EXTENSIVO 2021.2

MATEMÁTICA PARA EEAR

GEOMETRIA PLANA II

Prof. Victor So

AULA 03

10 DE OUTUBRO DE 2020

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá,

Na aula passada, estudamos alguns tópicos de geometria plana. Vimos o que é a geometria Euclidiana e também conceitos de retas, ângulos e triângulos. Nessa aula, estudaremos o teorema de Tales e usaremos esse teorema para provar semelhança de triângulos. Também veremos como calcular as cevianas de um triângulo qualquer e quais os pontos notáveis de um triângulo.

Tente se acostumar a “enxergar” quando dois triângulos são semelhantes. Isso será útil para resolver as questões de geometria plana da prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

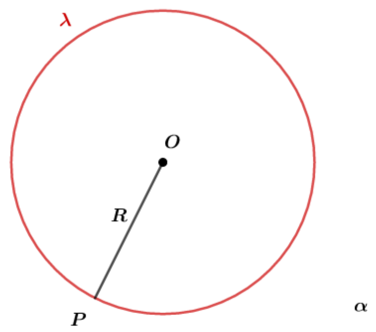
1. LUGAR GEOMÉTRICO

Lugar geométrico é o conjunto de pontos de um plano com uma determinada propriedade. Vamos estudar os principais:

1.1. CIRCUNFERÊNCIA

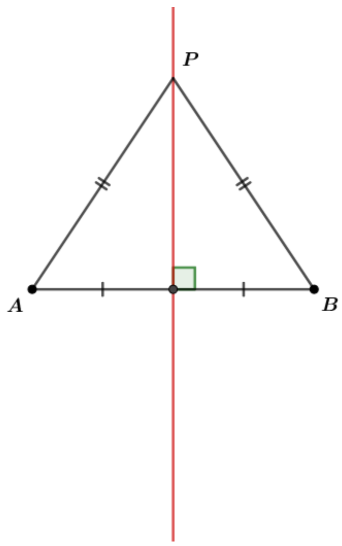
Circunferência é o lugar geométrico dos pontos P de um plano que distam R de um ponto fixo O. Sejam λ, α, O e R, a circunferência, o plano, o centro e o raio, respectivamente. Em símbolos, o LG da circunferência pode ser escrito como:

$$\lambda = \{p \in \alpha | OP = R\}$$



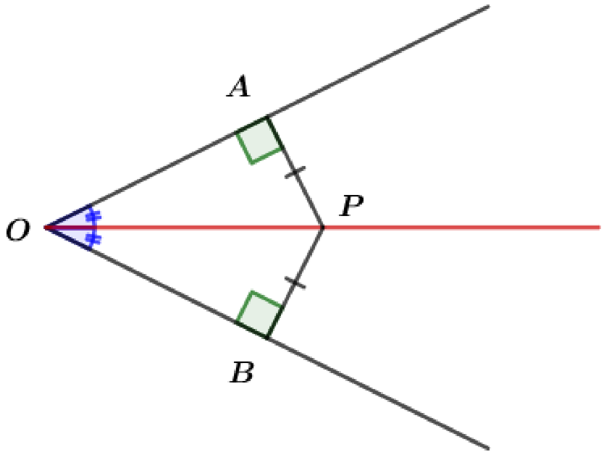
1.2. MEDIATRIZ

Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam das extremidades de um segmento.



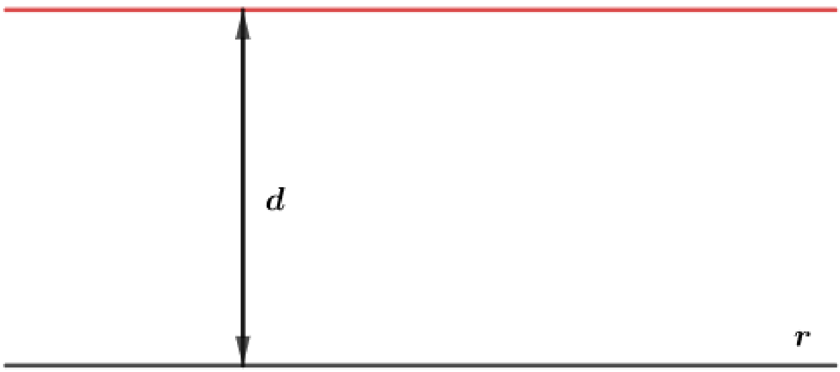
1.3. BISSETRIZ

É o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de duas retas concorrentes. Consequentemente, esse LG divide o menor ângulo entre as retas concorrentes em duas partes iguais.



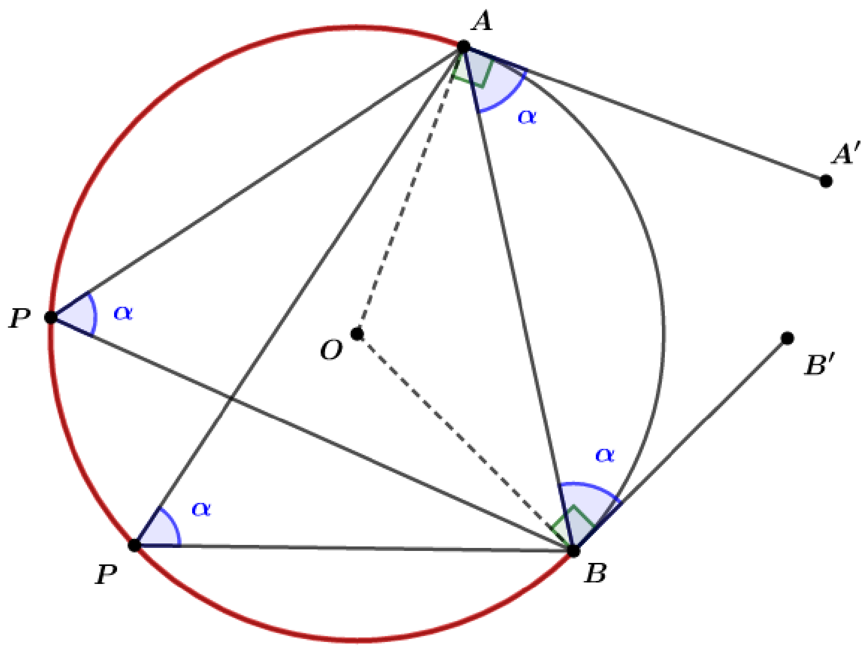
1.4. PAR DE RETAS PARALELAS

É o lugar geométrico dos pontos que equidistam d de uma reta.



1.5. ARCO CAPAZ

É o lugar geométrico dos pontos que “enxergam” o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α dado.



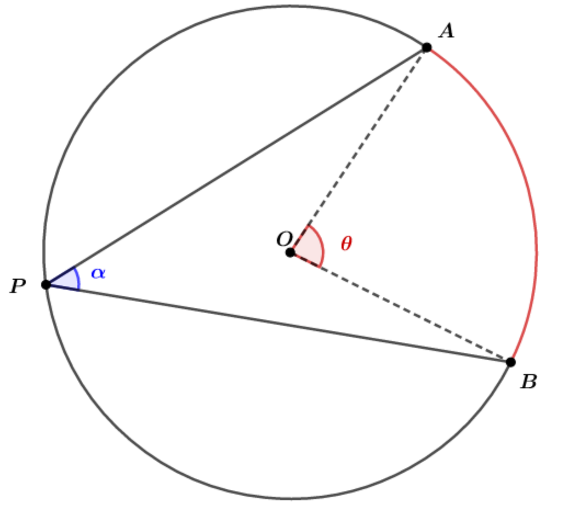
Todos os pontos P pertencentes à região vermelha da circunferência são pontos do arco capaz. Perceba que quando $P \equiv A$ ou $P \equiv B$, temos que os segmentos de reta AA' e BB' tangenciam a circunferência nos pontos A e B, respectivamente. Nesses pontos, eles também enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α.

Outro ponto a se notar é que toda reta tangente a uma circunferência forma um ângulo reto com o segmento de reta que liga o ponto de tangência ao centro da circunferência.

INDO MAIS
FUNDO!

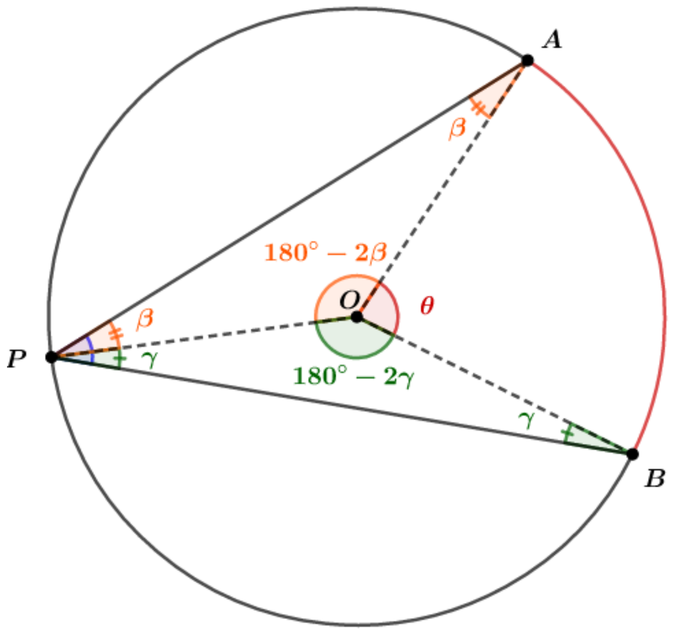
Podemos encontrar uma relação entre α e o menor arco de $\widehat{AB}$.

Sabemos que o ângulo do centro da circunferência é igual ao ângulo formado pelo arco $\widehat{AB}$.



$$\theta = \widehat{AB}$$

Podemos traçar o segmento de reta que liga o ponto P ao centro O. Como $\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{OB}$, formamos dois triângulos isósceles OPA e OPB:



Perceba que $A\hat{P}B = \alpha = \beta + \gamma$. Analisando o centro da circunferência, vemos que:

$$\theta + 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360°$$

$$\theta = 2(\beta + \gamma)$$

$$\theta = 2\alpha$$

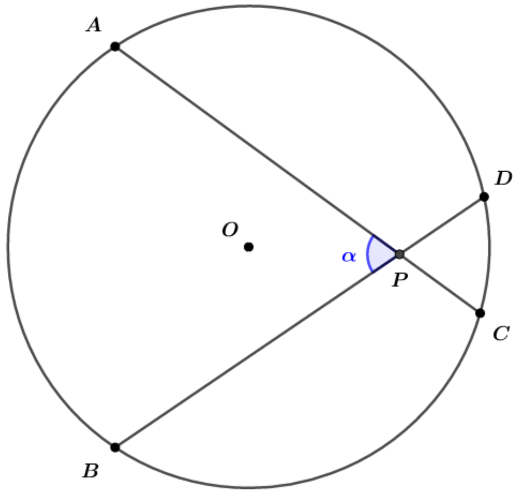
$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\widehat{AB}}}{\mathbf{2}}$$

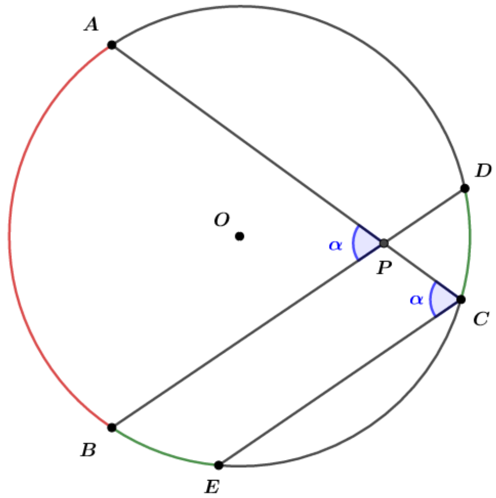
Além desse caso, temos outros dois:

P pode estar localizado no interior da circunferência ou P pode estar no exterior da circunferência.

Para o caso de P interno à circunferência:



Nesse caso, podemos traçar um segmento de reta paralelo ao segmento $\overline{BD}$ e que passe por C:

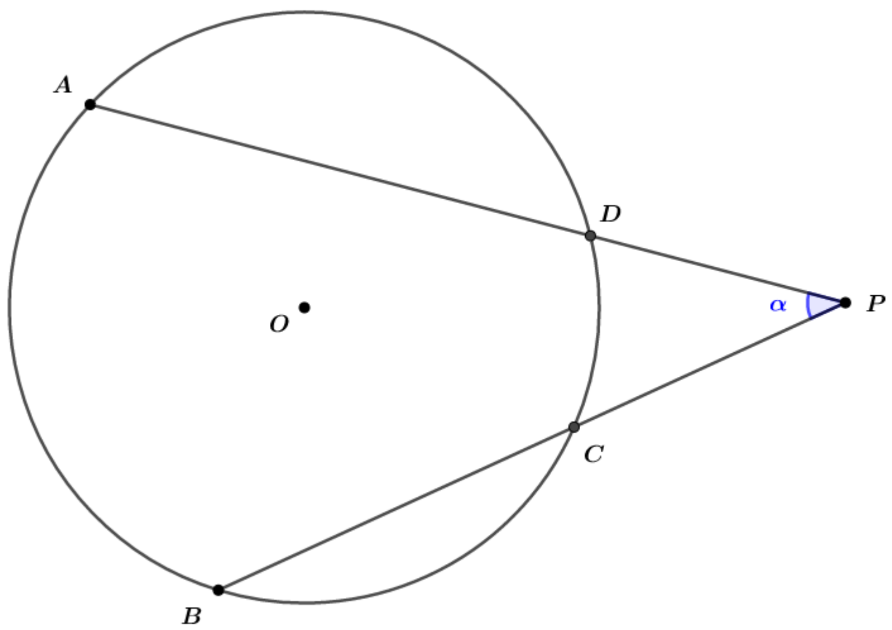


Como $EC//BD$, temos $E\hat{C}A \equiv B\hat{P}A$ e a medida dos arcos $\widehat{BE}$ e $\widehat{CD}$ são iguais. Assim, podemos ver que:

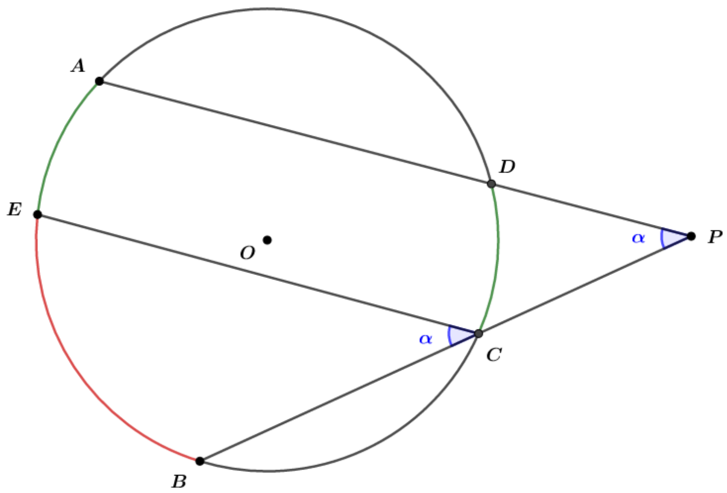
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\widehat{AB}} + \boldsymbol{\widehat{CD}}}{\mathbf{2}}$$

Para o caso de P externo à circunferência:



Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo ao segmento $\overline{AD}$:



Como $CE//AD$, temos $E\hat{C}B \equiv A\hat{P}B$ e $\widehat{AE} \equiv \widehat{CD}$. Desse modo:

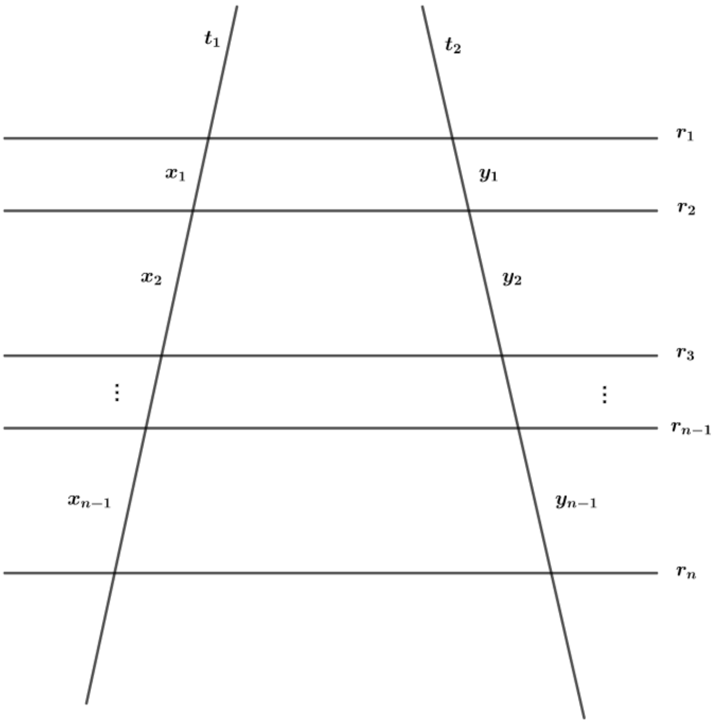
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}}$$

2. TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales afirma que dado um feixe de retas paralelas, os segmentos de retas transversais a estas retas são proporcionais entre si.

Sejam as retas $r_1//r_2//r_3//...//r_n$ e $k \in \mathbb{R}_+^*$, então:



$$\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = k}$$

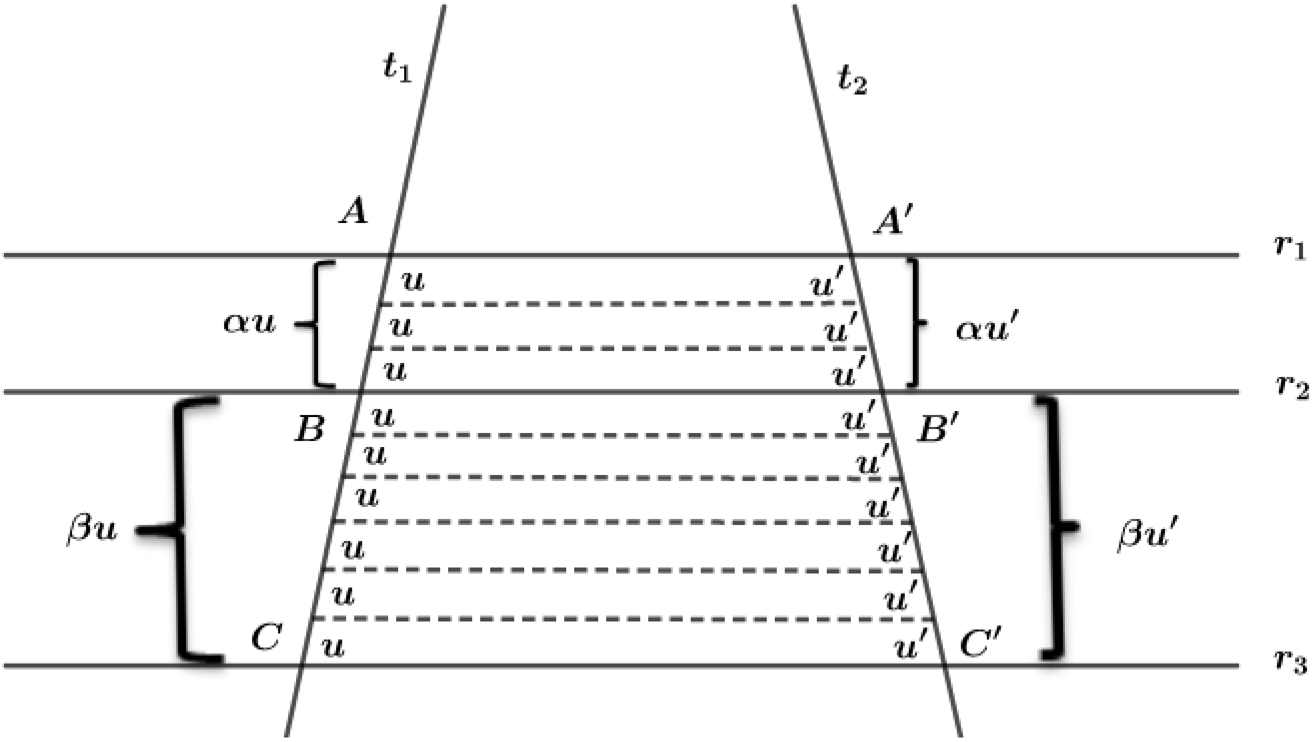
t_1 e t_2 são as retas transversais ao feixe de retas paralelas.

Demonstração:

Devemos dividir em dois casos:

Caso 1) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, podemos escrever a medida desses segmentos como múltiplos de um segmento de unidade u. Então, para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ e $u \in \mathbb{R}_+^*$:



$$\begin{cases} \overline{AB} = \alpha \cdot u \\ \overline{BC} = \beta \cdot u \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\begin{cases} \overline{A'B'} = \alpha \cdot u' \\ \overline{B'C'} = \beta \cdot u' \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

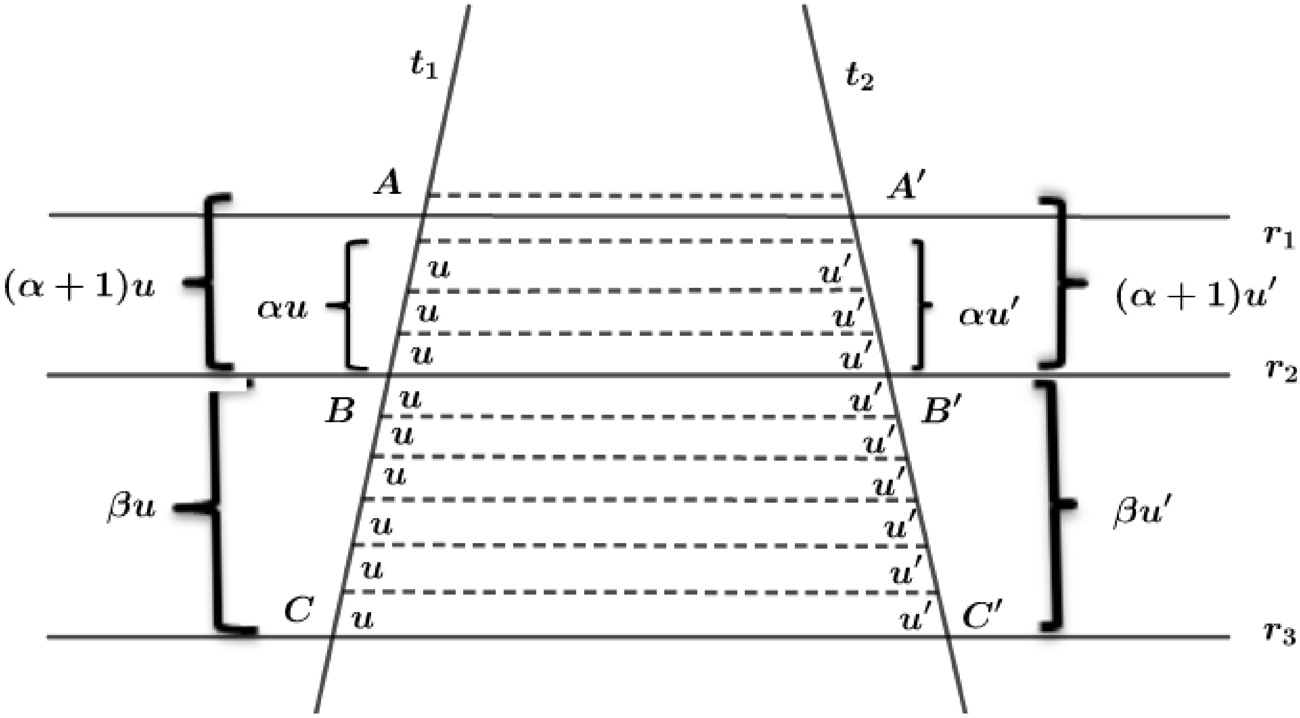
Caso 2) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, não podemos escrever ambos como múltiplos de um segmento de unidade. Então, tomando um segmento de medida u que caiba β vezes em $\overline{BC}$, temos:

$$\overline{BC} = \beta \cdot u$$

Como $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, temos que existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$\alpha \cdot u < \overline{AB} < (\alpha + 1) \cdot u$$



Dividindo a desigualdade de AB por BC, temos:

$$\frac{\alpha \cdot u}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{(\alpha+1)\cdot u}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\alpha \cdot u}{\beta \cdot u} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{(\alpha+1)\cdot u}{\beta \cdot u}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\alpha+1}{\beta} \quad (I)$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \in \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Analogamente para $A'B'$ e $B'C'$:

$$B'C' = \beta \cdot u'$$

$$\alpha \cdot u' < A'B' < (\alpha+1)\cdot u'$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} < \frac{\alpha+1}{\beta} \quad (II)$$

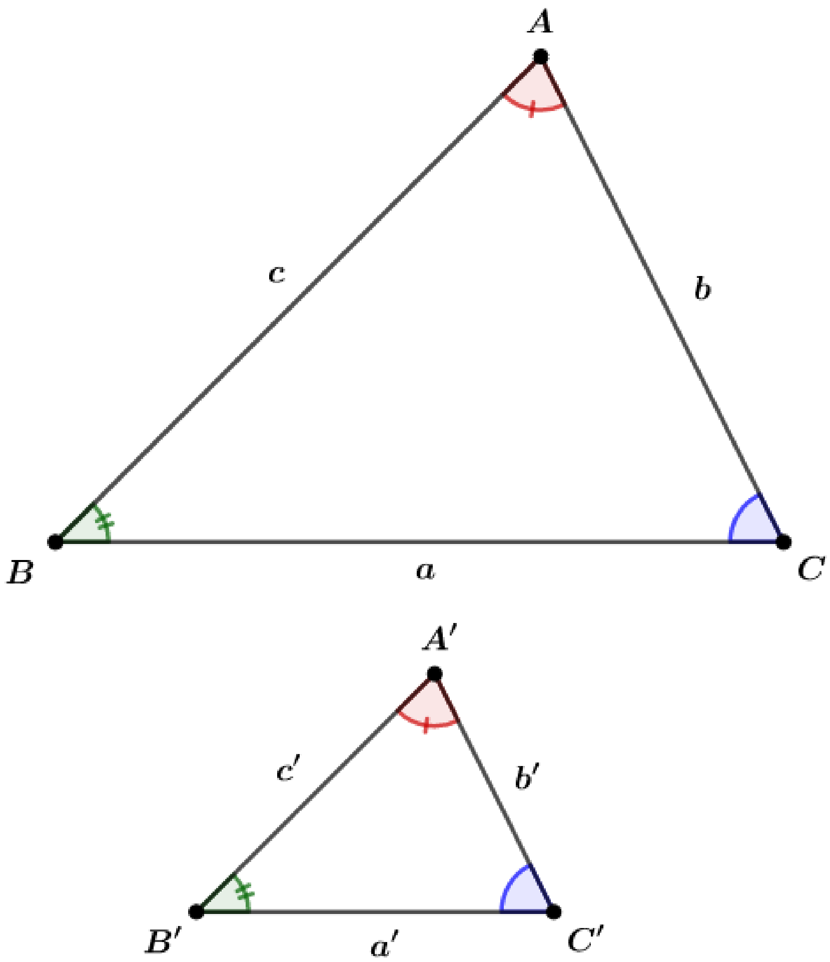
$$\therefore \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \in \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Podemos escolher as unidades de medidas u e u' muito próximas de zero e, assim, o múltiplo β tenderia ao infinito. Consequentemente:

$$u, u' \to 0 \Rightarrow \beta \to \infty \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \therefore \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

3. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos internos são congruentes e os lados opostos a esses ângulos congruentes são proporcionais entre si. Usamos o símbolo $\sim$ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

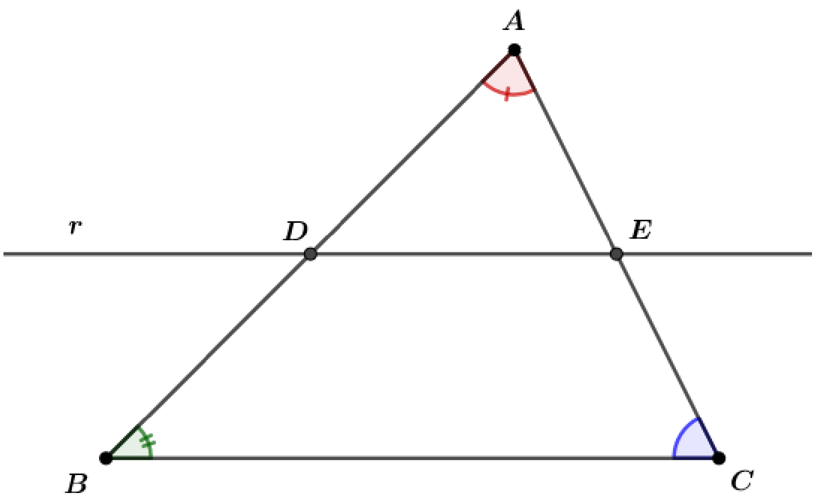


$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}}$$

Definimos k como a razão de semelhança dos triângulos semelhantes.

3.1. TEOREMA FUNDAMENTAL

Dado o seguinte triângulo ABC e a reta r que passa por ele nos pontos D e E, temos:



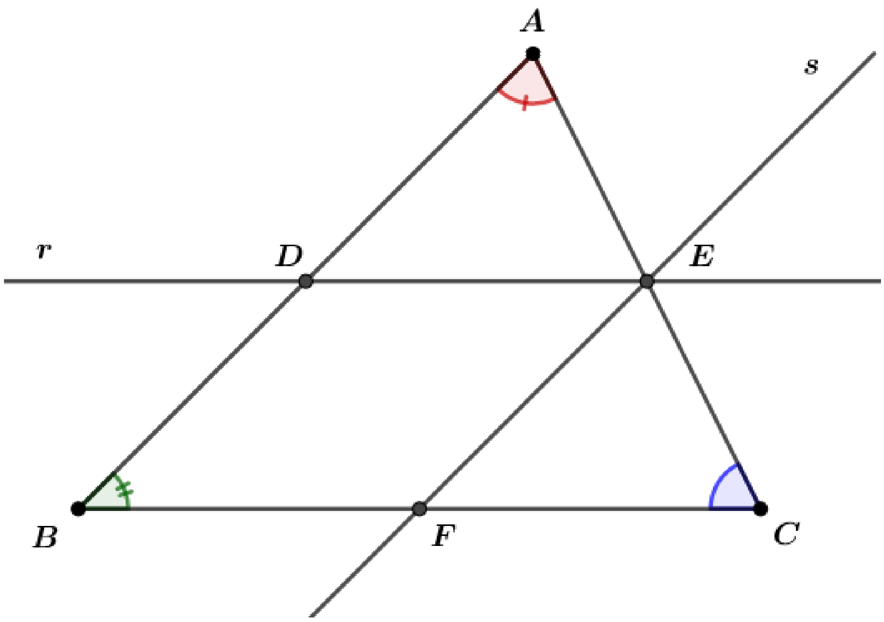
$$\boxed{r//BC \Leftrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC}$$

Se a reta r for paralela a um dos lados de um triângulo ABC, o ΔADE que ele determina é semelhante ao ΔABC.

Demonstração:

Como r é paralelo ao lado BC, temos $\hat{B} \equiv \hat{D}, \hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ é um ângulo comum aos ΔABC e ΔADE.

Vamos construir a reta paralela s ao lado AB:



Aplicando o Teorema de Tales nas retas paralelas r e AB:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Aplicando o Teorema de Tales nas retas paralelas s e AB:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

Como $BDEF$ é um paralelogramo, temos $BF = DE$, desse modo:

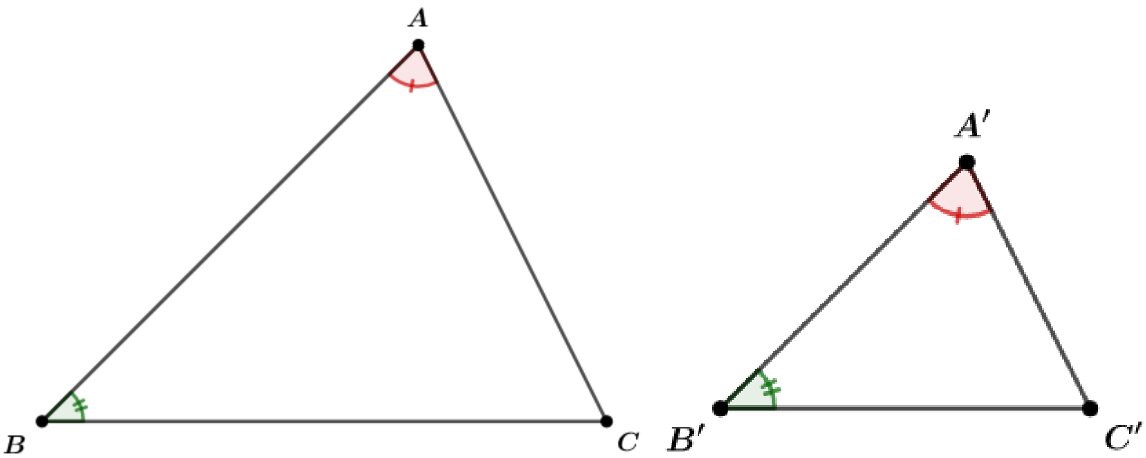
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Portanto, os lados correspondentes dos triângulos são proporcionais e os ângulos internos são ordenadamente congruentes. Logo, são semelhantes.

3.2. CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

3.2.1. AA (DOIS ÂNGULOS CONGRUENTES)

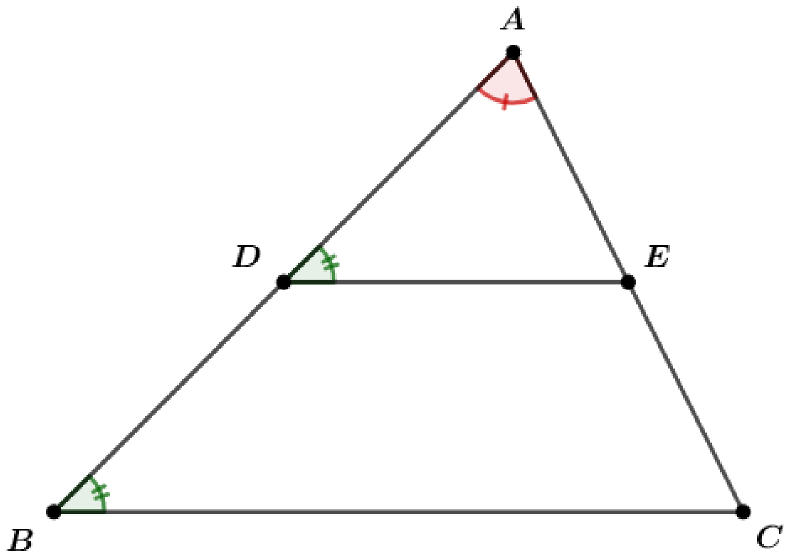
Se dois triângulos tiverem dois ângulos congruentes, eles serão semelhantes.

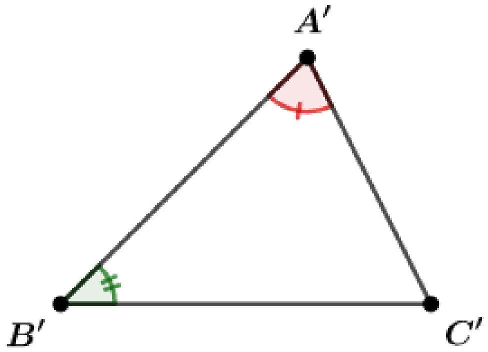


$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ B \equiv B' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo que $AB > A'B'$, podemos construir um triângulo ADE no triângulo ABC tal que $\widehat{D} \equiv \widehat{B}'$ e $AD \equiv A'B'$:





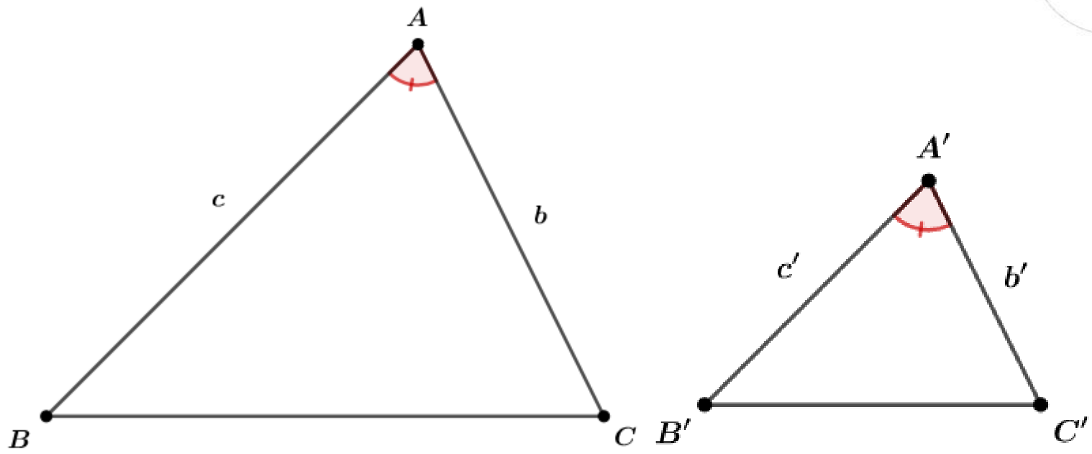
Pelo critério de congruência ALA, podemos afirmar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$.

Como $B \equiv B' \equiv D$, temos que $\overline{DE} // \overline{BC}$, portanto, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Como $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$, temos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Logo, são semelhantes.

3.2.2. LAL (LADO-ÂNGULO-LADO)

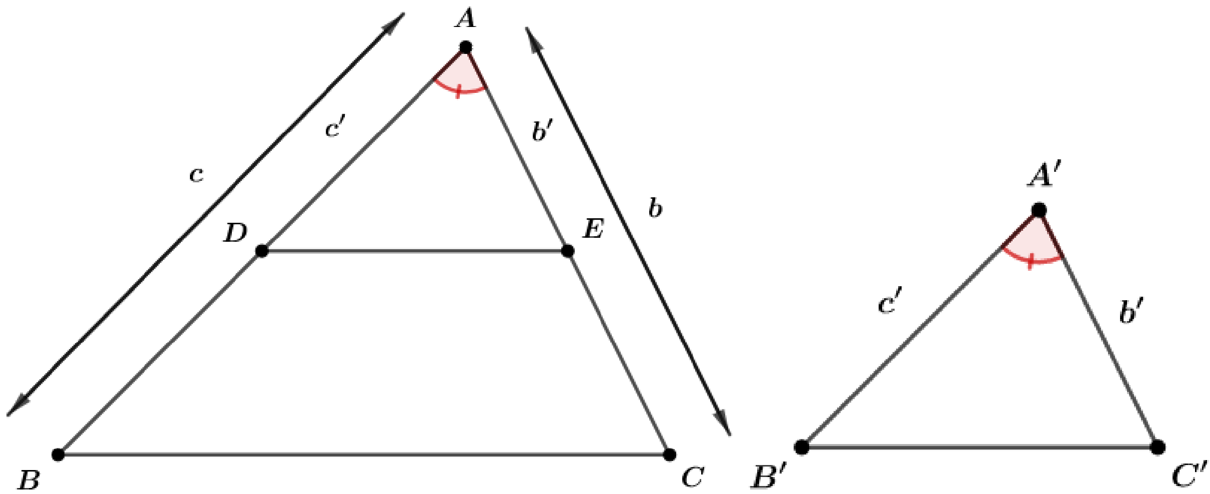
Se dois triângulos tiverem dois lados proporcionais e o ângulo compreendido entre eles for congruente, então esses triângulos são semelhantes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo $AB > A'B'$, vamos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$ no triângulo ABC tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$:



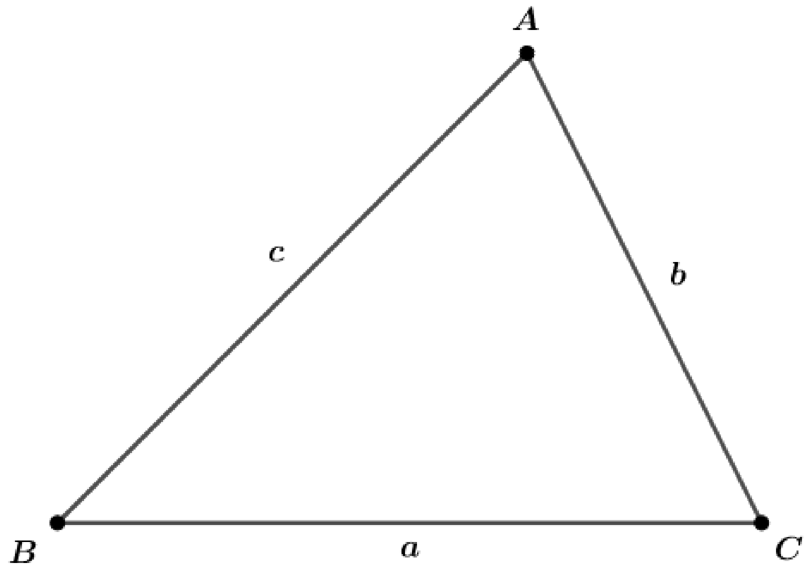
Pelo Teorema de Tales, como $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$, temos que $\overline{DE} // \overline{BC}$. Então, $\widehat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C}$.

