

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): MARCELO MENDES

ASSUNTO: PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

EAD – ITA

AULAS 24 E 25



Resumo Teórico

Uma permutação com repetição é semelhante a uma permutação propriamente dita mas com a possibilidade de repetição dos elementos iniciais. Se existir repetição dos elementos, trocamos o termo conjunto por multiconjunto.

Com um multiconjunto tendo n elementos, havendo n_i repetições do i -ésimo elemento, $i = 1, 2, \dots, k$ ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), o número de permutações com repetições é $\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Teorema 1. O número de soluções inteiras não-negativas da

$$\text{equação } x_1 + x_2 + \dots + x_n = r \text{ é } \binom{n-1+r}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

Teorema 2. O número de soluções inteiras positivas da equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r \text{ é } \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}.$$



Exercícios de Fixação

01. Sabendo-se que a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ possui 10 soluções inteiras positivas, determine n .
02. (ITA) O número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:
A) 36
B) 48
C) 52
D) 54
E) 56
03. Prove o Primeiro Lema de Kaplansky: De quantos modos podemos formar um subconjunto de p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de modo que não haja números consecutivos?
04. Determine o número de maneiras de escolhermos 5 números dentre os 18 primeiros inteiros positivos tal que a diferença entre quaisquer dois números escolhidos seja pelo menos 2.
05. Seja A um conjunto com m elementos e B , um conjunto com n elementos. Quantas funções crescentes $f: A \rightarrow B$ existem?



Exercícios Propostos

01. Um aspirante ganhou, em uma competição na Escola Naval, quatro livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Português. Querendo manter juntos aqueles da mesma disciplina, concluiu que poderia enfileirá-los numa prateleira de sua estante, de diversos modos. A quantidade de modos com que poderá fazê-lo é:
A) 48
B) 72
C) 192
D) 864
E) 1728
02. (ITA) Uma escola possui 18 professores, sendo 7 de matemática, 3 de física e 4 de química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores, de modo que cada uma contenha, exatamente, 5 professores de matemática, no mínimo, 2 de física e, no máximo, 2 de química?
A) 875
B) 1877
C) 1995
D) 2877
E) NDA
03. (ITA) Possui 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois, no mínimo, 5. Cada um deverá ter 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer, usando as 18 rosas?
A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14
04. O número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x + y + z + t = 6$ é igual a:
A) 84
B) 86
C) 88
D) 90
E) NDA

05. (ITA) O número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x + y + z + t = 7$ é:

A) $\binom{7}{4}$

B) $\binom{11}{4}$

C) $\binom{10}{3}$

D) $\binom{11}{3}$

E) NDA

06. Nove cadeiras em fila serão ocupadas por 6 estudantes e pelos professores Alfa, Beta e Gama. Esses três professores chegam antes dos 6 estudantes e decidem escolher suas cadeiras de tal forma que cada professor fique entre dois estudantes e não haja professores um ao lado do outro. De quantas maneiras os 3 professores podem escolher suas cadeiras?

07. Encontre o número de quádruplas ordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) de inteiros ímpares e positivos satisfazendo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$.

08. De quantas maneiras 10 pode ser expresso como soma de 5 inteiros não-negativos, levando-se em conta a ordem?

09. De quantas maneiras uma pessoa pode comprar 5 sorvetes em uma sorveteria que vende 8 tipos de sorvete?

10. Um grupo de trabalho na Marinha do Brasil deve ser composto por 20 oficiais distribuídos entre o Corpo da Armada, Corpo de Intendentes e Corpo de Fuzileiros Navais. O número de diferentes composições onde figure pelo menos dois oficiais de cada corpo é igual a:

A) 120

B) 100

C) 60

D) 29

E) 20

Gabarito

Exercícios de Fixação				
01	02	03	04	05
*	E	–	*	*

– Demonstração

*01. 6

04. 2002

05. $\binom{n+m-1}{m}$

Exercícios Propostos									
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	D	B	A	C	*	*	*	*	A

06. 60

07. 19600

08. $\binom{14}{4}$

09. $\binom{12}{5}$