é importante alertar os alunos de que nos exemplos dados os gráficos não são retas, mas pontos alinhados (lembre-se de que o domínio não é o conjunto dos números reais, por isso o gráfico não é uma reta).
- Uma atividade de pesquisa pode ser encaminhada: buscar exemplos da utilização de juro simples. Outra seria propor aos alunos que simulem uma situação de empréstimo estabelecendo a quantia a ser emprestada, o tempo de empréstimo e também a taxa de empréstimo. Assim, poderiam obter uma planilha contendo os montantes ao longo dos meses, conforme prazo estabelecido.

Questões e reflexões

Página 20

1. Resposta pessoal. Progressão aritmética é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o seu antecessor adicionado a uma constante.

2. A razão da progressão aritmética é igual a 7. Sugira aos alunos que atribuam os valores 1 e 2 para *n*, obtendo os dois primeiros termos da sequência. Assim, o segundo termo menos o primeiro é a razão da sequência.

Capítulo 3 – juros compostos

Neste capítulo, é necessário dedicar um pouco mais de tempo para sua conclusão. Ao final do Ensino Médio, diversos dos nossos alunos ingressam no mercado de trabalho. Questões relacionadas ao cálculo de inflação, de aplicações financeiras começam a fazer parte de seu cotidiano. Assim, o capítulo aborda um assunto muito próximo às necessidades do aluno. Entendemos que, durante o desenvolvimento do capítulo, a calculadora deva ser utilizada. Além de facilitar os cálculos propostos, ela representa um instrumento que os alunos utilizarão cada vez mais.

O assunto Progressão geométrica representa aqui uma importante conexão. Por isso, ao iniciarmos o capítulo, propomos uma situação sobre um empréstimo de R$ 50.000,00 na modalidade de juros compostos (juro sobre juro). Apresentamos os montantes ao final de cinco meses (solicite aos alunos que observem esses valores e, com o auxílio de calculadora, verifiquem se estão corretos). Esses montantes formam uma progressão geométrica de razão 1,02.

Se a situação apresentada for devidamente esclarecida, podemos conduzir os alunos à compreensão (e à dedução) da relação matemática que permite calcular o montante M gerado pela aplicação de um capital **C**, na modalidade de juros compostos, a uma taxa fixa mensal i ao longo de t meses de aplicação, isto é, $M_n = C \cdot (1 + i)^t$.

Nas explicações dadas, utilizamos a unidade de tempo meses, por ser mais comum. É importante comentar com os alunos que essa mesma relação é válida se considerarmos tanto a taxa quanto o período de aplicação em outra unidade de tempo (desde que a taxa e o período se refiram à mesma unidade).

Observações e sugestões:

- Uma ideia para iniciar o presente capítulo seria proceder com uma retomada do assunto Progressão geométrica, principalmente no que diz respeito à definição dessa sequência, à obtenção da fórmula do termo geral e à apresentação de alguns exemplos (ver Volume 1 desta coleção).

- Pode-se, como parte da avaliação, sugerir aos alunos que elaborem exemplos de aplicação de juros compostos. Esses exemplos podem estar relacionados a empréstimos, transações financeiras etc.

- Após a leitura do texto da História da Matemática, presente no capítulo, incentive os alunos a obter valores cada vez mais próximos para o número irracional utilizando a calculadora. Isso pode ser feito a partir da expressão $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ atribuindo-se valores cada vez maiores para x. Como exemplo, temos:

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \cong 2{,}5937425$$

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \cong 2{,}7048138$$

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \cong 2{,}7169239$$

- Ao abordar o tópico "Progressão Geométrica e Logaritmos" é importante dedicar um pouco da aula para falar da definição de logaritmo e também das propriedades operatórias estudadas no volume 1 desta coleção, isto é:

$$\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

$$\log_a A^n = n - \log_a A$$

Questões e reflexões

Página 26

1. Resposta pessoal. Progressão geométrica é uma sequência de termos não nulos em que, a partir do segundo, cada termo é o antecessor multiplicado por uma constante.

2. A razão da sequência é igual a 2.

Página 26

1. Possíveis explicações:

(I) Aplicamos logaritmos aos dois membros da igualdade.

(II) Utilizamos a propriedade: $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$.

(III) Utilizamos a propriedade: $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$.

(IV) Deixamos o termo que contém a incógnita n no segundo membro da igualdade.

(V) Isolamos no segundo membro dessa igualdade a incógnita n.

2. Aplicando logaritmo na base e nos dois membros da igualdade, isto é:

$$M = C(1+i)^n$$
$$\log_e M = \log_e\left[C(1+i)^n\right]$$
$$\log_e M = \log_e C + \log_e (1+i)^n$$
$$\log_e M - \log_e C = n \cdot \log_e (1+i)$$
$$\frac{\log_e M - \log_e C}{\log_e (1+i)} = n$$

Textos na Matemática

Página 25

Sugestão de encaminhamento:

Leitura em duplas, com discussões das respostas para as questões apresentadas ao final do texto.

O texto aborda o contexto do surgimento do número $e = 2{,}718...$ a partir de ideias referentes ao cálculo de juros compostos. Ao longo do Ensino Médio, a utilização desse número irracional fica restrita ao cálculo de logaritmos com a base "e", mas, no Ensino Superior, seu emprego é muito amplo. Na disciplina de Química, existem situações envolvendo radioatividade que empregam, de alguma forma, esse número. Nesse sentido, recomendamos ao professor de Matemática que troque algumas ideias com o professor de Química sobre a possibilidade de encaminhar algumas atividades evidenciando sua utilização.

Respostas

1. A constante matemática $e = 2{,}718281 ...$ aparece na segunda edição da obra/trabalho *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*.

2. Napier ficou conhecido em toda a Escócia pela invenção de máquinas destinadas à guerra. Eram engenhos utilizados para arremessar bolas de ferro a certas distâncias e com precisões excelentes para a época. Isso parece ter sido motivo de arrependimento, pois estava dando a seus patrícios o poder de destruição.

3. Napier tornou-se internacionalmente famoso como matemático no ano de 1590, pela descoberta dos logaritmos.

Explorando habilidades e competências

Sugestão de encaminhamento:

A leitura do texto e a elaboração das respostas para as questões encaminhadas podem ser feitas em duplas, para reforçar a troca de informações entre os alunos.

Respostas das questões encaminhadas

1. 1% e 5%

2. Após 9 períodos (ou seja, em 5 de dezembro), o valor devido será de R$ 1.551,33. Pagando R$1.000,00, a dívida cai para R$ 551,33. Aplicando a esse capital juros compostos de 5% em um período $t = 3$, temos $M = 551{,}33 \cdot (1{,}05)^3 =$ R$ 638,23.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal. Uma possível fonte:

<www.infomoney.com.br/educacao/guias/noticia/525726/como-bancos-determinam-taxa-juro-emprestimo>. Acesso em: 22 maio 2016.

5. Situação A:

Após 1 mês, ela tem R$ 2.000,00 e deve R$ 1.050,00. Pagando esse valor, restam R$ 950,00 para a aplicação. Após mais dois meses, esses R$ 950,00 serão R$ 969,09.

Situação B:

Após 1 mês, ela tem R$ 2.000,00 e deve R$ 1.050,00. Após mais dois meses, os R$ 2.000,00 serão R$ 2.040,20 e os R$ 1.050,00 serão R$ 1.157,62. Pagando a dívida, a pessoa ficará com R$ 882,58.

Situação C:

Após 1 mês, ela tem R$ 2.000,00 e deve R$ 1.050,00. Pagando metade desse valor (R$ 525,00), restam R$ 1.475,00 para a aplicação. Após mais 1 mês, a dívida de R$ 525,00 será de R$ 551,25 e o valor aplicado terá atingido R$ 1.489,75. Quitando a dívida, restarão R$ 938,50 que, após o último mês, terão atingido R$ 947,88.

(A melhor opção é a A.)

Unidade 2 – Trigonometria

Capítulos	Principais objetivos
4. Trigonometria na circunferência	Identificar medidas de arcos na circunferência trigonométrica, observando as unidades graus e radianos; compreender as razões seno e cosseno de uma arco qualquer na circunferência trigonométrica; utilizar as funções trigonométricas seno e cosseno para compreensão de fenômenos periódicos.
5. Relações trigonométricas	Obter, a partir das razões seno e cosseno, as relações trigonométricas tangente, cotangente, secante e cossecante para um mesmo arco na circunferência trigonométrica.
6. Transformações trigonométricas	Resolver situações relacionadas às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente da adição, da subtração e da duplicação de arcos.

O primeiro contato que os alunos têm com Trigonometria, normalmente antes de ingressar no Ensino Médio, está ligado ao estudo de métodos para resolução de triângulos, isto é, para o cálculo de distâncias inacessíveis. Nesta coleção, fizemos esse estudo no primeiro volume. A ampliação que é feita em relação a esse estudo passa para a Trigonometria da chamada circunferência trigonométrica, onde são definidas as razões seno e cosseno. A partir daí, chega-se talvez à parte principal, em que as funções trigonométricas são objetos de estudo.

Capítulo 4 – Trigonometria na circunferência

A Trigonometria na circunferência trigonométrica amplia o que é estudado no triângulo retângulo. Já no início do capítulo, deve-se esclarecer que, ao considerarmos uma circunferência de raio unitário, com o centro coincidindo com a origem do plano cartesiano, as coordenadas de qualquer ponto pertencente a essa circunferência são dadas a partir de valores de cosseno e seno. Para que essa ideia seja devidamente compreendida, é importante ligar com o que foi estudado na Trigonometria no triângulo retângulo (daí o triângulo retângulo destacado, em que a hipotenusa tem medida unitária e os catetos têm suas medidas representadas pelos valores de seno e cosseno do ângulo com vértice no centro da circunferência). É importante comentar com os alunos que o procedimento de relacionar as coordenadas dos pontos de uma circunferência de raio unitário, cujo centro é na origem do sistema de coordenadas cartesianas, com o seno e o cosseno dos respectivos ângulos, permitirá, como veremos mais adiante, estudar as razões trigonométricas com funções trigonométricas.

A unidade de medida radiano é então apresentada como relacionada à medida do comprimento do arco correspondente, isto é, "um arco de medida 1 radiano (1 rad) corresponde a um arco cujo comprimento retificado é igual ao raio da circunferência que o contém".

A ênfase que julgamos ser dada ao capítulo é o estudo das funções seno e cosseno. A ideia é valorizar um pouco mais as características dos gráficos dessas funções, pois elas são utilizadas na descrição de certos fenômenos periódicos (exemplo: movimento harmônico simples). Aqui, podem-se também desenvolver atividades em parceria com a disciplina de Física; atividades que envolvam, de alguma maneira, as funções trigonométricas. É importante que o professor de Física descreva algum fenômeno periódico relacionado às funções trigonométricas. O estabelecimento dos valores extremos (máximo ou mínimo) assumidos em fenômenos periódicos auxilia o aluno a compreender o significado de conjunto imagem de uma função trigonométrica. Além disso, o intervalo de repetição desses movimentos está ligado diretamente ao período da função trigonométrica que é empregada para descrevê-lo.

Após a devida compreensão das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \cos x$, são observadas algumas características importantes dessas funções, como período, domínio, imagem, paridade, variação e sinal nos quadrantes. Já no final do capítulo, ampliamos o estudo dessas funções comentando que existem fenômenos que podem ser descritos por meio de funções da forma $f(x)= = a + b \cdot \text{sen}(mx + n)$ ou $f(x) = a + b \cdot \cos(mx + n)$. É importante aqui chamar a atenção dos alunos sobre os significados dos números reais a, b, m e n quanto aos gráficos dessas funções, principalmente em relação ao valor de m, que está relacionado ao período de repetição da curva correspondente, quando representada no plano cartesiano.

Observações e sugestões:

- O radiano pode ser compreendido como uma constante de proporcionalidade: o quociente entre o comprimento de um arco e a medida do raio da correspondente circunferência (na mesma unidade) equivale ao valor numérico do arco correspondente em radianos.
- Um cuidado a ser tomado: os alunos confundem medida de arco com comprimento de arco. Quando falamos de um arco de medida 30°, devemos enfatizar que marcamos na circunferência um arco que corresponde a um ângulo central de 30°. Se quisermos calcular seu comprimento, dizemos comprimento do arco de 30°.
- Uma atividade de avaliação (ou como parte da avaliação) pode ser sugerir aos alunos que investiguem exemplos de aplicações das funções seno e cosseno (talvez a turma possa ser dividida em equipes); então, cada equipe apresenta para a turma o resultado da pesquisa.
- A construção dos gráficos das funções seno e cosseno, como apresentada no livro do aluno, permite um trabalho interessante com os alunos. Em duplas e utilizando papel quadriculado (o melhor seria milimetrado), esses gráficos podem ser construídos pelos alunos. Sugerimos que, para determinar as razões seno e cosseno, os alunos utilizem calculadoras.

Questões e reflexões

Página 40

1. Duplica também.

2. Sim.

Página 49

1. Varia de -1 até 1.

2. O valor do seno aumenta.

3. No 2º quadrante e no 3º quadrante.

4. Positivo no 1º quadrante e no 2º quadrante; negativo no 3º quadrante e no 4º quadrante.

Página 51

1. Varia de -1 até 1.

2. O valor do cosseno diminui.

3. No 3º quadrante e no 4º quadrante.

4. Positivo no 1º quadrante e no 4º quadrante; negativo no 2º quadrante e no 3º quadrante.

Página 57

1. Sim.

2. Sim.

3. Deslocando o gráfico da função *f* três unidades para cima.

Página 58

1. Sim.

2. Não.

3. Não. O conjunto imagem da função *f* é o intervalo [−1, 1], e o da função *g* é o intervalo [−2, 2].

História da Matemática

Página 46

Sugestão de encaminhamento:

Leitura em dupla, com discussão coletiva para as questões propostas ao final do texto.

O texto refere-se à História da Matemática, particularmente à ideia que teria levado à criação da unidade grau para medida de ângulo.

Respostas às questões propostas:

1. Interessaram-se pela Astronomia por si mesma, pela sua relação com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as estações e a época do plantio.

2. Ptolomeu usava uma aritmética decimal não posicional para os inteiros e não usava as frações sexagesimais dos babilônicos para medir o tempo.

Explorando

Página 58

Sugestão de encaminamento:

Em pequenos grupos, com a utilização da ferramenta Winplot.

Entendemos que a atividade sugerida deva fazer parte da avaliação. A utilização da ferramenta Winplot permitirá ao aluno observar comportamentos gráficos das funções trigonométricas no computador, percebendo suas características, como imagem e periodicidade. As respostas para essas atividades deverão ser amplamente discutidas com a turma.

A seguir estão algumas sugestões de respostas esperadas para as cinco atividades sugeridas.

Página 65

1. a) Há uma diferença entre eles no deslocamento na horizontal de $\frac{\pi}{3}$ unidades.

b) É o gráfico que pode ser obtido a partir do gráfico da função *f* deslocando-o $\frac{\pi}{3}$ unidades para a esquerda.

c) Têm o mesmo conjunto imagem; têm o mesmo período.

2. a) Têm o mesmo conjunto imagem; não têm o mesmo período.

b) Não.

3. a) Têm o mesmo período; Não têm o mesmo conjunto imagem.

b) Para os valores de *x* que anulam essas funções.

4. a) É o gráfico que pode ser obtido a partir do gráfico da função *f* deslocando-o 3 unidades para baixo.

b) Têm o mesmo período; não têm o mesmo conjunto imagem.

5. a) Basta "rebater" simetricamente o gráfico da função *f* em torno do eixo *x*.

b) Basta "rebater" simetricamente o gráfico da função *f* em torno do eixo *x*.

Capítulo 5 – Relações trigonométricas

O conteúdo deste capítulo pode ser dividido em três partes. Na primeira delas, procuramos levar o aluno a observar o significado de tangente de um arco na circunferência trigonométrica e relacioná-la com seno e cosseno desse mesmo arco. Assim como foi feito com seno e cosseno, aqui também observamos a tangente assumindo valores diferentes ao longo de uma volta completa na circunferência.

Na segunda parte do capítulo, procuramos apresentar cotangente, cossecante e secante de um arco na circunferência trigonométrica. Essas relações são obtidas por meio de semelhança entre triângulos retângulos. Utilizando o teorema de Pitágoras para triângulo retângulo, obtemos a chamada "relação fundamental", isto é: $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$. Os exemplos apresentados após a obtenção dessas relações devem ser discutidos com a turma, pois evidenciam como podemos calcular as razões trigonométricas a partir de algumas informações. Num desses exemplos, apresentamos a dedução de duas relações trigonométricas decorrentes das anteriores.

Na terceira parte do capítulo, propomos o estudo de equações trigonométricas. Destacamos aqui algumas generalizações de arcos que são utilizadas para apresentar soluções de equações. O assunto não deve ser valorizado em demasia. Para que os alunos compreendam o que representam certas generalizações, é importante que sejam conduzidos a atribuir valores para o número inteiro k que aparece nas relações que representam arcos genéricos.

Observações e sugestões:

- O estudo das relações trigonométricas presentes neste capítulo deve ser conduzido a partir de exemplos numéricos e também com discussões das demonstrações presentes. Não podemos resumir esse estudo à apresentação de fórmulas sem discussões ou justificativas e exercícios a serem feitos.
- Os sinais nos quadrantes das razões trigonométricas tangente, cotangente, secante e cossecante podem ser obtidos a partir dos sinais correspondentes de seno e cosseno, conforme relações obtidas.

Questões e reflexões

Página 64

1. Aumentando-se as medidas dos arcos no 3º quadrante o valor da tangente aumenta.

2. Sim

3. A tangente também aumenta.

Capítulo 6 – Transformações trigonométricas

As fórmulas para a adição e subtração de arcos são tradicionalmente apresentadas aos alunos sem que haja qualquer explicação sobre como chegar a elas. Procuramos aqui, mesmo que possa representar um trabalho a mais, justificar tais relações. Uma forma de começar a fazer isso é utilizar a distância entre dois pontos situados num plano cartesiano, conhecidas as suas coordenadas, conforme apresentamos no Volume 1 desta coleção, quando fizemos uma introdução à Geometria Analítica, no estudo de funções. Depois, marcamos na circunferência trigonométrica dois pontos, P e Q, correspondentes às extremidades de dois arcos (arco AP e arco AQ). Utilizando a relação que permite obter a distância entre dois pontos, chegamos à relação trigonométrica $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen}\, \alpha \text{sen}\, \beta$. É dessa relação que encaminhamos no livro do aluno o procedimento para obter as demais relações trigonométricas para seno, cosseno e tangente da adição e também da subtração de arcos.

A seguir, neste capítulo, obtemos as relações seno, cosseno e tangente do dobro de um arco. Essas relações devem ser explicadas para os alunos a partir das relações trigonométricas para a adição de dois arcos obtidas anteriormente. Por exemplo: o seno do dobro de um arco de medida x pode ser obtido da relação que permite calcular o seno da adição de dois arcos. Para tanto, fazemos esses dois arcos serem iguais a x. A mesma observação vale para o cosseno e a tangente do dobro de um arco de medida x.

Observações e sugestões:

- Sugerimos aos alunos que elaborem um quadro com as relações trigonométricas para a adição e a subtração de arcos. Isso permitirá observar semelhanças e diferenças entre as relações demonstradas, isto é:

$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$\text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg}\alpha + \text{tg}\beta / 1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta$

$\text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg}\alpha - \text{tg}\beta / 1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta$

Como sugerimos que as fórmulas presentes neste capítulo sejam demonstradas, é preciso destinar um tempo maior para o desenvolvimento adequado dos assuntos aqui presentes.

- Caso as relações trigonométricas presentes no capítulo sejam devidamente demonstradas, como sugerimos, podem-se conduzir atividades como parte da avaliação fornecendo algumas fórmulas para os alunos.
- Outras atividades também podem ser realizadas com o auxílio da calculadora. Uma ideia seria retomar a lei dos senos e a lei dos cossenos envolvendo arcos, tais como 75º (30º + 45º).
- Oriente os alunos a fazerem a circunferência trigonométrica e a marcarem nela dois arcos opostos. Assim, poderão observar diretamente que os senos são opostos e os cossenos são iguais, isto é

  $\cos(-x) = \cos x$ e $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x$.

Explorando habilidades e competências

Página 82

Sugestão de encaminhamento:

Em pequenos grupos, para a leitura e discussão das questões propostas. Sugerimos que essa atividade faça parte da avaliação desta unidade.

Respostas para as questões sugeridas

1. Respostas pessoais, que dependem da pesquisa feita. Sugestão de resposta:

A construção do Grande Colisor de Hádrons (em inglês: Large Hadron Collider – LHC) iniciou-se em 1998, envolvendo a colaboração de mais de 100 países. É um túnel de 27 km de circunferência, com custo aproximado de 7,5 bilhões de euros em 2010. Em 20 de março de 2010 ocorreu a primeira colisão entre prótons.

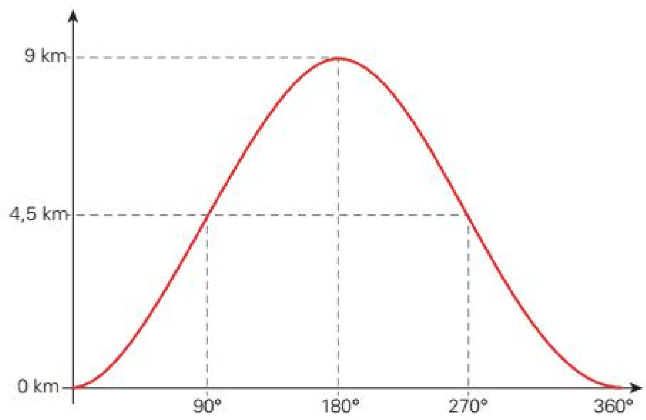
2. $\text{Raio} = \dfrac{\text{perímetro}}{2\pi}$

$\text{Raio} \cong \dfrac{27\,km}{2 \cdot 3} \Rightarrow \text{Raio} \cong 4{,}5\text{ km}$

3.

- $D^2 = 4{,}5^2 + 4{,}5^2 - 2 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot \cos x$
- $D^2 = 20{,}25 + 20{,}25 - 2 \cdot 20{,}25 \cdot \cos x$
- $D^2 = 40{,}5 - 40{,}5 \cdot \cos x$
- $D^2 = 40{,}5\,(1 - \cos x)$
- $D = \sqrt{40{,}5}\,(1 - \cos x)$

4. No início do movimento, a distância em km será 0; após 90°, será do tamanho do raio (4,5 km); e, após 180°, será do tamanho do diâmetro (9 km). Então começará a diminuir. O gráfico ficará assim:



Figuras: © DAE

5. A função seno comum tem 2 unidades de amplitude. Para que fique com 9 unidades, é preciso multiplicar a função por 4,5. Além disso, para que a reta média não esteja no 0 e sim na abscissa 4,5, é preciso somar 4,5 à função.

Para terminar, a função seno tem abscissa média quando a ordenada é zero. Nesse ponto, a resposta passa a ser múltipla. Para que essa ordenada tenha abscissa mínima, é preciso deslocar a função 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ rad) para a direita ou 270° para a esquerda, ou ainda outros valores múltiplos de 360° somados a esses dois. Assim, a função que buscamos é dada por:

$f(x) = 4{,}5 + 4{,}5 \cdot \text{sen}\,[x + (270° + k \cdot 360°)]$, para todo k inteiro ou

$f(x) = 4{,}5 + 4{,}5 \cdot \text{sen}\,[x + (\frac{3\pi}{4} + 2\,k \cdot \pi)]$, para todo k inteiro.

Qualquer valor de k escolhido pelos alunos resultará em uma resposta correta. Note que, para $k = -1$, temos a função deslocada 90° para a direita. Note também que o período dessa função é o mesmo período da função seno, de modo que não é preciso multiplicar x por nenhum valor.

Há ainda a possibilidade de trabalhar com a função oposta da função seno. Nesse caso, a função precisaria se deslocar 90° para a esquerda ou 270° para a direita:

$f(x) = 4{,}5 - 4{,}5 \cdot \text{sen}\,[x + (90° + k \cdot 360°)]$, para todo k inteiro.

6. Como na questão anterior, será preciso somar e multiplicar a função original por 4,5. Além disso, não será preciso mexer no período. O que muda, nesse caso, é que a função cosseno tem abscissa máxima quando a ordenada é zero. Assim, temos de deslocar a função 180° para a esquerda ou para a direita:

$f(x) = 4{,}5 + 4{,}5 \cdot \cos\,[x + (180° + k \cdot 360°)]$, para todo k inteiro ou

$f(x) = 4{,}5 + 4{,}5 \cdot \cos\,[x + (\pi + 2k \cdot \pi)]$, para todo k inteiro.

Há ainda a possibilidade de trabalhar com a função oposta da função cosseno. Nesse caso, a função não precisaria se deslocar horizontalmente, já que a abscissa oposta da máxima é a mínima:

$f(x) = 4{,}5 - 4{,}5 \cdot \cos x$

7. Usando a mais simples das funções anteriores, temos: $f(x) = \text{n} - \text{n} \cdot \cos x$

Unidade 3 – Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Capítulos	Principais objetivos
7. Matrizes e determinantes	Identificar matrizes; efetuar adição e subtração de matrizes de mesma ordem; multiplicar número real por uma matriz; compreender a multiplicação de matrizes; obter o determinante de uma matriz quadrada utilizando propriedades e regras correspondentes.
8. Sistemas de equações lineares	Resolver e discutir as possibilidades de soluções de sistemas de equações lineares pelo método do escalonamento.

Os capítulos que compõem a presente unidade representam a introdução de uma disciplina conhecida-como Álgebra linear, que é estudada com profundidade em alguns cursos superiores (em Engenharia, por exemplo). Há quem defenda a exclusão de tais assuntos do Ensino Médio, porém, acreditamos que seu desenvolvimento aqui, da forma como propomos, amplia substancialmente o conhecimento algébrico e o numérico. O primeiro capítulo desta unidade representam uma novidade para o aluno: Matrizes e determinantes. Embora existam aplicações desses dois assuntos (quando da disciplina de Álgebra linear no Ensino Superior), no Ensino Médio, eles normalmente são considerados como associados à resolução de sistemas lineares (segundo capítulo desta unidade).

Propomos que matrizes e determinantes tenham a abordagem mais informativa, exigindo dos alunos mais manipulação do que aplicação. Já o capítulo sobre Sistemas lineares, embora se estabeleça alguma conexão com os dois primeiros, permite um trabalho mais prático, em que o procedimento do escalonamento deva ser mais valorizado.

Capítulo 7 – Matrizes e determinantes

Iniciamos o capítulo por meio de uma situação envolvendo uma tabela de dupla entrada. Essa tabela é formada pelos resultados de uma hipotética gincana. A ideia é conduzir os alunos a observarem que, ao dispormos valores em linhas e colunas, estamos diante de uma matriz. Nesta primeira parte do capítulo, além de conceituarmos matriz, também observamos a igualdade entre duas matrizes, falamos da representação de matrizes e abordamos algumas matrizes especiais: matriz transposta, matriz triangular, matriz diagonal e matriz identidade. Enfatizamos as matrizes quadradas.

Em seguida, tratamos de adição e subtração de matrizes, além da multiplicação de um número por uma matriz. Adicionamos ou subtraímos matrizes de mesma ordem, adicionando ou subtraindo elementos que se localizam numa mesma posição em cada uma das matrizes que estão sendo adicionadas ou subtraídas. Já a multiplicação de uma matriz por um número real é obtida multiplicando cada elemento da matriz por esse número real. Embora possamos multiplicar uma matriz por um número real, julgamos mais significativo apresentar essa multiplicação a partir da adição de matrizes iguais. Assim, por exemplo, se A é uma matriz, então A+A+A também pode ser obtida fazendo a adição dos elementos correspondentes (ou multiplicamos cada elemento da matriz A por 3). Em seguida, é importante ampliar essa ideia comentando com os alunos que "dado um número real *k* e uma matriz A, de ordem *m x n*, a matriz que se obtém multiplicando por *k* todos os elementos de A é a matriz *k* A, de mesma ordem.

Neste capítulo ainda definimos a multiplicação de matrizes. Utilizamos um exemplo interessante para os alunos: apresentamos uma matriz (denominamos de matriz A), formada pelas médias conseguidas por um aluno durante os 4 bimestres em 3 disciplinas, e outra matriz (denominamos de matriz B), formada pelos pesos por bimestre. Assim, teremos um exemplo significativo para conduzir o conceito de multiplicação de matrizes. Esse é um exemplo que deve ser encaminhado com a turma. Sua compreensão permite conduzir os alunos ao entendimento de multiplicação entre matrizes. Acreditamos que as propriedades da multiplicação de matrizes devam ser conduzidas por meio de exemplos. Um cuidado a ser tomado em relação à multiplicação de matrizes: dizemos que, se o produto entre dois números reais é igual a zero, necessariamente um dos fatores, pelo menos, deverá ser zero. Entretanto, quando multiplicamos matrizes, podemos ter o produto de duas matrizes não nulas de mesma ordem resultando uma matriz nula. Assim, é interessante incentivar os alunos a elaborarem duas matrizes não nulas cujo produto seja uma matriz nula.

Abordamos então o estudo de Determinantes. Inicialmente apresentamos o determinante a partir da resolução de um sistema de equações lineares (sistema 2x2, que é do conhecimento do aluno já no Ensino Fundamental). A partir daí, procuramos mostrar como o determinante de uma matriz quadrada pode ser calculado. Assim, apresentamos o procedimento para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de 1ª ordem, de uma matriz quadrada de 2ª ordem e a chamada regra de Sarrus, para o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem.

Em seguida, estudamos o determinante de uma matriz de ordem superior a três. Como optamos pelo procedimento conhecido por teorema de Laplace, iniciamos com o cofator de um elemento de uma matriz quadrada. O objetivo maior aqui é o determinante de uma matriz de 4ª ordem, embora o teorema de Laplace possa ser ampliado para outras ordens maiores que quatro.

Na parte final do capítulo, tratamos das propriedades dos determinantes. Embora algumas dessas propriedades sejam justificadas a partir do teorema de Laplace, entendemos que os exemplos utilizados para conduzir os alunos à compreensão desses resultados (propriedades) sejam suficientes. Essas propriedades objetivam, caso os alunos compreendam adequadamente, facilitar o cálculo de alguns determinantes. Ao abordar matrizes inversas, não recomendamos exageros em exemplos manipulativos. Neste estágio, é importante que os alunos conheçam como proceder para obter a matriz inversa, e saibam que a inversa de uma matriz quadrada A é outra matriz quadrada de mesma ordem que, multiplicada pela matriz A, tem como resultado a matriz identidade de mesma ordem.

Observações e sugestões:

- Um cuidado: É importante chamar a atenção dos alunos para o fato de que, ao escrevermos um elemento genérico de uma matriz, a ordem dos dois números existentes no índice deve ser respeitada. Assim, $a_{43} \neq a_{34}$.
- Outro cuidado: Adicionamos e subtraímos duas matrizes que são de mesma ordem, porém, na multiplicação de matrizes existem restrições. É importante conduzir os alunos a observar quando podemos definir a multiplicação entre duas matrizes.
- Relacionando Arte com Matemática, pode-se solicitar aos alunos que pesquisem alguma informação a respeito do trabalho feito por Albrecht Dürer. Quais são os elementos aparecem na obra *Melancolia*? Qual é o contexto histórico em que essa obra foi elaborada? Aqui pode-se até fazer uma atividade em parceria com a disciplina de História.
- Um cuidado a ser tomado: Chamar a atenção dos alunos para o fato de que, dada uma matriz quadrada A, o determinante de uma matriz A poderá ser representado por det(A) ou |A| (o cuidado é que essa última maneira não é módulo de A).

Questões e reflexões

Página 86

1. Indica a quantidade de linhas aéreas voando na rota do aeroporto B ao aeroporto E.

2. Considerando que ele queira ir direto de A até F, ele terá 3 possibilidades.

3. Das tabelas apresentadas (chamaremos essas tabelas de matrizes), apenas aquela do item IV tem as informações corretas.

Página 90

1. Sim.

2. Podemos escrever $a_{ij} = 0$, se $i \uparrow j$.

Página 99

1. Resposta pessoal.
2. Sim, o produto existe. A ordem da matriz resultante é 5 $\times$ 3 (cinco linhas por três colunas)
3. Não.

Página 105

1. Assim como exemplificado, deve-se fazer:
   $\det(A) = a_{21} \cdot c_{21} + a_{22} \cdot c_{22} + a_{23} \cdot c_{23}$
2. Assim como exemplificado, deve-se fazer:
   $\det(A) = a_{12} \cdot c_{12} + a_{22} \cdot c_{22} + a_{32} \cdot c_{32}$

Página 107

1. Os determinantes são iguais.
2. Não é necessário fazer uma demonstração. Entretanto, observando o teorema de Laplace, pode-se chegar à conclusão de que o determinante de uma matriz identidade de ordem n é igual a 1.

Explorando

Página 100

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com a troca de resultados e conclusões obtidas.

As planilhas eletrônicas existentes nos computadores permitem que façamos, por exemplo, o produto entrematrizes. Nesse sentido, encaminhamos uma atividade de investigação que exigirá do aluno a interpretação das instruções dadas em três etapas de como obter o produto de duas matrizes e também investigar outros exemplos. Sugerimos duas atividades exploratórias com a utilização de planilha eletrônica.

Como os alunos deverão elaborar matrizes e efetuar as multiplicações, as respostas são pessoais.

Pode-se ampliar essas atividades sugerindo que os próprios alunos elaborem outras matrizes e efetuem a multiplicação com o uso da planilha eletrônica.

Página 105

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com a troca de resultados e conclusões obtidas.

Temos aqui mais uma situação de exploração das planilhas eletrônicas neste capítulo. A partir de um exemplo explicativo, sugerimos que os alunos explorem tal ferramenta, calculando determinantes de diversas matrizes, como indicam as duas atividades aqui sugeridas no livro do aluno. É importante que os alunos sejam incentivados a observar as instruções de como calcular os determinantes com o recurso eletrônico para que, depois, possam fazer as atividades sugeridas. As respostas das atividades são pessoais, pois exigem a elaboração de matrizes para o cálculo de determinantes.

História da Matemática

Página 110

Sugestão de encaminhamento:

Em grupos, para a leitura e obtenção das respostas para as questões propostas no final do texto.

O texto aborda alguns aspectos da história da Matemática a respeito das matrizes associadas à chamada teoria das transformações. Destaque é dado ao trabalho de Arthur Cayley e suas contribuições. Além desse personagem, também contribuições importantes foram apresentadas por Benjamin Pierce e Charles S. Pierce. Embora a leitura contenha trechos sobre transformações (a teoria das transformações), o que pode representar um pouco de dificuldade na compreensão, a ênfase deve ser, para o aluno, o contexto sobre matrizes, sua teoria e personagens envolvidos.

Respostas das questões propostas ao final:

1. Cayley contribuiu fortemente tanto para a Álgebra quanto para a Geometria, especialmente quanto ao uso de determinantes, mas Cayley foi também um dos primeiros a estudar matrizes.
2. É a matriz identidade para multiplicação, dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. É a matriz zero (nula) para multiplicação, dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 8 – Sistemas de equações lineares

Iniciamos o capítulo com um exemplo interessante de "balanceamento" de uma equação química. A ideia é evidenciar aos alunos a presença de equações lineares também na disciplina de Química. Sugerimos que essa introdução seja feita em parceria com essa disciplina, permitindo, assim, que seja devidamente compreendida pelos alunos. A situação aqui apresentada tem o objetivo de envolver os alunos na busca de procedimentos para a resolução de um sistema de equações lineares. A partir daí, o capítulo pode ser dividido em três partes.

Na primeira parte, conceituamos equações lineares e solução de uma equação linear. Depois, apresentamos o que é um sistema de equações lineares e suas soluções. Nessa primeira parte, utilizamos exemplos de sistemas de equações lineares 2×2, isto é, sistemas formados por duas equações com duas incógnitas. A ideia é retomar o que os alunos sabem sobre a resolução de tais sistemas (normalmente trabalhado no Ensino Fundamental). Ao final dessa primeira parte, mostramos as possibilidades, quanto à solução, de um sistema linear: sistema possível (admite solução); sistema impossível (não admite solução). No caso de um sistema ser possível, existem dois casos a considerar: possível e determinado (solução única) e possível e indeterminado (infinitas soluções). A apresentação dessas possibilidades deve ser bem discutida, pois fica mais evidente para os alunos a partir de sistemas lineares formados por duas equações com duas incógnitas. A partir dessa compreensão, utilizamos essas ideias para um sistema linear com mais equações e mais incógnitas.