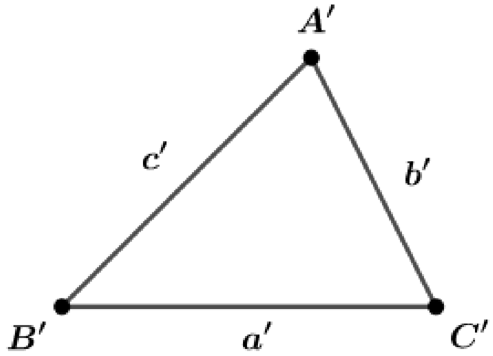
Usando o critério de congruência LAL, temos $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$. Logo, $\widehat{D} \equiv \widehat{B'}$ e $\hat{E} \equiv \widehat{C'}$.

Portanto, pelo critério de semelhança AA, podemos ver que $\hat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$ implica $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

3.2.3. LLL (LADO-LADO-LADO)

Se dois triângulos tiverem os lados correspondentes proporcionais entre si, então eles são semelhantes.

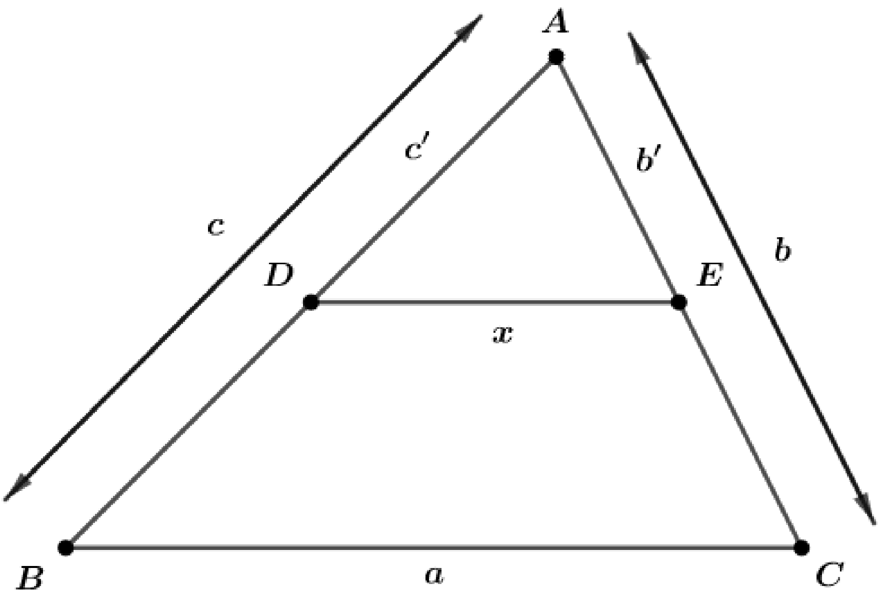




$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo que $AB > A'B'$, podemos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$, tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$:



Usando o Teorema de Tales:

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow DE//BC$$

Então:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Da hipótese, temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Portanto:

$$a' = x$$

$$\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$$

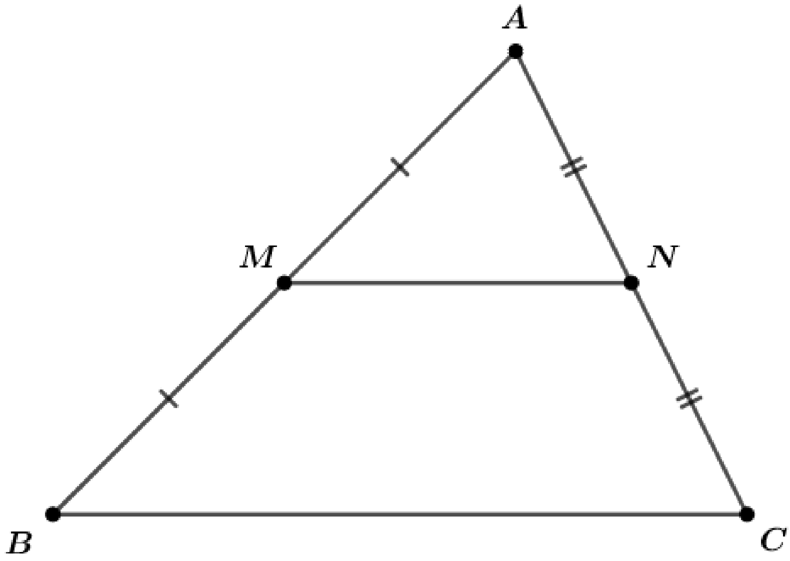
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3.3. PROPRIEDADES

As seguintes propriedades decorrem da semelhança de triângulos.

3.3.1. BASE MÉDIA

Seja ABC, um triângulo qualquer. Se M é o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio do lado AC, temos:



Pelo Teorema de Tales, sendo $AM = MB$ e $AN = NC$:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN//BC$$

Desse modo:

$$M \equiv B \text{ e } N \equiv C$$

Pelo critério de semelhança AA, temos:

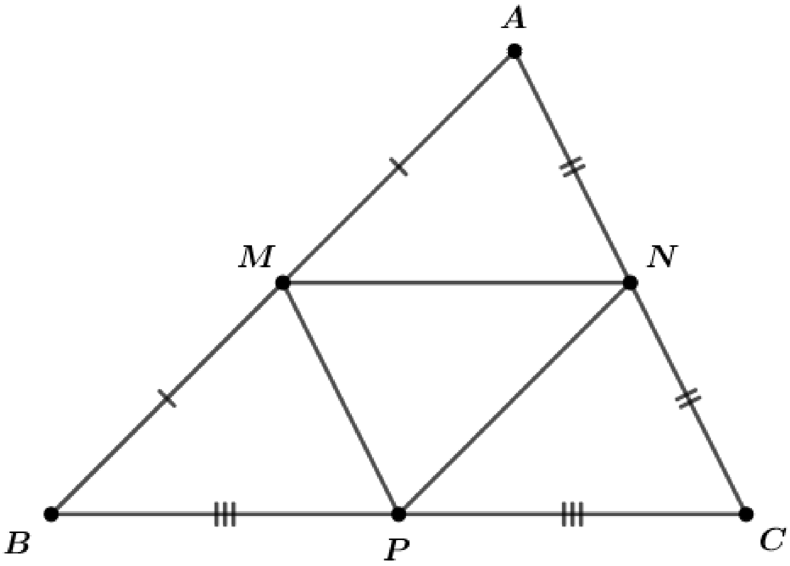
$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

A razão de proporção entre eles é $1/2$:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

Se BC é a base do triângulo ABC, então MN é chamado de base média do triângulo ABC.

Tomando-se P, o ponto médio do lado BC e formando o triângulo MNP, encontramos:



Vimos que MN é paralelo ao lado BC, analogamente, para os outros lados, podemos provar que $NP//AB$ e $MP//AC$. Então, o triângulo MNP é semelhante ao triângulo ABC e possui razão igual a $1/2$.

3.3.2. RAZÃO DE PROPORÇÃO

Se a razão de proporção de dois triângulos é k, então a razão entre seus elementos lineares correspondentes é k. Assim, a razão entre:

-suas alturas é k;

-suas medianas é k;

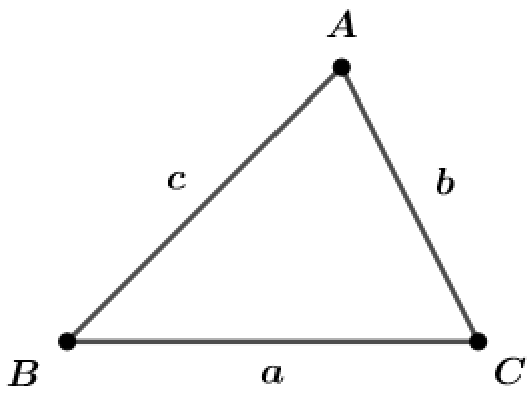
-seus perímetros é k;

-os raios das circunferências inscritas é k;

-os raios das circunferências circunscritas é k;

-dois elementos lineares e homólogos é k.

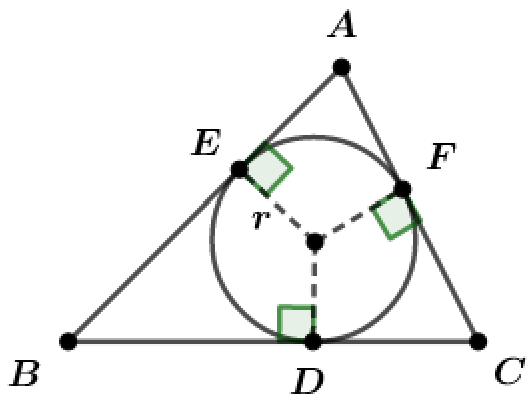
Chamamos de perímetro a soma de todos os lados de um triângulo, então para um triângulo ABC:



$$2p = a + b + c$$

p é o semiperímetro do triângulo ABC e $2p$ é o seu perímetro.

Uma circunferência inscrita em um triângulo é uma circunferência que tangencia internamente os lados do triângulo:

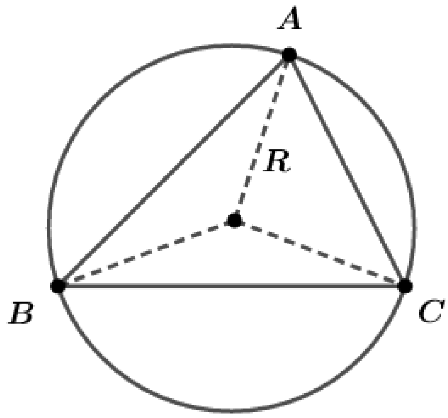


D, E, F são os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo ABC.

r é o raio da circunferência inscrita.

Perceba que os segmentos de reta que ligam o centro da circunferência aos pontos de tangência sempre formam um ângulo reto.

Uma circunferência circunscrita a um triângulo é uma circunferência que passa por todos os vértices do triângulo:



R é o raio da circunferência circunscrita.

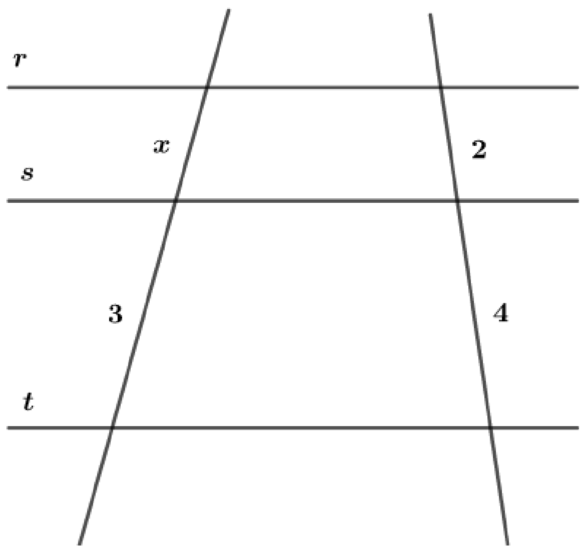
Dizemos que dois elementos são homólogos quando ambos são correspondentes um ao outro. Por exemplo, tomando-se dois triângulos semelhantes, podemos afirmar que os lados opostos aos ângulos congruentes são homólogos.

HORA DE PRATICAR!

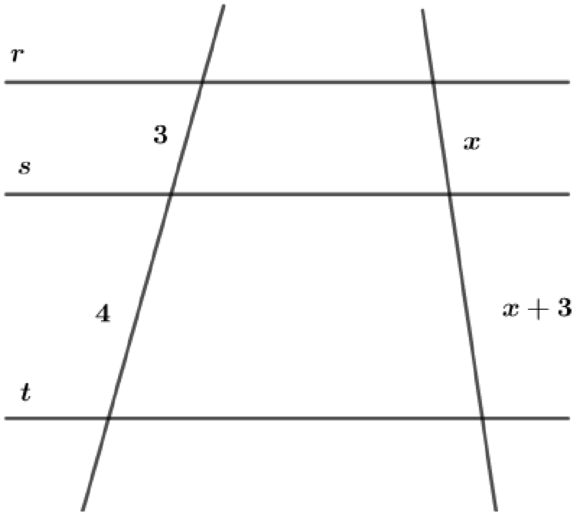
Exercícios de Fixação

1. Sendo r, s, t retas paralelas. Calcule o valor de x:

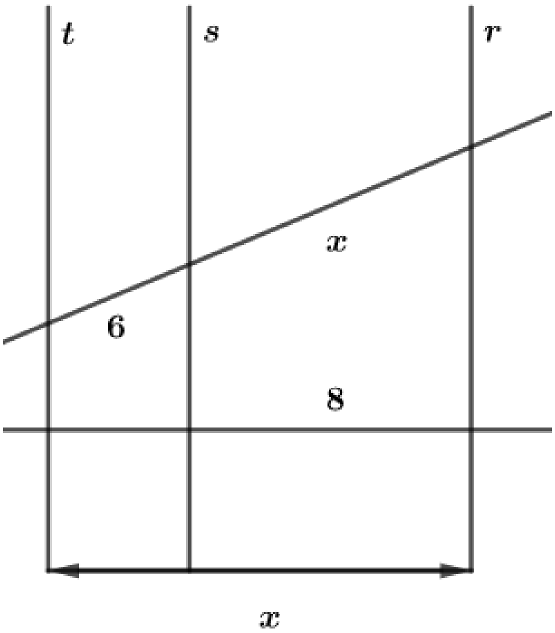
a)



b)

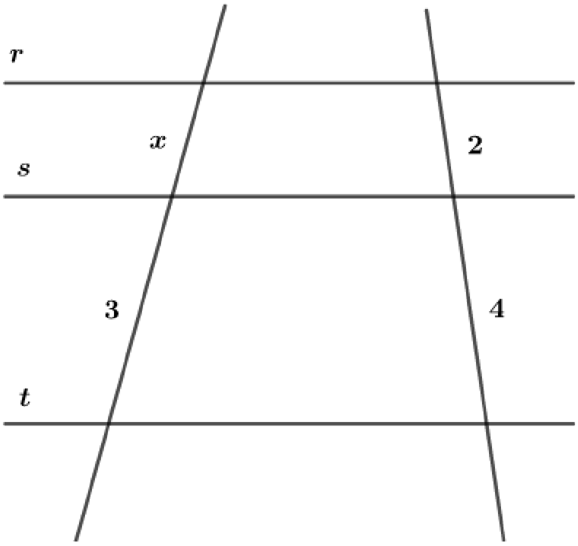


c)



Resolução:

a)

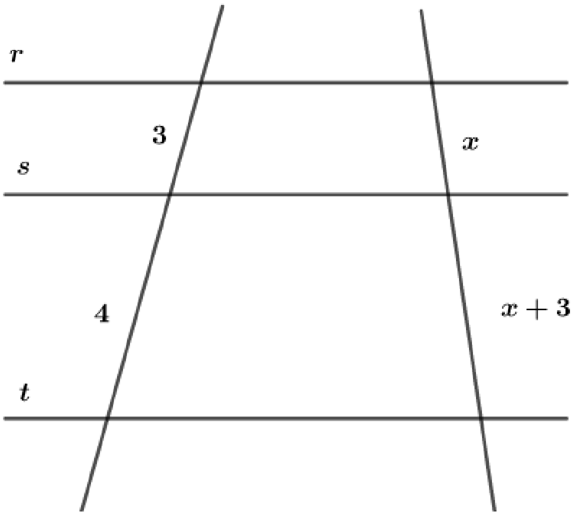


Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

b)

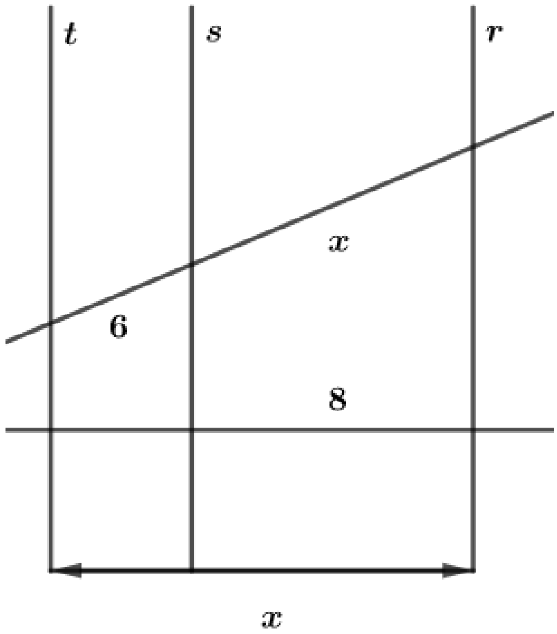


$$\frac{3}{4} = \frac{x}{x+3}$$

$$3x + 9 = 4x$$

$$x = 9$$

c)



$$\frac{x}{x+6} = \frac{8}{x}$$

$$x^2 = 8x + 48$$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$x = \left(4 \pm \sqrt{64}\right)$$

$$x = 4 \pm 8$$

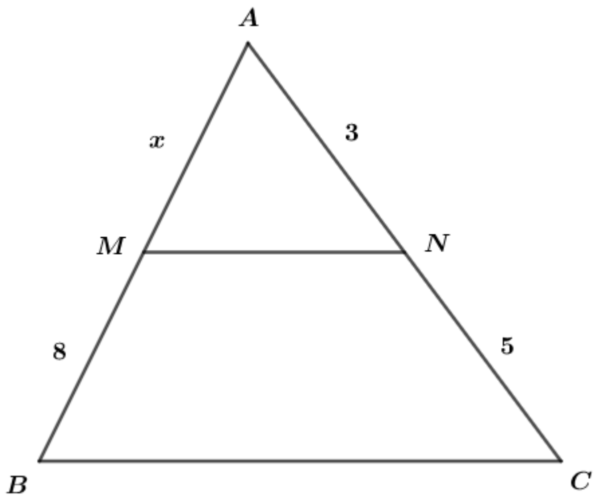
$$x = 12 \; ou - 4$$

$$\therefore x = 12$$

Gabarito: a) $x = 3/2$ b) $x = 9$ c) $x = 12$

---

2. Sendo $MN//BC$, calcule o valor de x na figura abaixo:



Resolução:

Aplicando o teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

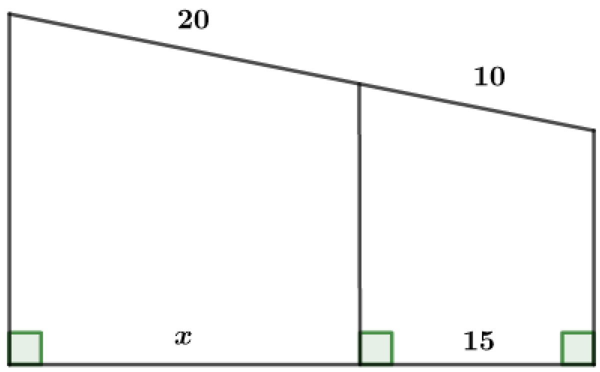
$$\frac{x}{8} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{24}{5}$$

Gabarito: $x = 24/5$

---

3. Calcule o valor de x:



Resolução:

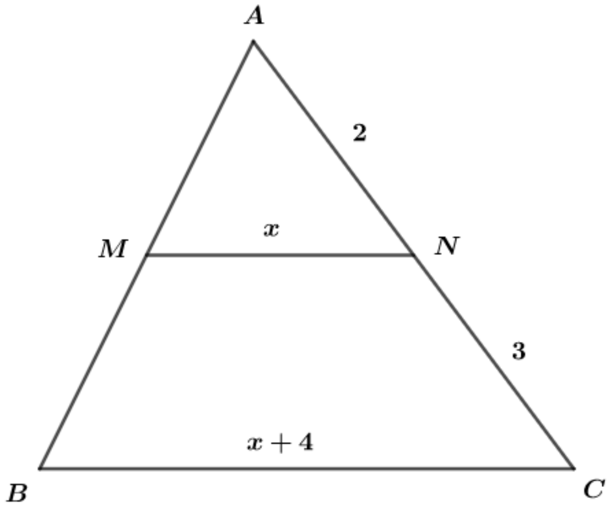
$$\frac{20}{10} = \frac{x}{15}$$

$$x = 30$$

Gabarito: $x = 30$

---

4. Sendo $MN//BC$, calcule o valor de x na figura abaixo:



Resolução:

Como $MN//BC$, temos que $\Delta AMN \sim \Delta ABC$:

$$\frac{AN}{MN} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{2+3}{x+4}$$

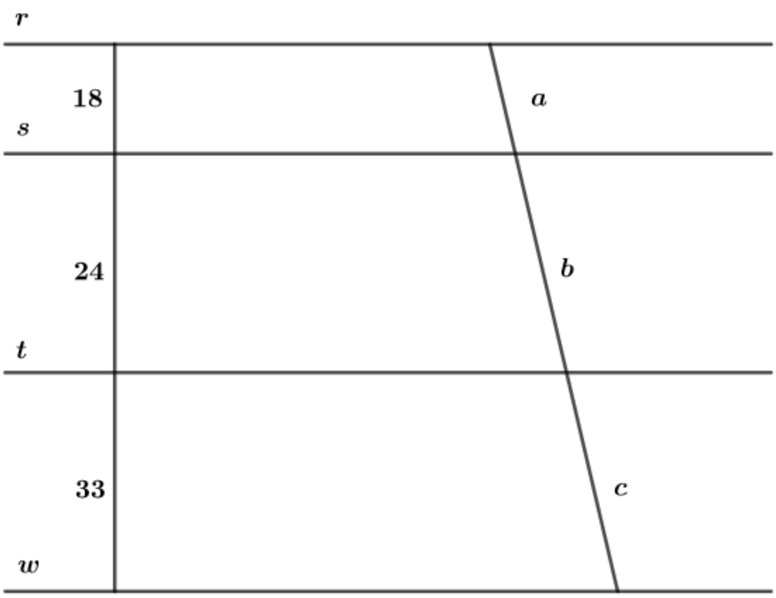
$$2x + 8 = 5x$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Gabarito: $x = 8/3$

---

5. (CGTMG/2015) Na figura a seguir, as retas r, s, t e w são paralelas e, a, b e c representam medidas dos segmentos tais que $a + b + c = 100$.



Conforme esses dados, os valores de a, b e c são, respectivamente, iguais a

a) 24, 32 e 44.

b) 24, 36 e 40.

c) 26, 30 e 44.

d) 26, 34 e 40.

Resolução:

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{18 + 24 + 33}{a + b + c}$$

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{75}{100}$$

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{3}{4}$$

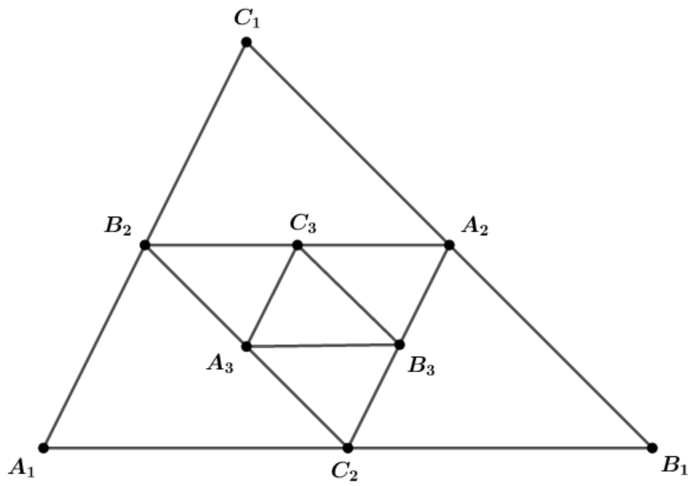
$$\Rightarrow a = 24$$

$$\Rightarrow b = 32$$

$$\Rightarrow c = 44$$

Gabarito: "a".

6. **(UERJ/2019) Os triângulos $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$, ilustrados abaixo, possuem perímetros p_1, p_2, p_3, respectivamente. Os vértices desses triângulos, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo anterior.**



Admita que $A_1B_1 = B_1C_1 = 7$ e $A_1C_1 = 4$.

Assim, (p_1, p_2, p_3) define a seguinte progressão:

a) aritmética de razão -8.

b) aritmética de razão -6.

c) geométrica de razão $1/2$.

d) geométrica de razão $1/4$.

Resolução:

Como os vértices dos triângulos internos são os pontos médios de outros triângulos, temos que cada triângulo terá razão igual a $1/2$ do triângulo externo. Desse modo, temos:

$$p_1 = 7 + 7 + 4 = 18$$

$$p_2 = \frac{p_1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$p_3 = \frac{p_2}{2} = \frac{9}{2}$$

Portanto, a sequência (p_1, p_2, p_3) é uma PG de razão $1/2$.

Gabarito: "c".

---

7. **(IFCE/2016) O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,**

a) 64 cm e 32 cm.

b) 60 cm e 48 cm.

c) 48 cm e 24 cm.

d) 96 cm e 48 cm.

e) 96 cm e 64 cm.

Resolução:

O enunciado nos diz que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, logo, os lados e os seus perímetros possuem a mesma razão de proporção. Vamos calcular o perímetro p_{ABC} do ΔABC:

$$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$$

Vamos calcular a razão de proporção entre os triângulos:

$$\frac{p_{ABC}}{p_{DEF}} = \frac{34}{204} = \frac{1}{6}$$

Logo, a razão de proporção entre os triângulos é $1/6$. Os lados do triângulo DEF são dados por:

$$8\ cm \Rightarrow 48\ cm$$

$$10\ cm \Rightarrow 60\ cm$$

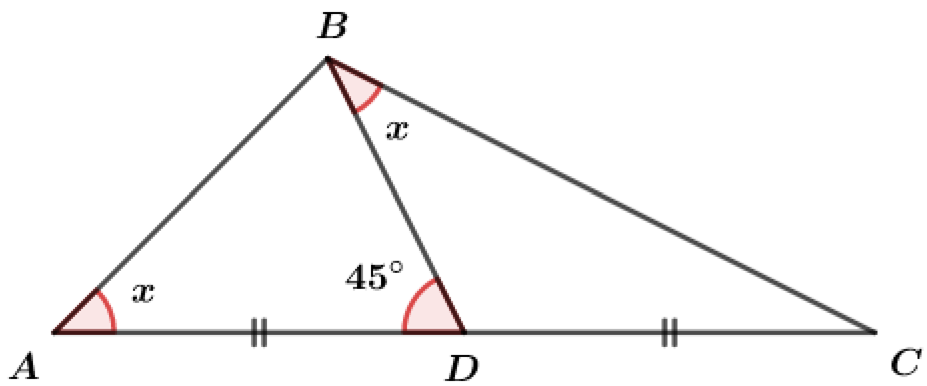
$$16\ cm \Rightarrow 96\ cm$$

Portanto, o maior lado é 96 cm e o menor é 48 cm.

Gabarito: "d".

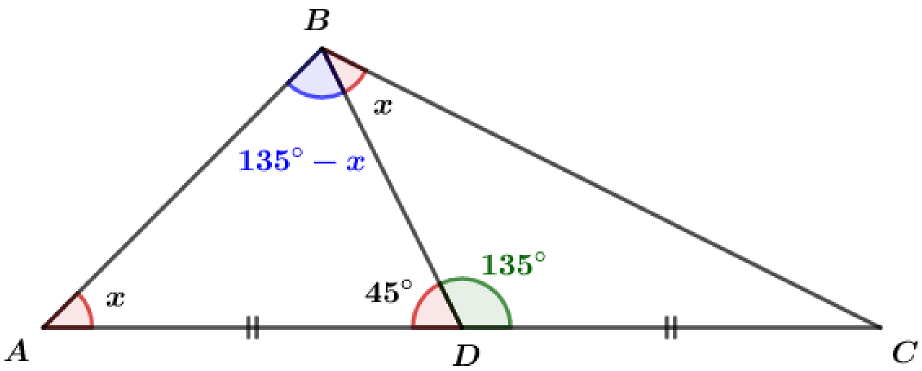
---

8. No triângulo ABC, BD é mediana relativa ao lado AC e os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são iguais. Se o ângulo $B\widehat{D}A = 45°$, calcule x.



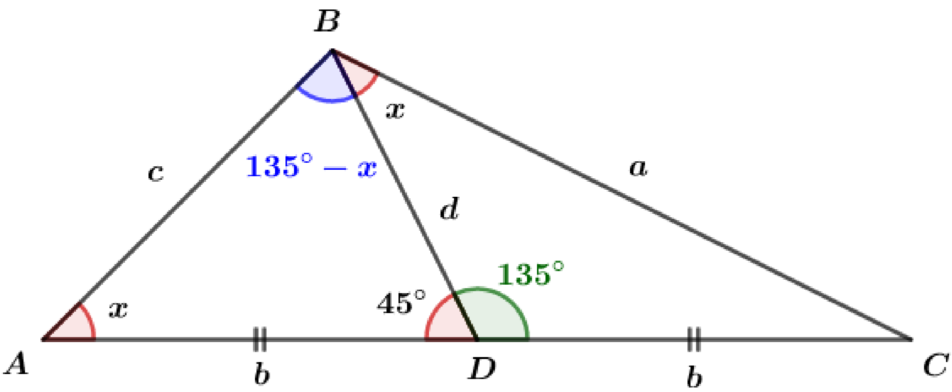
Resolução:

Perceba que os triângulos ABC e BDC são semelhantes, veja:



Pelo critério de semelhança AA:

$B\hat{A}C \equiv D\hat{B}C$ e $A\hat{B}C \equiv B\widehat{D}C \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDC$



Fazendo a razão de semelhança:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{2b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sqrt{2}b$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC:

$$\frac{a}{senx} = \frac{2b}{sen(135°)}$$

$$\frac{\sqrt{2}b}{senx} = \frac{2b}{sen(135°)}$$

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 30°$$

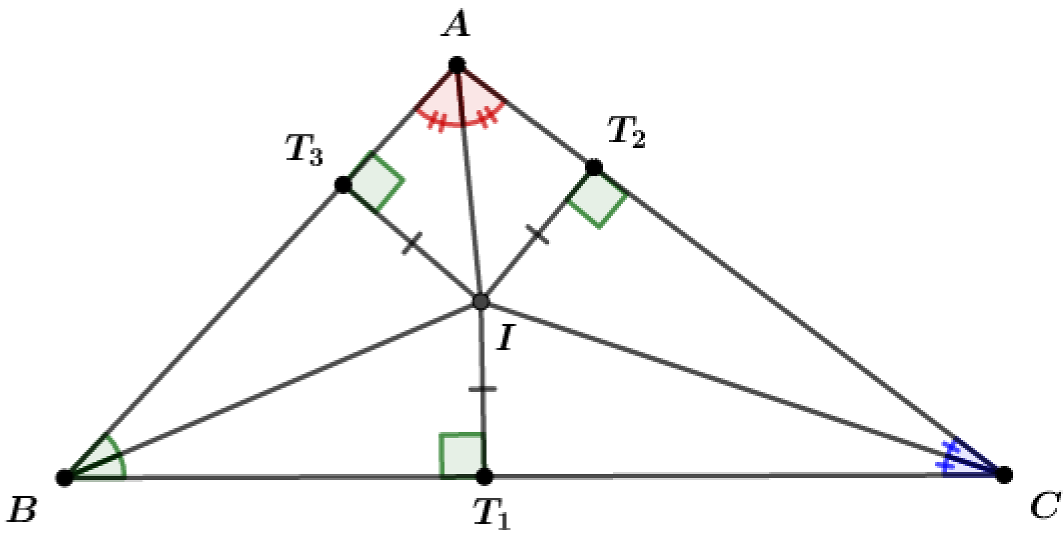
Gabarito: $x = 30°$

4. PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

4.1. INCENTRO E EX-INCENTRO

4.1.1. INCENTRO

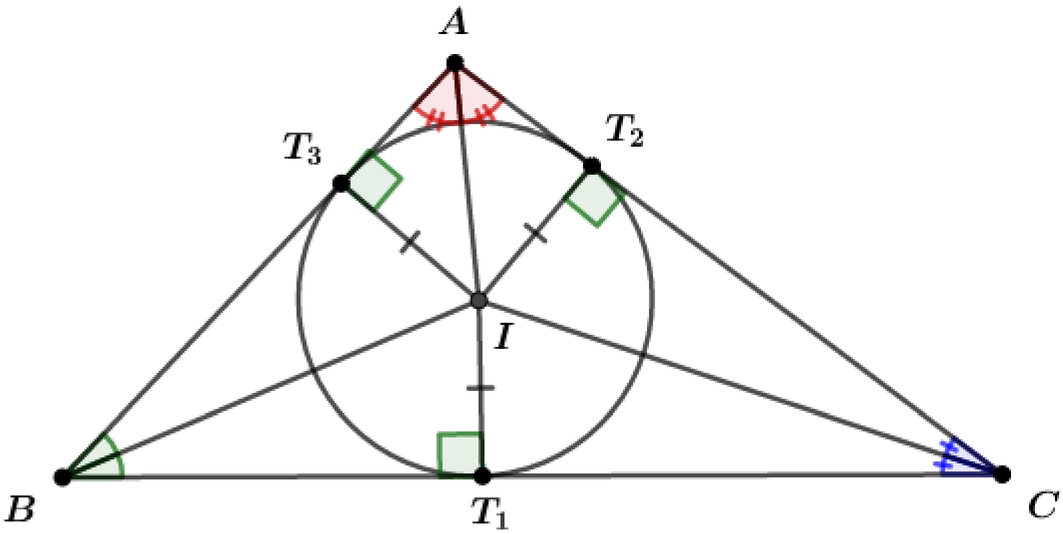
As bissetrizes internas de um triângulo encontram-se em um único ponto. A este ponto denominamos incentro do triângulo.



I é o incentro e este equidista dos lados do triângulo:

$$IT_1 = IT_2 = IT_3$$

Por esse ponto, podemos desenhar uma circunferência a qual chamamos de circunferência inscrita.



Uma outra propriedade que temos da circunferência inscrita no triângulo é que aplicando-se o critério de congruência LAA_o, temos que:

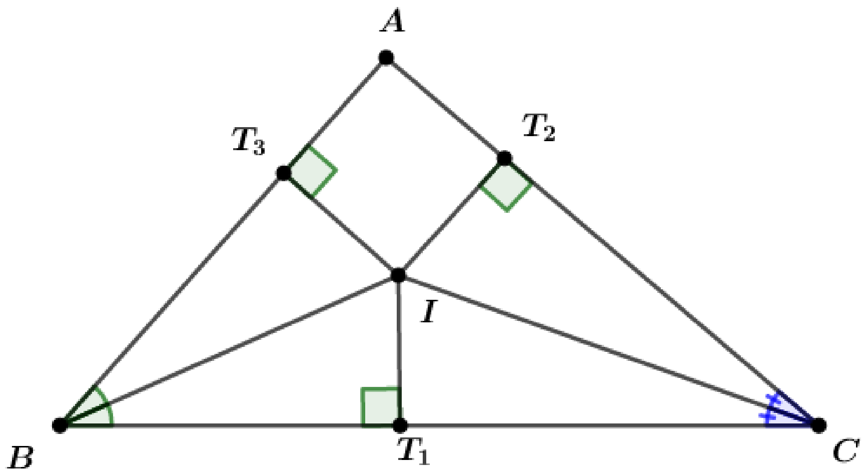
$$\Delta AIT_3 \equiv \Delta AIT_2 \Rightarrow AT_3 = AT_2$$

$$\Delta BIT_3 \equiv \Delta BIT_1 \Rightarrow BT_3 = BT_1$$

$$\Delta CIT_1 \equiv \Delta CIT_2 \Rightarrow CT_1 = CT_2$$

Demonstração:

Seja I o ponto onde $\overline{BI}$ e $\overline{CI}$ se interceptam no triângulo ABC.



Traçando-se o segmento que liga o ponto I aos lados do triângulo, temos pelo critério de congruência LAA_0 que $\Delta T_1BI \equiv \Delta T_3BI$ $(BI \equiv BI, IBT_1 \equiv IBT_3, IT_1B \equiv IT_3B)$ e $\Delta T_1CI \equiv T_2CI$ $(CI \equiv CI, ICT_1 \equiv ICT_2, IT_1C \equiv IT_2C)$. Assim:

$$\Delta T_1BI \equiv \Delta T_3BI \Rightarrow IT_1 = IT_3$$

$$\Delta T_1CI \equiv T_2CI \Rightarrow IT_1 = IT_2$$

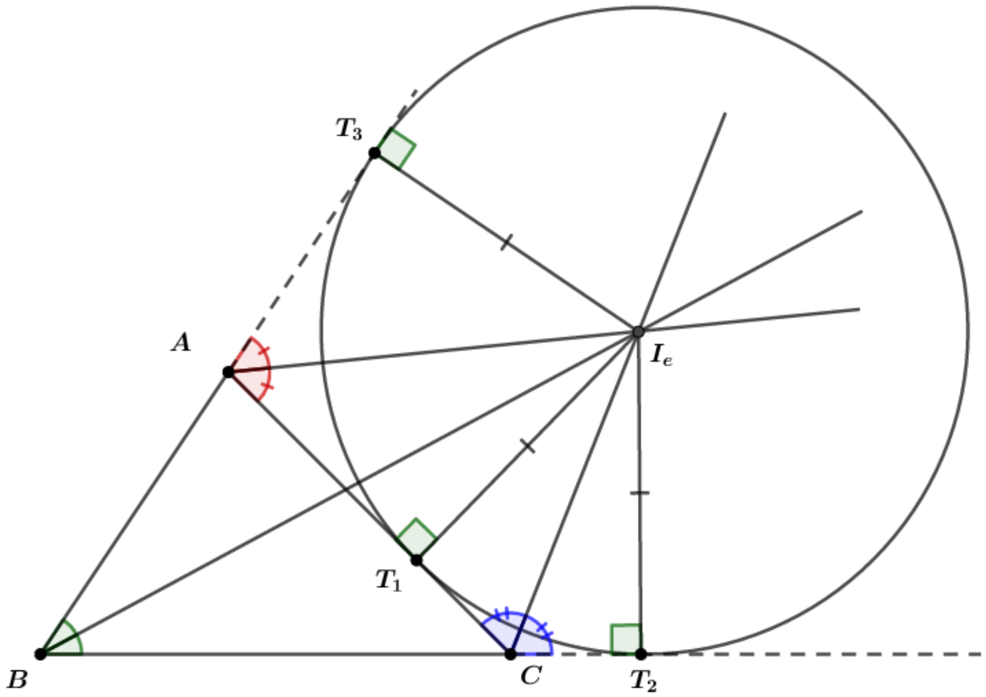
Logo:

$$IT_2 = IT_3$$

Desse modo, podemos afirmar que a bissetriz do vértice A também intercepta o ponto I do triângulo ABC.

4.1.2. EX-INCENTRO

Chamamos de ex-incentro ao ponto que é interceptado por uma bissetriz interna e duas bissetrizes externas. Esse ponto também equidista dos lados do triângulo e dos prolongamentos dos lados adjacentes:

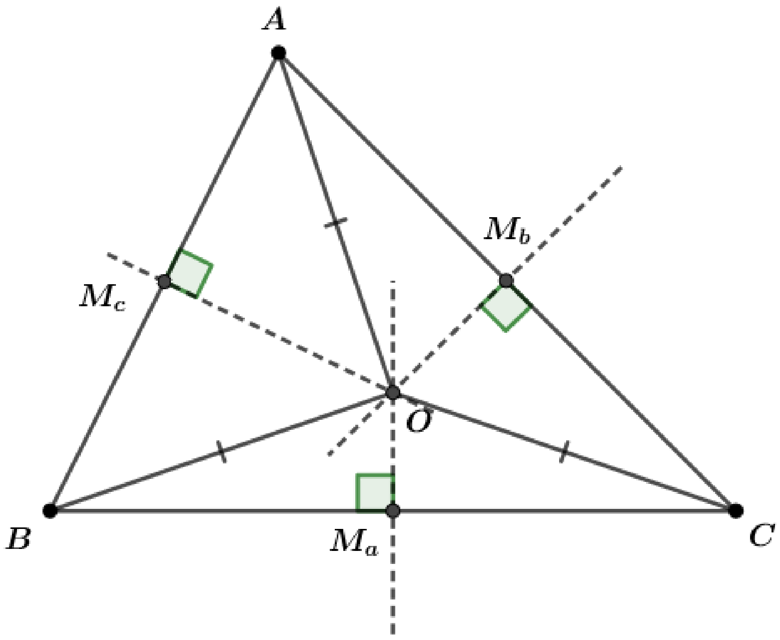


I_e é o ex-incentro do triângulo ABC em relação ao lado AC.

A demonstração da unicidade desse ponto é análoga ao caso do incentro.

