PROBABILIDADE 25

Considere as seguintes situações:

- Um casal planeja ter três filhos. Qual é a probabilidade de nascerem duas meninas e um menino?
- Em uma classe com 30 alunos, qual é a probabilidade de que pelo menos dois façam aniversário no mesmo dia?
- Assinalando seis números em um cartão da Mega Sena, quais são as chances que tenho de acertar todos os números marcados?
- Se dois amigos escolhem seus assentos aleatoriamente em um mesmo vôo, em um avião com vinte fileiras de cadeiras, qual é a probabilidade de que eles sentem em uma mesma fileira?

Todas as questões levantadas constituem problemas de probabilidade. Neste capítulo, estudaremos métodos para resolvê-los, baseados na Análise Combinatória.

A teoria das probabilidades ganhou impulso historicamente com os jogos de azar e hoje constitui um interessante e importante ramo da Matemática. Tem aplicações em áreas do conhecimento como Biologia (Genética), Finanças, *Marketing* e Econometria, que é o conjunto de técnicas matemáticas usadas para quantificar fenômenos econômicos.

Experimento aleatório

Quando lançamos um dado, não é possível saber que resultado irá ocorrer; assim, esse experimento pode apresentar seis diferentes resultados.

Do mesmo modo, quando sorteamos um número entre 1 e 50, não é possível saber qual número será sorteado.

Trabalharemos, neste capítulo, com experimentos cujo resultado não é previamente conhecido. Repetidos em condições idênticas, tais experimentos podem apresentar resultados diferentes. Essa variabilidade deve-se ao acaso.

Chamaremos tais experimentos de experimentos aleatórios.

Espaço amostral

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado espaço amostral e é indicado pela letra grega Ω (lê-se "ômega").

O número de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório é indicado por $n(\Omega)$.

exemplo 1

Um dado é lançado duas vezes sucessivamente e é observada a seqüência das faces obtidas.

Usando o PFC (princípio fundamental da contagem), o número de resultados possíveis de ocorrer nesse experimento é $6 \cdot 6 = 36$. Veja, a seguir, uma forma de representar os 36 pares ordenados.

lançamentos ⟶

1º \ 2º	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Assim, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (2, 1), ..., (3, 1), ..., (4, 1), ..., (5, 1), ..., (6, 1), ..., (6, 6)\}$. Cada par ordenado corresponde a um ponto amostral.

exemplo 2

A sra. Fátima ganhou dois CDs iguais, de uma famosa dupla sertaneja, e pretende sorteá-los entre seus cinco netos (Alberto, Bruno, Cássio, Durval e Élcio), de modo que cada neto sorteado receba um CD.

Qual é o espaço amostral correspondente a esse experimento?

Devemos escrever todas as combinações dos cinco netos tomados dois a dois.

Temos:

$$\Omega = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}\}$$

Observe também que $n(\Omega) = C_{5,\,2} = 10$.

Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω) de um experimento aleatório recebe o nome de evento.

Veremos a seguir como "construir" alguns eventos.

exemplo 3

Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Quais resultados têm soma dos pontos igual a 6?

Devemos "percorrer" a tabela do exemplo 1 e verificar quais são os pares ordenados (a, b) tais que $a + b = 6$.

Temos: (5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2) e (3, 3).

Desse modo, construímos o evento E "a soma dos pontos obtidos é igual a 6".

$$E = \{(5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$$

Observe que $E \subset \Omega$.

exemplo 4

Uma caixa tem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Uma bola é retirada ao acaso da caixa. Qual é o evento E "ocorre um múltiplo de 4"?

O conjunto dos resultados possíveis desse experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 29, 30\}$.

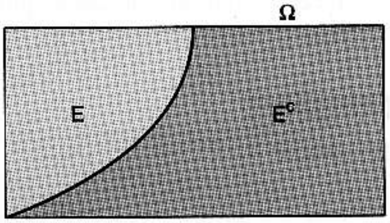
Para obter E, devemos selecionar os elementos de Ω que são múltiplos de 4, isto é, $E = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$.

observações

- Quando $E = \Omega$, o evento é dito evento certo.
  Por exemplo, no lançamento de um dado, seja E o evento "ocorre um número menor que 10". É claro que os casos favoráveis são $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$; E é um evento certo.
- Quando $E = \varnothing$, o evento é dito evento impossível.
  Exemplo: No lançamento de um dado, seja E o evento "ocorre um número maior que 20". Não há, evidentemente, nenhum caso favorável à ocorrência de E. Assim, $E = \varnothing$ é um evento impossível.

Evento complementar

Consideremos um evento E relativo a um espaço amostral Ω. Chamamos evento complementar de E — indicado por E^c — ao evento que ocorre quando E não ocorre. Observe o diagrama:



Notemos que $E \cap E^c = \varnothing$ e $E \cup E^c = \Omega$.

exemplo 5

Uma rifa compõe-se de 50 cupons, numerados de 1 a 50. Seja E o evento "o número sorteado é um quadrado perfeito". Quantos elementos possui o evento complementar de E?

De 1 a 50, os quadrados perfeitos são: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. Assim, $n(E) = 7$.

O evento complementar de E é formado pelos números de 1 a 50 que não estão relacionados acima. Assim, $n(E^c) = 50 - 7 = 43$.

exercícios

1. A Confederação Brasileira de Futebol (CBF) realizou um sorteio para decidir em qual região do país seria disputado um torneio internacional. Determine o espaço amostral desse experimento.

2. Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é anotado.

a) Descreva Ω.

b) Qual é o evento E_1 "o número obtido é múltiplo de 3"?

c) Qual é o evento E_2 "o número obtido não é primo"?

3. Um dado é lançado duas vezes sucessivamente e é anotada a seqüência de faces obtidas. Determine:

a) $n(\Omega)$

b) $n(E_1)$, sendo E_1 o evento "o maior número obtido nesses lançamentos é 3".

c) $n(E_2)$, sendo E_2 o evento "o produto dos números obtidos é ímpar".

4. Duas cartas são extraídas, simultaneamente, ao acaso, de um baralho comum. Qual é o número de elementos do espaço amostral relativo a esse experimento?

5. Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. A seqüência das faces obtidas é registrada. Determine:

a) o número de elementos do espaço amostral;

b) o evento E_1 "a face obtida no segundo lançamento é cara";

c) o evento E_2 "são obtidas exatamente duas coroas nesses lançamentos".

O enunciado a seguir é válido para as questões **6** e **7**.

Uma classe tem 17 rapazes e 15 moças. Pretende-se formar comissões de n alunos, escolhidos ao acaso, para representar a classe perante a diretoria do colégio.

6. Determine o número de elementos do espaço amostral correspondente se:

a) $n = 1$

b) $n = 2$

c) $n = 3$

7. Se a comissão for composta por dois alunos, considere o evento E "há um rapaz e uma moça na comissão" e determine $n(E)$.

8. Um número natural de 1 a 100 é escolhido ao acaso. Seja o evento E "ocorre um número que é uma potência de base 2". Qual é o número de elementos de E^c?

9. Ao sortearmos ao acaso um número natural entre 1 e 40, considere o evento E "ocorre um múltiplo de 2, 3 ou 4". Qual é o evento complementar de E?

Probabilidades em espaços amostrais eqüiprováveis

Consideremos um espaço amostral Ω, formado por k pontos amostrais:

$$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$$

Vamos associar a cada um desses pontos amostrais um número real, $p\{a_i\}$, ou simplesmente p_i, chamado probabilidade do evento $\{a_i\}$ (ou probabilidade de ocorrência do ponto amostral a_i), tal que:

I. $0 \leqslant p_i \leqslant 1$

II. $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, isto é, $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$

Consideraremos, na maior parte dos exercícios, os espaços amostrais eqüiprováveis, isto é, aqueles cujos pontos amostrais têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Assim, denotando por p a probabilidade de ocorrência de cada um dos pontos amostrais de Ω, temos, em II:

$$\underbrace{p + p + ... + p}_{k \text{ vezes}} = 1 \Rightarrow k \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{k}$$

Por exemplo, ao lançarmos um dado, a probabilidade de ocorrência de cada face é $\frac{1}{6}$.

