



# EXTENSIVO 2023



## FÍSICA PARA ITA

ÓTICA II



Prof. João Maldonado

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>1. MOVIMENTO RELATIVO ENTRE ESPELHO PLANO E OBJETO</b>	<b>4</b>
<b>1.1. MOVIMENTO GENERALIZADO</b>	<b>4</b>
1.1.1. INTRODUÇÃO MATEMÁTICA	4
1.1.2. ROTAÇÃO DE VETOR	5
1.1.3. MOVIMENTO RELATIVO	5
<b>1.2. TRANSLAÇÃO PURA</b>	<b>7</b>
1.2.2. PROPRIEDADES	8
<b>1.3. ROTAÇÃO PURA</b>	<b>8</b>
4.3.1. SITUAÇÃO SIMPLIFICADA	9
<b>2. ESPELHOS ESFÉRICOS</b>	<b>11</b>
2.0.1. ESPELHO CÔNCAVO	11
2.0.2. ESPELHO CONVEXO	11
2.0.3. TERMOS IMPORTANTES	11
2.0.4. DEFINIÇÃO E POSIÇÃO DO FOCO PRINCIPAL	11
2.0.5. PLANO FOCAL	13
2.0.5. REFERÊNCIA E CONVENÇÃO PARA DISTÂNCIAS VERTICAIS	14
2.0.6. CONVENÇÃO PARA DISTÂNCIAS HORIZONTAIS	15
<b>2.1. EQUAÇÃO DE GAUSS PARA ESPELHOS ESFÉRICOS</b>	<b>15</b>
<b>2.2. RAIOS NOTÁVEIS</b>	<b>17</b>
<b>2.3. AUMENTO LINEAR</b>	<b>18</b>
2.3.1. CLASSIFICAÇÃO	19
<b>2.4. POSIÇÃO DAS IMAGENS</b>	<b>19</b>
2.4.1. ESPELHO CÔNCAVO	19
2.4.2. ESPELHO CONVEXO	20
<b>2.5. CAMPO VISUAL DE UM ESPELHO ESFÉRICO</b>	<b>21</b>
<b>2.6. RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE DO OBJETO E VELOCIDADE DA IMAGEM</b>	<b>21</b>
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>23</b>
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>24</b>
<b>8. VERSÃO DE AULA</b>	<b>Error! Bookmark not defined.</b>



## INTRODUÇÃO

Nesta aula nos aprofundaremos em Ótica Geométrica. Estudaremos os instrumentos óticos que funcionam utilizando-se da reflexão (espelhos).

Problemas que envolvem a rotação de espelhos são muito difíceis, portanto, fiquem atentos. Aos que irão prestar IME, ele adora esse tópico.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



@prof.maldonado



# 1. MOVIMENTO RELATIVO ENTRE ESPELHO PLANO E OBJETO

## 1.1. MOVIMENTO GENERALIZADO

### 1.1.1. INTRODUÇÃO MATEMÁTICA

Antes de iniciarmos nosso estudo de movimento relativo, faremos uma breve discussão sobre números complexos. Usaremos os números complexos com o objetivo de realizar translações e rotações de maneira simplificada.

Ao se compreender completamente essa análise, é garantida o entendimento completo sobre movimentos envolvendo espelhos planos. À primeira vista a análise pode apresentar-se confusa e complexa, porém releia várias vezes, até que a teoria se torne familiar.

Considere os números complexos  $A = x_A + i \cdot y_A$  e  $B = x_B + i \cdot y_B$ . Tome o vetor  $\overrightarrow{AB}$ , posicionado no plano dos complexos de Argand-Gauss.

Considere também o simétrico desse vetor em relação ao eixo dos reais. Chamaremos esse vetor de  $\overrightarrow{A'B'}$ .

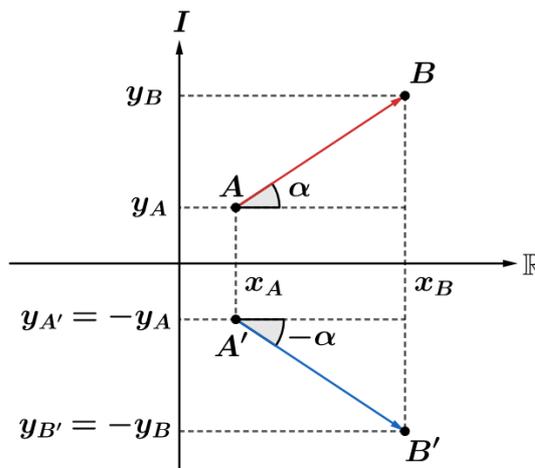


Figura 1: Representação de um vetor e seu simétrico em relação ao eixo dos reais no plano Argand-Gauss.

Os vetores (números complexos)  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{A'B'}$  podem ser escritos da forma algébrica e da forma trigonométrica:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) + i \cdot (y_B - y_A) = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{cis}(\alpha)$$

$$\overrightarrow{A'B'} = (x_B - x_A) - i \cdot (y_B - y_A) = |\overrightarrow{A'B'}| \cdot \text{cis}(-\alpha)$$

Note que o vetor  $\overrightarrow{A'B'}$  é conjugado do vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Representamos da seguinte forma:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overline{\overrightarrow{AB}}$$



Assim, podemos dizer que o vetor  $\overline{A'B'}$  é a imagem do vetor  $\overline{AB}$ , considerando que o eixo dos reais é um espelho plano.

Se um espelho plano está na horizontal, adotando eixos ortonormais, e o espelho estiver contido na reta do eixo dos reais, então a imagem de um vetor complexo objeto é dada pelo seu conjugado.

### 1.1.2. ROTAÇÃO DE VETOR

Outra propriedade interessante sobre números complexos é a rotação de vetores. Tome um vetor  $\overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot cis(\alpha)$ .

Se o vetor  $\overline{AB}$  é multiplicado por  $cis(\beta)$ , com  $\beta > 0$ , então o vetor resultante terá o mesmo módulo de  $\overline{AB}$  mas ele será rotacionado no sentido anti-horário de um ângulo  $\beta$ .

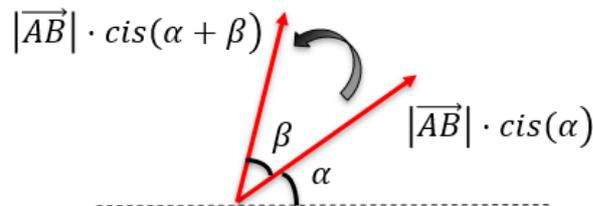


Figura 2: Vetor  $\overline{AB}$  sendo rotacionado de um angula  $\beta$ .

Se o ângulo  $\beta < 0$ , o vetor será rotacionado de  $\beta$  no sentido anti-horário.