Na segunda parte do capítulo, abordamos o método do escalonamento para resolução de um sistema linear. Iniciamos apresentando um sistema escalonado. O importante, ao iniciar essa segunda parte, é levar os alunos à compreensão de que um sistema de equações lineares na forma escalonada permite certa facilidade quanto à resolução.

É fundamental que os alunos compreendam o conceito de equivalência de sistemas lineares. Além disso, o entendimento sobre as três "operações elementares", que transformam um sistema linear em outro equivalente, facilita bastante o escalonamento: trocar a posição de duas equações; multiplicar uma equação por um número real diferente de zero; multiplicar uma equação por um número real diferente de zero e adicionar o resultado a outra equação. É oportuno apresentar vários exemplos. Chamamos a atenção para o fato de que, quando do escalonamento de um sistema linear, a última equação pode apresentar todos os coeficientes das incógnitas nulos. O cuidado está em observar que existem duas possibilidades: termo independente nulo (o sistema apresentará infinitas soluções) e termo independente não nulo (o sistema será impossível, isto é, não apresenta solução).

A terceira parte do capítulo é destinada ao estabelecimento de conexão entre matrizes, determinantes e sistemas lineares. Apresentamos a conhecida regra de Cramer, para a obtenção da solução de sistema linear em que o número de equações seja igual ao número de incógnitas. É importante mencionar que essa regra deve ser empregada quando estamos diante de um sistema linear que é possível e determinado, tendo o número de incógnitas igual ao número de equações. Como há essa restrição, os alunos devem ser incentivados a utilizaro escalonamento como procedimento mais seguro e abrangente.

Observações e sugestões:

- Já que iniciamos o capítulo observando um exemplo de "balanceamento" numa equação química, seria interessante um trabalho em parceria com a disciplina de Química, podendo fazer parte da avaliação.
- É importante enfatizar que, para sistemas lineares em que o número de equações seja igual ao número de incógnitas, a regra de Cramer mostra-se extremamente trabalhosa quando, por exemplo, nos depararmos com um sistema formado por *n* equações com *n* incógnitas, sendo *n* um número maior que três. Nesses casos, mesmo que utilizemos programas de computador, o método do escalonamento é o mais empregado.

Questões e reflexões

Página 116

Resposta pessoal. Espera-se que, pelo menos, os alunos falem da existência do método da substituição na resolução de sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas.

Página 116

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos observem que podemos determinar z na terceira equação, substituir esse resultado na segunda equação e determinar y. Assim, tendo y e z, substituímos na primeira equação para determinar x.

Página 119

1. Resposta pessoal que depende do valor atribuído a α.

2. Basta fazer $\alpha = 3$.

Explorando

Páginas 125 e 127

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com a apresentação dos resultados para a turma.

Com o auxílio de um aplicativo já mencionado anteriormente, sugerimos uma atividade exploratória de construção geométrica envolvendo sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas. Inicialmente será necessário que os alunos interpretem as instruções feitas no livro do aluno, para então realizar o que se pede:

1. Procure inicialmente construir os três gráficos exemplificados utilizando um aplicativo para construir gráficos.

2. Elabore uma explicação sobre os três resultados gráficos, relacionando com a resolução dos sistemas apresentados.

3. Elabore outros sistemas de equações lineares formados por duas equações e duas incógnitas e, utilizando o aplicativo, obtenha a interpretação geométrica das soluções desses sistemas.

Embora as respostas sejam pessoais, espera-se que no item 1 os alunos reproduzam os exemplos no computador. Já no item 2, espera-se que expliquem que um sistema formado por duas equações lineares com 2 incógnitas pode ser possível e determinado (solução é interpretada como o ponto de encontro de duas retas), pode ser impossível (quando duas retas são paralelas) e também pode ser possível e indeterminado (as retas correspondentes são coincidentes, havendo infinitos pontos em comum). No item 3, a ideia é que os alunos elaborem seus sistemas lineares e verifiquem, por meio da ferramenta, as correspondentes interpretações geométricas.

Essa atividade exploratória pode ser componente da avaliação a respeito de sistemas lineares.

Explorando habilidades e competências

Páginas 131

Tansformações no plano

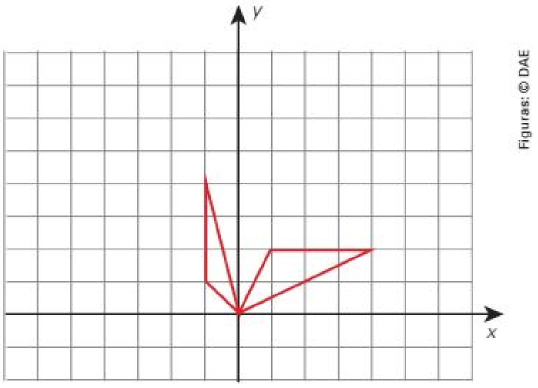
Sugestão de encaminhamento:

Em pequenos grupos, com leitura do texto e apresentação das respostas para as questões propostas.

Respostas das questões propostas:

Página 91

1.



2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1-2\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ \frac{4-2\sqrt{3}}{2} & \frac{4\sqrt{3}+2}{2} \end{bmatrix}$$

3.

$$3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \ e \ \ 0{,}3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \\ 1{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{bmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2{,}5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$2 \cos x - 1{,}5 \operatorname{sen} x = 0$

$2 \operatorname{sen} x + 1{,}5 \cos x = 2{,}5$

$4 \cos x - 3 \operatorname{sen} x = 0$

$4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x = 5$

Note que as equações 1 e 3 são múltiplas uma da outra, assim como as equações 2 e 4. Resolvendo apenas as equações 3 e 4, temos:

$4 \cos x = 3 \operatorname{sen} x$

$\cos x = 0{,}75 \operatorname{sen} x$

$4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x = 4 \operatorname{sen} x + 3 (0{,}75 \operatorname{sen} x) = 4 \operatorname{sen} x + 2{,}25 \operatorname{sen} x = 6{,}25 \operatorname{sen} x = 5$

$\operatorname{sen} x = \frac{5}{6{,}25} = 0{,}8$

$\cos x = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$

6.

Resolvendo o sistema:

$x + 5z = 1$

$3x + y = 1$

$-y + 3z = 1$

Isolando x na equação I, temos $x = 1 - 5z$.

Somando as equações II e III, temos $3x + 3z = 1$.

Substituindo x na nova equação, temos

$3 - 15z + 3z = 1$. Logo, $z = \frac{1}{6}$.

Como $x = 1 - 5z$, temos $x = \frac{1}{6}$.

Por fim, substituindo x na segunda equação, temos

$y = 1 - 3x = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Unidade 4 – Geometria Espacial

Capítulos	Principais objetivos
9. Geometria espacial de posição	Compreender as noções primitivas da Geometria de posição observando as ideias referentes ao método axiomático; identificar as posições relativas entre retas, entre retas e planos e entre planos no espaço; compreender como obter a distância entre dois pontos, entre duas retas não concorrentes, entre ponto e reta, entre ponto e plano, entre reta e plano.
10. Poliedros	Caracterizar e identificar poliedros convexos; compreender relações entre número de faces, de vértices e de arestas de um poliedro; calcular a soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo.
11. Prismas	Caracterizar prismas e compreender relações que permitam calcular áreas de prismas (da base, lateral e total) e calcular volumes de prismas.
12. Pirâmides	Caracterizar pirâmides e compreender relações que permitam calcular áreas de prismas (da base, lateral e total) e calcular volumes de pirâmides.

No Volume 1 desta coleção destinamos uma unidade para o trabalho com tópicos de Geometria Plana, normalmente desenvolvidos ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental. Aqui, o objetivo principal será o estudo de Geometria Espacial.

Um nome fortemente ligado à Geometria é Euclides de Alexandria. Seu legado principal parece ter sido o de organizar o conhecimento que havia em sua época. Além disso, sua importância também está no chamado método axiomático utilizado na Geometria, que aqui será observado principalmente no capítulo inicial.

A unidade está dividida em quatro capítulos, sendo que os dois últimos representam a chamada Geometria Métrica com o cálculo de áreas e volumes dos sólidos geométricos prismas e pirâmides. Observamos que, tradicionalmente, o estudo de cilindros, cones e esferas é realizado no segundo ano do Ensino Médio. Optamos por deixar esses tópicos para o terceiro ano, isto é, no Volume 3 desta coleção. Justificamos essa escolha por acreditarmos que existe a necessidade de não concentrarmos a Geometria Espacial num ano apenas desse estágio da escolarização.

Capítulo 9 – Geometria Espacial de posição

Logo de início, as primeiras noções são dadas para que os alunos compreendam a chamada formulação axiomática: ponto, reta e plano são elementos básicos, isto é, são elementos considerados primitivos, pelo fato de não serem definidos. É importante comentar com os alunos que o fato de não definirmos tais elementos não significa que não tenhamos quaisquer noções intuitivas sobre o que representam. Também é fundamental que, nesse início das chamadas "noções primitivas", os alunos compreendam que, a partir daqueles elementos primitivos, temos as chamadas propriedades fundamentais que representam o ponto de partida: são os postulados (axiomas). São propriedades tidas como verdadeiras e que não exigem justificativas, mas estão de acordo com nossa intuição. Estabelecidos os elementos primitivos e os postulados, outros fatos (propriedades), denominados teoremas, são justificados (e demonstrados com a utilização das regras de raciocínio lógico).

Ao apresentarmos para os alunos um postulado, a ideia é que eles compreendam que o enunciado de um deve ser uma "verdade" evidente e que represente algo "que a nossa intuição aceite como tal". Os teoremas devem ser compreendidos de uma forma diferente, algo que precisa ser "justificado" considerando os "entes primitivos", as "definições" apresentadas e também os "postulados" enunciados. Procuramos demonstrar alguns poucos teoremas. Nesse sentido, seria oportuno que o encaminhamento dessas demonstrações fosse discutido com os alunos.

Neste estágio da escolarização, os alunos possuem ideias bem claras a respeito do que vem a ser paralelismo e perpendicularismo. São ideias que já foram estudadas no Ensino Fundamental e aqui são ampliadas. As demonstrações de vários teoremas são aqui omitidas por considerarmos exagero conduzi-las.

Organizamos então as posições relativas entre duas retas distintas: concorrentes, paralelas ou reversas. Aqui cabe uma observação importante sobre o fato de falarmos em posições relativas entre duas retas "distintas". Ao destacar o termo "distintas", queremos evitar possíveis confusões que possam ser feitas com as chamadas retas "coincidentes" (duas retas que tenham mais de um ponto em comum são obrigatoriamente coincidentes, isto é, a mesma reta). A mesma observação deve ser feita sobre as posições relativas entre planos.

Dedicamos parte do capítulo para abordar perpendicularismo de reta e plano. Novamente é importante lembrar que os alunos já sabem o que significam retas perpendiculares. Mesmo assim, iniciamos essa parte retomando essas ideias para então abordarmos perpendicularismo de reta e plano. O modelo de um cubo é interessante para que o aluno observe, a partir dos prolongamentos das arestas, retas paralelas e retas que são reversas. Entendemos que a utilização de modelos represente um apoio importante para a compreensão das posições relativas aqui estudadas.

O cálculo de distâncias em Geometria, de certa forma, não representa novidade para os alunos. Entretanto, julgamos que a parte final deste capítulo é fundamental como ligação para a chamada Geometria métrica. Não calculamos distâncias aqui, mas dizemos como podemos calculá-las. Qual é a distância entre dois pontos? Qual é a distância de um ponto a uma reta? Qual é a distância de um ponto a um plano? Ou a distância entre duas retas paralelas? E entre duas retas reversas? E se uma reta é paralela a um plano, como determinar a distância dessa reta ao plano? Essas são questões que procuramos examinar ao longo deste capítulo. Iniciamos pelo conceito de projeção ortogonal de um ponto sobre um plano. A partir daí, desencadeamos outras ideias sobre projeções ortogonais: de uma figura sobre um plano; de uma reta sobre um plano; de um segmento sobre um plano. Essas ideias, embora simples, precisam ser devidamente encaminhadas.

Por meio de definições, abordamos distância entre dois pontos, distância de um ponto a uma reta, distância de um ponto a um plano, distância entre duas retas paralelas, distância entre reta e plano paralelos, distância entre dois planos paralelos e distância entre duas retas reversas. Cada uma dessas definições é seguida de uma ilustração e uma explicação.

Entendemos ser este um capítulo que estabelece uma ponte entre a Geometria de posição e a Geometria métrica. Alertamos para a necessidade de o professor destinar um bom tempo para esse trabalho, sempre que possível, apoiado em modelos e exemplos.

Observações e sugestões

- As ilustrações existentes podem ser apoiadas em modelos reais, desde que se tomem alguns cuidados: se utilizarmos um lápis para "representar" uma reta, é importante deixar claro que devemos imaginar esse lápis sem espessura e com comprimento não limitado.
- Após a apresentação dos postulados e teoremas para os alunos, podem-se conduzir discussões rápidas sobre o que eles compreenderam dos enunciados.
- Uma sugestão para promover uma articulação entre Arte e Matemática seria propor aos alunos um trabalho de pesquisa nesse sentido: pesquisar artistas que utilizam elementos geométricos em suas obras.
- Uma pergunta interessante pode ser feita quando do início do trabalho com distâncias: Qual é a distância entre a posição em que o aluno está sentado e a parede da sala de aula? A resposta não é simples, pois existe mais de uma distância. Assim, é preciso esclarecer que, quando queremos uma distância, normalmente queremos saber a menor das distâncias.
- A Geometria de posição, estudada neste capítulo, permite uma avaliação mais voltada à participação dos alunos no trabalho em sala de aula, sem a necessidade de cobranças quanto à memorização de conteúdos. Uma alternativa interessante seria propor que a turma fosse dividida em três grupos, no máximo, e cada equipe ficasse encarregada de explicar aos outros dois grupos partes dos assuntos.

Questões e Reflexões

Página 136

Resposta pessoal. É sobre a existência de pontos numa reta e fora dela, num plano e fora dele.

Página 137

Resposta pessoal. Comente com os alunos que três pontos distintos e não colineares determinam um único plano. Quatro pontos não colineares, poderiam, dependendo de suas posições, determinar mais de um plano.

Página 138

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal. Os desenhos são auxiliares, ajudam-nos a visualizar as relações.

Página 141

1. Não. Elas podem ser reversas.

2. Sim.

Página 145

1. A projeção ortogonal será um ponto.

2. A projeção ortogonal será um segmento, com comprimento menor que o do segmento dado.

Página 146

Sim. Basta que o ponto pertença à reta.

Página 148

Sim. Podemos traçar a reta perpendicular simultânea às duas retas reversas. Basta considerarmos o ponto numa das retas reversas que esteja nessa perpendicular. A distância desse ponto a outra reta reversa representa a distância entre as duas retas.

Explorando

Página 141

Sugestão de encaminhamento:

Atividade para pequenos grupos, com a apresentação coletiva dos resultados.

O presente capítulo é extenso e muito teórico para os alunos. Exigirá deles uma abstração muito grande. Nesse sentido sugerimos essa atividade de exploração de representações. Apresentamos propriedades geométricas que podem ser estudadas a partir da construção de modelos. Os alunos deverão analisar cada uma das propriedades e explicá-las, por meio de recursos que eles elaborarem, para os demais alunos.

É uma forma de tornar o assunto um pouco mais envolvente e significativo.

História da Matemática

Página 148

Sugestão de encaminhamento:

Leitura em duplas, com a discussão coletiva das respostas das questões propostas ao final do texto.

O texto descreve de maneira resumida parte da história da chamada Geometria Euclidiana. É importante dizer para os alunos que Euclides organizou o conhecimento de Geometria até sua época. A obra de Euclides representa um marco para a história da Matemática. Neste texto os alunos irão observar concepções e trabalhos de outros personagens chegando até o trabalho de René Descartes com a Geometria Analítica. Comente com os alunos que a Geometria Analítica também teve outros personagens importantes. Um deles, que não aparece no texto, é Fermat.

Respostas das questões apresentadas

1. Arquimedes, com seus estudos sobre as esferas e o cilindro, e Euclides, com seu livro *Os Elementos*, onde sistematizava todos os conhecimentos acumulados até então pelo seu povo, fornecendo dessa forma ordenação através de uma linguagem científica.
2. Para Platão, a explicação de tudo; como tudo existia! Estava nos cinco sólidos perfeitos: o cubo (terra), o tetraedro (fogo), o octaedro (ar), o icosaedro (água) e o dodecaedro (elemento que permearia todo o Universo).
3. As "duas áreas da matemática" surgiram separadas até o século XVI, quando o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado o "pai da filosofia moderna", reuniu as duas áreas correntes, naquilo que mais tarde denotou-se Geometria Analítica.

Capítulo 10 – Poliedros

Uma forma de iniciar este capítulo seria buscar o significado do termo "poliedro" e compará-lo com o significado do termo "polígono". Outra é como procedemos no livro do aluno, ou seja, observando a utilização de formas geométricas na estrutura molecular.

É importante ressaltar aos alunos que, quando utilizamos o termo "sólidos" geométricos, estamos nos referindo à forma geométrica espacial. Essa denominação é feita até mesmo quando estamos diante de uma caixa de papelão em forma de paralelepípedo. Dizemos que tal caixa é um sólido geométrico conhecido como paralelepípedo, mas sabemos que é uma caixa oca. Para exemplificar, damos seis exemplos de poliedros que provavelmente são de conhecimento dos alunos: cubo, paralelepípedo, pirâmide, tetraedro, octaedro e prisma. Logo após apresentarmos os elementos que compõem esses sólidos geométricos, definimos então poliedro convexo. Enquanto um polígono é denominado a partir do número de lados (ou de ângulos), um poliedro é nomeado a partir do número de faces que possui. Logo a seguir, fizemos uma analogia entre polígono convexo e poliedro convexo, entre polígono não convexo e poliedro não convexo. As ilustrações permitem diferenciar um do outro. Somos favoráveis a que os alunos sejam conduzidos a essa observação tendo os modelos em mãos.

Apresentamos, sem demonstrar, a relação de Euler sobre o número de vértices, o número de faces e o número de arestas de um poliedro. Apresentamos exemplos sobre a relação de Euler que devem ser amplamente discutidos com a turma.

Abordamos então os poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Evidenciamos as planificações desses sólidos geométricos que podem, evidentemente, ser utilizadas para a construção de modelos. Há uma demonstração não muito simples a respeito da existência de apenas 5 poliedros regulares. Essa demonstração exige o conhecimento de propriedades observáveis em poliedros convexos regulares: "cada aresta é comum a duas faces", "em cada vértice concorre o mesmo número de arestas". Após a demonstração, falamos das classes dos poliedros. Embora isso pareça inútil, consideramos que esclarece os alunos sobre o fato de que não temos apenas o cubo como exemplo de hexaedro; o próprio paralelepípedo é um hexaedro. A partir dessas observações, apresentamos e demonstramos uma relação que permite obter a soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo conhecendo apenas a quantidade de vértices. Essa é uma demonstração importante e que deve ser discutida com os alunos, pois permite não apenas observar como chegar à relação correspondente, como estabelece uma conexão importante com a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

Observações e sugestões

- Devemos ter um cuidado ao apresentar a relação de Euler: todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, porém nem todo poliedro que satisfaz a relação de Euler é convexo. Em nosso estudo, não abordamos enfaticamente os poliedros não convexos, mas é um cuidado que devemos ter.
- Há uma atividade interessante para compor a avaliação: a construção, em equipes, de modelos dos cinco poliedros regulares, conforme planificações encontradas no Livro do Aluno que devem ser ampliadas.
- Caso conheça algum marceneiro na comunidade, investigue a possibilidade de construir em madeira modelos dos cinco poliedros regulares para serem utilizados em sala de aula como referência.

Questões e Reflexões

Página 153

1. Resposta pessoal. Poliedro significa "várias faces".
2. São 12 vértices, 8 faces e 18 arestas.

Página 155

1. Tabela:

Poliedro	Faces	Arestas	Vértices
Hexaedro	6	12	8
Octaedro	8	12	6
Pirâmide	5	8	5

2. Resposta pessoal. A soma do número de faces com o número de vértices é 2 a mais que o número de arestas.

Capítulo 11 – Prismas

Este é um capítulo fundamental no que se refere à compreensão do cálculo de áreas e de volumes de sólidos geométricos. Procuramos inicialmente caracterizar prismas, observando seus elementos, como podemos defini-los a partir de ideias estudadas em Geometria de posição e também como classificá-los quanto ao número de arestas de suas bases e quanto à inclinação das arestas laterais. Logo após, identificamos os chamados prismas regulares. Mesmo que tenhamos falado de diversos prismas regulares, geralmente nosso estudo se limita ao estudo do prisma triangular, do prisma quadrangular e do prisma hexagonal.

Temos, então, a partir dessas ideias iniciais, o início da Geometria métrica pelo cálculo da superfície de um prisma. O cálculo da área da base, da área lateral e também da área total de um prisma fica mais bem compreendido a partir de planificações. Apresentamos exemplos sobre o cálculo das áreas de prismas. São exemplos importantes que permitem uma boa discussão junto aos alunos. Sugerimos que, a partir desses exemplos, o professor retome com os alunos os procedimentos para o cálculo das áreas dos quadrados (bases do prisma quadrangular regular), dos triângulos equiláteros (bases do prisma triangular regular) e também dos hexágonos (bases do prisma hexagonal regular).

Dois prismas são estudados: o cubo e o paralelepípedo. Apresentamos a relação que permite calcular a área total de um paralelepípedo observando sua planificação. Já a fórmula da área total do cubo pode ser obtida considerando um paralelepípedo em que as três dimensões são iguais. Além de considerarmos aqui o cálculo das áreas das superfícies do cubo e do paralelepípedo, também observamos algumas relações métricas existentes entre as medidas das diagonais e as medidas das arestas desses dois sólidos. Novamente poderíamos estabelecer a relação da medida da diagonal do cubo a partir da diagonal do paralelepípedo, considerando apenas que as arestas têm a mesma medida (no livro do aluno fizemos de outra forma).

A partir de uma situação apresentada, iniciamos então o estudo do volume de um prisma. Explicamos que utilizamos o cubo de medida de aresta unitário como unidade de volume. Mostramos então como podemos chegar ao volume de um paralelepípedo. Embora existam ilustrações e explicações que permitem compreender como chegar ao volume do paralelepípedo, entendemos que há a necessidade de nosso acompanhamento e de nossa interferência, como professores, no desenvolvimento desse tópico até chegar à conclusão da relação que permite o cálculo do volume do sólido em questão.

No final do capítulo, mostramos como obter o volume de um prisma qualquer a partir do volume de um paralelepípedo. A explicação está atrelada ao chamado Princípio de Cavalieri, que é "emprestado" aqui sem ser demonstrado. A compreensão intuitiva desse princípio permitirá ao aluno compreender como podemos calcular o volume de um prisma. Recomendamos que as explicações apresentadas sobre esse princípio sejam lidas e discutidas com os alunos. Ao estabelecermos, no final, que o volume de um prisma qualquer é o produto da área de sua base por sua altura, estaremos prontos para calcular, ainda pelo mesmo princípio, o volume de outros sólidos geométricos. Daí a sua importância.

Observações e sugestões

- No capítulo anterior, sugerimos a construção de modelos de alguns poliedros. Aqui, para a compreensão a respeito do cálculo da área da superfície de um prisma, sugerimos a construção das planificações dos três principais prismas regulares: o triangular, o quadrangular e o hexagonal. Talvez essa construção pudesse fazer parte de uma avaliação, dividindo a turma em grupos.
- Os alunos normalmente identificam o cubo e o paralelepípedo como sólidos que não são prismas. Devemos chamar a atenção deles que são dois exemplos particulares de prismas de grande utilidade.
- Um cuidado: os alunos normalmente confundem diagonal do cubo com diagonal da face do cubo. Da mesma forma: diagonal do paralelepípedo com diagonal de uma das faces do paralelepípedo.

Explorando

Página 170

Sugestão de encaminhamento:

Em grupos, com discussão coletiva das respostas encontradas.

Propomos uma atividade de exploração para ser realizada em equipe. Nela temos quatro itens, cujas respostas dependerão das medidas obtidas pelos alunos ou das medidas que eles deverão indicar. As três primeiras questões estão relacionadas com a própria sala de aula. Assim, as respostas poderão ser confrontadas pelas equipes. Na atividade 4, sugerimos aos alunos que simulem a construção de um aquário. As medidas deverão ser elaboradas por eles. Os alunos devem pesquisar o que é necessário para tal construção. Essa é uma atividade que pode ser conduzida como parte da avaliação.

Capítulo 12 – Pirâmides

Duas construções em forma de pirâmides abrem o capítulo. São duas construções contrastantes, mas representam a mesma forma geométrica: pirâmides quadrangulares. Assim como ocorreu no estudo de prismas, três tipos de pirâmides são destacados aqui: a de base quadrada, a de base triangular e a de base hexagonal. Embora sejam facilmente identificadas pelos alunos, as pirâmides apresentam normalmente um grau de dificuldade maior na compreensão quando comparadas ao estudo de prismas. Essa dificuldade pode ser observada no cálculo da área da superfície.

O capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte, após algumas ideias introdutórias, iniciamos evidenciando como obtemos uma pirâmide e quais são seus elementos. Classificamos, então, as pirâmides quanto ao número de arestas da base e observamos as chamadas pirâmides regulares. É importante destacar que, numa pirâmide regular, a base é um polígono regular e as faces laterais serão triângulos isósceles congruentes. Destacamos os elementos de uma pirâmide regular. É importante que as relações métricas entre apótema da pirâmide, apótema da base da pirâmide, altura da pirâmide, aresta lateral da pirâmide e aresta da base da pirâmide sejam amplamente discutidas. As relações métricas são estabelecidas de forma imediata por meio de triângulos retângulos.

Logo a seguir, apresentamos, utilizando a planificação de uma pirâmide hexagonal, o procedimento para o cálculo da área total de uma pirâmide, ou seja: a área total é a área lateral adicionada à área da base da pirâmide. Um exemplo é apresentado para que o aluno compreenda como proceder.

Na segunda parte do capítulo, temos novamente o Princípio de Cavalieri, para estabelecer o volume de uma pirâmide a partir de um prisma de mesma base. Novamente será necessário que nós, professores, façamos o acompanhamento das explicações até chegar à conclusão de que o volume de uma pirâmide de mesma base e mesma altura de um prisma é um terço do volume do prisma. Procuramos conduzir explicações e ilustrações que facilitassem a compreensão, entretanto existem detalhes que precisam ser bem compreendidos pelos alunos. Um desses detalhes é quando dividimos o prisma de base triangular em três pirâmides de base triangular. Nem sempre é imediato, a partir de ilustrações, a compreensão de que as três pirâmides possuem o mesmo volume. Daí a necessidade da interferência do professor, reforçando as explicações do livro.

Observações e sugestões

- No capítulo anterior, sugerimos a construção de modelos de alguns prismas. Aqui, para a compreensão a respeito do cálculo da área da superfície de uma pirâmide, sugerimos a construção das planificações das três principais pirâmides regulares: a triangular, a quadrangular e a hexagonal.
- Assim como ocorreu no cálculo da área da superfície de um prisma, no cálculo das áreas totais das principais pirâmides regulares, os alunos deverão saber como obter a área de um quadrado, de um triângulo equilátero e de um hexágono regular.
- Fizemos uma opção em não apresentar a Geometria aqui estudada como uma relação de fórmulas seguida de exemplos numéricos. Sendo assim, o encaminhamento exige de nós, professores, uma atenção maior em relação às dúvidas que evidentemente são esperadas por parte dos alunos.
- Uma atividade interessante que pode ser utilizada como componente da avaliação seria uma pesquisa a respeito da pirâmide do Louvre: data da construção, arquiteto responsável, presidente francês que encomendou, material utilizado, medidas como altura, lado da base. Além disso, pode-se solicitar que calculem a área lateral e o volume ocupado pela construção.

Questões e Reflexões

Página 185

1. A razão entre as áreas será k^2.

2. A razão entre os volumes será k^3.

História da Matemática

Página 185

Sugestão de encaminhamento:

Leitura e resolução das atividades sugeridas em duplas. Discussão coletiva das respostas.

Respostas para as questões

1. Resposta pessoal, mas está ligado à ideia de fecundo.

2. É a parábola. Comente com os alunos que essas cônicas serão estudadas no volume 3 desta coleção.

Explorando habilidades e competências

Página 191

Sugestão de encaminhamento:

Em grupos, com discussão coletiva das respostas.

Respostas das questões sugeridas

Página 155

1. $m_E = \frac{1}{2}\sqrt{25^2 + 7^2 + 15^2 + 15^2 - 20^2 - 20^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{324} = \frac{18}{2}$

$m_E = 9$ cm

2. $m_E = \left(\frac{25 - 7}{2}\right) = \frac{18}{2}$

$m_E = 9$ cm

3. Como os resultados são iguais, é possível supor que ambas as fórmulas servem para todos os trapézios.

4. $D = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$m_E = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 5^2 + 12^2 + 12^2 - 13^2 - 13^2} = 0$

Unidade 5 – Análise combinatória

Capítulos	Principais objetivos
13. Princípio fundamental da contagem	Compreender e utilizar o princípio fundamental da contagem para resolver situações de contagem.
14. Permutações	Compreender situações de permutações a partir do princípio fundamental da contagem; utilizar o fatorial de um número natural para cálculo envolvendo permutações simples; calcular o número de permutações com elementos distintos e permutações com repetição de elementos.
15. Combinações e arranjos	Identificar combinações simples à ideia de escolher; resolver situações relacionadas à combinação; obter arranjos simples a partir de combinação e permutação simples.
16. Binômio de Newton	Obter os termos do desenvolvimento da potência natural de um binômio; utilizar a fórmula do termo geral para a obtenção de um termo qualquer do desenvolvimento da potência de um binômio; compreender as relações entre os números binomiais e o triângulo de Pascal.

Análise combinatória é um assunto ligado ao cálculo das possibilidades de realização de determinado evento. No lançamento de um dado e a posterior observação do resultado obtido em sua face superior, num simples "cara ou coroa", no número de formas diferentes que podemos escolher duas pessoas num grupo de 10, no preenchimento de um cartão de loteria esportiva etc., estamos diante de exemplos que, se utilizarmos o conhecimento desta unidade, poderemos compreender um pouco mais.

O estudo aqui está dividido em quatro capítulos. Ele se mostrará interessante para os alunos se, como professores, nós os motivarmos, trazendo dados para a sala de aula, cartões de algum jogo de loteria, e tantos outros atrativos que podem ser utilizados conforme nossa criatividade. Tradicionalmente, o ensino de Análise Combinatória é conduzido levando os alunos a utilizarem fórmulas desprovidas de compreensão. Assim, diante de um problema qualquer de contagem, o aluno normalmente lança a pergunta: o problema é de arranjo, de permutação ou de combinação? Não podemos concordar com esse comportamento. Somos favoráveis a conduzir os alunos, ao longo do desenvolvimento dos três primeiros capítulos da unidade, a compreender que os problemas de contagem envolvem duas "operações" básicas: escolher e misturar. Se isso for devidamente compreendido, acreditamos que os alunos entenderão o que é Análise Combinatória.

Capítulo 13 – Princípio Fundamental Da Contagem

Iniciamos o capítulo conduzindo uma questão para o aluno sobre o segredo de um cadeado. Essa é uma forma de envolver o aluno. É importante dar um tempo para que eles possam responder à questão proposta. Ao longo do capítulo, tal situação é retomada. Logo após, abordamos e resolvemos duas situações que permitirão compreender, de forma intuitiva, estratégias para o cálculo do número de possibilidades para realizar determinado evento. Na primeira, a observação de uma tabela de dupla entrada evidencia o número total de possibilidades de uma moça utilizar uma camiseta (a partir de 4 diferentes) e uma bermuda (dispondo de 2 diferentes). Na segunda situação, a construção da chamada árvore das possibilidades. Esses dois procedimentos (poderíamos chamar também de esquemas) permitem uma compreensão e a visualização do motivo pelo qual, em certas situações de contagem, devemos utilizar o chamado princípio multiplicativo, conforme estudaremos. É importante, entretanto, que, após as discussões desses dois exemplos, seja feito o comentário de que existem situações de contagem em que não multiplicamos para calcular, mas adicionamos (apresentamos mais adiante, ainda neste capítulo, um exemplo).

Após apresentarmos o princípio multiplicativo, conduzimos alguns exemplos que devem ser discutidos com a turma, para verificar a compreensão da utilização de tal estratégia de contagem. Além disso, nos exercícios propostos, recomendamos que o encaminhamento seja feito em duplas e as dúvidas sejam coletivamente discutidas.

Observações e sugestões

- Em algumas situações de contagem, principalmente aquelas que envolvem a construção de números, é importante alertar os alunos para que observem bem o enunciado. Assim, por exemplo, podemos pedir aos alunos que descubram quantos números naturais com três algarismos podemos formar. Outra possibilidade seria solicitar a eles que descubram quantos números naturais com três algarismos distintos podemos formar.
- Outra forma de iniciar o capítulo seria propor uma pesquisa sobre o atual sistema de emplacamento de veículos no nosso país. Algumas perguntas podem ser então abordadas: Quantas placas poderiam ser confeccionadas com as letras AAA? Quantas placas podem ser confeccionadas tendo o número 1234?

Questões e Reflexões

Página 196

1. O total de possibilidades é $26 \cdot 26 = 676$.

2. O total de possibilidades é $10 \cdot 10 = 100$.

Página 199

O total de senhas do cadeado é $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

Explorando

Página 200

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com discussões coletivas dos resultados obtidos.

Logo após alguns exemplos de situações de contagem, sugerimos que o princípio multiplicativo seja explorado a partir da árvore das possibilidades. Assim, os alunos deverão elaborar uma situação de contagem e, com as informações correspondentes, deverão construir a árvore das possibilidades e apresentar para a turma. Sugerimos também uma conexão com a disciplina de Biologia, particularmente em relação à Genética, por meio de uma pesquisa. Seria interessante que o professor de Biologia comentasse com os alunos algum exemplo de cálculo de possibilidades envolvendo anomalias quando do nascimento de crianças em que um dos elementos do casal possui essa anomalia. Em seguida, a pesquisa deve ser encaminhada para que os alunos a apresentem posteriormente à turma.

Capítulo 14 – Permutações

Este capítulo encontra-se dividido em quatro partes: permutação simples, fatorial de um número natural, permutação com repetição e permutação circular. Na primeira parte, retomamos o princípio multiplicativo por meio de três diferentes situações de contagem. A partir daí, definimos o que vem a ser permutação, isto é, "dado um conjunto com *n* elementos, denomina-se permutação desses *n* elementos qualquer sequência de *n* elementos na qual apareçam todos os elementos do conjunto". Talvez mais importante aqui, para o aluno, seja compreender que o significado de "permutar" está ligado ao ato de "misturar", de "trocar de posição". O cálculo do número de permutações simples de *n* elementos é efetuado a partir do princípio multiplicativo. Para facilitar a representação de permutações simples de n elementos, utilizamos P_n.

Iniciamos a segunda parte do capítulo observando um símbolo da Matemática que é utilizado para simplificar. No lugar de escrevermos $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, utilizamos a notação $P_5 = 5!$ (lemos: fatorial de 5), isto é, **5!** $= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Estamos diante de uma simplificação, e é assim que devemos passar para os nossos alunos. O fatorial de um número natural maior que 1 é definido como o produto desse número natural pelos seus antecedentes até a unidade. E o fatorial de 1? E o fatorial de zero? Fizemos observações a esse respeito para justificar que $0! = 1$ e $1! = 1$. Além disso, existem "vantagens" em convencionar tais valores: elas aparecem no próximo capítulo, quando abordamos problemas de contagem que são classificados por problemas de combinações. Neste capítulo, é importante que os alunos aprendam a utilizar o fatorial de um número natural para simplificar.