A probabilidade de ocorrência de um evento E, formado por r pontos amostrais $E = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, com $r \leqslant k$, é dada por:

$$p(E) = p_1 + p_2 + ... + p_r \Rightarrow p(E) = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + ... + \frac{1}{k}}_{r \text{ vezes}}$$

$$p(E) = \frac{r}{k} = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Como $E \subset \Omega$, temos $n(E) \leqslant n(\Omega)$. Dessa forma:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \text{ é tal que } 0 \leqslant p(E) \leqslant 1$$

Essa definição de probabilidade é intuitiva, isto é, a probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis (ou número de casos que nos interessam) e o número de casos possíveis (ou número total de casos).

Assim:

$$\boxed{p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}}$$

exemplo 6

Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de:

a) ocorrer 5 no primeiro lançamento e um número par no segundo?

b) o produto dos pontos obtidos ser maior que 12?

Como vimos no exemplo 1, o conjunto dos resultados possíveis é formado por $6 \cdot 6 = 36$ pontos amostrais, isto é:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$$

a) O evento que nos interessa é $E = \{(5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$.

Assim, $p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

b) O evento que nos interessa é $E = \{(3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

Então, $p(E) = \frac{13}{36}$.

exemplo 7

Na tabela seguinte está representada a distribuição por turno dos 80 alunos do curso de Economia de uma faculdade.

	Manhã	Noite
Homens	20	23
Mulheres	25	12

Escolhendo ao acaso um aluno desse grupo, qual é a probabilidade de que seja:

a) mulher?
b) do curso noturno?
c) homem do curso diurno?

Vejamos: o número total de alunos no curso é $20 + 23 + 25 + 12 = 80$.

a) O número total de mulheres é $25 + 12 = 37$, e a probabilidade pedida é $\frac{37}{80}$.

b) Há $23 + 12 = 35$ alunos do curso noturno, e a probabilidade de o aluno ser do curso noturno é $\frac{35}{80} = \frac{7}{16}$.

c) O número de casos favoráveis é 20 e a probabilidade pedida é $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$.

exemplo 8

Um número de 1 a 40 é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de não sair um múltiplo de 6?

- É mais fácil calcular a probabilidade de sair um múltiplo de 6.
  Como há seis casos favoráveis, $\{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$, a probabilidade de ocorrer múltiplo de 6 é $\frac{6}{40} = \frac{3}{20}$.
- O evento "não ocorre múltiplo de 6" tem $40 - 6 = 34$ elementos e sua probabilidade de ocorrência é $\frac{34}{40} = \frac{17}{20}$.

Note que $\frac{3}{20} + \frac{17}{20} = 1$.

De modo geral, vale:

$$\boxed{p(E) + p(E^c) = 1}$$

exercícios

10. Uma urna contém 100 bolas numeradas de 1 a 100. Uma delas é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de o número sorteado ser:

a) 18?
b) maior que 63?
c) formado por dois algarismos?

11. Uma caixa contém 10 letras: as cinco vogais e as cinco primeiras consoantes do alfabeto. Uma letra é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que a letra sorteada seja:

a) E?
b) C?
c) J?
d) consoante?
e) uma letra da palavra "bode"?

12. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de ser sorteada:

a) a carta com o rei de ouros?
b) uma carta de ouros?
c) uma carta que não seja o 7?

13. Vinte esfihas, todas com a mesma forma, são colocadas em uma travessa; são sete de queijo, nove de carne e quatro de escarola. Alguém retira uma da travessa ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja retirada uma esfiha de carne?

14. Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Baseando-se na tabela do exemplo 1, qual é a probabilidade de que sejam obtidos:

a) números iguais?
b) números diferentes?
c) números cuja soma seja 7?
d) números cuja soma seja par?
e) números cujo produto seja par?

15. Na tabela seguinte aparece o resultado parcial do levantamento sobre hábitos alimentares realizado em uma comunidade de 200 pessoas.

	Nunca comem carne	Às vezes comem carne	Freqüentemente comem carne	Total
Homens	17	a	55	94
Mulheres	b	49	26	c
Total	d	e	81	200

a) Determine os valores de *a*, *b*, *c*, *d* e *e*.

b) Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que seja mulher e não consuma carne?

c) Escolhendo ao acaso um indivíduo da comunidade, qual é a probabilidade de que ele consuma carne freqüentemente?

16. Para formar uma senha bancária, Milu vai escolher um número de cinco algarismos. Já decidiu os quatro primeiros, que correspondem ao ano de nascimento de sua mãe: 1958. Se Milu escolher ao acaso o algarismo que falta, qual é a probabilidade de que seja formado um número:

a) com algarismos distintos?

b) múltiplo de 3?

c) múltiplo de 5, com algarismos distintos?

17. Um dado possui seis faces, sendo duas iguais a 1, duas iguais a 2 e duas iguais a 3. Ele é lançado duas vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja:

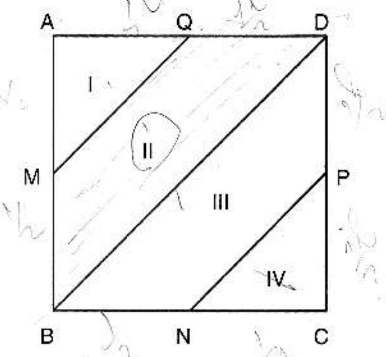
a) 6?

b) 4?

18. O coeficiente independente c da equação $x^2 - 3x + c = 0$ é escolhido aleatoriamente entre os elementos de $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Qual é a probabilidade de essa equação vir a ter raízes reais?

19. Uma pesquisa realizada com um grupo de fregueses de um supermercado revelou que 63% consomem a marca *A* de óleo, 55% consomem a marca *B* e 32% consomem ambas. Uma pessoa do grupo é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela não consuma nenhuma dessas marcas?

20. Um heliporto tem a forma de um quadrado ABCD, como mostra a figura seguinte, sendo *M*, *N*, *P* e *Q* os pontos médios dos seus lados.



Admita que um helicóptero possa pousar aleatoriamente em qualquer uma das regiões identificadas por I, II, III e IV. Qual é a probabilidade de que o pouso:

a) seja feito na região II?

b) não seja feito na região IV?

21. (UFF-RJ) Seiscentos estudantes de uma escola foram entrevistados sobre suas preferências quanto aos esportes vôlei e futebol. O resultado foi o seguinte: 204 estudantes gostam somente de futebol, 252 gostam somente de vôlei e 48 disseram que não gostam de nenhum dos dois esportes.

a) Determine o número de estudantes entrevistados que gostam dos dois esportes.

b) Um dos estudantes entrevistados é escolhido, ao acaso. Qual a probabilidade de que ele goste de vôlei?

22. Sabe-se que 35% dos alunos de um curso de línguas são rapazes e, entre eles, 80% nunca foram reprovados. Escolhendo ao acaso um estudante do curso, qual é a probabilidade de que seja um rapaz que já tenha sido reprovado?

23. (U. F. Ouro Preto-MG) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 2n, com $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Retirando-se, ao acaso, uma bola da urna, calcule, justificando, a probabilidade de essa bola estar numerada com:

a) um número cujo módulo é negativo;

b) um número par;

c) um número racional.

24. Numa prova com três questões (A, B e C), verificou-se que:

- 5 alunos acertaram as três questões;
- 15 alunos acertaram as questões A e C;
- 17 alunos acertaram as questões A e B;
- 12 alunos acertaram as questões B e C;
- 55 alunos acertaram só a questão A;
- 55 alunos acertaram só a questão B;
- 64 alunos acertaram só a questão C;
- 13 alunos erraram as três questões.

Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ter acertado:

a) pelo menos duas questões?
b) exatamente uma questão?

25. (UE-RJ) Numa cidade, 20% dos carros são da marca W, 25% dos carros são táxis e 60% dos táxis não são da marca W. Determine a probabilidade de que um carro escolhido ao acaso, nessa cidade, não seja táxi nem seja da marca W.

exemplo 9

Um ônibus de excursão com vinte brasileiros e seis estrangeiros é parado pela Polícia Federal de Foz do Iguaçu para vistoria da bagagem. O funcionário escolhe, ao acaso, três passageiros para terem as malas revistadas. Qual é a probabilidade de que todos sejam brasileiros?