### 1.1.3. MOVIMENTO RELATIVO

Considere um objeto  $O$  com movimento relativo ao espelho (espelho em repouso) de vetor posição  $\vec{r}_{O/E} = (x(t)_{O/E}, y(t)_{O/E})$ . Um espelho plano  $E$  forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. O objeto está de frente para a parte refletora do espelho.

Podemos associar ao vetor posição um número complexo:

$$r_{O/E} = x(t)_{O/E} + i \cdot y(t)_{O/E}$$

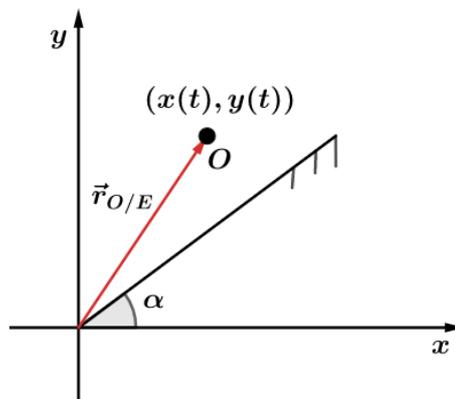


Figura 3: Objeto em frente a um espelho inclinado de  $\alpha$  em relação ao eixo  $x$ .

Para encontrar a imagem do objeto através do complexo conjugado, é conveniente que o espelho esteja na horizontal.



Faremos uma rotação de todos os elementos do sistema para que o espelho fique na horizontal. Para isso multiplicaremos todo o sistema por  $cis(-\alpha)$ .

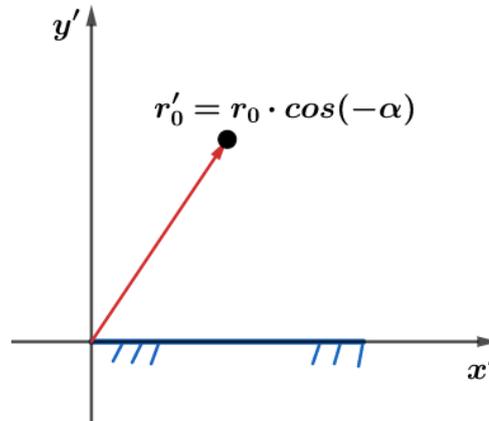


Figura 4: Sistema após a rotação de  $-\alpha$ .

Para esse novo sistema, o vetor complexo objeto  $r'_o$  é dado por:

$$r'_{o/E} = r_{o/E} \cdot cis(-\alpha)$$

A imagem ( $r_{img/E}(x'y')$ ) deste objeto, em relação ao sistema  $X' - Y'$ , é dada pelo conjugado do vetor complexo  $r'_{o/E}$ .

$$r_{img}(x'y') = \overline{r'_{o/E} \cdot cis(-\alpha)} = \overline{r_{o/E}} \cdot cis(\alpha)$$

Entretanto, queremos a imagem em relação ao eixo original. Para isso, basta girar de tal que anule a rotação dos eixos. Para desfazer a rotação original, multiplicamos todo o sistema por  $cis(\alpha)$ .

Deste modo, o vetor imagem final ( $r_{img/E}$ ) do objeto (em relação ao espelho) em relação aos eixos originais é dado por:

$$r_{img/E} = \overline{r_{o/E}} \cdot cis(\alpha) \cdot cis(\alpha)$$

$$r_{img/E} = \overline{r_{o/E}} \cdot cis(2\alpha)$$

Para  $r_{img/E} = x'(t)_{I/E} + i \cdot y'(t)_{I/E}$  e  $r_{o/E} = x(t)_{O/E} + i \cdot y(t)_{O/E}$ , temos:

$$x'(t)_{I/E} + i \cdot y'(t)_{I/E} = [x(t)_{O/E} - i \cdot y(t)_{O/E}] \cdot (\cos(2\alpha) + i \cdot \text{sen}(2\alpha))$$

Assim, chegamos as equações do movimento relativo:

$$\boxed{x'(t)_{I/E} = x(t)_{O/E} \cdot \cos(2\alpha) + y(t)_{O/E} \cdot \text{sen}(2\alpha)}$$

$$\boxed{y'(t)_{I/E} = x(t)_{O/E} \cdot \text{sen}(2\alpha) - y(t)_{O/E} \cdot \cos(2\alpha)}$$

Desta maneira, conseguimos determinar as posições da imagem em função do tempo a partir da posição do objeto em função do tempo.



## 1.2. TRANSLAÇÃO PURA

Considere um espelho plano vertical que em relação à Terra tem equação  $r_{E/T} = (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T})$ .

O vetor objeto tem equação  $r_o = x(t)_{O/T} + i \cdot y(t)_{O/T}$ , também em relação à terra.

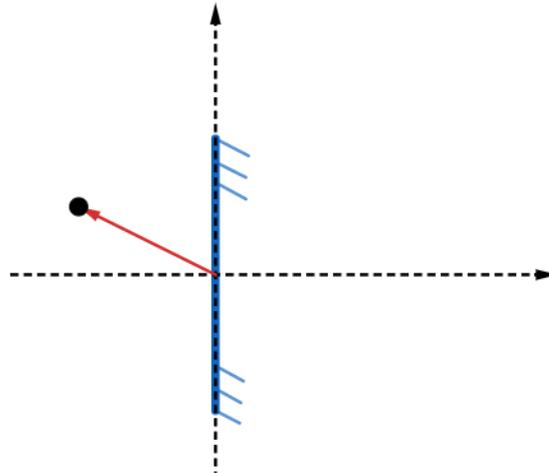


Figura 5: Objeto frente a um espelho vertical.

Para usar a relação que encontramos para a imagem no tópico anterior, a equação horária do objeto deve ser em relação ao espelho e, portanto, o espelho deve estar em repouso. Parando o espelho, temos:

$$\begin{aligned} r_{O/E} &= r_{O/T} - r_{E/T} \\ r_{O/E} &= (x(t)_{O/T}, y(t)_{O/T}) - (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T}) \\ r_{O/E} &= (x(t)_{O/T} - x(t)_{E/T}, y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T}) \end{aligned}$$

Para encontrar a imagem, basta aplicar nas relações encontradas para movimento relativo. Neste caso particular  $\alpha = 90^\circ$ , então:

$$\begin{aligned} x'(t)_{I/E} &= (x(t)_{O/T} - x(t)_{E/T}) \cdot \cos(2 \cdot 90^\circ) + (y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T}) \cdot \text{sen}(2 \cdot 90^\circ) \\ y'(t)_{I/E} &= (x(t)_{O/T} - x(t)_{E/T}) \cdot \text{sen}(2 \cdot 90^\circ) - (y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T}) \cdot \cos(2 \cdot 90^\circ) \\ \begin{cases} x'(t)_{I/E} &= x(t)_{E/T} - x(t)_{O/T} \\ y'(t)_{I/E} &= y(t)_{O/T} - y(t)_{E/T} \end{cases} \end{aligned}$$