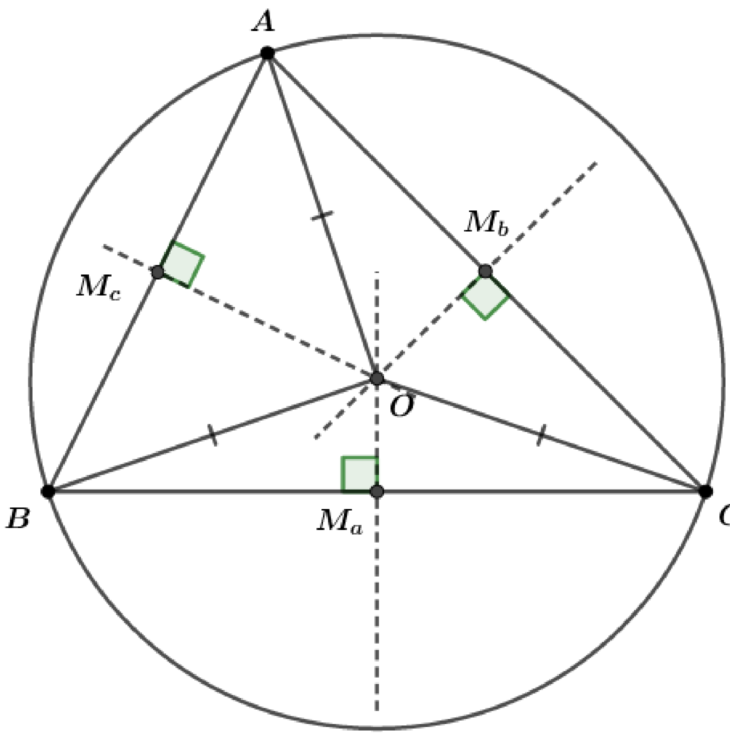
4.2. CIRCUNCENTRO

As mediatrizes de cada um dos lados de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de circuncentro. Este ponto equidista dos vértices do triângulo.



O é o circuncentro do triângulo ABC.

Como o circuncentro equidista dos vértices do triângulo, este ponto é o centro de uma circunferência que passa pelos vértices desse triângulo.



Demonstração:

Como a mediatriz é o segmento perpendicular ao ponto médio de outro segmento, temos pelo critério de congruência LAL:

$$BM_a \equiv CM_a, BM_aO \equiv CM_aO, M_aO \equiv M_aO \Rightarrow \Delta BM_aO \equiv \Delta CM_aO \Rightarrow OB = OC$$

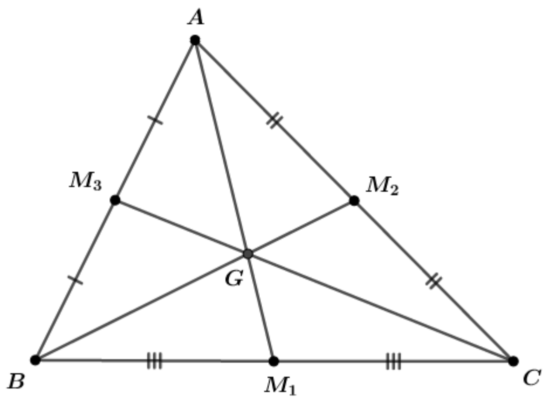
$$BM_c \equiv AM_c, BM_cO \equiv AM_cO, M_cO \equiv M_cO \Rightarrow \Delta BM_cO \equiv \Delta AM_cO \Rightarrow OB = OA$$

$$\Rightarrow OC = OA$$

Portanto, a mediatriz de AC também se encontra no ponto O.

4.3. BARICENTRO

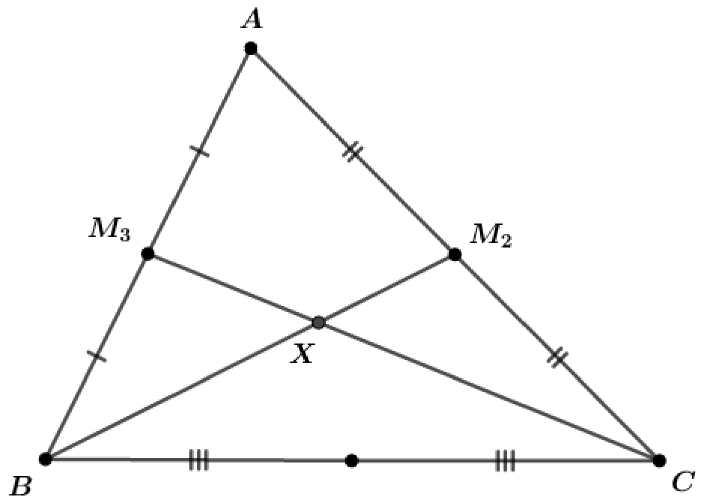
As três medianas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de baricentro.



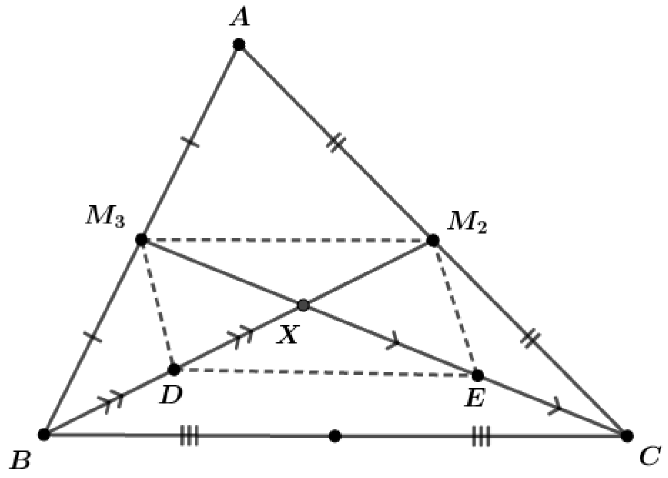
G é o baricentro do triângulo ABC.

Demonstração:

Seja X o ponto onde BM_2 e CM_3 se interceptam:



Tomando-se os pontos médios D e E dos segmentos BX e CX, respectivamente, temos:



Do triângulo ABC:

$$\frac{AM_3}{AB} = \frac{AM_2}{AC} = \frac{1}{2}$$

Pelo teorema de Tales, podemos afirmar que M_2M_3 é paralelo ao segmento BC e possui a mesma razão de proporção:

$$M_2M_3 = \frac{BC}{2}$$

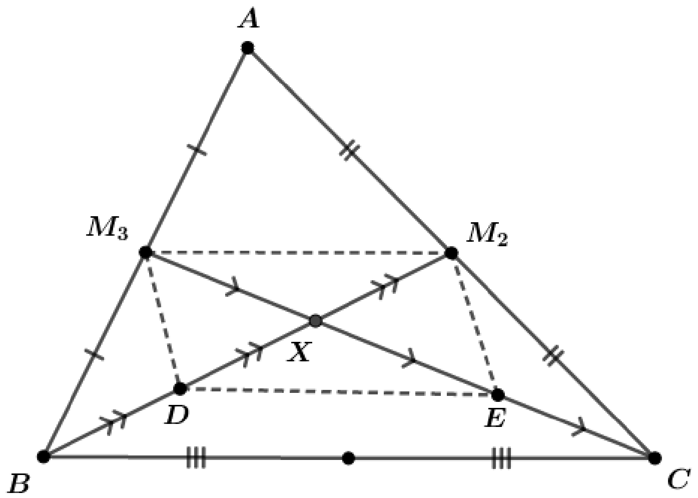
Do triângulo XBC:

$$\frac{XD}{XB} = \frac{XE}{XC} = \frac{1}{2}$$

Assim, pelo teorema de Tales, DE também é paralelo ao lado BC com razão de proporção $1/2$:

$$DE = \frac{BC}{2}$$

Como $M_2M_3 \equiv DE$ e $M_2M_3//DE$, temos que M_2M_3DE é um paralelogramo.

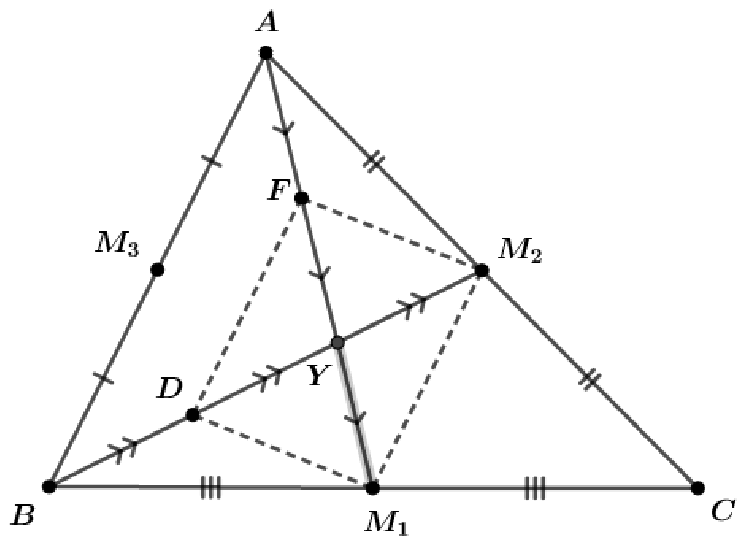


DM_2 e EM_3 são as diagonais do paralelogramo e:

$$XM_3 \equiv XE \Rightarrow CX = 2XM_3$$

$$XD \equiv XM_2 \Rightarrow BX = 2XM_2$$

Tomando-se Y o ponto de encontro das medianas AM_1 e BM_2 e usando a mesma ideia acima, temos:



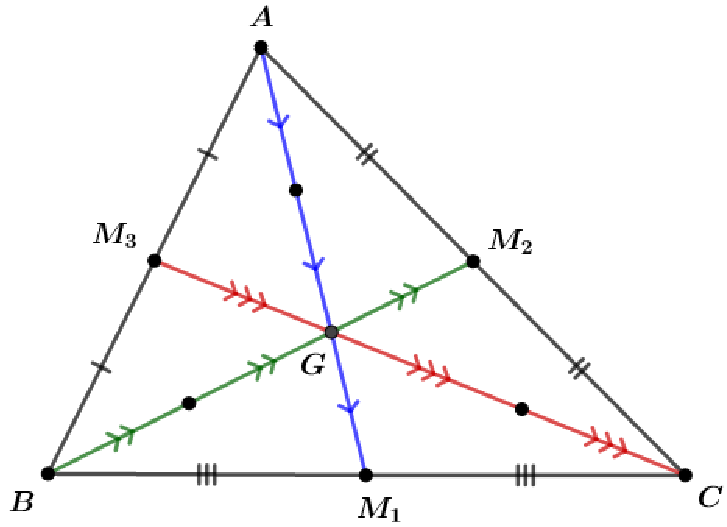
M_1M_2FD é paralelogramo $\Rightarrow DY = YM_2$ e $FY = YM_1$

$$\Rightarrow AY = 2YM_1$$

$$\Rightarrow BY = 2YM_2$$

Portanto, como $BX = 2XM_2$ e $BY = 2YM_2$, temos $X = Y$. Logo, as medianas do triângulo ABC se encontram no mesmo ponto. A esse ponto denominamos de baricentro.

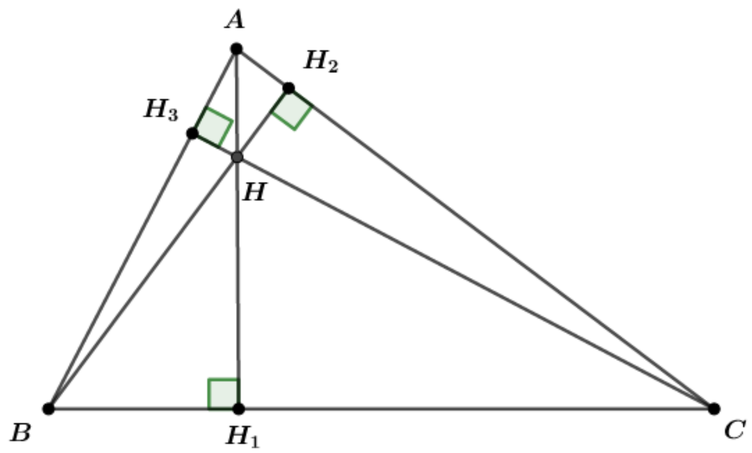
Perceba que uma propriedade do baricentro é que ela divide as medianas na razão de $2/1$:



$$AG = 2GM_1$$
$$BG = 2GM_2$$
$$CG = 2GM_3$$

4.4. ORTOCENTRO

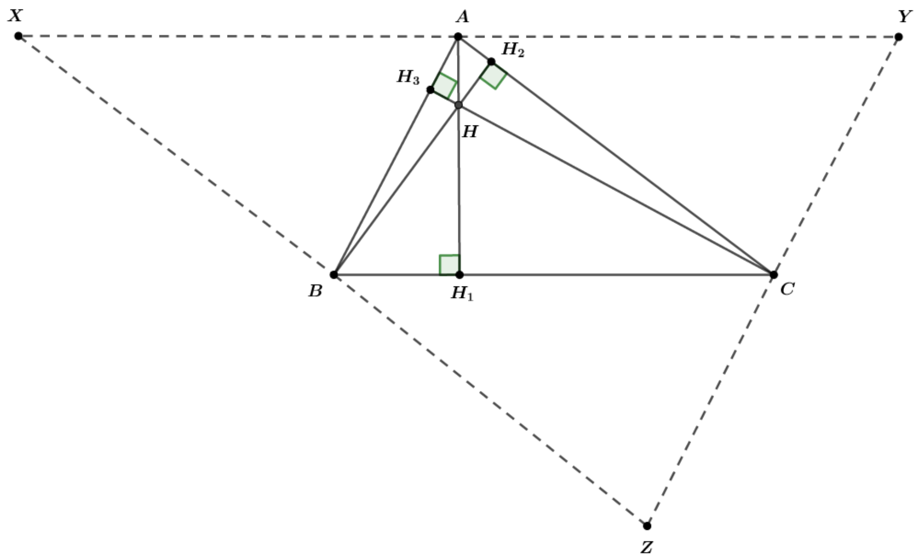
As três alturas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de ortocentro.



H é o ortocentro do triângulo ABC.

Demonstração:

Vamos construir os segmentos de retas paralelos aos lados do triângulo:



$XY//BC$

$YZ//AB$

$XZ//AC$

Como $XY//BC$ e $XZ//AC$, temos que $AXBC$ é um paralelogramo. Assim, podemos afirmar:

$$AX = BC \text{ e } BX = AC$$

$XY//BC$ e $YZ//AB$, então $AYCB$ é paralelogramo:

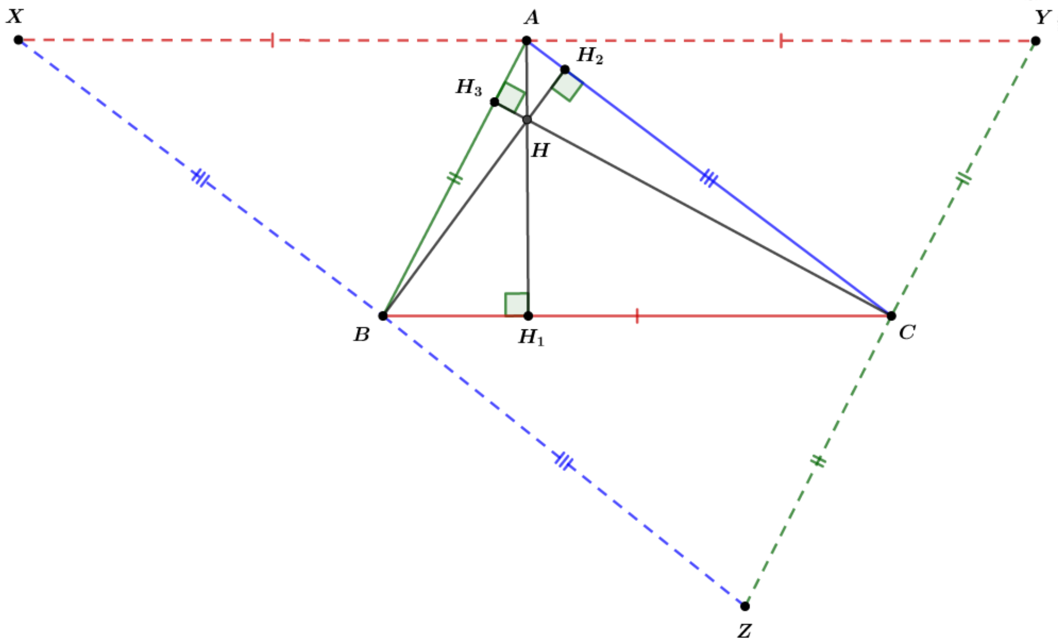
$$AY = BC \text{ e } CY = AB$$

$YZ//AB$ e $XZ//AC$, então $ABZC$ é paralelogramo:

$$CZ = AB \text{ e } BZ = AC$$

Desse modo, concluímos:

$$AX = AY, BX = BZ, CZ = CY$$



$$XY//BC \text{ e } AH_1 \perp BC \Rightarrow AH_1 \perp XY$$

$$XZ//AC \text{ e } BH_2 \perp AC \Rightarrow BH_2 \perp XZ$$

$$YZ//AB \text{ e } CH_3 \perp AB \Rightarrow CH_3 \perp YZ$$

Portanto, os segmentos AH_1, BH_2 e CH_3 são mediatrizes do triângulo XYZ. Logo, eles se encontram em um único ponto H.

H é circuncentro do triângulo XYZ e ortocentro do triângulo ABC.

5. TRIÂNGULOS QUAISQUER

5.1. TEOREMA DOS SENOS

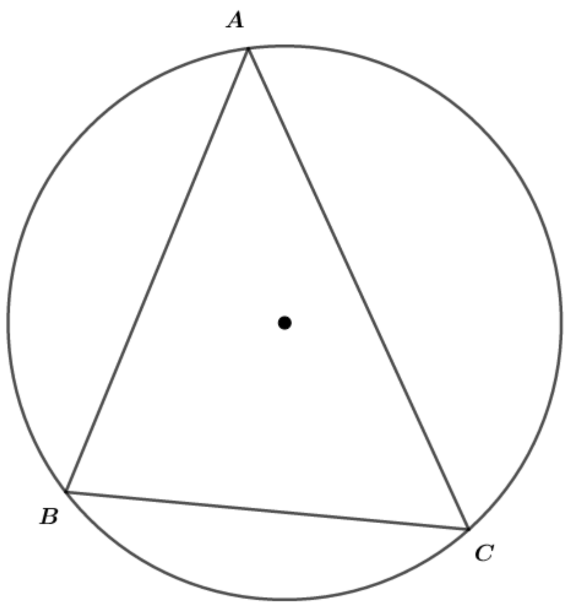
$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo R o raio da circunferência que a circunscreve.

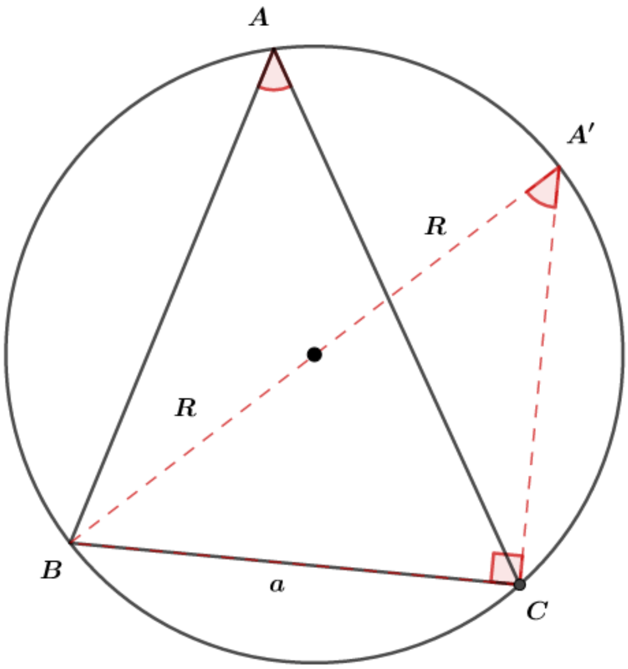
Demonstração:

Vamos provar para os dois casos possíveis: triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo.

Seja ABC um triângulo acutângulo representado pela seguinte figura:



Podemos traçar um triângulo $A'BC$ tal que A' seja a o ponto da intersecção da reta que passa pelo centro da circunferência:



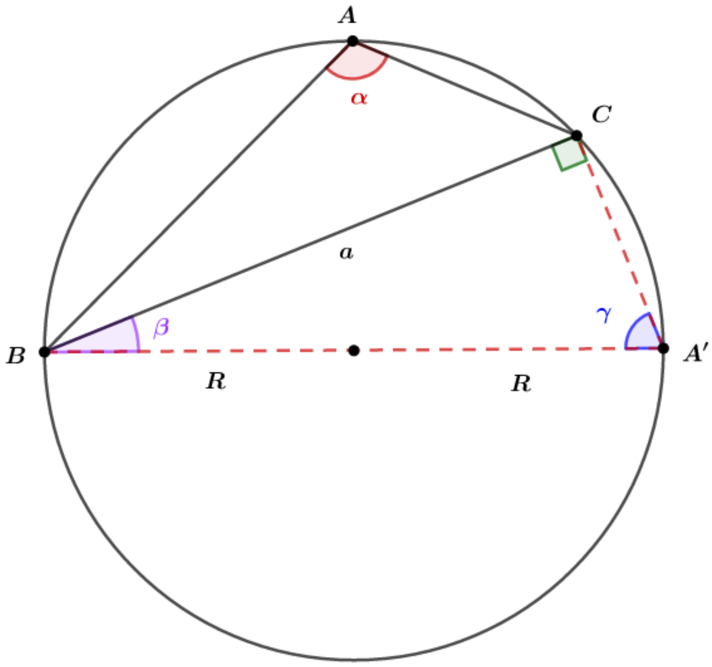
Perceba que o triângulo $A'BC$ é retângulo em C, essa é uma propriedade do triângulo inscrito em uma circunferência. Ainda pela figura, como os ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{A'}$ enxergam a mesma corda BC, podemos afirmar que elas são iguais, então, $\hat{A} = \widehat{A'}$. Aplicando o seno no triângulo $A'BC$, encontramos:

$$sen A' = \frac{a}{2R}$$

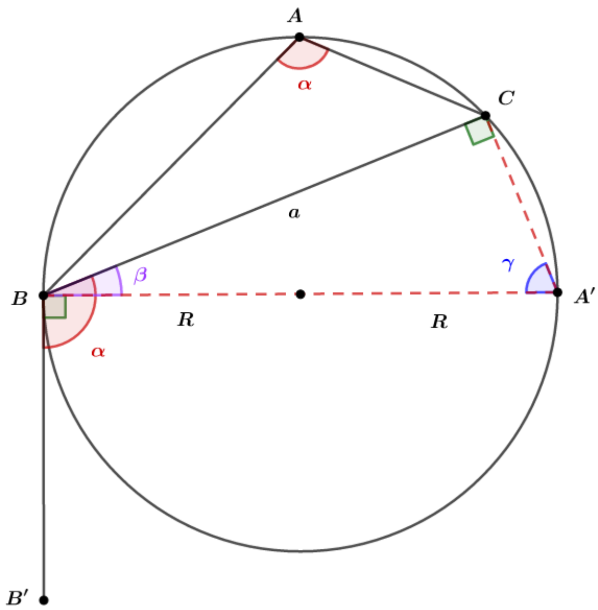
$$\widehat{A'} = \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{sen A} = 2R$$

Usando a mesma ideia, podemos provar para os outros lados.

Se o triângulo fosse obtusângulo, teríamos:



O ponto A enxerga o segmento $\overline{BC}$ sob um ângulo α, sabemos da propriedade do arco capaz que o segmento de reta tangente ao ponto B também enxergará $\overline{BC}$ sob o mesmo ângulo α. Desse modo:



Analisando os ângulos internos do triângulo $A'BC$, podemos ver que:

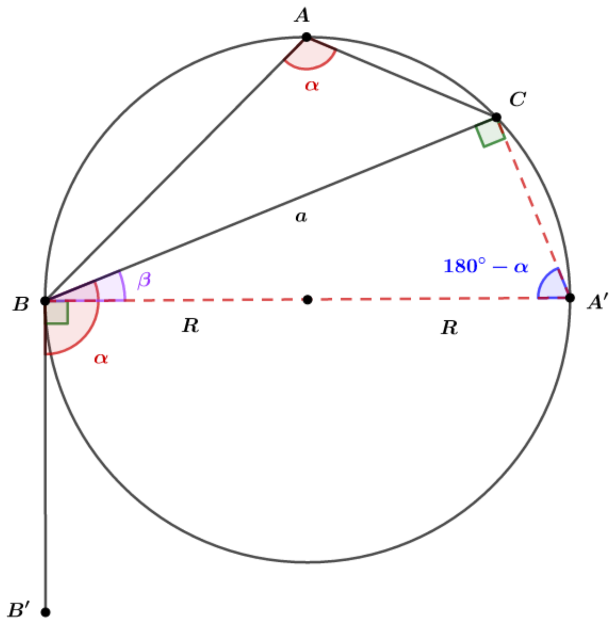
$$\beta = 90° - \gamma$$

Mas:

$\alpha = 90° + \beta \Rightarrow \beta = \alpha - 90°$

$$\Rightarrow 90° - \gamma = \alpha - 90°$$

$$\Rightarrow \gamma = 180° - \alpha$$



Analisando o triângulo $A'BC$, vemos que o seno do vértice A' é dado por:

$$sen(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$$

$$sen\alpha = \frac{a}{2R}$$

Como $\alpha = \hat{A}$, temos:

$$\frac{a}{senA} = 2R$$

Podemos provar analogamente para os outros vértices do triângulo ABC e concluir:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

5.2. TEOREMA DOS COSSENOS

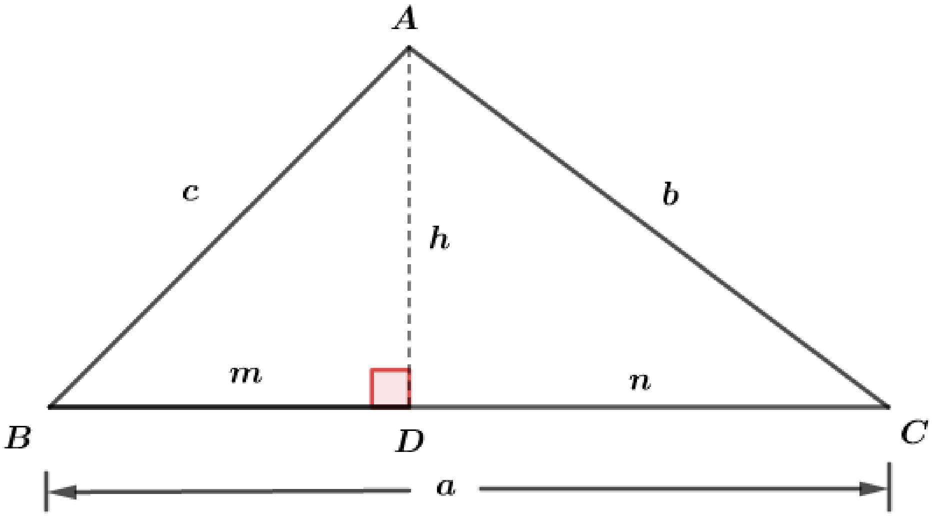
Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}}$$

Demonstração:

Devemos dividir em dois casos, um para o triângulo com ângulo agudo e outro para o triângulo com ângulo obtuso.

1) Considere o triângulo ABC dado pela figura abaixo:



Podemos ver que o triângulo ADC é retângulo, então podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + n^2 \quad (I)$$

Analogamente para o triângulo ADB:

$$c^2 = m^2 + h^2 \quad (II)$$

Também, de acordo com a figura, temos:

$$n = a - m \quad (III)$$

De (II), temos $h^2 = c^2 - m^2$. Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2$$

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \quad (IV)$$

Observando o triângulo ADB, podemos escrever a seguinte relação:

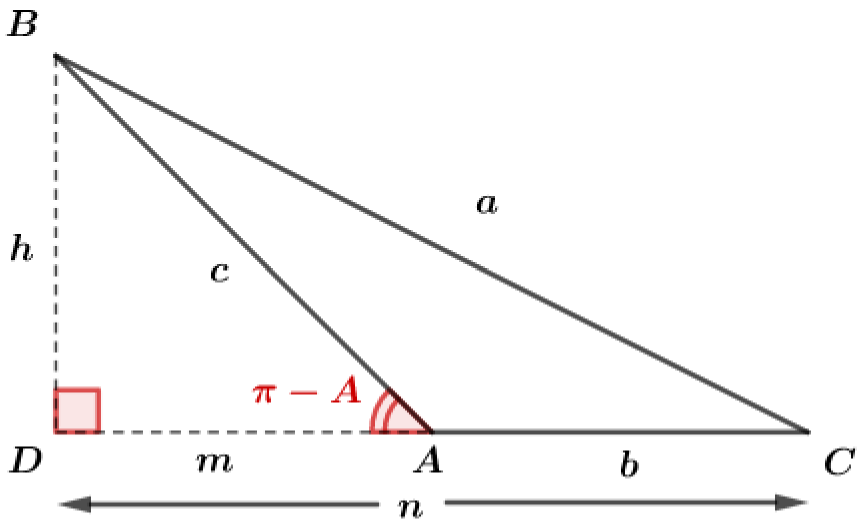
$$m = c\ cosB$$

Substituindo em (IV), obtemos a lei dos cossenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

2) Seja ABC um triângulo dado pela figura abaixo:



Os triângulos BAD e BCD são retângulos, desse modo, podemos escrever:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (I)$$

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (II)$$

Observando o triângulo BCD, temos a seguinte relação:

$$n = m + b \quad (III)$$

Substituindo (III) e (I) em (II), obtemos:

$$a^2 = (m+b)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = m^2 + 2bm + b^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \quad (IV)$$

No triângulo BAD, temos:

$$m = c\cos(\pi - A) = -c\cos A$$

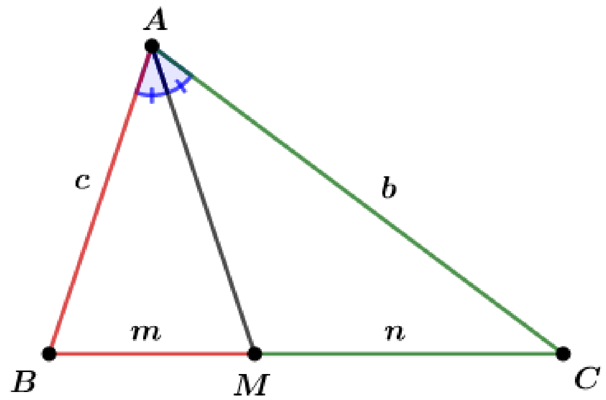
Substituindo essa identidade em (IV):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

5.3. TEOREMA DAS BISSETRIZES

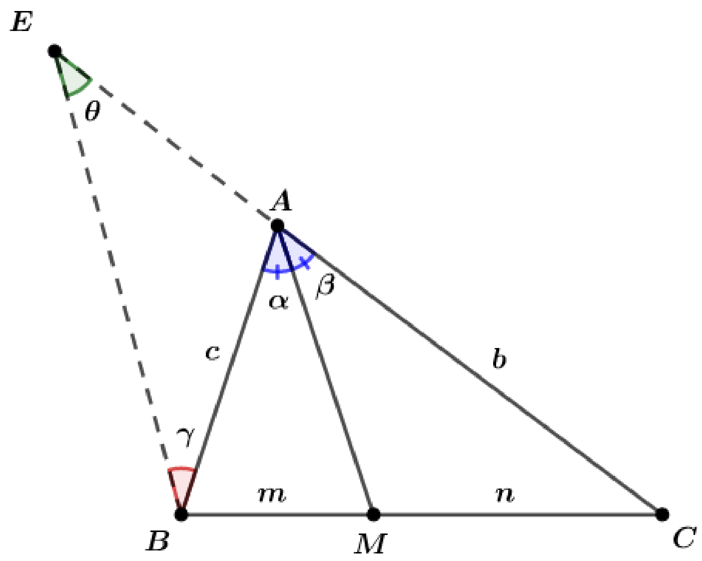
5.3.1. TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA



$$\boxed{\frac{c}{m} = \frac{b}{n}}$$

Demonstração:

Vamos traçar um segmento de reta paralelo à bissetriz $\overline{AM}$ e que passa pelo prolongamento do lado $\overline{AC}$:



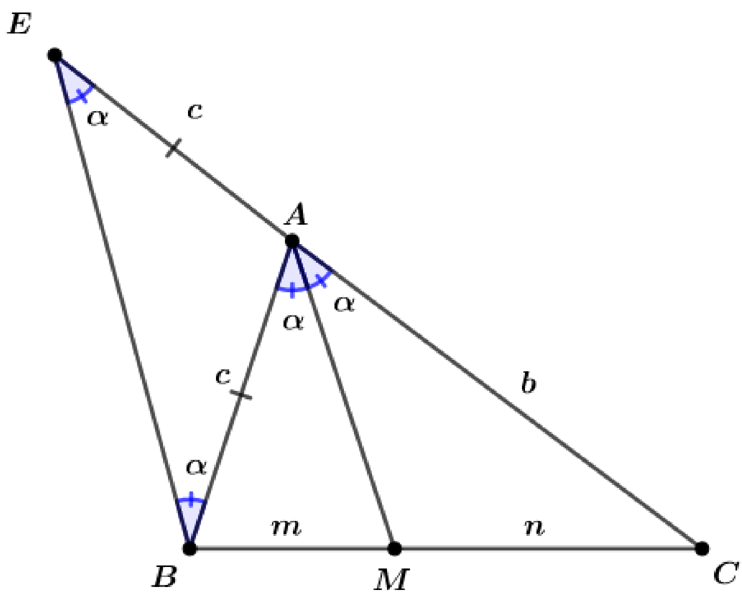
Como $\overline{EB}$ é paralelo a $\overline{AM}$, temos pela propriedade do paralelismo:

$$\gamma \equiv \alpha$$

$$\theta \equiv \beta$$

$\overline{AM}$ é bissetriz do triângulo ABC no vértice A, então $\alpha \equiv \beta$.

Logo, $\gamma \equiv \theta$ e, assim, ΔAEB é isósceles com $AE = AB = c$:

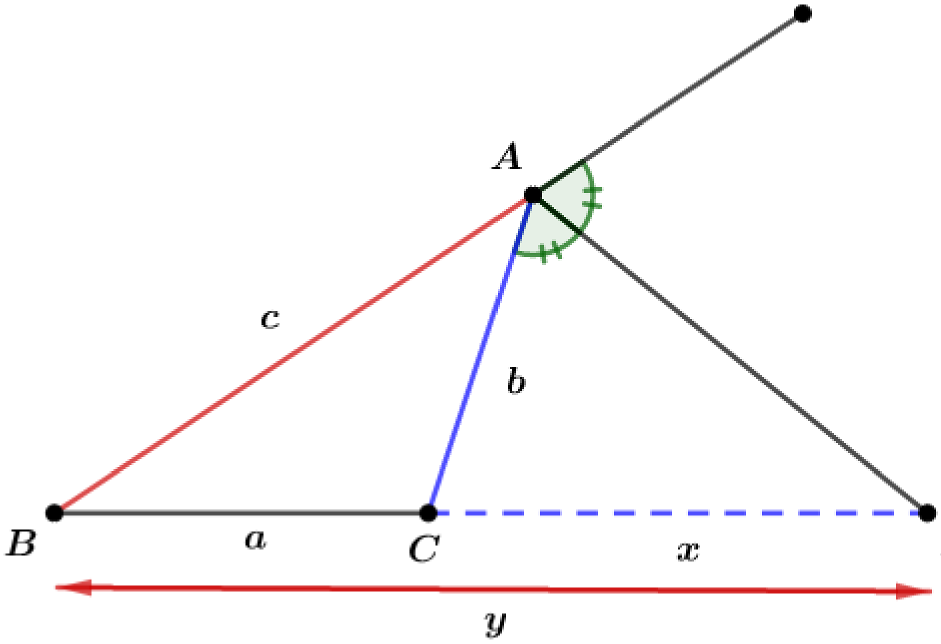


Aplicando o teorema de Tales, encontramos:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$$

$$\therefore \frac{c}{m} = \frac{b}{n}$$

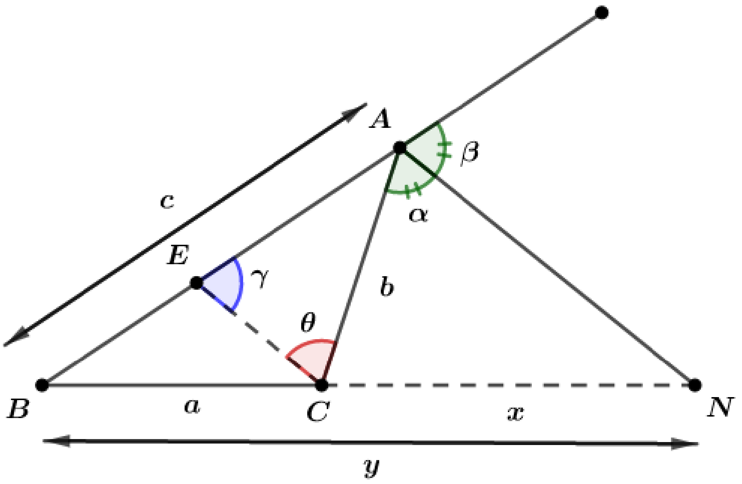
5.3.2. Teorema da Bissetriz Externa



$$\boxed{\frac{c}{y} = \frac{b}{x}}$$

Demonstração:

Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ tal que E pertença à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{CE}//\overline{AN}$:



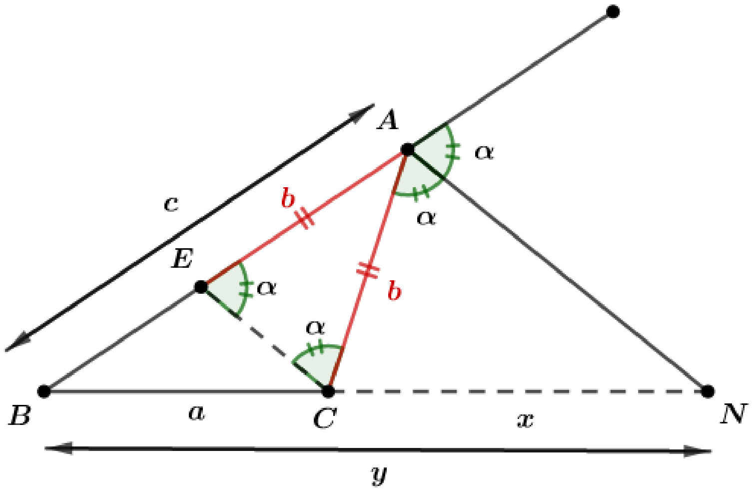
Como $EC//AN$, temos:

$$\theta \equiv \alpha$$

$$\gamma \equiv \beta$$

AN é bissetriz externa, então $\alpha \equiv \beta$. Portanto:

$$\gamma \equiv \theta \Rightarrow \Delta AEC \text{ é isósceles com } AE = AC$$



Aplicando o teorema de Tales, temos:

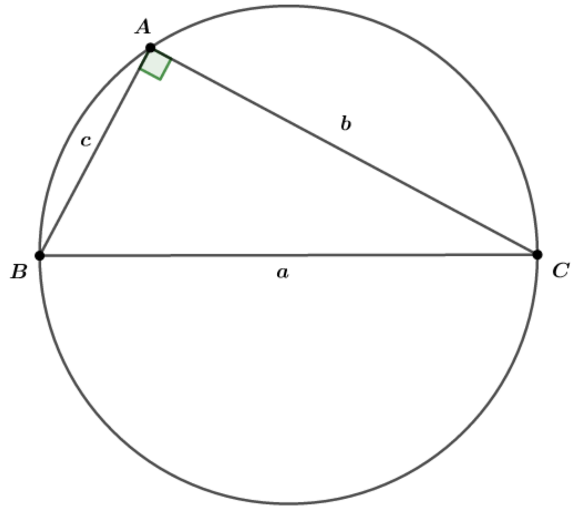
$$\frac{c}{b} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{c}{y} = \frac{b}{x}$$

6. TRIÂNGULO RETÂNGULO

6.1. PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência possui medida igual ao diâmetro da circunferência.



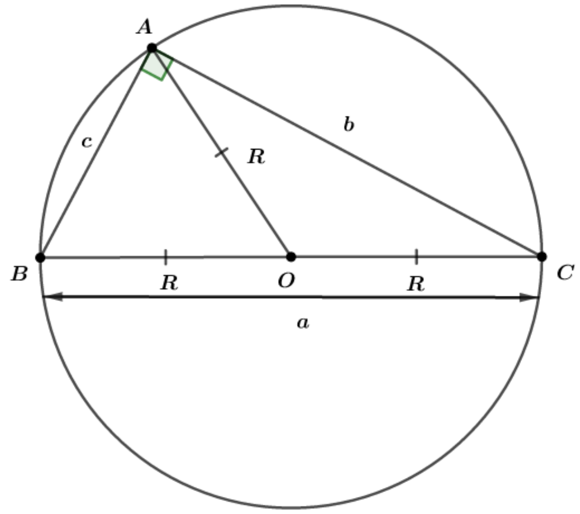
Demonstração:

Vimos no tópico de arco capaz que $\hat{A} = \widehat{BC}/2$. Desse modo:

$$\widehat{BC} = 2\hat{A}$$

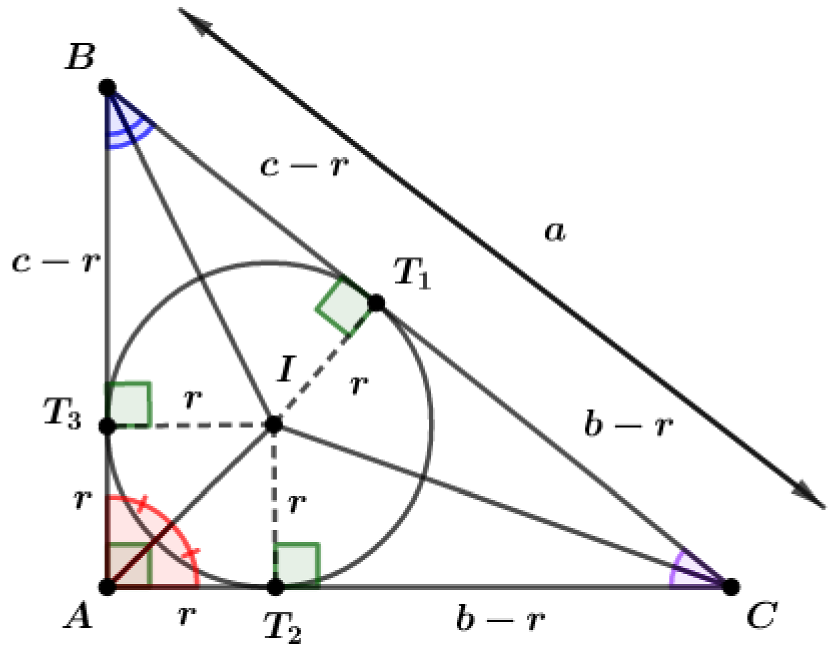
$$\widehat{BC} = 180°$$

Assim, o segmento $\overline{BC}$ é a diagonal da circunferência. O centro dessa circunferência é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo:



$$\Rightarrow a = 2R$$

Para uma circunferência inscrita em um triângulo retângulo, temos:



T_1, T_2, T_3 são os pontos de tangência da circunferência inscrita. Vimos no tópico de incentro que esses pontos de tangência possuem a seguinte relação:

$$BT_1 = BT_3$$

$$AT_2 = AT_3$$

$$CT_1 = CT_2$$

Observando a figura, podemos ver que:

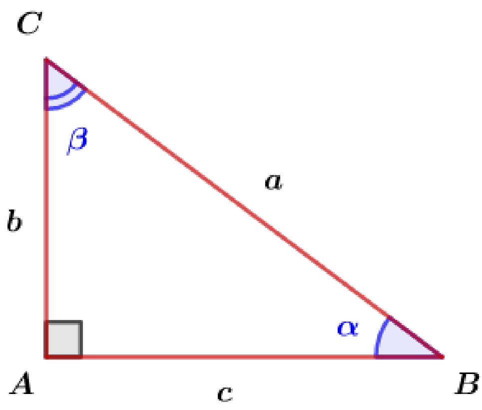
$$a = c - r + b - r$$

$$a + 2r = b + c$$

Como o triângulo ABC é retângulo com hipotenusa BC, ele é circunscritível e a sua hipotenusa é a diagonal da circunferência que a circunscreve. Seja R, o raio dessa circunferência. Assim, podemos escrever:

$$a = 2R \Rightarrow 2R + 2r = b + c$$

6.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



No triângulo retângulo, chamamos de hipotenusa o lado BC e de catetos os lados AB e AC.