O espaço amostral é formado por todos os grupos de três passageiros que podemos formar com os 26 turistas. Temos então $n(\Omega) = C_{26,\,3} = 2\,600$.

O evento E que nos interessa é aquele em que todos os passageiros revistados são brasileiros. Desse modo, $n(E) = C_{20,\,3} = 1\,140$.

Por fim, $p(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{1\,140}{2\,600} \cong 0{,}438 = 43{,}8\%$.

exemplo 10

Uma moeda é viciada de tal modo que, com ela, obter cara (K) é três vezes mais provável que obter coroa (C). Qual é a probabilidade de se conseguir cara em um único lançamento dessa moeda?

Nesse experimento, o espaço amostral não é eqüiprovável, pois $p(K) \neq p(C)$.

Entretanto, vale sempre $p(K) + p(C) = 1$ (ou 100%). Como por hipótese $p(K) = 3 \cdot p(C)$, segue que $3p(C) + p(C) = 1 \Rightarrow p(C) = \dfrac{1}{4}$ e, portanto, $p(K) = \dfrac{3}{4}$.

exercícios

26. Um dos anagramas da palavra AMOR é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que no anagrama apareça a palavra ROMA?

27. Um número de três algarismos é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ser formado por algarismos distintos?

28. Em um Estado brasileiro, todas as placas de automóveis são formadas por três letras (entre as 26 do alfabeto) e quatro algarismos e começam pela letra M.
Um veículo desse Estado é escolhido ao acaso e sua placa é anotada. Qual é a probabilidade de que a placa tenha:

a) as três letras iguais?
b) todos os algarismos distintos?

29. Palíndromos são números inteiros que não se alteram quando são lidos da esquerda para a direita e vice-versa. Por exemplo, 7 227, 535, 10 301, etc.

a) Com 0, 1, ..., 9 formam-se números de quatro algarismos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja formado um palíndromo?
b) Qual seria a resposta se o número fosse de cinco algarismos?

30. (PUC-RJ) Em uma amostra de 20 peças, existem exatamente quatro defeituosas. Retirando-se ao acaso, sem reposição, 3 peças, qual a probabilidade de todas as três serem perfeitas?

31. Em uma classe de 25 alunos há dois irmãos gêmeos. Três alunos são sorteados ao acaso para apresentar um trabalho. Qual é a probabilidade de que os gêmeos estejam entre os escolhidos?

32. Uma caixa contém 60 bolas, numeradas de 1 a 60.

a) Escolhendo aleatoriamente uma bola da caixa, qual é a probabilidade de que o número obtido seja múltiplo de 5?

b) Escolhendo simultaneamente e ao acaso duas bolas da caixa, qual é a probabilidade de que, em ambas, apareça um múltiplo de 5?

33. (U. F. Juiz de Fora-MG) Um programa de apoio a uma comunidade conta com 7 assistentes sociais, 6 enfermeiros e 4 médicos.

a) Quantos grupos distintos de 7 profissionais podem ser formados se devem participar de cada um desses grupos 3 assistentes sociais, 2 enfermeiros e 2 médicos?

b) Qual a probabilidade de se escolher, ao acaso, um grupo de 3 assistentes sociais constituídos de duas mulheres e um homem, se dos 7 assistentes sociais, 3 são homens e 4 são mulheres?

34. Três casais de amigos foram a um cinema e ocuparam seis cadeiras de uma mesma fileira. Como chegaram um pouco atrasados, eles se distribuíram de maneira completamente aleatória. Qual é a probabilidade de que:

a) os homens tenham sentado lado a lado e que o mesmo tenha ocorrido com as mulheres?

b) cada homem tenha sentado com sua mulher?

35. Três cartas de um baralho são sorteadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que:

a) apareça o dez de ouros entre as cartas sorteadas?

b) todas as cartas sorteadas sejam de espadas?

c) todas as cartas sorteadas sejam menores que 6? (Desconsidere o ás.)

36. Em um grupo de 80 pessoas, todas de Minas Gerais, 53 conhecem o Rio de Janeiro, 38 conhecem São Paulo e 21 já estiveram nas duas cidades. Duas pessoas do grupo são escolhidas ao acaso. Qual é a probabilidade de que ambas tenham visitado exatamente uma dessas cidades?

37. (UE-RJ) Um campeonato de futebol será disputado por 20 times, dos quais quatro são do Rio de Janeiro, nas condições abaixo:

I. Cada time jogará uma única vez com cada um dos outros.

II. Todos farão apenas um jogo por semana.

III. Os jogos serão sorteados aleatoriamente.

Calcule:

a) o menor número de semanas que devem ser usadas para realizar todos os jogos do campeonato.

b) a probabilidade de o primeiro jogo sorteado ser composto por duas equipes cariocas.

38. Dois irmãos, Lico e Leco, dividem o mesmo quarto. Certo dia, seus 21 livros escolares (12 de Lico e 9 de Leco) estavam todos jogados no chão. Sua mãe colocou-os, de forma aleatória, lado a lado em uma estante. Qual é a probabilidade de que todos os livros de Lico tenham ficado juntos nessa arrumação e que o mesmo tenha ocorrido com os livros de Leco?

39. Na prateleira de um mercado de importados estão à venda, na seção de vinhos brancos, oito vinhos argentinos, quatro chilenos e cinco portugueses.

a) Escolhendo-se ao acaso três vinhos da prateleira, qual é a probabilidade de que todos sejam fabricados em países sul-americanos?

b) Quantos vinhos chilenos deveriam ser acrescentados à seção, para que, selecionando-se uma garrafa ao acaso, a probabilidade de o vinho escolhido ser chileno seja, no mínimo, 50%?

40. Em uma moeda viciada, a chance de ocorrer coroa em um lançamento é $\frac{3}{4}$ da chance de ocorrer cara. Lançando-a uma vez, qual é a probabilidade de sair coroa?

41. Com um dado viciado verificou-se, por meio de inúmeros lançamentos, que para cada dois resultados com faces ímpares ocorrem três resultados com faces pares. Se todas as faces pares do dado têm a mesma chance de ocorrer e o mesmo acontece com as faces ímpares, determine a probabilidade de em um único lançamento ocorrer:

a) a face 1   b) a face 6

As chances na Mega Sena

Ganhar uma fortuna e mudar de vida. Esse é o sonho de milhões de brasileiros que diariamente procuram as casas lotéricas e apostam nas loterias da Caixa (Caixa Econômica Federal). Já é parte da rotina desses milhões de brasileiros acompanhar os números sorteados.

Delfim Martins/Pulsar

Algumas loterias mantidas pela Caixa são a Mega Sena, a Lotomania, a Loteca e a Lotogol.

A mais popular é a Mega Sena. Sorteios acumulados já chegaram a pagar mais de R$ 50 milhões ao felizardo vencedor.

O volante da Mega Sena contém 60 números, de 1 a 60. Para concorrer, a aposta mínima é em seis números e a aposta máxima em quinze. A cada "rodada", são sorteados seis números entre os 60. Há prêmios em dinheiro para quem acertar quatro números (quadra), cinco números (quina) e os seis números (sena).

Mas, afinal, se alguém fizer a aposta mínima, que custa R$ 1,50, que chance tem de ganhar?

- O resultado de um sorteio pode ocorrer de $C_{60,\,6} = 50\,063\,860$ modos distintos, pois são escolhidos, sem importar a ordem, seis entre os sessenta números.
- O sortudo acertará a sena se os seis números apostados coincidirem com os seis números sorteados, havendo assim um único caso favorável.

Logo, a probabilidade pedida é $\dfrac{1}{50\,063\,860} \cong 0{,}000002\%$.

E quais são as chances que tenho de fazer uma quadra com a aposta mínima?