As posições das imagens encontrada acima estão em relação ao referencial do espelho. Para voltar para o referencial da terra, somamos o vetor  $r_E = (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T})$ . Portanto, as posições da imagem em relação à terra são:

$$\boxed{x'(t)_{I/T} = 2 \cdot x(t)_{E/T} - x(t)_{O/T}}$$

$$\boxed{y'(t)_{I/T} = y(t)_{O/T}}$$

Note que se há apenas translação pura do espelho, a posição do espelho está no ponto meio do objeto e da imagem, pois:



$$x'(t)_{I/T} = 2 \cdot x(t)_{E/T} - x(t)_{O/T} \Rightarrow x(t)_{E/T} = \frac{x'(t)_{I/T} + x(t)_{O/T}}{2}$$

Se quisermos saber a relação entre as velocidades, basta derivar em função do tempo.

$$v_x'(t)_{I/T} = 2 \cdot v_x(t)_{E/T} - v_x(t)_{O/T}$$

$$v_y'(t)_{I/T} = v_y(t)_{O/T}$$

**IMPORTANTE:** A relatividade dos movimentos, utilizada para a demonstração acima, só é considerada para a translação. Se o corpo não translada, a posição dele em relação ao corpo é igual a sua posição em relação à terra, se a origem de rotação pura for centro do espelho.

### 1.2.2. PROPRIEDADES

- Se o espelho está em repouso, a velocidade da imagem em módulo é igual a velocidade do objeto.
- Se a velocidade do objeto é nula, a velocidade da imagem é o dobro da velocidade do espelho.

### 1.3. ROTAÇÃO PURA

Considere um espelho plano que tem centro na origem e que no instante inicial,  $t = 0$  s, começa a rodar em torno da origem com velocidade angular  $\omega$ , em relação à terra no sentido horário. Um objeto tem equação horária  $r_{E/T} = (x(t)_{E/T}, y(t)_{E/T})$ , também em relação à Terra.

Como não há translação do espelho, a posição do objeto em relação à Terra é análoga a posição do objeto em relação ao espelho.

$$r_{O/T} = (x(t)_{O/T}, y(t)_{O/T}) = r_{O/E} = (x(t)_{O/E}, y(t)_{O/E})$$

Para o caso da rotação pura,  $\alpha = \alpha_0 - \omega \cdot t$ . Substituindo nas expressões do movimento relativo, temos:

$$x'(t)_{I/T} = x(t)_{O/T} \cdot \cos(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t) + y(t)_{O/T} \cdot \sin(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t)$$

$$y'(t)_{I/T} = x(t)_{O/T} \cdot \sin(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t) - y(t)_{O/T} \cdot \cos(2\alpha_0 - 2\omega \cdot t)$$

Denotando  $\theta = 2\alpha_0 - 2\omega \cdot t$ , para encontrar as velocidades, basta derivarmos a posição em relação ao tempo:

(I) Direção  $x$ :

$$v_x'(t)_{I/T} = v_x(t)_{O/T} \cdot \cos\theta + v_y(t)_{O/T} \cdot \sin\theta + 2 \cdot \omega \cdot (x(t)_{O/T} \cdot \sin\theta - y(t)_{O/T} \cdot \cos\theta)$$

(II) Direção  $y$ :

$$v_y'(t)_{I/T} = v_x(t)_{O/T} \cdot \sin\theta - v_y(t)_{O/T} \cdot \cos\theta - 2 \cdot \omega \cdot (x(t)_{O/T} \cdot \cos\theta + y(t)_{O/T} \cdot \sin\theta)$$



### 4.3.1. SITUAÇÃO SIMPLIFICADA

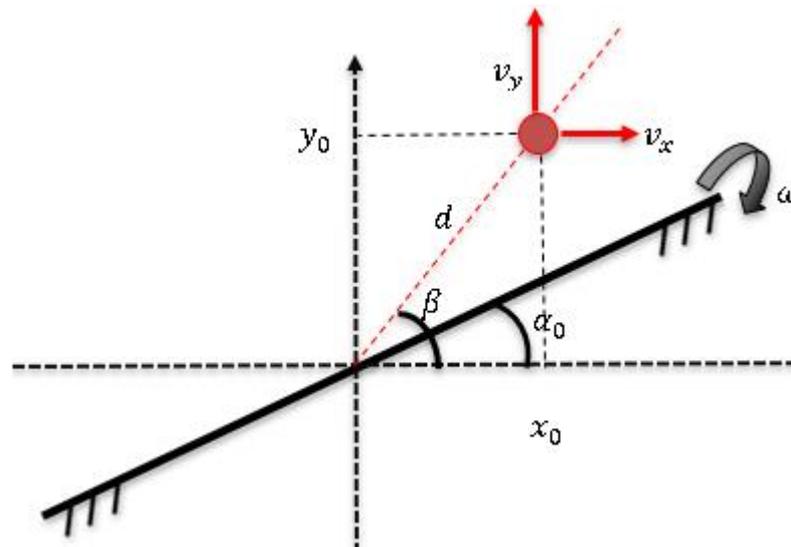


Figura 6: Sistema composto por um corpo com velocidades nos dois eixos e um espelho rotacionando.

Considere que um o objeto esteja se movendo com a equação:

$$r_{O/T} = (x_0 + v_x \cdot t, y_0 + v_y \cdot t)$$

Com:

$$v_{O/T} = (v_x, v_y)$$

Pelo Teorema de Pitágoras podemos escrever que:

$$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Para o instante inicial  $t = 0s$ , temos:

$$r_{O/T} = (x_0, y_0)$$

$$v_{O/T} = (v_x, v_y)$$

Substituindo nas expressões das velocidades:

$$v_x'(t)_{I/T} = v_x \cdot \cos 2\alpha_0 + v_y \cdot \sen 2\alpha_0 + 2 \cdot \omega \cdot (x_0 \cdot \sen 2\alpha_0 - y_0 \cdot \cos 2\alpha_0)$$

$$v_y'(t)_{I/T} = v_x \cdot \sen 2\alpha_0 - v_y \cdot \cos 2\alpha_0 - 2 \cdot \omega \cdot (x_0 \cdot \cos 2\alpha_0 + y_0 \cdot \sen 2\alpha_0)$$

Se pensarmos na velocidade do objeto como,

$$v_x = v \cdot \cos\beta$$

$$v_y = v \cdot \sen\beta$$

E nas posições iniciais como:

$$x_0 = d \cdot \cos\beta$$

$$y_0 = d \cdot \sen\beta$$

Temos as velocidades da imagem como:



$$v_x'(t)_{I/T} = v \cdot \cos(2\alpha_0 - \beta) + 2 \cdot \omega \cdot d \cdot \sin(2\alpha_0 - \beta)$$