Na trigonometria temos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Além dessas, temos as razões secante, cossecante e cotangente. Elas são dadas por:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Perceba que também podemos escrever tangente como:

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

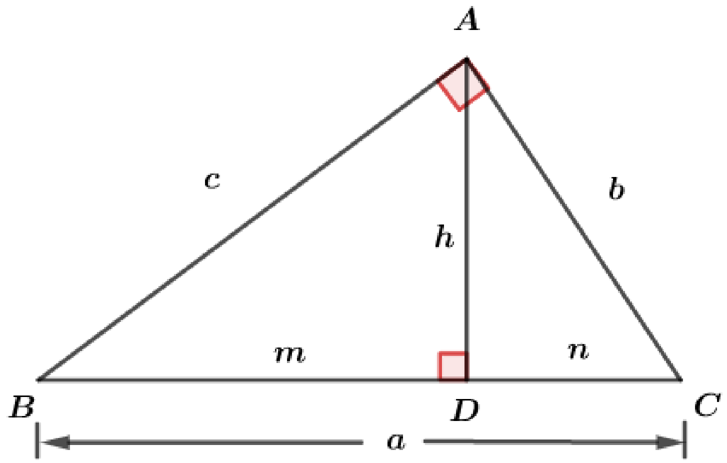
Ainda, das relações do triângulo retângulo, temos o **Teorema de Pitágoras**:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

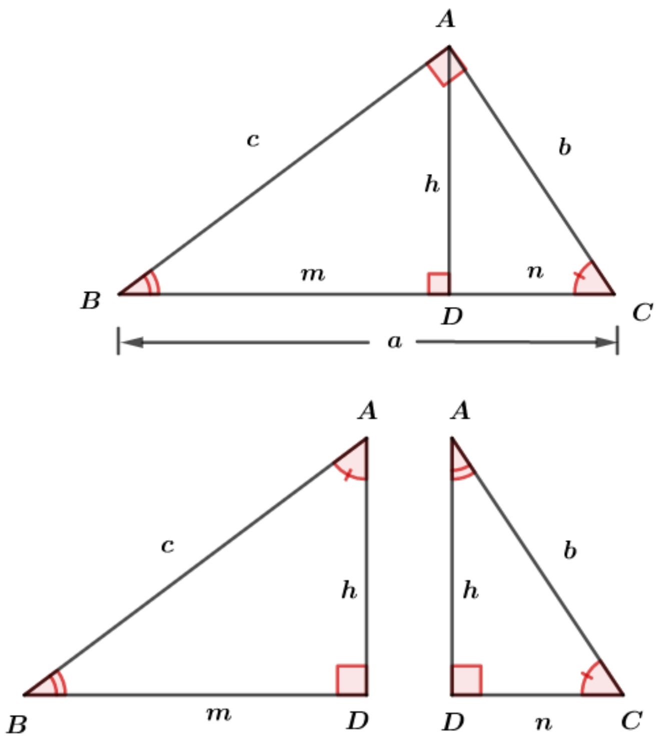
O Teorema de Pitágoras afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração:

Considere o seguinte triângulo ABC:



Note que os triângulos ABC, ABD, CAD são semelhantes:



Assim, podemos escrever a seguinte razão de proporção entre os triângulos semelhantes:

$$ABC \sim ADC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an$$

$$ABC \sim ABD \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am$$

Somando essas duas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am$$

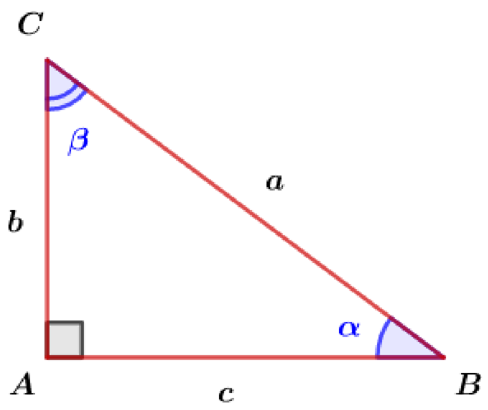
$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $m + n = a$, substituindo na equação, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

6.2.1. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

Dado o seguinte triângulo retângulo, temos:



$$sen\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\ sen\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\ cos\alpha$$

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos a relação fundamental entre seno e cosseno:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (asen\alpha)^2 + (acos\alpha)^2$$

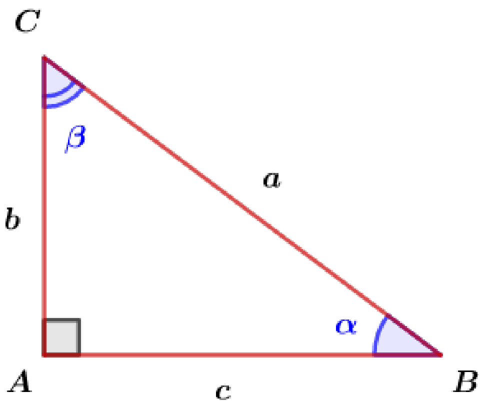
$$a^2 = a^2sen^2\alpha + a^2\cos^2\alpha$$

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Podemos, então dizer que a soma dos quadrados do seno e cosseno de um ângulo vale 1.

6.2.2. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Das relações do triângulo, temos:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

Na figura, $\hat{A} = \pi/2$. Substituindo na equação acima:

$$\frac{\pi}{2} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares

Dessa relação, temos as seguintes consequências:

$$sen\alpha = \frac{b}{a} \ e \ cos\beta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = cos\beta$$

$$sen\beta = \frac{c}{a} \ e \ cos\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow sen\beta = cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{b}{c} \ e \ cotg\beta = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = cotg\beta = \frac{1}{tg\beta}$$

$$tg\beta = \frac{c}{b} \ e \ cotg\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow tg\beta = cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

ESQUEMATIZANDO

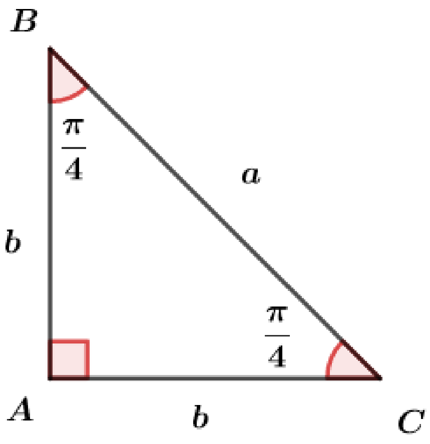
$\boldsymbol{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}}$
$sen\alpha = cos\beta$
$sen\beta = cos\alpha$
$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$
$tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$

6.2.3. ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos $\pi/6, \pi/4$ e $\pi/3$ são considerados ângulos notáveis. Vamos calcular o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

1) $\boldsymbol{\pi/4}$:

Considere o seguinte triângulo isósceles:



Através do Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + b^2$$

$$a^2 = 2b^2$$
$$a = \sqrt{2}b$$

Usando a definição de seno, cosseno e tangente, obtemos:

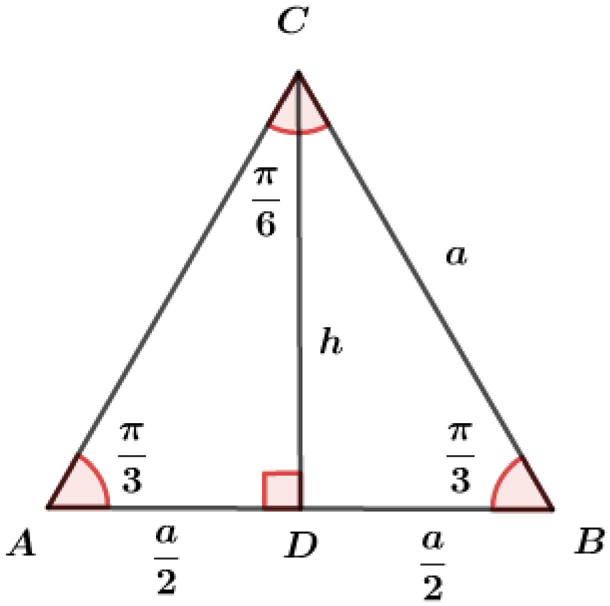
$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{b} = 1$$

2) $\pi/6$ e $\pi/3$:

Agora, considere o triângulo equilátero:



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Calculando o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\pi/6$ e $\pi/3$:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

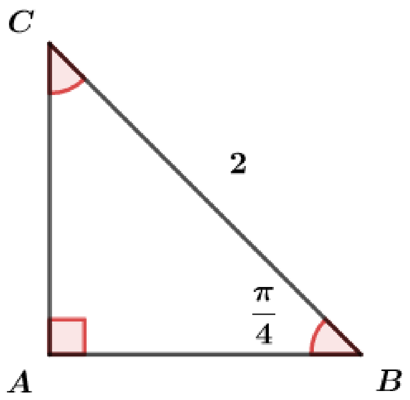
Podemos construir a tabela dos ângulos notáveis:

	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

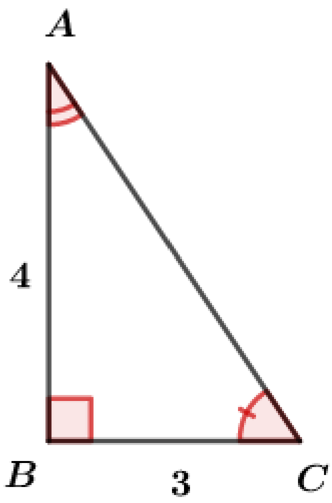
Exercícios de Fixação

9. Dados os triângulos abaixo, calcule o valor dos lados que faltam:

a)



b)



Resolução:

a) Conhecemos o valor do $sen(\pi/4)$, podemos calcular o valor dos catetos usando a seguinte razão:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$AB = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b) Basta aplicar o Teorema de Pitágoras:

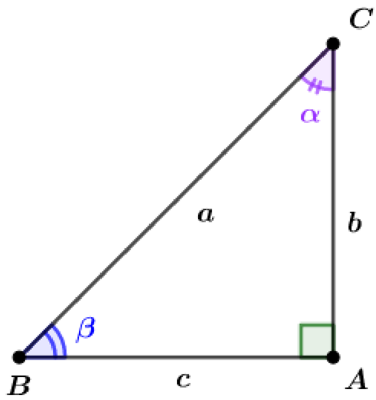
$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AC = \sqrt{25} = 5$$

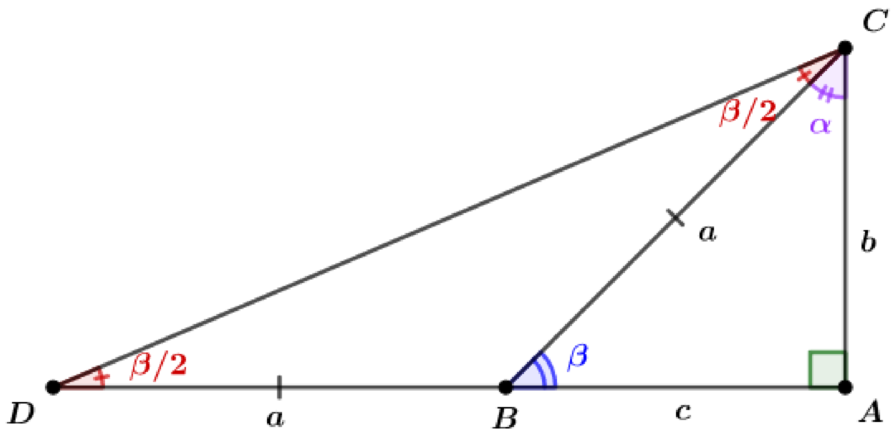
Gabarito: a) $AB = \sqrt{2}$ b) $AC = 5$

6.3. RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Podemos usar a geometria plana para encontrar algumas razões trigonométricas não triviais. O bizu para isso é usar a propriedade do triângulo isósceles. Seja o triângulo ABC dado abaixo:



Vamos prolongar o segmento $\overline{AB}$ de modo a obter um triângulo isósceles com $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$.



Perceba que pela propriedade do ângulo externo, temos $B\widehat{D}C \equiv B\hat{C}D = \beta/2$.

Podemos calcular as tangentes do triângulo ADC:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{b}{a + c}$$

Dividindo o lado direito da equação por a, temos:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{c}{a}}$$

Do triângulo ABC, podemos escrever:

$$sen\beta = \frac{b}{a}$$

$$cos\beta = \frac{c}{a}$$

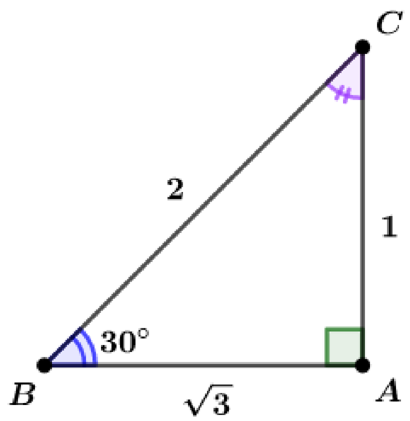
Substituindo na equação da tangente:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{sen\beta}{1 + cos\beta}$$

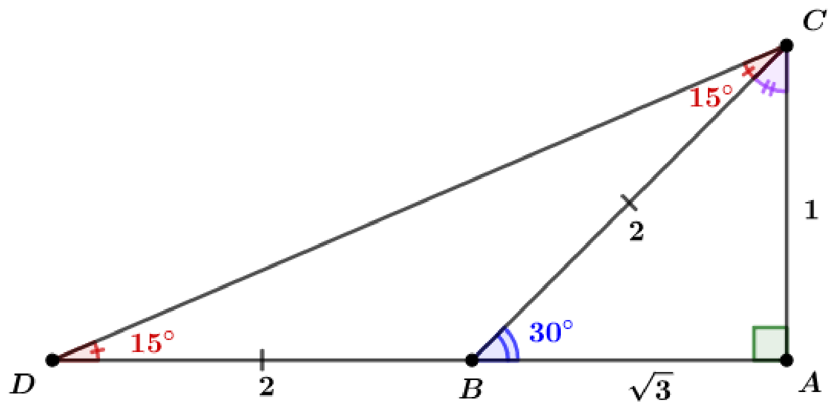
Usando essa ideia, podemos calcular o valor das razões trigonométricas para os ângulos de $15°$ e $22{,}5°$.

6.2.1. $15°$

Vamos construir o triângulo retângulo ABC com $\hat{B} = 30°$. Sabemos que $sen(30°) = 1/2$ e $\cos(30°) = \sqrt{3}/2$:



Prolongando o lado AB de modo a obter um triângulo isósceles, encontramos:



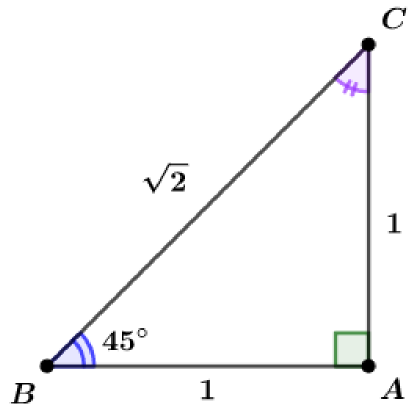
Assim, podemos notar que:

$$tg(15°) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

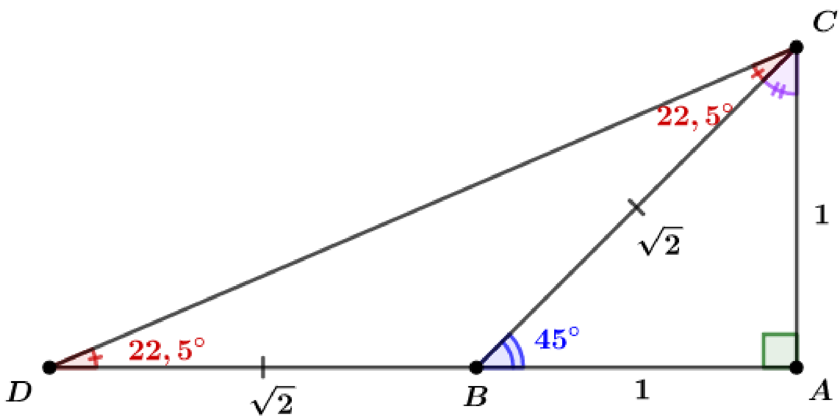
$$tg(15°) = 2 - \sqrt{3}$$

6.2.2. $22,5°$

Usando a mesma ideia do item acima, temos:



Prolongando o lado AB:



Assim, vemos que:

$$tg(22{,}5°) = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

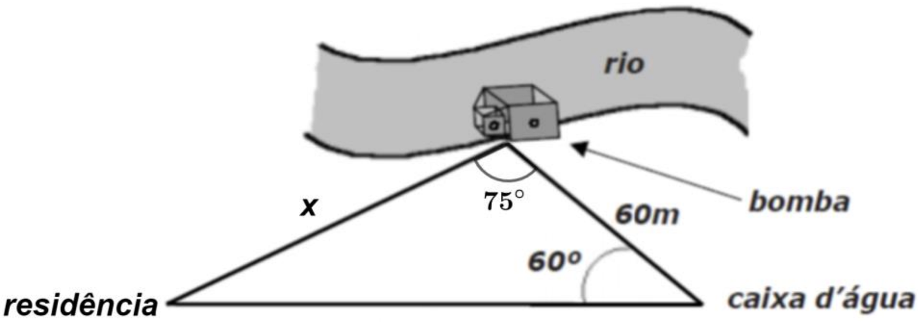
$$tg(22{,}5°) = \sqrt{2} - 1$$

7. LISTA DE QUESTÕES

LISTA DE QUESTÕES

10. (ESA/2021)

A água utilizada em uma residência é captada e bombeada do rio para uma caixa d`água localizada a 60 m de distância da bomba. Os ângulos formados pelas direções bomba – caixa d`água – residência é de $60°$ e residência – bomba – caixa d`água é de $75°$, conforme a figura abaixo. Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a residência, quantos metros de tubulação são necessários? Use $\sqrt{6} = 2,4$



a) 12,5 metros

b) 72 metros

c) 35,29 metros

d) 21,25 metros

e) 28 metros

11. (EEAR/2021)

Uma circunferência de 5 cm de raio possui duas cordas AB = 6 cm e BC = x cm. Se $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, então x é igual a

a) 8

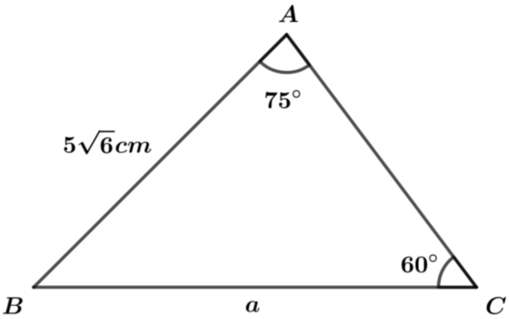
b) 7

c) 6

d) 5

12. (EEAR/2021)

Considerando a figura e que $sen\ 75°$ é igual a $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, calcula-se que a = 5 (______) cm.



a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

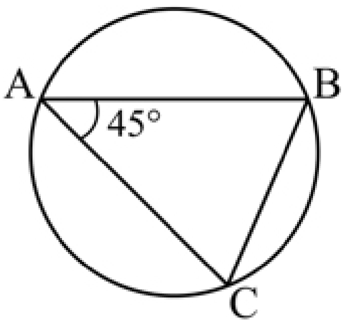
b) $1+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

13. (EEAR/2018)

O triângulo ABC está inscrito na circunferência. Se $BC = 8$, a medida do raio é



a) $4\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}$

c) 4

d) 2

14. (EEAR/2018)

Num triângulo ABC, são dados $\hat{A} = 45°, \hat{B} = 30°$ e $\overline{AC} = 6\ cm$. Então $\overline{BC} =$ ____cm.

a) $4\sqrt{3}$

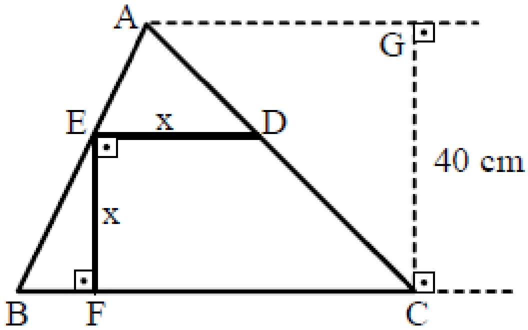
b) $6\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. (EEAR/2018)

Na figura, se $BC = 60cm$, a medida de DE, em cm, é



a) 20

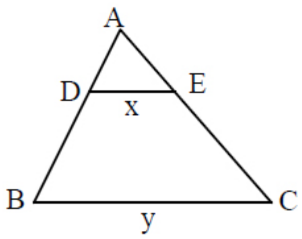
b) 24

c) 30

d) 32

16. (EEAR/2017)

Seja um triângulo ΔABC, conforme a figura.



Se $D\ e\ E$ são pontos, respectivamente, de AB e AC, de forma que $AD = 4, DB = 8, DE = x, BC = y$, e se $DE//BC$, então

a) $y = x + 8$

b) $y = x + 4$

c) $y = 3x$

d) $y = 2x$

17. (EEAR/2017)

Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo $30°$, seu lado oposto a esse ângulo mede

a) $\frac{R}{2}$

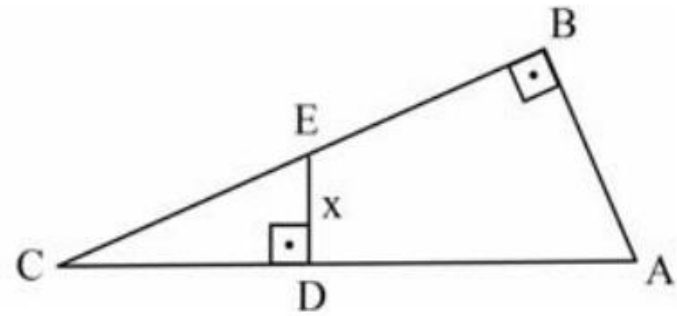
b) R

c) $2R$

d) $\frac{2R}{3}$

18. (EEAR/2017)

Conforme a figura, os triângulos ABC e CDE são retângulos.



Se $\overline{AB} = 8\ cm$, $\overline{BC} = 15\ cm$ e $\overline{CD} = 5\ cm$, então a medida de $\overline{DE}$, em cm, é

a) $\frac{2}{5}$

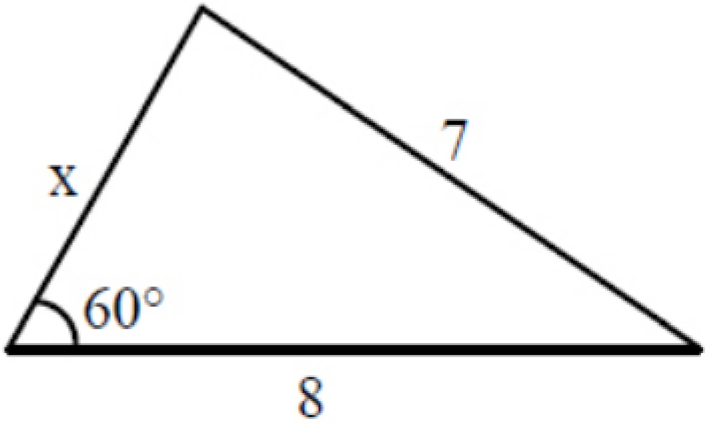
b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $\frac{1}{4}$

19. (EEAR/2017)

Se o perímetro do triângulo abaixo é maior que 18, o valor de x é



a) 4

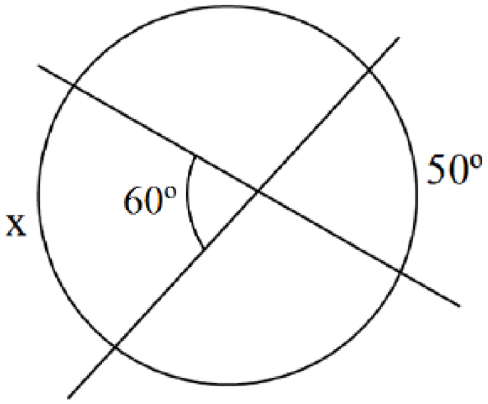
b) 5

c) 6

d) 7

20. (EEAR/2016)

Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.



A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

a) $40°$

b) $70°$

c) $110°$

d) $120°$

21. (EEAR/2016)

Um triângulo acutângulo ABC tem a medida do ângulo $\hat{A}$ igual a 30◦. Sabe-se que os lados adjacentes ao ângulo $\hat{A}$ medem $\sqrt{3}$ cm e 4 cm. A medida, em cm, do lado oposto ao referido ângulo é

a) $\sqrt{3}$

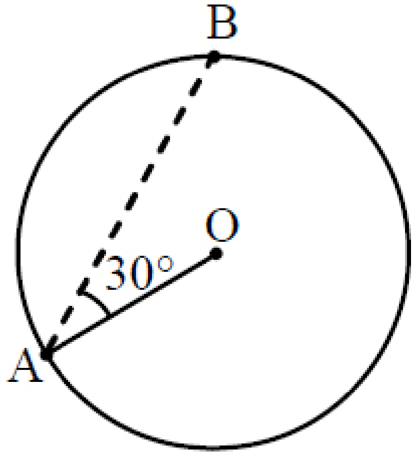
b) $\sqrt{7}$

c) $5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{19-4\sqrt{3}}$

22. (EEAR/2015)

O ponto O é o centro da circunferência da figura, que tem $3m$ de raio e passa pelo ponto B. Se o segmento AB forma um ângulo de $30°$ com o raio OA, então a medida de AB, em m, é



a) $6\sqrt{3}$

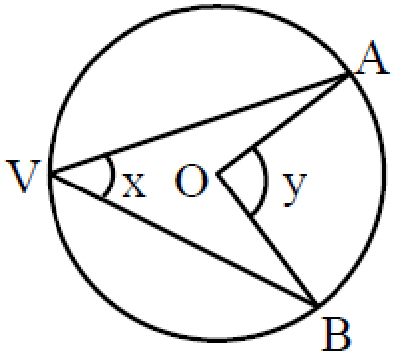
b) $3\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2}$

23. (EEAR/2015)

Na circunferência da figura, O é o seu centro e V, A e B são três de seus pontos.



Se x e y são, respectivamente, as medidas dos ângulos AOB e BVA, então sempre é correto afirmar que

a) $x = 2y$.

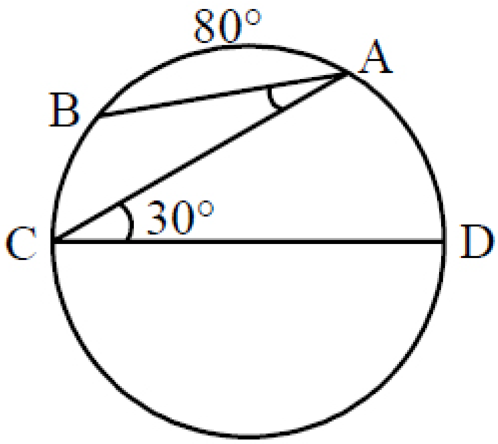
b) $y = 2x$.

c) $x + y = 90°$.

d) $x - y = 90°$.

24. (EEAR/2015)

Na figura, A e B são pontos da circunferência e CD é seu diâmetro.



Assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede

a) $20°$.

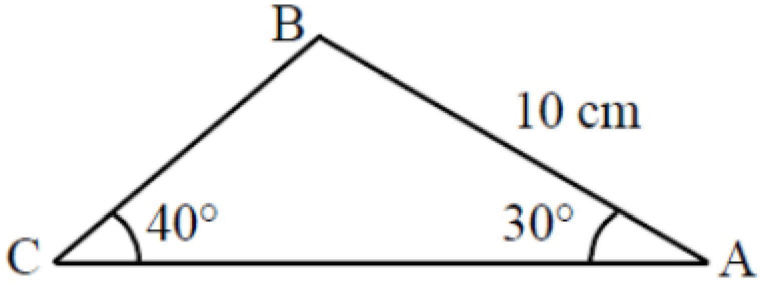
b) $30°$.

c) $50°$.

d) $60°$.

25. (EEAR/2013)

Considerando $sen(40°) = 0,6$, o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, mede, em cm, aproximadamente



a) 6,11

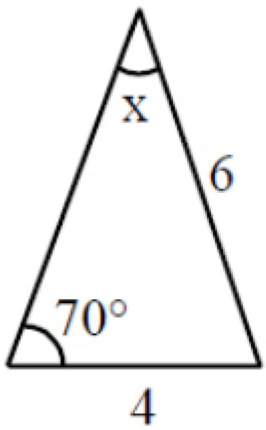
b) 7,11

c) 8,33

d) 9,33

26. (EEAR/2013)

Considere as medidas indicadas na figura e que $sen(70°) = 0,9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se $sen(x) =$ ____.



a) 0,4

b) 0,5

c) 0,6

d) 0,7

27. (EEAR/2012)

O perímetro de um triângulo equilátero de altura h = $\sqrt{3}$ é ____m.

a) 3

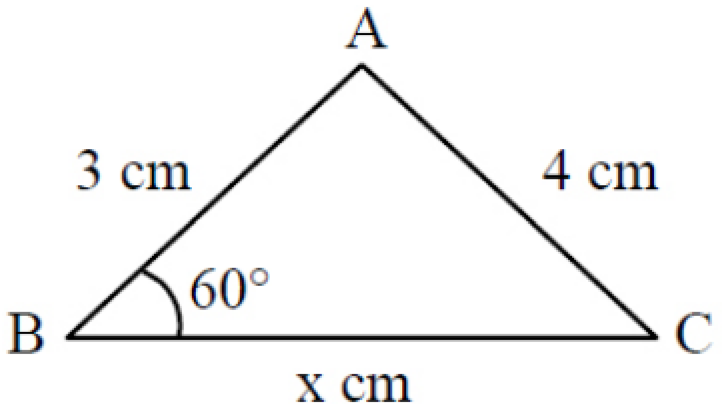
b) 4

c) 5

d) 6

28. (EEAR/2012)

Considerando $\sqrt{37} = 6$, o valor de x na figura é



a) 2,5

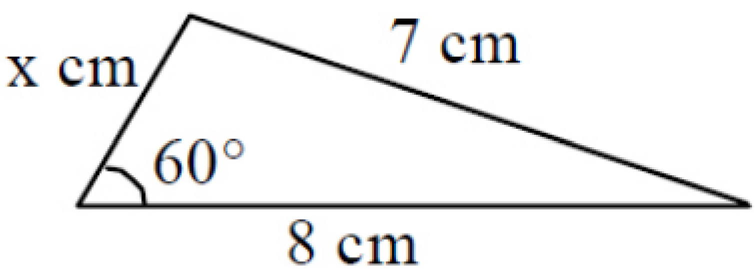
b) 3,5

c) 4,5

d) 5,5

29. (EEAR/2011)

No triângulo, o menor valor que x pode assumir é



a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

30. (EEAR/2011)

Um triângulo, inscrito em uma circunferência, tem um ângulo de $30°$ oposto a um lado de 10 cm. O diâmetro da circunferência, em cm, é

a) 10

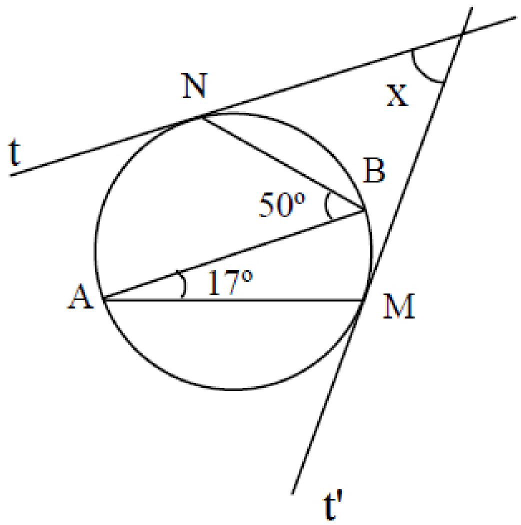
b) 15

c) 20

d) 25

31. (EEAR/2010)

Sejam AB o diâmetro da circunferência, e as retas t e t' tangentes a ela nos pontos N e M, respectivamente.



O valor de x é

a) $66°$.

b) $60°$.

c) $55°$.

d) $50°$.

32. (EEAR/2010)

Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3m, 5m e 7m. A medida da projeção do menor dos lados sobre a reta que contém o lado de 5m é, em m,

a) 2,5

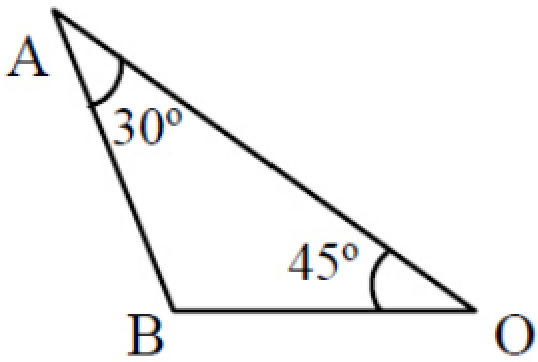
b) 1,5

c) 2

d) 1

33. (EEAR/2010)

No triângulo AOB, $\overline{OB} = 5\ cm$; então AB, em cm, é igual a



a) 6

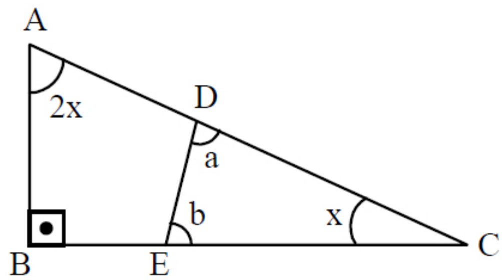
b) 8

c) $5\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{3}$

34. (EEAR/2010)

Se o triângulo CDE é semelhante ao triângulo ABC, o valor de $|a - b|$ é:



a) $30°$

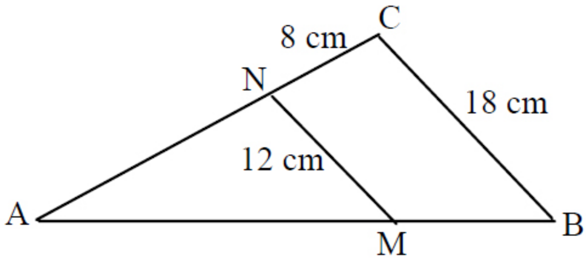
b) $45°$

c) $60°$

d) $90°$

35. (EEAR/2009)

Na figura, $\overline{MN}//\overline{BC}$.



Se $AB = 30cm$, então $\overline{MB}$ mede, em cm,

a) 5

b) 10

c) 15

d) 20

36. (EEAR/2009)

Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 8 cm, e formam um ângulo de $60°$. A medida do terceiro lado desse triângulo, em cm, é

a) $2\sqrt{13}$

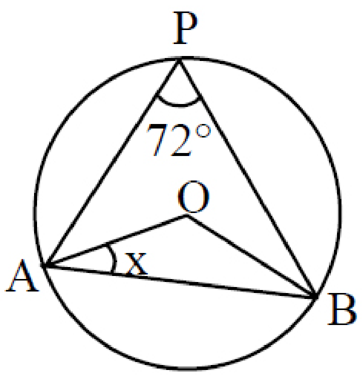
b) $3\sqrt{17}$

c) $\sqrt{23}$

d) $\sqrt{29}$

37. (EEAR/2009)

Na figura, O é o centro da circunferência.



O valor de x é

a) $18°$.

b) $20°$.

c) $22°$.

d) $24°$.

38. (EEAR/2009)

Sejam uma circunferência de centro O e um ponto A exterior a ela. Considere AT um segmento tangente à circunferência, em T. Se o raio da circunferência mede $4\ cm$ e $AT = 8\sqrt{2}\ cm$, então a medida de AO, em cm, é

a) 10.

b) 12.

c) 13.

d) 15.

39. (EEAR/2008)

Dado um triângulo qualquer, é FALSO afirmar que

a) uma de suas alturas pode coincidir com um de seus lados.

b) suas alturas podem interceptar-se num ponto externo a ele.

c) o incentro é o centro da circunferência nele inscrita.

d) o circuncentro é o encontro das suas medianas.

40. (EEAR/2008)

No triângulo, cujos lados medem 5 cm, 10 cm e 6 cm, o maior ângulo tem cosseno igual a

a) $\frac{7}{10}$

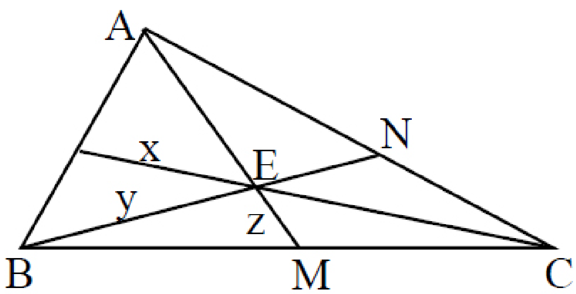
b) $\frac{9}{20}$

c) $-\frac{13}{20}$

d) $-\frac{8}{10}$

41. (EEAR/2007)

Sendo E o baricentro do triângulo $ABC, AE = 10cm, EN = 6cm, e\ CE = 14cm$**, o valor, em cm, de** $x + y + z$ **é:**



a) 18.

b) 20.

c) 22.

d) 24.

42. (EEAR/2007)

Dois triângulos são semelhantes, e uma altura do primeiro é igual aos $\frac{2}{5}$ **de sua homóloga no segundo. Se o perímetro do primeiro triângulo é** $140cm$**, então o perímetro do segundo, em** cm**, é:**

a) 250.

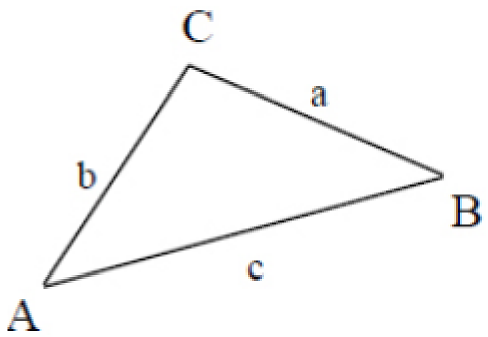
b) 280.

c) 300.

d) 350.

