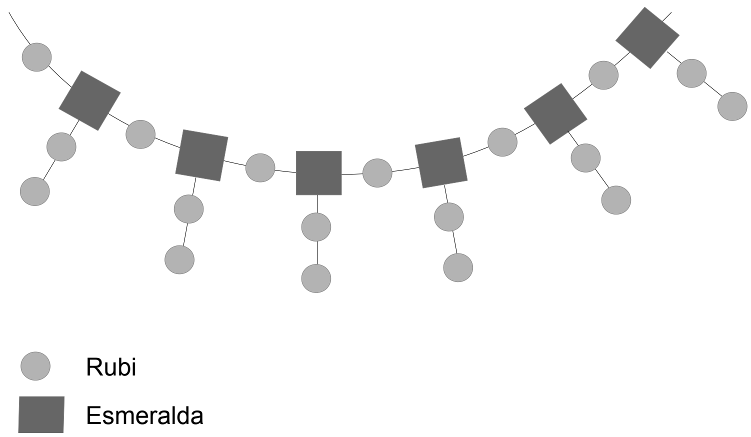
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - ~~2014~~ 2015

19 ~~20~~ de setembro de ~~2014~~ 2015

Nível Júnior (5^o ano do ensino fundamental)

1. Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, escrevi todos os números possíveis de quatro algarismos distintos. Depois os coloquei os números obtidos em ordem crescente. Qual número ficou na 18^o posição?

2. O colar da mãe da Zé, cujo um pedaço está representado na figura, tem 124 pedras. Zé contou as esmeraldas e os rubis do colar. Quantas esmeraldas ele contou?



3. Cinco amigos fizeram uma corrida. No final da corrida cada um deles escreveu numa rede social uma frase sobre a corrida.

   Alexandra: A Beatriz ficou na minha frente.
   Beatriz: O Duarte ficou na minha frente.
   Carlos: Eu cheguei na frente da Beatriz.
   Duarte: Eu não fiquei entre os três primeiros.
   Eunice: Eu ganhei.

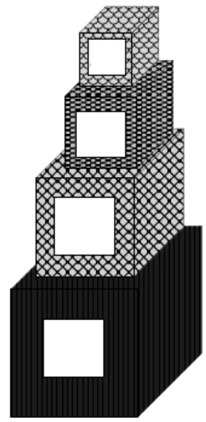
   O Francisco tinha assistido a corrida e, depois de ler as frases, fez a seguinte observação: "O vencedor e o último classificado mentiram, enquanto todos os outros disseram a verdade." Quem ficou em terceiro lugar?

4. Para evitar que o seu irmão descubra o que escreve no seu diário, o Francisco inventou um código secreto fazendo cada letra corresponder a um número com um ou dois algarismos. Infelizmente o seu irmão descobriu que a frase "O dia estava de sol" tinha sido codificada para:

   52   85567   534437467   855   34526

   Nesse código, qual o número que corresponde à letra T?

5. Marina arrumou a sua coleção de 150 miniaturas de carros, distribuindo-as em quatro caixas e empilhou-as da forma representada na figura. Sabe-se que cada caixa tem uma miniatura a mais que a caixa que se encontra por cima dela. Escreva nas etiquetas o número de miniaturas que cada caixa contém.



6. O quadro final de medalhas nas Olimpíadas de Londres em 2012 foi o seguinte:

		Ouro	Prata	Bronze	Total
1^o	estados Unidos	46	29	29	104
2^o	China	38	27	22	87
3^o	Reino Unido	29	17	19	65
4^o	Rússia	24	25	33	82
5^o	Coréia Do Sul	13	8	7	28
6^o	Alemanha	11	19	14	44
7^o	França	11	11	12	34
8^o	Itália	8	9	11	28
9^o	Hungria	8	4	5	17
22^o	Brasil	3	5	9	17

Se usássemos o seguinte critério para a classificação final das equipes:

Medalha de ouro	5 pontos
Medalha de prata	3 pontos
Medalha de bronze	1 ponto

(a) A Alemanha somaria quantos pontos?

(b) A França continuaria atrás da Coréia do Sul na classificação final? Justifique.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2015

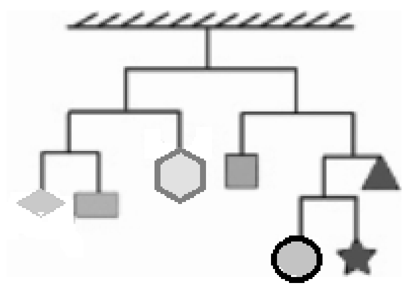
19 de setembro de 2015

Nível 1 – (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

Parte A

QUESTÃO 1

Como forma de distrair sua filha, Rafaelito Galvón instalou no teto do quarto dela um brinquedo equilibrado que possui algumas formas geométricas em seus fios. Enquanto Isabela se divertia, Rafaelito viu na caixa que o brinquedo tinha massa de 560 gramas. Supondo que as barras e os fios têm massas desprezíveis, determine a massa do círculo.