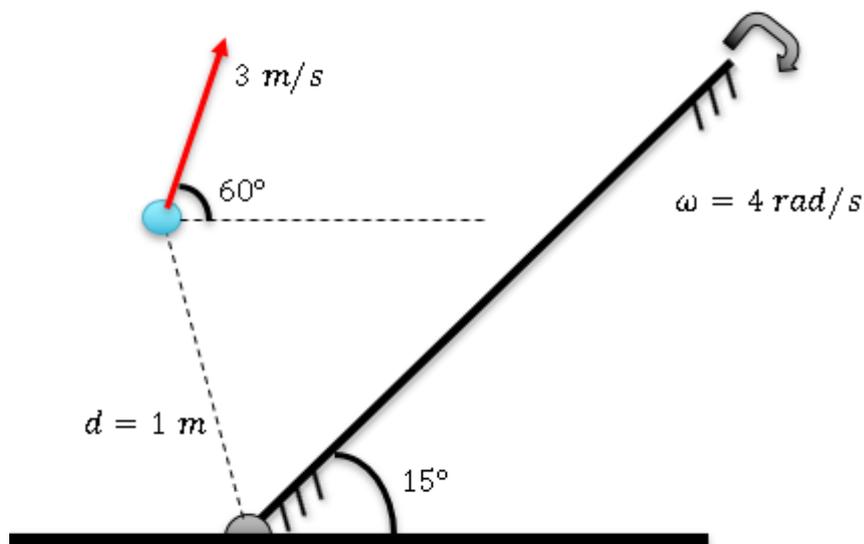
$$v_y'(t)_{I/T} = v \cdot \sin(2\alpha_0 - \beta) - 2 \cdot \omega \cdot d \cdot \cos(2\alpha_0 - \beta)$$

É muito importante você saber demonstrar essas equações e como chegamos nelas, pois elas não são fáceis de decorar e o IME, principalmente, adora essa abordagem.



4.

Determine as componentes da velocidade da imagem, para o instante mostrado abaixo. O espelho gira com velocidade angular 4 rad/s.



**Comentário:**

Aplicando as expressões já deduzidas, temos:

$$v_x'(t)_{I/T} = v \cdot \cos(2\alpha_0 - \beta) + 2 \cdot \omega \cdot d \cdot \sin(2\alpha_0 - \beta)$$

$$v_x'(t)_{I/T} = 3 \cdot \cos(30 - 60) + 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \sin(30 - 60)$$

$$v_x'(t)_{I/T} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4$$

$$v_y'(t)_{I/T} = 3 \cdot \sin(30 - 60) - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos(30 - 60)$$

$$v_y'(t)_{I/T} = -\frac{3}{2} - 4\sqrt{3}$$



## 2. ESPELHOS ESFÉRICOS

Um espelho esférico é uma porção retirada de uma esfera espelhada. Dependendo da região do espelhamento da esfera, obtemos um tipo diferente de espelho esférico.

### 2.0.1. ESPELHO CÔNCAVO

É a porção retirada de uma esfera espelhada internamente.

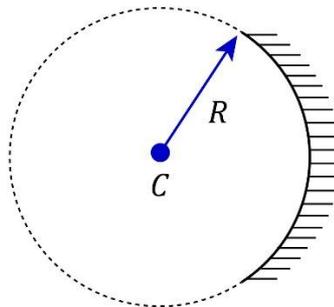


Figura 7: Construção de um espelho côncavo.

### 2.0.2. ESPELHO CONVEXO

É a porção retirada de uma esfera espelhada externamente.

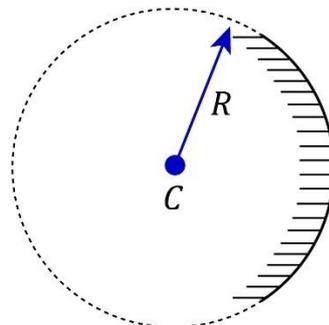


Figura 8: Construção de um espelho convexo.

### 2.0.3. TERMOS IMPORTANTES

*Centro de curvatura (C)* – é o centro da esfera da qual foi retirada a porção.

*Eixo principal* – é um dos diâmetros da esfera de origem.

*Vértice (V) ou Polo (P)* – é o ponto de encontro entre a superfície da esfera de origem e o eixo principal.

### 2.0.4. DEFINIÇÃO E POSIÇÃO DO FOCO PRINCIPAL

Considere um raio de luz que incide paralelamente ao eixo óptico de um espelho côncavo de raio de curvatura  $R$ . O raio incide no espelho a uma altura  $h$  do eixo.



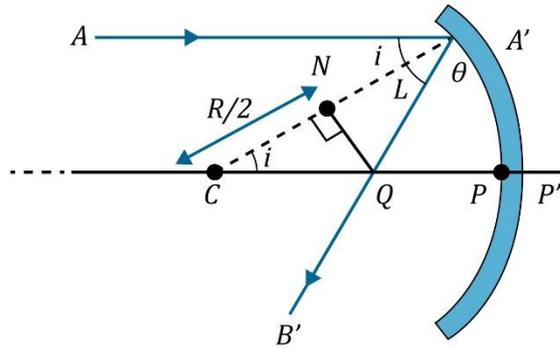


Figura 9: Raios de luz incidindo em um espelho côncavo.

Para o triângulo CNQ:

$$\cos(i) = \frac{R}{2 \cdot CQ} \Rightarrow CQ = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\cos(i)}$$

Da geometria do problema:

$$\cos(i) = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2}$$

Deste modo, temos:

$$CQ = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}$$

(I)  $h \ll R$ :

Para valores de  $h$  muito pequenos, os raios são muito próximos do eixo principal. Esses raios são chamados de para-axiais.

Como  $h \ll R$ ,  $\sqrt{1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2} \rightarrow 1$ . Dessa forma, chegamos que:

$$CQ = \frac{R}{2} = \text{distância focal para raios para - axiais}$$

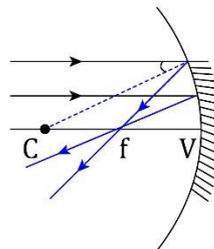


Figura 10: Raios que chegam paralelo ao eixo principal, após a reflexão eles saem pelo foco.

Para a condição de raios para-axiais, o foco principal ( $F$ ) é o ponto de encontro dos raios refletidos que vem do infinito, paralelos ao eixo principal. Além disso, a distância focal é metade do raio de curvatura.

$$f = R/2$$



(II) Para  $h$  não desprezível frente a  $R$ :

Não há um foco bem determinado. Vários pontos do eixo principal são atingidos, após se refletirem no espelho.