- Em sua aposta deverão constar exatamente quatro entre os seis números sorteados e dois entre os cinqüenta e quatro não sorteados.
- O número de maneiras de acertar uma quadra é:

$$C_{6,\,4} \cdot C_{54,\,2}$$

- Portanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{C_{6,\,4} \cdot C_{54,\,2}}{C_{60,\,6}} = \frac{21\,465}{50\,063\,860} \cong 0{,}043\%$$

Por raciocínio análogo, conclui-se também que a probabilidade de fazer uma quina com a aposta mínima é:

$$\frac{C_{6,\,5} \cdot 54}{C_{60,\,6}} \cong 0{,}00065\%$$

Há, porém, outros números que premiam todo o Brasil a cada concurso: os repasses sociais das Loterias da Caixa.

Em 2004, por exemplo, dos 4,2 bilhões de reais arrecadados, mais de 2 bilhões de reais foram destinados ao desenvolvimento social. Veja alguns setores beneficiados:

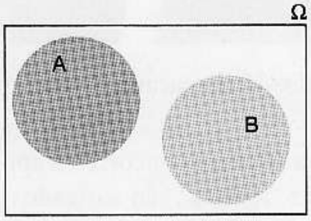
- Seguridade Social (saúde, previdência e assistência social)
- Programas de Financiamento Estudantil a universitários
- Esportes: Comitês Olímpico e Paraolímpico Brasileiros
- Fundo Nacional de Cultura

Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, isto é, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$.

Consideremos dois casos:

► $A \cap B = \varnothing$



Temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Como $n(\Omega) \neq 0$, podemos escrever:

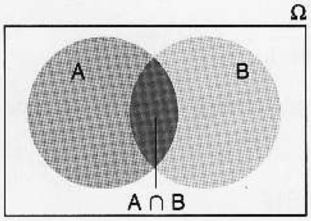
$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

Da definição de probabilidade apresentada, segue:

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}\,.$$

Nesse caso, A e B são chamados eventos mutuamente exclusivos.

► $A \cap B \neq \varnothing$



Da teoria dos conjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

De modo análogo ao primeiro caso, segue:

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

O evento $A \cap B$ representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

exemplo 11

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 3 ou de 4?

Sejam os eventos:

A: ocorre múltiplo de 3 $\Rightarrow A = \{3, 6\}$

B: ocorre múltiplo de 4 $\Rightarrow B = \{4\}$

Queremos avaliar $p(A \cup B)$.

Como $A \cap B = \varnothing$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) =$

$= \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

exercícios

42. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 2 ou de 3?

43. Para apresentar um trabalho, um professor sorteará um aluno, entre os 30 da turma, escolhido de acordo com o número da chamada. Qual é a probabilidade de o número do aluno escolhido ser:

a) primo ou maior que 10?
b) múltiplo de 7 ou de 5?
c) quadrado perfeito ou divisor de 36?

44. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de sair um valete ou uma carta de ouros?

45. Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sejam os eventos:
A: a soma dos pontos obtidos é 10;
B: os números obtidos são distintos.
Calcule $p(A \cup B)$.

46. Para preencher as vagas de trabalho em uma indústria, 120 pessoas participaram do processo seletivo. O quadro a seguir mostra a distribuição dos candidatos por gênero e escolaridade.

	Homens	Mulheres	Total
EM	18	27	45
ES	22	53	75
Total	40	80	120

EM = ensino médio; ES = ensino superior

Um candidato do grupo é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja:

a) mulher ou tenha ensino superior?
b) homem ou tenha só o ensino médio?

47. Os dados da tabela seguinte referem-se a uma pesquisa realizada com 155 moradores de um bairro e revelam seus hábitos quanto ao uso de TV e Internet pagas.

	Só TV aberta	TV paga
Internet gratuita	76	44
Internet paga	14	21

Um dos entrevistados é selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele use TV ou Internet pagas?

48. (UF-PE) Um economista apresenta proposta de trabalho às empresas X e Y, de modo que a probabilidade de ele ser contratado pela empresa X é de 0,61, a de ser contratado pela empresa Y é de 0,53 e a de ser contratado pelas *duas* empresas é de 0,27. Determine a probabilidade (p) de o economista não ser contratado por *nenhuma* das empresas e indique 100p.

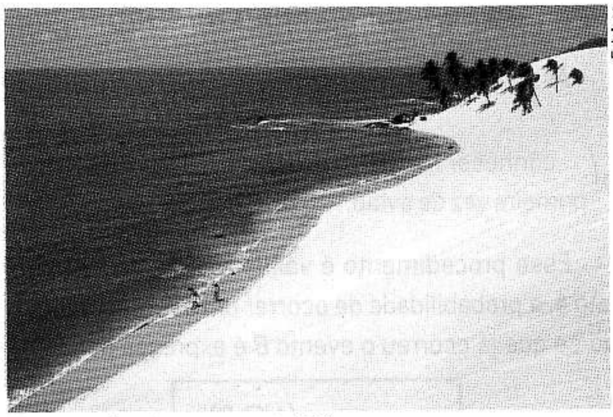
Probabilidade condicional

Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o vôo, cada turista respondeu a duas perguntas:

- Já voou antes?
- Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontram-se organizados na tabela seguinte:

	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia	83	22	105
Já conhecia	23	12	35
Total	106	34	140


Fotoarena

Praia de Genipabu, Natal (RN).

Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele nunca tinha viajado de avião. Qual é a probabilidade de que ele já conhecesse Natal?

Nesse caso, já temos conhecimento da ocorrência de um evento: o passageiro estava voando pela primeira vez. Com essa informação, concluímos que há apenas 106 possibilidades de escolha. Nesse novo universo, ou novo espaço amostral, o número de passageiros que já conheciam Natal é 23.

Assim, a probabilidade pedida é $p = \frac{23}{106}$.

Esse número expressa a probabilidade de a pessoa escolhida conhecer Natal, sabendo que era a primeira vez que viajava de avião. Vamos denominar tal número de probabilidade condicional e indicá-lo por:

$$p(\text{conhecer Natal} \mid \text{primeira vez de avião})$$

(lê-se: "dado que" ou "sabendo que")

Muitos problemas desse tipo podem ser assim resolvidos: reduzimos o espaço amostral a partir de uma informação parcial do resultado do experimento e calculamos a probabilidade nesse novo espaço amostral.

Vejamos, no exemplo dado, um modo alternativo para resolver questões de probabilidade condicional.

- Sabemos que $p = \dfrac{23}{106}$.
- Dividindo numerador e denominador de p por $n(\Omega) = 140$ (espaço amostral original), temos:

$$p = \frac{\left.\dfrac{23}{140}\right\}\text{probabilidade de ser escolhido um passageiro que já conhecia Natal e voava pela primeira vez}}{\left.\dfrac{106}{140}\right\}\text{probabilidade de ser escolhido um passageiro que voava pela primeira vez}}$$

Assim:

$$p\left(\begin{array}{c}\text{conhecer Natal} \mid \\ \text{primeira vez de avião}\end{array}\right) = \frac{p\left(\begin{array}{c}\text{conhecer Natal } \mathbf{e} \\ \text{primeira vez de avião}\end{array}\right)}{p(\text{primeira vez de avião})}$$

Esse procedimento é válido em um caso geral, isto é, a probabilidade de ocorrer um evento *A* sabendo-se que já ocorreu o evento *B* é expressa por:

$$\boxed{p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}$$

Observe que as probabilidades do segundo membro dessa expressão são sempre calculadas no espaço amostral original.

exemplo 12

Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sabendo-se que a soma dos pontos obtidos é menor que 6, qual é a probabilidade de que em ao menos um lançamento ocorra a face 2?

Podemos resolver esse problema de dois modos:

► Reduzimos o espaço amostral
Com a informação dada, o número de casos possíveis de a soma dos pontos ser menor que 6 passa a ser 10, a saber:

$$\Omega^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Dos elementos de Ω^*, é preciso selecionar os pares em que pelo menos um dos resultados é 2. O número de casos favoráveis é 5, a saber: (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3) e (3, 2).
Assim, a probabilidade pedida é:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$$

► Utilizamos a fórmula, considerando o espaço amostral original
Lembre-se de que, ao lançar um dado duas vezes sucessivamente, temos 36 possibilidades diferentes de resultados. Assim, $n(\Omega) = 36$.