Nas duas últimas partes do capítulo tratamos de problemas sobre "permutação com repetição" e as chamadas "permutações circulares". Aqui, utilizamos exemplos que permitem a compreensão dos procedimentos de cálculo nos dois tipos diferentes de permutações. No caso de permutação com repetição, um exemplo interessante é o de formação de anagramas das letras de uma palavra (letras repetidas). É interessante permitir aos alunos, dependendo da quantidade de letras da palavra, construir os anagramas. No caso de permutação circular, posicionar quatro amigos ao redor de uma mesa circular em que a diferença entre uma e outra forma de posicionar está em observar quem está à nossa direita e à nossa esquerda. Não consideramos adequado que os problemas de permutação com repetição e também os de permutação circular sejam resolvidos apenas "empregando" as fórmulas. Daí a necessidade de compreendê-las.

Observações e sugestões

- As situações que são aqui apresentadas como problemas de permutação podem ser solucionadas por meio do princípio multiplicativo.
- Para que os alunos compreendam adequadamente os problemas de permutação simples, permutação com repetição e permutação circular, sugerimos que eles elaborem dois exemplos de cada tipo de permutação e proponham para resolução de outro colega. Ao elaborar tais situações, entendemos que os alunos observarão em seus enunciados as diferenças que caracterizam cada um desses casos de permutação.
- Alguns dos exercícios propostos ao longo do capítulo podem ser utilizados para compor parcialmente a avaliação. Uma estratégia seria propor que a resolução fosse realizada em duplas.
- É necessário valorizar as estratégias utilizadas pelos alunos quando da resolução dos exercícios e conferência dos resultados obtidos.

Capítulo 15 – Combinações e Arranjos

Se o significado do termo "permutar" estiver relacionado ao de "misturar", de "trocar de posição", qual será o significado de "combinar"? Para iniciar este capítulo, comentamos a existência de duas "atitudes intuitivas" relacionadas a problemas de contagem. Uma já foi estudada, que é "misturar" (são aquelas situações de contagem estudadas no capítulo anterior: permutações), e a outra, que será abordada neste capítulo, é "escolher".

Este capítulo é mais extenso e está dividido em três partes. Inicialmente, propomos uma situação simples de escolha de 5 bolas de sorvete de sabores diferentes a partir de 8 sabores disponíveis. Aqui é importante deixar que os alunos discutam tal situação, para que seja possível observar seus conhecimentos prévios.

Iniciamos a primeira parte do capítulo utilizando, passo a passo, uma situação para levar os alunos a observar as possibilidades de escolha de uma comissão de 3 jovens a partir de 5 jovens disponíveis. O encaminhamento proposto para resolver tal situação inicia utilizando-se o princípio multiplicativo. É aí que surge a grande diferença. Quando escolhemos três pessoas, por exemplo, para compor um grupo, a ordem delas não interessa. Assim, devemos deixar claro para os alunos que, se escrevemos ABC, é diferente de BCA, entretanto, quando temos {A; B; C} é o mesmo que {B; C; A}. Daí a importância de dizer aos alunos que, ao procedermos assim para obter todas as maneiras de contar as possibilidades na escolha de 3 das 5 crianças, alguns desses agrupamentos foram repetidos. Por esse motivo, precisaremos dividir por 3!, como mencionamos no livro do aluno. Logo após esse exemplo, ampliamos esse raciocínio para a escolha de p elementos dispondo de n elementos. Assim, chegaremos à relação matemática para o cálculo do número de combinações de n elementos tomados p a p.

Quando abordamos o fatorial de um número natural, adotamos que **0! = 1** e que **1! = 1**. Uma boa justificativa é apresentada aqui quando associamos o fato de efetuar combinações de n elementos tomados p a p com o de estar formando subconjuntos de pelementos. Assim, sabemos que, se um conjunto tem n elementos, podemos formar 1 subconjunto dele com exatamente n elementos. Por meio da relação obtida para a combinação, concluiremos que:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1 \text{ (adotando } 0! = 1\text{)}$$

Analogamente, sabemos que um conjunto com n elementos admite apenas 1 subconjunto com 0 (zero) elemento (é o conjunto vazio). Utilizando a relação de combinação, temos:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1 \text{ (adotando que } 0! = 1\text{)}$$

Considerando, portanto, **0! = 1**, o número de subconjuntos de um conjunto pode ser obtido com qualquer número de elementos no subconjunto. A partir daí, nessa primeira parte do capítulo, conduzimos outros exemplos a serem discutidos com os alunos. São exemplos importantes no sentido de permitir uma compreensão do que é combinar e como calcular o número de combinações.

Na segunda parte do capítulo, Combinações e Arranjos, para reforçar a parte inicial, observamos outras situações. Numa delas, explicamos o que são arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, e até relacionamos arranjos com permutação e também com combinação. Não consideramos fundamental em contagem considerar arranjos simples como mais um caso de problemas de contagem. Entendemos que possa ser conduzido a partir de permutação e de combinação.

Na parte final do capítulo, abordamos situações de contagem com restrições. Tradicionalmente, essas situações também são conhecidas por combinações condicionadas. Nas situações apresentadas, é fundamental a interferência do professor explicando como proceder no cálculo para observar os elementos que figuram ou os elementos que não figuram na formação de grupos de contagem.

Questões e Reflexões

Página 215

Pense em como determinar o número total de escolhas de 5 bolas de sorvete de sabores diferentes a partir de 8 sabores disponíveis. Represente os sabores por letras e faça todas as combinações possíveis.

Observações e sugestões

- Como os alunos já viram problemas de contagem sobre permutações, há uma necessidade em destacar, já nos primeiros exemplos de combinações, que a ordem nos agrupamentos não interessa nessas situações. Daí é fundamental associarmos o fato de combinar, por exemplo, 5 elementos 3 a 3 com o de formar subconjuntos com 3 elementos a partir de um conjunto que tem 5 elementos.
- Como no capítulo inteiro há um bom número de exercícios, parte pode ser conduzida para compor alguma atividade avaliativa, talvez até em duplas.
- É importante que os alunos elaborem situações de contagem envolvendo combinações. Uma atividade interessante é dividir a turma em pequenos grupos. Cada grupo deverá elaborar e resolver para os demais algumas situações de contagem que possam envolver permutação, combinação e arranjo.

Capítulo 16 – Binômio de Newton

Iniciamos o capítulo com uma situação geométrica envolvendo o volume de um cubo dividido em cubos e paralelepípedos. A ideia é levar o aluno a observar o cubo da soma de um binômio. Logo após, iniciamos a primeira parte do capítulo com as chamadas propriedades das combinações. Como fizemos questão de associar as combinações com a formação de subconjuntos, aproveitamos aqui para explorar resultados importantes referentes ao cálculo combinatório. A partir do chamado triângulo de Pascal ou simplesmente "triângulo dos números combinatórios", apresentamos e justificamos três importantes propriedades: a das igualdades complementares (que é tradicionalmente conhecida como taxas complementares); a soma dos números combinatórios de uma linha completa do triângulo de Pascal; a relação entre números combinatórios, que permite expressar a soma de dois consecutivos desses números de uma linha do triângulo de Pascal em função de outro número da linha imediatamente seguinte (tradicionalmente, é conhecido como relação de Stifel). Nessa parte, as justificativas dessas propriedades são feitas observando o cálculo combinatório relacionado à determinação do número de subconjuntos de um conjunto dado, conhecendo-se o número de elementos que ele possui e quantos elementos formarão os correspondentes subconjuntos. Aqui as atividades poderão ser encaminhadas para a resolução individual, desde que observem as respostas apresentadas.

Para iniciar a segunda parte do capítulo (Fórmula do desenvolvimento de um binômio), nos valemos de parte da história da Matemática. Apresentamos então o procedimento de como desenvolver potências naturais de um binômio e, a seguir, utilizamos exemplos. Relacionamos então o desenvolvimento da potência de um binômio com o triângulo de Pascal. Isso facilita um pouco o cálculo, evitando a necessidade de se obterem os coeficientes numéricos dos termos de um binômio a partir de combinações. Após apresentarmos alguns exemplos, enfatizamos a utilização de um binômio para o cálculo de potências naturais por meio de aproximações e demonstramos uma relação matemática que permite chegar ao número total de subconjuntos de um conjunto A dado, formado por n elementos, isto é, $\mathbf{2}^n$. Essa é uma situação que foi apresentada no volume 1 quando do estudo de Conjuntos.

A fórmula do termo geral é apresentada no final do capítulo. Ela deve ser compreendida como um procedimento que permite chegar a determinado termo do desenvolvimento sem a necessidade de obter um a um tais termos.

Observações e sugestões

- Antes de apresentar a fórmula do termo geral, pergunte aos alunos sobre a quantidade de termos existentes no desenvolvimento de um binômio. Por exemplo: quantos termos existem ao todo no desenvolvimento de $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})^{\mathbf{10}}$? Outra pergunta a ser conduzida: Qual é o 5º termo desse desenvolvimento em potências decrescentes de x? Somente então apresente a fórmula do termo geral.
- As ideias principais presentes no desenvolvimento de um binômio estão relacionadas às propriedades apresentadas na parte inicial deste capítulo, quando falamos das propriedades das combinações. Isso é fundamental para a compreensão do assunto.

Questões e Reflexões

Página 226

O valor de k é 4.

Página 231

1. São 7 termos.

2. O desenvolvimento é:

$1x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + 1a^6$. Cada uma dessas parcelas representa um termo desse desenvolvimento.

História da Matemática

Página 230

Sugestão de encaminhamento:

Leitura e resolução das atividades em pequenos grupos.

O texto aborda a história dos números binomiais, do triângulo de Pascal e dos procedimentos utilizados para o desenvolvimento da potência natural de um binômio.

Antes das duas questões propostas, os alunos deverão obter dois binômios, conforme abaixo.

$x^5 + 5ax^4 + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5a^4x + a^5 = (x + a)^5 \cdot x + a$

$x^6 + 5ax^5 + 10a^2x^4 + 10a^3x^3 + 5a^4x^2 + a^5x$

$+ ax^5 + 5a^2x^4 + 10a^3x^3 + 10a^4x^2 + 5a^5x + a^6$

$x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6 = (x + a)^6 \cdot x + a$

$x^7 + 6ax^6 + 15a^2x^5 + 20a^3x^4 + 15a^4x^3 + 6a^5x^2 + a^6x + ax^6 + 6a^2x^5 + 15a^3x^4 + 20a^4x^3 + 15a^5x + 6a^6x + a^7$

$x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7 = (x + a)^7$

Respostas das questões

1. O triângulo de Blaise Pascal poderia ser chamado de triângulo de Chu Shï-kie, matemático que foi contemporâneo da expansão mongol pela Europa Oriental.

2. O que entendemos como "binômio de Newton" poderia ser chamado também "binômio de Khayyam", ou outro nome. O fato é que Khayyam, além do triângulo numérico, que citamos anteriormente, também teria se debruçado sobre o desenvolvimento da potência de um binômio.

Explorando habilidades e competências

Página 237

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com a discussão coletiva das respostas para as questões apresentadas.

Respostas

1. 12% de 90 milhões = $0{,}12 \cdot 90 = 10{,}8 \rightarrow$ 10,8 milhões de linhas. Como só há 6 possibilidades para o primeiro dígito, com 6 dígitos teríamos $6 \cdot 10^5 = 600\,000 \rightarrow 600\,000$ linhas. Com 7 dígitos, 6 000 000 de linhas. Para os 10,8 milhões de linhas já eram necessários 7 dígitos.

2. Começando apenas com 7, 8 ou 9 e tendo 8 dígitos, o número de linhas era $3 \cdot 10^7$, ou seja, 30 milhões. Ao acrescentar o 9 no primeiro dígito e permitindo que qualquer outro seja usado no segundo, passamos a ter $1 \cdot 10^8$ linhas, ou seja, 100 milhões. O aumento foi de 70 milhões de linhas disponíveis.

3. O número é: $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9! = 362\,880$

O primeiro dígito será 9. Restam 8 dígitos a serem preenchidos. Destes, 4 serão zeros. Os outros 4 serão diferentes de zero. Colocando os zeros nas posições, temos uma combinação de 8 elementos 4 a 4, $C_{8,4} = 70 \rightarrow$ $\rightarrow$ 70 possibilidades. Para preencher as quatro casas restantes, temos (excluindo o zero) $9^4 = 6\,561 \rightarrow 6\,561$ possibilidades. Ao todo, temos 459 270 possibilidades.

Unidade 6 – Probabilidades e Estatística

Capítulos	Principais objetivos
17. Introdução à teoria das probabilidades	Compreender, de forma intuitiva, o que são eventos, espaço amostral, situações favoráveis e resultados possíveis quando da ocorrência de um experimento aleatório.
18. Cálculo de probabilidades	Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento em um experimento aleatório; compreender e empregar propriedades relativas ao cálculo de probabilidades.
19. Adição e multiplicação de probabilidades	Resolver situações referentes ao cálculo de probabilidades observando a utilização de adição de probabilidades em eventos e também a multiplicação de probabilidades.
20. Introdução à Estatística	Reconhecer a utilização de Estatística em situações diversas; representar os dados de uma pesquisa por meio de gráficos e tabelas; interpretar informações presentes em gráficos estatísticos.

Historicamente, a teoria das probabilidades tem sua origem nos chamados jogos de azar. Nessa introdução, é importante chamar a atenção dos alunos para o fato de que a ocorrência do resultado numa Mega-Sena representa um experimento aleatório, isto é, não sabemos de antemão qual será o resultado.

A unidade está dividida em quatro capítulos. No primeiro, apresentamos as ideias iniciais que permitirão uma compreensão mais intuitiva de probabilidade. Nos dois seguintes, objetivamos o cálculo das probabilidades de ocorrências de eventos. Para o final da unidade, abordamos os tópicos iniciais de Estatística. É importante observar que, já no início do Volume 3 desta coleção, ampliaremos o estudo de estatística com o cálculo de medidas de tendência central e também de medidas de dispersão.

Capítulo 17 – Introdução à Teoria das Probabilidades

Qual o meio de transporte mais seguro: um avião ou um automóvel? Essa é uma pergunta que precisa ser respondida a partir de dados estatísticos sobre os acidentes terrestres e aéreos existentes. Além disso, conforme essas informações, temos de calcular a probabilidade da ocorrência de um acidente. Duas áreas importantes do conhecimento aqui, nesta situação inicial, aparecem: probabilidade e estatística.

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira, não abordamos o conceito formal de probabilidade, mas conduzimos situações (com explicações) que permitem não apenas observar ideias intuitivas de probabilidades que os alunos já trazem em suas bagagens de vida, como também envolvê-los no assunto. São situações interessantes e simples.

Conceitos como espaço amostral e evento são abordados na segunda parte. Também aqui são conduzidas explicações sobre o que vem a ser evento certo e evento impossível. Embora nessa parte os alunos não sejam exigidos em cálculo de probabilidades (deixamos para os próximos capítulos), temos aqui uma importante conexão com a teoria dos conjuntos estudada no volume 1 desta coleção. Utilizamos conjunto para falar de espaço amostral. Qualquer subconjunto de um espaço amostral pode estar relacionado a um evento. Também aqui podemos falar de eventos complementares (ocorrer um evento e não ocorrer esse evento) pensando novamente em conjuntos. Num exemplo, antes das atividades que são propostas, também abordamos união e intersecção de conjuntos relacionados com união e intersecção, respectivamente, de eventos. Todas essas ideias são utilizadas quando do cálculo de probabilidades no próximo capítulo.

Observações e sugestões

- Este é um capítulo de introdução. As primeiras noções são aqui apresentadas. Não é necessário fazer cálculos de probabilidades, embora alguns alunos já apresentem resultados numéricos à medida que exemplos são dados.

- Uma atividade alternativa de avaliação poderia ser encaminhada para execução em grupos. Pesquisar probabilidades de ocorrência de acidentes aéreos, de acidentes de carro, de acidentes de trem, de um cometa atingir a Terra etc. São algumas ideias que podem ser ampliadas.

Questões e Reflexões

Página 242

1. Resposta pessoal. Sorteios de prêmios, por exemplo.

2. Sim.

Capítulo 18 – Cálculo de Probabilidades

A partir das ideias desenvolvidas no capítulo anterior sobre espaço amostral e eventos, trataremosagora do cálculo de probabilidades de ocorrência de eventos em experimentos aleatórios. Iniciamos com um exemplo bem simples sobre o lançamento de um dado. Cada uma das faces tem a mesma probabilidade de ocorrência, e podemos dizer que a ocorrência de cada uma dessas faces é chamada de evento elementar. A união desses eventos elementares corresponde ao espaço amostral. A partir dessas ideias, conduzimos o capítulo para que os alunos compreendam que a soma das probabilidades de ocorrência de todos os eventos elementares é 100% (ou 1). Assim, chegamos à ideia de probabilidade de um evento elementar num espaço amostral finito. Logo a seguir, ampliamos nosso estudo para conceituar probabilidade de evento. Esse é um momento importante. Exemplos e explicações apresentadas permitirão a compreensão do cálculo de probabilidades de ocorrência de eventos.

Três observações devem ser discutidas com os alunos (propriedades): a probabilidade de ocorrência de um evento igual ao próprio espaço amostral; a probabilidade de um evento igual ao conjunto vazio; e a variação da probabilidade de 0 a 1 para um evento qualquer de um espaço amostral. Para efeitos de cálculos, podemos conceituar a probabilidade de ocorrência de um evento A num espaço amostral como o quociente entre o número de casos favoráveis ao evento A e o número de casos possíveis do espaço amostral.

Apresentamos, então, exemplos que devem ser amplamente discutidos. Esses exemplos auxiliarão os alunos na compreensão de procedimentos a serem adotados quando do cálculo de probabilidades. Esse é um momento em que devemos ter muito cuidado na condução do processo em sala de aula. A não compreensão das resoluções dessas situações propostas certamente será sentida na última parte deste capítulo e provavelmente no próximo capítulo. Sendo assim, estratégias de conduzir exercícios para resolução em grupos e correção coletiva permitem diminuir essas dificuldades.

Na última parte desse capítulo, fazemos uma conexão importante entre duas unidades desse livro: Análise Combinatória e Probabilidades. Apresentamos exemplos em que os cálculos do número de situações favoráveis para a ocorrência de um evento e os cálculos do número de resultados possíveis (número de elementos do espaço amostral) são realizados com o auxílio do que foi estudado em Análise Combinatória (permutações, combinações, princípio multiplicativo). Nessas situações, temos o cálculo da probabilidade quando da escolha de pessoas num grupo, a probabilidade de ganhar na Mega-Sena, probabilidade de ganhar na Loteria Esportiva (retomando, nessas duas últimas situações, as questões observadas na introdução da unidade) e também a probabilidade relacionada à Geometria.

Observações e sugestões

- Como ao longo deste capítulo retomamos a situação apresentada no início da unidade sobre Mega-Sena e Loteria Esportiva, seria interessante trazer para sala de aula "volantes" desses dois jogos. No verso desses volantes, podem ser observadas as probabilidades que um apostador tem ao fazer os jogos. Aqui uma atividade interessante seria que os alunos, utilizando o cálculo combinatório, chegassem às probabilidades indicadas. Talvez um trabalho em equipe dentro da sala de aula e com o auxílio de calculadora represente uma boa e motivadora atividade.
- Um cuidado: se temos 5 pessoas em um grupo e queremos calcular a probabilidade de que duas dessas pessoas sejam escolhidas, o número de situações possível, isto é, o número de elementos do espaço amostral não é 5, mas o número de "combinações dessas 5 pessoas tomadas 2 a 2".
- Comente com os alunos que, quando dizemos que a probabilidade de ocorrer "cara" no lançamento de uma moeda é de 50%, isso não significa que, lançando duas vezes a moeda, tenhamos cara em uma e coroa na outra. A ideia é que, se lançarmos muitas vezes essa moeda, quanto mais vezes fizermos isso, mais próximo de 50% estará a ocorrência da face "cara".

Questões e reflexões

Página 250

0,25

Página 253

Considere que a probabilidade de chover hoje,em certa cidade, seja igual a 0,75. Qual é a probabilidade de não chover nessa cidade?

1. O número de senas é: $C_7^6 = 7$.

2. É 7 vezes o valor da aposta simples.

3. A probabilidade é $p = \frac{C_7^6}{C_{60}^6}$.

Capítulo 19 – Adição e multiplicação de Probabilidades

Este é um capítulo que exigirá muito mais não apenas do aluno, mas também do professor. Trabalhamos aqui com a probabilidade de união de eventos, probabilidade de intersecção de eventos, probabilidade condicional e independência de eventos. Também temos aqui conexões importantes a serem feitas com a teoria dos conjuntos. Dividimos o capítulo em três partes. Para desenvolver cada uma delas, utilizamos exemplos ilustrativos.

A primeira parte é iniciada com o cálculo da probabilidade de ocorrência da união de dois eventos. A utilização de diagramas da teoria dos conjuntos auxilia na compreensão. Além disso, a relação sobre o número de elementos da união de dois conjuntos, isto é, $\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$, conduz à relação $\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$ (probabilidade da união de dois eventos), conforme explicamos no livro do aluno. Apresentamos exemplos que devem ser discutidos com a turma. Em seguida, também utilizando relações entre conjuntos, chegamos à relação $1 = p(A) + p(\overline{A})$ (a probabilidade de ocorrer um evento adicionada à probabilidade de esse evento não ocorrer é igual à probabilidade do evento certo, isto é, 100%).

A probabilidade condicional está na segunda parte deste capítulo. Utilizamos exemplos que julgamos serem adequados para levar os alunos a compreenderem a probabilidade condicional, mesmo assim, esses exemplos precisam ser devidamente discutidos. Nessa discussão, será importante observar as relações entre probabilidades e a teoria dos conjuntos.

A terceira parte do capítulo trata da independência de eventos. Duas situações são utilizadas no Livro do Aluno objetivando conduzir os alunos aos conceitos de eventos dependentes e eventos independentes. A partir dessas situações, dizemos que dois eventos consecutivos A e B, nessa ordem, são ditos independentes quando a ocorrência de B não é afetada pela ocorrência do evento A. Esses eventos seriam considerados dependentes quando a ocorrência de B é afetada pela ocorrência do evento A. Logo após a discussão das duas situações, há um exemplo que auxilia na compreensão do que vem a ser eventos independentes. No exemplo, um casal planeja ter 3 filhos. Consideramos então que o evento A consiste da ocorrência de pelo menos dois filhos do sexo masculino, e o evento B, de pelo menos um filho de cada sexo. Mostramos que os eventos A e B são independentes.

No final do capítulo fizemos uma observação importante a respeito do cálculo envolvendo distribuição binomial. Esse é um exemplo que necessita ser amplamente discutido com a turma.

Observações e sugestões

- Antes de iniciar o capítulo, seria prudente uma retomada rápida de algumas ideias importantes sobre a teoria dos conjuntos estudada no primeiro livro desta coleção. Uma trata do número de elementos da união de dois conjuntos e outra, do complementar de um conjunto A em relação ao universo U.
- Atividades de pesquisa envolvendo as disciplinas de Matemática e Biologia no assunto probabilidade podem ser encaminhadas. Isso levará o aluno à chamada distribuição binomial. Uma ideia é o cálculo da probabilidade relacionada à herança genética.

Questões e reflexões

Página 264

Resposta pessoal. Depende da interpretação do aluno.

Capítulo 20 – Introdução à Estatística

Embora tenhamos aqui uma introdução à Estatística, consideramos que este capítulo é fundamental para levar os alunos a observarem a importância desse ramo do conhecimento. Além de conceituarmos Estatística ("parte da Matemática constituído de um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que, entre outros tópicos, envolve o planejamento do experimento a ser realizado, a coleta quantificada de dados, a inferência e o processamento e análise das informações"), também trabalharemos com gráficos, que são empregados como forma de apresentar os dados resultantes de uma pesquisa, por exemplo, de forma atraente para o leitor. Os gráficos estatísticos que aqui são trabalhados, em sua maioria, não representam novidade para os alunos.

O capítulo está dividido em três partes. Na primeira, buscamos conduzir noções básicas para Estatística. Inicialmente, duas ideias importantes numa pesquisa: população e amostra. Por meio de exemplos, e algumas explicações, procuramos caracterizar a população e a amostra. É importante que, numa pesquisa de opinião sobre o que os brasileiros pensam, os alunos compreendam a impossibilidade de colher a opinião de todos (distância, custo etc.). Sendo assim, é necessário que a pesquisa seja feita em um grupo de pessoas. Esse grupo deve ser representativo. Se o objetivo é fazer uma pesquisa sobre o tipo de programa de televisão preferido, e escolhermos somente os jovens que estão no 3º ano do Ensino Fundamental, não teremos uma "amostra" representativa da população.

Na segunda parte do capítulo, estudamos frequência absoluta e frequência relativa, que são os dados numéricos presentes em pesquisas e, geralmente, indicados por meio de tabelas. Apresentamos uma tabela contendo informações sobre uma situação hipotética relacionada à quantidade de horas inteiras de sono entre 50 alunos do Ensino Médio, com idades de 15 a 17 anos. A partir daí, abordamos frequência absoluta e frequência relativa.

Como podemos organizar os dados de uma pesquisa? Nesta terceira parte do capítulo, procuramos apresentar os chamados gráficos estatísticos. Para tanto, utilizamos exemplos extraídos de revistas e jornais. São exemplos contendo informações diferentes e atuais, representadas por meio de gráficos. Após cada exemplo, algumas observações foram feitas para que os alunos observem como ler as informações apresentadas. Por meio desses exemplos, especificamos alguns dos principais tipos de gráfico: colunas ou barras, poligonal ou de linha e gráfico de setores. Falamos, ainda, em histogramas.

Muitos dos nossos alunos dominam ferramentas computacionais para a construção de gráficos estatísticos. Seria extremamente proveitoso que atividades nesse sentido fossem encaminhadas, até mesmo para compor parte da avaliação. Caso na escola haja um laboratório de informática, a construção de diversos gráficos estatísticos poderia ser planejada pelo professor junto aos alunos, em computadores.

Observações e sugestões

- Uma ideia, ao final da primeira parte do capítulo, que pode compor parte da avaliação da unidade: os alunos, em equipe, deverão realizar uma pesquisa em sua comunidade. Devem definir qual o tema, a forma como farão a pesquisa, como será a amostra da população e, no final, apresentar o resultado da pesquisa.

- A terceira parte do capítulo, sobre gráficos, pode ter seu encaminhamento iniciado de forma um pouco diferente do que está proposto no livro: solicite, com certa antecedência, que os alunos tragam para a sala de aula diversos gráficos que encontrarem em revistas ou jornais. A partir desses gráficos, pode-se, então, conduzir o conteúdo proposto.
- Utilizando os gráficos que os alunos trouxeram (item anterior desse quadro), proponha que organizem gráficos diferentes, com o auxílio de planilhas eletrônicas, porém, com os mesmos dados contidos nos anteriores.

Uma sugestão de atividade para ser feita em duplas: solicite que pesquisem o que é pictograma e apresentem exemplo da utilização desse tipo de gráfico estatístico.

Questões e reflexões

Página 270

1. Não. A amostra não seria representativa, pois temos $\frac{1}{3}$ da população formada por meninos e $\frac{2}{3}$ por meninas, conforme apresentado.
2. Resposta pessoal.

Página 272

A probabilidade seria de 10% (5 alunos em 50)

Página 276

1. Resposta pessoal. Não pagar em dia, isto é, estar atrasado com os pagamentos.
2. Aproximadamente 2 155 pessoas (26% de 8 288 pessoas pesquisadas).

História da Matemática

Página 281

Sugestão de encaminhamento:

Leitura individual, com discussão coletiva do texto e das questões propostas no final.

O texto trata de marcos importantes da história da Estatística. A ideia é que os alunos percebam que a estatística tem sua origem no levantamento de dados populacionais.

Respostas para as questões

1. Heródoto mencionou um levantamento feito por volta de 3050 a.C. no qual se procurava sondar a riqueza da população egípcia, tendo como finalidade maior averiguar que recursos humanos e econômicos estavam disponíveis para a construção das pirâmides.
2. Em uma segunda fase, também os levantamentos eram feitos buscando o conhecimento mais detalhado da população, porém os objetivos eram variados: saúde pública, número de nascimentos, número de mortes, sondagens sobre comércios.
3. John Graunt e William Petty, no século XVII.

Explorando habilidades e competências

Página 286

Sugestão de encaminhamento:

Em duplas, com a discussão coletiva das respostas. Pode-se utilizar essa atividade como parte integrante da avaliação.

Respostas das questões propostas

1. Organizando os dados do problema em uma tabela de dupla entrada, temos:

	Tiveram dor	Não tiveram dor	Total
3 x ao dia			400
4 x ao dia	211		400
TOTAL	315		800

Completando a tabela, temos:

	Tiveram dor	Não tiveram dor	Total
3 x ao dia	$315 - 211 = 104$	$400 - 104 = 296$	400
4 x ao dia	211	$400 - 211 = 189$	400
TOTAL	315	$296 + 189 = 485$	800

Verificando: $315 + 485 = 800$.

A probabilidade de escolher uma pessoa que não tenha dor tomando o medicamento três vezes ao dia é de $\frac{296}{800} = 37\%$.

2. Para auxiliar na análise das respostas, pode-se fazer uma tabela com os dados do enunciado:

Dias de tratamento	Nº de comprimidos	Frequência
3	6	30%
5	10	50%
7	14	10%
10	20	10%

a) O número de comprimidos tomados que aparece com maior frequência é 10.

b) Supondo um total de 10 pessoas, temos 3 tomando 6 comprimidos (18 comprimidos), 5 tomando 10 (50 comprimidos), 1 tomando 14 (14 comprimidos) e 1 tomando 20 (20 comprimidos). Ao todo, temos (18 + 50 + 14 + 20) comprimidos para 10 pessoas, o que dá uma média de $\frac{102}{10} = 10{,}2$ comprimidos por pessoa.

c) A probabilidade de uma pessoa tomar 14 ou 20 comprimidos é de 20%.

d) A probabilidade de uma pessoa tomar 6, 10 ou 14 comprimidos é de 90%.

3. Respostas pessoais. Espera-se que os alunos percebam que a probabilidade e a estatística trabalham com análise de riscos de modo científico e seus resultados são tidos como fatos e não apenas como "opiniões".

4. a) Em 3 dias, o doente terá contato com 60 pessoas. Se 70% das pessoas são vacinadas, temos 42 vacinadas e 18 não vacinadas. Se o vírus é transmitido para 25% das pessoas não vacinadas, teremos 4,5 pessoas contagiadas nesse período. Assim, a probabilidade de haver uma epidemia é de $\frac{4{,}5}{60} = 7{,}5\%$.

b) De modo geral, temos $(100 - n) \cdot \frac{60}{100}$ é o número de pessoas não vacinadas. 25% vinte e cinco por cento (ou ¼) desse número é o total de pessoas contaminadas. Dividindo o resultado por 60, temos a probabilidade de haver epidemia.

Para $n = 80$, temos:

$$20 \cdot \frac{60}{100} = 12 \rightarrow \frac{1}{4} \text{ de } 12 = 3 \rightarrow \frac{30}{60} = 5\% \text{ de probabilidade de haver epidemia.}$$

c) Para $n = 90$, temos:

$$10 \cdot \frac{60}{100} = 6 \rightarrow \frac{1}{4} \text{ de } 6 = 1{,}5 \rightarrow \frac{1{,}5}{60} = 2{,}5\% \text{ de probabilidade de haver epidemia.}$$

5. Generalizando a questão anterior, temos:

$x = (60 - n\% \text{ de } 60)$ é o número de pessoas não vacinadas.

$y = 25\%$ de x é o número de pessoas contagiadas.

Deseja-se ter $y < 1\%$ de 60, ou seja, $y < 0{,}6$.

Resolvendo a inequação:

$0{,}25\,x < 0{,}6$

$x < \frac{0{,}6}{0{,}25}$

$x < 2{,}4$

$60(1 - n\%) < 2{,}4$

$1 - n\% \; \frac{2{,}4}{60}$

$n\% > 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$n > 96\%$

Logo, pelo menos 96% da população deve ser vacinada para garantir a imunidade do rebanho.

RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

UNIDADE 1 – MATEMÁTICA FINANCEIRA

CAPÍTULO 1 – PROPORÇÃO E PORCENTAGEM

Página 14

1. a) $\frac{x}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow 4x = 14 \therefore x = \frac{7}{2}$

b) $\frac{x+1}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x + 2 = 18 \Rightarrow 2x = 16 \therefore x = 8$

c) $\frac{x}{3} = \frac{-2}{x-5} \Rightarrow x^2 - 5x = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \therefore x = 2$ ou $x = 3$

2. a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{12} = \frac{48}{72} = k \Rightarrow \frac{48}{72} = k \therefore k = \frac{2}{3}$

b) $\frac{x}{3} = \frac{2}{3} \therefore x = 2$ e $\frac{y}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 24 \therefore y = 8$

3. Os valores de x e y são proporcionais a 3 e 4, respectivamente. Assim, temos infinitas possibilidades, como $x = 6$ e $y = 8$ ou $x = 18$ e $y = 24$.

4. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7} = k \therefore x = 2k, y = 3k$ e $z = 7k$

$x + y + z = 60 \Rightarrow 2k + 3k + 7k = 60 \therefore k = 5$

$3x - y + 2z = 3 \cdot 2k - 3k + 2 \cdot 7k = 17k = 17 \cdot 5 = 85$

5. $x \cdot 2 = y \cdot 3 = z \cdot 7 = k \therefore x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}$ e $z = \frac{k}{7}$

$x + y + z = 82 \Rightarrow \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{7} = 82 \Rightarrow$

$\Rightarrow 21k + 14k + 6k = 82 \cdot 42 \therefore k = 84$

$3x - y + 2z = 3 \cdot \frac{k}{2} - \frac{k}{3} + 2 \cdot \frac{k}{7} =$

$= \frac{63k - 14k + 12k}{42} = \frac{61k}{42} = \frac{61 \cdot 84}{42} = 122$

6. $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{7} = k \therefore \alpha = 2k, \beta = 3k$ e $\gamma = 7k$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow 2k + 3k + 7k = 180° \therefore k = 15°$

$\gamma = 7k = 7 \cdot 15° = 105°$

7. Sendo E, P e M, respectivamente, a quantidade de enfermeiros, a quantidade de pacientes e a quantidade de médicos, temos:

$\frac{E}{P} = \frac{1}{6} \Rightarrow P = 6E$

$\frac{M}{E} = \frac{3}{10} \Rightarrow M = \frac{3E}{10}$

$\frac{P}{M} = \frac{6E}{\frac{3E}{10}} = 6E \cdot \frac{10}{3E} = 20$

São 20 pacientes para cada médico.

8. a) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$

$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{15}{5} \therefore a = 9\,\text{cm}$ e $b = 12\,\text{cm}$

b) $\frac{5\,\text{cm}}{15\,\text{cm}} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{3\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + 5\,\text{cm}}{9\,\text{cm} + 12\,\text{cm} + 15\,\text{cm}} = \frac{12\,\text{cm}}{36\,\text{cm}} = \frac{1}{3}$

9. $\frac{x}{25} = \frac{y}{28} = \frac{z}{32} = k \therefore x = 25k, y = 28k$ e $z = 32k$

$x + y + z = \text{R\$}\,170.000,00 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25k + 28k + 32k = \text{R\$}\,170.000,00 \therefore k = \text{R\$}\,2.000,00$

x = R$ 50.000,00 (filho com 25 anos)

y = R$ 56.000,00 (filho com 28 anos)

z = R$ 64.000,00 (filho com 32 anos)

10. a) $0,25 \cdot 1\,200 = 300$

b) $0,12 \cdot 150 = 18$

c) $0,05 \cdot 800 = 40$

d) $0,70 \cdot 2\,500 = 1750$

e) $0,375 \cdot 3\,000 = 1125$

11. a) $250 \cdot 1,20 = 300$

b) $800 \cdot 0,80 = 640$

c) $1500 \cdot 1,45 = 2175$

d) $2\,000 \cdot 0,78 = 1560$

12. a) Uma pessoa que recebeu R$ 22.400,00 em 2015, de acordo com a tabela, está isenta de pagar imposto.

b) Uma pessoa que recebeu R$ 35.500,00 em 2015, deve pagar o imposto:

$0{,}15 \cdot$ R$ 35.500,00 $-$ R$ 4.198,26 $=$ R$ 1.126,74

Página 17

1. O novo salário de Pedro é igual a:

R$ 1.200,00 $\cdot$ 1,12 $=$ R$ 1.344,00

2. O valor do carro após um ano será igual a:

$0{,}90 \cdot$ R$ 30.000,00 $=$ R$ 27.000,00

3. O valor do apartamento após um ano será igual a:

$1{,}12 \cdot$ R$ 150.000,00 $=$ R$ 168.000,00

4. Se um valor P sofrer um aumento de 20% seguido de um desconto de 10%, passará a valer:

$P \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}90 = P \cdot 1{,}08$

Assim, um aumento de 20% seguido de um desconto de 10% é equivalente a um único aumento de 8%, ou seja, $x = 8$.