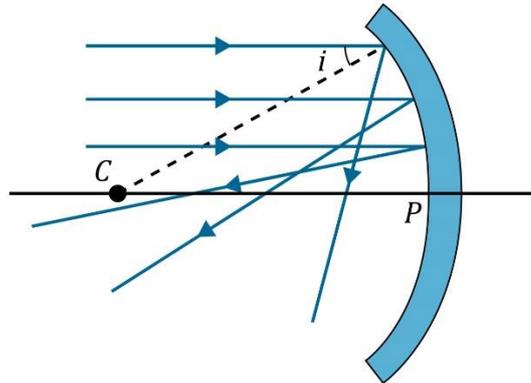


Figura 11: Quando  $h$  não é desprezível em relação a  $R$ , os raios não saem todos pelo foco.

Outra forma de dizer que  $h \ll R$  é considerar que o espelho esférico tem uma abertura muito pequena (menor que  $10^\circ$ ). Cuidado com pegadinhas! Se a questão não deixar claro que os raios são para-axiais e ela for apenas qualitativa, fique atento, pois ele deve estar cobrando justamente se você sabe qual a condição para  $f = R/2$ .

### 2.0.5. PLANO FOCAL

Estudamos o foco principal, mas precisamos ficar atentos pois existem focos secundários.

Considere agora um feixe de raios paralelos entre si, **mas oblíquos** ao eixo principal. Estes raios quando refletem na superfície de algum espelho esférico ainda convergem/divergem para um ponto, entretanto esse novo ponto não estará no eixo óptico. Este novo ponto é chamado de **foco secundário**. Todos os focos secundários pertencem a um plano que contém o foco principal e é perpendicular ao eixo principal. Visualmente:

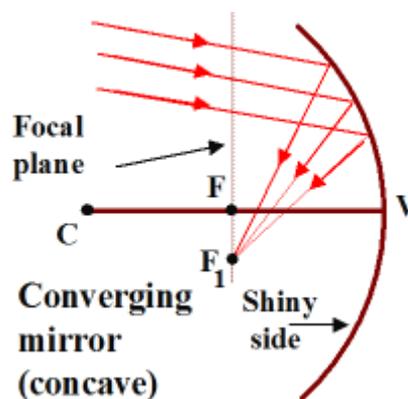


Figura 121.1: Plano focal e um foco secundário de espelho convergente

Podemos provar esse fato de maneira simples. Lembre-se da figura anterior que nós provamos que a distância focal vale  $R/2$ . Vamos rotacionar ela um pouco.



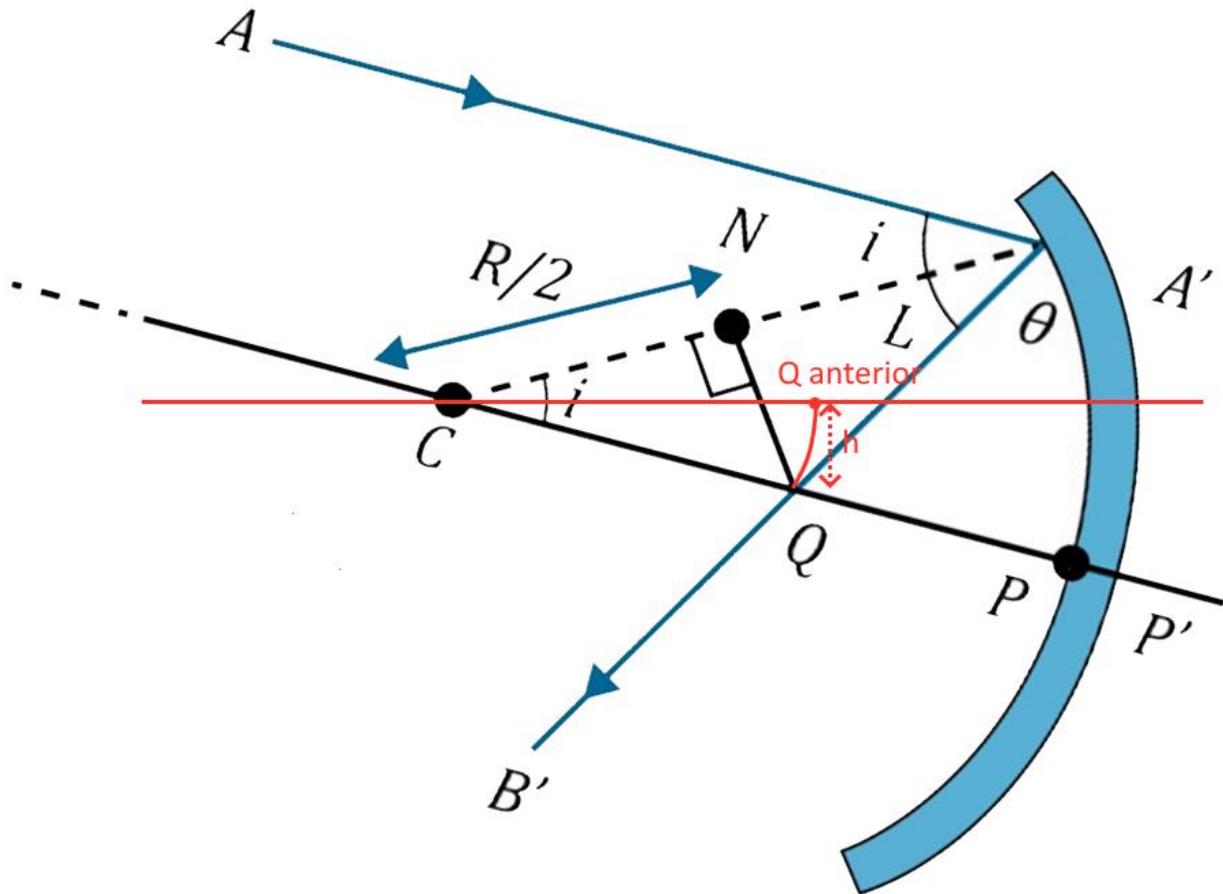


Figura 51.2: Focos secundários

O eixo principal anterior era o em vermelho. Ao rotacionarmos a figura achamos um novo ponto Q, que já provamos estar a  $R/2$  (aproximadamente) de C. O novo ponto Q, então, descreve um arco em torno do centro C. Esta claro que CQ também vale aproximadamente  $R/2$ . E para ângulos pequenos, podemos dizer que Q está praticamente na vertical do antigo foco (provando a existência do plano focal). Chamando  $\alpha$  o ângulo em que o raio oblíquo está inclinado ao eixo principal, a altura do foco secundário em relação ao eixo principal é:

$$h = \frac{R}{2} \sin \alpha \approx \frac{R\alpha}{2}$$

### 2.0.5. REFERÊNCIA E CONVENÇÃO PARA DISTÂNCIAS VERTICAIS

- Todas as distâncias são medidas em relação ao vértice (ou polo).
- Distâncias verticais acima do eixo principal são positivas.
- Distâncias verticais abaixo do eixo principal são negativas.



