# PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Na apostila anterior entendemos o que é uma sequência numérica e uma sequência especial: a progressão aritmética. Agora iremos estudar a outra progressão super importante, a progressão geométrica, carinhosamente chamada de PG!

> Progressão Geométrica é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior multiplicado por uma razão constante $q$.

Antes de falarmos sobre a lei de formação da PG quero te explicar que, assim como na PA, costumamos chamar o segundo termo de uma PG de $a_2$, o terceiro termo de $a_3$, o quarto termo de $a_4$, e um termo n qualquer de $a_n$.

## LEI DE FORMAÇÃO DA PG

A sequência $(2, 6, 18, 54, \ldots)$ lhe parece uma progressão geométrica? Bom, que é uma progressão não nos resta dúvida. A dúvida seria se é uma progressão geométrica! E sim, é uma PG, porque para encontrar o termo $a_2$, basta multiplicarmos o termo $a_1$ pela razão 3, ou seja, $a_2=a_1\times 3$. Assim como, para encontrar o terceiro termo basta fazer $a_3=a_2\times 3$. Do mesmo modo, para encontrar o quarto faríamos $a_4=a_3\times 3$.

Mas, e se quiséssemos encontrar o quinto termo dessa sequência? Nesse caso bastaria multiplicarmos o $a_4$ por 3, ou seja, $a_5=a_4\times 3$.

Se escrevermos esses termos em função do termo $a_1$ perceba o que acontece:

$$a_2 = a_1 \times 3$$

$$a_3 = (a_1 \times 3) \times 3 = a_1 \times 3^2$$

$$a_4 = (a_1 \times 3 \times 3) \times 3 = a_1 \times 3^3$$

$$a_5 = (a_1 \times 3 \times 3 \times 3) \times 3 = a_1 \times 3^4$$

...

O que ocorre é que para encontrar um termo n qualquer, basta multiplicamos o primeiro termo pela razão q elevada a $(n\text{-}1)$, ou seja, a lei de formação dessa sequência é dada por:

$$a_n = a_1 . 3^{(n-1)}$$

Generalizando, a lei de formação de uma PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, de razão $q$, é dada por:

$$\boxed{a_n = a_1 . q^{(n-1)}}$$

## CLASSIFICAÇÃO DE UMA PG

No exemplo anterior tínhamos uma PG onde cada termo era maior que o termo anterior, portanto, podemos dizer que se tratava de uma progressão geométrica crescente.

Mas existem também progressões geométricas decrescentes, onde o próximo termo é sempre menor do que o termo atual, como essa PG, por exemplo: $\left(9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots\right)$. Note que para encontrar o próximo termo temos sempre que multiplicar o termo anterior por um terço, logo razão dessa PG é dada por $q = \frac{1}{3}$.

Note também que a razão dessa PG decrescente é um número maior que zero e menor que um. Isso não é coincidência, sempre que o primeiro termo da PG for positivo e a razão for um número entre zero e um, a PG será decrescente.

E, alguém nos disse que a razão não pode ser igual a um? Não, porque ela pode sim! E nesse caso a PG será uma progressão constante. Em resumo:

**Caso $a_1>0$:**

- Se $q>1$ então a PG é crescente.
- Se $0<q<1$ então a PG é decrescente;
- Se $q=1$ a PG é constante;
- Se $q=0$ a PG será estacionária;
- Se $q<0$ a PG será oscilante.

**Caso $a_1=0$:**

- A PG será constante com razão indeterminada.

**Caso $a_1<0$:**

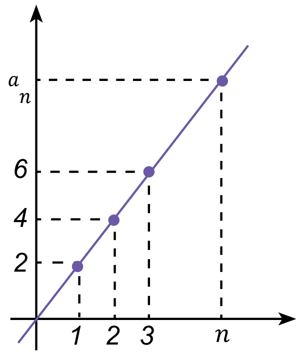
- Se $q>1$ então a PG é decrescente;
- Se $0<q<1$ então a PG é crescente;
- Se $q=1$ a PG é constante;
- Se $q=0$ a PG será estacionária;
- Se $q<0$ a PG será oscilante.

## REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE PA E PG

Você sabia que podemos representar graficamente as progressões? Vamos analisar as representações das PAs e PGs no plano cartesiano que nada mais são do que pontos de uma reta e pontos do gráfico de uma função exponencial, respectivamente.

### Representação da PA

Na Progressão Aritmética $(2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10, \ldots)$, note que $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=8$ e assim por diante. Ou seja, quando $n=1$, $a_n=2$, quando $n=2$, $a_n=4$, para $n=3$, $a_n=6$ e assim sucessivamente. Portanto, definimos que:




Para representar os pontos de uma progressão aritmética no plano cartesiano usamos o par ordenado $(n,a_n)$, onde $n$ é um número natural qualquer maior que zero e o $a_n$ é o termo geral de uma PA.

Observe como fica a representação da progressão que usamos como exemplo e que quando ligamos os pontos formamos uma reta:

## Representação da PG

Para representar os pontos de uma progressão aritmética no plano cartesiano usamos o par ordenado $(n,a_n)$, onde $n$ é um número natural qualquer maior que zero e o $a_n$ é o termo geral de uma PG.

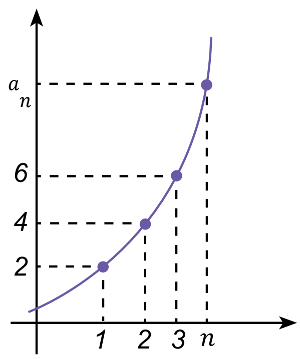
**Exemplo:**

Na PG $(1,2,4,8,16, \ldots)$, quando:

- $n=1 \Rightarrow a_n=1$, formamos o par ordenado $(1,1)$;
- $n=2 \Rightarrow a_n=2$, formamos o par ordenado $(2,2)$;
- $n=3 \Rightarrow a_n=4$, formamos o par ordenado $(3,4)$;
- $n=4 \Rightarrow a_n=8$, formamos o par ordenado $(4,8)$;

  ...

Representando os pontos no plano cartesiano e ligando os pontos obtemos a seguinte representação geométrica:



## NOTAÇÃO AUXILIAR

Falamos anteriormente que para encontrar o próximo termo de uma PG bastava multiplicar o termo pela razão, portanto quando queremos encontrar o termo antecessor temos que fazer a operação inversa, ou seja, dividir o termo atual pela razão da progressão.

Em alguns momentos será muito útil escrever a PG em termos de um termo x (de sua escolha) e da razão q, como quando a PG é finita, o número de termos dela é ímpar e você conhece o produto dos termos dessa PG. Nestes casos você deve representa-la da seguinte forma:

$$\left(\dots, \frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, x.q, x.q^2, \dots\right)$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

Uma caixa em forma de paralelepípedo tem as dimensões em PG. Sabendo que seu volume é *64 cm³* e a soma dos comprimentos de suas dimensões é *21 cm*, calcule a sua maior dimensão.

**Resolução:**

Sabemos que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto de suas três dimensões e sabendo que elas formam uma PG, temos uma progressão de três termos, onde um dos termos vale $x$ e a razão dessa PG é $q$.

$$\left(\frac{x}{q}, x, x.q\right)$$

Como o produto das dimensões é igual a *64*, temos que:

$$\frac{x}{q}.x.x.q = 64$$

$$\Rightarrow x^3 = 64$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Já sabemos que uma das dimensões vale *4*, agora encontraremos a medida das demais dimensões:

Sabendo que a soma das dimensões vale *21* e que *x=4*, temos que:

$$\frac{x}{q} + x + x.q = 21$$

$$\Rightarrow \frac{4}{q} + 4 + 4q = 21$$

$$\Rightarrow \frac{4 + 4q + 4q^2}{q} = 21$$

$$\Rightarrow 4 + 4q + 4q^2 = 21q$$

$$\Rightarrow 4 + 4q - 21q + 4q^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 17q + 4q^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4q^2 - 17q + 4q = 0$$