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\dfrac{5}{36}}{\dfrac{10}{36}} = \frac{1}{2} = 50\%$$

ao menos uma das faces é 2 — soma dos pontos é menor que 6

De modo geral, é mais prático e intuitivo usar a 1ª solução do exemplo anterior, isto é, reduzir o espaço amostral e calcular probabilidades nesse novo universo. Entretanto, a fórmula da 2ª solução servirá para introduzirmos um importante teorema, usado no cálculo de probabilidades de ocorrência de dois eventos sucessivos, como veremos no próximo item.

exercícios

49. Uma das letras do alfabeto é escolhida ao acaso. Sabendo-se que ela é uma das dez primeiras letras, qual é a probabilidade de que seja uma vogal?

50. Um número natural de 1 a 100 é escolhido ao acaso.

a) Sabendo-se que ele é par, qual é a probabilidade de ser múltiplo de 7?
b) Sabendo-se que ele é múltiplo de 7, qual é a probabilidade de ser par?

51. De um baralho comum, uma carta é retirada ao acaso. Se a carta escolhida:

a) não é valete nem dama, qual é a probabilidade de ser o rei de ouros?
b) não é de ouros, qual é a probabilidade de não ser de copas?
c) é de copas, qual é a probabilidade de ser o rei?

52. Se um dado é lançado duas vezes sucessivamente e os números obtidos são:

a) iguais, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja um número par?

b) distintos, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos seja 8?

53. Um supermercado registrou a forma de pagamento utilizada por 180 clientes durante certa manhã e obteve a seguinte tabela:

	Dinheiro	Cheque	Cartão
Compras até R$ 50,00	34	25	40
Compras acima de R$ 50,00	10	28	43

Uma das compras efetuadas é escolhida ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de que se tenha utilizado cheque, sabendo-se que seu valor não excedeu R$ 50,00?

b) Qual é a probabilidade de seu valor ter excedido R$ 50,00, sabendo-se que ela foi paga em dinheiro?

54. Doze atletas, incluindo Binho, Cadu e Dado, treinam para um torneio de vôlei. Admita que todos os atletas possam jogar em qualquer posição. O técnico escolhe os seis titulares de maneira aleatória. Se Binho não está entre os titulares, qual é a probabilidade de que:

a) Cadu esteja?

b) Cadu ou Dado esteja?

55. (Vunesp-SP) Sete números são tomados aleatoriamente entre os números do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

a) Se os sete números são colocados na ordem crescente, obtenha a probabilidade do segundo número ser 3.

b) Dado que o número 8 está entre os números tomados, obtenha a probabilidade de ele ser o maior entre os sete números tomados.

Probabilidade de dois eventos simultâneos (ou sucessivos)

Da fórmula $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, encontrada para probabilidade condicional, segue que:

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A \mid B) \cdot p(B)}$$

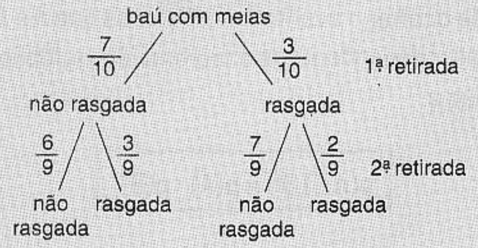
Isso significa que, para se avaliar a probabilidade de ocorrerem dois eventos simultâneos (ou sucessivos), que é $p(A \cap B)$, é preciso multiplicar a probabilidade de ocorrer um deles ($p(B)$) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu ($p(A \mid B)$).

A utilização dessa fórmula fica clara nos exemplos seguintes.

exemplo 13

Em um cesto de roupa há dez meias, das quais três estão rasgadas. Extraindo-se duas meias sucessivamente e sem reposição, qual é a probabilidade de que as duas meias retiradas não estejam rasgadas?

Vamos construir um diagrama de árvore para esse experimento e associar probabilidades a cada um de seus galhos. Observe que as probabilidades referentes à segunda retirada estão condicionadas ao resultado da primeira:



Estamos interessados em calcular:

$$p\left(\begin{matrix}\text{não}\\ \text{rasgada}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{não}\\ \text{rasgada}\end{matrix}\right) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \quad \text{(observe o 1º galho)}$$

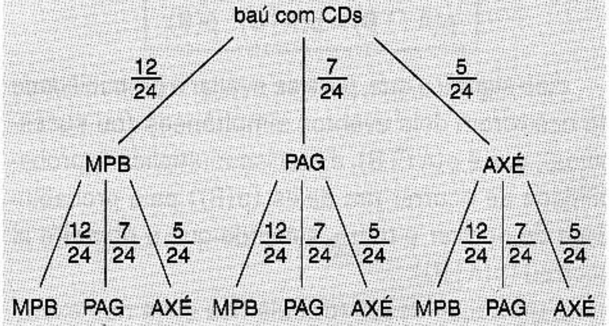
probabilidade de a 1ª meia não estar rasgada

probabilidade de a 2ª meia não estar rasgada, se a 1ª também não está

Logo, a resposta é $p = \dfrac{42}{90} = \dfrac{7}{15}$.

exemplo 14

Doze CDs de MPB, sete de pagode (PAG) e cinco de axé-music (AXÉ) estão guardados em um baú. Um estudante escolhe, sucessivamente e com reposição, dois desses CDs. Qual é a probabilidade de que os dois CDs sorteados sejam de pagode?



Observe que o fato de ser escolhido um CD de pagode na primeira extração não muda a probabilidade de retirarmos um CD de pagode na segunda extração, uma vez que o sorteio é feito com reposição. Dizemos, nesse caso, que há independência entre os eventos.

A probabilidade pedida é:

$$p = p(PAG \cap PAG) = \frac{7}{24} \cdot \frac{7}{24} = \frac{49}{576} \cong 8{,}5\%$$

De modo geral, quando $p(A \mid B) = p(A)$ — isto é, o fato de ter ocorrido o evento B não altera a probabilidade de ocorrer o evento A —, dizemos que A e B são eventos independentes e o teorema da multiplicação se reduz a:

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$$

exercícios

56. Duas cartas, de um baralho de 52, são extraídas sucessivamente. Qual é a probabilidade de saírem duas cartas de um mesmo naipe, se a extração é feita:

a) sem reposição?
b) com reposição?

57. Em uma festa infantil, foram misturados, em uma caixa, 12 brindes para meninos e 15 para meninas. Dois brindes são retirados, sucessivamente e sem reposição, da caixa. Qual é a probabilidade de que:

a) ambos sejam para meninos?
b) um seja para menino e outro para menina?

58. Os nomes dos alunos das três turmas da 2ª série do ensino médio de um colégio foram colocados em uma urna. As turmas A, B e C têm, respectivamente, 30, 28 e 26 alunos. Dois nomes são escolhidos ao acaso, sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de que eles sejam de uma mesma turma?

59. Em uma bandeja há dez pastéis, sendo três de palmito, quatro de carne e três de queijo, todos com o mesmo formato. Se Dudu retirar três deles sucessivamente e sem reposição, qual é a probabilidade de que:

a) todos sejam de carne?
b) exatamente dois deles sejam de palmito?

60. A probabilidade de um nadador A queimar a largada em uma competição é de 18%; para o nadador B essa possibilidade é de 12%. Se os dois nadadores estão disputando uma prova, qual é a probabilidade de que:

a) ambos queimem a largada?
b) nenhum deles queime a largada?
c) ao menos um queime a largada?

61. (UF-PE) Uma escola comprou computadores das empresas X e Y. Quarenta por cento dos computadores foram comprados da empresa X e os demais da empresa Y. A probabilidade de um computador fabricado por X apresentar defeito no primeiro ano de uso é 0,10 e se fabricado por Y é de 0,15. Se um desses computadores é escolhido aleatoriamente, qual a probabilidade percentual de ele não apresentar defeito no primeiro ano de uso?

62. Uma operadora de turismo fez um levantamento sobre a origem dos turistas que visitam o Nordeste e concluiu que o número de turistas provenientes de São Paulo é o triplo do número de turistas provenientes do Rio de Janeiro. A pesquisa também mostrou que de cada 100 turistas paulistas 56 são mulheres e de cada 100 turistas cariocas 74 são mulheres.
Quando um turista do eixo Rio—São Paulo que visita o Nordeste é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que seja:

a) um homem paulista?
b) paulista, sabendo que é homem?