5. Se um valor P sofrer dois descontos sucessivos, um de 20% e outro de 30%, passará a valer:

$P \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}70 = P \cdot 0{,}56$

Assim, dois descontos sucessivos, um de 20% e outro de 30%, equivalem a um único desconto de 44%, ou seja, $x = 44$.

6. Nessa promoção, paga-se apenas $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$ do valor total, ou seja, o desconto sobre cada unidade vendida é igual a 25%.

7. a) O valor será menor, pois:

$x \cdot 1{,}10 \cdot 0{,}90 = 0{,}99 \cdot x < x$

b) Como $0{,}99x = 99\%$ de x, a diferença é 1 ponto percentual.

8. Os valores pagos pelo televisor e pelo aparelho de DVD foram, respectivamente, iguais a:

$0{,}84 \cdot$ R$ 1.000,00 $=$ R$ 840,00 e $0{,}90 \cdot$ R$ 200,00 $=$ $=$ R$ 180,00

Como pagou um total de R$ 1.020,00 e $\frac{1.020{,}00}{1.200{,}00} = 0{,}85$, o desconto total da compra foi de 15%.

9. a) Se a medida do raio aumentar em 30%, o comprimento será igual a:

$2\pi \cdot 1{,}30 \cdot 10 \text{ cm} = 1{,}30 \cdot 2\pi \cdot 10 \text{ cm}$

Como $2\pi \cdot 10$ cm é o comprimento inicial, então o aumento será igual a 30%.

b) Aumentando a medida do raio em 30%, a área será igual a:

$\pi \cdot (1{,}30 \cdot 10)^2 \text{ cm}^2 = 1{,}30^2 \cdot \pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2 =$

$= 1{,}69 \cdot \pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2$

Como $\pi \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ é a área inicial, então o aumento será igual a 69%.

CAPÍTULO 2 – JURO SIMPLES

Página 20

1. $12 \cdot 1{,}5\% = 18\%$

2. O valor que João deverá pagar é

R$ 800,00 $\cdot (1 + 0{,}01 \cdot 12) =$ R$ 896,00

3. $J =$ R$ 3.000,00 $\cdot 0{,}025 \cdot 8 =$ R$ 600,00

4. $M =$ R$ 650,00 $\cdot (1 + 0{,}018 \cdot 10) =$ R$ 767,00

5. R$ 10.750,00 $=$ R$ 10.000,00 $\cdot (1 + i \cdot 15) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}075 = 1 + i \cdot 15 \therefore i = 0{,}005 = 0{,}5\%$

6. R$ 2.434,32 $= C \cdot (1 + 0{,}008 \cdot 36) \therefore C =$ R$ 1.890,00

7. $\frac{204}{30} = 6{,}8$ (meses)

$M =$ R$ 5.000,00 $\cdot (1 + 0{,}012 \cdot 6{,}8) =$ R$ 5.408,00

8. $M = 3 \cdot C \Rightarrow C \cdot (1 + 0{,}04 \cdot t) = 3 \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 0{,}04 \cdot t = 3 \therefore t = 50$ (meses)

9. Resposta pessoal.

Página 22

1. $\begin{cases} C \cdot (1 + i \cdot 5) = \text{R\$}\,537{,}50 \\ C \cdot (1 + i \cdot 8) = \text{R\$}\,560{,}00 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\text{R\$}\,537{,}50}{1 + 5i} = \frac{\text{R\$}\,560{,}00}{1 + 8i} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{R\$}\,537{,}50 + i \cdot \text{R\$}\,4.300{,}00 =$

$= \text{R\$}\,560{,}00 + i \cdot \text{R\$}\,2.800{,}00 \therefore i = 0{,}015 = 1{,}5\%$

$C \cdot (1 + i \cdot 8) = \text{R\$}\,560{,}00 \Rightarrow C \cdot (1 + 0{,}015 \cdot 8) =$

$= \text{R\$}\,560{,}00 \therefore C = \text{R\$}\,500{,}00$

2. $\begin{cases} C \cdot (1 + 0{,}02 \cdot x) = \text{R\$}\,3.100{,}00 \\ C \cdot [1 + 0{,}02 \cdot (x + 5)] = \text{R\$}\,3.350{,}00 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} C + 0{,}02 \cdot x \cdot C = \text{R\$}\,3.100{,}00 \\ C + 0{,}02 \cdot x \cdot C + 0{,}02 \cdot 5 \cdot C = \text{R\$}\,3.350{,}00 \end{cases}$

$C + 0{,}02 \cdot x \cdot C + 0{,}02 \cdot 5 \cdot C = \text{R\$}\,3.350{,}00 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{R\$}\,3.100{,}00 + 0{,}1 \cdot C = \text{R\$}\,3.350{,}00 \therefore C = \text{R\$}\,2.500{,}00$

$C \cdot (1 + 0{,}02 \cdot x) = \text{R\$}\,3.100{,}00 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{R\$}\,2.500{,}00 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot x) = \text{R\$}\,3.100{,}00 \therefore x = 12$

3. R$ 800,00 − R$ 450,00 = R$ 350,00

R$ 350,00 · (1 + i · 2) = R$ 406,00 ∴ i = 0,08 = 8%

4. Sendo x, $2x$ e (R$ 11.000,00 − $3x$) os três capitais aplicados, temos:

$x \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 24) + 2x \cdot (1 + 0{,}024 \cdot 30) +$
$+ (\text{R\$ } 11.000{,}00 - 3x) \cdot (1 + 0{,}018 \cdot 20) = \text{R\$ } 16.640{,}00 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}48x + 3{,}44x + \text{R\$ } 14.960{,}00 - 4{,}08x = \text{R\$ } 16.640{,}00$

$\therefore x = \text{R\$ } 2.000{,}00$

Assim, os capitais são iguais a R$ 2.000,00, R$ 4.000,00 e R$ 5.000,00.

5. R$ 5.000,00 · (1 + 0,02 · 12) = R$ 6.200,00

R$ 3.000,00 · (1 + 0,01 · 12) = R$ 3.360,00

R$ 7.000,00 · (1 + 0,04 · 12) = R$ 10.360,00

Assim, o montante resgatado por Maria Eduarda foi igual a R$ 19.920,00.

6. Sendo a_1 = 1020 a dívida após o 1º mês, então a dívida após o 24º mês será:

$a_{24} = a_1 + 23 \cdot r = 1020 + 23 \cdot 20 = 1480$

Assim, após 24 meses, Marina deverá pagar R$ 1.480,00.

7. $\left.\begin{array}{l}\text{R\$ } 250{,}00 \text{ (entrada)} \\ \text{R\$ } 400{,}00 \text{ (2 meses)}\end{array}\right] \text{R\$ } 650{,}00$

R$ 600,00 (à vista)

a) 600 − 250 = 350

Montante pago (2 meses) = R$ 400,00

Juros de R$ 50,00

$50 = 350 \cdot i \cdot 2 - \Rightarrow i = 0{,}07 = 7\%$ ao mês

b) $50 = 350 \cdot \frac{25}{100} \cdot t$

$t = 5{,}7$ (meses)

$t \cong 6$ (meses)

8. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 3 – JUROS COMPOSTOS

Página 24

1. M = R$ 10.000,00 · $(1 + 0{,}02)^3$ = R$ 10.612,08

2. M = R$ 40.000,00 · $(1 + 0{,}016)^8 \cong$
$\cong$ R$ 40.000,00 · 1,1354 $\cong$ R$ 45.416,00

3. M = R$ 2.000,00 · $(1 + 0{,}01)^{60} \cong$ R$ 2.000,00 · 1,8167 $\cong$
$\cong$ R$ 3.633,40

4. R$ 10.985,00 = C · $(1 + 0{,}30)^3$ ∴ C = R$ 5.000,00

5. R$ 8.240,00 = R$ 8.000,00 · $(1 + i) \Rightarrow 1 + i = 1{,}03$
$\therefore i = 0{,}03 = 3\%$

6. $C \cdot (1 + 0{,}25)^4 = C \cdot 2{,}44140625 > 2 \cdot C$

Assim, o montante será maior que o dobro do capital inicial aplicado.

7. $C \cdot (1 + i)^3 = 1{,}331 \cdot C \Rightarrow 1 + i = 1{,}10 \therefore i = 0{,}10 =$
$= 10\%$

8. R$ 22.000,00 · $(1 + 0{,}01)^{12} \cong$ R$ 22.000,00 · 1,1268 $\cong$
$\cong$ R$ 24.789,60

Assim, em 12 meses, Pedro não conseguirá comprar o carro de Paulo.

9. $C \cdot (1 + 0{,}20 \cdot 3) + \text{R\$ } 2.304{,}00 = C \cdot (1 + 0{,}20)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}60 \cdot C + \text{R\$ } 2.304{,}00 = 1{,}728 \cdot C \therefore C = \text{R\$ } 18.000{,}00$

10. Sendo $10x$ o valor do IPTU, à vista, o contribuinte pagará:

$10x \cdot 0{,}93 = 9{,}3 \cdot x$

Sem o desconto, cada parcela é igual a x. Além disso, o saldo restante terá um rendimento de 0,6% ao mês. Assim, o saldo atualizado do contribuinte ao longo de cada mês está representado na tabela a seguir.

Mês	Saldo
1	$9{,}3 \cdot x - x = 8{,}3 \cdot x$
2	$8{,}3 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 7{,}35 \cdot x$
3	$7{,}35 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 6{,}40 \cdot x$
4	$6{,}40 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 5{,}44 \cdot x$
5	$5{,}44 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 4{,}47 \cdot x$
6	$4{,}47 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 3{,}50 \cdot x$
7	$3{,}50 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 2{,}52 \cdot x$
8	$2{,}52 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 1{,}54 \cdot x$
9	$1{,}54 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong 0{,}55 \cdot x$
10	$0{,}55 \cdot x \cdot 1{,}006 - x \cong -0{,}45 \cdot x$

Assim, como o último valor é negativo, é vantagem, financeiramente, pagar à vista. Para facilitar os cálculos, seria mais simples atribuir um valor qualquer para o IPTU.

Página 30

1. $C \cdot (1 + 0{,}20)^n = 2 \cdot C \Rightarrow (1{,}20)^n = 2 \Rightarrow \log_{10} (1{,}20)^n =$
$= \log_{10} 2 \Rightarrow n \cdot 0{,}08 \cong 0{,}30 \therefore n \cong 3{,}75$ (anos); aproximadamente 3 (anos) e 9 (meses)

2. R\$ 150.000,00 $\cdot$ $(1 + 0{,}12)^n$ = R\$ 300.000,00 $\Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}12)^n = 2 \Rightarrow \log_{10}(1{,}12)^n = \log_{10} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot 0{,}05 \cong 0{,}30 \therefore n \cong 6$ (anos)

3. $13\,950 = 3\,000(1+0{,}15)^t \Rightarrow 4{,}65 = 1{,}15^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 4{,}65}{\log 1{,}15} \cong \frac{0{,}667}{0{,}061} \cong 10{,}93$$

Aproximadamente 11 meses.

4. $3C = C(1+0{,}03)^t \Rightarrow 3 = 1{,}03^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log 1{,}03} \cong \frac{0{,}477}{0{,}013} \cong 36{,}69$$

Aproximadamente 37 meses.

5. $48\,760 = 40\,000(1+0{,}02)^t \Rightarrow 1{,}219 = 1{,}02^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1{,}219}{\log 1{,}02} \cong \frac{0{,}0860}{0{,}0086} \cong 10$$

Aproximadamente 10 meses.

6. $50\,000 = 25\,000(1+0{,}04)^t \Rightarrow 2 = 1{,}04^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = \frac{\log 2}{\log 104 - \log 100} =$$

$$= \frac{\log 2}{\log 2^3 + \log 13 - \log 10^2} = \frac{\log 2}{3\log 2 + \log 13 - 2\log 10} \cong$$

$$\cong \frac{0{,}301}{0{,}017} \cong 17{,}7$$

Aproximadamente 18 meses.

7. $6\,440 = 4\,000(1+0{,}1)^t \Rightarrow 1{,}61 = 1{,}1^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1{,}61}{\log 1{,}1} \cong \frac{0{,}207}{0{,}041} \cong 5{,}05$$

Aproximadamente 5 meses.

8. $3\,000 = 2\,000(1+0{,}035)^t \Rightarrow 1{,}5 = 1{,}035^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}035} \cong \frac{0{,}176}{0{,}015} \cong 11{,}73$$

Logo, Ricardo terá o dinheiro para a viagem.

9. $200\,000 = 100\,000(1+0{,}006)^t \Rightarrow 2 = 1{,}006^t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}006} \cong \frac{0{,}3010}{0{,}0026} \cong 115{,}77$$

Aproximadamente 116 meses.

10. Resposta pessoal.

VESTIBULARES E ENEM

Página 31

1. Alternativa **b**.

Seja x o valor bruto que o professor Cláudio recebeu pela consultoria. Temos:

$0{,}11 \cdot x = 0{,}075 \cdot x + 105 \Leftrightarrow x =$ R\$ 3.000,00

Total de descontos:

$(0{,}11 + 0{,}075) \cdot 3\,000 = 555$

Logo, o valor líquido que o professor Cláudio recebeu foi:

R\$ 3.000,00 − R\$ 555,00 = R\$ 2.445,00

2. Alternativa **d**.

Total dos percentuais indicados em cinza:

9,1% + 13,5% + 18,5% + 5,5% = 46,6%

Logo:

$0{,}466 \cdot 557\,000\,000 = 259\,562\,000$

Ou seja:

259,562 milhões de tep

3. Alternativa **b**.

O imposto é calculado sobre o valor que excede dentro de cada faixa. Por isso, um ganho mensal de R\$ 2.100,00 paga:

(R\$ 2.100,00 − R\$ 1.900,00) $\cdot$ 7,5% = R\$ 15,00

No caso das três parcelas, temos os seguintes impostos:

R\$ 1.900,00 $\rightarrow$ Isento

R\$ 900,00 $\cdot$ 7,5% = R\$ 67,50

R\$ 200,00 $\cdot$ 15% = R\$ 30,00

Total: R\$ 67,50 + R\$ 30,00 = R\$ 97,50 $\cong$ R\$ 98,00

4. Alternativa **a**.

Como antes ele comprava X produtos e depois do aumento de 25% na inflação ele só pode comprar Y, temos X = 1,25Y.

Logo:

$$\frac{1{,}25Y - Y}{1{,}25Y} = \frac{1}{5} = 20\%$$

5. Alternativa **c**.

Como a primeira parcela é paga à vista, apenas sobre R\$ 860,00 − R\$ 460,00 = R\$ 400,00 é que rende R\$ 460,00 − R\$ 400,00 = R\$ 60,00 de juros. Logo:

$$\frac{60}{400} = 0{,}15 = 15\%$$

6. Alternativa **b**.

Temos:

$y \cdot x = k \Rightarrow 6 \cdot 25 = k \Rightarrow k = 150$

Logo, quando $x = 15$, y terá valor igual a 10.

7. a) Sofia gastaria $\frac{30}{600} \cdot 12 = 0{,}6$, ou seja, R$ 0,60 em cada lavagem com o sabão C.

b) Sofia gasta $\frac{100}{3\,000} \cdot 24 = 0{,}8$, ou seja, R$ 0,80 em cada lavagem com o sabão D. Como na compra de n vasilhames, com $1 < n \leqslant 10$, o mercado oferece um desconto de $3n\%$, então R$ $0{,}80 \cdot (1 - 0{,}03n)$ é o valor gasto com cada lavagem com o sabão D, em função do número de vasilhames comprados.

Logo, para que Sofia gaste menos reais com o sabão D do que com o sabão C, em cada lavagem de roupas, temos:

$0{,}80 \cdot (1 - 0{,}03n) < 0{,}6 \Rightarrow n > 8{,}333...$

Ou seja, o valor mínimo de n é 9.

c) Temos:

$24n(1 - 0{,}03n) < 128 \Rightarrow 36n^2 - 1200n + 6\,400 > 0$

Resolvendo a inequação, encontramos:

$$n < \frac{20}{3} \cong 6{,}7 \text{ ou } n > \frac{80}{3} \cong 26{,}7$$

Como $1 < n \leqslant 10$, o maior n possível é 6.

8. Alternativa **c**.

Seja **c** a constante de proporcionalidade entre os valores energéticos dos alimentos. Temos:

$$60 \cdot c = 80 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$$

Logo, a razão entre a quantidade de proteína em A e a quantidade de proteína em B com as duas porções isocalóricas é:

$$\frac{\frac{4}{3} \cdot 6}{1} = 8$$

9. Alternativa **e**.

Temos $y = 7z$ e $x = 3y$. Assim:

$$\frac{x - y}{y - z} = \frac{3y - 2y}{7z - z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{z} = \frac{7}{3}$$

10. Alternativa **c**.

Sendo J e F a quantia em dólares recebida por Jasmim e Flora, respectivamente, temos:

$$\frac{J}{600} = \frac{F}{360} = \frac{J + F}{600 + 360} = \frac{120}{960} = \frac{1}{8}$$

Assim:

$$\frac{J}{600} = \frac{1}{8} \Rightarrow J = 75 \text{ e } \frac{F}{360} = \frac{1}{8} \Rightarrow F = 45$$

Logo, Jasmim recebeu $75 - 45 = 30$ dólares a mais que Flora.

11. Alternativa **d**.

Seja V o volume do frasco de vidro. Temos:

- volume do frasco de plástico $\longrightarrow \frac{2V}{3}$
- volume do copo $\longrightarrow \frac{V}{5}$
- número de copos $\longrightarrow \dfrac{\frac{2V}{3}}{\frac{V}{5}} = \frac{10}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3}$

Logo, são 3 copos e $\frac{1}{3}$.

12. Alternativa **d**.

Sendo x e y, respectivamente, a largura e o comprimento reais da pegada. Temos:

$$\frac{1{,}4}{16{,}8} = \frac{2{,}2}{x} = \frac{3{,}4}{y} \Rightarrow x = 26{,}4 \text{ e } y = 40{,}8$$

Logo, a largura é 26,4 cm e o comprimento é 40,8 cm.

13. Alternativa **a**.

Como são descartadas 2 unidades toda vez que são usadas, são utilizadas 12 unidades em cada aplicação. Logo:

$$\frac{3}{12 \cdot 0{,}01} = 25$$

14. Alternativa **d**.

$$\frac{18\,500}{5 + 7 + 8} \cdot 8 = 7400$$

Logo, o mais antigo na empresa receberá R$ 7.400,00.

15. a) Seja C o valor inicialmente aplicado. Temos:

$$C + 4\,020 = C \cdot (1 + 0{,}01)^2 \Rightarrow C = \frac{4\,020}{0{,}0201} = 200\,000$$

Logo, o valor inicialmente aplicado é R$ 200.000,00.

b) Seja o montante igual a 4C, temos:

$$4C = C\cdot(1+0{,}01)^t \Leftrightarrow 2^2 = (1{,}01)^t$$
$$\Leftrightarrow \log 2^2 = \log(1{,}01)^t$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot\log 2 = t\cdot\log\left(\frac{101}{100}\right)$$
$$\Leftrightarrow t\cdot(\log 101 - \log 10^2) = 2\cdot\log 2$$
$$\Leftrightarrow t\cdot(\log 202 - \log 2 - 2\cdot\log 10) = 2\cdot\log 2$$
$$\Rightarrow t \cong \frac{2\cdot 0{,}301}{2{,}305 - 0{,}301 - 2}$$
$$\Rightarrow t \cong \frac{0{,}301}{0{,}002}$$
$$\Rightarrow t \cong 150{,}5$$

Logo:

$E = 150{,}5 - 139{,}3 = 11{,}2$ (meses)

16. Alternativa **c.**

Turma em 2014

$$40 \rightarrow \begin{cases}\text{Meninas: } 24\ (60\%)\\ \text{Meninos: } 16\ (40\%)\end{cases}$$

Turma em 2015, sendo x meninos reprovados

$$40 - x \rightarrow \begin{cases}\text{Meninas: } 24\\ \text{Meninos: } 16 - x\ (20\%)\end{cases}$$

$$\frac{20}{100}(40 - x) = 16 - x$$
$$40 - x = 80 - 5x$$
$$4x = 40$$
$$x = 10$$

Portanto, o número de meninos aprovados em 2014 foi 6, isto é, $16 - 10 = 6$.

17. Alternativa **b.**

Vamos considerar que A representa o número de animais, B o número de bois, V o número de vacas e C o número de caprinos. Conforme enunciado, temos

$$B = \frac{40}{100}\cdot A$$
$$V = \frac{30}{100}\cdot A$$
$$C = \frac{30}{100}\cdot A$$

Calculando B' e V' os números de bois e vacas que foram vendidos, respectivamente, obtemos:

$$B' = \frac{30}{100}\cdot\left(\frac{40}{100}\cdot A\right) = \frac{12}{100}\cdot A \rightarrow 12\%\text{ de A}$$
$$C' = \frac{70}{100}\cdot\left(\frac{30}{100}\cdot A\right) = \frac{21}{100}\cdot A \rightarrow 21\%\text{ de A}$$

Portanto, a redução de animais é 33%, isto é, 12%+21%=33%.

Desafio

a) Seja V o volume do tanque cheio. Após o primeiro abastecimento, há no tanque 0,2V de gasolina e 0,8V de etanol. Com o tanque em 40% de sua capacidade, há $0{,}4\cdot 0{,}2V = 0{,}08V$ de gasolina e $0{,}4\cdot 0{,}8V = 0{,}32V$ de etanol. Como foi adicionado 0,6V de gasolina, o total de combustível no tanque é $0{,}08V + 0{,}6V = 0{,}68V$, ou seja, 68% de sua capacidade.

b) Sejam:

- preço inicial da gasolina $\longrightarrow g_0$
- preço inicial do etanol $\longrightarrow e_0$
- preço atual da gasolina $\longrightarrow g_F$
- preço atual do etanol $\longrightarrow e_F$

De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} g_0 = 1{,}5\cdot e_0 & \text{(I)}\\ g_F = 1{,}4\cdot e_F & \text{(II)}\\ e_0 = 1{,}1\cdot e_0 & \text{(III)}\\ g_F = e_F + 0{,}704 & \text{(IV)}\end{cases}$$

Igualando (II) e (IV), temos $e_F = 1{,}76$. Substituindo $e_F = 1{,}76$ em (III), temos $e_0 = 1{,}6$.

Substituindo $e_0 = 1{,}6$ em (I), temos $g_0 = 2{,}40$.

Logo, o preço da gasolina comum na ocasião do primeiro abastecimento era R$ 2,40

UNIDADE 2 – TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO 4 – TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Página 45

1. a) 360° ____ 2π rad

150° ____ x

$360° \cdot x = 150° \cdot 2\pi \therefore x = \frac{5\pi}{6}$ rad

b) 360° ____ 2π rad

240° ____ x

$360° \cdot x = 240° \cdot 2\pi \therefore x = \frac{4\pi}{3}$ rad

c) 360° ____ 2π rad

300° ____ x

$360° \cdot x = 300° \cdot 2\pi \therefore x = \frac{5\pi}{3}$ rad

2. a) 360° ____ 2π rad

x ____ $\frac{2\pi}{3}$ rad

$2\pi \cdot x = 360° \cdot \frac{2\pi}{3} \therefore x = 120°$

b) 360° ____ 2π rad

x ____ $\frac{7\pi}{6}$ rad

$2\pi \cdot x = 360° \cdot \frac{7\pi}{6} \therefore x = 210°$

c) 360° ____ 2π rad

x ____ $\frac{11\pi}{6}$ rad

$2\pi \cdot x = 360° \cdot \frac{11\pi}{6} \therefore x = 330°$

3. $y = 90° + 60° - 255° + 135° = 30°$

4. 360° ____ $2 \cdot \pi \cdot R$

60° ____ 4π

$60° \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = 360° \cdot 4\pi \therefore R = 12$ cm

5. a) $780° - 60° = 720° = 2 \cdot 360°$ (Sim; os arcos são côngruos.)

b) $330° - 30° = 300°$ (Não; os arcos não são côngruos.)

c) $\frac{17\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 4\pi = 2 \cdot 2\pi$ (Sim; os arcos são côngruos.)

d) $\frac{12\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{11\pi}{5}$ (Não; os arcos não são côngruos.)

e) $\frac{62\pi}{3} - 120° = \frac{62\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 20\pi = 10 \cdot 2\pi$ (Sim; os arcos são côngruos.)

6. a) $x = 30° + k \cdot 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b) $x = \left(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right)$ rad ($k \in \mathbb{Z}$)

c) $\begin{array}{l|l} 1140° & 360° \\ \hline 60° & 3 \end{array}$

$x = 60° + k \cdot 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$)

d) $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$

$x = \left(\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right)$ rad ($k \in \mathbb{Z}$)

7. a) $\begin{array}{l|l} 2360° & 360° \\ \hline 200° & 6 \end{array}$

Assim, a expressão geral de todos os arcos côngruos é:

$x = 200° + k \cdot 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b) $k = 0 \rightarrow x = 200° + 0 \cdot 360° = 200°$

c) $k = 21 \rightarrow x = 200° + (21) \cdot 360° = 2\,160°$

d) $4\,340° = 200° + k \cdot 360° \therefore k = 11{,}5 \in \mathbb{Z}$

Assim, os arcos não são côngruos.

8. a) $\frac{29\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}$

Assim, a expressão geral de todos os arcos côngruos é:

$x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b) $k = 0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ rad

c) $k = -1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + (-1) \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ rad

d) $\frac{101\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \therefore k = 16 \in \mathbb{Z}$

Sim, os arcos são côngruos.

9. Quando se passam 40 minutos, a medida do arco descrito pelo ponteiro é igual a:

$8 \cdot 30° = 240°$

Assim, sendo x o comprimento do arco correspondente, temos:

360° ____ $2 \cdot \pi \cdot 15$

240° ____ x

$x = 20\pi \cong 20 \cdot 3{,}14 \cong 62{,}8$ cm

10. A medida do arco cuja extremidade é o vértice C do quadrado é:

$75° + 180° = 255°$

Assim, a expressão geral de todos os seus arcos côngruos é:

$x = 255° + k \cdot 360°\ (k \in \mathbb{Z})$

Páginas 60 e 61

1. a) $\text{sen}\ (1\,500°) = \text{sen}\ (60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\ (2\,565°) = \cos\ (45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\ (>675°) = \cos\ (>315°) = \cos\ (45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\ (>3\,540°) = \cos\ (>300°) = \cos\ (60°) = \dfrac{1}{2}$

e) $\text{sen}\left(\dfrac{13\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{13\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) +$

$+ \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

2. a) $\text{sen}\ (1\,980°) = \text{sen}\ (180°) = 0$

b) $\cos\ (1\,350°) = \cos\ (270°) = 0$

c) $\text{sen}\left(\dfrac{11\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$

d) $\cos\ (18\pi) = \cos\ (0) = 1$

3. a) $-1 \leqslant \text{sen}\ \theta \leqslant 1 \rightarrow -1 \leqslant \dfrac{2x-7}{5} \leqslant + \rightarrow$

$\rightarrow -5 \leqslant 2x - 7 \leqslant 5 \rightarrow 2 \leqslant 2x \leqslant 12 \therefore 1 \leqslant x \leqslant 6$

b) $-1 \leqslant \cos\ \theta \leqslant 1 \rightarrow -1 \leqslant \dfrac{x+1}{3} \leqslant 1 \rightarrow$

$\rightarrow -3 \leqslant x + 1 \leqslant 3 \therefore -4 \leqslant x \leqslant 6$

4. $-1 \leqslant \text{sen}\ \alpha < 0 \rightarrow -1 \leqslant 2x - 3 < 0 \rightarrow 2 \leqslant 2x < 3 \therefore$

$\therefore 1 \leqslant x < \dfrac{3}{2}$.

5. a) $S_{OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} \cdot \text{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ unidades de área.

b) $2p_{OAB} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ unidades de comprimento.

c) $S_{vermelha} = \dfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ unidades de área.

6. $a_{16} = \dfrac{\pi}{4} \cdot 16 + \dfrac{\pi}{3} = 4\pi + \dfrac{\pi}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen}(a_{16}) = \text{sen}\left(4\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. a) Verdadeira.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Falsa.

e) Verdadeira.

8. a) $OA = \cos\alpha$ e $PA = \text{sen}\ \alpha$

b) $OP = 1$

c) $(OP)^2 = (OA)^2 + (PA)^2 \rightarrow 1^2 = (\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\ \alpha)^2 \therefore$

$\therefore \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

9. $y = \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{6}}{1-\frac{1}{2}}\right) + \text{sen}\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{6} \cdot 2\right) + \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

10. Resposta possível: $\alpha = 91°$ e $\beta = 100°$.

11. a) $P = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ e $Im(f) = [-7, -1]$

b) $P = \dfrac{2\pi}{|4|} = \dfrac{\pi}{2}$ e $Im(f) = [0, 2]$

c) $P = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = 3\pi$ e $Im(f) = [-2, 2]$

12. a) Os valores mínimo e máximo são, respectivamente, iguais a 5 e 9.

b) Os valores mínimo e máximo são, respectivamente, iguais a -4 e 2.

c) Os valores mínimo e máximo são, respectivamente, iguais a -2 e 1.

13. Valor mínimo: $1 + 3 \cdot 0 = 1$

Valor máximo: $1 + 3 \cdot 1 = 4$

14. a) $P = 2\pi$

b) $Im(f) = [0, 4]$

c) Observe que $f(0) = 2$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, f(\pi)=2, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=4, f(2\pi)=2.$

Assim, a função *f* pode ser definida por:

$f(x) = 2 - 2 \cdot \text{sen}\,(x)$

15. a) A medida máxima da altura do triângulo é $3 \cdot 1 = 3$ unidades de comprimento.

b) O período da função é igual a $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$. A área máxima do triângulo OAP é igual a $\frac{1}{2}\cdot 4\pi \cdot 3=6\pi$ unidades de área.

16. a) Fazendo $\theta = 0°$ (a força na horizontal), temos:

$T = F \cdot d \cdot \cos 0°$

$T = F \cdot d \cdot 1$

$T = F \cdot d$

b) $T = F \cdot d \cdot \cos\theta$

$T = (10\ N) \cdot (5\ m) \cdot \cos 60°$

$T = 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot N \cdot m$

$T = 25\ N \cdot m$

17. Resposta pessoal. Neste caso, é importante solicitar ao professor de Física que auxilie os alunos.

CAPÍTULO 5 – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Página 70

1. $\text{sen}^2(x)=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2 \rightarrow \text{sen}^2(x)=$

$=\frac{144}{169} \therefore \text{sen}(x)=-\frac{12}{13}$

$$\text{tg}(x)=\frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}$$

$$\sec(x)=\frac{1}{-\frac{5}{13}}=-\frac{13}{5}$$

$$\text{cossec}(x)=\frac{1}{-\frac{12}{13}}=-\frac{13}{12}$$

$$\text{cotg}(x)=\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}=\frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$$

2. $\sec^2(x) = 1 + \text{tg}^2(x) \rightarrow \sec^2(x) = 1 + 3^2 \therefore \sec(x) = \sqrt{10}$

$$\cos(x)=\frac{1}{\sec(x)}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{tg}(x)=\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \rightarrow 3=\frac{\text{sen}(x)}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \therefore \text{sen}(x)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{cossec}(x)=\frac{1}{\text{sen}(x)}=\frac{1}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{10}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{cotg}(x)=\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{1}{3}$$

3. $\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{k-1}}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{8}\right)^2=1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{k-1}{4}+\frac{k^2}{64}=1 \rightarrow k^2+16k-80=0 \therefore k=4$ ou $k=-20$ (não convém)

4. $[1 + \text{tg}^2(x)] \cdot [1 - \text{sen}^2(x)] = \sec^2(x) \cdot \cos^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \cos^2(x) = 1$

5. $$\frac{2-\text{sen}^2(x)-2\cdot\cos(x)}{1-\cos(x)}=\frac{2-[1-\cos^2(x)]-2\cdot\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

$$=\frac{1+\cos^2(x)-2\cdot\cos(x)}{1-\cos(x)}=\frac{[1-\cos(x)]^2}{1-\cos(x)}=1-\cos(x)$$

6. $[\text{sen}(x) + \cos(x)]^2 = \text{sen}^2(x) + 2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x) = 1 + 2 \cdot m \cdot n$

7. $\text{tg}^2(x) - 4 \cdot \sec(x) + 5 = 0$

$\sec^2(x) - 1 - 4 \cdot \sec(x) + 5 = 0$

$\sec^2(x) - 4 \cdot \sec(x) + 4 = 0$

$[\sec(x) - 2]^2 = 0$

$\sec(x) - 2 = 0 \therefore \sec(x) = 2 \therefore \cos(x) = \frac{1}{2}$

8. $\dfrac{\text{cossec}(x)-\text{sen}(x)}{\sec(x)-\cos(x)}=\dfrac{\dfrac{1}{\text{sen}(x)}-\text{sen}(x)}{\dfrac{1}{\cos(x)}-\cos(x)}=$

$=\dfrac{\dfrac{1-\text{sen}^2(x)}{\text{sen}(x)}}{\dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}}=\dfrac{\cos^2(x)}{\text{sen}(x)}\cdot\dfrac{\cos(x)}{\text{sen}^2(x)}=$

$=\dfrac{\cos^3(x)}{\text{sen}^3(x)}=\text{cotg}^3(x)$

Assim:

$n = 3$

9. a) Se $x \in [0; 2\pi]$ e sen $(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então:

$x=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$ ou

$x=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}$

$S=\left\{\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S=\left\{\begin{array}{l} x\in\mathbb{R}\,|\,x=\dfrac{4\pi}{3}+k\cdot 2\pi \text{ ou} \\ x=\dfrac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}$

10. $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\to x=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ ou

$x=\dfrac{7\pi}{4}+k\cdot 2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

$k=0\to x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{7\pi}{4}$

$k=1\to x=\dfrac{9\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{15\pi}{4}$

Assim, no intervalo $[0, 4\pi]$ a equação apresenta quatro soluções.

