MATEMÁTICA BÁSICA

A360°
SISTEMA DE ENSINO

SUMÁRIO

MATEMÁTICA BÁSICA

O ALICERCE DAS MATEMÁTICAS

MATEMÁTICA BÁSICA

O ALICERCE DAS MATEMÁTICAS

Por Cristiano Siqueira

"A Matemática é a rainha das ciências; a Aritmética é a rainha da Matemática".
Carl Friedrich Gauss - conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos".

Esta unidade abordará a Matemática Básica. A nossa finalidade é mostrar a você, querido aluno, que a matemática pode ser trabalhada a partir do seu cotidiano.

A Matemática Básica é a essência da álgebra e da geometria. Com ela aprendemos os fundamentos necessários para raciocinar de forma harmônica, lógica e fundamentada.

Então vamos lá? Leia o texto abaixo com bastante atenção. Depois reflita. É muito importante que você desenvolva a sua capacidade de observação e o seu espírito crítico. É um texto divertido. Aproveite!

Havia uma cidade onde todos os seus habitantes estavam endividados. Ninguém tinha dinheiro para absolutamente nada! Os bolsos estavam literalmente vazios. Nessa mesma época, em um feriado prolongado, chega um estrangeiro. Ele se dirigiu até o hotel com o intuito de pernoitar e seguir viagem no dia seguinte.

Lá chegando, o recepcionista mostrou-lhe as acomodações e as dependências do hotel. O estrangeiro aceitou pagar R$ 100,00 pela suíte de luxo. Por esse preço, estava também incluído o café da manhã. Depois de fazer o pagamento adiantado, pediu para que o ajudassem com as malas e foi repousar.

O recepcionista não perdeu tempo! Passou a mão nos cem reais e correu para pagar a quem ele devia: o dono do bar. Então começou um ciclo de pagamentos em série que parecia não ter mais fim. O dono do bar pagou o seu fornecedor de refrigerantes que, por sua vez, pagou o gerente do supermercado que pagou o português da padaria que liquidou sua dívida com o Carlinhos do açougue e que, finalmente, acertou a sua dívida com a Flora da floricultura.

Flora, feliz que estava, também fez a sua parte. Ela devia cem reais para Augusto, o recepcionista do hotel. Então, mais que depressa, foi ao hotel para livrar-se do débito que tanto a incomodava. "Pronto! Ufa! Já não te devo mais..." - Foi o que disse Flora a Augusto ao encontrá-lo na recepção do hotel.

No entanto, olha o que aconteceu! Pouco depois de o recepcionista receber "seu" dinheiro, o estrangeiro aparece dizendo que por motivo dos inúmeros pernilongos em seu quarto, ele preferiria ir dormir no carro. Exigiu, então, o seu dinheiro de volta. Augusto, sem graça, acabou por devolver o que o gringo havia lhe pagado. Ressarcido, o estrangeiro foi embora com a sua centena de reais.

Veja só que curioso! Ao final, ninguém da cidade ganhou um só centavo, entretanto agora todos estavam com as suas dívidas saldadas. Como você explica isso? Você consegue esclarecer este fato? Repare que o problema envolve apenas ferramentas rudimentares da matemática básica (adição e subtração de R$ 100,00) aplicadas à contabilidade dos cidadãos. Ou não seria tão básica assim? Pense a respeito...

01 EQUAÇÕES ELEMENTARES

INTRODUÇÃO

Segundo alguns historiadores, os tradicionais bolos de aniversário surgiram na civilização grega, quando adoradores de Ártemis, deusa da caça, ofereceram em seu templo um preparado de mel e pão no formato de lua.

As velas colocadas em cima do bolo também surgiram na idade antiga. As pessoas dessa época acreditavam que a fumaça das velas levava suas preces ao céu e protegia o aniversariante de maus espíritos.

Dentro dessa tradição, Karina e sua filha Bianca comemoram hoje os seus aniversários. Karina faz 38 anos e Bianca faz 16. Daqui a quantos anos a idade de Karina será o dobro da idade de Bianca?

Podemos esquematizar tal problema através da tabela a seguir:

	Idades atuais	Idades daqui a x anos
Karina	38	$38 + x$
Bianca	16	$16 + x$

Assim, daqui a x anos, temos que:

$$38 + x = 2.(x + 16)$$

Esse é um exemplo de equação na variável x e sua solução, também chamada de raiz, é a resposta do problema proposto.

EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Equação polinomial do 1º grau na variável x é toda equação redutível à forma $ax + b = 0$, sendo **a** e **b** números reais e $a \neq 0$.

A raiz de $ax + b = 0$ com $a \neq 0$ é obtida isolando a variável x, ou seja:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Assim, essa equação tem como conjunto solução (ou verdade), $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Resolva as equações a seguir:

a) $7x + 8 = 4x - 3$

Resolução:

$$7x + 8 = 4x - 3 \Rightarrow 7x - 4x = -3 - 8$$
$$3x = -11 \Rightarrow x = -\frac{11}{3} \therefore S = \left\{-\frac{11}{3}\right\}$$

b) $6x - 12 = -3(-2x + 4)$

Resolução:

$$6x - 12 = -3(-2x + 4) \Rightarrow 6x - 12 = 6x - 12$$
$$6x - 6x = 12 - 12 \Rightarrow 0x = 0 \therefore S = \mathbb{R}$$

c) $4x - [2x - (x - 5)] = 3x + 9$

Resolução:

$$4x - [2x - (x - 5)] = 3x + 9$$
$$4x - [2x - x + 5] = 3x + 9$$
$$4x - [x + 5] = 3x + 9 \Rightarrow 4x - x - 5 = 3x + 9$$
$$3x - 5 = 3x + 9 \Rightarrow 3x - 3x = 9 + 5$$
$$0x = 14 \therefore S = \varnothing$$

d) $\frac{3x - 4}{2} + \frac{1 - 4x}{3} = 6$

Resolução:

$$\frac{3x-4}{2} + \frac{1-4x}{3} = 6 \Rightarrow \frac{3.(3x-4) + 2.(1-4x)}{6} = \frac{36}{6}$$
$$9x - 12 + 2 - 8x = 36 \Rightarrow 9x - 8x = 36 + 12 - 2$$
$$x = 46 \therefore S = \{46\}$$

02. Dada a equação $3.(2x - 5) + k.(x - 4) = k$, na variável x, determine o valor numérico da constante k de modo que $x = 2$ seja solução dessa equação.