63. (FGV-SP) Um jogo consiste em lançar um dado e, em seguida, uma moeda, um número de vezes igual ao número obtido no lançamento do dado. Sairá vencedor aquele que conseguir o maior número de caras nos lançamentos da moeda.
Pedro, que disputa com Paulo, conseguiu tirar 5 caras. Qual a probabilidade de Paulo sair vencedor?

64. Uma urna I tem 3 bolas brancas, 2 pretas e x vermelhas; uma urna II tem 1 bola branca, 5 pretas e 2 vermelhas. Uma das urnas é escolhida ao acaso e dela são extraídas, sucessivamente e sem reposição, duas bolas. Qual é o valor de x para que a probabilidade de ambas as bolas sorteadas serem pretas seja de $\frac{11}{56}$?

65. (UF-RJ) Uma caixa contém bombons de nozes e bombons de passas. O número de bombons de nozes é superior ao número de bombons de passas em duas unidades. Se retirarmos, ao acaso, sem reposição, dois bombons dessa caixa, a probabilidade de que ambos sejam de nozes é $\frac{2}{7}$.

a) Determine o número total de bombons.
b) Se retirarmos, ao acaso, dois bombons da caixa, determine a probabilidade de que sejam de sabores distintos.

Experimentos binomiais

Imagine que uma pessoa queira lançar uma moeda cinqüenta vezes para verificar a freqüência de ocorrência de cada face. Para cada lançamento há apenas dois resultados possíveis: cara ou coroa. Admita que cada lançamento seja independente dos demais, isto é, a probabilidade de ocorrer uma face em um lançamento não depende dos resultados ocorridos nos lançamentos anteriores.

Esse tipo de experimento consiste na repetição de ensaios independentes. Cada ensaio apresenta apenas dois resultados possíveis, comumente designados por sucesso ou fracasso. A esse experimento chamamos experimento binomial.

Para calcularmos probabilidades em experimentos binomiais, é preciso usar o teorema da multiplicação, aplicado ao caso de eventos independentes, isto é, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Estenderemos, sem demonstração, a validade desse teorema para uma seqüência de n ensaios: E_1, E_2, ..., E_n, todos independentes entre si, isto é:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot \ldots \cdot p(E_n)$$

exemplo 15

Um aluno "chuta" completamente ao acaso as dez questões de uma prova do tipo *V* ou *F*. Qual é a probabilidade de que ele acerte seis questões?

Cada ensaio corresponde à resolução de uma questão, em que $p(\text{acerto}) = p(\text{erro}) = \frac{1}{2}$.

Os dez ensaios são independentes entre si.

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de ocorrerem 6 acertos (C) e 4 erros (E) em uma determinada ordem, por exemplo: (C, C, C, C, C, C, E, E, E, E).

Temos:

$$p = \underset{\substack{|\\ \text{acertar} \\ \text{a 1ª}}}{\frac{1}{2}} \cdot \underset{\substack{|\\ \text{acertar} \\ \text{a 2ª}}}{\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{|\\ \text{errar} \\ \text{a 7ª}}}{\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{|\\ \text{errar} \\ \text{a 10ª}}}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1\,024} \quad (*)$$

Essas respostas, porém, podem ocorrer em outras ordens, por exemplo: (C, E, C, E, C, E, C, E, C, C) ou (E, E, E, E, C, C, C, C, C, C), etc. A quantidade de seqüências desse tipo corresponde ao número de permutações de 10 letras, com 6 repetições de C e 4 repetições de E, a saber:

$$P_{10}^{(6,\,4)} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$$

Por fim, como a probabilidade de ocorrerem 6C e 4E em uma determinada ordem é dada por (*) e existem 210 ordens possíveis, a probabilidade pedida é:

$$210 \cdot \frac{1}{1\,024} = \frac{105}{512} \cong 20{,}5\%$$

exemplo 16

A probabilidade de um vôo da companhia PARA CIMA sair no horário previsto é de 90%. Se, durante um dia, a companhia programar oito vôos, qual é a probabilidade de que cinco saiam com atraso?

A probabilidade de o vôo ocorrer no horário é 0,9; logo a probabilidade de haver atraso em um vôo é $1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Calculemos a probabilidade de haver 5 vôos atrasados (A) e 3 vôos no horário (H) em uma determinada ordem, por exemplo A, A, A, A, A, H, H, H. Temos:

$$p = \underbrace{0{,}1}_{\text{atraso no 1º vôo}} \cdot \underbrace{0{,}1}_{\text{atraso no 2º vôo}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{0{,}1}_{\text{atraso no 5º vôo}} \cdot \underbrace{0{,}9}_{\text{6º vôo na hora}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{0{,}9}_{\text{8º vôo na hora}} = 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^3$$

O número de seqüências ordenadas que apresentam 5A e 3H é:

$$P_8^{(5,\,3)} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

A probabilidade pedida é:

$$56 \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^3 \cong 0{,}04\%$$

exercícios

66. Uma moeda honesta é lançada oito vezes. Qual é a probabilidade de ocorrerem:

a) 4 caras e 4 coroas?
b) 6 caras e 2 coroas?

67. Cada uma das dez questões de um exame apresenta cinco alternativas de resposta, das quais apenas uma é correta. Se um estudante chutar todas as respostas, qual é a probabilidade de que ele:

a) acerte três questões?
b) acerte seis questões?
c) erre todas as questões?
d) acerte ao menos uma questão?

68. A probabilidade de ocorrer defeito no teste final de um componente eletrônico é de 1%. Analisando um estoque com 20 componentes, qual é a probabilidade de que exatamente um apresente defeito?

69. (UE-RJ) Uma pesquisa realizada em um hospital indicou que a probabilidade de um paciente morrer no prazo de um mês após determinada operação de câncer é igual a 20%. Se três pacientes são submetidos a essa operação, calcule a probabilidade de, nesse prazo:

a) todos sobreviverem;
b) apenas dois sobreviverem.

70. A probabilidade de um atirador acertar um alvo com um tiro é 60%. Fazendo nove tentativas, qual é a probabilidade de acertar o alvo:

a) seis vezes? b) seis vezes ou mais?

71. (UFF-RJ) Em um jogo de dardos, a probabilidade de um jogador acertar o alvo é $\frac{1}{3}$. Determine a probabilidade de, ao lançar o dardo três vezes, o jogador acertar o alvo pelo menos duas vezes.

72. Um casal planeja ter 6 filhos. Qual é a probabilidade de nascerem mais meninas do que meninos?

73. Em uma moeda viciada, a chance de ocorrer coroa em um lançamento é o dobro da chance de ocorrer cara. Em 12 lançamentos dessa moeda, qual é a probabilidade de ocorrerem:

a) 10 coroas? b) 8 coroas?

Matemática, futebol e loteria

Moacyr Lopes Junior/Folha Imagem

Uma das loterias mais populares entre os brasileiros, principalmente homens, é a Loteca (antiga loteria esportiva). Ela reúne duas paixões nacionais: futebol e apostas.

A Loteca lista 14 partidas de futebol. O apostador arrisca um palpite para o resultado de cada partida: vitória de um dos times (coluna 1 ou coluna 2) ou empate (coluna do meio).

A aposta mínima é um duplo, isto é, em um único jogo assinalam-se duas opções: coluna 1 e coluna 2, coluna 1 e coluna do meio ou coluna 2 e coluna do meio. O preço dessa aposta é R$ 1,00. Há também apostas em um triplo (custo de R$ 1,50), isto é, em um único jogo assinalam-se as três opções, garantindo, obviamente, o acerto do resultado daquele jogo.

Há várias opções de aposta. Entre muitas possibilidades, podemos citar: 2 duplos (R$ 2,00), 1 triplo e 1 duplo (R$ 3,00), 6 triplos (R$ 364,50), 3 triplos e 5 duplos (aposta máxima, que custa R$ 432,00). Ganha quem acertar os resultados de 13 ou 14 partidas.

Mas, afinal, quais são as chances de se ganhar nessa loteria?

A teoria de probabilidades nos ajuda a calcular tais chances, a partir da hipótese de que os resultados das 14 partidas constituem um espaço amostral eqüiprovável, isto é, cada resultado (coluna 1, coluna do meio e coluna 2) tem probabilidade $\frac{1}{3}$ de ocorrer.