## 2.0.6. CONVENÇÃO PARA DISTÂNCIAS HORIZONTAIS

Tanto para objetos quanto imagens, a convenção de sinais para distâncias horizontais é a mostrada abaixo.

Para espelhos côncavos e convexos, distâncias do mesmo lado que a superfície espelhada são positivas. Distâncias do lado não espelhado são negativas.

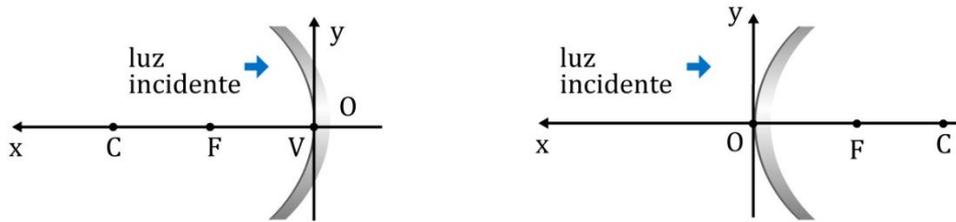


Figura 13: Referencial de Gauss.

## 2.1. EQUAÇÃO DE GAUSS PARA ESPELHOS ESFÉRICOS

Considere um feixe de raio **para-axiais** paralelos que saem de um ponto  $O$ , sobre o eixo principal. Após a reflexão no **espelho** atinge um ponto  $I$ , também sobre o eixo principal do espelho.

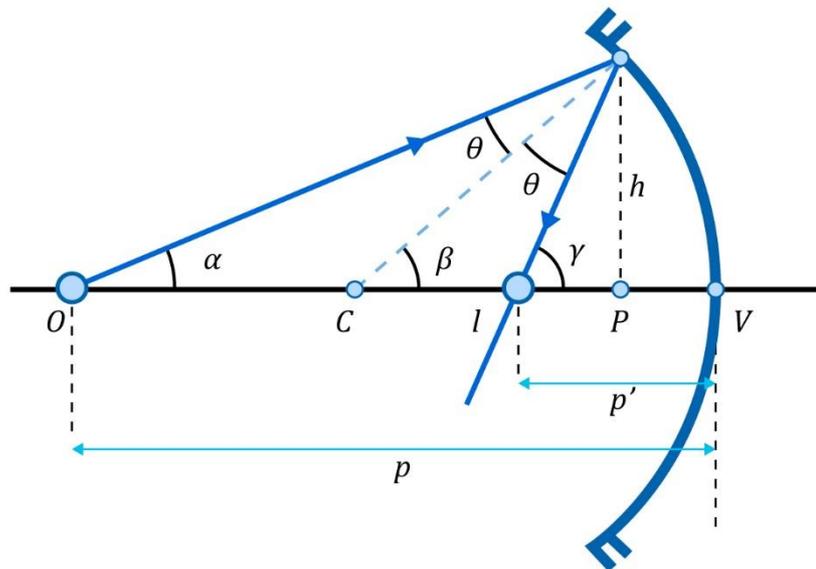


Figura 14: Espelho côncavo sendo incidido por raios para-axiais.

Da geometria e, portanto, dos ângulos externos de triângulos, vem:

$$\alpha + \theta = \beta; \beta + \theta = \gamma \text{ e } \alpha + \gamma = 2\beta$$

Como estamos trabalhando com raio para-axiais, temos a seguinte aproximação:

$$\alpha \approx tg\alpha; \beta \approx tg\beta \text{ e } \gamma \approx tg\gamma$$

E, portanto, temos:

$$\overline{VP} \rightarrow 0, \text{ ou seja, } V \equiv P$$



Isso, implica que:

$$tg\alpha + tg\gamma = 2tg\beta \Rightarrow \frac{h}{OP} + \frac{h}{IP} = 2 \cdot \frac{h}{R} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R}$$

Como o foco é metade do raio de curvatura, chegamos na equação dos pontos conjugados:

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}}$$

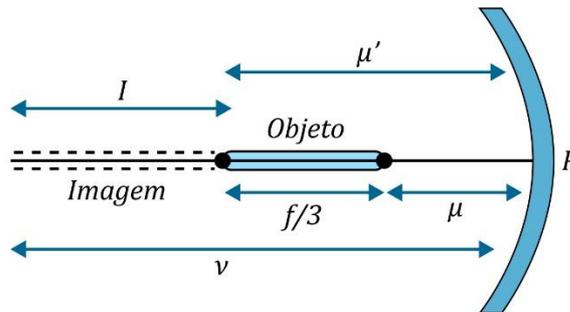
- **Espelhos côncavos:**  $f > 0$
- **Espelhos convexos:**  $f < 0$
- **Espelho plano:**  $f \rightarrow \infty$



5.

Uma haste fina de comprimento  $f/3$  é colocada ao longo do eixo óptico de um espelho côncavo de comprimento focal  $f$ , tal que sua imagem, que é real e alongada, toca apenas uma extremidade da haste. Calcule o aumento.

**Comentário:**



Se o comprimento da imagem vale  $I$ , temos:

$$A = \frac{I}{f/3} \Rightarrow I = A \cdot \frac{f}{3}$$

O final da imagem coincide com o objeto, pois este ponto deve coincidir com o centro de curvatura do espelho para que esta condição seja satisfeita. Então:

$$u' = 2f$$

Assim:

$$u' = u + \frac{f}{3} \Rightarrow u = 2f - \frac{f}{3} \Rightarrow u = \frac{5f}{3}$$

$$v = u' + I \Rightarrow v = 2f + A \cdot \frac{f}{3} \Rightarrow v = f \left( 2 + \frac{A}{3} \right)$$



Utilizando a equação de Gauss:

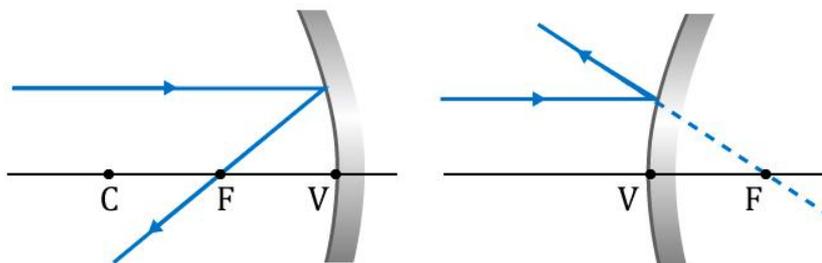
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{5f}{3}} + \frac{1}{f\left(2 + \frac{A}{3}\right)}$$

$$1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{2 + \frac{A}{3}} \Rightarrow \boxed{A = 1,5}$$