Resolução:

Solução ou raiz de uma equação na variável x é o valor de x que torna a igualdade verdadeira. Assim, para $x = 2$, temos que:

$$3.(2.2 - 5) + k.(2 - 4) = k \Rightarrow 3.(-1) + k.(-2) = k$$
$$-3 - 2k = k \Rightarrow -2k - k = 3 \Rightarrow -3k = 3 \Rightarrow k = -1$$

03. Resolva a equação literal $\frac{x + a}{a} + \frac{x - a}{4a} = 4$ na variável x sabendo-se que a é um número real diferente de zero.

Resolução:

$$\frac{x+a}{a} + \frac{x-a}{4a} = 4 \Rightarrow \frac{4.(x+a) + (x-a)}{4a} = \frac{16a}{4a}$$
$$4x + 4a + x - a = 16a \Rightarrow 4x + x = 16a - 4a + a$$
$$5x = 13a \Rightarrow x = \frac{13a}{5} \therefore S = \left\{\frac{13a}{5}\right\}$$

04. Numa sala de aula, um terço dos alunos são homens e 14 são mulheres. Quantos são os alunos dessa sala?

Resolução:

Sendo x a quantidade de alunos dessa sala, temos que:

$$\frac{x}{3} + 14 = x \Rightarrow \frac{x + 42}{3} = \frac{3x}{3} \Rightarrow x - 3x = -42$$
$$-2x = -42 \Rightarrow x = 21$$

Portanto, essa sala tem 21 alunos.

05. Resolva o sistema: $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases}$

Resolução:

Vamos resolver esse sistema utilizando três processos diferentes:

- **1º processo: Por substituição.**

Isolando y na primeira equação, temos:

$y = 6 - 3x$

Substituindo na segunda equação, temos:

$$5x + 2(6 - 3x) = 17 \Rightarrow 5x + 12 - 6x = 17$$
$$5x - 6x = 17 - 12 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5$$

Substituindo na primeira equação, temos:

$$3.(-5) + y = 6 \Rightarrow -15 + y = 6 \Rightarrow y = 6 + 15$$
$$y = 21 \therefore S = \{(-5,\ 21)\}$$

- **2º processo: Por comparação.**

Isolando y na primeira equação, temos:

$y = 6 - 3x$

Isolando y na segunda equação, temos:

$$y = \frac{17 - 5x}{2}$$

Igualando essas novas equações, temos:

$$6 - 3x = \frac{17 - 5x}{2} \Rightarrow 12 - 6x = 17 - 5x$$
$$-6x + 5x = 17 - 12 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5$$

Substituindo em uma das equações, temos:

$$3.(-5) + y = 6 \Rightarrow -15 + y = 6 \Rightarrow y = 6 + 15$$
$$y = 21 \therefore S = \{(-5,\ 21)\}$$

- **3º processo: Por adição.**

Multiplicando a primeira equação por −2 e mantendo a segunda equação, temos:

$$\begin{cases} -6x - 2y = -12 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as duas do novo sistema, temos:

$$-6x - 2y + 5x + 2y = -12 + 17 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5$$

Substituindo em uma das equações do sistema inicial, temos:

$$3.(-5) + y = 6 \Rightarrow -15 + y = 6 \Rightarrow y = 6 + 15$$
$$y = 21 \therefore S = \{(-5,\ 21)\}$$

06. No pátio de uma delegacia há carros e motos num total de 30 veículos e 86 rodas. Quantas motos e quantos carros temos nesse pátio?

Resolução:

Sendo x a quantidade de carros e y a quantidade de motos, temos que:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 86 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação por −2 e mantendo a primeira equação, temos:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ -2x - y = -43 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as duas do novo sistema, temos:

$$x + y - 2x - y = 30 - 43 \Rightarrow -x = -13 \Rightarrow x = 13$$

Substituindo em uma das equações do sistema inicial, temos:

$$13 + y = 30 \Rightarrow y = 30 - 13 \Rightarrow y = 17$$

Portanto, nesse pátio temos 13 carros e 17 motos.

07. Há 8 anos a idade de um pai era o triplo da idade do filho. Daqui a 12 anos a idade do pai será o dobro da idade do filho. Quais são suas idades atuais?

Resolução:

Sendo x e y as idades do pai e do filho, respectivamente, temos que:

$$\begin{cases} x - 8 = 3.(y - 8) \\ x + 12 = 2.(y + 12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -16 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por −1 e adicionando à segunda equação membro a membro, temos:

$$y = 28 \text{ e } x = 68$$

Portanto, a idade atual do pai é 68 anos e a do filho é 28 anos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Resolva as equações a seguir:

a) $7x + 4 = 2x + 34$

b) $13x - (6x + 6) = 22$

c) $2x - [5 + 3.(x + 8) - 11] = 5x$

d) $5.(7x - 2) - 10x = 46 + 2(x - 5)$

02. Determine o valor de k para que $x = -2$ seja solução da equação polinomial na variável x a seguir:

$$(k + 1).x - 3(x + 6) = 5k$$

03. Patrícia e Mariana passaram no vestibular e resolveram fazer churrascos em suas casas para comemorar. O número de pessoas que compareceram ao churrasco de Patrícia foi o dobro do número de pessoas que compareceram ao de Mariana. Se esses dois eventos juntos tiveram 81 pessoas, quantas pessoas compareceram ao churrasco de Patrícia?

04. A casa do Sr. Marcos tem 1.020 m^2 de área construída e possui 4 suítes de mesmo tamanho. Calcule a área de cada suíte sabendo que o restante da casa tem uma área construída de 740 m^2?

Shutterstock.com

05. Maria vai dividir entre seus filhos, João, Jonas e Joaquim, a quantia de R$ 3.000,00. Sabendo-se que João e Jonas receberão a mesma quantia e Joaquim R$ 600,00 a mais que cada um dos outros dois, calcule a quantia que João e Jonas receberão.

06. Pedro tinha 5 anos quando Beatriz nasceu. Hoje, a soma das idades de Pedro e Beatriz é 45 anos. Qual é a idade atual de Pedro?