43. (EEAR/2007)

Considere o triângulo ABC. Assinale a alternativa FALSA.



a) $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ e $cos\,\hat{B} = \frac{c}{a}$

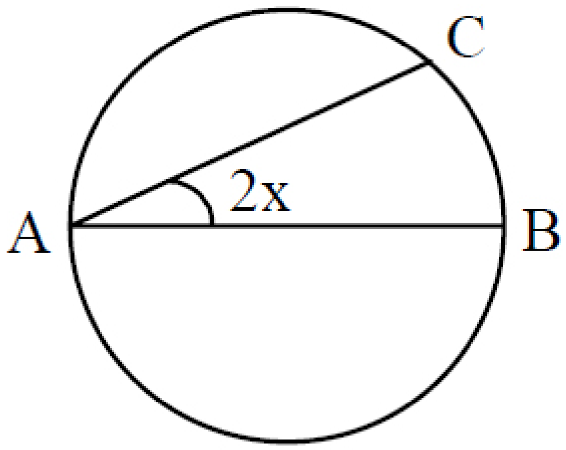
b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\hat{A}$

c) $\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$

d) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\hat{B}$

44. (EEAR/2007)

Na figura, AB é o diâmetro da circunferência e o arco AC mede $100°$.



O valor de x é:

a) $20°$.

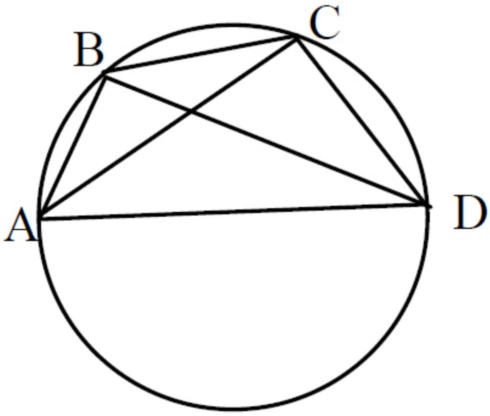
b) $35°$.

c) $45°$.

d) $50°$.

45. (EEAR/2007)

Na figura, AD é o diâmetro da circunferência, $C\hat{A}D$ mede $35°$ e $B\hat{D}C$, $25°$.



A medida de $A\hat{C}B$ é

a) $30°$.

b) $35°$.

c) $40°$.

d) $45°$.

46. (EEAR/2007)

Um triângulo, inscrito numa circunferência de $10\ cm$ de raio, determina nesta três arcos, cujas medidas são $90°$, $120°$ e $150°$. A soma das medidas dos menores lados desse triângulo, em cm, é

a) $10(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

b) $10(1+\sqrt{3})$

c) $5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

d) $5(1+\sqrt{3})$

47. (EEAR/2006)

Num triângulo ABC, o ângulo $B\hat{E}C$ mede $114°$. Se E é o incentro de ABC, então o ângulo $\hat{A}$ mede:

a) 44.

b) 48.

c) 56.

d) 58.

48. (EEAR/2006)

Num triângulo ABC, $AB = BC = 5\sqrt{2}cm$. Se R é o ponto médio de $\overline{AC}$, e S é o ponto médio de $\overline{AB}$, então a medida de $\overline{RS}$, em cm, é igual a:

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

49. (EEAR/2006)

Num triângulo ABC, a razão entre as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é 2. Se $\hat{A} = 120°$ e $\overline{AC} = 1\ cm$, então o lado $\overline{BC}$ mede, em cm,

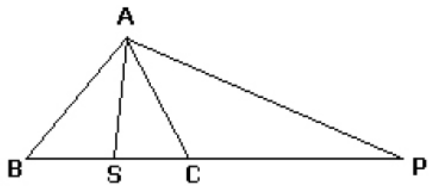
a) $\sqrt{7}$

b) $\sqrt{7} + 1$

c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{13} - 1$

50. (EEAR/2005)



Na figura, AS e AP são, respectivamente, bissetrizes internas e externa do triângulo ΔABC. Se $BS = 8m$ e $SC = 6m$, então SP mede, em m:

a) 48

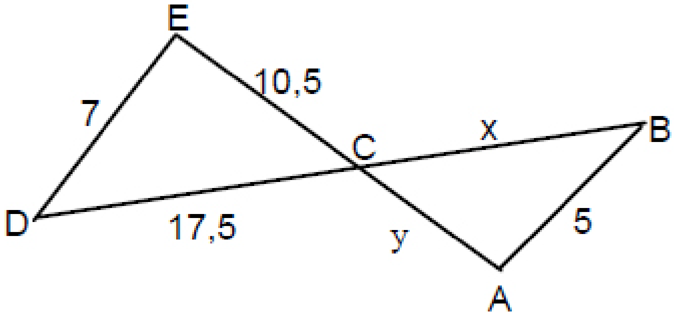
b) 42

c) 38

d) 32

51. (EEAR/2005)

Na figura, $DE//AB$. O valor de $x + y$ é:



a) $12,5$

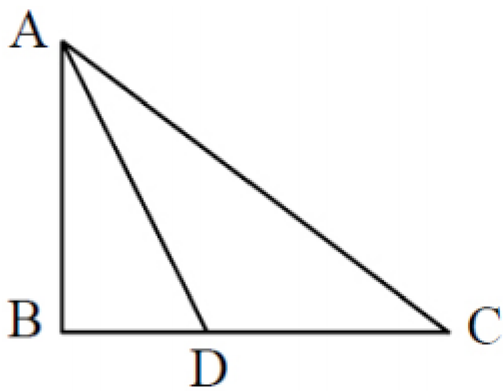
b) $17,5$

c) 20

d) 22

52. (EEAR/2005)

Seja o triângulo ABC retângulo em B



Se $\overline{AD}$ é bissetriz de $\widehat{A}$, $\overline{AB} = 6\ cm$, e $\overline{AC} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{DC}$, em cm, é

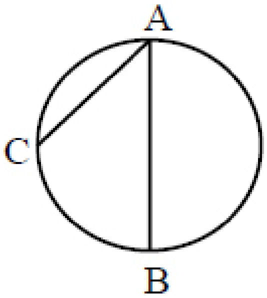
a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

53. (EEAR/2005)



Na figura, AB é diâmetro. Se o arco agudo AC mede $70°$, a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é

a) $50°$.

b) $55°$.

c) $60°$.

d) $65°$.

54. (EEAR/2005)

Num triângulo ABC, $BC = 10\ cm$ e $A\widehat{B}C = 60°$. Se esse triângulo está inscrito numa semicircunferência e BC é seu menor lado, então o raio dessa semicircunferência mede, em cm,

a) 5.

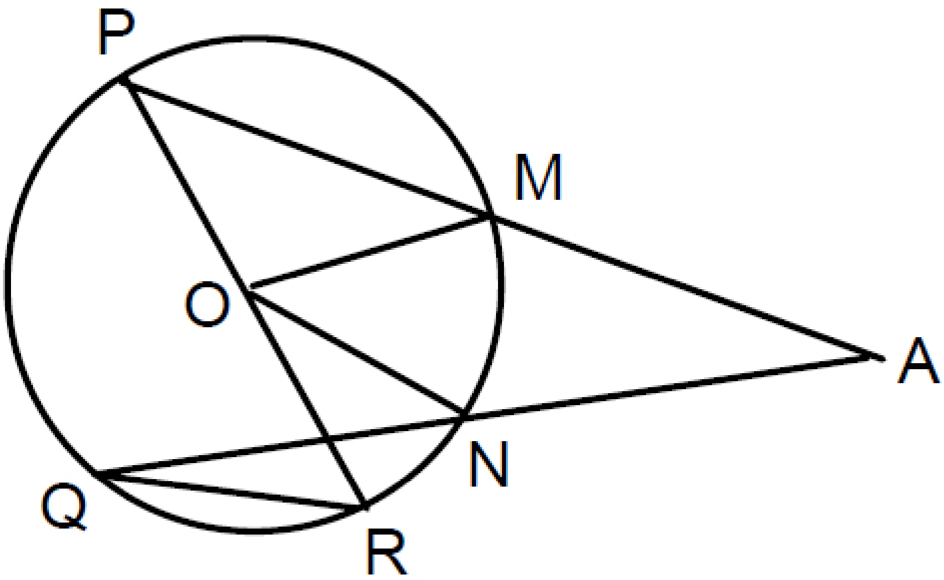
b) 10.

c) $10\sqrt{2}$.

d) $10\sqrt{3}$.

55. (EEAR/2004)

Na figura, O é o centro da circunferência, $M\hat{O}N = 62°$, e $P\widehat{R}Q = 65°$. O ângulo $M\hat{A}N$ mede



a) $34°$.

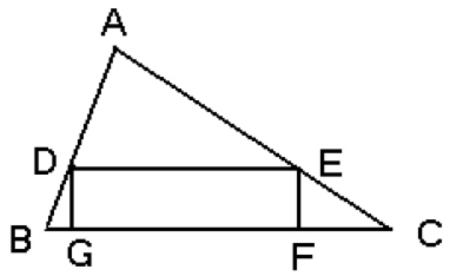
b) $36°$.

c) $38°$.

d) $40°$.

56. (EEAR/2004)

Na figura, o lado BC do triângulo ABC mede $12cm$, e a altura relativa ao lado BC mede $8cm$. Se $FG = 3EF$, então o perímetro do retângulo $DEFG$, em cm, é:



a) 30

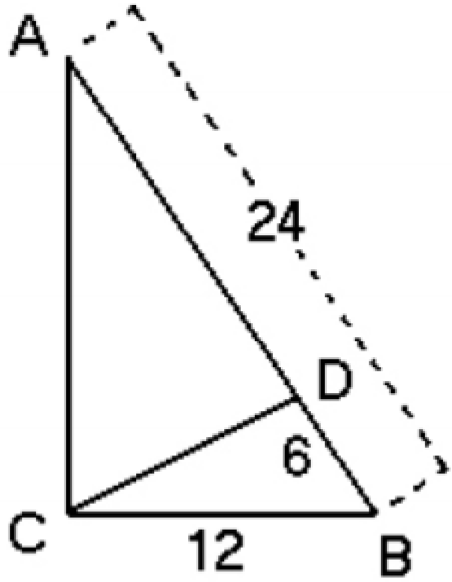
b) 28

c) $\frac{85}{3}$

d) $\frac{64}{3}$

57. (EEAR/2004)

Se os dados no triângulo ABC, retângulo em C, estão em cm, então o triângulo BCD é



a) **obtusângulo**.

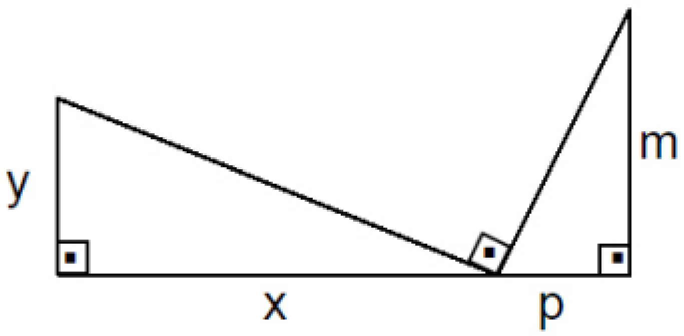
b) **retângulo**.

c) **isósceles**.

d) **equilátero**.

58. (EEAR/2004)

Na figura, os ângulos assinalados são retos. Assim, necessariamente, teremos



a) $\frac{x}{y} = \frac{p}{m}$

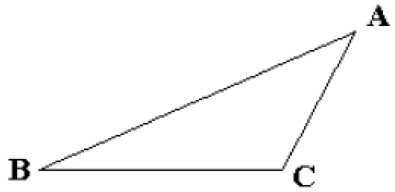
b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$

59. (EEAR/2003)

Na figura, as medidas dos lados $AB, AC\ e\ BC$ são, respectivamente, $40cm, 20cm\ e\ 30cm$.



A bissetriz interna desse triângulo, relativa ao vértice A, encontra o lado oposto no ponto P, e a bissetriz externa, relativa ao mesmo vértice, encontra o prolongamento do lado BC no ponto S. A medida do segmento PS, em cm, é igual a:

a) 30

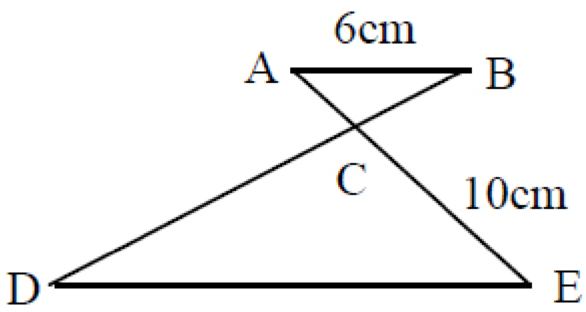
b) 35

c) 40

d) 45

60. (EEAR/2003)

Na figura os triângulos ABC e EDC são semelhantes.



Sabendo que $AC = x - 5$ e $DE = 2x + 4$, a soma $med(AC) + med(CE)$, em cm, vale

a) $10,3$

b) 18

c) 13

d) $23,3$

61. (EEAR/2003)

Numa circunferência de centro C e raio 20 cm, considere a corda $\overline{AB}$, cujo ponto médio é M. Se $\overline{CM} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{AB}$ é, em cm,

a) $15\sqrt{5}$

b) $20\sqrt{3}$

c) 15

d) 20

62. (EEAR/2003)

Se forem indicados por m, n, e p os três lados de um triângulo e por $\widehat{M}, \widehat{N}\ e\ \widehat{P}$, respectivamente, os ângulos opostos a esses lados, então sendo conhecidos os lados m e n e o ângulo $\widehat{N}$, qual das fórmulas abaixo poderá ser utilizada para calcular o valor do lado p?

a) $m^2 = n^2 + p^2 - 2 \cdot n \cdot p \cdot \cos(\widehat{M})$

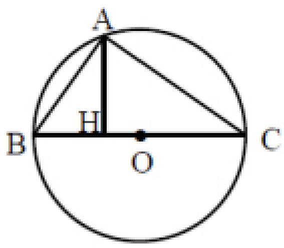
b) $n^2 = m^2 + p^2 + 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{P})$

c) $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{P})$

d) $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{N})$

63. (EEAR/2003)

O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O e de raio 13 cm



Sabendo que $\overline{AB} = 10\ cm$, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ mede, em cm, aproximadamente

a) 7,6

b) 8,4

c) 9,23

d) 10,8

64. (EEAR/2003)

Seja o triângulo ABC e D um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $\overline{AD} = 2\ cm$, $\overline{AB} = \sqrt{3}\ cm$, $\overline{BD} = \overline{DC}$ e $B\hat{A}C = 30°$, a medida, em cm, do lado $\overline{BC}$ é igual a

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{7}$

65. (EEAR/2003)

Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede $6\sqrt{3}\ cm$ e o ângulo $\hat{C}$, oposto ao lado $\overline{AB}$, mede $60°$. O raio da circunferência que circunscreve o triângulo, em cm, mede

a) 6

b) 12

c) $6\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{6}$

66. (EEAR/2003)

As medidas dos lados de um triângulo são iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O cosseno do menor ângulo desse triângulo é igual a

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{9}{16}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$

67. (EEAR/2003)

Se em uma circunferência uma corda mede $16\sqrt{2}\ cm$ e dista $6\sqrt{2}\ cm$ do centro, então a medida do raio dessa circunferência, em cm, é

a) $12\sqrt{2}$

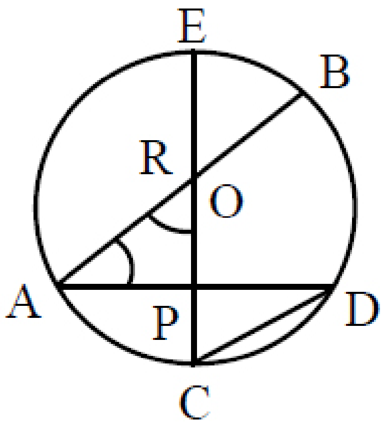
b) $10\sqrt{2}$

c) $8\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{2}$

68. (EEAR/2003)

Na figura, as cordas AB e CD são paralelas.



EC é um diâmetro e P é o ponto médio da corda AD. As medidas, em graus, dos ângulos $A\widehat{R}C$ e $P\widehat{A}R$ são, respectivamente, $4x - 14°$ e $5x - 13°$. As medidas dos ângulos do triângulo ΔPCD são

a) $42°, 57°, 81°$

b) $45°, 45°, 90°$

c) $46°, 45°, 90°$

d) $52°, 38°, 90°$

69. (EEAR/2003)

Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ encontra BC em D, e a circunferência circunscrita, em E. Sendo $AE = 9\ cm$ e $DE = 4\ cm$, então a medida EB, em cm, é

a) 6

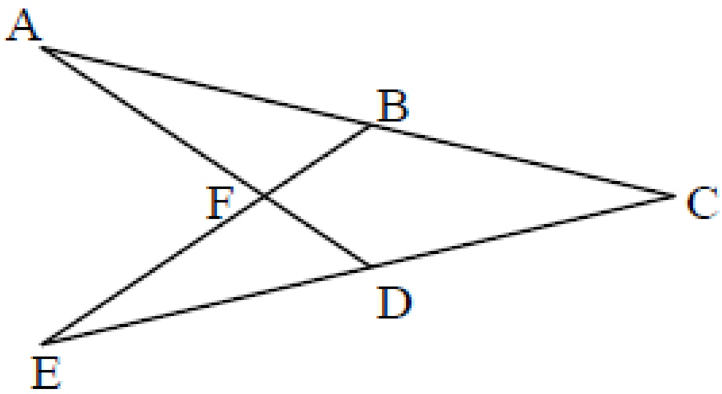
b) 5

c) $2\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{2}$

70. (EEAR/2002)

Na figura, se o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{E}$, então a relação falsa é



a) $CA \cdot CB = CE \cdot CD$

b) $\frac{CA-CE}{CE} = \frac{CD-CB}{CD}$

c) $\frac{CA+CD}{CE+CB} = \frac{CD}{CB}$

d) $\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$

71. (EEAR/2002)

Sejam: $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de centro O; $\overline{AR}$ uma corda, tal que $B\hat{A}R = 20°$; t, paralela a $\overline{AR}$, uma reta tangente à circunferência, em T. Sabendo que T e R são pontos da mesma semicircunferência em relação a AB, a medida, em graus, do ângulo agudo formado pela reta t e pela corda AT é igual a

a) 25

b) 35

c) 50

d) 70

72. (EEAR/2002)

Traçam-se duas cordas de uma mesma extremidade de um diâmetro de um círculo. Uma delas mede $9\ cm$, e sua projeção sobre o diâmetro mede $5,4\ cm$. O comprimento da outra corda, cuja projeção no diâmetro é de $9,6\ cm$ mede, em cm,

a) 10

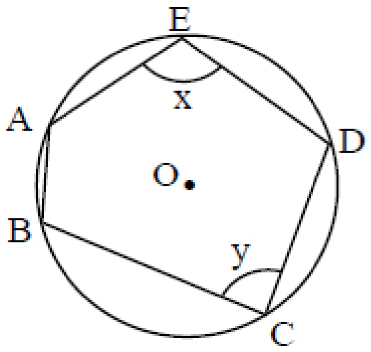
b) 12

c) 14

d) 15

73. (EEAR/2002)

Seja o pentágono $ABCDE$ da figura, inscrito numa circunferência de centro O. Se o ângulo $A\hat{O}B = 50°$, então $x + y$ vale, em graus



a) 216

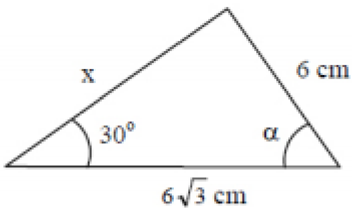
b) 205

c) 180

d) 105

74. (EEAR/2002)

Sendo α um ângulo agudo, o lado x do triângulo abaixo, em cm, mede



a) 6

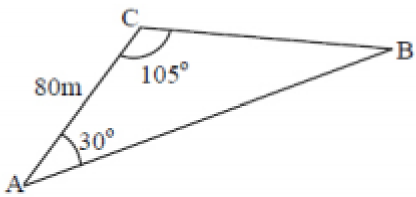
b) 10

c) 12

d) 15

75. (EEAR/2002)

De acordo com os dados da figura, a distância aproximada, em metros, entre os pontos A e B é



a) 100

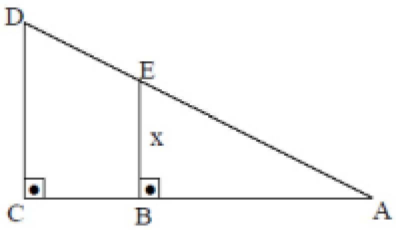
b) 102

c) 104

d) 108

76. (EEAR/2002)

Dada a figura abaixo, se $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{CD} = 4\text{ cm}$ e $\overline{AD} = 20\text{ cm}$, a medida, em cm, de x é



a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

77. (EEAR/2001)

Num círculo de centro C e raio R, tomam-se dois pontos A e B sobre a circunferência do círculo. Sendo o ângulo $\alpha = A\widehat{C}B$ e sabendo-se que o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento R, então pode-se afirmar:

a) $\alpha = 45°$

b) $\alpha = 90°$

c) $45° < \alpha < 50°$

d) $55° < \alpha < 60°$

78. (EEAR/2001)

Sejam P, Q e R pontos de uma circunferência de centro O, tais que P e Q estejam do mesmo lado em relação ao diâmetro que passa por R. Sabendo-se que $med(O\hat{R}P) = 10°$ e $med(R\hat{O}Q) = 80°$, tem-se que o ângulo $P\hat{Q}O$ mede:

a) $20°$

b) $40°$

c) $50°$

d) $60°$

79. (ESA/2019)

As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1, 2x$ e $x^2 - 5$ e estão em progressão aritmética, nessa ordem. Calcule o perímetro do triângulo:

a) 18

b) 25

c) 15

d) 20

e) 24

80. (ESA/2019)

Uma pequena praça tem o formato triangular, as medidas dos lados desse triângulo são $\sqrt{37}$m, 4m e 3m. Qual a medida do ângulo oposto ao maior lado?

a) 120°

b) 60°

c) 90°

d) 45°

e) 150°

81. (ESA/2011)

Um terreno de forma triangular tem frentes de 20 metros e 40 metros, em ruas que formam, entre si, um ângulo de $60°$. Admitindo-se $\sqrt{3} = 1,7$, a medida do perímetro do terreno, em metros, é

a) $94.$

b) $93.$

c) $92.$

d) $91.$

e) $90.$

82. (ESA/2007) [Adaptada]

Seja um ponto P pertencente a um dos lados de um ângulo de $60°$, distante $4,2\ cm$ do vértice. Qual é a distância, em cm, deste ponto à bissetriz do ângulo?

a) $2,2$

b) $2,1$

c) $2,0$

d) $2,3$

e) $2,4$

83. (ESA/2006)

O triângulo ABC retângulo em A e que $\angle ABC > \angle ACD$. A bissetriz interna de $\hat{A}$ intersepta o lado BC em D. Seja $HD \perp BC$ (H entre A e C). Nestas condições podemos afirmar que o ângulo HBD mede, em graus:

a) 35

b) 25

c) 45

d) 65

e) 55

84. (ESA/2004)

A soma dos lados de um triângulo ABC é 140cm. A bissetriz interna do ângulo A divide o segmento oposto BC em dois outros segmentos: 20cm e 36cm. As medidas dos lados AB e AC são, respectivamente:

a) 42cm e 42cm

b) 60cm e 24cm

c) 34cm e 50cm

d) 32cm e 52cm

e) 30cm e 54cm

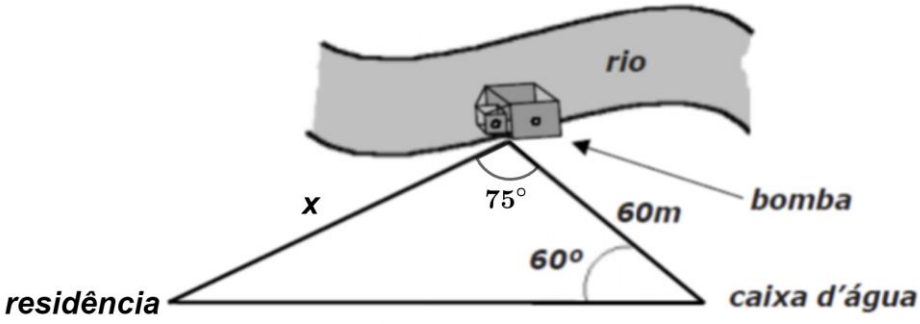
7.1. GABARITO

10. b
11. a
12. b
13. a
14. b
15. b
16. c
17. b
18. c
19. b
20. b
21. b
22. b
23. b
24. a
25. c
26. c
27. d
28. c
29. b
30. c
31. a
32. b
33. c
34. a
35. b
36. a
37. a
38. b
39. d
40. c
41. d
42. d
43. a
44. a
45. a
46. a
47. b
48. d
49. a
50. a
51. c
52. b
53. b
54. b
55. a
56. d
57. b
58. b
59. c
60. c
61. b
62. b
63. c
64. a
65. a
66. c
67. b
68. d
69. a
70. b
71. b
72. b
73. b
74. a
75. d
76. c
77. d
78. c
79. e
80. a
81. a
82. b
83. c
84. e

8. LISTA DE QUESTÕES COMENTADAS

10. (ESA/2021)

A água utilizada em uma residência é captada e bombeada do rio para uma caixa d`água localizada a 60 m de distância da bomba. Os ângulos formados pelas direções bomba – caixa d`água – residência é de $60°$ e residência – bomba – caixa d`água é de $75°$, conforme a figura abaixo. Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a residência, quantos metros de tubulação são necessários? Use $\sqrt{6} = 2,4$



a) 12,5 metros

b) 72 metros

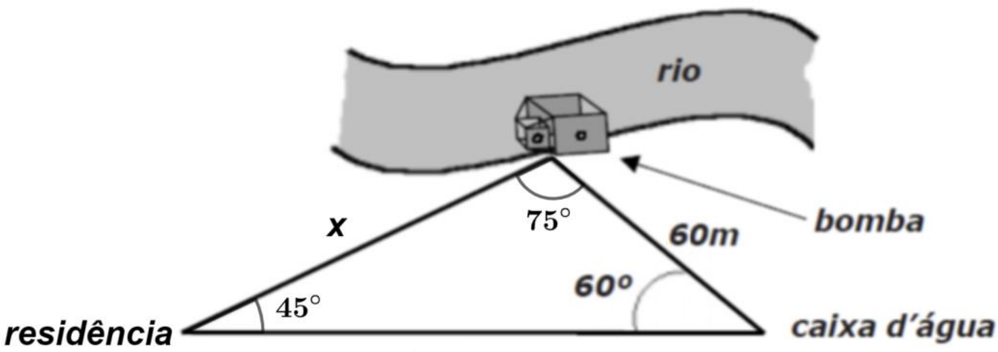
c) 35,29 metros

d) 21,25 metros

e) 28 metros

Comentários

Para resolver essa questão, precisamos aplicar a lei dos senos. Mas antes, perceba que o ângulo formado pelas direções caixa d`água – residência – bomba é $45°$, devido à soma dos ângulos internos do triângulo. Assim, temos:



Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen(60°)} = \frac{60}{sen(45°)}$$

$$x = 60 \cdot sen(60°) \cdot \frac{1}{sen(45°)} = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = 30\sqrt{6} = 30 \cdot 2{,}4 = 72\ m$$

Gabarito: B

---

11. (EEAR/2021)

Uma circunferência de 5 cm de raio possui duas cordas AB = 6 cm e BC = x cm. Se $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, então x é igual a

a) 8

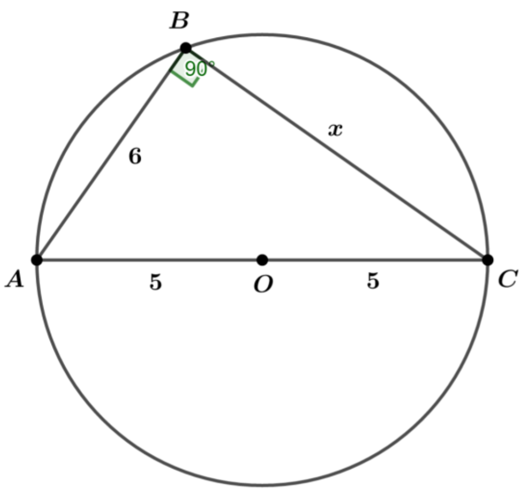
b) 7

c) 6

d) 5

Comentários

Temos a seguinte figura:



Note que pelo fato de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ serem perpendiculares, temos que o ΔABC é retângulo e está inscrito em uma circunferência de raio 5 cm. Com isso, temos que a hipotenusa desse triângulo é igual ao diâmetro da circunferência. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 6^2 + x^2$$

$$100 = 36 + x^2$$

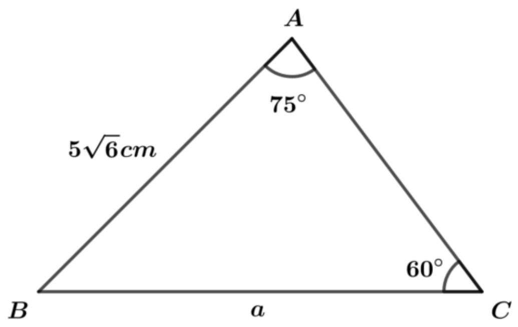
$$x^2 = 64$$

$$\therefore x = 8\ cm$$

Gabarito: A

12. (EEAR/2021)

Considerando a figura e que $sen\ 75°$ é igual a $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, calcula-se que a = 5 (______) cm.



a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) $1+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

Comentários

Podemos aplicar a lei dos senos:

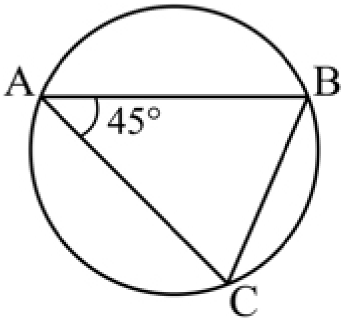
$$\frac{a}{sen75°} = \frac{5\sqrt{6}}{sen60°} \Rightarrow a = 5\sqrt{6} \cdot \frac{sen75°}{sen60°} = 5\sqrt{6} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 5\sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) = \frac{5\left(2+2\sqrt{3}\right)}{2} = 5\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Gabarito: B

13. (EEAR/2018)

O triângulo ABC está inscrito na circunferência. Se $BC = 8$, a medida do raio é



a) $4\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}$

c) 4

d) 2

Comentário:

Considere o triângulo ΔOBC, sendo O o centro da circunferência. Como $B\hat{O}C$ é ângulo central que enxerga o mesmo arco que o inscrito $B\hat{A}C$, temos que $B\hat{O}C = 90°$ e daí ΔOBC é retângulo em O. Logo pelo teorema de Pitágoras $OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow 2r^2 = 8^2 \therefore r = 4\sqrt{2}$.

Gabarito: "a".

---

14. (EEAR/2018)

Num triângulo ABC, são dados $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 30°$ e $\overline{AC} = 6\ cm$. Então $\overline{BC} =$ ____cm.

a) $4\sqrt{3}$

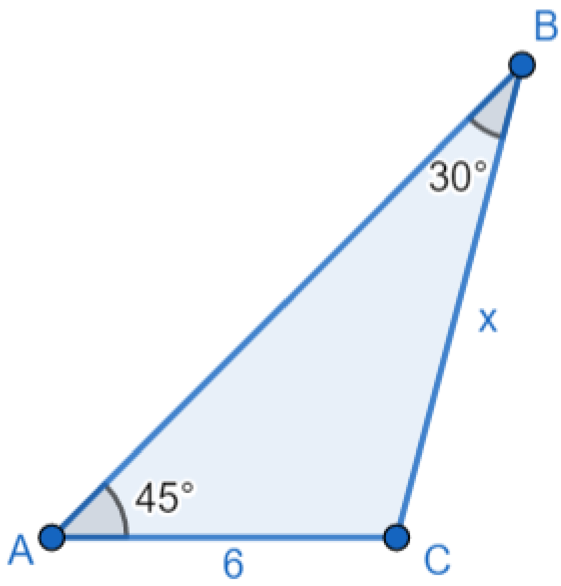
b) $6\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Usaremos a Lei dos Senos

$$\frac{\overline{AC}}{sen(\hat{B})} = \frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{sen(30°)} = \frac{\overline{BC}}{sen(45°)}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{1/2} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{2}/2}$$

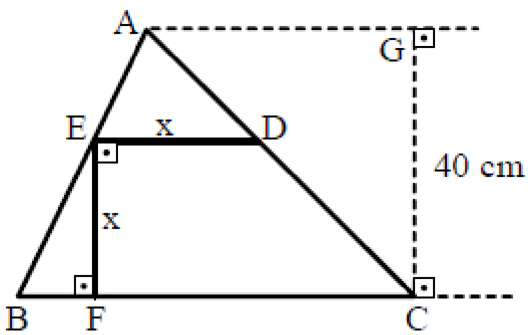
$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{6}{1/2} \cdot \sqrt{2}/2 = 6\sqrt{2}$$

Gabarito: "b"

---

15. (EEAR/2018)

Na figura, se $BC = 60cm$, a medida de DE, em cm, é



a) 20

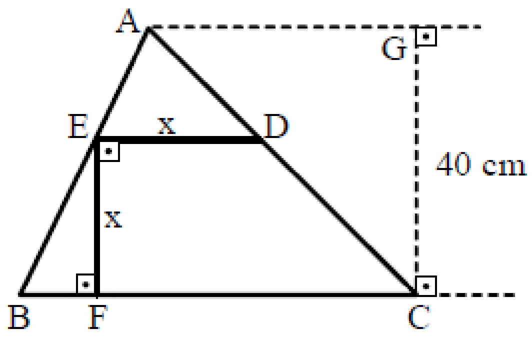
b) 24

c) 30

d) 32

Comentários

Com base na seguinte figura presente no enunciado, temos



Perceba a relação de semelhança dos triângulos ΔABC e ΔAED:

A altura do triângulo ΔABC em ralação a BC é $40\ cm$.

No triângulo ΔAED observe que a altura em relação a ED vale $40 - x$

Portanto obtemos a relação de proporcionalidade a seguir:

$$\frac{h_{ABC}}{BC} = \frac{h_{AED}}{ED}$$
$$\Rightarrow \frac{40}{60} = \frac{40 - x}{x}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{40 - x}{x}$$

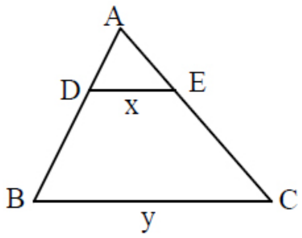
$$2x = 120 - 3x$$
$$5x = 120$$
$$x = 24$$

Portanto o valor de $DE = x = 24$

Gabarito: "b".

16. (EEAR/2017)

Seja um triângulo ΔABC, conforme a figura.



Se D e E são pontos, respectivamente, de AB e AC, de forma que $AD = 4, DB = 8, DE = x, BC = y$, e se $DE//BC$, então

a) $y = x + 8$

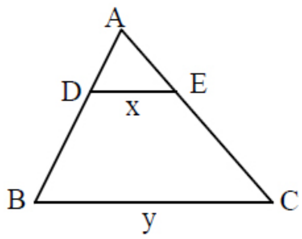
b) $y = x + 4$

c) $y = 3x$

d) $y = 2x$

Comentários

De acordo com a seguinte figura presente no enunciado, obtemos uma relação de proporcionalidade entre os triângulos ΔADE e ΔABC:



Pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{4}{8+4} = \frac{x}{y}$$

$$4y = 12x$$

$$y = 3x$$

Gabarito: "c".

---

17. (EEAR/2017)

Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo $30°$, seu lado oposto a esse ângulo mede

a) $\frac{R}{2}$

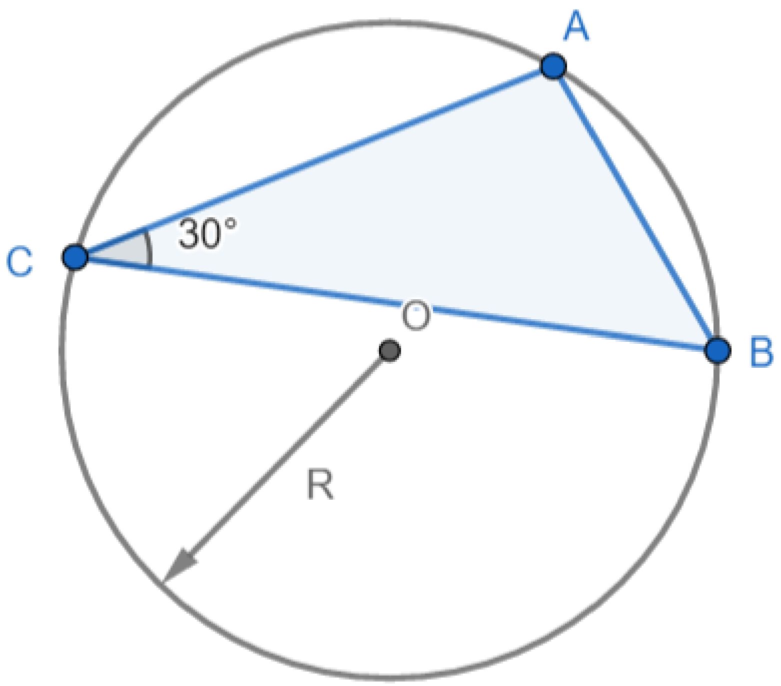
b) R

c) $2R$

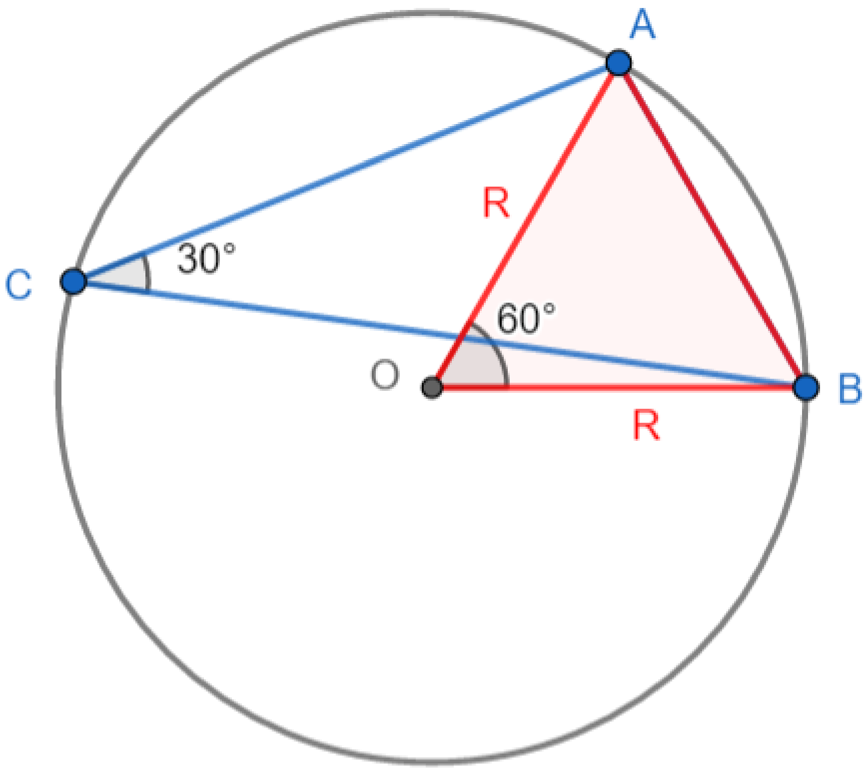
d) $\frac{2R}{3}$

Comentários

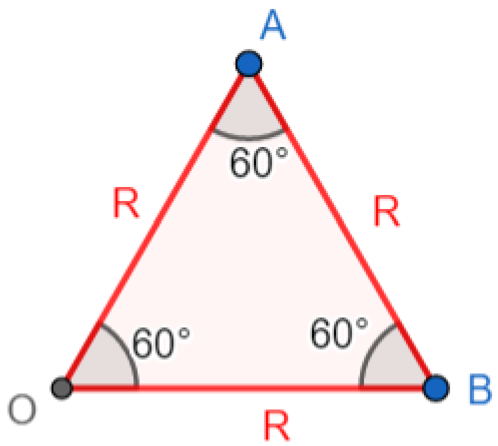
De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Utilizando o conceito de ângulo central, obtemos:



Perceba que o triângulo que representa o ângulo central é um triângulo isósceles de $60°$, então os ângulos adjacentes também medem $60°$, caracterizando-se assim, um triângulo equilátero.



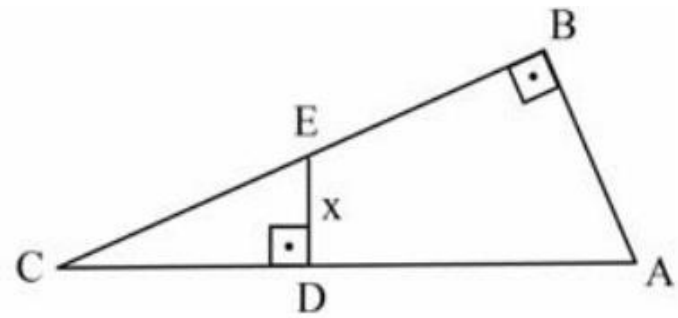
Portando, o lado oposto ao ângulo central, também mede R.

Gabarito: “b”.

---

18. (EEAR/2017)

Conforme a figura, os triângulos ABC e CDE são retângulos.