Observe, também, que o resultado de um jogo não interfere no resultado dos demais jogos, garantindo, desse modo, independência entre os eventos (cada jogo está associado a um evento).

Imagine que você irá preencher um volante dos 14 jogos, concorrendo com a aposta mínima, isto é, você assinala um duplo em um jogo, digamos o primeiro, e nos demais jogos (2º ao 14º) um palpite simples (uma coluna por jogo).

- A probabilidade de acertar os 14 jogos pode ser expressa por:

$$p(\text{acertar o 1º jogo e acertar o 2º e acertar o 3º e ... e acertar o 14º jogo})$$

Usando o teorema da multiplicação e lembrando a independência dos eventos, vem:

$$p = p(\underbrace{\text{acertar o 1º jogo}}_{\text{duplo}}) \cdot p(\underbrace{\text{acertar o 2º jogo}}_{\text{simples}}) \cdot \ldots \cdot p(\underbrace{\text{acertar o 14º jogo}}_{\text{simples}})$$

$$p = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3}}_{13\ \text{jogos}} = \frac{2}{3^{14}} \cong 0{,}000042\%$$

- A probabilidade de acertar exatamente 13 jogos exige um raciocínio mais elaborado. Há dois casos possíveis:

I. Você erra o 1º (duplo) e acerta os demais, do jogo 2 ao jogo 14, com palpites simples.

$$p = p(\underbrace{\text{errar o duplo}}) \cdot p(\underbrace{\text{acertar o simples}}) \cdot \ldots \cdot p(\underbrace{\text{acertar o simples}})$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^{14}}$$

II. Você acerta o 1º (duplo) e entre os 13 jogos restantes acerta 12 e erra 1.

- A probabilidade de acertar o 1º jogo é $\frac{2}{3}$.
- Do 2º ao 14º jogos é possível caracterizar um experimento binomial, pois a probabilidade de acerto em cada jogo é constante $\left(\frac{1}{3}\right)$. A chance de ocorrerem 12 acertos e 1 erro é:

$$P_{13}^{(12)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13!}{12!} \cdot \frac{2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}}$$

Assim, a probabilidade de II é $\frac{2}{3} \cdot \frac{26}{3^{13}} = \frac{52}{3^{14}}$.

Reunindo os dois casos (I e II), encontramos:

$$p = \frac{1}{3^{14}} + \frac{52}{3^{14}} = \frac{53}{3^{14}} \cong 0{,}0011\%$$

Não desanime vendo esses números! Lembre que esse modelo é teórico. Na prática, em alguns jogos, o apostador tem conhecimento prévio sobre os times e acompanha o desempenho das equipes no campeonato. Isso pode aumentar a chance de acerto do resultado de um jogo.

Mas não esqueça: favoritismos à parte, no futebol são 11 contra 11 e tudo pode acontecer...

testes de vestibulares

1. (UE-PA) O professor Francisco de Assis realizou uma pesquisa em uma de suas turmas de 2ª série do ensino médio para saber a preferência dos alunos a respeito do tema a ser escolhido para a feira cultural da escola. Assim, apresentou aos alunos dois temas, Cidadania e Meio Ambiente, obtendo os seguintes resultados:

- 40 alunos escolheram Cidadania;
- 25 alunos escolheram Meio Ambiente;
- 10 alunos escolheram ambos os temas;
- 5 alunos não escolheram nenhum dos dois temas.

Desta forma, selecionando um aluno da sala, a probabilidade dele ter escolhido *apenas* Meio Ambiente como tema é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{6}$

2. (U. F. Uberlândia-MG) Considere que um dado honesto é lançado duas vezes e que os números observados na face superior são anotados. A probabilidade de que a soma dos dois números anotados seja múltiplo de 4 é igual a:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{4}$

3. (UF-RN) Por medida de segurança, para se efetuar um saque num caixa eletrônico de um certo banco, é necessário digitar uma senha com 6 (seis) dígitos numéricos e um código contendo 3 (três) letras dispostas aleatoriamente no painel. Um cliente digita o códito com letras não repetidas; a primeira, a segunda e a terceira são digitadas respectivamente na primeira, na segunda e na terceira linha da parte do painel representada na figura abaixo.

1ª	O	T	H	L
2ª	H	O	N	E
3ª	T	B	F	M

A probabilidade de o código conter as letras *O* e *E* é de:

a) $\frac{11}{12}$
b) $\frac{15}{16}$
c) $\frac{1}{12}$
d) $\frac{1}{16}$

4. (Faap-SP) Numa população humana a probabilidade de ser mudo é estimada em 0,005, a probabilidade de ser cego é 0,0085 e a probabilidade de ser mudo e cego é 0,0006. A probabilidade de que um indivíduo, tomado ao acaso, seja mudo ou cego é:

a) 0,0129
b) 0,0141
c) 0,0135
d) 0,0091
e) 0,0090

5. (PUC-PR) Há em um hospital 9 enfermeiras (Karla é uma delas) e 5 médicos (Lucas é um deles). Diariamente, devem permanecer de plantão 4 enfermeiras e 2 médicos. Qual a probabilidade de Karla e Lucas estarem de plantão no mesmo dia?

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{8}{45}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{2}{3}$

6. (UE-PA) Os cursos ofertados pela UEPA no Prosel e Prise, no município de Igarapé-açu, com as respectivas vagas, constam na tabela abaixo:

Curso ofertado	Prosel	Prise
Licenciatura em Letras	20	20
Licenciatura em Matemática	20	20

Supondo que todas as vagas serão preenchidas, a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um aluno do Curso de Licenciatura em Matemática ou um aluno aprovado no Prise é de:

a) 25%
b) 50%
c) 60%
d) 75%
e) 100%

7. (FEI-SP) Numa caixa têm-se 9 fichas numeradas de 1 a 9. Três fichas são escolhidas ao acaso e sem reposição. A probabilidade de *não* sair a ficha número 7 é:

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{9}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{2}{3}$

8. (Enem-MEC) A tabela abaixo indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos.

	A	B	C	D
A				*
B	•*		•	•*
C	•*	*		*
D	•		•	

O símbolo • significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo * significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

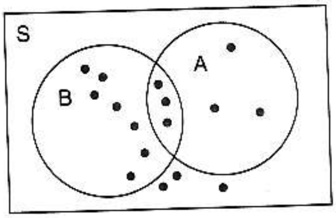
A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a:

a) 0,00
b) 0,25
c) 0,50
d) 0,75
e) 1,00

9. (Ucsal-BA) De uma população de 1 500 pessoas, sabe-se que $\frac{1}{3}$ do total trabalham em atividades agrícolas e o restante na construção civil. Se forem escolhidas ao acaso 2 dessas pessoas, a probabilidade de que ambas trabalhem na construção civil é:

a) $\frac{4}{9}$
b) $\frac{111}{250}$
c) $\frac{486}{1\,499}$
d) $\frac{666}{1\,499}$
e) $\frac{499}{4\,497}$

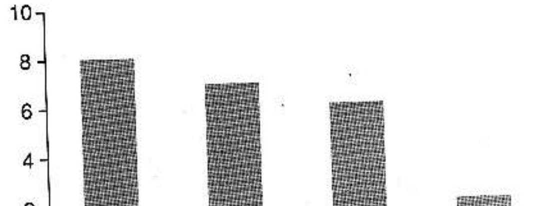
10. (U. E. Londrina-PR) No diagrama a seguir, o espaço amostral S representa um grupo de amigos que farão uma viagem. O conjunto A indica a quantidade de pessoas que já foram a Maceió e o conjunto B, a quantidade de pessoas que já foram a Fortaleza.