07. Resolva as equações a seguir:

a) $\frac{3x}{8} - 2 = x - \frac{3}{4}$ c) $\frac{2x - 1}{10} - \frac{x - 3}{4} = 1$

b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{4}$ d) $\frac{3x - 7}{12} = \frac{2x - 3}{6} - \frac{x - 1}{8}$

08. Determine um número que subtraindo dele sua terça parte obtém-se a quinta parte desse mesmo número aumentado de 7 unidades.

09. Dos alunos do ensino médio matriculados na Escola ABC, $\frac{1}{3}$ são do primeiro ano, $\frac{1}{4}$ do segundo ano e 150 são do terceiro ano. Assim, quantos alunos de ensino médio tem a escola ABC?

10. (UFGO) Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a $\frac{2}{3}$ do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 8.125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

11. Resolva as equações fracionárias seguir:

a) $\frac{5}{6} - \frac{1}{x} = \frac{7}{12}$ c) $\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3} = \frac{3}{x - 2}$

b) $\frac{3x}{x + 2} - \frac{x}{x + 1} = 2$ d) $\frac{x}{x - 3} - \frac{x}{x + 3} = \frac{12}{x^2 - 9}$

12. José e Antônio, trabalhando juntos, fizeram a terça parte de um muro em 6 dias. a outra terça parte foi feita por José que, sozinho, gastou 10 dias. A última terça parte ficou para ser feita por Antônio. Quantos dias ele gastará?

13. Dois carros A e B possuem a mesma velocidade média. O carro A percorre 2.400 km em x horas, enquanto um carro B percorre 3.200 km em 6 horas a mais. Nessas condições, determine o valor de x.

14. Um tanque é abastecido por duas torneiras A e B. A torneira A sozinha enche esse tanque em 2 horas. A torneira B sozinha enche esse tanque em 3 horas. Assim, após quanto tempo as duas torneiras juntas enchem o mesmo tanque inicialmente vazio?

15. Em uma fábrica, o número de mulheres é $\frac{3}{5}$ do número de homens. Se fossem contratadas mais 10 mulheres, o número de homens e mulheres ficaria igual. Quantos homens trabalham na fábrica?

16. O dono de uma loja distribuiu a quantia de x reais aos seus três funcionários da seguinte maneira:

Shutterstock.com

- O primeiro recebeu $\frac{2}{5}$ do total mais R$ 500,00.
- O segundo recebeu $\frac{3}{7}$ do total mais R$ 700,00.
- O terceiro recebeu R$ 900,00.

Calcule o valor de x, em reais.

17. Resolva as equações literais do 1º grau, na variável x, a seguir:

a) $3.(2x + a) = 4x - 9a$

b) $\frac{1 + x}{2} = \frac{a - x}{a}$, com $a \neq 0$

c) $\frac{x + a}{5} + \frac{x}{10} = \frac{x - a}{3}$

d) $\frac{a(x^2 - 1)}{x^2} + \frac{a + \frac{1}{x}}{x} = a$

18. Resolva os sistemas a seguir utilizando o processo indicado.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ pelo método da substituição.

b) $\begin{cases} -5x + 2y = 16 \\ -7x + 3y = 12 \end{cases}$ pelo método da comparação.

c) $\begin{cases} -x + 6y = -3 \\ x - 7y = 4 \end{cases}$ pelo método da adição.

19. Resolva os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} \frac{x}{4} + y = \frac{7}{2} \\ x - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x - y}{3} + \frac{x + y}{5} = 4 \\ x + 9y = 100 \end{cases}$

20. A soma de dois números é 193 e a diferença entre eles é 89. Quais são esses números?

21. Mariana e Marília foram comprar roupas em uma mesma loja do Shopping de sua cidade. Mariana pagou por 5 calças e 4 blusas R$ 420,00. Marília pagou por 3 calças e 2 blusas R$ 240,00. Sabendo-se que Mariana e Marília pagaram o mesmo preço por cada calça e cada blusa, calcule esses preços.

Shutterstock.com

22. (FUVEST-SP) João diz a Pedro: se você me der $\frac{1}{5}$ do dinheiro que possui eu ficarei com uma quantia igual ao dobro do que lhe restará. Por outro lado, se eu lhe der R$ 6.000,00 do meu dinheiro, nós ficaremos com quantias iguais. Quanto dinheiro possui cada um?

23. Considere uma prova em que os alunos devem responder um total de 30 questões. Cada questão respondida de forma correta o aluno ganha 5 pontos e para cada questão respondida de forma errada o aluno perde 3 pontos. Nessas condições, determine o número de acertos e erros de um aluno que, ao responder todas as questões, obteve um total de 62 pontos.

24. (UFGO) Deseja-se distribuir uma quantidade de maçãs para algumas crianças. Se fossem distribuídas 3 maçãs para cada criança, duas ficariam sem ganhar maçã. Se fosse distribuída uma maçã para cada criança, sobrariam 6 maçãs. Determine o número de maçãs que devem ser distribuídas para cada criança de modo que todas recebam o mesmo número de maçãs.

25. (UFV-MG) Em uma urna vazia são colocadas 20 bolas nas cores vermelha e branca. Se acrescentássemos uma bola vermelha à urna, o número de bolas brancas passaria a ser igual à metade do número de bolas vermelhas. Quantas bolas vermelhas e quantas bolas brancas existem na urna?

EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Equação polinomial do 2º grau na variável x é toda equação redutível à forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo **a**, **b** e **c** números reais e $a \neq 0$.

As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ são obtidas isolando a variável x através da fórmula de *Bhaskara*, ou seja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Assim, essa equação tem como conjunto solução (ou verdade), $S = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

O termo $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Assim, temos que:

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.
- Se $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Sendo x' e x" as raízes da equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

- A soma das raízes é $S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$.
- O produto das raízes é $P = x'.x'' = \frac{c}{a}$.