Se $\overline{AB} = 8\ cm$, $\overline{BC} = 15\ cm$ e $\overline{CD} = 5\ cm$, então a medida de $\overline{DE}$, em cm, é

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $\frac{1}{4}$

Comentários

Perceba que os triângulos CDE e CBA são semelhantes.

$$\Rightarrow \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{8}{15}$$

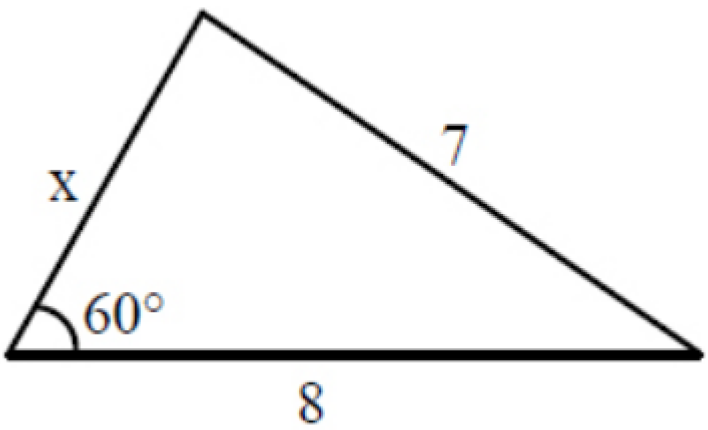
$$\Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

Gabarito: "c".

---

19. (EEAR/2017)

Se o perímetro do triângulo abaixo é maior que 18, o valor de x é



a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

Comentários

Do enunciado:

$$7 + 8 + x > 18$$

$\Rightarrow x > 3 \ \ (1)$

Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$(7)^2 = (8)^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot (8) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + x^2 - 16 \cdot x \cdot (\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau pelo método de Bhaskara, obtemos:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (15)}}{2 \cdot (1)}$$

$$\Rightarrow x = 3 \ ou \ x = 5$$

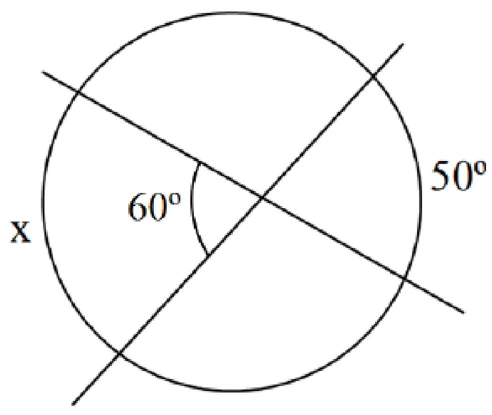
Considerando a desigualdade obtida em (1), conclui-se que o único resultado que satisfaz o problema é $x = 5$.

Gabarito: "b".

---

20. (EEAR/2016)

Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.



A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

a) $40°$

b) $70°$

c) $110°$

d) $120°$

Comentário:

Sabe-se que a medida do ângulo determinado por duas cordas é a média aritmética dos arcos internos por elas determinados. Portanto,

$$60° = \frac{1}{2} \cdot (x + 50°) \Rightarrow x = 70°.$$

Gabarito: "b".

---

21. (EEAR/2016)

Um triângulo acutângulo ABC tem a medida do ângulo $\hat{A}$ igual a 30°. Sabe-se que os lados adjacentes ao ângulo $\hat{A}$ medem $\sqrt{3}$ cm e 4 cm. A medida, em cm, do lado oposto ao referido ângulo é

a) $\sqrt{3}$

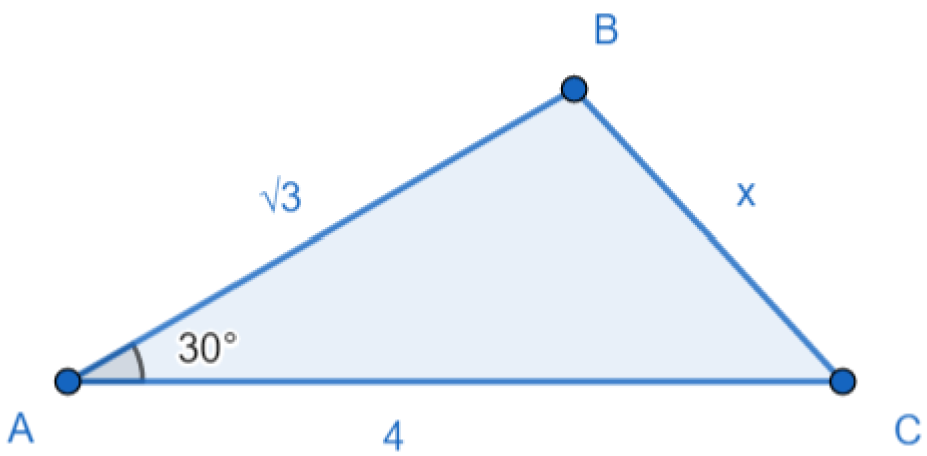
b) $\sqrt{7}$

c) $5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{19 - 4\sqrt{3}}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (4)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right) \cdot (4) \cdot \cos(30°)$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 3 + 16 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 19 - 4 \cdot 3 = 19 - 12 = 7$$

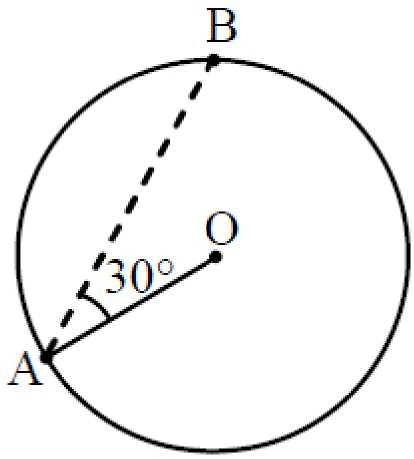
$$\Rightarrow \ x = \sqrt{7}$$

Gabarito: "b".

---

22. (EEAR/2015)

O ponto O é o centro da circunferência da figura, que tem $3m$ de raio e passa pelo ponto B. Se o segmento AB forma um ângulo de $30°$ com o raio OA, então a medida de AB, em m, é



a) $6\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2}$

Comentário:

Seja M o ponto médio da corda AB. Então o triângulo ΔAMO é retângulo em M. Portanto, o cosseno do ângulo $O\hat{A}M$ é dado por:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \cos O\hat{A}M = \frac{AM}{OA} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ m$$

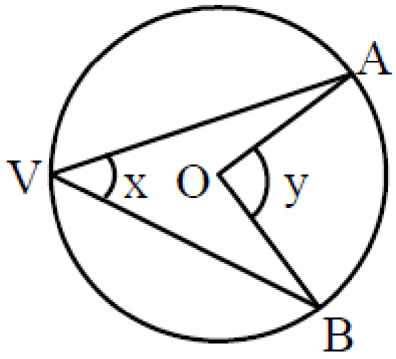
Logo $AB = 2 \cdot AM = 3\sqrt{3}\ m$.

Gabarito: "b".

---

23. (EEAR/2015)

Na circunferência da figura, O é o seu centro e V, A e B são três de seus pontos.



Se x e y são, respectivamente, as medidas dos ângulos AOB e BVA, então sempre é correto afirmar que

a) $x = 2y$.

b) $y = 2x$.

c) $x + y = 90°$.

d) $x - y = 90°$.

Comentário:

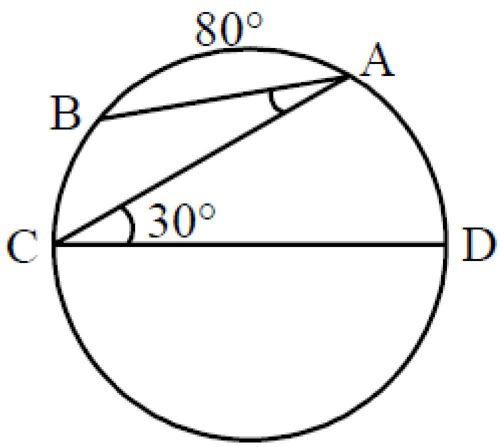
x é um ângulo inscrito na circunferência que enxerga o mesmo arco que o ângulo central y, donde $y = 2x$.

Gabarito: "b".

---

24. (EEAR/2015)

Na figura, A e B são pontos da circunferência e CD é seu diâmetro.



Assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede

a) $20°$.

b) $30°$.

c) $50°$.

d) $60°$.

Comentário:

Vamos calcular o comprimento do arco agudo BC. Como $A\hat{C}D$ é ângulo inscrito, o arco AD vale o dobro, isto é, AD vale $60°$. Como o segmento CD é diâmetro, o arco CD vale $180°$. Portanto:

$$180° = CD = CB + BA + AD = CB + 80° + 60° \therefore CB = 40°.$$

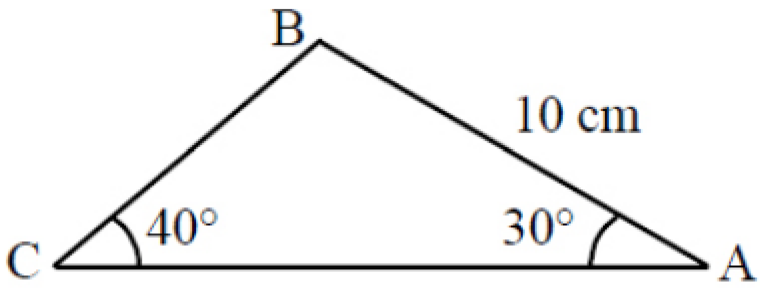
Portanto o ângulo inscrito $C\hat{A}B = 20°$, a metade do valor do arco.

Gabarito: "a".

---

25. (EEAR/2013)

Considerando $sen(40°) = 0,6$, o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, mede, em cm, aproximadamente



a) 6,11

b) 7,11

c) 8,33

d) 9,33

Comentários

Usando a Lei dos Senos:

$$\frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})} = \frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{sen(40°)} = \frac{\overline{BC}}{sen(30°)}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{0,6} = \frac{\overline{BC}}{1/2}$$

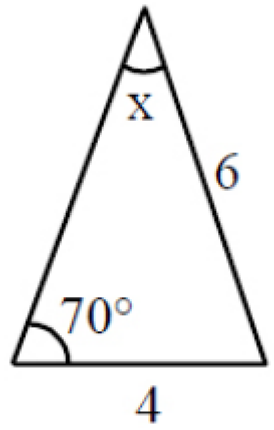
$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{10}{0{,}6} \cdot \frac{1}{2} \approx 8{,}33$$

Gabarito: “c”.

---

26. (EEAR/2013)

Considere as medidas indicadas na figura e que $sen(70°) = 0,9$. Pela “Lei dos Senos”, obtém-se $sen(x) =$ ____.



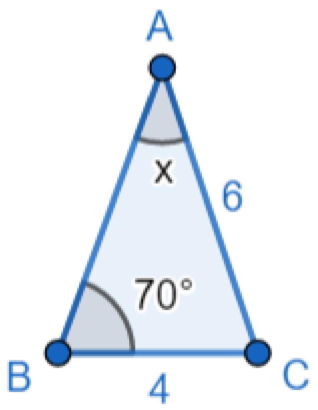
a) 0,4

b) 0,5

c) 0,6

d) 0,7

Comentários



Aplicando a Lei dos Senos, obtemos:

$$\frac{\overline{AC}}{sen(\hat{B})} = \frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{sen(70°)} = \frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{0{,}9} = \frac{4}{sen(x)}$$

$$\Rightarrow sen(x) = \frac{4 \cdot 0{,}9}{6} = 0{,}6$$

Gabarito: "c".

---

27. (EEAR/2012)

O perímetro de um triângulo equilátero de altura h = $\sqrt{3}$ **é ___m.**

a) 3

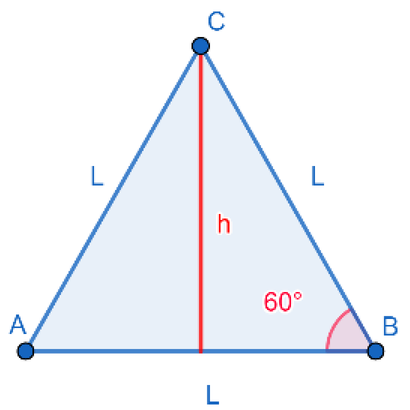
b) 4

c) 5

d) 6

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Perceba que no triângulo equilátero ΔABC temos no ângulo $\hat{B} = 60°$ a seguinte relação:

$$sen(60°) = \frac{h}{L}$$

$$L = \frac{h}{sen(60°)} \Longrightarrow L = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

Portanto, temos que a soma do valor dos lados, o perímetro, vale

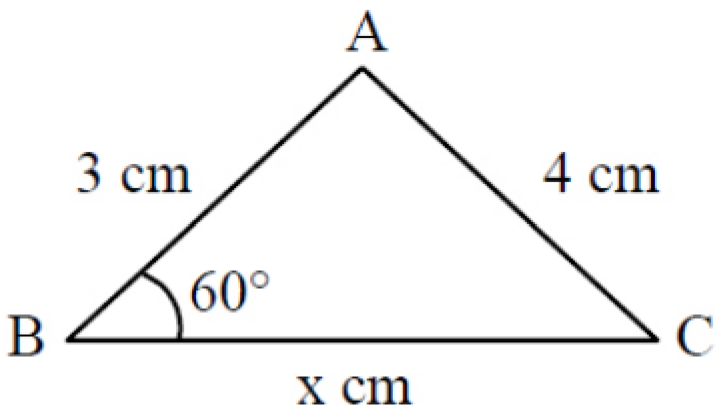
$$P = L + L + L = 3L$$
$$\Longrightarrow P = 3 \cdot 2 = 6$$

Gabarito: “d”.

---

28. (EEAR/2012)

Considerando $\sqrt{37} = 6$, o valor de x na figura é



a) 2,5

b) 3,5

c) 4,5

d) 5,5

Comentários

Aplicaremos a Lei Dos Cossenos:

$$(4)^2 = x^2 + (3)^2 - 2 \cdot (3) \cdot (x) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow 16 = x^2 + 9 - 6 \cdot \mathrm{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$16 - 9 = x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3 \cdot x - 7 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau pelo método de Bhaskara, obtemos:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-7)}}{2 \cdot (1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Mas, segundo o enunciado, devemos considerar que $\sqrt{37} = 6$, então:

$$x = \frac{3 \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4{,}5 \; ou \; x = -1{,}5 \; (não \; convém, pois \; seria \; uma \; medida \; negativa)$$

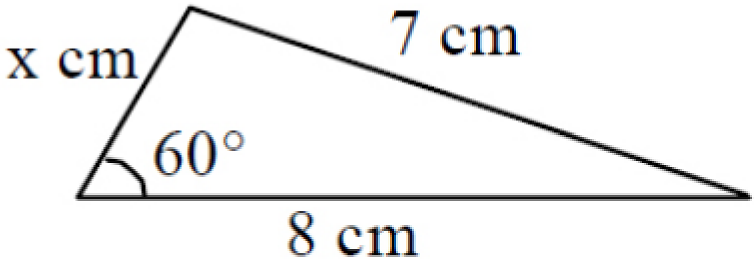
$$x = 4{,}5$$

Gabarito: “c”.

---

29. (EEAR/2011)

No triângulo, o menor valor que x pode assumir é



a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

Comentários

Aplicaremos a Lei Dos Cossenos:

$$(7)^2 = x^2 + (8)^2 - 2 \cdot (8) \cdot (x) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow 49 = x^2 + 64 - 16 \cdot \mathrm{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$49 - 64 = x^2 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 8 \cdot x + 15 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau pelo método de Bhaskara, obtemos:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (15)}}{2 \cdot (1)}$$

$$x = 5 \; ou \; x = 3$$

O menor valor possível é $x = 3$.

Gabarito: “b”.

---

30. (EEAR/2011)

Um triângulo, inscrito em uma circunferência, tem um ângulo de $30°$ oposto a um lado de 10 cm. O diâmetro da circunferência, em cm, é

a) 10

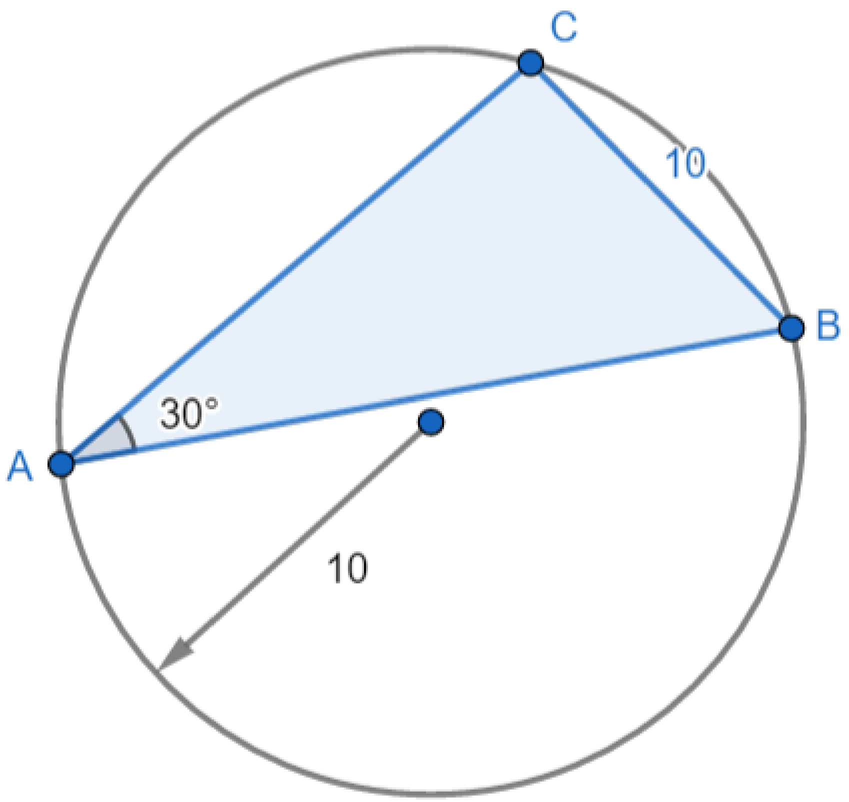
b) 15

c) 20

d) 25

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Usaremos a Lei dos Senos

$$\frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})} = \frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})} = \frac{\overline{AC}}{sen(\hat{B})} = 2 \cdot R = D$$

Em que D é o diâmetro da circunferência

$$\frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})} = D$$

$$\Rightarrow \frac{10}{sen(30°)} = \frac{10}{1/2} = 20$$

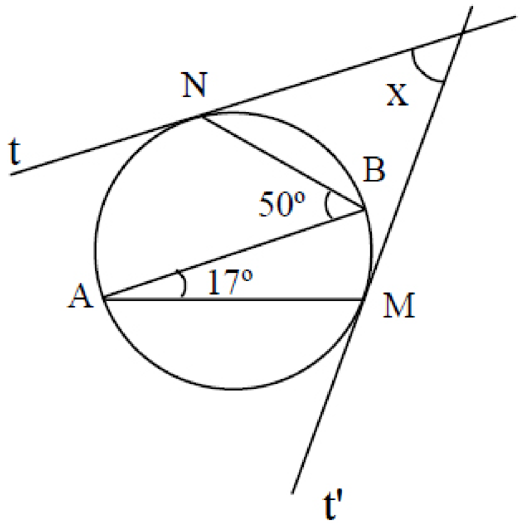
$$\Rightarrow D = 20cm$$

Gabarito: "c".

---

31. (EEAR/2010)

Sejam AB o diâmetro da circunferência, e as retas t e t' tangentes a ela nos pontos N e M, respectivamente.



O valor de x é

a) $66°$.

b) $60°$.

c) $55°$.

d) $50°$.

Comentário:

Podemos calcular quanto valem os arcos determinados pelos pontos A, B, N e M, e a partir deles determinar a medida do ângulo externo x, dado pela seguinte fórmula de subtração de arcos:

$$x = \frac{1}{2}(\widehat{MAN} - \widehat{NBM})$$

Temos que o arco agudo $\widehat{AN}$ vale o dobro do ângulo inscrito $A\hat{B}N$, isto é, $\widehat{AN} = 100°$. Como AB é diâmetro, concluímos que o suplementar de $\widehat{AN}$, $\widehat{NB}$, vale $\widehat{NB} = 180° - 100° = 80°$.

Da mesma forma o arco agudo $\widehat{BM}$ vale o dobro do ângulo inscrito $B\hat{A}M$, donde $\widehat{BM} = 34°$. O suplementar vale $\widehat{MA} = 180° - 34° = 146°$.

Logo, $\widehat{MAN} = \widehat{MA} + \widehat{AN} = 146° + 100° = 246°$ e $\widehat{NBM} = \widehat{NB} + \widehat{BM} = 80° + 34° = 114°$. Portanto,

$$x = \frac{1}{2} \cdot (246° - 114°) = 66°.$$

Gabarito: “a”.

---

32. (EEAR/2010)

Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3m, 5m e 7m. A medida da projeção do menor dos lados sobre a reta que contém o lado de 5m é, em m,

a) 2,5

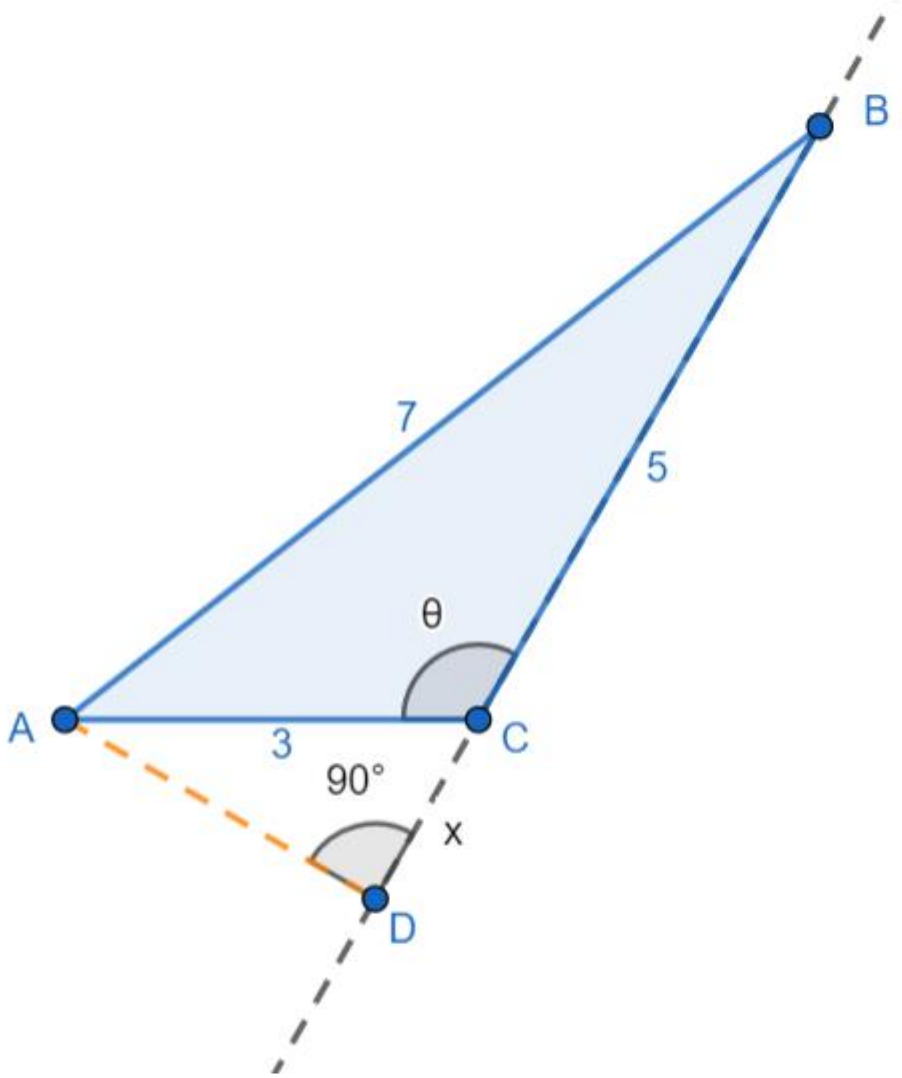
b) 1,5

c) 2

d) 1

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Obs: Como propriedade, o maior lado é oposto ao maior ângulo, portanto o lado oposto ao ângulo obtuso, necessariamente, é o lado de 7 cm.

Aplicaremos a Lei Dos Cossenos:

$$(7)^2 = (3)^2 + (5)^2 - 2 \cdot (3) \cdot (5) \cdot \cos(\theta)$$

$$49 = 9 + 25 - 30 \cdot \cos(\theta)$$

$$30 \cdot \cos(\theta) = -15$$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

De acordo com o ciclo trigonométrico, o ângulo cujo cosseno equivale a $-\frac{1}{2}$ é o ângulo de $120°$.

$$\theta = 120°$$

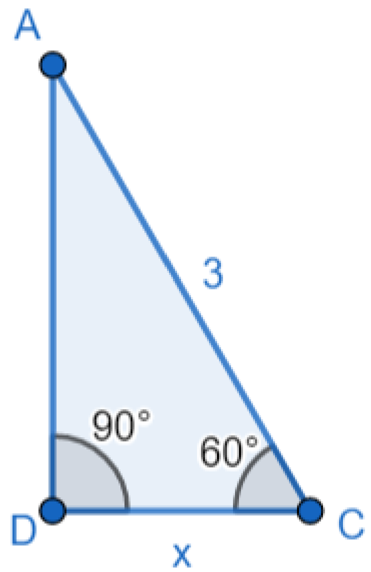
O ângulo A$\hat{C}D$ é ângulo suplementar de θ, então:

$$A\hat{C}D + \theta = 180°$$

$$A\hat{C}D + 120° = 180°$$

$$A\hat{C}D = 60°$$

Agora estudaremos o triângulo ACD



Aplicando a definição de cosseno no ângulo de $60°$, obtemos:

$$\cos(60°) = \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot x = 3$$

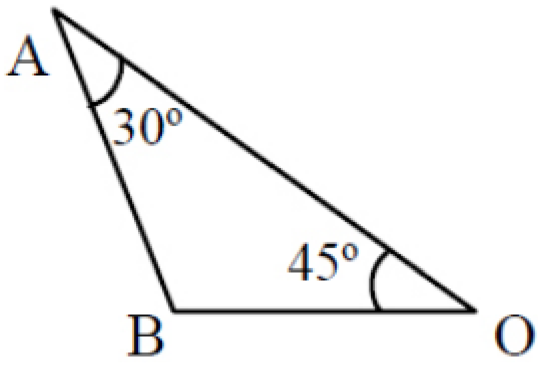
$$x = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Gabarito: "b".

---

33. (EEAR/2010)

No triângulo AOB, $\overline{OB} = 5\ cm$; então AB, em cm, é igual a



a) 6

b) 8

c) $5\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{3}$

Comentários

Trata-se de uma aplicação direta da Lei Dos Senos:

$$\frac{\overline{OB}}{sen(\hat{A})} = \frac{\overline{AB}}{sen(\hat{O})}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{sen(30°)} = \frac{\overline{AB}}{sen(45°)}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{1/2} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}/2}$$

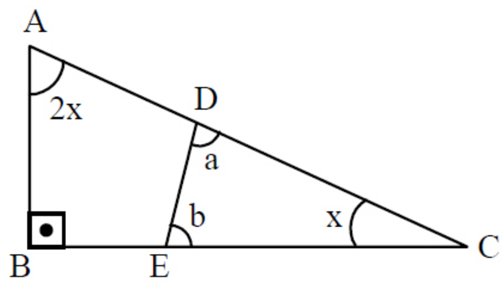
$$\Rightarrow \overline{AB} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Gabarito: "c"

---

34. (EEAR/2010)

Se o triângulo CDE é semelhante ao triângulo ABC, o valor de $|a - b|$ é:



a) $30°$

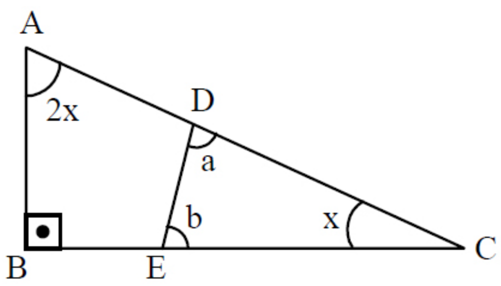
b) $45°$

c) $60°$

d) $90°$

Comentários

De acordo com figura do enunciado a seguir:



Sabemos que o triângulo $\boldsymbol{\Delta ABC}$é retângulo, logo

$$\mathbf{90° + 2x + x = 180°}$$
$$\mathbf{3x = 90°}$$
$$\mathbf{x = 30°}$$

Do enunciado que o triângulo $\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta CDE}$, dessa semelhança supomos que o ângulo $\boldsymbol{a}$ é congruente $\boldsymbol{B\hat{A}C}$ e ângulo $\boldsymbol{b}$ é congruente $\boldsymbol{A\hat{B}C}$, portanto $\begin{cases} \boldsymbol{a = 2x = 60°} \\ \boldsymbol{b = 90°} \end{cases}$

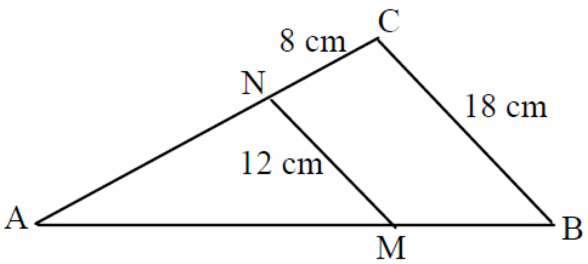
Portanto $|\boldsymbol{a - b}| = |\mathbf{60° - 90°}| = \mathbf{30°}$

Gabarito: "a".

---

35. (EEAR/2009)

Na figura, $\overline{MN} // \overline{BC}$.



Se $AB = 30cm$, então $\overline{MB}$ mede, em cm,

a) 5

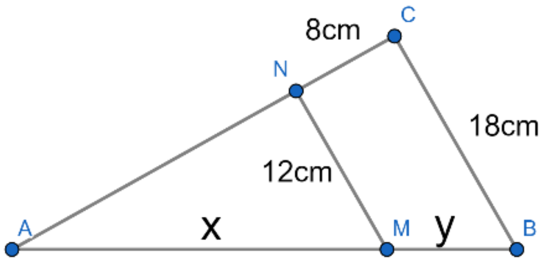
b) $\mathbf{10}$

c) $\mathbf{15}$

d) $\mathbf{20}$

Comentários

De acordo com figura do enunciado a seguir:



Pela semelhança $\Delta ABC \sim \Delta AMN$

$$\frac{x}{12} = \frac{30}{18}$$
$$x = 20\ cm$$

Sabendo que $AB = 30 = x + y$, como $x = 20\ cm$, temos $y = 10\ cm$.

$$y = \overline{MB} = 10\ cm$$

Gabarito: "b".

---

36. (EEAR/2009)

Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 8 cm, e formam um ângulo de $60°$. A medida do terceiro lado desse triângulo, em cm, é

a) $\mathbf{2\sqrt{13}}$

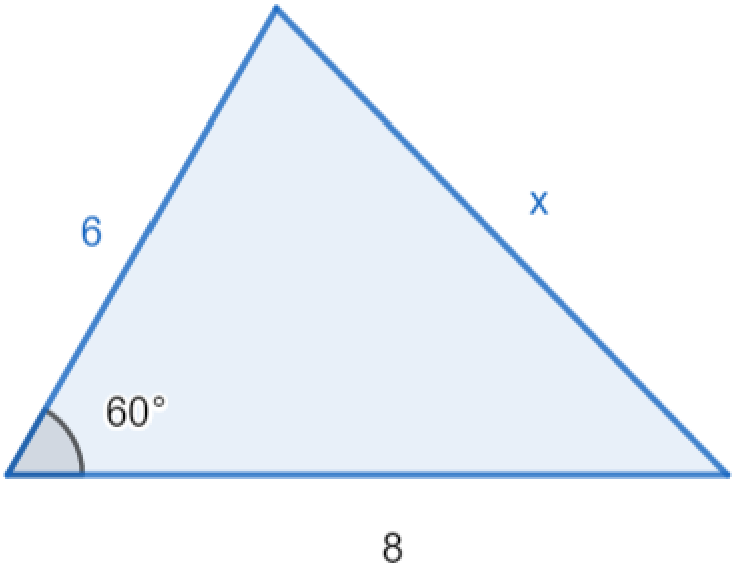
b) $\mathbf{3\sqrt{17}}$

c) $\mathbf{\sqrt{23}}$

d) $\mathbf{\sqrt{29}}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$x^2 = (6)^2 + (8)^2 - 2 \cdot (6) \cdot (8) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 100 - 48 = 52$$

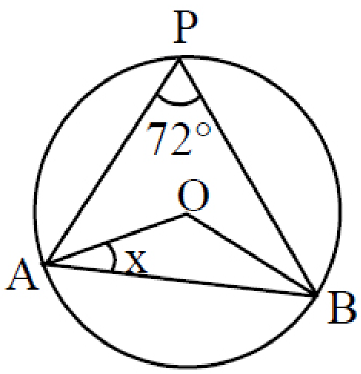
$$\Rightarrow \ x = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Gabarito: “a”

---

37. (EEAR/2009)

Na figura, O é o centro da circunferência.



O valor de x é

a) $18°$.

b) $20°$.

c) $22°$.

d) $24°$.

Comentário:

O ângulo $A\hat{O}B$ é central e enxerga o mesmo arco que o ângulo inscrito $A\hat{P}B$, donde

$A\hat{O}B = A\hat{P}B \cdot 2 = 144°$. Como $OA = OB =$ raio da circunferência, o ΔOAB é isósceles, donde

$$2x + 144° = O\hat{A}B + O\hat{B}A + A\hat{O}B = 180° \therefore x = \frac{1}{2} \cdot (180° - 144°) = 18°.$$

Gabarito: "a".

---

38. (EEAR/2009)

Sejam uma circunferência de centro O e um ponto A exterior a ela. Considere AT um segmento tangente à circunferência, em T. Se o raio da circunferência mede $4\ cm$ e $AT = 8\sqrt{2}\ cm$, então a medida de AO, em cm, é

a) 10.

b) 12.

c) 13.

d) 15.

Comentário:

Pitágoras no triângulo AOT, retângulo em T por ser um ponto de tangência.

$$AO^2 = AT^2 + OT^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 + 4^2 = 144 \therefore AO = 12.$$

Gabarito: "b".

---

39. (EEAR/2008)

Dado um triângulo qualquer, é FALSO afirmar que

a) uma de suas alturas pode coincidir com um de seus lados.

b) suas alturas podem interceptar-se num ponto externo a ele.

c) o incentro é o centro da circunferência nele inscrita.

d) o circuncentro é o encontro das suas medianas.

Comentários

Analisando cada alternativa:

a) (V) No caso do triângulo retângulo, a altura do cateto coincide com o outro cateto.

b) (V) Basta ser um triângulo obtusângulo para as alturas se coincidirem no exterior, formando um triângulo com ortocentro exterior.

c) (V) Correto pela definição de incentro.

d) (F) O circuncentro é caracterizado pelo encontro das mediatrizes.

Gabarito: "d".

---

40. (EEAR/2008)

No triângulo, cujos lados medem 5 cm, 10 cm e 6 cm, o maior ângulo tem cosseno igual a

a) $\frac{7}{10}$

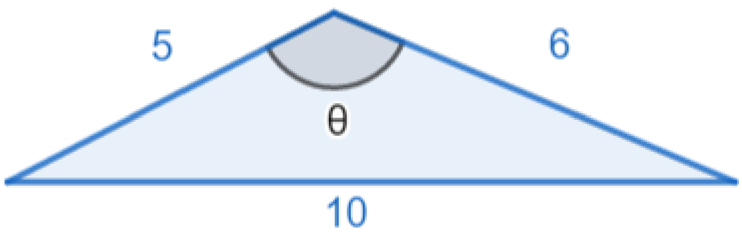
b) $\frac{9}{20}$

c) $-\frac{13}{20}$

d) $-\frac{8}{10}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Em triângulos, o maior ângulo é oposto ao maior lado. Logo, aplicaremos a Lei Dos Cossenos relativa ao lado de 10 cm:

$$(10)^2 = (5)^2 + (6)^2 - 2 \cdot (5) \cdot (6) \cdot \cos(\theta)$$

$$100 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos(\theta)$$

$$60 \cdot \cos(\theta) = -39$$

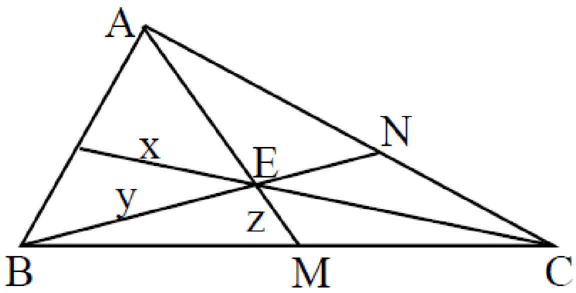
$$\cos(\theta) = -\frac{13}{20}$$

Gabarito: "c"

---

41. (EEAR/2007)

Sendo E o baricentro do triângulo ABC, $AE = 10cm$, $EN = 6cm$, e $CE = 14cm$, o valor, em cm, de $x + y + z$ é:



a) 18.

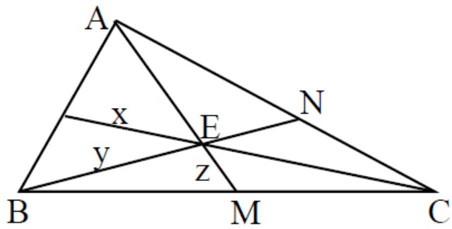
b) 20.

c) 22.

d) 24.

Comentários

Sabe-se que em qualquer triângulo, o baricentro divide as retas medianas na razão de 2:1, de modo que triângulo do enunciado:



Portanto temos as seguintes relações:

$$\frac{EC}{x} = \frac{2}{1}, \qquad \frac{y}{EN} = \frac{2}{1}, \qquad \frac{AE}{z} = \frac{2}{1}$$

$$x = \frac{EC}{2}, \qquad EN = 2y, \qquad z = \frac{AE}{2}$$

$$x = \frac{14}{2}, \qquad EN = 2 \cdot 6, \qquad z = \frac{10}{2}$$

$$x = 7, \qquad EN = 12, \qquad z = 5$$

Portanto: $x + y + z = 24$

Gabarito: “d”.

42. (EEAR/2007)

Dois triângulos são semelhantes, e uma altura do primeiro é igual aos $\frac{2}{5}$ de sua homóloga no segundo. Se o perímetro do primeiro triângulo é $140cm$, então o perímetro do segundo, em cm, é:

a) 250.

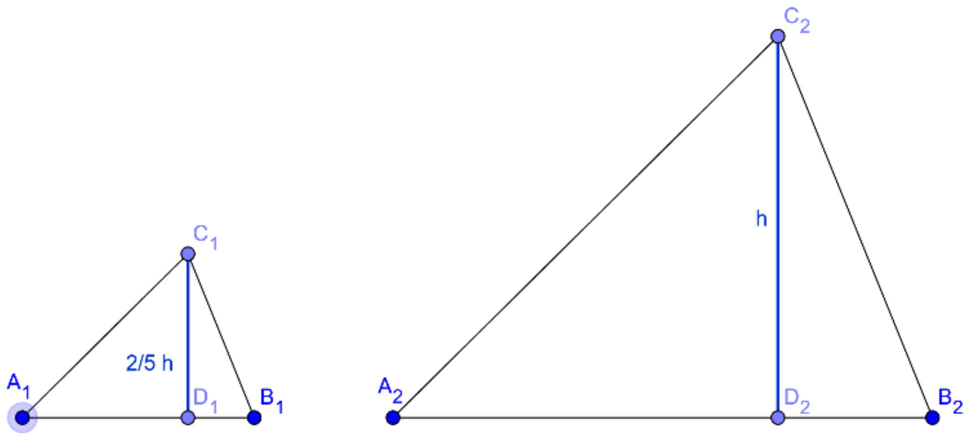
b) 280.

c) 300.

d) 350.

Comentários

De acordo com o enunciado temos a seguinte figura:



Como os triângulos são semelhantes, sabemos que há uma proporcionalidade direta entre os seus lados, determinado pelo coeficiente de proporcionalidade. Temos que a razão de proporção entre os dois triângulos é:

$$k = \frac{l_2}{l_1} = \frac{h}{\frac{2h}{5}} = \frac{5}{2}$$

Como o perímetro é a soma dos lados, esse também segue a proporcionalidade, portanto

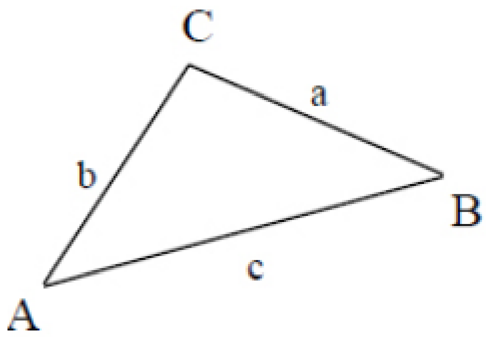
$$k = \frac{P_2}{P_1} = \frac{5}{2}$$
$$P_2 = \frac{5}{2}P_1 = \frac{5}{2}140 = 350$$
$$P_2 = 350$$

Gabarito: "d".