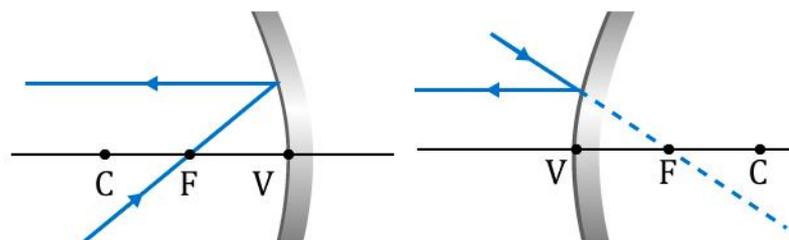
## 2.2. RAIOS NOTÁVEIS

Para os espelhos esféricos, temos alguns raios notáveis que facilitam a construção de uma imagem. Veremos alguns deles abaixo:

**1º Raio:** Todo raio luminoso que incide paralelamente ao eixo principal se reflete alinhado com o foco principal.

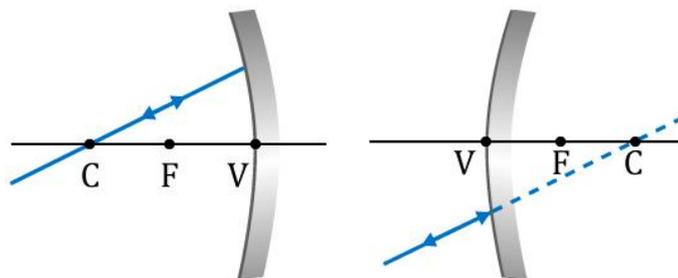


**2º Raio:** Todo raio luminoso que incide alinhado com o foco principal se reflete paralelamente ao eixo principal.

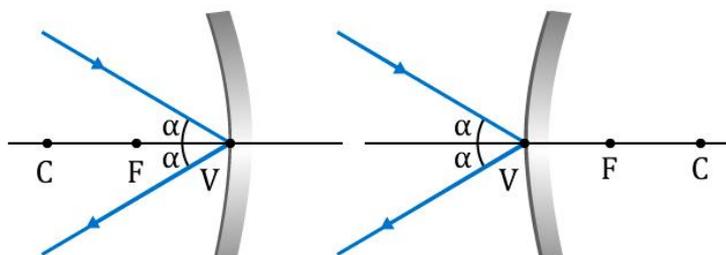


**3º Raio:** Todo raio que incide na direção do centro de curvatura, reflete-se e volta na mesma direção, mas no sentido oposto.





**4º Raio:** Todo raio luminoso que incide no vértice do espelho gera, relativamente ao eixo principal, um raio refletido simétrico.



### 2.3. AUMENTO LINEAR

O aumento é a medida do poder de ampliação ou redução de um instrumento ópticos. Para os espelhos esféricos o aumento é linear e é dado por:

$$A = \frac{h_i}{h_o} = \frac{\text{comprimento da imagem}}{\text{comprimento do objeto}}$$

Considere um objeto e uma imagem, produzida por um espelho côncavo. Utilizando o raio quatro, mostrado no tópico acima, temos:



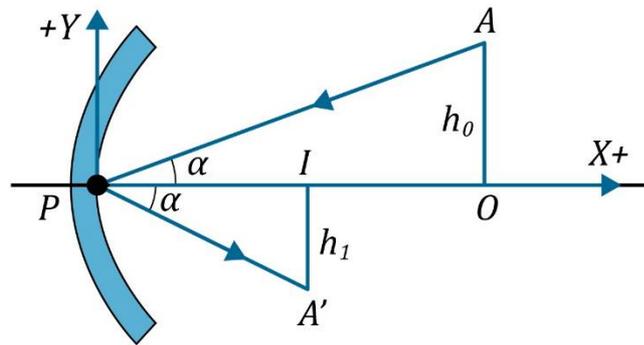


Figura 15: Determinação do aumento linear para um espelho côncavo.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{PO} = \frac{A'I}{PI} \Rightarrow \frac{h_o}{p} = \frac{-h_i}{p'} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = -\frac{p'}{p}$$

Desta forma, temos:

$$A = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{p'}{p}$$

Apesar da demonstração ser feita para o espelho côncavo, ela também é válida para espelhos convexos. Pela equação dos pontos conjugados, podemos reescrever o aumento linear da seguinte forma:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{p'}{p} + 1 = \frac{p'}{f} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{p'}{f} - 1 \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{p' - f}{f} \Rightarrow -\frac{p'}{p} = \frac{f - p'}{f}$$

Ou ainda:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p - f} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{f}{p - f}$$

$$\therefore A = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{p'}{p} = \frac{f}{f - p}$$

### 2.3.1. CLASSIFICAÇÃO

(I) Imagem invertida ( $A < 0$ ):

- Uma imagem é invertida se o seu aumento é negativo.

(II) Imagem direita ( $A > 0$ ):

- Uma imagem é direita se o seu aumento é positivo.

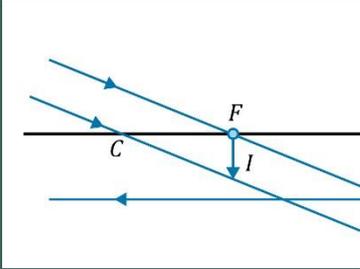
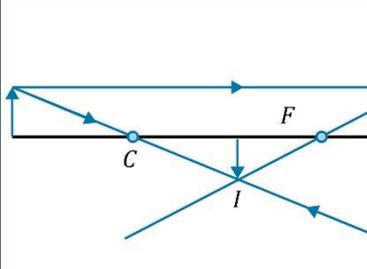
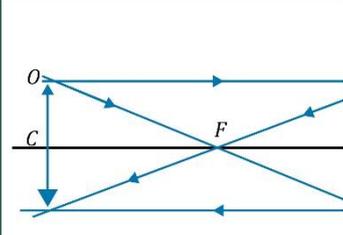
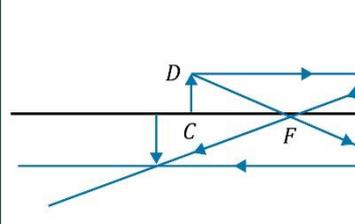
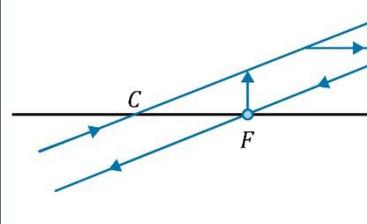
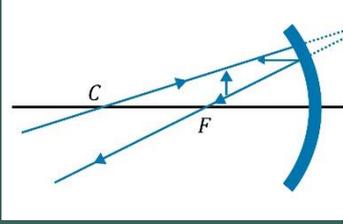
## 2.4. POSIÇÃO DAS IMAGENS

A posição da imagem depende da posição do objeto em relação ao vértice do espelho esférico. Para cada posição do objeto, imagens com características distintas são formadas.