OBSERVAÇÃO:

- Uma equação polinomial do 2º grau cujas raízes têm soma S e produto P é dada por $x^2 - Sx + P = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

08. Resolva as equações a seguir:

a) $2x^2 + 20x = 0$

Resolução:

$2x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 2x.(x + 10) = 0$

$2x = 0$ ou $x + 10 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -10$

$S = \{0, -10\}$

b) $-3x^2 + 48 = 0$

Resolução:

$-3x^2 + 48 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -48 \Rightarrow 3x^2 = 48$

$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \therefore S = \{\pm 4\}$

c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Resolução:

$\Delta = (-5)^2 - 4.2.2 = 25 - 16 = 9$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x' = 2 \text{ e } x'' = \frac{1}{2} \therefore S = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$$

d) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

Resolução:

$\Delta = 6^2 - 4.(-9).(-1) = 36 - 36 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6 \pm 0}{-18} \Rightarrow x' = x'' = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

e) $4x^2 + 5x + 2 = 0$

Resolução:

$\Delta = 5^2 - 4.4.2 = 25 - 32 = -7$

$\Delta < 0 \therefore S = \varnothing$

09. Para quais valores de m a equação polinomial do 2º grau $x^2 - 6x + (m - 2) = 0$ tem duas raízes reais iguais?

Resolução:

Para que $x^2 - 6x + (m - 2) = 0$ tenha duas raízes reais iguais, seu discriminante (Δ) deve ser igual a zero.

$\Delta = 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4.1.(m - 2) = 0$

$36 - 4m + 8 = 0 \Rightarrow -4m = -36 - 8$

$-4m = -44 \Rightarrow m = 11$

10. Determine o valor de m para que a soma das raízes da equação $3x^2 - (2m + 1)x + 5 = 0$ seja igual a 7.

Resolução:

A soma das raízes de $3x^2 - (2m + 1)x + 5 = 0$ é dada por:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-(2m+1)}{3} = 7$$

$2m + 1 = 21 \Rightarrow 2m = 20 \Rightarrow m = 10$

11. Resolva a equação biquadrada $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Resolução:

Fazendo $x^2 = y$, temos:

$y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4.1.(-4) = 25$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$y' = -4$ e $y'' = 1$

Voltando na variável original, temos:

$y = -4 \Rightarrow x^2 = -4$ (não convém)

$y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \therefore S = \{\pm 1\}$

12. Resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ y^2 - xy = 6 \end{cases}$

Resolução:

Vamos resolver esse sistema por substituição. Isolando y na primeira equação, temos:

$y = 4 - x$

Substituindo na segunda equação, temos:

$(4-x)^2 - x.(4-x) = 6 \Rightarrow 16 - 8x + x^2 - 4x + x^2 = 6$

$2x^2 - 12x + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.5 = 36 - 20 = 16$

$x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2.1} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = 5 \text{ e } x'' = 1$

Substituindo na primeira equação, temos:

Para $x = 5 \Rightarrow 5 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 5 \Rightarrow y = -1$

Para $x = 1 \Rightarrow 1 + y = 4 \Rightarrow x = 4 - 1 \Rightarrow y = 3$

$\therefore S = \{(5, -1), (1, 3)\}$

13. Resolva a equação irracional $x - \sqrt{3x+4} = 0$.

Resolução:

$x - \sqrt{3x+4} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3x+4}$

Vamos resolver essa equação elevando ambos os membros ao quadrado para eliminar a raiz. Temos que ficar atentos pois, ao elevarmos ambos os membros de uma equação ao quadrado, obteremos uma nova equação que pode ter soluções que não são soluções da equação original.

$x^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \Rightarrow x^2 = 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4.1.(-4) = 9 - 16 = 25$

$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x' = 4 \text{ e } x'' = -1$

Substituindo em $x = \sqrt{3x+4}$, temos:

- Para $x = 4 \Rightarrow 4 = \sqrt{12+4} = 0 \Rightarrow 4 = 4.$
  Assim $x = 4$ também é solução da equação
  $x - \sqrt{3x+4} = 0$
- Para $x = -1 \Rightarrow -1 = \sqrt{-3+4} \Rightarrow -1 = 1.$
  Assim, $x = -1$ não é solução da equação

$x - \sqrt{3x+4} = 0 \therefore S = \{4\}$

14. A quantidade de pares de sapatos que Joaquim possui é um número tal que seu quadrado subtraído de 14 resulta no quíntuplo dessa quantidade.

Resolução:

Sendo x a quantidade de sapatos que Joaquim possui, temos que:

$x^2 - 14 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.(-14) = 25 + 56 = 81$

$x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 9}{2} \Rightarrow x' = 7 \text{ e } x'' = -2$

Portanto, Joaquim possui 7 pares de sapatos.

15. Determine as dimensões de uma fazenda na forma de um retângulo sabendo-se que seu perímetro tem 32 km de extensão e sua área é 60 km^2.

Resolução:

Sendo x a medida do comprimento e y a medida da largura da fazenda, temos que:

$\begin{cases} 2x + 2y = 32 \\ xy = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ xy = 60 \end{cases}$

Vamos resolver esse sistema por substituição.

Isolando y na primeira equação, temos:

$y = 16 - x$

Substituindo na segunda equação, temos:

$x.(16 - x) = 60 \Rightarrow -x^2 + 16x - 60 = 0$

$\Delta = (16)^2 - 4.(-1).(-60) = 16$

$x = \dfrac{-(16) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-16 \pm 4}{-2}$

$x' = 10 \text{ e } x'' = 6$

Substituindo na primeira equação, temos:

- Para $x = 10 \Rightarrow 10 + y = 16 \Rightarrow y = 6$
- Para $x = 6 \Rightarrow 6 + y = 16 \Rightarrow y = 10$

Assim, as dimensões da fazenda são 10 km por 6 km.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

26. Resolva as equações a seguir:

a) $8x^2 - 10x = 5x^2 + 2x$

b) $7(x^2 + 1) = 35$

c) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

d) $4x^2 - 16x + 13 = 0$

e) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

f) $x^2 + 5x + 7 = 0$

27. Um segmento de medida 20 cm foi dividido em duas partes, de modo que o produto das medidas dessas partes é igual a 96. Determine a medida de cada uma das partes.

28. Qual é o número positivo que devemos adicionar a cada um dos fatores do produto 9 . 4, para que esse produto aumente de 114 unidades?

29. Se aumentarmos a medida base de um quadrado em 4 m e diminuirmos a medida da altura em 6 m, obteremos um retângulo cuja área é 56 m^2. Calcule a medida do lado do quadrado.

30. A professora de Matemática de Bruna perguntou a ela qual era a sua idade. Para demonstrar seus conhecimentos matemáticos, ela assim respondeu:

"O quadrado da minha idade atual subtraído do quádruplo dela é igual a 96."

Qual a idade atual de Bruna?

