

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): MARCELO MENDES

ASSUNTO: PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

## EAD - ITA

## AULAS 24 E 25



### Resumo Teórico

Uma permutação com repetição é semelhante a uma permutação propriamente dita mas com a possibilidade de repetição dos elementos iniciais. Se existir repetição dos elementos, trocamos o termo conjunto por multiconjunto.

Com um multiconjunto tendo  $n$  elementos, havendo  $n_i$  repetições do  $i$ -ésimo elemento,  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ), o número de permutações com repetições é  $\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$ .

**Teorema 1.** O número de soluções inteiras não-negativas da

$$\text{equação } x_1 + x_2 + \dots + x_n = r \text{ é } \binom{n-1+r}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

**Teorema 2.** O número de soluções inteiras positivas da equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r \text{ é } \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}.$$



### Exercícios de Fixação

01. Sabendo-se que a equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$  possui 10 soluções inteiras positivas, determine  $n$ .
02. (ITA) O número de soluções inteiras e não-negativas da equação  $x + y + z + w = 5$  é:  
A) 36  
B) 48  
C) 52  
D) 54  
E) 56
03. Prove o Primeiro Lema de Kaplansky: De quantos modos podemos formar um subconjunto de  $p$  elementos do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  de modo que não haja números consecutivos?
04. Determine o número de maneiras de escolhermos 5 números dentre os 18 primeiros inteiros positivos tal que a diferença entre quaisquer dois números escolhidos seja pelo menos 2.
05. Seja  $A$  um conjunto com  $m$  elementos e  $B$ , um conjunto com  $n$  elementos. Quantas funções crescentes  $f: A \rightarrow B$  existem?



### Exercícios Propostos

01. Um aspirante ganhou, em uma competição na Escola Naval, quatro livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Português. Querendo manter juntos aqueles da mesma disciplina, concluiu que poderia enfileirá-los numa prateleira de sua estante, de diversos modos. A quantidade de modos com que poderá fazê-lo é:  
A) 48  
B) 72  
C) 192  
D) 864  
E) 1728
02. (ITA) Uma escola possui 18 professores, sendo 7 de matemática, 3 de física e 4 de química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores, de modo que cada uma contenha, exatamente, 5 professores de matemática, no mínimo, 2 de física e, no máximo, 2 de química?  
A) 875  
B) 1877  
C) 1995  
D) 2877  
E) NDA
03. (ITA) Possui 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois, no mínimo, 5. Cada um deverá ter 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer, usando as 18 rosas?  
A) 10  
B) 11  
C) 12  
D) 13  
E) 14
04. O número de soluções inteiras e não-negativas da equação  $x + y + z + t = 6$  é igual a:  
A) 84  
B) 86  
C) 88  
D) 90  
E) NDA

05. (ITA) O número de soluções inteiras e não-negativas da equação  $x + y + z + t = 7$  é:

A)  $\binom{7}{4}$

B)  $\binom{11}{4}$

C)  $\binom{10}{3}$

D)  $\binom{11}{3}$

E) NDA

06. Nove cadeiras em fila serão ocupadas por 6 estudantes e pelos professores Alfa, Beta e Gama. Esses três professores chegam antes dos 6 estudantes e decidem escolher suas cadeiras de tal forma que cada professor fique entre dois estudantes e não haja professores um ao lado do outro. De quantas maneiras os 3 professores podem escolher suas cadeiras?

07. Encontre o número de quádruplas ordenadas  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de inteiros ímpares e positivos satisfazendo  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$ .

08. De quantas maneiras 10 pode ser expresso como soma de 5 inteiros não-negativos, levando-se em conta a ordem?

09. De quantas maneiras uma pessoa pode comprar 5 sorvetes em uma sorveteria que vende 8 tipos de sorvete?

10. Um grupo de trabalho na Marinha do Brasil deve ser composto por 20 oficiais distribuídos entre o Corpo da Armada, Corpo de Intendentes e Corpo de Fuzileiros Navais. O número de diferentes composições onde figure pelo menos dois oficiais de cada corpo é igual a:

A) 120

B) 100

C) 60

D) 29

E) 20

## Gabarito

Exercícios de Fixação				
01	02	03	04	05
*	E	–	*	*

– Demonstração

\*01. 6

04. 2002

05.  $\binom{n+m-1}{m}$

Exercícios Propostos									
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	D	B	A	C	*	*	*	*	A

06. 60

07. 19600

08.  $\binom{14}{4}$

09.  $\binom{12}{5}$