### 2.4.1. ESPELHO CÔNCAVO

As possíveis posição do objeto e da imagem diante de um espelho côncavo são:

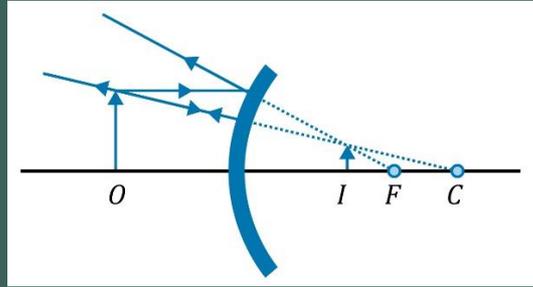


<p>Objeto real está no infinito (<math>p \rightarrow \infty</math>)</p>	<p>Objeto real após o centro de curvatura (<math>2f &lt; p &lt; \infty</math>)</p>	<p>Objeto real está no centro de curvatura <math>p = 2f</math></p>
 <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem real.</li> <li>• Imagem invertida.</li> <li>• A imagem se forma no foco do espelho</li> </ul>	 <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem real.</li> <li>• Imagem invertida.</li> <li>• Imagem está entre o foco e o centro de curvatura.</li> <li>• Imagem é menor que o objeto.</li> </ul>	 <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem real.</li> <li>• Imagem invertida.</li> <li>• Imagem está no centro de curvatura.</li> <li>• Imagem tem o mesmo tamanho do objeto.</li> </ul>
<p>Objeto real está entre o centro e o foco (<math>f &lt; p &lt; 2f</math>)</p>	<p>Objeto real está no foco (<math>p = f</math>)</p>	<p>Objeto real entre o foco e vértice (<math>0 &lt; p &lt; f</math>)</p>
 <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem real.</li> <li>• Imagem invertida.</li> <li>• Imagem é maior que o objeto.</li> </ul>	 <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem imprópria.</li> <li>• Imagem está localizada no infinito.</li> </ul>	 <p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imagem virtual.</li> <li>• Imagem direita.</li> <li>• Imagem maior que o objeto.</li> </ul>

### 2.4.2. ESPELHO CONVEXO

Objeto real em qualquer posição





**Características:**

- Imagem virtual.
- Imagem direita.
- Imagem menor que o objeto.
- Imagem está entre o vértice e o foco.

## 2.5. CAMPO VISUAL DE UM ESPELHO ESFÉRICO

Considere um observador em frente a um espelho convexo de raio  $R$ . Determinaremos o campo visual deste observador. Seguiremos os mesmos passos utilizados no espelho plano: Consideraremos o espelho côncavo.

- 1) Determinaremos a imagem do observador.
- 2) Ligaremos essa imagem às extremidades do espelho.

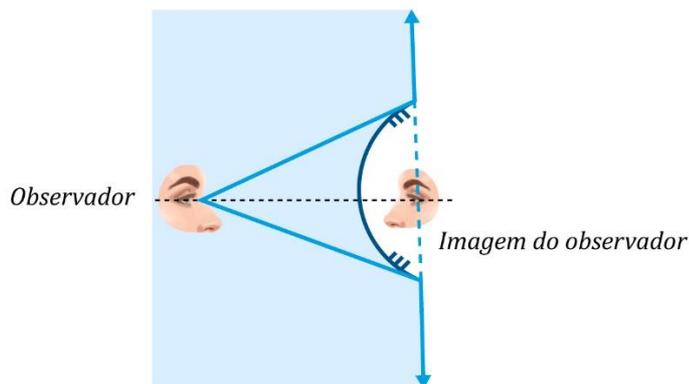


Figura 16: Campo visual de um espelho esférico.

Para o espelho convexo, realizamos o mesmo procedimento.

## 2.6. RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE DO OBJETO E VELOCIDADE DA IMAGEM

Considere um objeto em frente a um espelho esférico de foco  $f$ . O objeto possui velocidade  $\vec{v}_{OBJ}$ . Para encontrar a velocidade da imagem, utilizaremos a equação de Gauss para espelhos esféricos, considerando raios para-axiais.



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

Derivando a expressão em relação ao tempo:

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{p \cdot f}{p - f} \right)$$

$$\frac{dp'}{dt} = \left( \frac{\frac{dp}{dt} \cdot f \cdot (p - f) - p \cdot f \cdot \frac{dp}{dt}}{(p - f)^2} \right)$$

$$\frac{dp'}{dt} = - \frac{f^2}{(p - f)^2} \cdot \frac{dp}{dt}$$

A velocidade do objeto é dada por:

$$v_{OBJ} = \frac{dp}{dt}$$

Deste modo, sendo a velocidade da imagem  $\frac{dp'}{dt}$ , temos:

$$v_{IMG} = - \frac{f^2}{(p - f)^2} \cdot v_{OBJ}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



6.

Considere um espelho côncavo de raio de curvatura 20 cm, que se move para a direita com velocidade 1 m/s, e um objeto que está a 15 cm do vértice desse espelho. O objeto se move com velocidade 10 m/s para a esquerda. As velocidades estão na mesma direção. Encontre a velocidade da imagem.

**Comentário:**

A posição do objeto é dada por:

$$p = 15 \text{ cm}$$

A expressão para a velocidade da imagem é dada por:

$$v_{IMG/E} = - \frac{f^2}{(p - f)^2} \cdot v_{OBJ/E}$$

A velocidade do objeto e da imagem são em relação ao espelho em repouso.

$$v_{OBJ/E} = (-10) - (1) = -11 \text{ m/s}$$

Assim, temos:



$$v_{IMG/E} = -\frac{10^2}{(15 - 10)^2} \cdot (-11) = +44 \text{ m/s}$$

Em relação a terra, temos:

$$v_{IMG/T} = v_{IMG/E} + v_{E/T}$$

$$v_{IMG/T} = 44 + 1$$

$$v_{IMG/T} = 45 \text{ m/s}$$

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na próxima aula, daremos continuidade ao estudo da Óptica Geométrica, trabalhando com refração, diopros, lentes esféricas, equação dos fabricantes. Vamos que vamos!

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



 @prof.maldonado



## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 4. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 523p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 2. 9ª ed. Moderna. 532p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 2. 10ª ed. LTC. 297p.
- [6] V. Zubov, V. Shalnov. Problem in Physics. 2ª ed MIR, 1985. 301p.