31. Marcos disse à sua irmã:

"Pensei em um número positivo, adicionei dois, multipliquei o resultado por ele mesmo, tirei quatro vezes o número que pensei e o resultado é 40."

Qual número que Marcos pensou?

32. As idades atuais de pai e filho são 45 e 15 anos, respectivamente. Há x anos a idade do pai era igual ao quadrado da idade do filho. Calcule o valor de x.

33. Resolva as equações fracionárias a seguir:

a) $x + 1 = \dfrac{8 - x}{x}$

b) $x + \dfrac{1}{x - 3} = 5$

c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{1}{2}$

34. Resolva as equações literais do 2º grau, na variável x, a seguir:

a) $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$

b) $x^2 - 2ax + (a^2 - 1) = 0$

c) $x^2 - 2abx - 3(ab)^2 = 0$

d) $4x^2 - 6ax + (2a^2 - a - 1) = 0$

35. No período da Páscoa, José gastou R$ 120,00 na compra de um mesmo tipo de ovo de chocolate. Se cada ovo custasse R$ 5,00 a menos, ele conseguiria comprar 4 ovos a mais. Quantos ovos José comprou? Qual o preço de cada ovo?

Shutterstock.com

36. Dois operários juntos executam certa tarefa em 6 dias. Trabalhando sozinho, o primeiro gasta 5 dias a mais que o segundo se o mesmo executasse tal tarefa sozinho. Assim, quantos dias gastaria o segundo para executar tal tarefa sozinho?

37. Em uma festa de confraternização, R$ 2.400,00 seriam distribuídos, em partes iguais, entre os convidados. Como faltaram 5 convidados, cada um dos convidados presentes recebeu um acréscimo de R$ 40,00 no seu prêmio. Calcule o número de convidados presentes nessa festa.

38. Uma pessoa percorre uma distância de 48 km com velocidade constante. Se aumentasse sua velocidade em 4 km/h gastaria 1 hora a menos para percorrer todo esse percurso. Qual é a velocidade dessa pessoa?


Shutterstock.com

39. Resolva as equações biquadradas a seguir:

a) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

c) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

40. Resolva as equações irracionais a seguir:

a) $\sqrt{3x-2} - 7 = 0$

b) $\sqrt{x-1} + 3 = x$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$

d) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-3} = 1$

41. Resolva os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 48 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + xy + y^2 = 67 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x^2 - 4xy = 91 \end{cases}$

42. Determine dois números tais que sua soma é 27 e a soma dos seus inversos é $\frac{1}{6}$.

43. Considere um retângulo cuja área é 120 m². Aumentando-se sua base de 4 m e diminuindo sua altura de 5 m, obtém-se um segundo retângulo com a mesma área do primeiro. Quais são as dimensões do primeiro retângulo?

44. (UNESP) Em uma loja, todos os CDs de uma determinada seção estavam com o mesmo preço, y. Um jovem escolheu, nesta seção, uma quantidade x de CDs, totalizando R$ 60,00.

a) Determine y em função de x.

b) Ao pagar sua compra no caixa, o jovem ganhou, de bonificação, 2 CDs a mais, da mesma seção e, com isso, cada CD ficou R$ 5,00 mais barato. Com quantos CDs o jovem saiu da loja e a que preço saiu realmente cada CD (incluindo os CDs que ganhou)?

45. Resolva "por tentativas" as equações polinomiais do 2º grau a seguir:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 + 6x + 5 = 0$

c) $x^2 - 2x - 24 = 0$

d) $x^2 + x - 56 = 0$

e) $x^2 + 8x + 12 = 0$

f) $x^2 - 12x + 36 = 0$

46. Determine uma equação polinomial do 2º grau cujas raízes são:

a) 1 e −6

b) $\frac{1}{2}$ e 3

c) −4 e −8

d) $-\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$

47. Considere o seguinte problema:

Determinar dois números tais que sua soma é 20 e seu produto é 96.

a) Escreva uma equação polinomial do 2º grau tal que suas soluções sejam esses números.

b) Determine esses números.

48. Considere a equação polinomial do 2º grau na variável x a seguir:

$$(m - 2)x^2 + mx - (m + 3) = 0$$

a) Determine o valor de m para que a soma de suas raízes seja igual a $-\frac{5}{6}$.

b) Determine o valor de m para que o produto de suas raízes seja igual a 6.

49. Determine os valores reais de k para que:

a) A equação $x^2 - 6x + (k - 2) = 0$ tenha duas raízes reais distintas?

b) A equação $kx^2 - (k - 1)x + (k - 1) = 0$ tenha duas raízes reais iguais?

c) A equação $x^2 - (2k - 1)x + (k^2 - 2) = 0$ não tenha raízes reais?

50. Determine o valor numérico de k para que as raízes x' e x" da equação $x^2 - 3x + k = 0$ sejam números tais que $2x' - x'' = 12$.

TESTES DE VESTIBULARES

01. (PUC-SP) Resolver a equação $\frac{1-x}{1+x} - \frac{2x}{1-x} = 1$.

a) $V = \{0\}$

b) $V = \varnothing$

c) $V = \{-1, 0\}$

d) $V = \{0, 1\}$

e) $V = \{\pm 1\}$

02. (FATEC-SP) Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas. O segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e duas porções de batatas fritas. Nesse local e nesse dia, a diferença entre o preço de uma porção de batatas fritas e o preço de uma lata de refrigerante era de:

a) R$ 2,00
b) R$ 1,80
c) R$ 1,75
d) R$ 1,50
e) R$ 1,20

03. (FUVEST-SP) Dada a equação

$\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x+1} = -1$, então:

a) $V = \varnothing$

b) $V = \{0, \pm 1\}$

c) $V = \{\pm 1\}$

d) $V = \{0, -1\}$

e) $V = \{0\}$

04. (UNIFOR-CE) Antonio gastou R$ 5,00 menos que Bernardo e este gastou o triplo do que gastou Cícero. Se o gasto de Antonio foi R reais, quantos reais foram gastos por Cícero?

a) $\frac{R+3}{5}$

b) $\frac{R}{3} + 5$

c) $\frac{R+5}{3}$

d) $\frac{R}{3} - 5$

e) $\frac{R-5}{3}$

05. (ENEM) O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:

a) 4,0 m e 5,0 m
b) 5,0 m e 6,0 m
c) 6,0 m e 7,0 m
d) 7,0 m e 8,0 m
e) 8,0 m e 9,0 m