QUESTÃO 2

Quando seus pais saíram, Ari, Jupira, Ariovaldo, Astrogildo e Arineide resolveram brincar de bola dentro de casa e um deles acabou quebrando a televisão da sala. Assim que a mãe deles chegou, cada um deles deu sua versão sobre o trágico incidente.

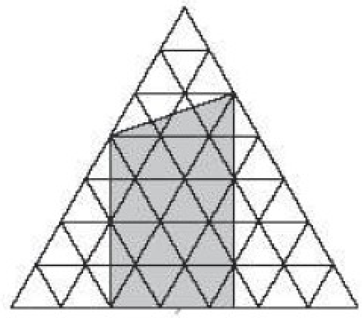
Ari disse: "Sou inocente", Jupira: "Ariovaldo é o culpado", Ariovaldo: "Arineide é a culpada", Astrolgido: "Ari disse a verdade" e Arineide: "Jupira mentiu". Sabendo – se que apenas um deles mentiu, quem foi o culpado?

QUESTÃO 3

Após anos sem ir a Tatooine, Luke Skywalker percebe que muita coisa mudou no planeta em que viveu tanto tempo. Com o objetivo de desenvolver ainda mais seus poderes de Jedi, ele vai até o deserto enfrentar androides virtuais criados por R2-D2. No programa feito por seu robô de estimação, Luke deve enfrentar um androide no primeiro minuto, dois no segundo minuto, quatro no terceiro e assim, sucessivamente. No2015º minuto, Luke percebe que seu treino foi longe de mais e se vê obrigado a destruir o programa. Naquele momento, qual o algarismo das unidades do número de androides que Luke enfrentava?

QUESTÃO 4

Para marcar o início de seu novo mandato em Tribobó do Norte, o prefeito construiu no centro da cidade uma pirâmide de vidro muito parecida com a famosa que existe em Paris. Após a inauguração, ele notou que um velho casarão dos arredores podia ser visto através da pirâmide, estragando um pouco do visual desejado. A figura mostra a visão frontal da mais nova obra de arte de Tribobó do Norte. Tendo todos os triângulos equiláteros menores área de $1m^2$, calcule a área ocupada pelo casarão na vista apresentada abaixo.



Parte B

QUESTÃO 5

Para enfrentar a grave crise econômica enfrentada em todo Nordeste, Bruno Boneco, dono da fábrica Doce Sabor, decidiu dar 2 descontos sucessivos no preço do seu principal produto: a rapadura. Ele fixou o primeiro desconto em 60% e o segundo em 50%. Em poucos meses, com a melhora das vendas e da situação do país, ele determinou que a rapadura voltasse ao valor que tinha antes dos dois descontos. Qual deve ser a taxa percentual de aumento que deve ser aplicada, de uma única vez, para que o produto volte ao seu valor inicial?

QUESTÃO 6

Apaixonada pelo estudo das médias, Ângela Poo Eira tirou um dia para tentar encontrar relações entre as médias aritmética, geométrica e harmônica de 2 números. Após horas de observação, ela concluiu que a média harmônica de dois números poderia ser obtida através do quociente do quadrado da média geométrica e a média aritmética. Isso passou a ser muito útil a ela, pois sempre foi um transtorno se lembrar da fórmula da média harmônica. Por outro lado, a média geométrica, dada pela raiz quadrada do produto dos números, nunca saiu de sua mente. Para fazer um último teste, ela usou os números 4 e 16. Qual o valor, na forma decimal, encontrado por Ângela Poo Eira no seu último teste?

QUESTÃO 7

Querendo preparar bem seu filho, o rico fazendeiro Fred G. Ninho resolveu separar para ele uma enorme área verde a ser recuperada. Como nunca foi muito afeito a trabalho, o filho decidiu dividir a área em pedaços para recuperar aos poucos. No primeiro dia, ele a dividiu em 10 partes e cuidou de apenas 1 deles. No segundo dia, dividiu uma das áreas que sobraram do dia anterior em mais 10 partes e cuidou de apenas uma delas. No terceiro dia, fez o mesmo, isto é, dividiu uma das áreas que sobraram do dia anterior em outras 10 partes e cuidou de apenas uma delas. Ele seguiu esse procedimento por muito tempo. É possível que ele obtenha exatamente 2015 partes em algum dia?