A empresa de turismo que está organizando a viagem fará o sorteio de uma passagem gratuita. Considerando que a pessoa sorteada já tenha ido para Fortaleza, assinale a alternativa que indica a probabilidade de que ela também já tenha ido para Maceió.

a) 18,75%
b) 30%
c) 33,33%
d) 50%
e) 60%

11. (Enem-MEC) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres de acordo com a quantidade de filhos é mostrada no gráfico abaixo.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada seja um(a) filho(a) único(a) é:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{7}{15}$
d) $\frac{7}{23}$
e) $\frac{7}{25}$

12. (UF-MA) Uma máquina produziu 30 parafusos dos quais 5 eram defeituosos. Escolhendo-se ao acaso dois parafusos dessa amostra, qual a probabilidade de os dois serem perfeitos?

a) 69,96%
b) 68,96%
c) 67,46%
d) 66,39%
e) 58,66%

13. (U. F. Juiz de Fora-MG) Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. A probabilidade de que pelo menos uma criança seja menino é de:

a) 25%
b) 42%
c) 43,7%
d) 87,5%
e) 64,6%

14. (U. F. Juiz de Fora-MG) Uma prova de certo concurso contém 5 questões com 3 alternativas de resposta para cada uma, sendo somente uma dessas alternativas a resposta correta. Em cada questão, o candidato deve escolher uma das três alternativas como resposta. Um certo candidato que participa desse concurso decidiu fazer essas escolhas aleatoriamente. A probabilidade de que ele escolha todas as respostas corretas nessa prova é igual a:

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{15}$
d) $\frac{1}{125}$
e) $\frac{1}{243}$

15. (Vunesp-SP) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7. Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

a) 0,06
b) 0,14
c) 0,24
d) 0,56
e) 0,72

16. (UF-SC) Em uma caixa há 28 bombons, todos com forma, massa e aspecto exterior exatamente iguais. Desses bombons, 7 têm recheio de coco, 4 de nozes e 17 são recheados com amêndoas. Se retirarmos da caixa 3 bombons simultaneamente, a probabilidade de se retirar um bombom de cada sabor é, aproximadamente:

a) 7,5%
b) 11%
c) 12,5%
d) 13%
e) 14,5%

17. (Mackenzie-SP) Escolhidos, ao acaso, dois números distintos do conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, a probabilidade de que o produto deles seja ímpar é:

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{2}{9}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{2}{7}$
e) $\frac{3}{4}$

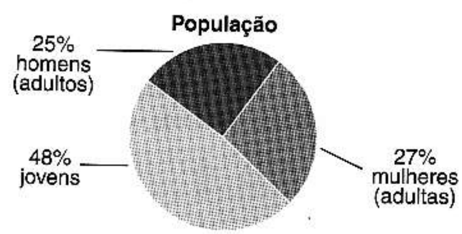
18. (PUC-SP) Em um ônibus há apenas 4 bancos vazios, cada qual com 2 lugares. Quatro rapazes e quatro moças entram nesse ônibus e devem ocupar os bancos vagos. Se os lugares forem escolhidos aleatoriamente, a probabilidade de que cada banco seja ocupado por 1 rapaz e 1 moça é:

a) $\frac{1}{70}$
b) $\frac{6}{35}$
c) $\frac{3}{14}$
d) $\frac{8}{35}$
e) $\frac{2}{7}$

19. (UF-PI) No lançamento de um dado viciado, as faces diferentes de 5 ocorrem cada uma com probabilidade p, enquanto que a face 5 ocorre com a probabilidade 3p. Assim sendo, o valor de p é:

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{2}{8}$
c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{4}{8}$
e) $\frac{5}{8}$

20. (Fuvest-SP) Um recenseamento revelou as seguintes características sobre a idade e a escolaridade da população de uma cidade:



Escolaridade	Jovens	Mulheres	Homens
Fundamental incompleto	30%	15%	18%
Fundamental completo	20%	30%	28%
Médio incompleto	26%	20%	16%
Médio completo	18%	28%	28%
Superior incompleto	4%	4%	5%
Superior completo	2%	3%	5%

Se for sorteada, ao acaso, uma pessoa da cidade, a probabilidade de esta pessoa ter curso superior (completo ou incompleto) é:

a) 6,12%
b) 7,27%
c) 8,45%
d) 9,57%
e) 10,23%

21. (Enem-MEC) Um aluno de determinada escola será escolhido por sorteio para representá-la em certa atividade. A escola tem dois turnos. No diurno há 300 alunos, distribuídos em 10 turmas de 30 alunos. No noturno há 240 alunos, distribuídos em 6 turmas de 40 alunos. Em vez do sorteio direto envolvendo os 540 alunos, foram propostos dois outros métodos de sorteio.

Método I: Escolher ao acaso um dos turnos (por exemplo, lançando uma moeda) e, a seguir, sortear um dos alunos do turno escolhido.
Método II: Escolher ao acaso uma das 16 turmas (por exemplo, colocando um papel com o número de cada turma em uma urna e sorteando uma delas) e, a seguir, sortear um dos alunos dessa turma.

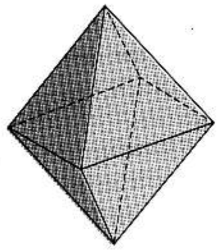
Sobre os métodos de sorteio I e II é correto afirmar:

a) Em ambos os métodos, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados.
b) No método I, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas no método II a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
c) No método II, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas no método I a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
d) No método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.
e) Em ambos os métodos, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior do que a de um aluno do noturno.

22. (UCDB-MS) Em uma certa rifa com 10 nomes distintos, 2 são premiados. Comprando-se 5 nomes dessa rifa, a probabilidade de apenas 1 ser premiado é:

a) $\frac{35}{63}$
b) $\frac{43}{140}$
c) $\frac{35}{126}$
d) $\frac{43}{252}$
e) $\frac{1}{70}$

23. (UF-RS) Na figura abaixo está representado um octaedro regular.



Escolhendo-se ao acaso dois vértices de um octaedro regular, a probabilidade de que esses vértices sejam extremos de uma das diagonais do octaedro é:

a) 0,2
b) 0,3
c) 0,4
d) 0,5
e) 0,6

24. (Enem-MEC) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: — Tive uma idéia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.
Tadeu, camisa 2: — Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...
Ricardo, camisa 12: — Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...
Desse diálogo conclui-se que:

a) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.
b) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
c) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.
d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
e) não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

25. (UF-PA) As últimas eleições têm surpreendido os institutos de pesquisa, principalmente quando dois candidatos se encontram empatados tecnicamente. Tentando entender essa questão, um estudante investigou a opção de votos de seus colegas de classe e verificou que, dos 30 investigados, 15 votaram no candidato *A* e 15 votaram no candidato *B*. Fez-se, então, a seguinte consideração: se um instituto de pesquisa fizesse uma sondagem, consultando apenas quatro alunos escolhidos aleatoriamente, a probabilidade de o instituto acertar o resultado da eleição na sala, por meio dessa amostra, seria de, aproximadamente:

a) 27%
b) 40%
c) 50%
d) 78%
e) 92%

26. (Ibmec-RJ) Em um parque de diversões, uma barraca distribui prendas para os vencedores de uma loteria. Em cada sorteio, concorrem bilhetes numerados de 1 a 10. Rafael compra dois bilhetes para um sorteio e um terceiro para o sorteio seguinte. A probabilidade de que Rafael ganhe pelo menos uma prenda é:

a) 20%
b) 24%
c) 26%
d) 28%
e) 30%

desafios

1. (Unicamp-SP) Seja *S* o conjunto dos números naturais cuja representação decimal é formada apenas pelos algarismos 0, 1, 2, 3 e 4.

a) Seja x = $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}$ um número de dez algarismos pertencente a *S* cujos dois últimos algarismos têm igual probabilidade de assumir qualquer valor inteiro de 0 a 4. Qual a probabilidade de que *x* seja divisível por 15?

b) Quantos números menores que um bilhão e múltiplos de 4 pertencem ao conjunto *S*?

2. João e Maria vão disputar um jogo de dados em que o vencedor é aquele que primeiro conseguir obter a face 6 no lançamento de um dado não viciado. Sabe-se que eles jogarão os dados alternadamente, começando por Maria. Qual é a probabilidade de João vencer o jogo? Qual seria a resposta se João iniciasse os lançamentos?

3. a) Em um grupo de cinco pessoas, qual é a probabilidade de que pelo menos duas façam aniversário no mesmo mês?

b) Em um grupo de vinte pessoas, qual é a probabilidade de que pelo menos duas façam aniversário no mesmo dia?