06. (UFPE) Júnior e Daniela têm algum dinheiro. Júnior dá a Daniela R$ 5,00 e, em seguida, Daniela dá a Júnior $\frac{1}{3}$ do que possui. Assim, ambos ficam com R$ 18,00. A diferença entre as quantias que cada um tinha inicialmente é:

a) R$ 7,00
b) R$ 8,00
c) R$ 9,00
d) R$ 10,00
e) R$ 11,00

07. (FUVEST-SP) A solução da equação a seguir é:

$$\frac{x+2}{2}+\frac{2}{x-2}=-\frac{1}{2}$$

a) $\{-2\}$
b) $\{-2, -1\}$
c) $\{2, -1\}$
d) $\varnothing$
e) $\{-2, 1\}$

08. (UESPI) João e Maria são irmãos. Se o número de irmãs de João é o dobro do número de irmãos (sexo masculino), e Maria tem igual número de irmãos (sexo masculino) e irmãs, quantos são os filhos da família?

a) 10
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

09. (UNIFOR-CE) Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há:

a) Igual número de balas dos dois tipos.
b) Duas balas de hortelã a mais que de laranja.
c) 20 balas de hortelã.
d) 26 balas de hortelã.
e) Duas balas de laranja a mais que de hortelã.

10. (ENEM) Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micro nutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

Disponível em: http://www.embrapa.br. Acesso em: 29 abr. 2010 (adaptado).

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micro nutrientes oriundos desses alimentos. Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

a) 58 g e 456 g
b) 200 g e 200 g
c) 350 g e 100 g
d) 375 g e 500 g
e) 400 g e 89 g

11. (FUVEST-SP) As soluções de

$$\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=\frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)},$$ onde $a \neq 0$, são:

a) $-\frac{a}{2}$ e $\frac{a}{4}$

b) $-\frac{a}{2}$ e $\frac{a}{4}$

c) $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2a}$

d) $-\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{2a}$

e) $-\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{a}$

12. (UNICAMP) Quarenta pessoas em excursão pernoitam em um hotel. Somados, os homens despendem R$ 2.400,00. O grupo de mulheres gasta a mesma quantia, embora cada uma tenha pago R$ 64,00 a menos que cada homem. Denotando por x o número de homens do grupo, uma expressão que modela esse problema e permite encontrar tal valor é:

a) $2400x = (2400 + 64x)(40 - x)$
b) $2400(40 - x) = (2400 - 64x)x$
c) $2400x = (2400 - 64x)(40 - x)$
d) $2400(40 - x) = (2400 + 64x)x$

13. (ENEM) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

14. (UDESC-SC) Os alunos de uma turma da UDESC fizeram uma coleta a fim de juntar R$ 450,00 que seriam destinados para o pagamento das despesas de transporte que os levaria a um congresso. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram da viagem. Com isso, a parte de cada um sofreu um acréscimo de R$ 2,50. Assinale a alternativa que contém o número de alunos da turma.

a) 18
b) 25
c) 30
d) 20
e) 15

15. (UTF-PR) Sabendo que $x = \frac{1}{y^2} + 1$ e $x + y^2 = 3$ o valor do quadrado de x é igual a:

a) -2
b) 0
c) 1
d) 2
e) 4

16. (CESGRANRIO) O produto das raízes positivas de $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ vale:

a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{2}$
e) $5\sqrt{3}$

17. (UTF-PR) Adriana e Gustavo estão participando de uma gincana na cidade de Curitiba e receberam a seguinte tarefa:
Trazer a fotografia da construção localizada na rua XV de Novembro, número N, tal que:
$N = (a^2 + b^2 + 13)^2 + (a + b)^4 - 10$ sendo a e b são as raízes da equação irracional $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = x + 3$.

Se Adriana e Gustavo fotografaram a construção e ganharam a pontuação na gincana, então encontraram N igual a:

a) 1.515
b) 1.296
c) 971
d) 775
e) 535

18. (UTF-PR) Se x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes da equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, então o valor da expressão $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2}$ é igual a:

a) 0
b) $\sqrt{10}$
c) 1
d) $2\sqrt{5}$
e) 9

19. (ENEM) Em quase todo o Brasil existem restaurantes em que o cliente, após se servir, pesa o prato de comida e paga o valor correspondente, registrado na nota pela balança. Em um restaurante desse tipo, o preço do quilo era R$ 12,80. Certa vez a funcionária digitou por engano na balança eletrônica o valor R$ 18,20 e só percebeu o erro algum tempo depois, quando vários clientes já estavam almoçando. Ela fez alguns cálculos e verificou que o erro seria corrigido se o valor incorreto indicado na nota dos clientes fosse multiplicado por:

a) 0,54
b) 0,65
c) 0,70
d) 1,28
e) 1,42

20. (ENEM) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00

b) R$ 17,00

c) R$ 22,00

d) R$ 32,00

e) R$ 57,00

21. (ENEM) Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

a) 476

b) 675

c) 923

d) 965

e) 1.538

22. (UFSJ) Deseja-se dividir igualmente 1.200 reais entre algumas pessoas. Se três dessas pessoas desistirem de suas partes, fazem com que cada uma das demais receba, além do que receberia normalmente, um adicional de 90 reais. Nessas circunstâncias, é correto afirmar que:

a) se apenas duas pessoas desistissem do dinheiro, cada uma das demais receberia 60 reais.

b) com a desistência das três pessoas, cada uma das demais recebeu 150 reais.

c) inicialmente, o dinheiro seria dividido entre oito pessoas.

d) inicialmente, o dinheiro seria dividido entre cinco pessoas.

23. (UFSCAR-SP) Considere a equação $x^2 + kx + 36 = 0$, onde x' e x'' representam suas raízes. Para que exista a relação $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$, o valor de k na equação deverá ser:

a) -15

b) -10

c) 12

d) 15

e) 36

24. (UNIFOA-MG) Se y e z são as raízes da equação $x^2 - mx + n = 0$ calcule, em função de m e n, $y^2 + z^2$.

a) $y^2 + z^2 = m + n$

b) $y^2 + z^2 = m - 2n^2$

c) $y^2 + z^2 = m.n$

d) $y^2 + z^2 = m^2 + n^2$

e) $y^2 + z^2 = m^2 - 2n$

25. (ESPM-SP) A solução da equação a seguir pertence ao intervalo:

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-1}$$

a) $[-3, -1[$

b) $[-1, 1[$

c) $[1, 3[$

d) $[3, 5[$

e) $[5, 7[$

A EQUAÇÃO COMO UMA AFIRMAÇÃO DA IDENTIDADE

Por Cristiano Siqueira

Shutterstock.com

Um dos mais célebres matemáticos gregos foi Diofanto. Podemos dizer que ele contribuiu para a Aritmética e para a Álgebra na mesma proporção que Euclides contribuiu para a Geometria, Ptolomeu para a Astronomia e Newton para a Física.