QUESTÃO 8

Taka Nakombi, o mago chinês da Matemática, esqueceu-se da combinação de seu cofre. Ele só consegue lembrar que a senha possui três algarismos e que, subtraindo 495 desse número, obtém os mesmos algarismos, só que na ordem inversa. Qual o número máximo de tentativas que Taka teria que fazer para tentar abrir seu cofre?

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2015

19 de setembro de 2015

Nível 2 – (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Parte A

QUESTÃO 1

Maria desenhou um tabuleiro 3x3 no quadro, e em cada uma das casas desse tabuleiro ela escreveu um número. Logo depois, ela escreveu ao lado do tabuleiro a soma dos números em cada uma das linhas, e em baixo do tabuleiro a soma dos números em cada uma das colunas. Depois, Maria substituiu os números no tabuleiro por letras, de modo que letras iguais representam números iguais. Assim ficou o quadro negro:

a	b	a	11
b	a	c	8
b	c	a	8
10	8	9	

Quanto vale $a + b + c$?

QUESTÃO 2

Débora possui 11 moedas de prata e 11 moedas de ouro. Todas as moedas de prata tem o mesmo valor e todas as moedas de ouro tem o mesmo valor. Débora sabe que as 11 moedas de prata valem juntas 150 reais e que as 11 moedas de ouro valem juntas 160 reais. Certo dia, Débora quer comprar uma bicicleta de 110 reais, usando somente suas moedas de prata e ouro. Quantas moedas Débora precisa gastar para comprar essa bicicleta.

QUESTÃO 3

João tem uma fazenda em forma de um hexágono regular que ele cerca com um fio de arame. Certo dia, João se mudou para uma outra fazenda em forma de triângulo equilátero que ele conseguiu cercar exatamente com o mesmo fio de arame, ou seja, não sobrou fio. Qual a razão entre as áreas da fazenda nova e da antiga?

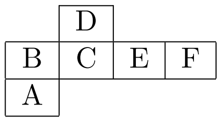
QUESTÃO 4

O Ano 1978 foi ”peculiar”no sentido que a soma dos números formados pelos dois primeiros dígitos e pelos dois últimos dígitos é igual a número formado pelos dois dígitos do meio, ou seja, $19 + 78 = 97$. Quando será o próximo ano peculiar?

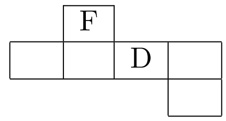
Parte B

QUESTÃO 5

Fred tem que montar duas caixas de papelão em forma de cubo. As letras de A a F deveriam vir escritas nas faces de cada uma dessas caixas, mas a segunda caixa veio com defeito, somente as letras D e F vieram escritas. Abaixo estão as caixas que Fred tem que montar:



Caixa 1



Caixa 2

Sabendo que depois de montadas as caixas tem que ser idênticas, preencha as letras que faltam na segunda caixa.

QUESTÃO 6

Num grupo de 3 amigos, Arnaldo, Bernardo e Carlos, sabe-se que Arnaldo tem 3 anos a mais do que a média das idades dos 3 amigos, enquanto Bernardo tem 1 ano a menos que a média. Se Carlos tem a metade da idade de Arnaldo, quais as idades de Arnaldo, Bernardo e Carlos?

QUESTÃO 7

Sejam $ABCD$ um quadrado e CDE e BFG triângulos equiláteros todos com o mesmo lado, tais que A, B e F são colineares, com B entre A e F, e CDE é exterior ao quadrado.

(a) Prove que $DBGE$ é um paralelogramo.

(b) Calcule os ângulos do triângulo ECG.

QUESTÃO 8

Marco escreveu os números de 1 a N no quadro negro, e notou que exatamente metade dos números que ele escreveu possuiam o algarismo 1. Sabendo que N é um número de 4 algarismos, encontre os possíveis valores para o número N.

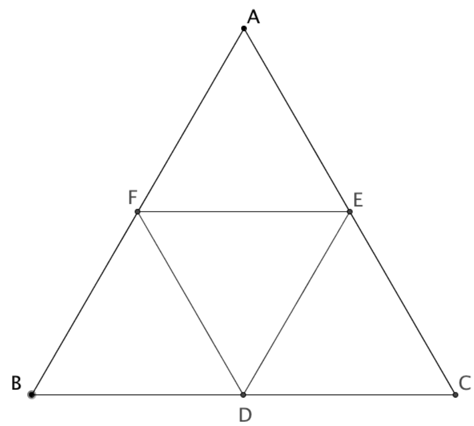
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2015

19 de setembro de 2015

Nível 3 (1^o e 2^o anos do ensino médio)

1. O Ano 1978 foi *peculiar*, pois a soma dos números formados pelos seus dois primeiros dígitos e pelos seus dois últimos dígitos é igual ao número formado pelos dois dígitos do meio, ou seja, $19 + 78 = 97$. Quando será o próximo ano peculiar?

2. Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos A, B, C, D, E, F, dispostos como na figura abaixo. Defina S_{XYZ} a soma dos números escritos nos vértices do triângulo XYZ.



   (a) Determine o valor máximo de $S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$.

   (b) De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

3. De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro 3×3 com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

4. Encontre todas as soluções reais da equação

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x-2)\sqrt{1 + (x-5)(x-7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}.$$

5. Sejam $ABCD$ um paralelogramo e P um ponto no lado CD. Sejam Q a interseção da reta AP com a reta BC e F a interseção da reta QD com a reta AB. Prove que $PQ = AB$ se, e somente se, PF é bissetriz do ângulo $\angle DPA$.

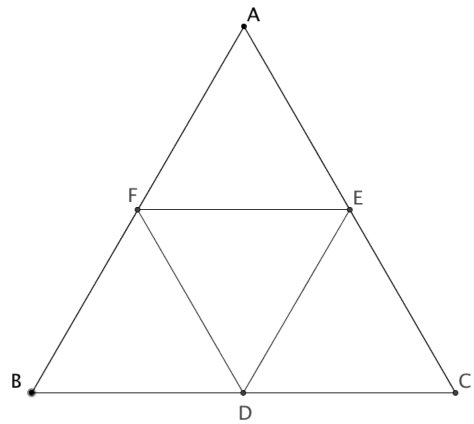
6. Seja $S = \{1, 2, \ldots, 300\}$ o conjunto dos 300 primeiros números naturais. Escolhendo ao acaso dois números, não necessariamente distintos, em S (cada número tem a mesma probabilidade de ser escolhido), determine a probabilidade de o produto destes dois números ser múltiplo de 300.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2015

19 de setembro de 2015

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Deseja-se colocar os números de 1 a 6 nos pontos A, B, C, D, E, F, dispostos como na figura abaixo. Defina S_{XYZ} a soma dos números escritos nos vértices do triângulo XYZ.



   (a) Determine o valor máximo de $S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE} + S_{DEF}$.

   (b) De quantas maneiras podemos colocar os números de forma a obter o valor máximo do item anterior?

2. Seja $ABCD$ um quadrado. CDE e BFG são triângulos equiláteros tais que B é ponto médio de AF, CDE é exterior ao quadrado e G e E estão no mesmo semiplano determinado pela reta AB.

   (a) Prove que $DBGE$ é um paralelogramo.

   (b) Calcule os ângulos do triângulo ECG.

3. De quantas maneiras é possível pintar as casas de um tabuleiro 3×3 com 5 cores de modo que cada linha, coluna e diagonal possua 3 cores distintas?

4. Um número é dito *especial* se ele tem dois ou mais algarismos e é múltiplo da soma dos seus algarismos. Por exemplo, 12 é especial pois é múltiplo de $1 + 2 = 3$.

   (a) Encontre três números especiais consecutivos.

   (b) Encontre quatro números especiais consecutivos.

5. Sejam a, b e c reais tais que $a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2 = 6$ e $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 7$. Prove que se a é inteiro, então b e c também são inteiros.

6. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 60°$. Suponha que o circuncentro O pertence à circunferência inscrita ao triângulo ABC e $AC > AB$. Prove que $\angle ABC < 84°$.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2015

19 de setembro de 2015

Nível U

1. Calcule a seguinte integral indefinida

$$\int \text{sen}(ax)\text{sen}(bx)\text{sen}(cx)dx.$$

2. Seja $\mathcal{P}$ uma parábola e sejam A e B pontos sobre $\mathcal{P}$. As tangentes a $\mathcal{P}$ por A e B se cortam em Q. Seja C um ponto entre A e B na parábola. A tangente a $\mathcal{P}$ por C corta QA em X e QB em Y, respectivamente. Determine o valor de $\frac{QX}{QA} + \frac{QY}{QB}$.

3. Seja f uma função de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ em $\mathbb{R}$, contínua e tal que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$, isto é, a integral imprópria existe. Demonstrar que para todo $q > 0$, existe a integral

$$\int_q^{\infty} \frac{x \cdot f(x)}{\sqrt{x^2 - q^2}} dx$$

4. Seja $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ um conjunto de discos no plano Euclideano. Seja $a_{i,j} = S(D_i \cap D_j)$ a área de $D_i \cap D_j$. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j \geq 0$$

para quaisquer números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Sejam A e B duas matrizes 2×2, com entradas complexas, tais que $\det(AB+BA) = 4\det(AB)$. Prove que

$$(AB - BA)^{2015} = 0$$

.