Por Bháskara temos que:

$$q = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4.4.4}}{2.4}$$

$$\Rightarrow q = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8}$$

$$\Rightarrow \ q = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$q = 4 \ ou \ q = \frac{1}{4}$$

Substituindo as razões possíveis na PG temos:

$$\left(\frac{x}{q}, x, x.q\right) \Rightarrow \left(\frac{4}{4}, 4, 4.4\right) \Rightarrow (\,1, 4, 16)$$

ou

$$\left(\frac{x}{q}, x, x.q\right) \Rightarrow \left(\frac{4}{\frac{1}{4}}, 4, .\frac{1}{4}.4\right) \Rightarrow (\,4.4, 4, .1) \Rightarrow (\,16, 4, 1)$$

Note que dependendo da razão a PG será crescente ou decrescente, mas em ambos os casos temos as três dimensões: $1$, $4$ e $16$. Portanto a maior dimensão desse paralelepípedo é $16\ cm$.

## TERMOS EQUIDISTANTES

Em uma progressão geométrica os termos equidistantes, quando multiplicados, resultam sempre no mesmo resultado.

**Obs.:** Quando a PG tem um número ímpar de elementos, multiplicamos o termo central por ele mesmo.

**Exemplo:**

**1.** Note que na PG (*1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256*) o produto dos termos equidistantes resulta sempre em *256*.

- $a_1.a_9 = 256$ e $a_2.a_8 = 256$:

$$\overbrace{(1, \underbrace{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128}_{2 \times 128 = 256}, 256)}^{1 \times 256 = 256}$$

- $a_3.a_7 = 256$ e $a_4.a_6 = 256$:

$$\overbrace{(1, 2, 4, \underbrace{8, 16, 32}_{8 \times 32 = 256}, 64, 128, 256)}^{4 \times 64 = 256}$$

- $a_5{}^2$:

$$(1, 2, 4, 8, \underbrace{16}_{16^2 = 256}, 32, 64, 128, 256)$$

### Soma dos termos de uma PG

Existem duas formas de somar os termos uma PG, depende diretamente do fato da PG ser finita ou infinita.

Em uma **PG finita** $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, com razão igual a $q$, a soma $S_n$ dos seus elementos é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Já em **PG infinita** $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, com razão igual a $q$, em que $0<|q|<1$, a soma $S_\infty$ dos seus elementos é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

## INTERPOLAÇÃO DE UMA PG

Interpolar meios geométricos é definir os números reais que estão no intervalo dos valores extremos de determinada sequência numérica, tornando-a uma progressão geométrica. Para isso é necessário a fórmula do termo geral.

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

Numa PG, $a_1$=5 e $a_6$=1215. Determine a interpolação entre $a_1$ e $a_6$.

**Resolução:**

Para determinar os números entre 5 e 1215 para que obtenhamos uma PG, devemos primeiramente encontrar a razão:

$a_1 = 5$

$a_6 = 1215$

$n = 6$

Logo:

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

$a_6 = a_1 . q^{6-1}$

$1215 = 5.q^5$

$243 = q^5$

$q = \sqrt[5]{243}$

$q = 3$

Conhecido a razão, basta determinar os demais termos da sequência:

$a_2 = a_1 . q = 5 . 3 = 15$

$a_3 = a_2 . q = 15 . 3 = 45$

$a_4 = a_3 . q = 45 . 3 = 135$

$a_5 = a_4 . q = 135 . 3 = 405$

$a_6 = a_5 . q = 405 . 3 = 1215$

Portanto, a PG obtida é: (5, 15, 45, 135, 405, 1215).

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT


- contato@biologiatotal.com.br
- /biologiajubilut
- Biologia Total com Prof. Jubilut
- @biologiatotaloficial
- @Prof_jubilut
- biologiajubilut