Diofanto (século III d.C.) contribuiu com muitas inovações, em particular nas notações matemáticas. *Aritmética* é o seu trabalho mais notório. Trata-se de uma compilação de cento e trinta problemas algébricos e suas respectivas soluções numéricas. A obra é reconhecida como um tratado que trouxe uma imensurável influência na matemática tal como nós a conhecemos atualmente.

Dentre as suas incontáveis descobertas encantadoras, veja esta que Diofanto conjecturou: *todo número inteiro é a soma de dois, três ou quatro quadrados*. O curioso é que, à época, Diofanto não ofereceu provas para tal proposição. A primeira demonstração formal do enunciado veio em 1770 pelo matemático francês Joseph-Louis Lagrange. Hoje a conjectura é conhecida como o “teorema dos quatro quadrados” de Lagrange.

"Todo número inteiro positivo é a soma de no máximo quatro quadrados perfeitos".

Vejamos alguns exemplos de números inteiros escritos como somas de quadrados:

1. Soma de dois quadrados:

$32 = 4^2 + 4^2$

$74 = 5^2 + 7^2$

2. Soma de três quadrados:

$22 = 2^2 + 3^2 + 3^2$

$50 = 3^2 + 4^2 + 5^2$

3. Soma de quatro quadrados:

$23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

$31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

Agora é a sua vez. Tente encontrar os valores de x e y nas equações abaixo valendo-se da conjectura de Diofanto e Lagrange. Experimente os números que você achar conveniente. Há várias respostas para um mesmo problema. Divirta-se!

a) $50 = x^2 + y^2$

b) $19 = x^2 + 3^2 + y^2$

c) $97 = 8^2 + 5^2 + x^2 + y^2$

Possíveis respostas: a) $5^2 + 5^2 = 50$; b) $1^2 + 3^2 + 3^2 = 19$; c) $8^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 = 97$

Shutterstock.com

02 POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

INTRODUÇÃO

O *Liber Abaci,* de 1.202, é um livro de Matemática muito importante escrito por Leonardo Fibonacci a respeito de aritmética. Através dele, Fibonacci introduziu na Europa o sistema de numeração árabe, muito superior ao até então utilizado.

A versão atualmente conhecida do *Liber Abaci* é a sua segunda edição de 1.228. A teoria nele contida é ilustrada com uma grande quantidade de problemas. Um desses problemas está exposto a seguir:

Há sete velhas mulheres na estrada para Roma; cada mulher tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; e com cada pão estavam sete facas; e cada faca está colocada em sete bainhas; quantos elementos há ao todo na estrada para Roma?

A quantidade de cada um dos elementos citados no texto é dada por:

- velhas mulheres: 7
- mulas: $7.7 = 7^2$
- sacos: $7.7^2 = 7^3$
- pães: $7.7^3 = 7^4$
- facas: $7.7^4 = 7^5$
- bainhas: $7.7^5 = 7^6$

Sendo N a quantidade total desses elementos citados, então temos que:

$$N = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$$

Esse é um exemplo prático da utilização de uma operação matemática chamada **potenciação**.

POTENCIAÇÃO

DEFINIÇÕES

Dado o número real **a** e o número natural **n**, temos que:

- $a^n = \underbrace{a.a.a. \dots .a}_{\text{n vezes}}$, para $n \geq 2$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$, para $a \neq 0$
- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, para $a \neq 0$

Propriedades

Dados os números reais **a** e **b**, e os números inteiros **m** e **n**, temos:

- Produto de potência de mesma base:

$$a^n.a^m = a^{n+m}, \text{ para } a \neq 0$$

- Divisão de potência de mesma base:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ para } a \neq 0$$

- Potência do produto:

$$(a.b)^n = a^n.b^n, \text{ para } a.b \neq 0$$

- Potência da divisão:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ para } b \neq 0$$

- Potência de uma potência:

$$(a^n)^m = a^{n.m}, \text{ para } a \neq 0$$

OBSERVAÇÃO:

- As potências $(a^n)^m$ e a^{n^m} são diferentes. Na primeira **m** é expoente da potência a^n, daí a chamamos de potência de uma potência. Na segunda **m** é expoente do expoente **n**, daí a chamamos de potências sucessivas ou potências de ordem superior.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Provavelmente, a primeira tentativa de se representar números muito grandes que se tem notícia foi feita pelo matemático e filósofo grego Arquimedes para estimar a quantidade de grãos de areia existentes no Universo. O procedimento está descrito em sua obra “O Contador de Areia”, do século III a.C.

Atualmente, para expressar números muito grandes ou muito pequenos, utilizamos uma escrita abreviada chamada notação científica.

Assim, um número N está em notação científica, se o mesmo estiver na forma:

$$N = a.10^{n}, \text{ sendo } a \in IR, -10 < a < 10 \text{ e } n \in Z.$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Calcule o valor numérico de:

a) 2^3

b) -2^3

c) $(-3)^4$

d) 2^{-3}

e) -2^{-4}

f) $(-3)^{-3}$

g) 0^2

h) 0^{-3}

i) -2^0

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

k) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

l) $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

Resolução:

a) $2^3 = 2.2.2 = 8$

b) $-2^3 = -(2.2.2) = -8$

c) $(-3)^4 = (-3).(-3).(-3).(-3) = 81$

d) $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot = \frac{1}{8}$

e) $-2^{-4} = -\left(\frac{1}{2}\right)^4 = -\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$

f) $(-4)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64}$

g) $0^3 = 0.0.0 = 0$

h) $0^{-3} = \left(\frac{1}{0}\right)^3$, não existe

i) $-2^0 = -1$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$

k) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

l) $-\left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{81}{16}$

02. Calcule o valor da expressão numérica a seguir.

$$E = \frac{3^0 + (-2)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{2^{-3}}$$