11. $\text{tg}(x)=1\to x=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

$k=-1\to x=-\dfrac{3\pi}{4}$

$k=0\to x=\dfrac{\pi}{4}$

$k=1\to x=\dfrac{5\pi}{4}$

$S=\left\{-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right\}$

12. $2\cdot\text{sen}^2(x)-3\cdot\text{sen}(x)+1=0$

$\text{sen}(x)=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\dfrac{3\pm 1}{4}\;\therefore$

$\therefore\;\text{sen}(x)=1$ ou $\text{sen}(x)=\dfrac{1}{2}$

Se $x \in [0; 2\pi]$ e sen $(x) = 1$, então $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Se $x \in [0; 2\pi]$ e sen $(x) = \dfrac{1}{2}$, então $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Assim, a soma das raízes da equação no intervalo considerado é:

$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$

Logo:

$S=\left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

13. $81^{\cos(4x+\pi)} = 9 \to \cos(4x+\pi) = \dfrac{1}{2} \to 4x+\pi =$

$= \dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$ ou

$4x+\pi = \dfrac{5\pi}{3} + k\cdot 2\pi \to x = -\dfrac{\pi}{6} + k\cdot\dfrac{\pi}{2}$ ou

$x = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot\dfrac{\pi}{2}\;(k\in\mathbb{Z})$

Assim, a menor raiz positiva da equação é:

$x=\dfrac{\pi}{6}+0\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

Logo:

$S=\left\{\dfrac{\pi}{6}\right\}$

14. a) $g(f(x)) = -1 + 2\cdot\cos(f(x)) = -1 + 2\cdot\cos(3x)$

b) $g(f(x)) = 1 \to -1 + 2\cdot\cos(3x) = 1 \to \cos(3x) =$

$= 1 \to 3x = k\cdot 2\pi\;\therefore\; x = k\cdot\dfrac{2\pi}{3}\;(k\in\mathbb{Z})$

Logo:

$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x=k\cdot\dfrac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

15. $2 \cdot \text{sen}^2(x) - 10 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x) + 8 \cdot \cos^2(x) = 0$

$2 \cdot \text{sen}^2(x) - 2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x) - 8 \cdot \text{sen}(x) \cdot$
$\cdot \cos(x) + 8 \cdot \cos^2(x) = 0$

$2 \cdot \text{sen}(x) \cdot [\text{sen}(x) - \cos(x)] - 8 \cdot \cos(x) \cdot [\text{sen}(x) -$
$- \cos(x)] = 0$

$[\text{sen}(x) - \cos(x)] \cdot \in 2 \cdot \text{sen}(x) - 8 \cdot \cos(x)] = 0$

$\text{sen}(x) - \cos(x) = 0 \rightarrow \text{sen}(x) = \cos(x) \therefore \text{tg}(x) =$
$= 1$ ou

$2 \cdot \text{sen}(x) - 8 \cdot \cos(x) = 0 \rightarrow \text{sen}(x) = 4 \cdot \cos(x) \therefore$
$\therefore \text{tg}(x) = 4$

CAPÍTULO 6 – TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Páginas 77 e 78

1. $\text{sen}(15°) = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° -$
$- \text{sen } 30° \cdot \cos 45° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$\cos(15°) = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° +$
$+ \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2. $\text{tg}(15°) = \text{tg}(60° - 45°) = \dfrac{\text{tg}(60°) - \text{tg}(45°)}{1 + \text{tg}(60°) \cdot \text{tg}(45°)} =$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{(1 + \sqrt{3})} \cdot \frac{(1 - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})} = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{-2} = 2 - \sqrt{3}$$

3. $\text{tg}(x + y) = 13 \rightarrow \dfrac{\text{tg}(x) + \text{tg}(y)}{1 - \text{tg}(x) \cdot \text{tg}(y)} = 13 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{3 + \text{tg}(y)}{1 - 3 \cdot \text{tg}(y)} = 13 \rightarrow 3 + \text{tg}(y) =$$

$$= 13 - 39 \cdot \text{tg}(y) \therefore \text{tg}(y) = \frac{1}{4}$$

4. $y = \dfrac{\text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(b) \cdot \cos(a) + \text{sen}(a) \cdot \cos(b) -}{\cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) + \cos(a) \cdot \cos(b) +}$

$$\frac{- \text{sen}(b) \cdot \cos(a)}{+ \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}$$

$$y = \frac{2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(b)}{2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b)}$$

$$y = \frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}$$

$$y = \text{tg}(a)$$

5. a) $x = \text{sen}(25° + 5°) = \text{sen } 30° \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

b) $x = \cos(61° + 29°) = \cos 90° \rightarrow x = 0$

6. $\text{sen}(x + y) \cdot \text{sen}(x - y) =$

$= (\text{sen } x \cdot \cos y + \text{sen } y \cdot \cos x) \cdot (\text{sen } x \cdot \cos y -$
$- \text{sen } y \cdot \cos x) =$

$= \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 y - \text{sen}^2 y \cdot \cos^2 x =$

$= \text{sen}^2 x \cdot (1 - \text{sen}^2 y) - \text{sen}^2 y \cdot (1 - \text{sen}^2 x) =$

$= \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x \cdot \text{sen}^2 y - \text{sen}^2 y + \text{sen}^2 y \cdot \text{sen}^2 x =$

$= \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y$

7. a) $f(x) = \text{sen}\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$P = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3} \text{ e } \text{Im}(f) = [-1; 1]$$

b) $f(0) = \text{sen}\left(3 \cdot 0 + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

8. $\text{tg}(x) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ e $\text{tg}(x + y) = \dfrac{8}{8} = 1$

$$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg}(x) + \text{tg}(y)}{1 - \text{tg}(x) \cdot \text{tg}(y)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 = \frac{\frac{1}{2} + \text{tg}(y)}{1 - \frac{1}{2} \cdot \text{tg}(y)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot \text{tg}(y) = \frac{1}{2} + \text{tg}(y) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \text{tg}(y) \therefore \text{tg}(y) = \frac{1}{3}$$

9. Neste caso, é importante observar a relação entre os módulos da resultante e das forças, isto é:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos\alpha$$

$$R^2 = 6^2 + 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 75°$$

$$R^2 = 72 + 72 \cdot \cos 75° \quad \text{(I)}$$

$\cos 75° = \cos(45° + 30°)$

$\cos 75° = \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I):

$$R^2 = 72 + 72 \cdot \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

$\sqrt{6} \cong 2{,}45$

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$$R^2 \cong 72 + 72 \cdot \left(\frac{2{,}45 - 1{,}41}{4}\right)$$

$R^2 \cong 90{,}72 \rightarrow R \cong 9{,}52\text{N}$

10. $\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \therefore \cos(x) = \frac{4}{5}$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) =$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

11. a) $$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

b) $$\operatorname{tg}(4x) = \frac{2 \cdot tg(2x)}{1 - tg^2(2x)} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{(-7)} = -\frac{24}{7}$$

12. Sendo *b* e *c* as medidas dos catetos do triângulo retângulo e sendo *a* a medida da hipotenusa, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a},\ \cos\alpha = \frac{c}{a},\ \operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a} \text{ e}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{a}$$

$\operatorname{sen}(2\alpha) - \operatorname{sen}(2\beta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha - 2 \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\beta =$

$$= 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} - 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} = 0$$

13. $f(x) = 10^{4 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)} = 10^{2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)} =$

$= 10^{2 \cdot \operatorname{sen}(2x)}$

Como o valor máximo de sen (2*x*) é 1, o valor máximo da função *f* é:

$10^{2 \cdot 1} = 100$

14. $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) = 10$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = 10$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)} = 10$$

$$\frac{1}{\cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)} = 10$$

$1 = 10 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)$

$1 = 5 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$

$$\operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{5}$$

15. $$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^2 =$$

$$= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^2 = 1 + \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

16. $f(x) = 2 \cdot [\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)] \cdot [\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)]$

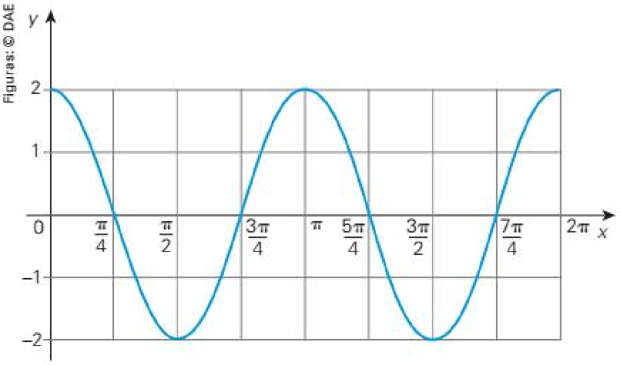
$f(x) = 2 \cdot 1 \cdot \cos(2x)$

$f(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

a) $P = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ e $\operatorname{Im}(f) = [-2; 2]$

b)

Figuras: © DAE



17. $f(x) = 5 \cdot 2 \cdot \text{sen}\,(x) \cdot \cos\,(x) = 5 \cdot \text{sen}\,(2x)$

$\text{Im}(f) = [-5, 5]$

18. $\cos\,(3\theta) = \cos\,(2\theta + \theta)$

$\cos\,(3\theta) = \cos 2\theta \cdot \cos\theta - \text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,2\theta$

$\cos\,(3\theta) = (2\cos^2\theta - 1) \cdot \cos\theta - \text{sen}\,\theta \cdot 2\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$\cos\,(3\theta) = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) \cdot \cos\theta$

$\cos\,(3\theta) = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$

$\cos\,(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

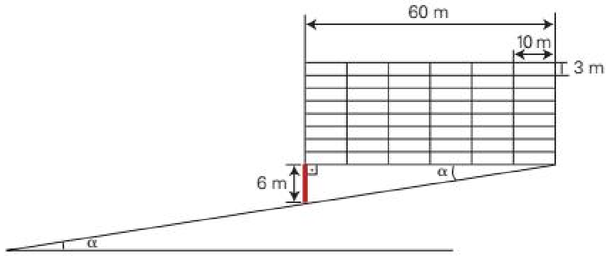
19. Resposta pessoal.

Vestibulares e Enem

Páginas 79 e 81

1. Alternativa **c**.

Considerando a transversal passando por duas paralelas, temos:



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{60} = 0{,}1$$

De acordo com a tabela, o arco cuja tangente mais se aproxima de 0,10 é 6º.

2. Alternativa **b**.

Pela relação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{3}{4} + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

Substituindo $\alpha = 60°$ na expressão dada, temos:

$$\left(\cos\frac{60°}{2} + \text{sen}\,60°\right) \cdot \text{tg}\,60° \rightarrow (\cos 30° + \text{sen}\,60°) \cdot \text{tg}\,60°$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3} \rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

3. Alternativa **e**.

$$\cos x = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Assim:

$\text{sen}\,2x = 2\text{sen}\,x \cdot \cos x$

$$\text{sen}\,2x = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{9}$$

4. Alternativa **d**.

A produção ocorre quando o preço é mínimo, ou seja, quando:

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$$

Assim:

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = \cos\,(\pi + 2k\pi) \Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 7 + 12k\ (k \in \mathbb{Z})$$

Portanto, para $k = 0$, temos $x = 7$, então, o mês de produção máxima é julho.

5. Alternativa **a**.

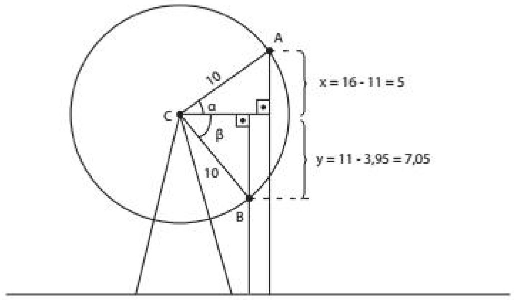
Como podemos considerar os raios de sol paralelos, então o ângulo central (formado por Assuã, o centro da Terra e Alexandria) também é θ.

Assim:

$$\theta \cong \frac{900}{7\,500} \cong 0{,}12\,rad \cong 7°$$

Assuã e Alexandria estão situadas no Hemisfério Norte, onde o solstício de verão ocorre no mês de junho. Logo, as observações foram realizadas em junho.

6. Alternativa



$sen\alpha = \dfrac{5}{10} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 30°$

$sen\beta = \dfrac{7{,}05}{10} = 0{,}705 \Rightarrow \beta \cong 45°$

Logo, $A\hat{C}B \cong 75°$.

7. Alternativa **b**.

[I] Verdadeira. Frequência do batimento por segundo:

$$P = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \frac{3}{4}s$$

Em um minuto:

$$\frac{60}{\frac{3}{4}} = 80 \text{ (batimentos por minuto)}$$

[II] Verdadeira. Pois:

$$P(2) = 100 - 20 \cdot \left(\cos\frac{8\pi}{3} \cdot 2\right) =$$

$$= 100 - 20 \cdot \left(\cos\frac{16\pi}{3}\right) =$$

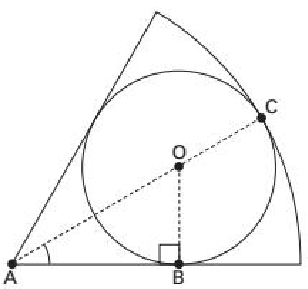
$$= 100 - 20 \cdot \left(\cos\left(4\pi + \frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 100 - 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 110\, mmHg$$

[III] Falsa. A amplitude da função é 20 mmHg.

8. a) Considere a figura:



Como o círculo centrado em O é tangente ao setor circular, então o segmento $\overline{AC}$ é bissetriz do ângulo θ. Para $\theta = 60°$, temos $O\hat{A}B = 30°$. Como $\text{sen}\,30° = \dfrac{r}{AO} \Rightarrow AO = 2r$, temos:

$AC = AO + OC = 2r + r = 3r$

Logo:

$$\frac{\frac{\pi r^2}{\frac{\pi(3r)^2}{6}}}{} \;\; \frac{\pi r^2}{\frac{\pi(3r)^2}{6}} = \frac{\pi r^2}{\frac{9\pi r^2}{6}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

b) Para R = 4r, temos:

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{OB}{AO} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

Pela relação do arco duplo do cosseno, temos:

$$\cos\theta = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos\theta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

9. Alternativa a.

A largura do tampo da mesa é dada por BT + TC.

Do triângulo PBT, temos que:

$$\text{tg}60° = \frac{1{,}5}{BT} \Rightarrow BT \cong \frac{1{,}5}{1{,}73} \cong 0{,}87$$

Supondo que o ângulo de incidência ($P\hat{T}B$) é igual ao ângulo de reflexão ($D\hat{T}C$), temos no triângulo DTC que:

$$\text{tg}60° = \frac{2{,}7}{TC} \Rightarrow TC \cong \frac{2{,}7}{1{,}73} \cong 1{,}56$$

Logo, BT + TC $\cong$ 0,87 + 1,56 $\cong$ 2,43

10. 01) Correta. As funções seno e cosseno são periódicas.

02) Correta. O período médio é dado por:

$$\frac{(06{:}02 - 00{:}38) + (12{:}02 - 06{:}02) + (19{:}47 - 12{:}02)}{3} =$$

$$= \frac{19{:}09}{3} \cong 6{,}38\,h$$

04) Correta. A amplitude é aproximadamente igual a:

$$\frac{1 - 0{,}1}{2} = 0{,}45\,m$$

08) Incorreta. O período da função

$$y = \text{sen}\left(20x + \frac{8\pi}{3}\right) \text{ é:}$$

$$P = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}\,rad$$

16) Incorreta. Usando a relação $tg^2\, x + 1 = sec^2\, x$, temos:

$$\frac{sec^2 x - 1}{tg^2 x + 1} = \frac{sec^2 x - 1}{sec^2 x}$$

$$= \frac{sec^2 x}{sec^2 x} - \frac{1}{sec^2 x}$$

$$= 1 - \cos^2 x$$

$$= sen^2\, x$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

32) Incorreta. Utilizando a relação fundamental, temos $senx = \frac{3}{5}$, $cosx = \frac{4}{5}$, $seny = -\frac{12}{13}$ e $cosy = \frac{5}{13}$. Assim:

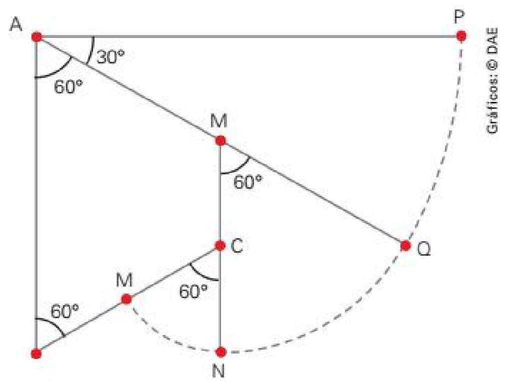
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - senx\, seny$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$= \frac{56}{65}$$

11. Alternativa **a**.

Considere a figura:



Como a corda AP permanece sempre esticada, a mesma percorre três arcos de raios diferentes até o ponto P atingir o ponto M. Observe que:

AP = AB + BC + CM = 20 + 10 + 10 = 40 cm, BQ = 20 cm e CN = 10 cm

Assim:

$$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QN} + \overset{\frown}{NM} = \frac{\pi}{6} \cdot 40 + \frac{\pi}{3} \cdot 20 + \frac{\pi}{3} \cdot 10 = \frac{50\pi}{3}\, cm$$

12. Alternativa **d**.

O período de f_1 é igual a 2π. Logo, temos $|c| = 1$. Como nas alternativas só há valores positivos para a variável c, temos $c = 1$.

O conjunto imagem de f_1 é o intervalo [2; 4]. Desse modo, temos uma variação de 2 unidades (1 para cima e 1 para baixo), assim $|b| = 1$.

Temos ainda $a = \frac{2+4}{2} = 3$. Assim:

$$f_1(x) = 3 + |1| \cdot sen(x + d)$$

Como o ponto $\left(2 + \frac{\pi}{2}; 4\right)$ pertence a f_1, temos:

$$4 = 3 + |1| \cdot sen\left(2 + \frac{\pi}{2} + d\right) \Rightarrow 1 = |1| \cdot sen\left(2 + \frac{\pi}{2} + d\right)$$

Considerando $|1| = 1$, temos $sen\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, para $k \in \mathbb{Z}$, e assim:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = 2 + \frac{\pi}{2} + d \Rightarrow d = 2k\pi - 2$$

Para $k = 0$, temos $d = -2$.

Portanto, segue que $f_1(x) = 3 + sen(x - 2)$, com $x \in [2; 2 + 2\pi]$.

Observe:

$f_2(x) = f_1(-x)$ e assim $f_2(x) = 3 + sen\,(-x - 2)$.

$f_3(x) = -f_2(x)$ e assim $f_3(x) = 23 - sen\,(-x - 2)$.

$f_4(x) = -f_1(x)$ e assim $f_4(x) = 23 - sen\,(x - 2)$.

Assim, a alternativa correta é a **d**.

Desafio

Alternativa **a**.

Usando a fatoração da diferença de quadrados, temos:

$f(x) = (sen\, x + \cos x)^4 - (sen\, x - \cos x)^4$

$= [(sen\, x + \cos x)^2 + (sen\, x - \cos x)^4]$
$[(sen\, x + \cos x)^2 - (sen\, x - \cos x)^2]$

$= (1 + 2sen\, x \cos x + 1 - 2sen\, x \cos x)$
$(1 + 2sen\, x \cos x - 1 + 2sen\, x \cos x)$

$= 4 \cdot 2sen\, x \cos x$

$= 4sen\, 2x$

Assim:

$2 = 4sen\, 2x \Rightarrow sen\, 2x = \frac{1}{2}$

Como o valor de a corresponde ao segundo momento positivo em que f é igual a 2, $2x$ deve ser igual ao segundo momento positivo em que o seno é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja:

$$2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}$$

Assim:

$$a = \frac{5\pi}{12}$$

UNIDADE 3 – MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

CAPÍTULO 7 – MATRIZES E DETERMINANTES

Página 91

1. a) 3

b) 5

c) $-\sqrt{3}$ é irracional.

d) $\frac{1}{2}$ é racional.

2. $a_{12} - a_{22} = -1 - (-5) = 4$

3. a) 9 elementos.

b) $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1^2 & 1^3 \\ 2+1 & 2 & 2^3 \\ 3+1 & 3+2 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

c) A soma dos elementos da segunda coluna é igual a: $1 + 2 + 5 = 8$

4. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \therefore x = 4 \text{ e } y = 3$

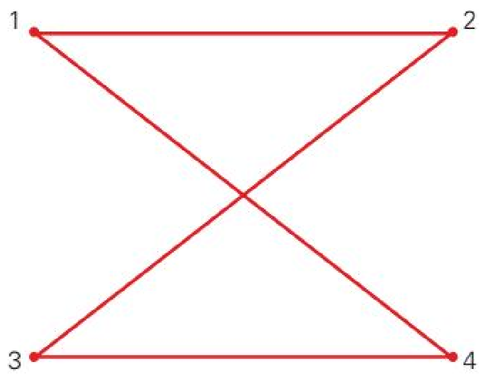
5. $\begin{pmatrix} 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$
$\therefore x = 0, y = 0 \text{ e } z = 0$

6. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Existem várias figuras possíveis que podem ser associadas à matriz. A seguir, são apresentadas duas delas:



9. Resposta pessoal.

10. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot1 & 2\cdot1+3\cdot2 & 2\cdot1+3\cdot3 \\ 2\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot2+3\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot3 \\ 2\cdot3+3\cdot1 & 2\cdot3+3\cdot2 & 2\cdot3+3\cdot3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

Assim, o traço da matriz é igual a:

$5 + 10 + 15 = 30$

11. a) $A^t=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & 7 & 6 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

b) A matriz A é igual a sua transposta.

12. a) A matriz A não é simétrica, pois:

$A^t=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}\neq A$

b) $B=B^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & y \\ x & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & x & 7 \\ -2 & 3 & 0 \\ y & 0 & 5 \end{pmatrix} \therefore x=-2 \text{ e } y=7$

13. Resposta pessoal.

Página 96

1. a) $A+B=\begin{pmatrix} -1+5 & 4+(-2) \\ 2+3 & 7+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix} -1-5 & 4-(-2) \\ 2-3 & 7-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

2. $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$

3. a) Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa.

d) Falsa. Se A + B = 0, então a matriz B é oposta à matriz A.

e) Verdadeira.

4. a) $A^t=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B^t=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A^t+B^t=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

d) $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

e) $(A+B)^t=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

f) $(A+B)^t=A^t+B^t$

5. a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A+2\cdot A^t-3\cdot I_3=$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} n+1 & -1 \\ -3 & 2m-3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4m & 8 \\ -5 & n-2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} n+7 & 8 \\ -5 & 2m+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4m & 8 \\ -5 & n-2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} n+7=4m \\ 2m+1=n-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n-4m=-7 \\ -n+2m=-3 \end{cases} \therefore m=5 \text{ e } n=13$

7. a) $238 + 42 + 295 + 235 = 810$

b) $238 + 256 + 295 + 325 = 1\,114$

c) $\begin{bmatrix} 238 & 256 \\ 42 & 22 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 295 & 325 \\ 235 & 195 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 533 & 581 \\ 277 & 217 \end{bmatrix}$

8. $(X+B)^t=A \rightarrow X+B=A^t \rightarrow$

$\rightarrow X+\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \therefore X=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

9. $2X + A - B = 3C$

$2X = 3C - A + B$

$$2X = 3\cdot\begin{bmatrix} 10 & -3 & 6 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + $$
$$+\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 32 & -2 & 10 \\ 28 & 18 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 16 & -1 & 5 \\ 14 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

10. $$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} & \text{(I)} \\ 3X - 3Y = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -18 & -21 \end{pmatrix} & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) + (II)

$$5X = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \therefore X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore -Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

11. Seja $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$2a = 10 \therefore a = 5; 2d = 6 \therefore d = 3$

$$b + c = 4 \begin{cases} b = 0 \text{ e } c = 4 \\ b = 1 \text{ e } c = 3 \\ b = 2 \text{ e } c = 2 \\ b = 3 \text{ e } c = 1 \\ b = 4 \text{ e } c = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ou } X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\text{ou } X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ ou } X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Página 101

1. a) Verdadeira. O resultado da multiplicação é uma matriz do tipo 3×5.

b) Verdadeira.

c) Falsa.

2. a) Verdadeira. Na multiplicação de matrizes é válida a propriedade associativa.

b) Verdadeira.

3. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$

c) Falsa. Basta observar o que ocorreu nos itens **a** e **b** desta atividade.

4. a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Falsa. Basta observar o item a desta atividade.

5. Vamos considerar apenas a 2ª linha e *a* 3ª coluna da matriz A e B respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 2\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot2+3\cdot2 & 2\cdot2+3\cdot3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} & \cdots & \\ 7 & 10 & 13 \\ & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \dots & 1^3 \\ \dots & 3^2 \\ \dots & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 9 \\ \dots & 27 \end{pmatrix}$$

$c_{23} = 7\cdot1 + 10\cdot9 + 13\cdot27 = 448$

6. a) $C = P \cdot Q$

$$C = \begin{bmatrix} 8{,}00 & 12{,}00 & 3{,}50 & 25{,}00 & 24{,}00 \\ 8{,}50 & 13{,}00 & 4{,}00 & 24{,}00 & 22{,}00 \\ 7{,}50 & 14{,}00 & 3{,}50 & 22{,}00 & 23{,}00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8{,}00 \cdot 2 + 12{,}00 \cdot 1 + 3{,}50 \cdot 4 + 25{,}00 \cdot 1 + 24{,}00 \cdot 1 \\ 8{,}50 \cdot 2 + 13{,}00 \cdot 1 + 4{,}00 \cdot 4 + 24{,}00 \cdot 1 + 22{,}00 \cdot 1 \\ 7{,}50 \cdot 2 + 14{,}00 \cdot 1 + 3{,}50 \cdot 4 + 22{,}00 \cdot 1 + 23{,}00 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 16{,}00 + 12{,}00 + 14{,}00 + 25{,}00 + 24{,}00 \\ 17{,}00 + 13{,}00 + 16{,}00 + 24{,}00 + 22{,}00 \\ 15{,}00 + 14{,}00 + 14{,}00 + 22{,}00 + 23{,}00 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 91{,}00 \\ 92{,}00 \\ 88{,}00 \end{bmatrix}$$

b)

$$M_{\text{preços}} = \frac{91 + 92 + 8}{3}$$

$$M_{\text{preços}} = R\$\,90{,}33$$

7. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot n & 1 \end{pmatrix}$

8. Alternativa **c**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 5c & 3b + 5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a + 5c = 0 \end{cases} \therefore a = -5 \text{ e } c = 3$$

$$\begin{cases} b + 2d = 0 \\ 3b + 5d = 1 \end{cases} \therefore b = 2 \text{ e } d = -1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

9. $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 4 \\ -3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

10. a) $A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow$
$\rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \therefore X = A^{-1} \cdot B$

b) $X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow$
$\rightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1} \therefore X = B \cdot A^{-1}$

c) $AXB = I \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \rightarrow$
$\rightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B^{-1} \therefore X = A^{-1} \cdot B^{-1}$

d) $BXA = B \rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \rightarrow$
$\rightarrow I \cdot X \cdot I = I \cdot A^{-1} \therefore X = A^{-1}$

e) $A^{-1} \cdot X = B \rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot X = A \cdot B \rightarrow I \cdot X =$
$= A \cdot B \therefore X = A \cdot B$

11. Resposta pessoal.

Páginas 109 e 110

1. a) $|7| = 7$

b) $|-10| = -10$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) = 13$

d) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - (-2) \cdot (-7) = 5 - 14 = -9$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 + 1 & 1^2 + 2 \\ 2^2 - 1 & 2^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 12 - 9 = 3$

3. a) $\begin{vmatrix} \text{sen}(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \text{sen}(x) \end{vmatrix} = \text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

b) $\begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ \text{sen}(y) & \cos(y) \end{vmatrix} = \cos(x) \cdot \cos(y) -$
$- \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) = \cos(x + y)$

c) $\begin{vmatrix} \text{sen}(x) & 2 & \cos(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(y) & -2 & \cos(y) \end{vmatrix} = \text{sen}(x) \cdot \cos(y) -$
$- \cos(x) \cdot \text{sen}(y) = \text{sen}(x - y)$

4.

$$\begin{vmatrix} 4^x & 8^x & 2^x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -4^x + 2 \cdot 2^x + 8^x - 2 \cdot 4^x = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow (2^3)^x - 3 \cdot (2^2)^x + 2 \cdot 2^x = 0 \rightarrow (2^x)^3 - 3 \cdot (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x = 0$

$2^x = m \rightarrow m^3 - 3m^2 + 2m = 0 \rightarrow$

$\rightarrow m \cdot (m^2 - 3m + 2) = 0 \therefore m = 0$ *ou* $m = 1$, *ou* $m = 2$

$m = 0 \rightarrow 2^x = 0 \therefore$ não existe x

$m = 1 \rightarrow 2^x = 1 \therefore x = 0$

$m = 2 \rightarrow 2^x = 2 \therefore x = 1$

$S = \{0; 1\}$

5. $A + k \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2+k & -8 \\ -4 & -6+k \end{bmatrix}$

$\det(A + k \cdot B) = 0 \rightarrow (-2 + k) \cdot (-6 + k) - (-8) \cdot (-4) = 0 \rightarrow k^2 - 8k - 20 = 0 \therefore k = 10$ ou $k = -2$

6. a) $\det(A) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & x+3 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + 3x + 1 - 8x +$

$+ 2x + 6 - x - 4x = x^2 - 8x + 7$

b) O valor de x, para o qual o determinante da matriz assume o valor mínimo, corresponde à abscissa do vértice da parábola que representa a função definida por $f(x) = x^2 - 8x + 7$, ou seja, se $x = -\dfrac{(-8)}{2 \cdot 1} = 4.$

c) O valor mínimo do determinante é igual a:

$4^2 - 8 \cdot 4 + 7 = -9$

7. $C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-7) = 7$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4) = -4$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) = -6$

8. a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{44} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot$

$\cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 55 = 55$

b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot C_{44} = 2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot$

$\cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (56) = 112$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -4 \cdot C_{32} + 3 \cdot C_{33} =$

$= -4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} +$

$+ 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$

$= -4 \cdot (-1) \cdot (11) + 3 \cdot 1 \cdot 66 = 242$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ a & b & c & d \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot C_{31} + b \cdot C_{32} + c \cdot C_{33} + d \cdot C_{34} =$

$= a \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} +$

$+ c \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + d \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$

$= a \cdot 1 \cdot 10 + b \cdot (-1) \cdot (-30) + c \cdot 1 \cdot (-30) + d \cdot (-1) \cdot 10 =$

$= 10a + 30b - 30c - 10d$

10. a) A primeira e a terceira linhas são iguais.

b) A segunda coluna é nula.

c) A primeira e a terceira linhas são proporcionais.

11. a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 = 20$

b) $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \cdot 10 =$

c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8 \cdot 10 = 80$

12. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ 5

$$= [1 \cdot 4 - 3 \cdot 2] \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] = -2 \cdot 1 = -2$$

13. a) Não, pois a matriz A não é quadrada.

b) Não, pois a matriz B não é quadrada.

c) Sim, pois a matriz $A \cdot B$ é quadrada.

d) Sim, pois a matriz $B \cdot A$ é quadrada.

e) Sim, conforme se pode observar nos itens desta atividade.

14. a) $\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 5 = 40$

b) $\det(B^t) = \det(B) = 15$

c) $\det(2 \cdot A^{-1} \cdot B^t) = 2^3 \cdot \det(A^{-1}) \cdot \det(B^t) =$

$= 8 \cdot \dfrac{1}{5} \cdot 15 = 24$

15. a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 10;$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$

b) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

16. Utilizando a propriedade para o cálculo da matriz de Vandermonde, temos:

$\det(A) = (4 - 5) \cdot (3 - 5) \cdot (3 - 4) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) = -2$

CAPÍTULO 8 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Páginas 122 e 123

1. a) Sim.

b) Não, pois: $3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 3 + 4 + 5 \neq 13$

c) Sim, pois: $3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 6 + 2 + 5 = 13$

2. A terna ordenada não é solução, pois não verifica todas as equações simultaneamente.

3. a) A equação possui uma única solução ($x = 3$).

b) A equação possui infinitas soluções.

c) A equação não possui solução.

d) A equação possui uma única solução ($x = 0$).

4. a) $5x + 10y + 20z = 60$

b) $z = 2 \rightarrow 5x + 10y + 20 \cdot 2 = 60 \rightarrow$

$\rightarrow 5x + 10y = 20 \therefore x + 2y = 4$

$y = 0 \rightarrow x = 4;\ y = 1 \rightarrow x = 2;\ y = 2 \rightarrow x = 0;$

c) $z = 0 \rightarrow 5x + 10y = 60 \rightarrow x + 2y = 12$

$y = 0 \rightarrow x = 12;\ y = 1 \rightarrow x = 10;\ y = 2 \rightarrow x = 8;$

$y = 3 \rightarrow x = 6;\ y = 4 \rightarrow x = 4;\ y = 5 \rightarrow x = 2;$

$y = 6 \rightarrow x = 0;$

$z = 1 \rightarrow 5x + 10y + 20 \cdot 1 = 60 \rightarrow x + 2y = 8$

$y = 0 \rightarrow x = 8;\ y = 1 \rightarrow x = 6;\ y = 2 \rightarrow x = 4;$

$y = 3 \rightarrow x = 2;\ y = 4 \rightarrow x = 0;$

$z = 2 \rightarrow 5x + 10y + 20 \cdot 2 = 60 \rightarrow x + 2y = 4$

$y = 0 \rightarrow x = 4;\ y = 1 \rightarrow x = 2;\ y = 2 \rightarrow x = 0;$

$z = 3 \rightarrow 5x + 10y + 20 \cdot 3 = 60 \rightarrow x + 2y = 0$

$y = 0 \rightarrow x = 0;$

$$S = \left\{ \begin{matrix} (0;0;3); (4;0;2); (2;1;2); (0;2;2); \\ (0;4;1); (2;3;1); (4;2;1); (6;1;1); (8;0;1); \\ (0;6;0); (2;5;0); (4;4;0); (6;3;0); \\ (8;2;0); (10;1;0); (12;0;0) \end{matrix} \right\}$$

5. a) $\begin{cases} x = 3z \\ x + 5y = 8z \\ 2y = z \end{cases}$

b) $S = \{(3z, z, z)\}$

c) $x = 3, y = 1$ e $z = 1$:

$3CaO + P_2O_5 \rightarrow Ca_3(PO_4)_2$

6. **a)** $xH_2S + ySO_2 \rightarrow zH_2O + wS$

$$\begin{cases} 2x = 2z \\ x + y = w \therefore x = z, y = \dfrac{z}{2}, z + \dfrac{z}{2} = w \therefore w = \dfrac{3z}{2} \\ 2y = z \end{cases}$$

$z = 2 \rightarrow x = 2, y = 1$ e $w = 3$

$2H_2S + SO_2 \rightarrow 2H_2O + 3S$

b) $xFeS_2 + yO_2 \rightarrow zFe_3O_4 + wSO_2$

$$\begin{cases} x = 3z \\ 2x = w \\ 2y = 4z + 2w \end{cases}$$

$\therefore z = \dfrac{x}{3}, w = 2x, 2y = 4 \cdot \left(\dfrac{x}{3}\right) + 2 \cdot 2x \therefore y = \dfrac{8x}{3}$

$x = 3 \rightarrow z = 1, w = 6$ e $y = 8$

$3FeS_2 + 8O_2 \rightarrow Fe_3O_4 + 6SO_2$

7. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y + z = 5 \\ 2z = 6 \end{cases}$

$2z = 6 \therefore z = 3$

$y + z = 5 \rightarrow y + 3 = 5 \therefore y = 2$

$x - 2y + 3z = 4 \rightarrow x - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 4 \therefore x = -1$

a) Verdadeira.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

e) Verdadeira.

8. **a)** Está.

b) Está.

c) Não está.

d) Está.

e) Está.

9. $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - z = 1 \end{cases}$

$y - z = 1 \therefore y = 1 + z$

$x - y + 2z = 5 \rightarrow x - (1 + z) + 2z = 5 \therefore x = 6 - z$

O sistema é possível e indeterminado.

$S = \{(6 - \alpha; 1 + \alpha; \alpha)\}, a \in \mathbb{R}$

10. **a)** $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x + 2y + 5z = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ \quad y + 4z = 12 \end{cases}$

c) $y + 4z = 12 \therefore y = 12 - 4z$

$x + y + z = 8 \rightarrow x + 12 - 4z + z = 8 \therefore$

$\therefore x = -4 + 3z$

$S = \{(-4 + 3z; 12 - 4z; z)\}, z \in \{2; 3\}$

d) $z = 2 \rightarrow x = 2$ e $y = 4$

$z = 3 \rightarrow x = 5$ e $y = 0$

$S = \{(2; 4; 2); (5; 0; 3)\}$

11. **a)** $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + y + z = 9 \\ -3x + y + 2z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + z = 8 \\ 3y - z = -7 \\ -2y + 5z = 22 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x - y + z = 8 \\ 3y - z = -7 \\ 13y = -13 \end{cases}$

$13y = -13 \therefore y = -1$

$3y - z = -7 \rightarrow 3 \cdot (-1) - z = -7 \therefore z = 4$

$x - y + z = 8 \rightarrow x - (-1) + 4 = 8 \therefore x = 3$

O sistema é possível e determinado.

$S = \{(3; -1; 4)\}$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 5y - 3z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 5y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$5y - 3z = 0 \therefore y = \dfrac{3z}{5}$

$x - 2y + z = 1 \rightarrow x - 2 \cdot \left(\dfrac{3z}{5}\right) + z = 1 \therefore x = 1 + \dfrac{z}{5}$

O sistema é possível e indeterminado.

$S = \left\{\left(1 + \dfrac{z}{5}; \dfrac{3z}{5}; z\right)\right\}, z \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = -5 \\ -5y - 5z = 14 \\ -5y - 5z = 15 \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+3z=-5 \\ -5y-5z=14 \\ 0=1 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

$S = \varnothing$

12. a) O sistema é possível e determinado se $a \neq 0$.

b) O sistema é possível e indeterminado se $a = 0$ e $b = 0$.

c) O sistema é impossível se $a = 0$ e $b \neq 0$.

13. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

Página 128

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. Seja A a matriz dos coeficientes, temos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4, |A_x| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -4,$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4}{-4} =$$

$$= -1, y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4}{-4} = 1 \text{ e } z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-8}{-4} = 2$$

3. Resposta pessoal.

4. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & -9 \\ 2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -2, |A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & -9 \\ -2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -42,$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -9 \\ 2 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 12, |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{-42}{-2} = 21, y = \frac{12}{-2} = -6, z = \frac{-4}{-2} = 2$$

$S = \{(21; -6; 2)\}$

5. a) $|D| = -19, |D_x| = -76, |D_y| = -38 \Rightarrow x = \frac{|D_x|}{|D|}$

$$= \frac{-76}{-19} = 4, y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-38}{-19} = 2$$

b) $|D| = 11, |D_x| = 6, |D_y| = 7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{6}{11}, y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{7}{11}$$

c) $|D| = 11, |D_x| = 0, |D_y| = 0 \Rightarrow x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{0}{11} = 0,$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{0}{11} = 0$$

d) $|D| = 2, |D_x| = 12, |D_y| = -8 \Rightarrow x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{12}{2} =$

$$= 6, y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-8}{2} = -4$$

6. a) Seja D a matriz dos coeficientes, temos:

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \therefore$ Sistema tem solução única.

b) Seja D a matriz dos coeficientes, temos:

$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \therefore$ Não tem solução única.

c) Seja D a matriz dos coeficientes, temos:

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \therefore$ Sistema tem solução única.

d) Seja D a matriz dos coeficientes, temos:

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 162 \neq 0 \therefore$ Sistema tem solução única.

Vestibulares e Enem

Páginas 129 a 130

1. Alternativa **a**.

Para calcular o número total de samambaias existentes na reserva florestal, basta calcular:

$0 \cdot 8 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3$

A operação que representa essa conta é dada por $A^t \times B$.

2. Fazendo as multiplicações, temos:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como as matrizes resultantes das multiplicações são diferentes, o produto não é comutativo.

3. A média anual de cada matéria é a soma das notas dividida por 4. Para obter essas médias, ele deve multiplicar cada linha da matriz obtida por uma matriz coluna com valores iguais a $\frac{1}{4}$. Logo, a única matriz que possibilita esta condição é a da alternativa **e**.

4. Seja A a matriz dos coeficientes. Temos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6, |A_x| =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -18 \text{ e } |A_z| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -12$$

Assim:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1, y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-18}{-6} =$$

$$= 3 \text{ e } z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Portanto:

$a + b + c = 1 + 3 + 2 = 6$

5. Alternativa **a**.

Como a, b e c são números inteiros consecutivos e $a < b < c$, podemos escrever as seguintes relações:

$b = a + 1$ e $c = a + 2$

Substituindo na primeira equação, temos:

$a + 2 \cdot (a + 1) + 3 \cdot (a + 2) = 20 \Leftrightarrow a = 2$

Assim, a terna (x; y; z) é igual a (2; 3; 4) e, portanto, temos:

$7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - m \cdot 4 = 26$ (que implica em $m = 3$.

6. Alternativa **a**.

Sendo p e a, respectivamente, a quantidade inicial de cartões de Pedro e a quantidade inicial de cartões de André, temos:

$$\begin{cases} p + a = 20 \\ 4p + \frac{2}{3}a = 20 \end{cases}$$

$a = 20 - p$

$$4p + \frac{2}{3}(20 - p) = 20 \rightarrow 12p + 40 - 2p = 60 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10p = 20 \rightarrow p = 2$$

Como, inicialmente, Pedro possuía 2 cartões e, após a disputa, ele quadriplicou essa quantidade, então Pedro ficou com 8 cartões; ele ganhou 6 cartões durante a disputa.

7. Alternativa **b**.

Seja Z o tempo que a luz vermelha fica acesa. Logo:

$$X = \frac{2Z}{3} \Rightarrow Z = \frac{3X}{2}$$

Como cada ciclo dura Y segundos, temos:

$$Y = 5 + X + Y \Rightarrow Y = 5 + X + \frac{3X}{2} \Rightarrow 5X - 2Y + 10 = 0$$

8. a) Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$.

Temos:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2z + 3w = 0 \\ 4z + 8w = 1 \end{cases}$$

b) Resolvendo os sistemas, temos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Assim:

$$B = A^T - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

O resultado pedido é:

$$\begin{vmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 5 \cdot \frac{11}{2} = -\frac{83}{2}$$

9. Alternativa **b**.

Como A é invertível:

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 0$$

10. Alternativa **e**.

Das propriedades de determinantes, temos:

$\det(3A) = \det(A^2) \Rightarrow 3^3 \cdot \det(A) - \det(A) \cdot \det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) \in 27 - \det(A)] = 0$

Logo:

$\det(A) = 0$ (Não convém, pois A é inversível.)

ou

$\det(A) = 27$

11. Alternativa **a**.

De acordo com as figuras, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 12{,}90 \\ x + y + 2z = 12{,}10 \Rightarrow x = 3{,}2;\ y = 4{,}1 \text{ e } z = 2{,}4 \\ 2x + 2y = 14{,}60 \end{cases}$$

De acordo com o sistema montado, queremos o valor de:

$2x + y + 2z = 2 \cdot 3{,}2 + 4{,}1 + 2 \cdot 2{,}4 = 15{,}3$

O preço do buquê quatro é R$ 15,30.

12. Alternativa **a**.

Sejam *f*, *m* e *s*, respectivamente, o preço do saco de 60 kg de feijão, o preço do saco de 60 kg de milho e o preço do saco de 60 kg de soja. Temos:

$$\begin{cases} 1200f + 800m + 1500s = 206\,000 \\ 800f + 600m + 1200s = 151\,000 \\ 1500f + 1000m + 2\,000s = 265\,000 \Rightarrow \\ \Rightarrow f = 80, m = 25 \text{ e } s = 60 \end{cases}$$

Logo, o saco de milho foi vendido por R$ 25,00.

13. Alternativa **c**.

Escrevendo o produto das primeiras matrizes:

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sendo a_{ij} os elementos da matriz M_n, é possível observar que há um padrão: os elementos a_{11}, a_{21} e a_{22} se mantêm iguais ao se multiplicar as n primeiras matrizes. Já o elemento a_{12} do produto das n primeiras matrizes corresponde à soma dos n primeiros números naturais diferente do zero. Assim, na matriz P, a_{12} é igual à soma $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 21$, ou seja, uma PA de 21 elementos e razão 1. A soma de todos os elementos desta PA é dada por:

$$S = \left(\frac{1+21}{2}\right) \cdot 21 = 231$$

Logo, a matriz P é igual a:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 231 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E a soma de seus elementos é:

$1 + 231 + 0 + 1 = 233$

Desafio

Alternativa **d**.

$A + BX = X + 2C$

$BX = X + 2C - A$

$BX - X = 2C - A$

$X(B - I) = 2C - A$ (I é a matriz identidade de ordem n.)

Multiplicando os dois lados por $(B - I)^{-1}$:

$X = (2C - A) \cdot (B - I)^{-1}$

Portanto, será necessário que $B - I$ seja invertível.

UNIDADE 4 – GEOMETRIA ESPACIAL

CAPÍTULO 9 – GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Páginas 151 e 152

1. a) Verdadeira, pois os três vértices de um triângulo são pontos não colineares.

b) Falsa, pois a intersecção de dois planos ou é vazia ou é uma reta.

c) Verdadeira.

2. a) Sim, conforme o postulado 2, existem infinitos pontos pertencentes a uma reta. Assim, os três pontos considerados poderiam pertencer a essa reta.

b) Não, pois, de acordo com o postulado 2, há infinitos pontos pertencentes a uma reta e infinitos pontos não pertencentes à reta. Assim, poderíamos considerar A, B e C como pontos não pertencentes simultaneamente à mesma reta.

c) Sendo A, B e C três pontos não alinhados, temos uma reta que passa pelos pontos A e B, outra pelos pontos A e C e uma terceira que passa pelos pontos B e C.

d) Sendo A, B, C e D quatro pontos não coplanares, temos um plano determinado pelos pontos A, B e C, outro pelos pontos A, B e D, outro pelos pontos A, C e D e um quarto determinado pelos pontos B, C e D.

e) Dada uma reta, existem infinitos planos que a contêm.

3. a) Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois dois pontos distintos determinam uma reta e por uma reta passam infinitos planos.

d) Falsa, pois por um ponto passam infinitas retas.

e) Verdadeira.

f) Falsa, pois três pontos distintos podem pertencer a uma mesma reta.

g) Falsa, pois a reta pode ter um único ponto em comum com o plano.

h) Falsa, pois se a reta está contida no plano, todos os seus pontos pertencem a esse plano.

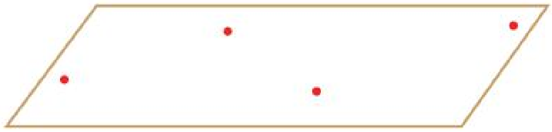
4. As quatro afirmações garantem a determinação de um plano.

5. A intersecção de qualquer plano que contém a reta r com o plano α é uma reta que passa pelo ponto P.

6. Se dois planos têm em comum três pontos não colineares, então os planos são coincidentes, ou seja, trata-se do mesmo plano.

7. Existem três casos.

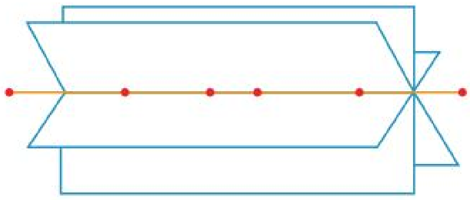
Primeiro caso: os pontos são coplanares e não colineares.



Gráficos: © DAE

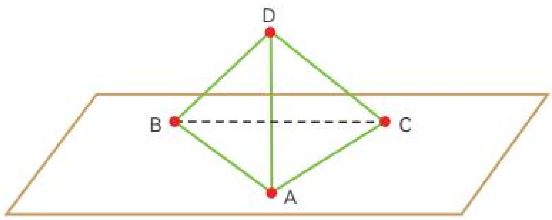
Fica determinado um único plano.

Segundo caso: os pontos são colineares.



Existem infinitos planos que contêm os quatro pontos.

Terceiro caso: os pontos não são coplanares.



Ficam determinados quatro planos: ABC, ABD, ACD e BCD.

8. I. Falsa, pois se uma reta é paralela a um plano, é paralela a uma reta do plano, mas se uma reta é paralela a uma reta de um plano, não necessariamente ela é paralela ao plano (pode estar contida no plano).

II. Verdadeira.

III. Verdadeira.

IV. Falsa, pois a reta pode ser concorrente com o plano.

V. Verdadeira.

VI. Verdadeira.

9. a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

c) Reversas.

d) Reversas.

e) Paralelas.

f) Perpendiculares.

10. Resposta pessoal.

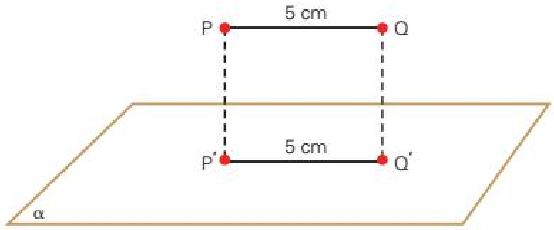
11. Um único plano.

12. Um único plano.

13. Infinitos. Todos os planos que contêm a reta *r* são perpendiculares ao plano –.

14. Um dos vértices é a origem, ou seja, o ponto (0; 0; 0). Os outros vértices da base inferior são os pontos (5; 1; 0), (5; 0; 0) e (0; 1; 0). Os vértices da base superior são os pontos (0; 0; 2), (5; 0; 2), (5; 1; 2) e (0; 1; 2).

15.



CAPÍTULO 10 – POLIEDROS

Páginas 159 e 160

1. a) O poliedro é convexo.

b) O poliedro não é convexo.

2. $V + F = A + 2 \rightarrow V + 8 = 18 + 2 \therefore V = 12$

3. O poliedro apresenta 4 faces triangulares e 4 faces hexagonais, ou seja, um total de 8 faces. Sendo A e V, respectivamente, a quantidade de arestas e a quantidade de vértices, temos:

$2A = 3 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \therefore A = 18$

$V + F = A + 2 \rightarrow V + 8 = 18 + 2 \therefore V = 12$

4. a) O número total de faces do poliedro é:

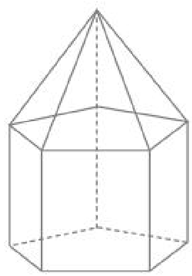
$1 + 5 + 5 = 11$

Sendo A e V, respectivamente, a quantidade de arestas e a quantidade de vértices, temos:

$2A = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \therefore A = 20$

$V + F = A + 2 \rightarrow V + 11 = 20 + 2 \therefore V = 11$

b)



5. Se V = F, temos:

$V + F = A + 2 \rightarrow V + V = A + 2 \rightarrow A = 2V - 2 \therefore$
$\therefore A = 2 \cdot (V - 1)$.

Assim, independentemente do número de vértices do poliedro, o número de arestas é par. Logo, a conclusão do aluno é verdadeira.

6. Uma pirâmide regular que possui 12 faces laterais triangulares, apresenta 13 faces no total, sendo uma delas com 12 lados. Como essa pirâmide é um poliedro convexo, sendo A e V, respectivamente, a quantidade de arestas e a quantidade de vértices, temos:

$2A = 3 \cdot 12 + 12 \cdot 1 \therefore A = 24$

$V + F = A + 2 \rightarrow V + 13 = 24 + 2 \therefore V = 13$

7. Sendo $2x$ e x, respectivamente, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares, temos:

$F = 2x + x = 3x$

$2A = 3 \cdot 2x + 4 \cdot x \rightarrow A = 5x$

$V + F = A + 2 \rightarrow 8 + 3x = 5x + 2 \therefore x = 3$

Assim, o poliedro apresenta 6 faces triangulares e 3 faces quadrangulares.

a) A soma das medidas dos ângulos internos das faces do poliedro é igual a:

$S_F = (V - 2) \cdot 360° \Rightarrow S_F = (8 - 2) \cdot 360° =$
$= 2\,160°$

b) $A = 5x = 5 \cdot 3 = 15$

8. Sendo $2k$, $5k$ e $8k$, respectivamente, o número de faces octogonais, o número de faces quadrangulares e o número de faces triangulares, temos:

$F = 2k + 5k + 8k = 15k$

$2A = 8 \cdot 2k + 4 \cdot 5k + 3 \cdot 8k \therefore A = 30k$

$V + F = A + 2 \rightarrow 32 + 15k = 30k + 2 \therefore k = 2$

$A = 30k = 30 \cdot 2 = 60$

9. Sendo x o número de faces triangulares, temos:

$F = x + 1$

$2A = 3 \cdot x + 4 \cdot 1 \therefore 40 = 3x + 4 \therefore x = 12$

$V + F = A + 2 \rightarrow V + 12 + 1 = 20 + 2 \therefore V = 9$

Se o novo poliedro possui uma face quadrangular a mais e quatro faces triangulares a menos que o original, então o novo poliedro possui 2 faces quadrangulares e 8 faces triangulares.

Sendo A' e V', respectivamente, o número de arestas e o número de vértices do novo poliedro, temos:

$2A' = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 8 \therefore A' = 16$

$V' + 2 + 8 = A' + 2 \rightarrow V' + 10 = 16 + 2 \therefore V' = 8$

10.

Nome do poliedro	Formato das faces	Nº de faces	Nº de arestas	Nº de vértices
Tetraedro regular	Triangular	4	6	4
Hexaedro regular	Quadrangular	6	12	8
Octaedro regular	Triangular	8	12	6
Dodecaedro regular	Pentagonal	12	30	20
Icosaedro regular	Triangular	20	30	12

11. a) São iguais

b) O tetraedro.

12. a) $(4 - 2) \cdot 360° = 720°$

b) $(8 - 2) \cdot 360° = 2\,160°$

c) $(6 - 2) \cdot 360° = 1\,440°$

d) $(20 - 2) \cdot 360° = 6\,480°$

e) $(12 - 2) \cdot 360° = 3\,600°$

13. a) O tetraedro regular não possui diagonal alguma.

b) O hexaedro regular possui quatro diagonais.

c) O octaedro regular possui três diagonais.

14. a) $2A = 3 \cdot 224 \therefore A = 336$

b) $V + F = A + 2 \rightarrow V + 224 = 336 + 2 \therefore V = 114$

15. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 11 – PRISMAS

Páginas 165 e 166

1. Seja h a medida da altura do prisma, temos:

$$156\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{6 \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot h$$

$$156 = 36 + 12h \therefore h = 10\text{ cm}$$

2. Seja x a medida das hipotenusas das bases, temos:

$$x^2 = 5^2 + 12^2 \therefore x = 13\text{ cm}$$

$$S_{TOTAL} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 + 5 \cdot 13 + 12 \cdot 13 + 13 \cdot 13 = 450\text{ cm}^2$$

3. $S_{LATERAL} = 5 \cdot (10 \cdot 8) = 400\text{ cm}^2$

4. a) $p = \dfrac{3 + 7 + 8}{2} = 9\text{ cm}$

$$S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot (9-3) \cdot (9-7) \cdot (9-8)} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1} = 6\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

b) $S_{TOTAL} = 2 \cdot 6\sqrt{3} + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 10 =$

$= (12\sqrt{3} + 180)\text{ cm}^2$

5. a) $S_{EFG} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \text{sen } 30° = 5\sqrt{3}\text{ cm}^2$

b) Sendo x a medida do lado $\overline{FG}$, temos, pela lei dos cossenos:

$$x^2 = 10^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30°$$

$$x^2 = 100 + 12 - 60$$

$$x^2 = 52 \therefore x = 2\sqrt{13}\text{ cm}$$

$$S_{LATERAL} = 10 \cdot 12 + 2\sqrt{3} \cdot 12 + 2\sqrt{13} \cdot 12 =$$

$$= (120 + 24\sqrt{3} + 24\sqrt{13})\text{ cm}^2$$

6. a) $100 \cdot 80 - 4 \cdot 20^2 = 6\,400\text{ cm}^2$

b) $100 \cdot 80 - 4 \cdot x^2 = 7\,100 \rightarrow x^2 = 225 \therefore x = 15\text{ cm}$

7. Seja x a medida das arestas das bases do prisma, temos:

$$S_{LATERAL} = 2 \cdot S_{BASE}$$

$$6 \cdot x \cdot 15 = 2 \cdot \frac{6 \cdot x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$30 = x\sqrt{3} \therefore x = 10\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$S_{TOTAL} = 2 \cdot \frac{6 \cdot (10\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 15$$

$$S_{TOTAL} = 1800\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

8. Seja x a medida das alturas dos trapézios das bases, temos:

$$2{,}5^2 = x^2 + \left(\frac{4{,}5 - 1{,}5}{2}\right)^2 \therefore x = 2\text{ cm}$$

$$S_{TOTAL} = 2 \cdot \left(\frac{4{,}5 + 1{,}5}{2}\right) \cdot 2 + 4{,}5 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 10 +$$

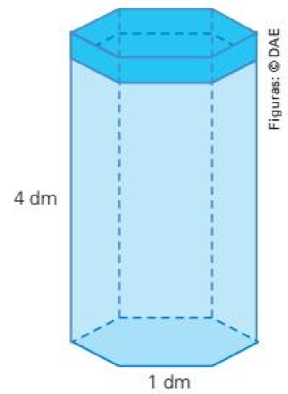
$$+ 1{,}5 \cdot 10 = 122\text{ cm}^2$$

9. a) $6 \cdot 360° + 2 \cdot 180° \cdot (6 - 2) = 3\,600°$

b) De cada vértice superior, pode-se traçar uma diagonal com 3 vértices inferiores. Logo, como são 6 vértices superiores, o total de diagonais é:

$6 \cdot 3 = 18$

10. a)



b) $S_{TOTAL} = 6 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cong$

$\cong 24 + 3 \cdot 1{,}73 + 3 \cong 32{,}19\text{ dm}^2$

Página 169

1. Seja x a medida das arestas do cubo, temos:

$12x = 96 \therefore x = 8\text{ cm}$

Assim, as diagonais das faces do cubo medem $8\sqrt{2}$ cm.

2. Seja x a medida das arestas do cubo, temos:

$x\sqrt{2} = 4 \therefore x = 2\sqrt{2}\text{ dm}$

a) $D = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6}\text{ dm}$

b) $S_{TOTAL} = 6 \cdot (2\sqrt{2})^2 = 48\text{ dm}^2$

3. a) $d = \sqrt{10^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38}\text{ cm}$

b) $S_{TOTAL} = 2 \cdot (10 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 4 \cdot 6) = 248\text{ cm}^2$

4. $6 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 + x^2} \rightarrow$

$\rightarrow 36 = 12 + 18 + x^2 \therefore x = \sqrt{6}\text{ cm}$

5. a) $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \therefore D^2=a^2+b^2+c^2$

b) $S = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2ab + 2ac + 2bc$

c) $(a + b + c)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (b + c) + (b + c)^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

d) $(a + b + c)^2 = D^2 + S$

6. a) Como a medida das diagonais é proporcional à medida das arestas, o aumento percentual da medida das diagonais também será 20%.

b) Como $(1,20)^2 = 1,44$, o aumento percentual da área total do cubo será 44%.

7. a) $S_{TOTAL}=6\cdot(2\sqrt{13})^2=312\,cm^2$

b) $312 = 2 \cdot (2k \cdot 3k + 2k \cdot 4k + 3k \cdot 4k) \therefore k = \sqrt{6}$ cm

Assim, as dimensões do paralelepípedo são $2\sqrt{6}$ cm, $3\sqrt{6}$ cm e $4\sqrt{6}$ cm.

c) $d=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+(3\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2}=$
$=\sqrt{24+54+96}=\sqrt{174}$ cm

8. a) A quantidade de cubos menores é igual a $3^3 = 27$.

b) A quantidade de cubos com apenas uma face pintada de vermelho é 6, pois as faces centrais de cada uma das faces do cubo são as únicas com apenas uma face pintada.

c) A quantidade de cubos com exatamente duas faces pintadas de vermelho é igual a:

$4 \cdot 3 = 12$

d) A quantidade de cubos com exatamente três faces pintadas de vermelho é igual a:

$4 \cdot 2 = 8$

9. Resposta pessoal.

Páginas 176 e 177

1. $V_{PARALELEPÍPEDO} = 4 \cdot 10 \cdot 15 = 600$

$V_{PARALELEPÍPEDO} = 600\ cm^3$

2. Seja x a medida das arestas do cubo, temos:

$(10\sqrt{5})^2=x^2+(3x)^2 \rightarrow 100\cdot 5=10x^2 \rightarrow$
$\rightarrow x^2=50 \therefore x=5\sqrt{2}$

$S_{TOTAL}=6\cdot(5\sqrt{2})^2=6\cdot 25\cdot 2=300$ unidades de área

$V_{CUBO}=(5\sqrt{2})^3=125\cdot 2\sqrt{2}=250\sqrt{2}$ unidades de volume

3. a) Possuem o mesmo volume.

b) $V_{CUBO} = V_{PARALELEPÍPEDO} \rightarrow 20^3 = 10 \cdot 50 \cdot x \therefore x = 16$ cm

c) $S_{TOTAL} = 2 \cdot (10 \cdot 50 + 10 \cdot 16 + 50 \cdot 16) = 2\,920\ cm^2$

4. Seja h a medida da altura da água no paralelepípedo, temos:

$30 \cdot 30 \cdot 20 = 20 \cdot 10 \cdot h \therefore h = 90$ cm

a) Falsa, pois a água atingirá 90% da altura total do paralelepípedo.

b) Falsa.

c) Verdadeira.

5. Sejam x, x e y as dimensões do paralelepípedo, temos:

$2 \cdot (x \cdot x + x \cdot y + x \cdot y) = 210 \rightarrow x^2 + 2xy = 105$ (I)

$x + x + y = 18 \rightarrow y = 18 - 2x$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$x^2 + 2xy = 105 \rightarrow x^2 + 2x \cdot (18 - 2x) = 105 \rightarrow -23x^2 + 36x - 105 = 0 \rightarrow x^2 - 12x + 35 = 0 \therefore x = 5$ ou $x = 7$

$x = 5$ dm $\rightarrow y = 8$ dm

$x = 7$ dm $\rightarrow y = 4$ dm

a) As dimensões do paralelepípedo podem ser 5*dm, 5 dm e 8 dm ou 7 dm, 7 dm e 4 dm.

b) O volume do paralelepípedo pode ser igual a:

$5 \cdot 5 \cdot 8 = 200$ ($200\ dm^3$) ou $7 \cdot 7 \cdot 4 = 196$ ($196\ dm^3$)

6. a) $V_{CUBO} = 5^3 = 125\ cm^3$

$V_{PARALELEPÍPEDO} = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48\ cm^3$

Assim, o volume do cubo é maior que o volume do paralelepípedo reto.

b) Seja x a medida das arestas do cubo, temos:

$x^3 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \rightarrow x^3 = 64 \therefore x = 4$ cm

7. Sejam $x - r$, x e $x + r$ as dimensões do paralelepípedo, temos:

$x - r + x + x + r = 27 \therefore x = 9$ m

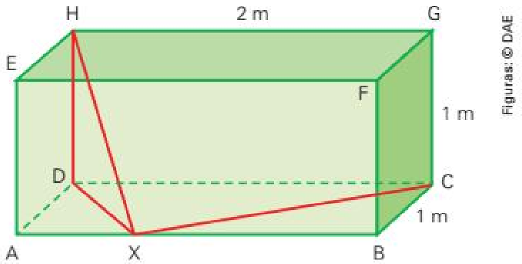
$2 \cdot [(9 - r) \cdot 9 + (9 - r) \cdot (9 + r) + 9 \cdot (9 + r)] = 454$

$243 - r^2 = 227 \rightarrow r^2 = 16 \therefore r = 4$ ou $r = 24$

Assim, as dimensões do paralelepípedo são 5 m, 9 m e 13 m e seu volume é igual a $5 \cdot 9 \cdot 13 = 585$; portanto:

585 m^3

8.



$XD^2 = 1^2 + x^2$

$XH^2 = XD^2 + 1^2 \rightarrow XH^2 = 1^2 + x^2 + 1^2 \therefore XH = \sqrt{2+x^2}$

$XC^2 = 1^2 + (2 - x)^2 \therefore XC = \sqrt{5-4x+x^2}$

$XC = XH \rightarrow 2 + x^2 = 5 - 4x + x^2 \rightarrow 4x = 3 \therefore$

$x = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ m

9. Seja x a medida das arestas do cubo, temos:

$x + x + x\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2}$

$x \cdot (2 + 2\sqrt{2}) = 2 \cdot (2 + 2\sqrt{2}) \therefore x = 2\text{ m}$

$V_{CUBO} = 2^3 = 8\text{ m}^3$

10. Resposta pessoal.

11. Seja x a medida das arestas das bases do prisma, temos:

$x\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \therefore x = 10\text{ cm}$

$V_{PRISMA} = 10^2 \cdot 20 = 2\,000$

Portanto:

2 000 cm^3

12. a) $S_{BASE} = 6 \cdot \dfrac{20^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 600\sqrt{3}\text{ cm}^2$

b) $h = \dfrac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\text{ cm}$

c) $V_{PRISMA} = 600\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 18\,000$

Portanto:

18 000 cm^3

13. O volume de água na piscina é igual a:

$10 \cdot 6 \cdot 1{,}5 = 90\text{ m}^3 \rightarrow 90\,000$ litros

Assim, se, para cada 1 000 litros de água, adicionam-se 10 gramas de cloro, a massa de cloro para tratar toda a piscina é igual a:

$90 \cdot 10 = 900$ gramas $= 0{,}9$ kg

14. Sejam x e y, respectivamente, a medida das arestas das bases e a medida da altura do prisma, temos:

$4 \cdot x \cdot y = 1\,600 \therefore x \cdot y = 400\text{ cm}^2$

$x^2 \cdot y = 10\,000 \rightarrow x \cdot x \cdot y = 10\,000 \rightarrow x \cdot 400 = 10\,000$

$\therefore x = 25$ cm e $y = 16$ cm

a) $S_{BASE} = 25^2 = 625\text{ cm}^2$

b) $S_{TOTAL} = 1\,600 + 2 \cdot 625 = 2\,850$ cm

CAPÍTULO 12 – PIRÂMIDES

Página 182

1. Seja h a medida da altura da pirâmide, temos:

$13^2 = 5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 144 \therefore h = 12$ cm

2. a) $(a_\ell)^2 = 12^2 + (4\sqrt{3})^2 \rightarrow (a_\ell)^2 = 192 \therefore a_\ell = 8\sqrt{3}\text{ m}$

b) $(a_p)^2 = 12^2 + (2\sqrt{3})^2 \rightarrow (a_p)^2 = 156 \therefore a_p = 2\sqrt{39}\text{ m}$

3. Seja h a medida da altura da pirâmide, temos:

$5^2 = 4^2 + h^2 \therefore h = 3$ cm

$5^2 = (a_p)^2 + 2^2 \therefore a_p = \sqrt{21}$ cm

$S_{LATERAL} = 6 \cdot \dfrac{4 \cdot \sqrt{21}}{2} = 12\sqrt{21}\text{ cm}^2$

4. $(a_p)^2 = 74^2 + 57^2 \therefore a_p = 5\sqrt{349} \cong 5 \cdot 18{,}7 \cong 93{,}5\text{ cm}$

$S_{TOTAL} \cong 114^2 + 4 \cdot \dfrac{114 \cdot 93{,}5}{2} \cong 34\,314\text{ cm}^2$

5. Seja R a medida do raio da circunferência circunscrita à base, temos:

$R = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$

a) $12^2 = (4\sqrt{3})^2 + h^2 \therefore h = 4\sqrt{6}\text{ cm}$

b) $S_{TOTAL} = 4 \cdot \dfrac{12^2\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}\text{ cm}^2$

6. a) $S_{TOTAL} = 8 \cdot \dfrac{5^2\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3}\text{ cm}^2$

b) A distância entre dois vértices não consecutivos do octaedro regular é igual à medida da diagonal de um quadrado cujos lados medem 5 cm, ou seja, $d = 5\sqrt{2}$ cm.

7. Como as faces laterais são triângulos equiláteros, a medida do apótema da pirâmide é igual a:

$$\frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

Seja h a medida da altura da pirâmide, temos:

$$(4\sqrt{3})^2 = h^2 + 4^2 \therefore h = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

Assim, a razão entre as medidas do apótema e da altura da pirâmide é igual a:

$$\frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

8. Seja h a medida da altura da pirâmide, temos:

$$\text{tg } 45° = \frac{h}{6} \therefore h = 6\text{ m e } \cos 45° = \frac{6}{a_p} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{a_p} \therefore a_p = 6\sqrt{2}\text{ m}$$

$$S_{TOTAL} = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 6\sqrt{2}}{2} \cong 144 + 144 \cdot 1{,}41 \cong 347{,}04\text{ m}^2$$

9. a) $AC = CE = 2\sqrt{2}$ m

$(BE)^2 = (BC)^2 + (CE)^2 \rightarrow (BE)^2 = 2^2 +$

$+ (2\sqrt{2})^2 \therefore BE = 2\sqrt{3}\text{ m}$

$(AE)^2 = (AC)^2 + (CE)^2 \rightarrow (AE)^2 =$

$= (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 \therefore AE = 4\text{ m}$

b) $(BE)^2 = (AB)^2 + (AE)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AE) \cdot \cos(B\hat{A}E)$

$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos(B\hat{A}E)$

$\cos(B\hat{A}E) = \frac{1}{2} \therefore B\hat{A}E = 60°$

c) $$S_{TOTAL} = \underbrace{2^2}_{S_{BASE}} + \underbrace{\frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2}}_{S_{BCE}} + \underbrace{\frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2}}_{S_{CDE}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}_{S_{ABE}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}_{S_{ADE}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}_{S_{ADE}}$$

$$S_{TOTAL} = 4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$$

$$= 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \cong 4 + 4 \cdot 1{,}41 + 4 \cdot 1{,}73 \cong 16{,}56\text{ m}^2$$

10. Resposta pessoal.

Páginas 187 e 188

1. Seja h a medida da altura da pirâmide, temos:

$$(3\sqrt{3})^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow 27 = h^2 + 3 \therefore h = 2\sqrt{6}\text{ dm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{18} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\text{ dm}^3$$

2. $AV = AD = 2 \cdot 6\text{ cm} = 12\text{ cm}$

$$V_{PIRÂMIDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 216\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

3. Seja x a medida das arestas da pirâmide, temos:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \therefore x = 6\text{ dm}$$

a) Como todas as arestas da pirâmide são congruentes, as arestas da base medem 6 dm.

b) Seja h a medida da altura da pirâmide, temos:

$$6^2 = h^2 + \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 \therefore h = 3\sqrt{2}\text{ dm}$$

c) $V_{PIRÂMIDE} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\text{ dm}^3$

4. a) O volume do tetraedro é igual a:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot c = \frac{a \cdot b \cdot c}{6} \text{ unidades de volume}$$

b) $V = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 15\text{ m}^3$

5. Sejam x e h, respectivamente, a medida da hipotenusa e a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo da base, temos:

$x^2 = 15^2 + 20^2 \therefore x = 25\text{ cm}$

$15 \cdot 20 = 25 \cdot h \therefore h = 12\text{ cm}$

$$V_{PIRÂMIDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{15 \cdot 20}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 1200\text{ cm}^3$$

6. O volume de um octaedro regular é igual ao dobro do volume de uma pirâmide cuja base é um quadrado com lados medindo $3\sqrt{3}$m. Seja h a medida da altura de cada pirâmide, temos:

$$(3\sqrt{3})^2 = h^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 27 = h^2 + \frac{27}{2} \therefore h = \frac{3\sqrt{6}}{2}\,\text{m}$$

$$V_{OCTAEDRO} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(3\sqrt{3})^2\cdot\frac{3\sqrt{6}}{2} = 27\sqrt{6}\,\text{m}^3$$

7. $V_{PRISMA} = V_{PIRÂMIDE}$

$$\frac{6\cdot 8^2\sqrt{3}}{4}\cdot h_{PRISMA} = \frac{1}{3}\cdot\frac{12^2\sqrt{3}}{4}\cdot h_{PIRÂMIDE}$$

$$\frac{h_{PRISMA}}{h_{PIRÂMIDE}} = \frac{12\sqrt{3}}{96\sqrt{3}} = \frac{1}{8}$$

8. O volume da réplica é igual a:

$$\frac{1}{3}\cdot 14^2\cdot 9 = 588\,\text{cm}^3$$

Sendo m a massa da réplica, temos:

$$d = \frac{m}{v} \rightarrow m = d\cdot v \rightarrow m = 7{,}9\cdot 588 = 4\,645{,}2 \text{ gramas}$$

9. Seja H a altura da pirâmide antes do corte, temos:

$$\frac{A_{\text{BASE MAIOR}}}{A_{\text{BASE MENOR}}} = \left(\frac{H}{H-5}\right)^2 \rightarrow \frac{6\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}}{6\cdot\frac{2^2\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \left(\frac{H}{H-5}\right)^2 \rightarrow 9(H-5)^2 = H^2 \rightarrow 3(H-5) = H \rightarrow$$

$$\rightarrow H = \frac{15}{2}\,\text{cm}$$

Logo:

$$V_{PIRÂMIDE} = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{15}{2} = 135\sqrt{3}\,\text{cm}^3$$

10. Resposta pessoal.

Vestibulares e Enem
Páginas 189 e 190

1. Alternativa **d**.

Pela equação dada, temos:

$$4a - \frac{32}{a^2} = 0 \rightarrow 4a^3 - 32 = 0 \rightarrow 4a^3 = 32 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = 2\,\text{dm}$$

Como 1 litro = 1 decímetro cúbico, o volume da embalagem é igual a 8 dm³. Assim:

$$8 = a^2\cdot h \Rightarrow 8 = 2^2\cdot h \Rightarrow h = 2\,\text{dm}$$

2. Alternativa **d**.

O volume da peça é dado por:

$$V_{PEÇA} = V_{\text{PRISMA HEXAGONAL MAIOR}} - V_{\text{PRISMA HEXAGONAL MENOR}}$$

$$V_{PEÇA} = 6\cdot\frac{8^2\sqrt{3}}{4}\cdot 35 - 6\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot 35 =$$

$$= 1470\sqrt{3} = 2\,499\,\text{cm}^3$$

3. Alternativa **e**.

$(12 - 2x)\cdot x = 18 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \therefore x = 3$ m

4. Alternativa **c**.

Seja V o volume máximo de mistura sabor morango que pode ser acrescentado à de chocolate na embalagem. Temos:

$1{,}25\cdot(1\,000 + V) = 20\cdot 10\cdot 10 \therefore V = 600\,\text{cm}^3$
Portanto, o máximo que pode ser colocado são 600 cm³ da mistura sabor morango.