---

43. (EEAR/2007)

Considere o triângulo ABC. Assinale a alternativa FALSA.



a) $sen\,\widehat{B} = \frac{b}{a}$ e $cos\,\widehat{B} = \frac{c}{a}$

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\widehat{A}$

c) $\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{b}{sen(\widehat{B})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})}$

d) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\widehat{B}$

Comentários

a) O triângulo não é retângulo de hipotenusa $\overline{BC} = a$. **FALSA**

b) Aplicação da lei dos cossenos relativa ao lado $\overline{BC}$. **VERDADEIRA**

c) Aplicação da lei dos senos. **VERDADEIRA**

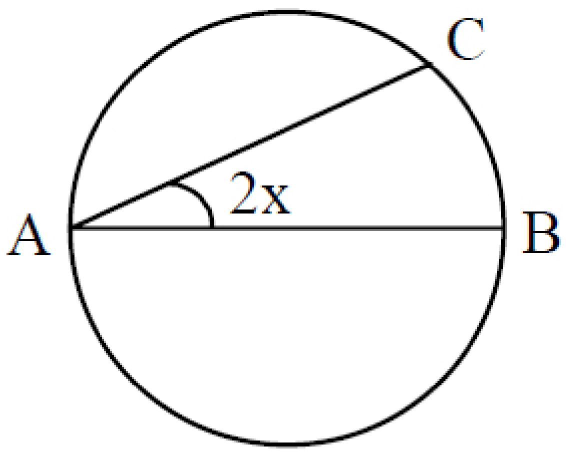
d) Aplicação da lei dos cossenos relativa ao lado $\overline{AC}$. **VERDADEIRA**

Gabarito: "a"

---

44. (EEAR/2007)

Na figura, AB é o diâmetro da circunferência e o arco AC mede $100°$.



O valor de x é:

a) $20°$.

b) $35°$.

c) $45°$.

d) $50°$.

Comentário:

O arco $\widehat{BC}$ é o suplementar do arco $\widehat{AC}$ e, portanto, mede $\widehat{BC} = 180° - 100° = 80°$.

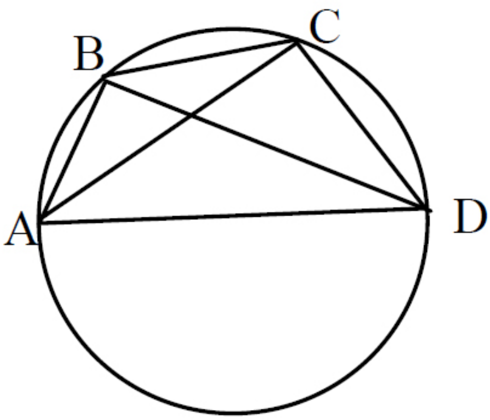
O ângulo $B\hat{A}C$ é inscrito na circunferência e, portanto, mede, por um lado, $B\hat{A}C = \frac{1}{2}\widehat{BC} = 40°$

Por outro, $B\hat{A}C = 2x$, donde $2x = 40° \therefore x = 20°$.

Gabarito: "a".

45. (EEAR/2007)

Na figura, AD é o diâmetro da circunferência, $C\hat{A}D$ mede $35°$ e $B\hat{D}C$, $25°$.



A medida de $A\hat{C}B$ é

a) $30°$.

b) $35°$.

c) $40°$.

d) $45°$.

Comentário:

Observe as relações entre os arcos e os ângulos inscritos na circunferência. Como $C\hat{A}D = 35°$ enxerga o arco $\widehat{CD}$, este mede $\widehat{CD} = 2 \cdot C\hat{A}D = 70°$. Como $B\hat{D}C = 25°$ enxerga o arco $\widehat{BC}$, este mede $\widehat{BC} = 2 \cdot B\hat{D}C = 50°$. Logo, o arco $\widehat{AB}$, que é o suplementar do arco $\widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{CD}$, mede $\widehat{AB} = 180° - (50° + 70°) = 60°$, donde o ângulo inscrito $A\hat{C}B = \frac{1}{2}\widehat{AB} = 30°$.

Gabarito: "a".

46. (EEAR/2007)

Um triângulo, inscrito numa circunferência de $10\ cm$ de raio, determina nesta três arcos, cujas medidas são $90°$, $120°$ e $150°$. A soma das medidas dos menores lados desse triângulo, em cm, é

a) $10(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

b) $10(1+\sqrt{3})$

c) $5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

d) $5(1+\sqrt{3})$

Comentário:

Sejam ΔABC o triângulo, a, b, c as medidas dos lados de ΔABC opostos respectivamente a A, B, C. Temos que as medidas dos ângulos internos valem a metade das medidas dos arcos que eles enxergam. Sem perda de generalidade, $\hat{A} = 45°, \hat{B} = 60°, \hat{C} = 75°$. Pela lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Logo, como ao menor ângulo está associado o menor lado, a soma pedida é $a+b$:

$$a+b = 2R\cdot(\operatorname{sen}45° + \operatorname{sen}60°) = 2\cdot 10\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right).$$

Gabarito: "a".

---

47. (EEAR/2006)

Num triângulo ABC, o ângulo $B\hat{E}C$ mede $114°$. Se E é o incentro de ABC, então o ângulo $\hat{A}$ mede:

a) 44.

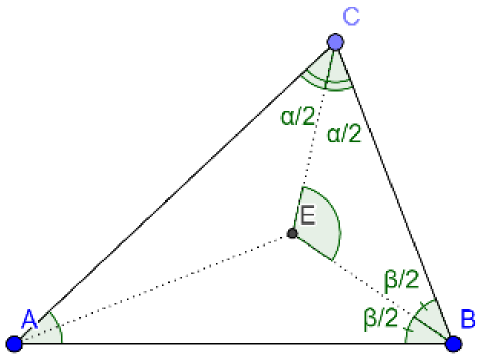
b) 48.

c) 56.

d) 58.

Comentários

De acordo com o enunciado, obtemos a seguinte imagem:



Temos no ΔBEC a relação 1:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+B\hat{E}C=180°$$

Temos no ΔABC a relação 2:

$$\alpha+\beta+\hat{A}=180°$$

Multiplicando a relação 1 e subtraindo a relação 2, tem-se:

$$\alpha+\beta+2B\hat{E}C-\alpha-\beta-\hat{A}=360°-180°$$
$$2B\hat{E}C-\hat{A}=180°$$

$$\hat{A}=2B\hat{E}C-180°$$
$$\hat{A}=228°-180°=48°$$

Gabarito: “b”.

---

48. (EEAR/2006)

Num triângulo ABC, $AB = BC = 5\sqrt{2}cm$. Se R é o ponto médio de $\overline{AC}$, e S é o ponto médio de $\overline{AB}$, então a medida de $\overline{RS}$, em cm, é igual a:

a) $\frac{5}{2}$

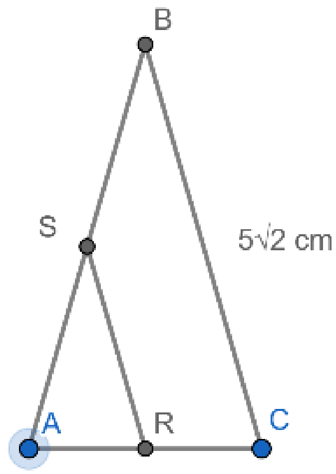
b) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Perceba que o triângulo ΔASR é semelhante ao triângulo ΔABC.

Dessa maneira descobrindo a constante de proporcionalidade entre ΔASR e ΔABC:

$$k = \frac{AR}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{SR}{BC}$$

Entretanto sabemos que R e S são pontos médios, logo $AR = RC, AS = SB$, portanto temos que:

$$k = \frac{AR}{AR + RC} = \frac{AR}{2AR} = \frac{1}{2}$$

Portanto temos que o comprimento de RS é a metade da base BC

$$k = \frac{SR}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow RS = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$RS = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: "d".

---

49. (EEAR/2006)

Num triângulo ABC, a razão entre as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é 2. Se $\hat{A} = 120°$ e $\overline{AC} = 1\ cm$, então o lado $\overline{BC}$ mede, em cm,

a) $\sqrt{7}$

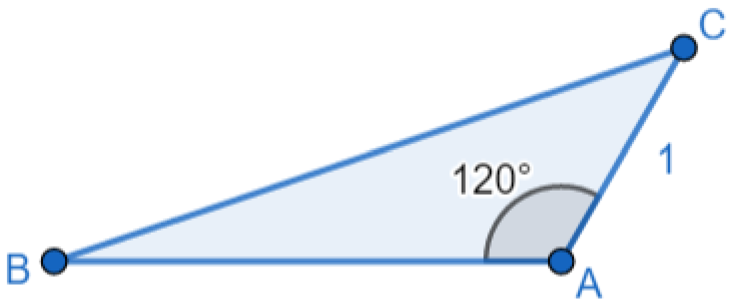
b) $\sqrt{7} + 1$

c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{13} - 1$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Do enunciado sabemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 2 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{1} = 2 \Rightarrow \overline{AB} = 2$$

Aplicando a Lei dos Cossenos

$$\overline{BC}^2 = (1)^2 + (2)^2 - 2 \cdot (1) \cdot (2) \cdot \cos(120°)$$

$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

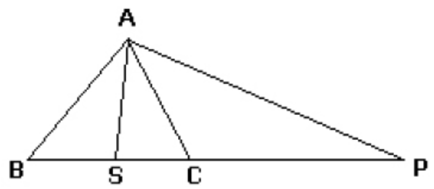
$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 5 + 2 = 7$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{7}$$

Gabarito: "a"

---

50. (EEAR/2005)



Na figura, AS e AP são, respectivamente, bissetrizes internas e externa do triângulo ΔABC. Se $BS = 8m$ e $SC = 6m$, então SP mede, em m:

a) 48

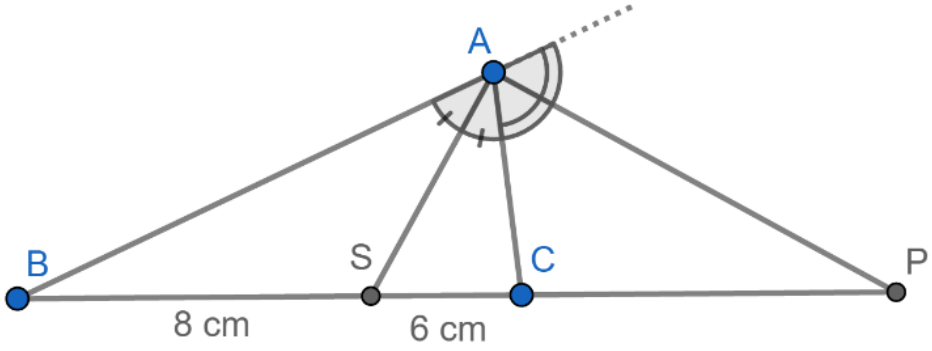
b) 42

c) 38

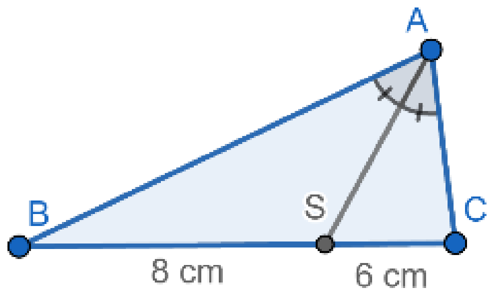
d) 32

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

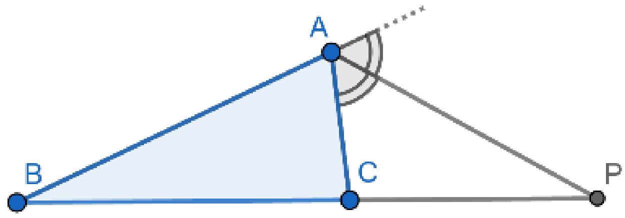


No triângulo ΔABC temos pelo teorema da bissetriz interna:



$$\frac{AB}{BS}=\frac{AC}{SC}\Rightarrow\frac{AB}{8}=\frac{AC}{6}$$
$$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{8}{6}$$

No triângulo ΔABP temos pelo teorema da bissetriz externas:



$$\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{CP}$$
$$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CP}$$

Com as duas relações encontradas pelos teoremas da bissetriz interna e externa, temos:

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{BP}{CP}$$
$$CP = \frac{6}{8} \cdot BC = \frac{6}{8} \cdot (6 + 8 + CP)$$
$$CP = \frac{6}{8} \cdot (6 + 8 + CP)$$

Resolvendo a equação:

$$8CP = 6 \cdot 14 + 6CP$$
$$2CP = 6 \cdot 14$$
$$CP = 42$$

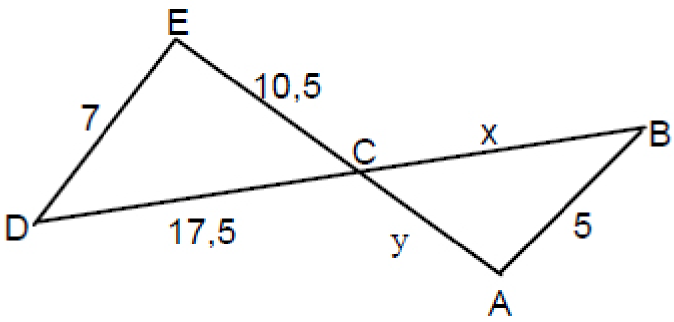
Assim obtemos $SP = SC + CP = 42 + 6 = 48$.

Gabarito: "a".

---

51. (EEAR/2005)

Na figura, $DE//AB$. O valor de $x + y$ é:



a) $12,5$

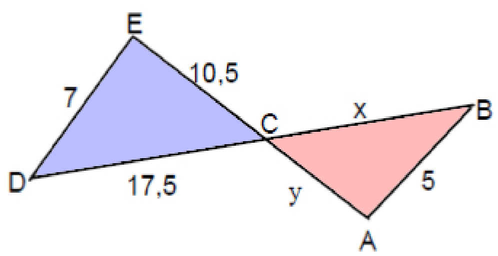
b) $17,5$

c) 20

d) 22

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Temos que os triângulos ΔABC e ΔCDE são semelhantes, portanto, temos a constante de proporcionalidade:

$$k = \frac{EC}{CA} = \frac{DC}{CB} = \frac{DE}{AB}$$
$$\Rightarrow k = \frac{DE}{AB} = \frac{7}{5}$$
$$k = \frac{7}{5}$$

Aplicando a relação de proporção para os outros dois lados, temos:

$$k = \frac{EC}{CA} \qquad k = \frac{DC}{CB}$$
$$\frac{7}{5} = \frac{10{,}5}{y} \qquad \frac{7}{5} = \frac{17{,}5}{x}$$
$$y = 7{,}5 \qquad x = 12{,}5$$

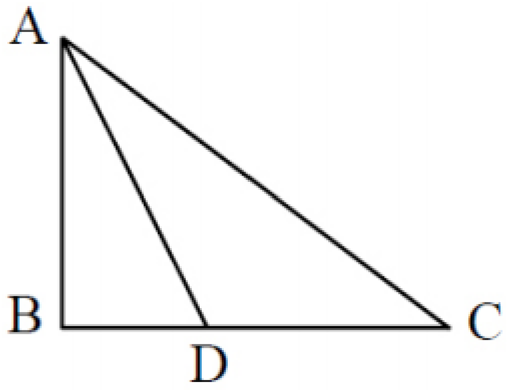
Portanto, $x + y = 7{,}5 + 12{,}5 = 20$.

Gabarito: "c".

---

52. (EEAR/2005)

Seja o triângulo ABC retângulo em B



Se $\overline{AD}$ é bissetriz de $\widehat{A}$, $\overline{AB} = 6\ cm$, e $\overline{AC} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{DC}$, em cm, é

a) 6

b) 5

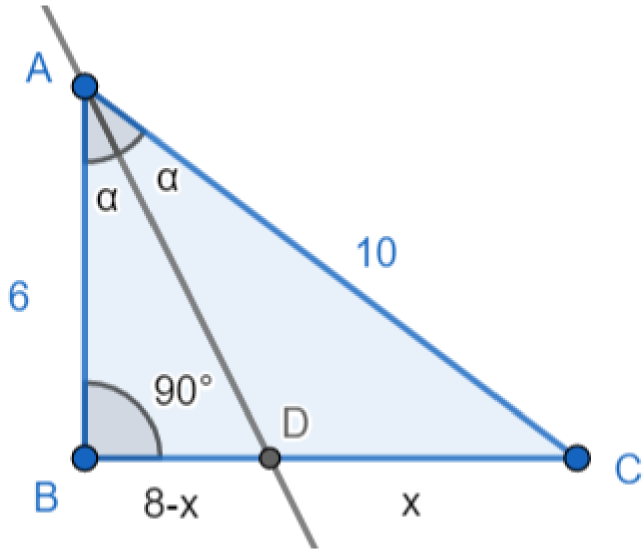
c) 4

d) 3

Comentários

Por Pitágoras, descobrimos que o lado $\overline{BC} = 8\ cm$.

Aplicaremos agora o Teorema da Bissetriz Interna.



O teorema da bissetriz interna diz que uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Ou seja:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{8-x} = \frac{10}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 6x = 10(8-x)$$

$$\Rightarrow \quad 6x = 80 - 10x$$

$$\Rightarrow \quad 16x = 80$$

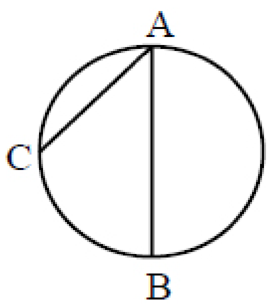
$$\Rightarrow \quad x = \frac{80}{16} = 5$$

$$\therefore \quad \overline{DC} = 5\ cm$$

Gabarito: “b”

---

53. (EEAR/2005)



Na figura, AB é diâmetro. Se o arco agudo AC mede $70°$, a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é

a) $\mathbf{50°}$.

b) $\mathbf{55°}$.

c) $\mathbf{60°}$.

d) $\mathbf{65°}$.

Comentário:

O arco $\widehat{ACB}$ é uma semicircunferência e, portanto, mede $180°$. Logo, o arco $\widehat{CB}$ é o suplementar do arco $\widehat{AC}$, e portanto vale $180° - 70° = 110°$. O ângulo $C\hat{A}B$, sendo ângulo inscrito na circunferência, vale metade do arco que ele enxerga, $\widehat{CB}$. Portanto, $C\hat{A}B = \frac{\widehat{CB}}{2} = 55°$.

Gabarito: "b".

---

54. (EEAR/2005)

Num triângulo ABC, $BC = 10\ cm$ e $A\hat{B}C = 60°$. Se esse triângulo está inscrito numa semicircunferência e BC é seu menor lado, então o raio dessa semicircunferência mede, em cm,

a) $\mathbf{5}$.

b) $\mathbf{10}$.

c) $\mathbf{10\sqrt{2}}$.

d) $\mathbf{10\sqrt{3}}$.

Comentário:

Supondo que AB é o diâmetro da semicircunferência, temos que o ângulo $\hat{C} = 90°$ é reto. Temos, no triângulo ΔABC, retângulo em C, $\hat{B} = 60°$ e $BC = 10$ cm. Logo, calculando o cosseno do ângulo $\hat{B}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} = \cos 60° = \cos \hat{B} = \frac{BC}{AB} = \frac{10\ cm}{AB} \Rightarrow AB = 20\ cm.$$

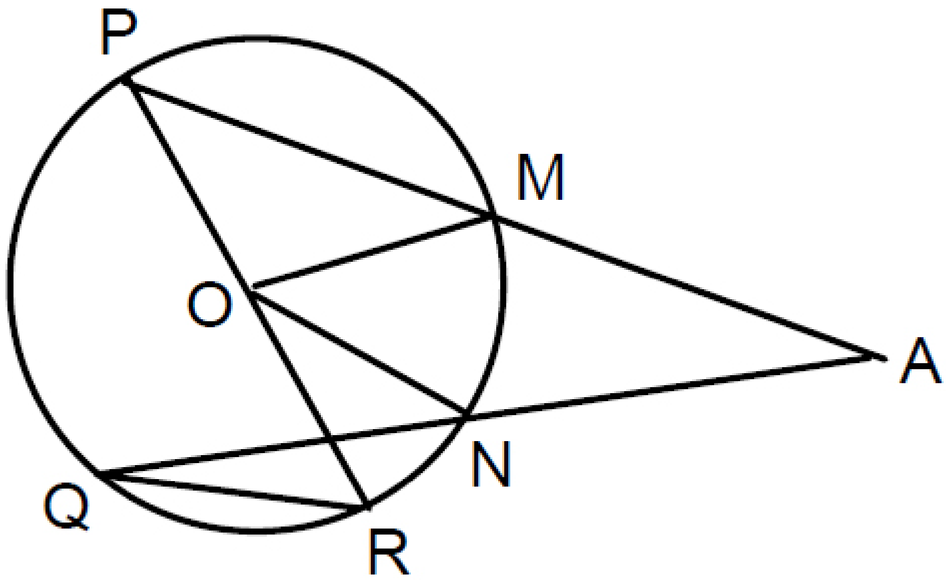
Mas, sendo AB diâmetro, ela vale duas vezes o raio, logo, o raio vale $10\ cm$.

Gabarito: "b".

---

55. (EEAR/2004)

Na figura, O é o centro da circunferência, $M\hat{O}N = 62°$, e $P\hat{R}Q = 65°$. O ângulo $M\hat{A}N$ mede



a) $34°$.

b) $36°$.

c) $38°$.

d) $40°$.

Comentário:

O arco $\widehat{PQ}$ é enxergado pelo ângulo inscrito $P\hat{R}Q$ e, portanto, mede $\widehat{PQ} = 2 \cdot P\hat{R}Q = 130°$.

O arco $\widehat{MN}$ é enxergado pelo ângulo central $M\hat{O}N$ e, portanto, mede $\widehat{MN} = M\hat{O}N = 62°$.

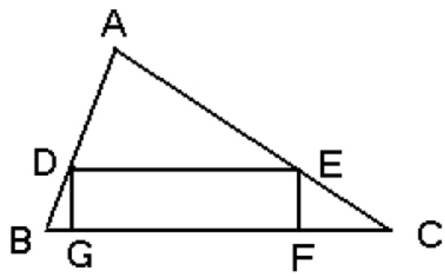
O ângulo $P\hat{A}Q$ enxerga os arcos $\widehat{PQ}$ e $\widehat{MN}$ e, portanto, mede $\frac{\widehat{PQ}-\widehat{MN}}{2} = 34°$.

Gabarito: "a".

---

56. (EEAR/2004)

Na figura, o lado BC do triângulo ABC mede $12cm$, e a altura relativa ao lado BC mede $8cm$. Se $FG = 3EF$, então o perímetro do retângulo $DEFG$, em cm, é:



a) 30

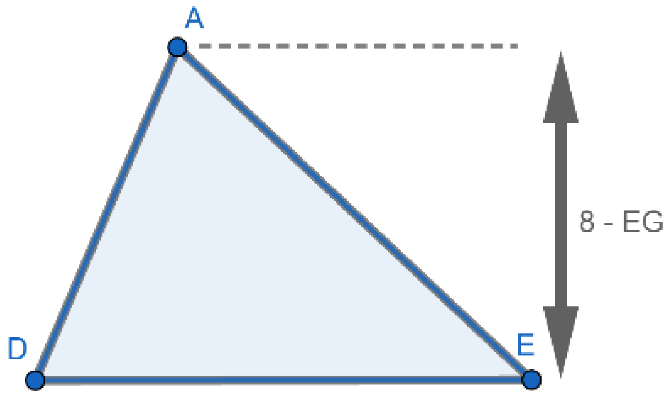
b) 28

c) $\frac{85}{3}$

d) $\frac{64}{3}$

Comentários

Perceba que o triângulo ΔABC é semelhante ao triângulo ΔADE, destacado na figura seguinte:



Pela relação de semelhança entre a base e a altura temos:

$$\frac{DE}{8-EF}=\frac{12}{8}$$

Porem temos $FG = DE = 3EF$

Logo:

$$\frac{3EF}{8-EF}=\frac{3}{2}$$
$$6EF = 24 - 3EF$$
$$9EF = 24$$
$$EF = \frac{8}{3}$$

Como perímetro do retângulo $DEFG$

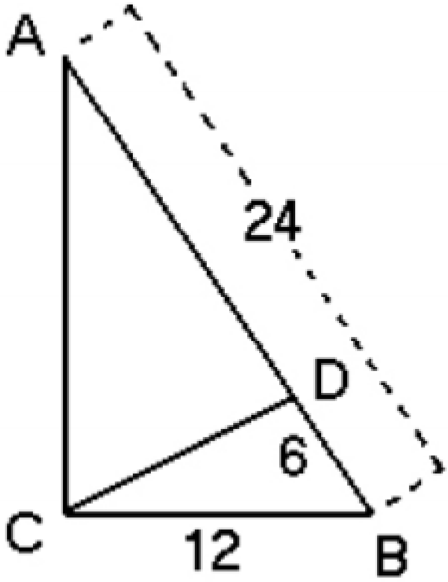
$$P_{DEFG} = 2EF + 2DE = 2EF + 6EF = 8EF$$
$$P_{DEFG} = 8EF = \frac{64}{3}$$

Gabarito: "d"

---

57. (EEAR/2004)

Se os dados no triângulo ABC, retângulo em C, estão em cm, então o triângulo BCD é



a) **obtusângulo**.

b) **retângulo**.

c) **isósceles**.

d) **equilátero**.

Comentários

Devemos ficar sempre atentos para as proporções dos valores das medidas, pois muitas conclusões podem ser tiradas apenas observando os valores dados.

$$\boldsymbol{sen\left(B\hat{A}C\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = \mathbf{sen}(30°)}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{B\hat{A}C = 30°} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A\hat{B}C = 60°}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo BCD, obtemos:

$$\boldsymbol{\overline{CD}^2 = (12)^2 + (6)^2 - 2 \cdot (12) \cdot (6) \cdot \mathbf{cos}(60°)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \overline{BC}^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \overline{BC}^2 = 180 - 72 = 108}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \overline{BC} = 6\sqrt{3}}$$

d) FALSO. Pela definição de triângulo equilátero.

c) FALSO. Pela definição de triângulo isósceles.

b) VERDADEIRO.

$$(\mathbf{12})^2 = \left(\mathbf{6\sqrt{3}}\right)^2 + (\mathbf{6})^2$$

$$\mathbf{144 = 108 + 36}$$

Verdadeiro.

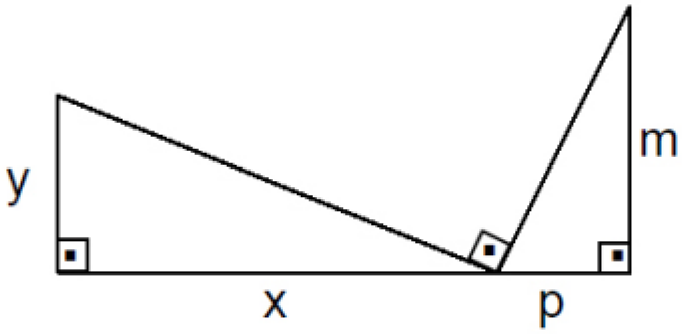
a) FALSO. Pois não se pode ser retângulo – ângulo de $\mathbf{90}°$ – e obtusângulo – ângulo maior que $\mathbf{90}°$ - ao mesmo tempo, pois a soma dos ângulos internos seria maior do que $\mathbf{180}°$. Logo, se b) é verdadeiro, a) é automaticamente falso.

Gabarito: “b”

---

58. (EEAR/2004)

Na figura, os ângulos assinalados são retos. Assim, necessariamente, teremos



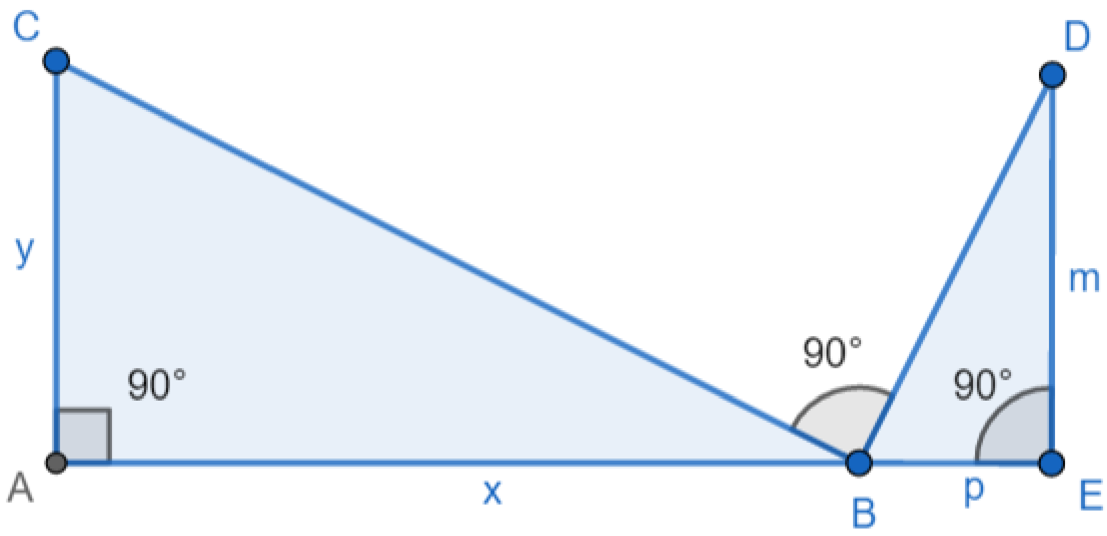
a) $\frac{x}{y} = \frac{p}{m}$

b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$

Comentários



Analisando os ângulos, obtemos que:

$$A\hat{B}C + C\hat{B}D + D\hat{B}E = 180°$$

$$A\hat{B}C + 90° + D\hat{B}E = 180°$$

$$A\hat{B}C + D\hat{B}E = 90°$$

Mas, como

$$A\hat{B}C + A\hat{C}B = 90°$$

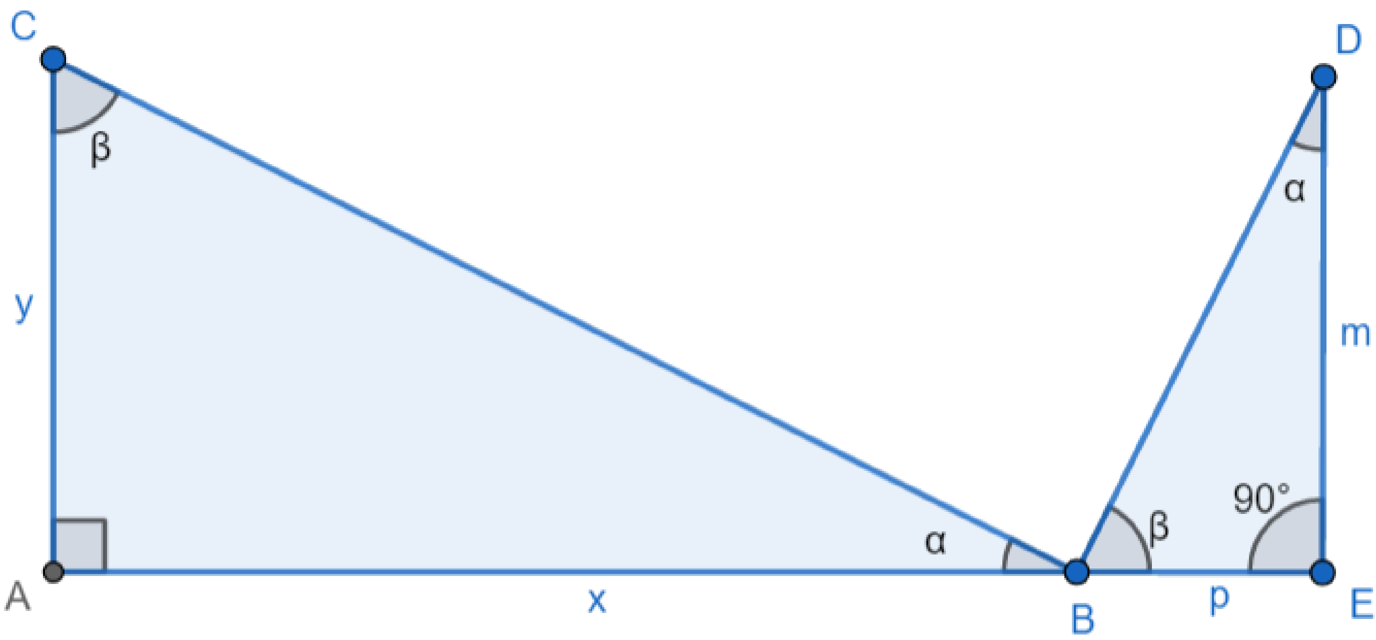
Então:

$$A\hat{C}B = D\hat{B}E$$

Analogamente,

$$A\hat{B}C = B\hat{D}E$$

Redesenhando a figura:



Perceba que os triângulos ABC e EDB são semelhantes, logo,

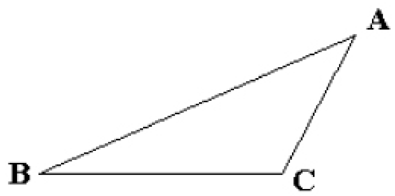
$$\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$$

Gabarito: "b"

---

59. (EEAR/2003)

Na figura, as medidas dos lados $AB, AC\ e\ BC$ são, respectivamente, $40cm, 20cm\ e\ 30cm$.



A bissetriz interna desse triângulo, relativa ao vértice A, encontra o lado oposto no ponto P, e a bissetriz externa, relativa ao mesmo vértice, encontra o prolongamento do lado BC no ponto S. A medida do segmento PS, em cm, é igual a:

a) 30

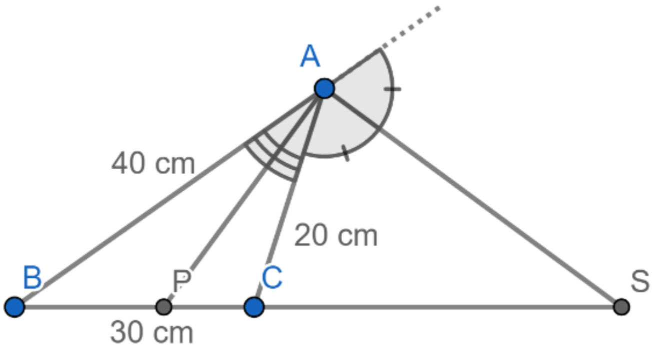
b) 35

c) 40

d) 45

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



No triângulo ΔABC temos pelo teorema da bissetriz interna:

$$\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{PC}\Rightarrow\frac{40}{BP}=\frac{20}{PC}$$
$$\Rightarrow\frac{BP}{PC}=\frac{40}{20}=\frac{2}{1}$$

Como $BC=BP+PC$:

$$BC=BP+PC$$
$$30=BP+PC$$

$$30=2PC+PC$$

$$10=PC$$

No triângulo ΔABP temos pelo teorema da bissetriz externas:

$$\frac{AB}{BS}=\frac{AC}{CS}$$
$$\Rightarrow\frac{BS}{CS}=\frac{40}{20}=\frac{2}{1}$$

Como $BS=BC+CS$

$$2CS=BS$$

$$2CS=BC+CS$$

$$CS=BC$$

$$CS=30$$

Assim obtemos

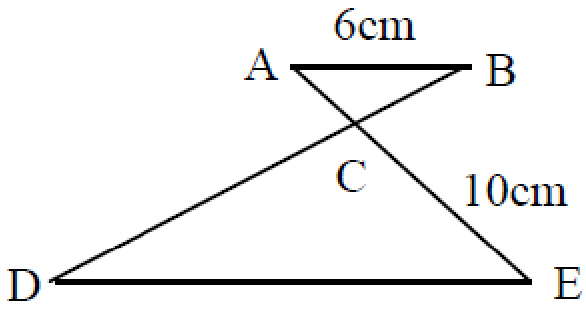
$$SP=SC+CP=30+10=40$$

Gabarito: “c”.

---

60. (EEAR/2003)

Na figura os triângulos ABC e EDC são semelhantes.



Sabendo que $AC = x - 5$ e $DE = 2x + 4$, a soma $med(AC) + med(CE)$, em cm, vale

a) $10,3$

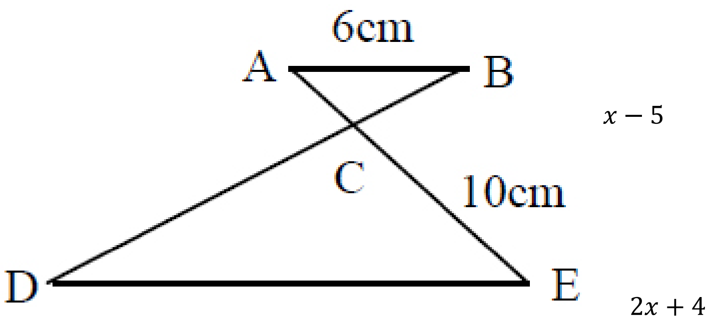
b) 18

c) 13

d) $23,3$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Temos que os triângulos ABC e CDE são semelhantes, e, portanto, vale a seguinte relação:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

Dessa relação obtemos a equação:

$$\frac{x-5}{10} = \frac{6}{2x+4}$$
$$(x-5) \cdot (x+2) = 30$$
$$x^2 - 3x - 10 = 30$$
$$x^2 - 3x - 40 = 0$$
$$(x-8) \cdot (x+5) = 0$$

Na qual obtemos que $x = 8$, portanto,

$$\begin{cases} AC = 8 - 5 = 3 \\ AC + CE = 3 + 10 \end{cases}$$

$$AC + CE = 13$$

Gabarito: "c".

61. (EEAR/2003)

Numa circunferência de centro C e raio 20 cm, considere a corda $\overline{AB}$, cujo ponto médio é M. Se $\overline{CM} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{AB}$ é, em cm,

a) $15\sqrt{5}$

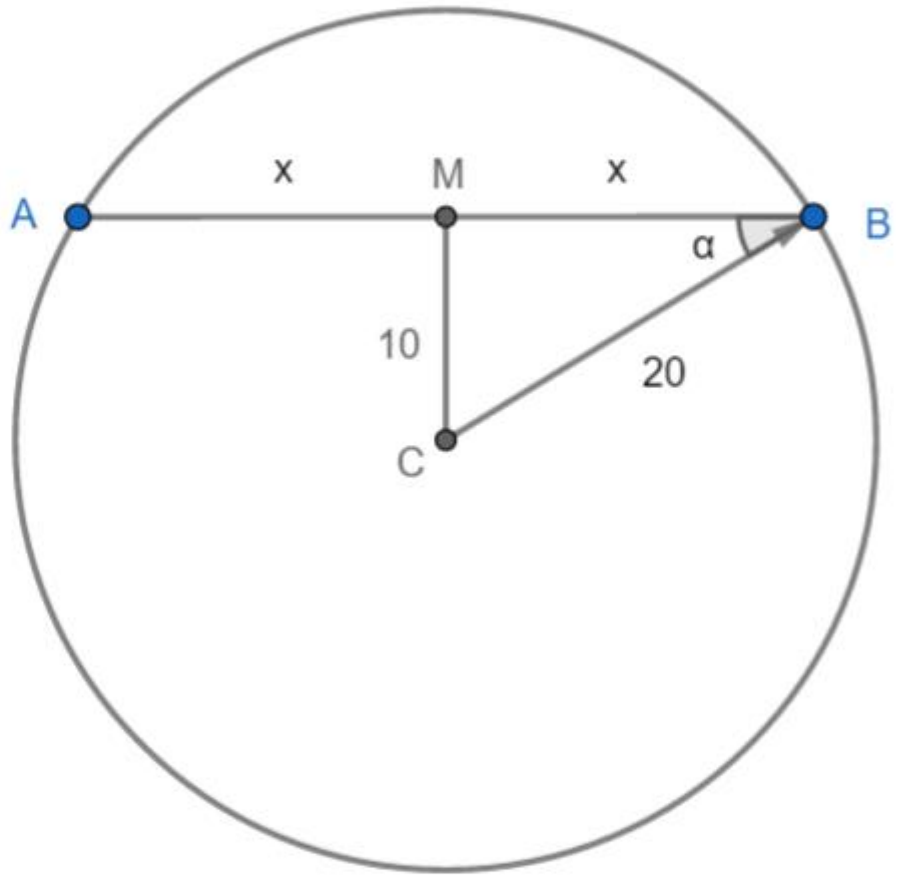
b) $20\sqrt{3}$

c) 15

d) 20

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Atente-se para o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = sen(30°)$$

Logo $\alpha = 30°$, então podemos calcular o valor de x:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20}$$

$$\Rightarrow \quad x = 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = 2x = 20\sqrt{3}$$

Gabarito: "b"

---

62. (EEAR/2003)

Se forem indicados por m, n, e p os três lados de um triângulo e por $\widehat{M}, \widehat{N}$ e $\widehat{P}$, respectivamente, os ângulos opostos a esses lados, então sendo conhecidos os lados m e n e o ângulo $\widehat{N}$, qual das fórmulas abaixo poderá ser utilizada para calcular o valor do lado p?

a) $m^2 = n^2 + p^2 - 2 \cdot n \cdot p \cdot \cos(\widehat{M})$

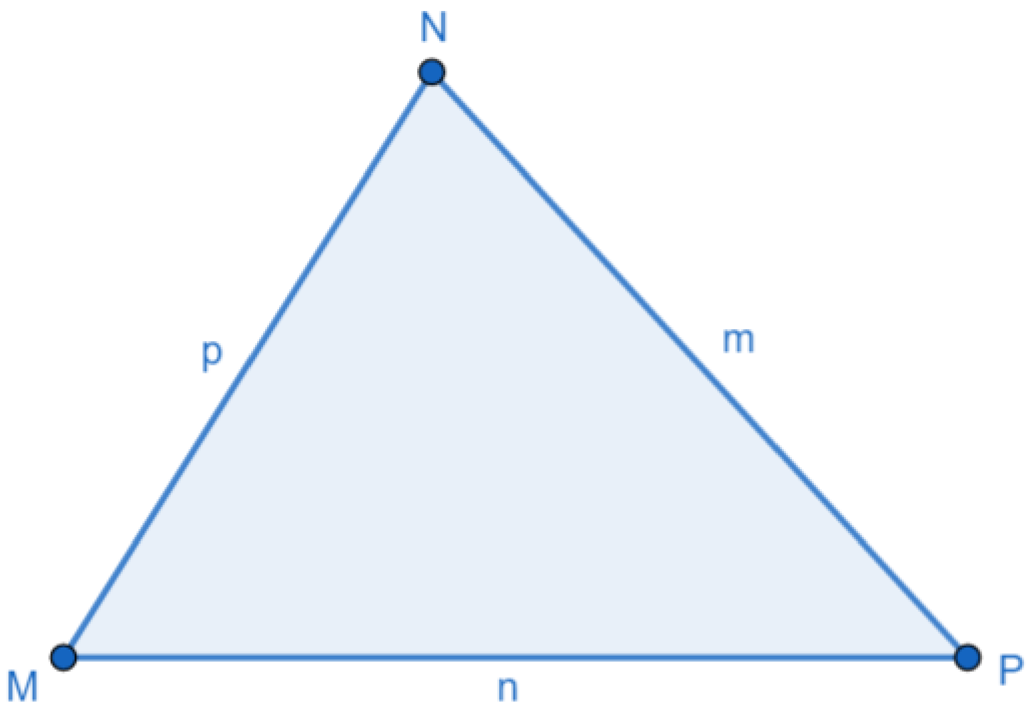
b) $n^2 = m^2 + p^2 + 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{P})$

c) $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{P})$

d) $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{N})$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a Lei Dos Cossenos relativo ao lado $\overline{\boldsymbol{MP}}$, temos:

$$\boldsymbol{n^2 = m^2 + p^2 - 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos\,(\widehat{N})}$$

Mas, pelas relações no ciclo trigonométrico e a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos que: $\boldsymbol{\cos(\widehat{N}) = -\cos(180° - \widehat{N}) = -\cos\,(\widehat{M} + \widehat{P})}$

Logo,

$$\boldsymbol{n^2 = m^2 + p^2 - 2 \cdot m \cdot p \cdot (-\cos\,(\widehat{M} + \widehat{P}))}$$

$$\boldsymbol{n^2 = m^2 + p^2 + 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos\,(\widehat{M} + \widehat{P})}$$

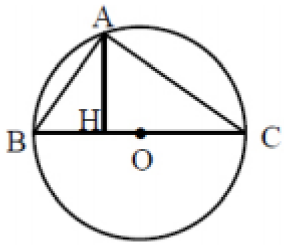
Obs: O que torna as outras alternativas falsas, é que, mesmo em posse do valor de $\boldsymbol{\widehat{N}}$, não poderíamos chegar diretamente no valor de $\boldsymbol{\cos(\widehat{M})}$, $\boldsymbol{\cos(\widehat{P})}$ e nem $\boldsymbol{\cos(\widehat{M} + \widehat{N})}$, sem antes obter o valor de p. Então usá-las de primeira mão seria inadequado.