5. Alternativa **c**.

Sejam x, y e z as medidas iniciais do paralelepípedo. Temos:

$V_{INICIAL} = x\cdot y\cdot z$

$V_{FINAL} = 1{,}1x\cdot 1{,}1y\cdot 0{,}8z = 0{,}968\cdot x\cdot y\cdot z$

Assim, após as alterações, haverá, uma redução de $0{,}032\cdot V_{INICIAL}$. Logo, diminui aproximadamente 3%.

6. Alternativa **c**.

Sejam:

F $\longrightarrow$ número de faces

A $\longrightarrow$ número de arestas

V $\longrightarrow$ número de vértices

Assim:

$$A = \frac{20\cdot 6 + 12\cdot 5}{2} = 90$$

Logo:

$V + F = A + 2 \rightarrow V + 32 = 90 + 2 \therefore V = 60$

7. Alternativa **c**.

O octaedro possui 8 faces e 6 vértices. Ao retirar uma pirâmide regular de base quadrangular de cada vértice do octaedro, obtemos um octaedro truncado com 14 faces (8 hexagonais e 6 quadrangulares) e $\frac{8\cdot 6 + 6\cdot 4}{2} = 36$ arestas. Pelas relação de Euler, temos:

$V + F = A + 2 \rightarrow V + 14 = 36 + 2 \rightarrow V = 24$

Portanto, a resposta é:

$360°\cdot(24 - 2) = 7\,920°$

8. Alternativa **c**.

O cubo tem 6 faces e 8 vértices. Ao fazer os cortes nos vértices do cubo, o número de faces do novo sólido, após todos os cortes, é:

$6 + 8 = 14$ (faces)

Portanto, são necessárias 14 cores diferentes.

9. Alternativa **d**.

No dodecaedro regular, são:

- 12 faces pentagonais;
- $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ arestas;
- $V + F = A + 2 \Rightarrow V + 12 = 30 + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 20$ vértices.

No poliedro côncavo formado, são:

- $12 + 12 - 2 = 22$ faces;
- $30 + 30 - 5 = 55$ arestas;
- $20 + 20 - 5 = 35$ vértices.

Logo, a soma pedida é igual a:

$V + F + A = 35 + 22 + 55 = 112$

10. Alternativa **e**.

Seja x a medida do segmento $\overline{SA}$, temos:

$$V_{PRISMA} + V_{PIRÂMIDE\ SABCD} = \frac{4}{3} \cdot V_{PIRÂMIDE\ SEFGH}$$

Assim:

$$2 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot x = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot (x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{x}{3} = \frac{4x+8}{9} \therefore x = 10\,\text{cm}$$

11. Alternativa **a**.

Seja r o raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero de lado 30 cm, temos:

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{30\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \cong 17\,\text{cm}$$

Portanto, dentre os tampos disponíveis, o proprietário deverá escolher o tampo de raio igual a 18 cm.

12. Seja x a medida dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Temos:

$x \cdot 8 = 32\sqrt{5} \therefore x = 4\sqrt{5}$dm

Seja y a medida dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$. Temos:

$(4\sqrt{5})^2 = 8^2 + y^2 \therefore y = 4$ dm

Portanto, o volume do líquido é:

$$V = \frac{4 \cdot 8}{2} \cdot 8 = 128\,\text{dm}^3$$

13. (01) Correto.

(02) Incorreto. Existem retas reversas à reta r que pertencem ao plano α.

(04) Correto.

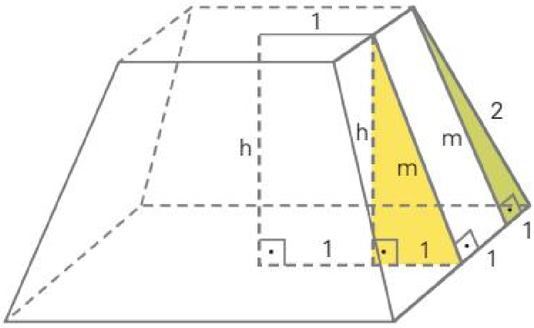
(08) Incorreto. Os planos β e γ podem ser secantes entre si.

(16) Incorreto. As retas r e t podem ser concorrentes.

Desafio

Alternativa **b**.

O sólido descrito é um tronco de pirâmide.



Figuras: © DAE

Seja m a altura dos trapézios laterais do tronco. Temos:

$2^2 = m^2 + 1^2 \therefore m = \sqrt{3}$u

Seja h a altura do tronco. Temos:

$(\sqrt{3})^2 = h^2 + 1^2 \therefore h = \sqrt{2}$ u

Seja H a altura da pirâmide completa (tronco de pirâmide mais a pirâmide cuja base é o quadrado de lado 2). Temos:

$$\frac{A_{BASE\ MAIOR}}{A_{BASE\ MENOR}} = \left(\frac{H}{H-\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{4^2}{2^2} = \left(\frac{H}{H-\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{H}{H-\sqrt{2}} \therefore H = 2\sqrt{2}u$$

Assim, o volume do tronco de pirâmide é:

$$V_{TRONCO} = V_{PIRÂMIDE\ COMPLETA} - V_{PIRÂMIDE\ MENOR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{TRONCO} = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}\text{u}^3$$

UNIDADE 5 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

CAPÍTULO 13 – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Página 202

1. 11, 13, 15, 16, 31, 33, 35, 36, 51, 53, 55, 56, 61, 63, 65 e 66.

2. 24, 25, 27, 42, 45, 47, 52, 54, 57, 72, 74 e 75.

3. Como a pessoa vai escolher uma empresa de ônibus ou uma companhia aérea, o total de possibilidades é:

$3 + 4 = 7$

4. Como será escolhido um algarismo do sistema decimal ou uma letra do alfabeto, o total de possibilidades é:

$26 + 10 = 36$

5. O número de resultados possíveis é igual a:

$6 \cdot 6 = 36$

$$\left\{\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{matrix}\right\}$$

6. a) $\begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ 9 & 9 & 8 & 7 \end{matrix}$

$N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$

b) $\begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ 9 & 10 & 10 & 10 \end{matrix}$

$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

c) $\begin{matrix} \square & \square & \square & \boxed{0} \\ 9 & 8 & 7 & 1 \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ 8 & 8 & 7 & 4 \end{matrix}$

$N = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 2\,296$

d) $\begin{matrix} \square & \square & \square & \square \\ 9 & 10 & 10 & 5 \end{matrix}$

$N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4\,500$

e) $\begin{matrix} \square & \square & \square & \boxed{0} \\ 9 & 8 & 7 & 1 \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} \square & \square & \square & \boxed{5} \\ 8 & 8 & 7 & 1 \end{matrix}$

$N = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 952$

7. a) O número total de placas é igual a:

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 9\,999$

b) O número total de placas é igual a:

$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17\,576$

8. $\begin{matrix} \boxed{4} & \square & \square & \square & \square & \square \\ & 8 & 7 & 6 & 5 & 5 \end{matrix}$

$N = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 = 8\,400$

9. a) $1\,500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$

b) Os divisores positivos de $+ 1\,500$ são os números da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ com $a \in [\{0, 1, 2\}$, $b \in [\{0, 1\}$ e $c \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim, o número de divisores positivos de 1 500 é igual a:

$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

c) Para que um divisor positivo de 1 500 seja múltiplo de 3, esse divisor deverá conter o fator 3 em sua decomposição. Assim, o número de possibilidades é igual a:

$3 \cdot 1 \cdot 4 = 12$

10. Podemos escolher o motorista de duas maneiras distintas e o "carona" de apenas uma maneira. Além disso, a primeira criança pode escolher seu lugar de três maneiras distintas e a outra criança, de duas maneiras distintas. Assim, o número total de maneiras de acomodar as pessoas é igual a:

$N = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

11.

1ª	**2ª**

3ª	**4ª**

Escolhe-se um homem para sentar na 1ª posição (2) e escolhe-se uma mulher para sentar na 2ª posição $(2 \cdot 2)$, restando um homem para a 3ª posição $(2 \cdot 2 \cdot 1)$ e uma mulher para a 4ª posição $(2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1)$.

O homem pode trocar de lugar com a mulher na primeira fileira $(2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2)$ e o homem pode trocar de lugar com a mulher na segunda fileira $(2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2)$. Logo:

$N = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

12. Um número é múltiplo de 3 se a soma de seus algarismos é um número múltiplo de 3. Assim, temos as seguintes possibilidades: 1, 2 e 9; 1, 4 e 7; 2, 4 e 9; ou 2, 7 e 9.

Assim, a quantidade de números que podem ser formados é:

$(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 4 = 24$

13. a) $\underset{9}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \underset{1}{\square}$

$N = 9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$

b) $\underset{9}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \underset{1}{\square}\ \underset{1}{\square}$

$N = 9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$

c) $\underset{9}{\square}\ \underset{10}{\square}\ \boxed{3}\ \underset{1}{\square}\ \underset{1}{\square}$

$N = 9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$

14. $\underset{3}{\square}\ \underset{4}{\square}\ \underset{3}{\square}\ \underset{2}{\square}$ ou $\underset{5}{\square}\ \underset{4}{\square}\ \underset{3}{\square}\ \underset{2}{\square}\ \underset{1}{\square}$

$N = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72 + 120 = 192$

CAPÍTULO 14 – PERMUTAÇÕES

Página 209

1. a) $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

2. JURO, JUOR, JORU, JOUR, JROU, JRUO, UJOR, UJRO, URJO, UROJ, UORJ, UOJR, ROJU, ROUJ, RUJO, RUOJ, RJUO, RJOU, ORJU, ORUJ, OJUR, OJRU, OUJR, OURJ.

3. a) $N = P_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

b) $\boxed{2}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}$

$N = P_9 = 362\,880$

c) $\boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{0}$

$N = P_9 = 362\,880$

d) $\boxed{\text{par}}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}$

$N = 5 \cdot P_9 = 1\,814\,400$

e) $\boxed{\text{ímpar}}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}$

$N = 5 \cdot P_9 = 1\,814\,400$

4. a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

c) $4! + 6! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 744$

d) $7! - 5! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4\,920$

e) $\dfrac{9!}{7!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72$

f) $\dfrac{12!}{10!3!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 22$

5. a) Verdadeira.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Falsa.

e) Verdadeira.

Para verificar que os itens **b**, **c** e **d** são falsos, basta substituir as letras *m* e *n* por números naturais como 4 e 6, obtendo, assim, contraexemplos.

6. a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1) \cdot n = n^2 + n$

b) $\dfrac{(n-2)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n-2)!}{(n-1) \cdot (n-2)!} = \dfrac{1}{n-1}$

c) $\dfrac{100! + 101!}{99!} = \dfrac{100 \cdot 99! + 101 \cdot 100 \cdot 99!}{99!} =$

$= \dfrac{99! \cdot (100 + 101 \cdot 100)}{99!} = 10\,200$

7. $(n - 5)! = 5\,040 \rightarrow (n - 5)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \rightarrow (n - 5)! = 7! \rightarrow n - 5 = 7 \therefore n = 12$

8. a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

9. $a_n = \dfrac{(n^2-4) \cdot (n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{(n+2) \cdot (n-2) \cdot (n+1)!}{(n+2) \cdot (n+1)!} = n - 2$

$a_{2012} = 2012 - 2 = 2010$

10. $13! = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$13! = 13 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$13! = 13 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^{10}$

Assim:

$m = 10$

11. $2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 9 \cdot 9! = (3! - 2!) + (4! - 3!) + (5! - 4!) + \dots + (10! - 9!) = 10! - 2! = 3\,628\,798$

12. $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (\dots) \cdot 2n = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (\dots) \cdot 2n =$

$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (\dots) \cdot 2}_{n \text{ vezes}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\dots) \cdot n = 2^n \cdot n!$

13. a) $\boxed{\text{E ou I}}\ \square\ \square\ \square\ \square$

$N = 2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$

b) $\square\ \square\ \square\ \square\ \square$

$N = 3 \cdot P_3 \cdot 2 = 6 \cdot 3! = 36$

14. a) $P_6 = 6! = 720$

b) $\boxed{C}\ \boxed{V}\ \boxed{C}\ \boxed{V}\ \boxed{C}\ \boxed{V}$ ou $\boxed{V}\ \boxed{C}\ \boxed{V}\ \boxed{C}\ \boxed{V}\ \boxed{C}$

$N = P_3 \cdot P_3 \cdot 2 = 3! \cdot 3! \cdot 2 = 72$

15. $N = P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

16. a) $P_7 = 7! = 5\,040$

b) $\boxed{AEI}\ \square\ \square\ \square\ \square$

$N = P_5 \cdot P_3 = 5! \cdot 3! = 720$

c) $\boxed{AEI}\ \square\ \square\ \square\ \square$

$N = P_5 = 5! = 120$

d) $N = \dfrac{P_7}{P_3} = \dfrac{7!}{3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$

Página 214

1. AAS, ASA, SAA

2. a) $P_5^{2,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 30$

b) $\boxed{M}\ \square\ \square\ \square\ \square$

$P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = 6$

3. B → 1–2–4–3, 2–4–3–1, 4–3–1–2 e 3–1–2–4

C → 1–3–4–2, 3–4–2–1, 4–2–1–3 e 2–1–3–4

D → 1–3–2–4, 3–2–4–1, 2–4–1–3 e 4–1–3–2

E → 1–4–2–3, 4–2–3–1, 2–3–1–4 e 3–1–4–2

F → 1–4–3–2, 4–3–2–1, 3–2–1–4 e 2–1–4–3

4. $N = PC_8 = (8 - 1)! = 7! = 5\,040$

5. Considerando que o casal de namorados é uma só pessoa e que podem permutar entre si, o número de maneiras de as pessoas se acomodarem ao redor da mesa é igual a:

$PC_6 \cdot P_2 = (6 - 1)! \cdot 2! = 5! \cdot 2! = 120 \cdot 2 = 240$

6. As moças podem permutar entre si, bem como os rapazes. Assim, o número total de maneiras de dispor as sete pessoas ao redor da mesa é igual a:

$PC_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = (2 - 1)! \cdot 3! \cdot 4! = 144$

7. Fixando os quatro meninos ao redor do círculo, podemos distribuir as meninas de $P_4 = 4! = 24$ maneiras possíveis. Como os meninos podem se acomodar de $PC_4 = (4 - 1)! = 3! = 6$ maneiras possíveis ao redor do círculo, o número total de maneiras de os alunos se organizarem para a atividade é igual a:

$24 \cdot 6 = 144$

8. Note que, no caso das pulseiras, cada montagem é contada duas vezes porque a pulseira pode ser vista "pela frente" ou "por trás". Observe o exemplo:

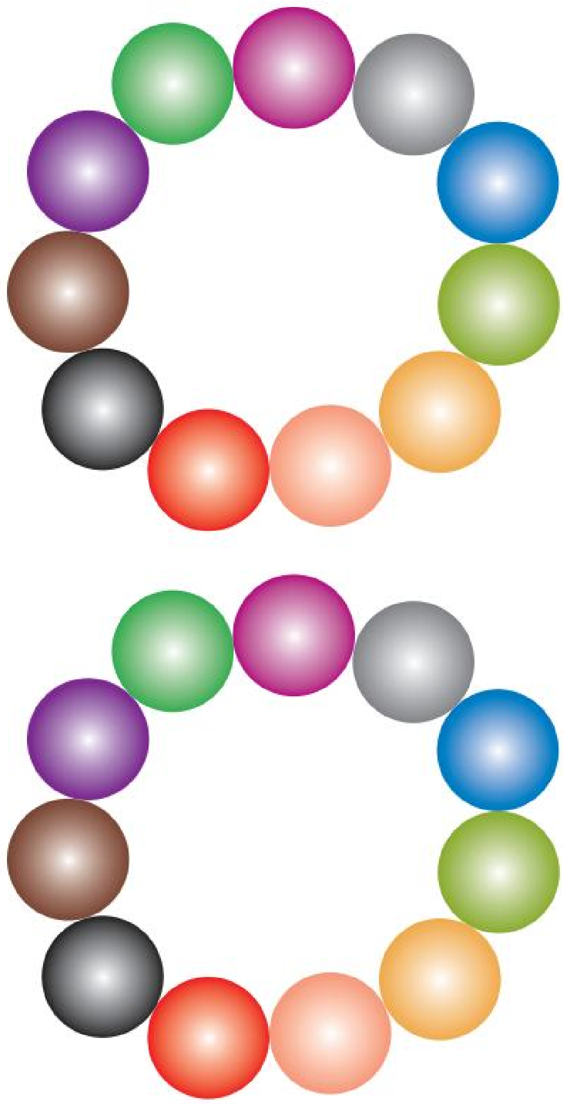


Figura: ©DAE

Assim:

$\dfrac{PC_{11}}{2} = \dfrac{10!}{2} = 1\,814\,400$

9. a) $N = P_6^{2,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 180$

b) $N = P_4 = 4! = 24$

10. $N = P_6^{2,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 180$

11. Os cinco rapazes podem trocar de lugar entre si, bem como as cinco moças. Além disso, cada casal pode trocar de lugar entre si. Assim, o número de fotografias distintas que podem ser tiradas é igual a:

$P_5 \cdot P_5 \cdot (P_2)^5 = 120 \cdot 120 \cdot 2^5 = 460\,800$

12. $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{38}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{9}$

$N_1 = P_6 \cdot P_2 = 6! \cdot 2! = 1440$

$\boxed{15}\ \boxed{38}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{9}$

$N_2 = P_5 \cdot P_2 \cdot P_2 = 5! \cdot 2! \cdot 2! = 480$

Assim, a quantidade de números em que os algarismos 3 e 8 sempre ocupam posições adjacentes e os algarismos 1 e 5 nunca ocupam posições adjacentes é igual a:

$1\,440 - 480 = 960$

CAPÍTULO 15 – COMBINAÇÕES E ARRANJOS

Páginas 219 e 220

1. a) $N = C_6^3 = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

b) Se uma das frutas for a manga, restará escolher as outras três frutas dentre as cinco opções disponíveis, ou seja:

$N = C_5^3 = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$

2. $N = C_5^3 \cdot C_4^2 = 10 \cdot 6 = 60$ (comissões distintas)

3. a) $N = C_{11}^3 = 165$ (triângulos)

b) $N = C_{11}^6 = 462$ (hexágonos convexos)

c) $N = C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5 + C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11} =$
$= 1981$ (polígonos convexos)

4. Seja G uma questão de Geometria e seja A uma questão de Álgebra. Temos as seguintes possibilidades:

$GGAAAAAA \rightarrow C_8^2 \cdot C_6^6 = 28 \cdot 1 = 28$

$GGGAAAAA \rightarrow C_8^3 \cdot C_6^5 = 56 \cdot 6 = 336$

$GGGGAAAA \rightarrow C_8^4 \cdot C_6^4 = 70 \cdot 15 = 1\,050$

$GGGGGAAA \rightarrow C_8^5 \cdot C_6^3 = 56 \cdot 20 = 1\,120$

$GGGGGGAA \rightarrow C_8^6 \cdot C_6^2 = 28 \cdot 15 = 420$

Assim, o número de provas diferentes é igual a:

$28 + 336 + 1\,050 + 1\,120 + 420 = 2\,954$

Poderíamos calcular também pelo complementar: total de provas que podem ser montadas menos total das que não nos interessam. Assim:

$C_{14}^8 - C_8^7 \cdot C_6^1 - C_8^8 = 3\,003 - 48 - 1 = 2\,954$

5. a) Cada equipe disputa 19 jogos em cada turno. Assim, o número total de jogos disputados por cada uma das equipes durante o campeonato é igual a:

$19 \cdot 2 = 38$

b) O número total de jogos do campeonato é igual a:

$2 \cdot C_{20}^2 = 2 \cdot 190 = 380$

6. a) $N = C_8^3 = 56$ (subconjuntos)

b) $N = C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$

(subconjuntos)

c) $N = C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = 28 + 8 + 1 = 37$ (subconjuntos)

7. $18 \begin{cases} 10 \text{ masculino} \\ 8 \text{ feminino} \end{cases}$

a) $N = C_{10}^3 \cdot C_8^2 + C_{10}^4 \cdot C_8^1 + C_{10}^5 \cdot C_8^0 =$
$= 120 \cdot 28 + 210 \cdot 8 + 252 \cdot 1 = 5\,292$ (grupos)

b) $N = C_{10}^0 \cdot C_8^5 + C_{10}^1 \cdot C_8^4 + C_{10}^2 \cdot C_8^3 =$
$= 1 \cdot 56 + 10 \cdot 70 + 45 \cdot 56 = 3\,276$ (grupos)

8. a) Para que a soma seja par, devemos escolher três números pares ou dois números ímpares e um número par, ou seja:

$C_6^3 + C_6^1 \cdot C_3^2 = 20 + 6 \cdot 3 = 38$

b) Para que a soma seja ímpar, devemos escolher três números ímpares ou dois números pares e um número ímpar, ou seja:

$C_3^3 + C_3^1 \cdot C_6^2 = 1 + 3 \cdot 15 = 46$

9. a) $N = C_6^1 \cdot C_{10}^2 + C_6^2 \cdot C_{10}^1 = 6 \cdot 45 + 15 \cdot 10 = 420$
(triângulos)

b) $N = C_6^2 \cdot C_{10}^2 = 15 \cdot 45 = 675$ (quadriláteros)

10. Como os grupos têm o mesmo número de pessoas, devemos dividir o resultado por 3! para não considerar a mesma divisão várias vezes, ou seja:

$\dfrac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{3!} = 5775$

11. a) Uma dupla pode escolher seu adversário de 7 maneiras distintas. Em seguida, outra dupla pode escolher seu adversário de 5 maneiras distintas. Assim, seguindo esse raciocínio, o número de maneiras de organizar a primeira rodada é igual a:

$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$

Outra maneira seria dividir o grupo de 8 duplas em 4 grupos com 2 duplas em cada um, ou seja:

$$\frac{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{4!} = 105$$

b) Na primeira rodada, teremos 4 jogos. Na segunda fase, 2 jogos e, na final, 1 jogo. Assim, o número total de jogos é igual a:

$4 + 2 + 1 = 7$

12. $N = \underbrace{(C_9^2 - 1)}_{\text{comissões sem os dois médicos juntos}} \cdot C_{12}^3 = (36 - 1) \cdot 220 = 7\,700$

(comissões distintas)

Página 224

1. a) $N = C_8^4 \cdot P_4 = 70 \cdot 24 = 1\,680$

b) $N = 3 \cdot C_7^3 \cdot P_3 = 3 \cdot 35 \cdot 6 = 630$

c) $N = C_7^3 \cdot P_3 = 35 \cdot 6 = 210$

2. $8 \begin{cases} 3 \text{ brasileiros} \\ 5 \text{ estrangeiros} \end{cases}$

a) $N = C_8^3 \cdot P_3 = 56 \cdot 6 = 336$ (resultados possíveis)

b) $N = 336 - \underbrace{C_5^3 \cdot P_3}_{\text{todos estrangeiros}} = 336 - 10 \cdot 6 = 276$

(resultados possíveis)

3. a) $N = C_{26}^3 \cdot P_3 \cdot C_{10}^4 \cdot P_4 = 2\,600 \cdot 6 \cdot 210 \cdot 24 =$

$= 78\,624\,000$ (placas distintas)

b) $N = C_{10}^4 \cdot P_4 = 210 \cdot 24 = 5\,040$ (placas distintas)

4. Como os amigos querem sentar de modo que não fiquem uma ou mais poltronas vazias entre dois amigos quaisquer, então existem 3 possibilidades para escolher as poltronas. Assim, o número total de maneiras de os amigos se acomodarem é igual a:

$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 120 = 360$

5. a) $\boxed{3}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{7} - \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

$N = C_{10-4}^4 \cdot P_4 = 15 \cdot 24 = 360$

b) $\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2} - \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

$N = C_{10}^4 \cdot P_4 = 210 \cdot 24 = 5\,040$

6. $N = C_{15}^4 \cdot P_4 = 1\,365 \cdot 24 = 32\,760$ (comissões distintas)

7. a) $N = C_{120}^2 = 7\,140$ (apertos de mão)

b) $120 \begin{cases} 24 \text{ não se conhecem} \\ 96 \text{ se conhecem} \end{cases}$

$N = 7\,140 - C_{24}^2 = 7\,140 - 276 = 6\,864$

(apertos de mão)

8. a) Se o presidente estiver presente, basta escolher os outros três membros dentre as 10 pessoas restantes, ou seja:

$C_{10}^3 = 120$ (comissões distintas)

b) Se o presidente não estiver presente, devemos escolher os quatro membros dentre as 10 pessoas restantes, ou seja:

$C_{10}^4 = 210$ (comissões distintas)

9. Como os prêmios são distintos, a ordem da escolha é relevante, ou seja:

$C_{10}^4 \cdot P_4 = 210 \cdot 24 = 5\,040$ (maneiras distintas)

10. a) $N = C_7^5 \cdot P_5 = 21 \cdot 120 = 2\,520$ (maneiras distintas)

b) $N = C_7^4 \cdot P_4 = 35 \cdot 24 = 840$ (maneiras distintas)

c) $N = C_7^3 \cdot P_3 = 35 \cdot 6 = 210$ (maneiras distintas)

11. A primeira caixa pode ter 1 ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9 bolas. As demais bolas serão colocadas na segunda caixa. Assim, o número de maneiras de fazer a distribuição é igual a:

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 = 1022$$

12. Observe a seguir dois exemplos de soluções da equação.

$\boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{+}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{+}\ \boxed{\cdot} : 2 + 5 + 1$

$\boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{+}\ \boxed{+}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot} : 4 + 0 + 4$

Observe que para representar uma solução basta escolher dois espaços dentre os 10 possíveis para inserir os sinais de +. Assim, o número total de soluções formadas por números naturais é igual a:

$C_{10}^2 = 45$

CAPÍTULO 16 – BINÔMIO DE NEWTON

Página 229

1. a) $N = C_9^3 = 84$ (subconjuntos)

b) $N = C_9^6 = 84$ (subconjuntos)

c) $N = C_9^4 = 126$ (subconjuntos)

d) $N = C_9^5 = 126$ (subconjuntos)

e) $N = C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7$ (subconjuntos)

2. a) Verdadeira.
$C_9^4 = 126$

b) Verdadeira.
$C_{11}^3 = C_{11}^8$, pois $3 + 8 = 11$

c) Verdadeira.
$C_7^2 + C_7^3 = C_8^3 = C_8^5$

d) Falsa.

$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + ... + C_{10}^{10} = 2^{10} - C_{10}^0 = 1\,024 - 1 = 1\,023$

e) Falsa.
$C_8^3 = C_8^{x+1} \rightarrow 3 = x + 1 \therefore x = 2$ ou $3 + x + 1 =$
$= 8 \therefore x = 4$

3. $C_{13}^4 = C_{13}^{3x-1} \rightarrow 4 = 3x - 1 \therefore x = \dfrac{5}{3}$ ou $4 + 3x - 1 =$

$= 13 \therefore x = \dfrac{10}{3} \rightarrow$ Soma $= \dfrac{5}{3} + \dfrac{10}{3} = 5$

4. a) $N = C_{11}^3 = 165$ (subconjuntos)

b) $N = 2^{11} = 2\,048$ (subconjuntos)

5. Considerando que Daniel é uma das pessoas, basta escolher as outras três pessoas dentre as nove restantes, ou seja:

$$C_9^3 + C_9^4 + ... + C_9^9 = 2^9 - C_9^0 - C_9^1 - C_9^2 = 466$$

6. Sendo N o número de alunos da turma, temos:

$$C_N^8 = C_N^{12} \rightarrow 8 + 12 = N \therefore N = 20$$

7. $N = C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 =$
$= 210 + 252 + 210 + 120 + 45 = 837$ (possibilidades)

8. Soma $= 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2^n \cdot 2 + 2^n \cdot 2^2 =$
$= 2^n \cdot (1 + 2 + 2^2) = 7 \cdot 2^n$

9. $C_{19}^5 + C_{19}^{x+3} = C_{20}^6$
$C_{19}^5 + C_{19}^{x+3} = C_{19}^5 + C_{19}^6$
$C_{19}^{x+3} = C_{19}^6$
$x + 3 = 6 \therefore x = 3$ ou $x + 3 + 6 = 19 \therefore x = 10$

10. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} C_{11}^k = C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10} = 2^{11} - C_{11}^0 - C_{11}^{11} = 2\,046$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k = C_{12}^0 + C_{12}^1 + ... + C_{12}^{12} = 2^{12} = 4\,096$

11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} C_8^k = 2^8 = 256$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} C_9^k = 2^9 - 1 = 511$

Página 234

1. $(y-2)^3 = C_3^0 \cdot (-2)^0 \cdot y^3 + C_3^1 \cdot (-2)^1 \cdot y^2 +$
$+ C_3^2 \cdot (-2)^2 \cdot y^1 + C_3^3 \cdot (-2)^3 \cdot y^0$
$(y-2)^3 = 1 \cdot 1 \cdot y^3 + 3 \cdot (-2) \cdot y^2 + 3 \cdot 4 \cdot y + 1 \cdot (-8) \cdot 1$
$(y-2)^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$

2. a) $(3m-1)^4 = C_4^0 \cdot (-1)^0 \cdot (3m)^4 + C_4^1 \cdot (-1)^1 \cdot (3m)^3 +$
$+ C_4^2 \cdot (-1)^2 \cdot (3m)^2 + C_4^3 \cdot (-1)^3 \cdot (3m)^1 + C_4^4 \cdot (-1)^4 \cdot (3m)^0$
$(3m-1)^4 = 81m^4 - 108m^3 + 54m^2 - 12m +$

b) $(2m+1)^4 = C_4^0 \cdot (1)^0 \cdot (2m)^4 + C_4^1 \cdot (1)^1 \cdot (2m)^3 +$
$+ C_4^2 \cdot (1)^2 \cdot (2m)^2 + C_4^3 \cdot (1)^3 \cdot (2m)^1 + C_4^4 \cdot (1)^4 \cdot (2m)^0$
$(2m+1)^4 = 16m^4 + 32m^3 + 24m^2 + 8m + 1$

c) $(\sqrt{2}-2)^3 = C_3^0 \cdot (-2)^0 \cdot (\sqrt{2})^3 + C_3^1 \cdot (-2)^1 \cdot (\sqrt{2})^2 +$
$+ C_3^2 \cdot (-2)^2 \cdot (\sqrt{2})^1 + C_3^3 \cdot (-2)^3 \cdot (\sqrt{2})^0$
$(\sqrt{2}-2)^3 = 2\sqrt{2} - 12 + 12\sqrt{2} - 8 = 14\sqrt{2} - 20$

d) $(\sqrt{3}+3)^3 = C_3^0 \cdot (3)^0 \cdot (\sqrt{3})^3 + C_3^1 \cdot (3)^1 \cdot (\sqrt{3})^2 +$
$+ C_3^2 \cdot (3)^2 \cdot (\sqrt{3})^1 + C_3^3 \cdot (3)^3 \cdot (\sqrt{3})^0$
$(\sqrt{3}+3)^3 = 3\sqrt{3} + 27 + 27\sqrt{3} + 27 = 54 + 30\sqrt{3}$

3. a) $(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

b) $(x + 2y)^4 = x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

c) $(2a + 3b)^5 = 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 +$
$+ 1\,080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$

4. Para calcular a soma dos coeficientes do desenvolvimento de um binômio, basta substituir as variáveis da base por um.

a) $(2 + 1)^5 = 3^5 = 243$

b) $(3 \cdot 1 - 4 \cdot 1)^7 = (-1)^7 = -1$

c) $\left(\dfrac{1}{2} \cdot 1^2 - 1\right)^4 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

5. $\begin{cases} 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = 64 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2x - y)^3 = 64 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \therefore x = 1$ e $y = -2$

6. a) $1{,}02^{15} = (1 + 0{,}02)^{15} \cong C_{15}^0 \cdot (0{,}02)^0 \cdot 1^{15} + C_{15}^1 \cdot (0{,}02)^1 \cdot 1^{14}$

$$1{,}02^{15} = (1+0{,}02)^{15} \cong 1 \cdot 1 \cdot 1 + 15 \cdot 0{,}02 \cdot 1$$
$$1{,}02^{15} = (1+0{,}02)^{15} \cong 1 + 0{,}3 \cong 1{,}3$$

b) $1{,}97^6 = (2-0{,}03)^6 \cong C_6^0 \cdot (-0{,}03)^0 \cdot 2^6 + C_6^1 \cdot (-0{,}03)^1 \cdot 2^5$
$$1{,}97^6 = (2-0{,}03)^6 \cong 1 \cdot 1 \cdot 64 + 6 \cdot (-0{,}03) \cdot 32$$
$$1{,}97^6 = (2-0{,}03)^6 \cong 64 - 5{,}76 \cong 58{,}24$$

7. a) O desenvolvimento do binômio apresenta 14 termos.

b) $T_1 = C_{13}^0 \cdot y^0 \cdot (2x)^{13} = 1 \cdot 1 \cdot 2^{13} \cdot x^{13} = 8\,192 \cdot x^{13}$

c) $T_{14} = C_{13}^{13} \cdot y^{13} \cdot (2x)^0 = 1 \cdot y^{13} \cdot 1 = y^{13}$

d) $T_8 = C_{13}^7 \cdot y^7 \cdot (2x)^6 = 1716 \cdot y^7 \cdot 64 \cdot x^6 =$
$= 109\,824 \cdot y^7 \cdot x^6$

8. $T_5 = C_8^4 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \cdot (x^2)^4 = 70 \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot x^8 = 70 \cdot x^6$

9. A soma dos coeficientes é igual a:

$(2 \cdot 1 + 3 \cdot 1)^4 = 5^4 = 625$

10. $T_{p+1} = C_{25}^p \cdot \left(\dfrac{1}{y^2}\right)^p \cdot (x^3)^{25-p}$

$75 - 3p = 9 \therefore p = 22$

$$T_{23} = C_{25}^{22} \cdot \left(\frac{1}{y^2}\right)^{22} \cdot (x^3)^{25-22}$$

$$T_{23} = \frac{2\,300x^9}{y^{44}}$$

Vestibulares e Enem

Páginas 235 e 236

1. Alternativa **d**.

A quantidade de lanches distintos é:

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

2. Alternativa **b**.

Considerando que são dois picolés de cada sabor, temos:

$$P_6^{(2,2,2)} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

3. Alternativa **e**.

Para posicionar os pais, temos 2 opções dentre a 2 possíveis.

Para posicionar os filhos, temos 4 posições das 4 que sobraram. Assim:

$$A_2^2 \cdot A_4^4 = \frac{2!}{(2-2)!} \cdot \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{2!}{0!} \cdot \frac{4!}{0!} = 48$$

4. Alternativa **c**.

Trata-se do triângulo de Pascal. Logo, o número localizado é dado por:

$$C_{15}^{13} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2 \cdot 1 \cdot 13!} = 105$$

5. Alternativa **c**.

$$P_8^{2,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = 10\,080$$

6. Alternativa **a**.

Das 9 poltronas vazias, a família deve escolher 7. Como a ordem importa, temos:

$$A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$$

7. Alternativa **e**.

Formando 3 "bloquinhos": um com 5 camisas, outro com 3 bermudas e outro com 2 casacos, temos a permutação dos 3 bloquinhos e a permutação das roupas dentro dos bloquinhos. Assim:

$P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 8\,640$

8. Alternativa **b**.

Cada vez que vai à locadora o cliente escolhe dois filmes de grupos diferentes. De acordo com o enunciado, temos:

$8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 =$
$= 8! \cdot 5! \cdot 3!$

9. Alternativa **a**.

Podemos calcular o que interessa retirando do total de comissões com 3 alunos as comissões formadas apenas por homens ou mulheres. Assim:

- total de comissões que podem ser formadas com 3 alunos $\longrightarrow C_{36}^3 = \dfrac{36!}{33!3!} = 7\,140$
- total de comissões que podem ser formadas com 3 mulheres $\longrightarrow C_{22}^3 = \dfrac{22!}{19!3!} = 1\,540$
- total de comissões que podem ser formadas com 3 homens $\longrightarrow C_{14}^3 = \dfrac{14!}{11!3!} = 364$

Logo:

$7\,140 - 1\,540 - 364 = 5\,236$ (comissões em que há pelo menos um homem e uma mulher)

10. Alternativa **d**.

Dos 5 bancos de frente para o chafariz, 4 deles serão ocupados por 4 pessoas: $A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$

Dos 5 bancos voltados para a rua, 3 deles serão ocupados por 3 pessoas: $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$

Os outros 3 bancos serão ocupados por 3 pessoas:

$A_3^3 = \frac{3!}{0!} = 6$

Logo, existem:

$120 \cdot 60 \cdot 6 = 43\,200$ (maneiras diferentes)

11. Alternativa **b**.

Utilizando a relação do termo de um binômio, temos:

$$T_{p+1} = C_8^p \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{8-p} \cdot x^p = \frac{8!}{p! \cdot (8-p)!} \cdot 2^{8-p} \cdot x^{2p-8}$$

Para que o termo seja independente de x, devemos ter:

$2p - 8 = 0 \Rightarrow p = 4$

O termo independente de x é:

$$T_5 = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} \cdot 2^{8-4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 2^4 = 1120$$

Logo, a soma dos algarismos é:

$1 + 1 + 2 + 0 = 4$

12. Alternativa **b**.

Duas vermelhas e uma azul:

$$C_9^2 \cdot C_7^1 = \frac{9!}{7!2!} \cdot \frac{7!}{6!1!} = 36 \cdot 7 = 252$$

Duas azuis e uma vermelha:

$$C_9^2 \cdot C_7^1 = \frac{9!}{7!2!} \cdot \frac{7!}{6!1!} = 36 \cdot 7 = 252$$

O total de maneiras é:

$252 + 252 = 504$

Como cada uma acende em 1 segundo, temos 504 segundos que é igual a 8 minutos e 24 segundos. Logo, $x = 8$ e $y = 24$.

13. Alternativa **a**.

Considerando que ele sempre vai usar 1 tipo de textura, 1 tipo de moldura e 1 tipo de cor para cada foto, há:

$5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ (maneiras diferentes de alterar cada foto)

Como são 4 fotos distintas, temos:

$P_4 = 120^4 = 24 \cdot 120^4$

14. Alternativa **d**.

Para que o produto dos quatro números escolhidos do conjunto X seja positivo, só existem três possibilidades:

- os quatro números escolhidos são positivos $\longrightarrow$ $C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = 15$
- os quatro números escolhidos são negativos $\longrightarrow$ $C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = 15$
- dois números escolhidos são positivos e dois são negativos $\longrightarrow$ $C_6^2 \cdot C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 15 \cdot 15 = 225$

Logo, são:

$15 + 15 + 225 = 255$ (maneiras distintas de escolher quatro elementos de X de modo que o produto destes elementos seja um número positivo)

Desafio

Temos as seguintes possibilidades:

- nenhuma dupla $\longrightarrow$ $C_9^0 = \frac{9!}{9!0!} = 1$
- 1 dupla $\longrightarrow$ $C_9^2 = \frac{9!}{7!2!} = 36$
- 2 duplas $\longrightarrow \frac{C_9^2 \cdot C_7^2}{2!} = \frac{\frac{9!}{7!2!} \cdot \frac{7!}{5!2!}}{2!} =$

$$= \frac{36 \cdot 21}{2} = 378$$

- 3 duplas $\longrightarrow \frac{C_9^2 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2}{3!} =$

$$= \frac{\frac{9!}{7!2!} \cdot \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!}}{3!} = \frac{36 \cdot 21 \cdot 10}{6} = 1260$$

- 4 duplas $\longrightarrow \frac{C_9^2 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2}{4!} =$

$$= \frac{\frac{9!}{7!2!} \cdot \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{3!}{1!2!}}{4!} =$$

$$= \frac{36 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 3}{24} = 945$$

Logo, são:

$1 + 36 + 378 + 1\,260 + 945 = - 620$ (maneiras diferentes)

UNIDADE 6 – PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

CAPÍTULO 17 – INTRODUÇÃO À TEORIA DAS PROBABILIDADES

Página 245

1. Respostas pessoais.

2. Respostas pessoais.

3. a) O amigo 1.

b) O amigo 3.

4. A saída mais provável é a B, com 50% de probabilidade. As saídas menos prováveis são C e D, com 25% de probabilidade cada uma.

5. Resposta pessoal.

6. a) Os números ímpares de 1 a 20 são 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19.
Os números múltiplos de 3 são 3, 6, 9, 12, 15 e 18.
Assim, é mais provável que o resultado seja um número ímpar.

b) Os números múltiplos de 5 de 1 a 20 são 5, 10, 15 e 20.
Os números que são divisores de 20 são 1, 2, 4, 5, 10 e 20.
Assim, é mais provável que o resultado seja um divisor de 20.

7. Resposta pessoal.

8. De acordo com as regiões, temos: na região preta, 100 pontos; na amarela, 50 pontos; na azul, 30 pontos; na vermelha, 20 pontos; na alaranjada, 10 pontos; na verde, 5 pontos.

9. Resposta pessoal.

10. a) {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

b) $\left\{\begin{matrix}(1,2),(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,2),(4,3),(4,5)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,5)\end{matrix}\right\}$

c) {(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

11. a) {(Co, 4)}

b) {(Ca, 3), (Ca, 6)}

c) {(Co, 2), (Co, 4), (Co, 6)}

12. $\left\{\begin{matrix}(Ca,1),(Ca,2),(Ca,3),(Ca,4),(Ca,5),(Ca,6)\\(Ca,1),(Ca,2),(Ca,3),(Ca,4),(Ca,5),(Ca,6)\end{matrix}\right\}$

b) {(Ca, 1), (Ca, 3), (Ca, 5)}

c) {(Co, 5)}

13. a) O evento A é composto por 4 elementos.

b) O evento B é composto por 13 elementos.

c) O evento C é composto por 2 elementos.

CAPÍTULO 18 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Páginas 251 e 252

1. Os números de + a 1 000 múltiplos de 7 são: 7, 14, 21, ..., 994.
Sendo n a quantidade de múltiplos de 7, temos:
$994 = 7 + (n - 1) \cdot 7 \therefore n = 142$
Assim, a probabilidade de o número registrado na bola ser múltiplo de 7 é igual a:
$\frac{142}{1000} = 14{,}2\%$

2. Na primeira figura, a probabilidade é igual a $\frac{1}{3}$ e, na segunda figura, a probabilidade é igual a $\frac{1}{4}$.

3. a) $p(\text{copas}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

b) $p(\text{rei}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

4. $p(\text{masculino}) = \frac{25}{25+20} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9} \cong 55{,}56\%$

5. O espaço amostral do experimento é:

$$\left\{\begin{matrix}(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6)\\(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6)\\(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6)\\(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6)\\(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6)\\(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\end{matrix}\right\}$$

a) $p(\text{dois números 6}) = \frac{1}{36}$

b) $p(\text{soma 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $p(\text{soma} \geq 7) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

6. a) A probabilidade de não chover é igual a:
$100\% - 40\% = 60\%$

b) A probabilidade de não fazer frio é igual a:

100% − 70% = 30%

7. a) números ímpares: 1, 3, 5, 7 $\rightarrow p(\text{ímpar}) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

b) números primos: 2, 3, 5, 7 $\rightarrow p(\text{primo}) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

8. Para que o número seja múltiplo de 3, devemos utilizar os algarismos 1, 2 e 3; 1, 3 e 5; 2, 3 e 4; ou 3, 4 e 5. Assim, a probabilidade de o número escrito no cartão ser múltiplo de 3 é igual a:

$$\frac{4 \cdot P_3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{5} = 40\%$$

9. Sendo M um filho do sexo masculino e F um filho do sexo feminino, o espaço amostral é:

$$\left\{\begin{matrix}(M;M;M), (F;F;F), (M;M;F), (M;F;M), \\ (F;M;M), (F;F;M), (F;M;F), (M;F;F),\end{matrix}\right\}$$

a) $p(\text{mesmo sexo}) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 25\%$

b) $p(\text{2 filhos do sexo masculino}) = \dfrac{3}{8} = 37{,}5\%$

10. a) Sendo N o número de bolas da urna, temos:

1 999 = + 1 (N − 1) · 2 ∴ N = 1 000

b) Os números múltiplos de 3 são 3, 9, 15, ... , 1 995. Sendo *k* o número de bolas marcadas com números múltiplos de 3, temos:

1 995 = 3 + (*k* − 1) · 6 ∴ *k* = 333

Assim, a probabilidade de o número da bola ser múltiplo de 3 é:

$$\frac{333}{1000} = 33{,}3\%$$

11. a) O número total de maneiras de retirar três bolas da urna é igual a:

$$C_N^3 = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}{3!}$$

As possibilidades para retirar três bolas com números consecutivos são:

$$\left.\begin{matrix}1, 2, 3 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4, 5 \\ \vdots \\ N-2, N-1, N\end{matrix}\right\} N-2 \text{ possibilidades}$$

Assim, a probabilidade de que os números nelas marcados sejam consecutivos é igual a:

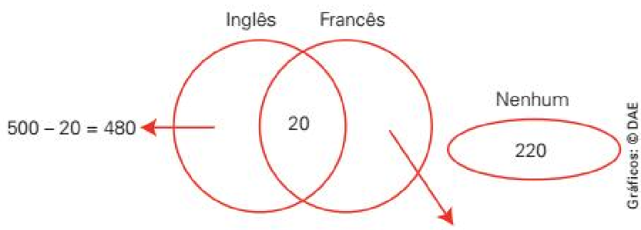
$$\frac{N-2}{\dfrac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2)}{3!}} = (N-2) \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{N \cdot (N-1) \cdot (N-2)} = \frac{6}{N^2 - N}$$

b) Se N = 6, temos:

$$\frac{6}{6^2 - 6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Página 255

1.



O número total de alunos da escola é igual a:

480 + 20 + 80 + 220 = 800

Assim, a probabilidade de que o aluno sorteado esteja matriculado em apenas um dos dois idiomas é igual a:

$$\frac{480 + 80}{800} = \frac{560}{800} = 70\%$$

2. a) Os números primos de 1 a 50 são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47. Assim, a probabilidade de o número ser primo é igual a:

$$\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 30\%$$

b) $p(\text{2 primos}) = \dfrac{C_{15}^2}{C_{50}^2} = \dfrac{15 \cdot 14}{50 \cdot 49} = \dfrac{3}{35}$

3. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

Assim, a probabilidade de sortear um número do conjunto A que seja múltiplo de 3 é igual a:

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\%$$

4. a) O número total de comissões que podem ser formadas é:

$$C_{10}^{4} = 210$$

b) p(Paulo fazer parte) $= \frac{C_9^3}{210} = \frac{84}{210} = 40\%$

5. $\begin{cases} p(Ca) + p(Co) = 1 \\ p(Co) = 3 \cdot p(Ca) \end{cases} \rightarrow p(Ca) + p(Co) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow p(Ca) + 3 \cdot p(Ca) = 1 \therefore p(Ca) = \frac{1}{4} \rightarrow p(Co) = \frac{3}{4}$

6. a) O número de alunos é igual a:

$80 + 120 + 88 + 40 + 12 = 340$

b) p(idade $\geq$ 16) $= \frac{88 + 40 + 12}{340} = \frac{140}{340} = \frac{7}{17}$

7. O número total de maneiras de sortear duas bolas da urna é:

$$C_{100}^{2} = 4\,950$$

O número total de maneiras de sortear duas bolas com números iguais é 50.

Assim, a probabilidade da urna de modo que os números nelas marcados sejam iguais é igual a:

$$\frac{50}{4\,950} = \frac{1}{99}$$

8. Sendo *k* a probabilidade de o número sorteado ser 1, temos:

$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$

$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$

$21k = 1$

$k = \frac{1}{21}$

a) $p(5) = 5k = 5 \cdot \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$

b) $p(\text{primo}) = p(2) + p(3) + p(5) = 2k + 3k + 5k =$

$= 10k = 10 \cdot \frac{1}{21} = \frac{10}{21}$

9. O número total de maneiras de escolher três vértices quaisquer do cubo é igual a:

$$C_8^3 = 56$$

O número total de maneiras de escolher três vértices pertencentes a uma mesma face é formado por todos os conjuntos em que os três vértices pertencem a uma mesma face, nas seis faces. Portanto:

$$6 \cdot C_4^3 = 6 \cdot 4 = 24$$

Assim, a probabilidade de que os vértices escolhidos pertençam a uma mesma face é igual a:

$$\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

10. a) O número total de anagramas da palavra ALUNO é:

$$P_5 = 5! = 120$$

O número total de anagramas que apresentam as vogais juntas é:

$$P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 36$$

Assim, a probabilidade de retirar um papel dessa caixa e o anagrama nele escrito apresentar as vogais juntas é igual a:

$$\frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 30\%$$

b) O número total de anagramas que apresentam as vogais em ordem alfabética é:

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 20$$

Assim, a probabilidade de retirar um papel dessa caixa e o anagrama nele escrito apresentar as vogais em ordem alfabética é igual a:

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

11. O número de mulheres casadas no grupo é:

$$30 - 10 = 20$$

Assim, a probabilidade de escolhermos uma mulher casada no grupo é igual a:

$$\frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 40\%$$

12. O número total de maneiras de escolher três células é igual a:

$$C_{16}^3 = 560$$

O número total de maneiras de escolher três células de uma mesma cor é igual a:

$$2 \cdot C_8^3 = 2 \cdot 56 = 112$$

Assim, a probabilidade de que as três células escolhidas tenham a mesma cor é igual a:

$$\frac{112}{560} = \frac{1}{5} = 20\%$$

CAPÍTULO 19 – ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Página 260

1. a) Existem 5 bolas verdes numeradas com número par, 2 bolas vermelhas numeradas com número par e 5 bolas azuis numeradas com número par. Assim, o total de bolas é 12.

b) $p(\text{azul ou verde}) = \frac{10+10}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0{,}80 = 80\%$

c) $p(\text{verde ou par}) = \frac{10+12-5}{25} = \frac{17}{25} = 0{,}68 = 68\%$

2. Espaço amostral:

$$\begin{Bmatrix} (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6) \\ (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6) \\ (3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6) \\ (4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6) \\ (5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6) \\ (6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6) \end{Bmatrix}$$

a) $p(\text{soma} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $p(\text{soma} = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

c) $p(\text{soma} = 7 \text{ ou soma} = 10) = \frac{6+3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

3. Espaço amostral:

$$\begin{Bmatrix} (Ca;1),(Ca;2),(Ca;3),(Ca;4),(Ca;5),(Ca;6) \\ (Co;1),(Co;2),(Co;3),(Co;4),(Co;5),(Co;6) \end{Bmatrix}$$

a) $p(\text{cara}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$

b) $p(\text{primo}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$

c) $p(\text{cara ou primo})$

$$= \frac{6+6-3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

4. Sendo x o número de alunos que não leem jornal algum, temos:

$550 - 80 + 80 + 280 - 80 + x = 1\,250$

$x = 500$

a) $p(\text{não ler jornal algum}) = \frac{500}{1250} = 0{,}40 = 40\%$

b) $p(\text{ler pelo menos um dos jornais}) = 100\% - 40\% =$
$= 60\%$

5. a)

Pesquisados	Sim	Não	Total de entrevistados
Presidentes de clubes de futebol	25%	75%	80
Jogadores	82%	18%	500
Técnicos	32%	68%	50
Imprensa esportiva	98%	2%	100

Dados fictícios

b) Sendo p a probabilidade de a pessoa ter dito sim, temos:

$$p = \frac{0{,}25 \cdot 80 + 0{,}82 \cdot 500 + 0{,}32 \cdot 50 + 0{,}98 \cdot 100}{80 + 500 + 50 + 100} =$$

$$= \frac{544}{730} = \frac{272}{365}$$

A probabilidade de a pessoa ter dito não é o complementar, isto é:

$$1 - \frac{272}{365} = \frac{93}{365}$$

6. $p(\text{olhos verdes ou cabelos castanhos})$

$$= \frac{5+7-3}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}90 = 90\%$$

7. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4+3-2}{8} = \frac{5}{8}$$

8. Os números quadrados perfeitos de 1 a 100 são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Os números cubos perfeitos são 1, 8, 27 e 64.

Assim, a probabilidade de que o número sorteado seja um quadrado ou um cubo perfeito é igual a:

$$\frac{10+4-2}{100} = \frac{12}{100} = 0{,}12 = 12\%$$

9. a) $P_6 = 6! = 720$

b) $p(\text{começar com a letra B}) = \frac{P_5}{720} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$

c) $p(\text{terminar com a letra L}) = \frac{P_5}{720} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$

d) $p(\text{começar com a letra B ou terminar com a letra L}) =$

$$= \frac{P_5 + P_5 - P_4}{720} = \frac{216}{720} = 0{,}30 = 30\%$$

10. O número de maneiras de escolher três alunos dentre os 10 é igual a:

$$C_{10}^{3} = 120$$

a) $p(\text{Douglas}) = \frac{C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0{,}30 = 30\%$

b) $p(\text{Douglas ou Júlia})$

$$= \frac{C_9^2 + C_9^2 - C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{36+36-8}{120} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

c) $p(\text{nem Douglas nem Júlia}) = 1 - p(\text{Douglas ou Júlia}) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$

11. Resposta pessoal.

Páginas 266 e 267

1. Se a soma dos dois números for 7, então o espaço amostral será:

{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}

Assim, a probabilidade de que pelo menos em um dos dados tenha ocorrido um número primo na face voltada para cima é igual a:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2. No baralho, 12 cartas são figuras e 40 cartas não são figuras.

a) $p(\text{2 figuras}) = \frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{221}$

b) Considerando que a primeira carta é uma figura, das 51 cartas restantes 11 são figuras. Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{11}{51}$$

3. Se as faces voltadas para cima nas três moedas não forem iguais, o espaço amostral será:

{(Ca, Ca, Co), (Ca, Co, Ca), (Co, Ca, Ca), (Co, Co, Ca), (Co, Ca, Co), (Ca, Co, Co)}

Assim, a probabilidade de que, nas duas primeiras moedas, a face voltada para cima tenha sido cara e na terceira moeda a face voltada para cima tenha sido coroa é igual a:

$$\frac{1}{6}$$

4. A probabilidade de o tiro ter sido dado pelo atirador A sabendo que ocorreu um erro é igual:

$$\frac{9\%}{9\% + 11\%} = \frac{9\%}{20\%} = 0{,}45 = 45\%$$

5. a) $p = \frac{20}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{10}{100} = 0{,}10 = 10\%$

b) $p = \frac{80}{100} \cdot \frac{80}{100} = 0{,}64 = 64\%$

c) $p(\text{chovido/venceu})$

$$= \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{50}{100}}{\frac{20}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{80}{100} \cdot \frac{80}{100}} =$$

$$= \frac{1000}{1000 + 6400} = \frac{1000}{7400} = \frac{5}{37}$$

6. $$100\% \begin{cases} 55\%\ \text{masculino} \begin{cases} 32\%\ \text{obesos} \\ 23\%\ \text{não obesos} \end{cases} \\ 45\%\ \text{feminino} \begin{cases} 18\%\ \text{obesas} \\ 60\% \cdot 45\% = 27\%\ \text{não obesas} \end{cases} \end{cases}$$

a) A probabilidade de a pessoa ser obesa e do sexo feminino é igual a 18%.

b) A probabilidade de a pessoa ser obesa, sabendo que é do sexo feminino é igual a:

$$\frac{32\%}{55\%}=\frac{32}{55}$$

c) A probabilidade de a pessoa ser do sexo feminino, sabendo que é obesa é igual a:

$$\frac{18\%}{32\%+18\%}=\frac{18}{50}=0{,}36=36\%$$

7. Se a soma dos três números for 10, teremos as seguintes possibilidades de ocorrência:

$(1, 3, 6) \rightarrow P_3 = 6$

$(1, 4, 5) \rightarrow P_3 = 6$

$(2, 2, 6) \rightarrow P_3^2 = 3$

$(2, 3, 5) \rightarrow P_6 = 6$

$(2, 4, 4) \rightarrow P_3^2 = 3$

$(3, 3, 4) \rightarrow P_3^2 = 3$

Assim, a probabilidade de que os três números tenham sido primos é igual a:

$$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

8. A probabilidade de um paciente obter a cura é igual a:

$0{,}30 \cdot 0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}25 + 0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}06 + 0{,}05 + 0{,}20 = 0{,}31$

Assim, a probabilidade de um paciente ter tido a doença C sabendo que obteve a cura é igual a:

$$\frac{0{,}20}{0{,}31}=\frac{20}{31}$$

9. a) $p(\text{positivo}) = \underbrace{0{,}05}_{p(D)} \cdot \underbrace{0{,}90}_{p(\text{positivo})} + \underbrace{0{,}95}_{p(\bar{D})} \cdot \underbrace{0{,}01}_{p(\text{positivo})} =$

$= 0{,}045 + 0{,}0095 = 0{,}0545 = 5{,}45\%$

b) $p(D/\text{positivo}) = \dfrac{4{,}5\%}{5{,}45\%}=\dfrac{450}{545}=\dfrac{90}{109}$

10. a) $p = 0{,}90 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}75 = 0{,}54 = 54\%$

b) $p = 0{,}10 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}25 = 0{,}005 = 0{,}5\%$

c) A probabilidade de que pelo menos um dos jogadores converta sua cobrança é igual a 100% menos a probabilidade de que nenhum dos jogadores converta sua cobrança, ou seja:

$$p = 1 - 0{,}005 = 0{,}995 = 99{,}5\%$$

11. Se João obtiver o número 1, Pedro poderá obter qualquer número de 1 a 6. Se João obtiver o número 2, Pedro precisará obter um número de 2 a 6 e assim sucessivamente. Assim, a probabilidade de Pedro vencer o jogo é igual a:

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

Consequentemente, a probabilidade de João vencer o jogo é igual a:

$$1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

12. A soma é igual a 100 para 49 pares de números sorteados:

{1, 99}, {2, 98}, {3, 97} ... {49, 51}

$$P=\frac{49}{C_{100}^2}$$

$$P=\frac{49}{\frac{100\cdot 99}{2\cdot 1}}$$

$$P=\frac{98}{9\,900}$$

$$P=\frac{49}{4\,950}$$

13. $40\text{ alunos}\begin{cases}22\text{ meninos}\\18\text{ meninas}\end{cases}$

p(sexos diferentes)

$$=\frac{22}{40}\cdot\frac{18}{39}+\frac{18}{40}\cdot\frac{22}{39}=\frac{2\cdot 22\cdot 18}{40\cdot 39}=\frac{33}{65}$$

CAPÍTULO 20 – INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA

Páginas 271 as 273

1. Variáveis quantitativas: c, d, e, d, i

Variáveis qualitativas: a, b, f, g, h

2. a) Discretas: c, i

b) Contínuas: d, e, j

3. $30\,400\begin{cases}16\,720\text{ mulheres}\\13\,680\text{ homens}\end{cases}$

a) $\dfrac{500}{30\,400}=\dfrac{x}{13\,680} \therefore x = 225$ (homens)

b) $\dfrac{500}{30\,400}=\dfrac{x}{3\,344}$ $\therefore$ $x=55$ (mulheres com formação superior)

c) $\dfrac{500}{30\,400}=\dfrac{x}{13\,680-3\,648}$ $\therefore$ $x=165$

(homens com formação não superior)

4. a) Nome do hotel, preço médio da diária, número de estrelas e quantidade de quartos.

b) Qualitativa: nome do hotel; quantitativas: preço médio da diária, número de estrelas e quantidade de quartos.

c) Discretas: número de estrelas e quantidade de quartos; contínua: preço médio da diária.

5. Resposta pessoal.

6. a) 15

b) $\dfrac{12}{60}=0{,}2=20\%$

c) $\dfrac{9+15+6}{60}=0{,}5=50\%$

7. a) $x = 0{,}52 \cdot 500 = 260$; $z = 0{,}10 \cdot 500 = 50$ e

$y = 500 - 20 - 80 - 260 - 65 - 50 = 25$

b) $A=\dfrac{20}{500}\cdot 100=4$

$B=\dfrac{80}{500}\cdot 100=16$

$C=\dfrac{65}{500}\cdot 100=13$

$D=\dfrac{25}{500}\cdot 100=5$

$E = 100$

8. a) $\dfrac{44}{200}=0{,}22=22\%$

b) $\dfrac{60+44}{200}=0{,}52=52\%$

9. a) A variável é contínua.

b) $\dfrac{8}{15}$

c) Alturas superiores a 2,00 m $\rightarrow$ 7.

10. a) A amplitude é igual a:

$28 - 9 = 19$ (minutos)

b)

Tempo (em minutos)	Frequência absoluta	Frequência relativa
[9; 14]	10	20%
[14; 19]	16	32%
[19; 24]	19	38%
[24; 29]	5	10%
Total	50	100%

Dados fictícios

11. a) Se analisarmos os crescimentos absolutos, temos:

- a montadora A vendeu 100 000 veículos a mais em 2014 que em 2013,
- enquanto a montadora B vendeu apenas 50 000 veículos a mais em 2014 que em 2013.

Assim, o aumento nas vendas da montadora A foi o dobro do aumento nas vendas da montadora B.

b) Se analisarmos os crescimentos relativos, temos:

- a montadora A vendeu 50% mais veículos em 2014 que em 2013,
- enquanto a montadora B vendeu 100% mais veículos em 2014 que em 2013.

Assim, o aumento nas vendas da montadora B foi o dobro do aumento nas vendas da montadora A.

c) Enquanto a montadora A utilizou os crescimentos absolutos, a montadora B utilizou os crescimentos relativos ou percentuais.

12. a) $A = \frac{460}{2\,000} \cdot 100 = 23$

$B = \frac{900}{2\,000} \cdot 100 = 45$

$C = \frac{520}{2\,000} \cdot 100 = 26$

$D = \frac{120}{2\,000} \cdot 100 = 6$

$E = 100$

b) $502 + 120 = 640$

Páginas 277 a 278

1. Analisando os dados do gráfico, temos:

(I) V

(II) V

(III) V

$\frac{960}{932} \cong 1{,}030$

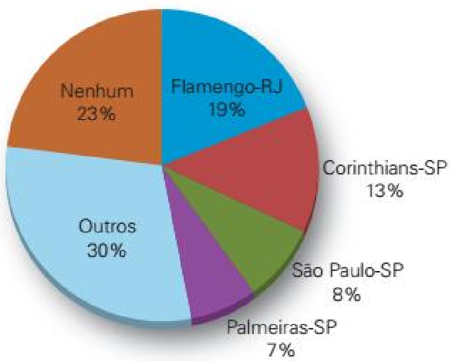
(IV) V

$\frac{960}{1011} \cong 0{,}950$

(V) F

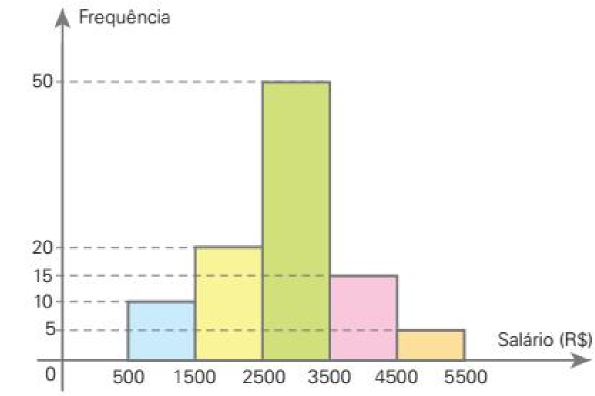
2002 para 2003 $\left(\frac{831}{899} \cong 0{,}924\right)$ é maior a perda percentual que de 1998 para 1999 $\left(\frac{932}{1003} \cong 0{,}929\right)$.

2.



Figuras: © DAE

3.



4. a) Na quinta-feira, foram vendidos:

$5 \cdot 10 = (50 \text{ copos})$

b) Durante toda a semana foram vendidos:

$(5 + 4 + 3 + 5 + 5 + 7 + 7) \cdot 10 = 360 \text{ (copos)}$

c) Sim, pois:

$$(5 + 7 + 7) \cdot 10 = 190 > \frac{360}{2}$$

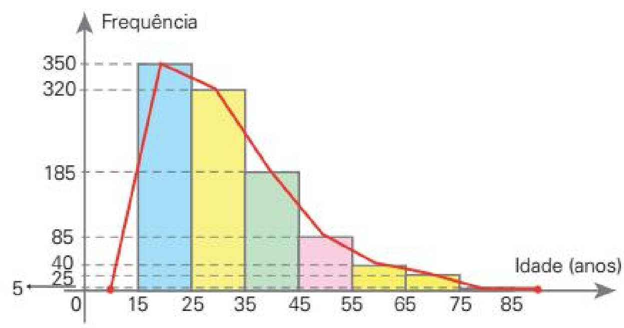
5. Analisando o gráfico, temos:

(I) V

(II) V

(III) V

6. a) e **b)**



c) O percentual é igual a:

$\frac{340}{1000} \cdot 100 = 34\%$

Vestibulares e Enem

Páginas 282 a 284

1. Alternativa **a**.

Para formar a palavra VENTILADOR, o consumidor deve acertar:

- as letras E, A e D na primeira linha;
- a letra I na segunda linha;
- as letras N, L e O na terceira linha;
- as letras T e R na quarta linha;
- a letra V na quinta linha.

Calculando as probabilidades de cada linha, temos:

Linha 1 → letras {E, A, D} → $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$

Linha 2 → letra {I} → $\frac{1}{5}$

Linha 3 → letras {N, L, O} → $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$

Linha 4 → letras {T, R} → $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

Linha 5 → letra {V} → $\frac{1}{3}$

Assim, a probabilidade de que o consumidor acerte todas as letras da palavra VENTILADOR é:

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15\,000}$$

2. a) Podemos dividir em dois casos: as duas peças estão na horizontal ou as duas peças estão na vertical.

Duas peças na horizontal: escolhe-se uma linha (8 maneiras), escolhe-se duas contíguas (7 maneiras) e permuta-se as duas peças (2! maneiras). Assim, são:

$8 \cdot 7 \cdot 2! = 112$ (maneiras distintas)

Duas peças na vertical: o resultado é análogo ao da horizontal.

Portanto, são:

$112 + 112 = 224$ (maneiras)

b) Para as casas a_{11} e a_{88} existem duas casas contíguas, enquanto para as outras 6 casas do tipo $i = j$ há 4 casas contíguas. Desse modo, a probabilidade pedida é dada por:

$$\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{63}+\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{63}=\frac{28}{504}=\frac{1}{18}$$

3. Alternatica **e**.

Números formados por algarismos pares distintos maiores que 200 e menores que 500:

$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

Números divisíveis por 6 são números que são divisíveis por 2 e por 3. Como os números considerados são pares, resta ver quais são divisíveis por 3, ou seja, quais são os números cuja a soma dos algarismos é divisível por 3. Assim, temos os seguintes números: 204, 240, 246, 264, 402, 420, 426, 462, 408, 480, 468 e 486. Portanto, a probabilidade pedida será dada por:

$$P=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

4. Altenativa **c**.

Glorinha possui uma ficha cujo número pertence ao conjunto {2, 3, 5, 7, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 23}.

Assim, a probabilidade pedida é dada por:

$$\frac{1}{11}\cdot 100\% \cong 9\%$$

5. Altenativa **a**.

Escolha do presidente (4 maneiras); escolha do tesoureiro (3 maneiras); escolha dos 2 revisores ($C_6^2 = 15$ maneiras). Logo, pelo princípio multiplicativo, a eleição possui:

$4 \cdot 3 \cdot 15 = 180$ (resultados possíveis)

Para que todos os escolhidos de um membro sejam eleitos, seu voto deve acertar:

- a escolha do presidente (1 maneira);
- a escolha do tesoureiro (1 maneira);
- um dentre os dois revisores (escolhendo um tesoureiro T_1 por exemplo, podem ser formadas 5 duplas que contêm T_1).

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P=\frac{5}{180}=\frac{1}{36}$$

6. Altenativa **c**.

A probabilidade pedida é igual a:

$$P=\frac{20}{100}$$

7. Altenativa **c**.

Sejam os eventos:

A → o time X é favorito.

B → o time X vence o jogo.

Temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}02} =$$

$$= \frac{0{,}72}{0{,}724} = \frac{180}{181}$$

8. Peças do novo dominó que possuem o 10: 11 peças.

Peças do novo dominó que possuem o 9: 10 peças.

Peças do novo dominó que possuem o 8: 9 peças.

⋮

Peças do novo dominó que possuem o 0: + peça.

Assim, o total de peças distintas do novo dominó é:

$$11 + 10 + 9 + ... + 1 = \frac{(11+1)11}{2} = 66$$

Temos 11 peças com o 9 e mais 10 peças com o 6 (são 11 peças com o 6 menos a que já foi contada com as peças que contêm o 9), totalizando 21 peças.

Portanto, a probabilidade pedida será dada por:

$$P = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$$

9. Alternativa **c**.

Das 23 cartas que restam no baralho, 5 cartas são de ouros. Assim, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{C_5^3}{C_{23}^3} = \frac{10}{1771}$$

10. Alternativa **d**.

Pelo menos um dos três alunos deve compreender e falar inglês para que a pergunta seja respondida. Pela probabilidade complementar, temos:

$1 - 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 65{,}7\%$

11. A probabilidade de sair um número ímpar será dada por:

$$P(x) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20} = \frac{55}{100} = 55\%$$

Seja o evento Y: sair um número menor que 5.

Assim, a probabilidade de Y é:

$$P(y) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = \frac{90}{100} = 90\%$$

12. Alternativa **b**.

Por inspeção, a maior diferença ocorreu em janeiro de 2014.

13. Alternativa **e**.

14. Alternativa **c**.

Do total reciclado, 37,8% vão para têxtil e desses, 30% para tecidos e malhas. Logo, o resultado pedido é dado por:

$0{,}378 \cdot 0{,}3 \cdot 282 \cong 32{,}0$ kton

15. Alternativa **e**.

Vamos determinar a probabilidade de essa pessoa não ganhar nenhum dos prêmios (não ganhar o primeiro e não ganhar o segundo):

$$p' = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99}$$

Cálculo da probabilidade de ganhar ao menos 1 dos prêmios:

$$p = 1 - p'$$

$$p = 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99}$$

$$p = \frac{100 \cdot 99 - 95 \cdot 95}{100 \cdot 99}$$

$$p = \frac{970}{9900} \Rightarrow p = \frac{97}{990}$$

16. Alternativa d.

Cálculo do número de resultados possíveis de um dado honesto 4 vezes pelo princípio multiplicativo:

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$

Cálculo do número de três resultados iguais e um diferente, também pelo princípio multiplicativo:

$4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$

Observe que os resultados são da forma (x,x,x,y) e suas permutações, sendo *x* e *y* distintos e pertencentes ao conjunto {1,2,3,4,5,6}. Assim, com 4 resultados iguais existem 6 resultados possíveis que vão de (1,1,1,1) até (6,6,6,6).

Portanto, a probabilidade de pelo menos 3 dos 4 lançamentos ter resultados iguais é

$$p = \frac{120 + 6}{1296}$$

$$p = \frac{126}{1296} \Rightarrow p = \frac{7}{72}$$

Desafio

Observe o quadro

m	Um posicionamento possível com *m* pessoas entre Renato e Alice	Total de posições possíveis de permutar o "bloquinho" com Renato e Alice e *m* pessoas entre eles
1	$\boxed{R\ \_\ A}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$	6
2	$\boxed{R\ \_\ \_\ A}\ \_\ \_\ \_\ \_$	5
3	$\boxed{R\ \_\ \_\ \_\ A}\ \_\ \_\ \_$	4
4	$\boxed{R\ \_\ \_\ \_\ \_\ A}\ \_\ \_$	3
⋮	⋮	⋮
m	$\boxed{R\ \_\ \dots\ \_\ A}\ \_\ \dots\ \_$	$7 - m$

Há duas maneiras de permutar Renato e Alice (2!).
As 6 pessoas restantes podem permutar entre elas de lugar na fila (6! maneiras).

Há $7 - m$ maneiras de posicionar Renato e Alice e m pessoas entre os dois.

Como há 8! maneiras de permutar todos na fila sem restrições, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{2! \cdot 6! \cdot (7 - m)}{8!} = \frac{7 - m}{28}$$

Para $m = 4$, temos:

$$P = \frac{7 - 4}{28} = \frac{3}{28}$$