Gabarito: "b"

---

63. (EEAR/2003)

O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O e de raio 13 cm



Sabendo que $\overline{AB} = 10\ cm$, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ mede, em cm, aproximadamente

a) 7,6

b) 8,4

c) 9,23

d) 10,8

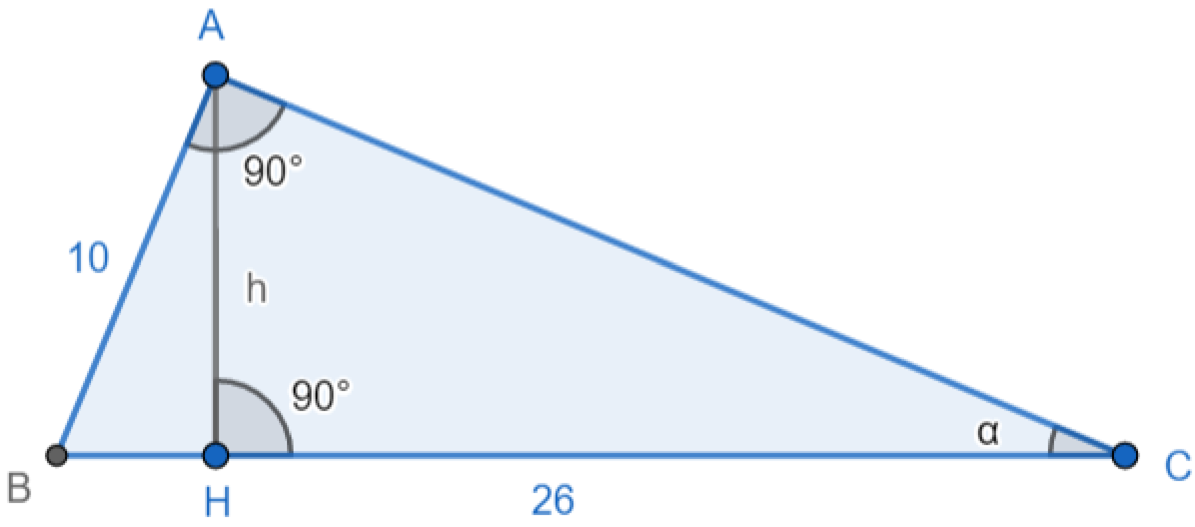
Comentários

De acordo com a figura é possível perceber que o seguimento $\overline{\boldsymbol{BC}}$ passa pelo centro da circunferência, isso nos passa duas informações:

$\overline{\boldsymbol{BC}} = \mathbf{26}\ \boldsymbol{cm}$, pois trata-se de um diâmetro

$\boldsymbol{B\hat{A}C} = \mathbf{90}°$, pois o arco definido por $\overline{\boldsymbol{BC}}$ possui $\mathbf{180}°$.

Desenhando o triângulo com as novas informações, obtemos:



Por Pitágoras obtemos que $\overline{\boldsymbol{AC}} = \sqrt{\overline{\boldsymbol{BC}}^2 - \overline{\boldsymbol{AB}}^2} \quad \Rightarrow \qquad \overline{\boldsymbol{AC}} = \sqrt{\mathbf{26}^2 - \mathbf{10}^2} = \mathbf{24}\ \boldsymbol{cm}$

Perceba que os triângulos ABC e HAC são semelhantes. Portanto:

$$\frac{\overline{\boldsymbol{AH}}}{\overline{\boldsymbol{AC}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{BC}}}$$

$$\frac{h}{24} = \frac{10}{26}$$

$$h = \frac{240}{26} = \frac{120}{13} \approx 9{,}23$$

Gabarito: “c”

---

64. (EEAR/2003)

Seja o triângulo ABC e D um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $\overline{AD} = 2\ cm$, $\overline{AB} = \sqrt{3}\ cm$, $\overline{BD} = \overline{DC}$ e $B\hat{A}C = 30°$, a medida, em cm, do lado $\overline{BC}$ é igual a

a) $\sqrt{3}$

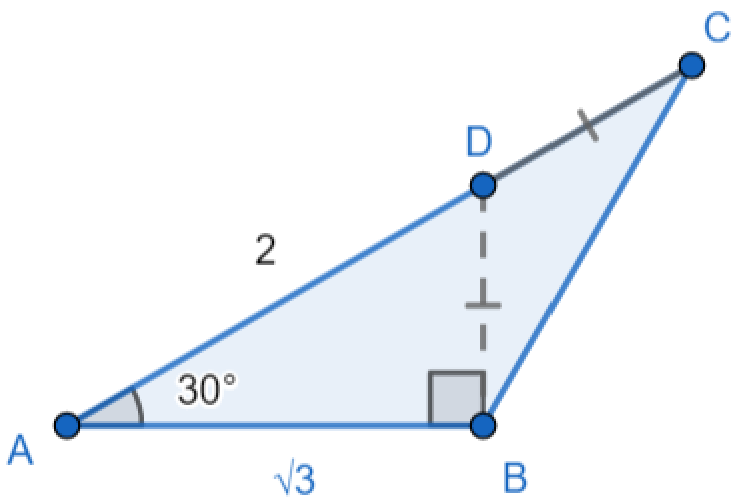
b) $\sqrt{5}$

c) $\sqrt{6}$

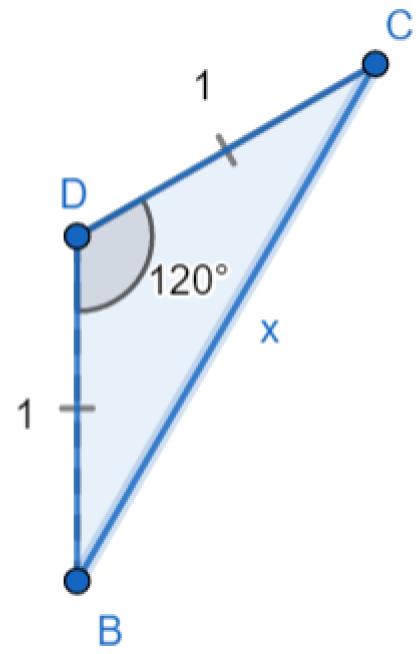
d) $\sqrt{7}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a definição de seno no triângulo ABD é possível obter o valor de $\overline{BD}$ e descobrir que $\overline{BD} = 1\ \text{cm}$. Perceba também que $A\hat{D}B = 60° \quad \Rightarrow \quad B\hat{D}C = 120°$. E, segundo o enunciado, $\overline{BD} = \overline{CD} = 1\ cm$. Logo, ficamos com o triângulo BCD representado logo abaixo:



Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$\boldsymbol{x^2 = (1)^2 + (1)^2 - 2 \cdot (1) \cdot (1) \cdot \cos(120°)}$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{x = \sqrt{3}}$$

$$\therefore \ \ \boldsymbol{\overline{BC} = \sqrt{3}}$$

Gabarito: "a"

---

65. (EEAR/2003)

Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede $6\sqrt{3}\ cm$ e o ângulo $\widehat{C}$, oposto ao lado $\overline{AB}$, mede $60°$. O raio da circunferência que circunscreve o triângulo, em cm, mede

a) 6

b) 12

c) $6\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{6}$

Comentários

Esta questão dispensa figura. Trata-se de uma aplicação direta da lei dos senos:

$$\frac{\overline{BC}}{sen(\widehat{A})} = \frac{\overline{AB}}{sen(\widehat{C})} = \frac{\overline{AC}}{sen(\widehat{B})} = 2 \cdot R$$

Em que R é o raio da circunferência

$$\frac{\overline{AB}}{sen(\widehat{C})} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{sen(60°)} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}/_{2}} = 12 = 2R$$

$$\Rightarrow R = 6\ cm$$

Gabarito: "a"

---

66. (EEAR/2003)

As medidas dos lados de um triângulo são iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O cosseno do menor ângulo desse triângulo é igual a

a) $\frac{1}{8}$

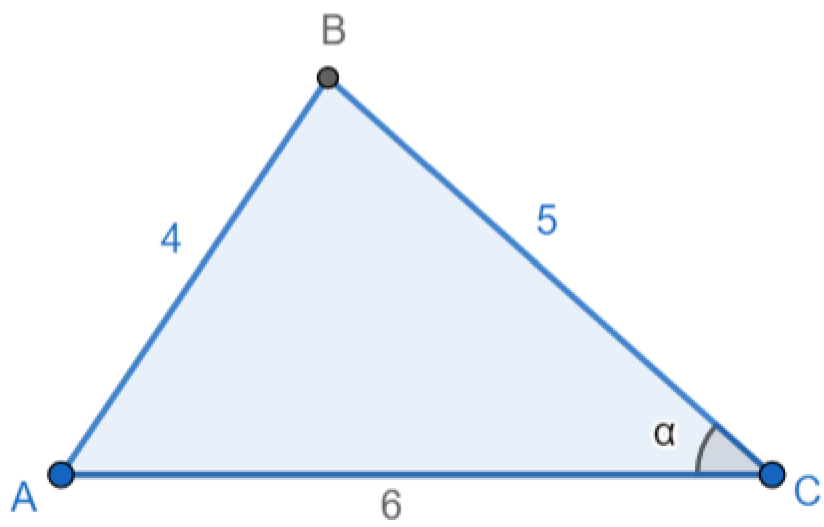
b) $\frac{9}{16}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



O menor ângulo é oposto ao menor lado.

Aplicando a Lei dos cossenos, obtemos

$$(4)^2 = (6)^2 + (5)^2 - 2 \cdot (6) \cdot (5) \cdot \cos(\alpha)$$

$$16 = 36 + 25 - 60 \cdot \cos(\alpha)$$

$$60 \cdot \cos(\alpha) = 55$$

$$\cos(\alpha) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: “c”

---

67. (EEAR/2003)

Se em uma circunferência uma corda mede $16\sqrt{2}\ cm$ e dista $6\sqrt{2}\ cm$ do centro, então a medida do raio dessa circunferência, em cm, é

a) $12\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $8\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{2}$

Comentário:

Seja MN tal corda, P o seu ponto médio e O o centro da circunferência. Pelo teorema de Pitágoras,

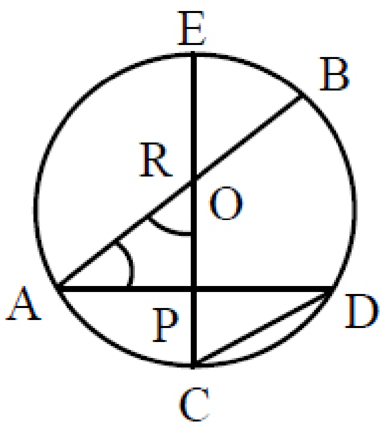
$$MP^2 + OP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{MN}{2}\right)^2 + OP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{16\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = raio^2 \therefore raio$$
$$= 10\sqrt{2}$$

Gabarito: “b”.

---

68. (EEAR/2003)

Na figura, as cordas AB e CD são paralelas.



EC é um diâmetro e P é o ponto médio da corda AD. As medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{R}C$ e $P\hat{A}R$ são, respectivamente, $4x - 14°$ e $5x - 13°$. As medidas dos ângulos do triângulo ΔPCD são

a) $42°, 57°, 81°$

b) $\mathbf{45°, 45°, 90°}$

c) $\mathbf{46°, 45°, 90°}$

d) $\mathbf{52°, 38°, 90°}$

Comentário:

Apesar de não sermos informados, suporemos que O é o centro da circunferência. Como AD é uma corda cujo ponto médio $P \in EC$, conclui-se que $APO = 90°$. Logo, ΔPOA é retângulo em P e portanto $ARC + PAR = 90° \Rightarrow (4x - 14°) + (5x - 13°) = 90° \Rightarrow x = 13°$. Como os triângulos ΔPCD e ΔPOA têm os três lados respectivamente paralelos, temos $\Delta PCD \sim \Delta POA$, donde se conclui que os ângulos de ΔPCD e ΔPOA são iguais. Logo, os ângulos são $90°$, $4x - 14°$ e $5x - 13°$, isto é, $90°, 38°$ e $52°$.

Gabarito: "d".

---

69. (EEAR/2003)

Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ encontra BC em D, e a circunferência circunscrita, em E. Sendo $AE = 9\ cm$ e $DE = 4\ cm$, então a medida EB, em cm, é

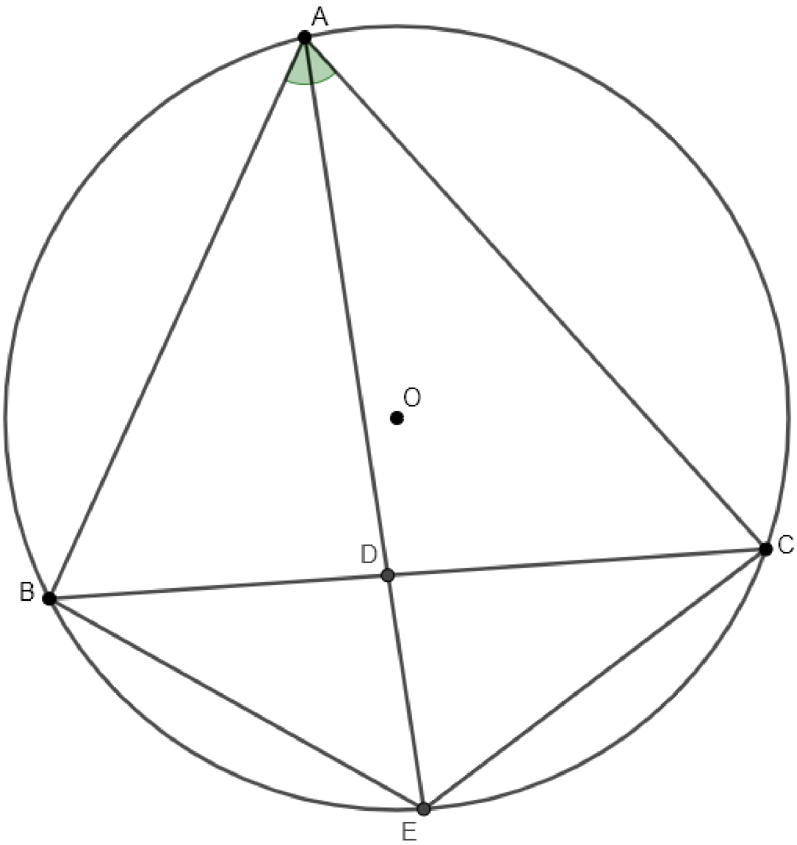
a) $\mathbf{6}$

b) $\mathbf{5}$

c) $\mathbf{2\sqrt{5}}$

d) $\mathbf{3\sqrt{2}}$

Comentário:



Como AE é a bissetriz do ângulo Â, temos que os ângulos $C\hat{A}E$ e $E\hat{A}B$ são iguais e, portanto, também são os arcos por eles observados, $\widehat{CE} = \widehat{EB}$. Observe que o ângulo $E\hat{B}D$ também observa $\widehat{CE}$, donde $E\hat{B}D = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{EB}}{2} = E\hat{A}B$. Como os triângulos ΔAEB e ΔBED possuem o ângulo Ê em comum, e como $E\hat{B}D = E\hat{A}B$, concluímos que os triângulos $\Delta AEB \sim \Delta BED$ são semelhantes pois têm todos os ângulos congruentes. Portanto,

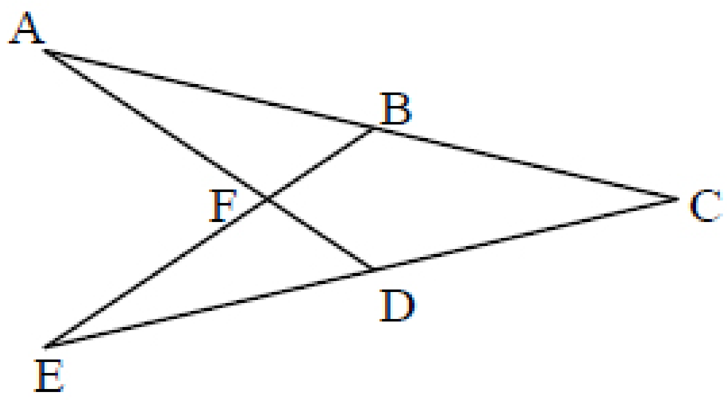
$$\frac{EB}{DE} = \frac{EA}{BE} \Rightarrow EB^2 = AE \cdot DE = 9 \cdot 4 \therefore EB = 6\,cm.$$

Gabarito: "a".

---

70. (EEAR/2002)

Na figura, se o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{E}$, então a relação falsa é



a) $CA \cdot CB = CE \cdot CD$

b) $\frac{CA-CE}{CE} = \frac{CD-CB}{CD}$

c) $\frac{CA+CD}{CE+CB} = \frac{CD}{CB}$

d) $\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$

Comentário:

Os triângulos ΔECB e ΔACD são semelhantes, pois $A\hat{C}D = E\hat{C}B$ e $C\hat{A}D = C\hat{E}B$. Logo, sendo k a constante de proporcionalidade,

$$\frac{CA}{CE} = \frac{AD}{EB} = \frac{CD}{CB} = k$$

Temos:

$$CA \cdot CB = (k \cdot CE) \cdot \left(\frac{CD}{k}\right) = CE \cdot CD$$

$$\frac{CA + CD}{CE + CB} = \frac{k \cdot CE + k \cdot CB}{CE + CB} = k = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \frac{(k \cdot CE) \cdot (k \cdot CB) \cdot (k \cdot EB)}{CE \cdot CB \cdot EB} = k^3 = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$$

Mas

$$\frac{CA - CE}{CE} = \frac{k \cdot CE - CE}{CE} = k - 1$$

e

$$\frac{CD - CB}{CD} = \frac{k \cdot CB - CB}{k \cdot CB} = \frac{k - 1}{k}$$

Por isso, o item b só seria verdadeiro se tivéssemos

$$\frac{k-1}{k} = k - 1 \therefore k = 1$$

o que não necessariamente é verdade.

Gabarito: "b".

---

71. (EEAR/2002)

Sejam: $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de centro O; $\overline{AR}$ uma corda, tal que $B\widehat{A}R = 20°$; t, paralela a $\overline{AR}$, uma reta tangente à circunferência, em T. Sabendo que T e R são pontos da mesma semicircunferência em relação a AB, a medida, em graus, do ângulo agudo formado pela reta t e pela corda AT é igual a

a) 25

b) 35

c) 50

d) 70

Comentário:

O triângulo ΔOAT é isósceles de base AT, visto que seus lados OA e OT valem r, o raio da circunferência. Segue que $OTA = OAT = OAR + RAT = BAR + RAT \Rightarrow OTA = BAR + RAT$.

Seja A' um ponto de t no semiplano oposto de R em relação à AT. Como $AR \parallel t$, os ângulos RAT e ATA' são alternos internos, donde $RAT = ATA'$. Como T é ponto de tangência, segue que OTA' é reto. Logo, $90° = OTA' = OTA + ATA' = BAR + RAT + ATA' = 20° + RAT + RAT \Rightarrow RAT = \frac{1}{2} \cdot (90° - 20°) \therefore RAT = 35°$.

O ângulo pedido, entre a reta t e a corda AT é justamente RAT.

Gabarito: "b".

---

72. (EEAR/2002)

Traçam-se duas cordas de uma mesma extremidade de um diâmetro de um círculo. Uma delas mede $9\ cm$, e sua projeção sobre o diâmetro mede $5,4\ cm$. O comprimento da outra corda, cuja projeção no diâmetro é de $9,6\ cm$ mede, em cm,

a) 10

b) 12

c) 14

d) 15

Comentário:

Primeiramente, vejamos o seguinte fato que ajudará na resolução:

Seja AB o diâmetro de uma circunferência de centro O. Seja C um ponto qualquer sobre a circunferência, diferente de A e de B. Seja C' a projeção de C sobre AB. Se l é a medida da corda AC, p é a medida da projeção AC' e $2r$ é a medida do diâmetro AB, pelo teorema de Pitágoras nos triângulos $C'AC$ e $C'OC$, temos:

$C'A^2 + C'C^2 = CA^2 \Leftrightarrow p^2 + C'C^2 = l^2$

$C'O^2 + C'C^2 = CO^2 \Leftrightarrow (p-r)^2 + C'C^2 = r^2.$

Portanto, $l^2 - p^2 = C'C^2 = r^2 - (p-r)^2 \Rightarrow l^2 - p^2 = r^2 - (p^2 - 2rp + r^2) \Rightarrow l^2 = 2rp.$

$$\therefore \frac{l^2}{p} = 2r = constante$$

Assim, variando o ponto C pela circunferência, variamos l e p, mas a razão $\frac{l^2}{p}$ se mantém fixa. Aplicando tal fato ao problema, chamando x ao comprimento da corda cuja projeção mede 9,6 cm, temos:

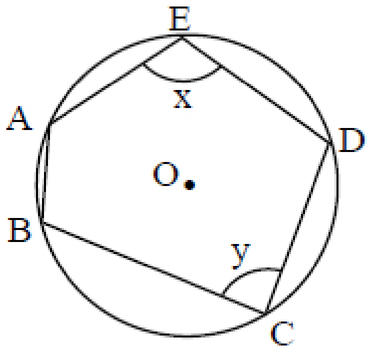
$$\frac{(9\ cm)^2}{5{,}4\ cm} = \frac{x^2}{9{,}6\ cm} \therefore x = 12cm.$$

Gabarito: "b".

---

73. (EEAR/2002)

Seja o pentágono $ABCDE$ da figura, inscrito numa circunferência de centro O. Se o ângulo $A\hat{O}B = 50°$, então $x + y$ vale, em graus



a) 216

b) 205

c) 180

d) 105

Comentário:

A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco para o qual ele "olha". Sabendo disso,

$$x = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (DE + EA + AB)$$

Logo,

$$x + y = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD + DE + EA) + \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 360° + \frac{1}{2} \cdot 50° = \frac{1}{2} \cdot (360° + 50°)$$

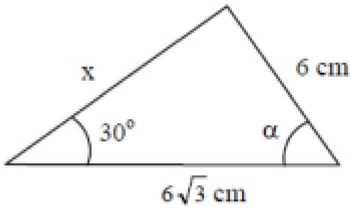
$\therefore x + y = 205°.$

Gabarito: "b".

---

74. (EEAR/2002)

Sendo α um ângulo agudo, o lado x do triângulo abaixo, em cm, mede



a) 6

b) 10

c) 12

d) 15

Comentários

Aplicando a Lei Dos Cossenos relativo ao lado de $\boldsymbol{6\ cm}$

$$\boldsymbol{(6)^2 = x^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot (x) \cdot \left(6\sqrt{3}\right) \cdot \cos(30°)}$$

$$\boldsymbol{x^2 - 18x + 72 = 0}$$

$$\boldsymbol{x = 12\ ou\ x = 6}$$

Suponha $\boldsymbol{x = 12}$. Pela Lei Dos Senos.

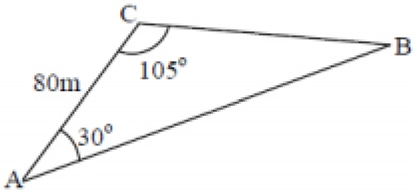
$$\boldsymbol{\frac{x}{sen\ \alpha} = \frac{12}{sen\ \alpha} = \frac{6}{sen\ 30°} = 12 \quad \Rightarrow \quad sen\ \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90°\ (não\ é\ ângulo\ agudo)}$$

Como o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ é agudo, o valor de x mais adequado é $\boldsymbol{x = 6}$

Gabarito: "a"

75. (EEAR/2002)

De acordo com os dados da figura, a distância aproximada, em metros, entre os pontos A e B é



a) 100

b) 102

c) 104

d) 108

Comentários

Note que $\hat{B} = 45°$, queremos aplicar a lei dos senos, mas antes precisamos obter o valor de $sen(105°)$. Iremos aplicar a fórmula do seno da soma:

$$sen(105°) = sen(60° + 45°) = sen(60°) \cdot \cos(45°) + sen(45°) \cdot \cos(60°) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$sen(105°) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Aplicando a lei dos senos

$$\frac{80}{sen(45°)} = \frac{\overline{AB}}{sen(105°)}$$

$$\overline{AB} = \frac{80 \cdot sen(105°)}{sen(45°)} = \frac{80 \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40 \cdot (\sqrt{3}+1)$$

Utilizaremos a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,7$

$$AB \approx 40 \cdot (1,7 + 1) = 108$$

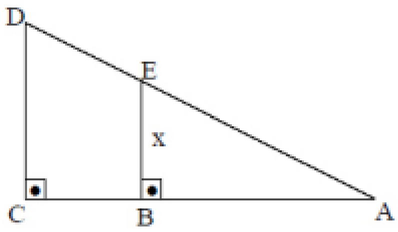
$$AB \approx 108\ m$$

Gabarito: "d"

---

76. (EEAR/2002)

Dada a figura abaixo, se $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm e $\overline{AD} = 20$ cm, a medida, em cm, de x é



a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

Comentários

Por Pitágoras, descobrimos que $\overline{AC} = \sqrt{20^2 - 4^2} = 8\sqrt{6}$.

Devido à semelhança de triângulos entre ACD e ABE:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{8\sqrt{6}}{4}$$

$$x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Gabarito: "c"

---

77. (EEAR/2001)

Num círculo de centro C e raio R, tomam-se dois pontos A e B sobre a circunferência do círculo. Sendo o ângulo $\alpha = A\hat{C}B$ e sabendo-se que o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento R, então pode-se afirmar:

a) $\alpha = 45°$

b) $\alpha = 90°$

c) $45° < \alpha < 50°$

d) $55° < \alpha < 60°$

Comentário:

O ângulo α olha para o arco $\widehat{AB}$. Portanto, temos $\widehat{AB} = \alpha \cdot R \Rightarrow R = \alpha \cdot R \therefore \alpha = 1\,rad \approx 57°$.

$$1\,rad = \frac{180°}{\pi\,rad} \cdot 1\,rad = \frac{180°}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}14} \approx 57°.$$

Gabarito: "d".

---

78. (EEAR/2001)

Sejam P, Q e R pontos de uma circunferência de centro O, tais que P e Q estejam do mesmo lado em relação ao diâmetro que passa por R. Sabendo-se que $med(O\hat{R}P) = 10°$ e $med(R\hat{O}Q) = 80°$, tem-se que o ângulo $P\hat{Q}O$ mede:

a) $20°$

b) $40°$

c) $50°$

d) $60°$

Comentário:

Seja S o outro extremo do diâmetro que passa por R. Como $med(O\hat{R}P) = 10°$ e este ângulo está inscrito na circunferência, temos que $med(S\hat{O}P) = 20°$, o dobro. Como o ângulo $S\hat{O}P$ é raso, temos $med(S\hat{O}P) + med(P\hat{O}Q) + med(R\hat{O}Q) = 180° \Rightarrow 20° + med(P\hat{O}Q) + 80° = 180° \therefore med(P\hat{O}Q) = 80°$. Olhando para o triângulo isósceles ΔPOQ, temos que a medida de $P\hat{Q}O$ é a metade do suplementar de $P\hat{O}Q$, isto é:

$$med(P\hat{Q}O) = \frac{180° - med(P\hat{O}Q)}{2} = \frac{180° - 80°}{2} = 50°.$$

Gabarito: "c".

---

79. (ESA/2019)

As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1, 2x$ e $x^2 - 5$ e estão em progressão aritmética, nessa ordem. Calcule o perímetro do triângulo:

a) 18

b) 25

c) 15

d) 20

e) 24

Comentários

Sabemos que três termos consecutivos de uma PA podem ser escritos como $(a-r, a, a+r)$ e, portanto, a soma dos extremos é o dobro do termo central:

$$\Rightarrow (x^2-5)+(x+1)=2\cdot 2x \Rightarrow x^2-5+x+1=4x \Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 3^2-4\cdot 1\cdot(-4)=25$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm 5}{2}=4 \text{ ou} -1$$

Como $x+1$ é um lado de um triângulo então $x=4$, pois não pode ser -1. Assim, os lados são:

$$x+1=5, 2x=8 \; e \; x^2-5=11$$

Portanto, o perímetro é:

$$5+8+11=24$$

Gabarito: "e".

---

80. (ESA/2019)

Uma pequena praça tem o formato triangular, as medidas dos lados desse triângulo são $\sqrt{37}$m, 4m e 3m. Qual a medida do ângulo oposto ao maior lado?

a) 120°

b) 60°

c) 90°

d) 45°

e) 150°

Comentários

Basta aplicar Lei dos cossenos usando o ângulo θ oposto ao lado maior $\sqrt{37}$:

$$\left(\sqrt{37}\right)^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos\theta$$

$$37=16+9-24\cos\theta \Rightarrow 12=-24\cos\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}=\cos\theta$$

Como θ está entre 0 e 180° pois é um ângulo de triângulo, então:

$$\theta=120°$$

Gabarito: "a".

---

81. (ESA/2011)

Um terreno de forma triangular tem frentes de 20 metros e 40 metros, em ruas que formam, entre si, um ângulo de $60°$. Admitindo-se $\sqrt{3} = 1,7$, a medida do perímetro do terreno, em metros, é

a) 94.

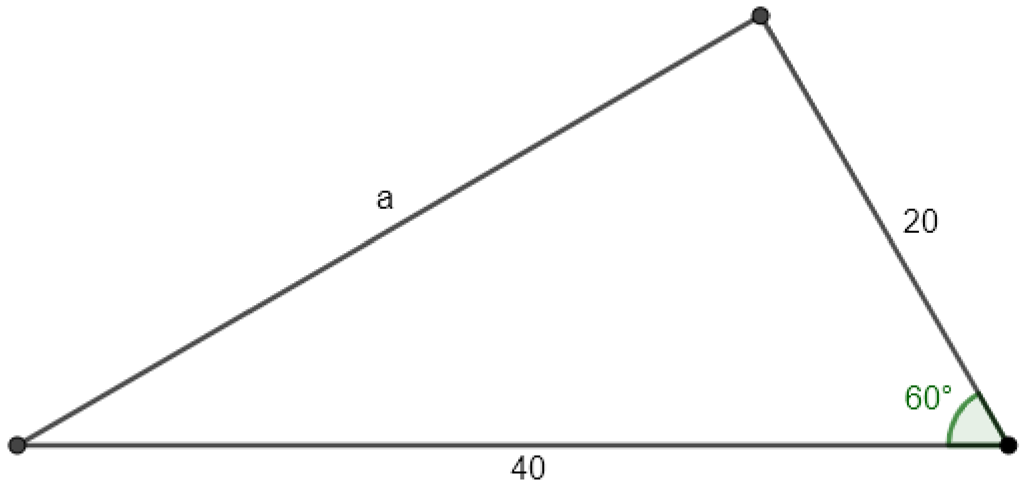
b) 93.

c) 92.

d) 91.

e) 90.

Comentário:



Usando a leis dos cossenos, temos:

$$a^2 = 40^2 + 20^2 - 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot \cos 60° = 1600 + 400 - 1600 \cdot \frac{1}{2} = 1200$$

$$\therefore a = 20\sqrt{3} = 20 \cdot 1{,}7 = 34$$

Logo, o perímetro do triângulo é

$$P = 40 + 20 + a = 40 + 20 + 34 = 94.$$

Gabarito: "a".

---

82. (ESA/2007) [Adaptada]

Seja um ponto P pertencente a um dos lados de um ângulo de $60°$, distante $4,2\ cm$ do vértice. Qual é a distância, em cm, deste ponto à bissetriz do ângulo?

a) $2,2$

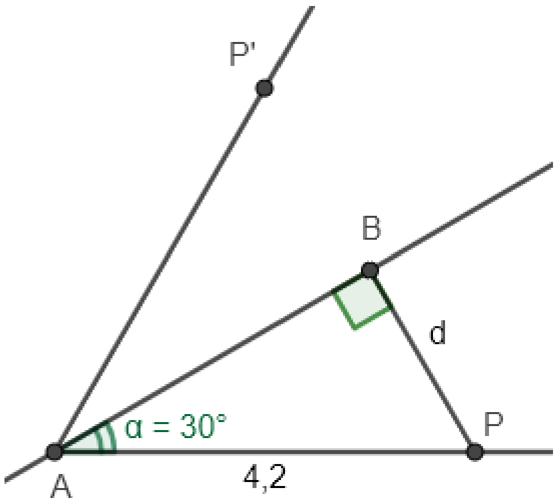
b) $\mathbf{2,1}$

c) $\mathbf{2,0}$

d) $\mathbf{2,3}$

e) $\mathbf{2,4}$

Comentário:



No triângulo retângulo ΔABP, temos:

$$\text{sen}\, P\hat{A}B = \frac{BP}{AP} \Leftrightarrow \text{sen}\, 30° = \frac{d}{4{,}2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{4{,}2} \therefore d = 2{,}1$$

Gabarito: "b".

---

83. (ESA/2006)

O triângulo ABC retângulo em A e que $\angle ABC > \angle ACD$. A bissetriz interna de $\hat{A}$ intersepta o lado BC em D. Seja $HD \perp BC$ (H entre A e C). Nestas condições podemos afirmar que o ângulo HBD mede, em graus:

a) 35

b) 25

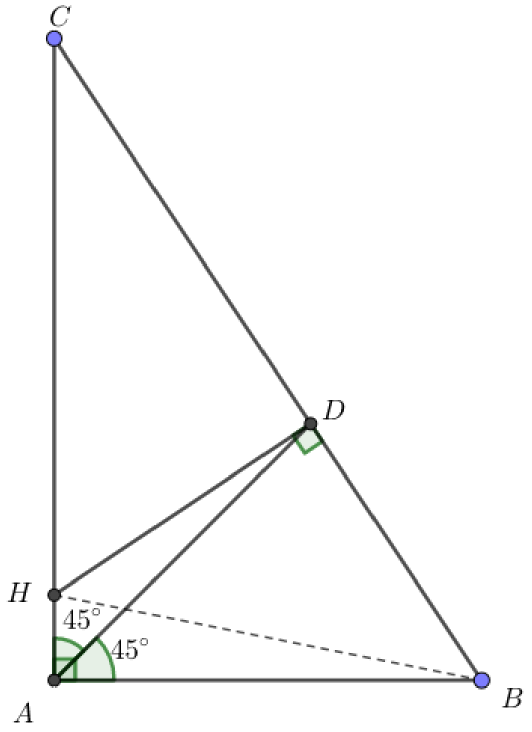
c) 45

d) 65

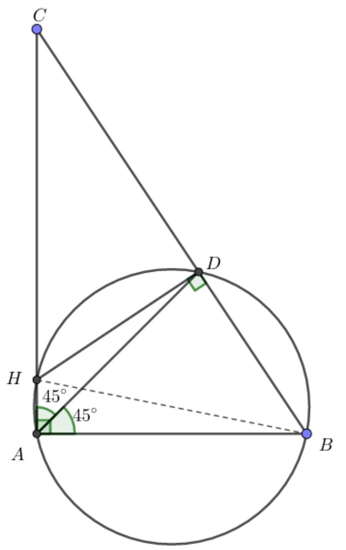
e) 55

Comentários

Fazendo o desenho do que é descrito no enunciado:



Veja na figura o quadrilátero $ADHB$. Seus ângulos opostos $\angle BAH$ e $\angle HDB$ são retos. Portanto, podemos afirmar categoricamente que o quadrilátero $AHDB$ é inscritível em uma circunferência, e mais: Por $\angle BAH = \angle HDB = 90°$, o diâmetro dessa circunferência é HB. Essa circunferência pode ser vista abaixo:



Por esse motivo, veja que o ângulo que se pede $\angle HBD$ é o ângulo inscrito que olha para o arco HD. Entretanto veja que o ângulo inscrito $\angle HAD = 45°$ também olha para o mesmo arco. Isso implica que eles são iguais:

$$\angle HBD = \angle HAD = 45°$$

Gabarito: "c".

84. (ESA/2004)

A soma dos lados de um triângulo ABC é 140cm. A bissetriz interna do ângulo A divide o segmento oposto BC em dois outros segmentos: 20cm e 36cm. As medidas dos lados AB e AC são, respectivamente:

a) 42cm e 42cm

b) 60cm e 24cm

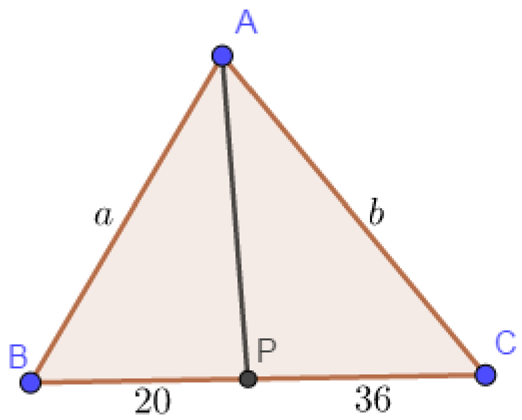
c) 34cm e 50cm

d) 32cm e 52cm

e) 30cm e 54cm

Comentários

Fazendo o desenho do triângulo e bissetriz, temos:



Dessa maneira, usando teorema da bissetriz interna:

$$\frac{a}{b} = \frac{20}{36} \Rightarrow 5b = 9a$$

Por outro lado:

$$a + b + 56 = 140 \Rightarrow a + b = 84 \Rightarrow 5a + 5b = 420 \Rightarrow 14a = 420$$

$$\Rightarrow a = 30 \Rightarrow b = 54$$

Gabarito: "e".

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da aula.

Nessa aula, vimos como calcular as cevianas de um triângulo qualquer e também alguns teoremas que podem ser úteis na resolução das questões. Veremos que, normalmente, as bancas cobram questões sobre os pontos notáveis do triângulo e o cálculo das suas cevianas.

As questões de geometria das provas costumam misturar figuras geométricas, então, tente aprender a trabalhar com cada uma delas.

Caso fique alguma dúvida ou tenha alguma crítica/sugestão, pode entrar em contato:

FALE COMIGO

/victorso

/profvictorso

/profvictorso

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.

[2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.

[3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.

11. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.