Resolução:

$$E = \frac{3^0 + (-2)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{2^{-3}} = \frac{1 + (-8) - 4^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$E = \frac{1 - 8 - 16}{\frac{1}{8}} = (-23)\cdot 8 = -184$$

03. Reduzir cada uma das expressões a uma única potência:

a) $32^3 : \left(\frac{1}{16}\right)^4 \cdot 64^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-7}$

b) $125^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{25}\right)^6 : 625^4$

Resolução:

a) $32^3 : \left(\frac{1}{16}\right)^4 \cdot 64^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-7}$

$(2^5)^3 : (2^{-4})^4 \cdot (2^6)^{-2} . (2^{-2})^{-7}$

$2^{15} : 2^{-16} \cdot 2^{-12} \cdot 2^{14} = 2^{15-(-16)-12+14} = 2^{33}$

b)

$125^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{25}\right)^6 : 625^4 = (5^3)^{-2} \cdot (-5^{-2})^6 : (5^4)^4$

$5^{-6} \cdot (-5)^{-12} : 5^{16} = 5^{-6} \cdot 5^{-12} : 5^{16} = 5^{-6-12-16} = 5^{-34}$

04. Mostre que as potências $(2^3)^2$ e 2^{3^2} são diferentes.

Resolução:

$$(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$$
$$2^{3^2} = 2^9 = 512$$

Portanto, temos que $(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$.

05. Escreva os números a seguir em notação científica:

a) 1.240.000.000
b) 0,00000008765

Resolução:

a) $1.240.000.000 = 1{,}24.10^9$
b) $0{,}00000008765 = 8{,}765.10^{-8}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Calcule o valor numérico de:

a) 5^2
b) -5^2
c) $(-5)^2$
d) -5^3
e) $(-5)^3$
f) 5^{-2}
g) -5^{-2}
h) $(-5)^{-2}$

02. Calcule o valor numérico de:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$
c) $\left(-\frac{1}{6}\right)^0$
d) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$
e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3}$
f) $-\left(\frac{2}{5}\right)^4$
g) 0^4
h) 0^{-4}

03. A capacidade de armazenamento de um computador tem como medida fundamental o bit (b), que é a menor informação que um computador pode armazenar. Para representar um caracter o computador precisa 1 byte (B), que corresponde a 8 bits.

Shutterstock.com

Como a linguagem computacional trabalha numa base numérica composta apenas de 0 e 1, ou seja, uma base binária, temos que o Kilobyte, o Megabyte, o Gigabyte e o Terabyte não são agrupamentos de 10^3 como estamos acostumados no nosso sistema decimal de numeração e, sim, grupos de 2^{10}. Observe a tabela a seguir:

Unidade de Medida	Espaço
1 byte (B)	8 b
1 Kilobyte (KB)	2^{10} B
1 Megabyte (MB)	2^{10} KB
1 Gigabyte (GB)	2^{10} MB
1 Terabyte (TB)	2^{10} GB

Nessas condições, determine:

a) A potência de base 2 correspondente ao valor de 2 Gigabytes em Megabytes.
b) A potência de base 2 correspondente ao valor de 8 Terabytes em Kilobytes.

04. Sr. Donato deseja mandar um e-mail de agradecimento a todas as pessoas que se hospedaram em sua pousada no último final de semana. Inicialmente ele enviou o e-mail para 4 pessoas, que enviaram, cada uma, para outras 4 que, por sua vez enviaram para outras 4 que, por sua vez enviaram para mais 4 outras. Assim, quantos e-mails foram enviados no total?

Shutterstock.com

05. Responda os itens a seguir:

a) Qual é a metade de 2^{50}?

b) Qual é centésima parte de 10^{67}?

c) Qual é o triplo de 3^{15}?

d) Qual é o quadrado de 5^{21}?

06. (UNICAMP)

a) Calcule as seguintes potências:

$a = 3^3$, $b = (-2)^3$, $c = 3^{-2}$ e $d = (-2)^{-3}$

b) Escreva os números a, b, c e d em ordem crescente.

07. Calcule o valor de cada uma das expressões numéricas a seguir:

a) $1^8 + (-3)^2 - 2^4 + (-4)^0$

b) $-3^2 + (-1)^3 - 4^2 + 2^{-2}$

c) $(2^7 - 5^3)^3 - (2^5 - 3^3)^2$

d) $6^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 7^1$

08. Calcule o valor de cada uma das expressões numéricas a seguir:

a) $\dfrac{3^3 - 2^4 + 2^0}{-3^2 + (-2)^{-2}}$

b) $\dfrac{(-5)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 - 3^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3^0 - 5^{-1}}$

c) $\dfrac{(3^{-1} + 2^{-1})^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3}$

09. Simplifique as expressões numéricas a seguir reduzindo-as a uma única potência:

a) $(2^{-4} \cdot 2^{-5} \cdot 2^3):(2^{10} \cdot 2^3)$

b) $(6^{-4}:6^{-2}) \cdot (6^{12}:6^8)$

c) $3^{2^5}:(3^3)^5$

d) $(5^{-3})^{-5} \cdot (5^6:5^2)^{-3}$

10. Simplifique as expressões numéricas a seguir reduzindo-as a uma única potência:

a) $27^2 \cdot 81^4 \cdot 243^{-2} : 9^{-4}$

b) $49^2 . \left(\frac{1}{343}\right)^2 . 7^8$

c) $(25^6:5^3)^{-2} \cdot (125^{-2}:0,2)^6$

d) $(16^4 . 8^{-2}):\left[64^3 . \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}\right]$

11. Calcule o valor de cada uma das frações a seguir:

a) $\dfrac{2^{12} - 2^{11} - 2^{10}}{2^8 + 2^9 + 2^{10}}$

b) $\dfrac{5^{15} - 5^{14} + 5^{13}}{5^{14} + 5^{13} + 5^{12}}$

c) $\dfrac{3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n}{3^{n+4} - 3^{n+3}}$

d) $\dfrac{2^{n+4} - 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n}{2^{n+5} + 2^{n+3}}$

12. Dadas as potências $a = (5^2)^3$, $b = 5^{3^2}$ e $c = 5^{2^3}$, qual é o valor numérico de x na igualdade $a.b.c = 5^x$?

13. Sabendo-se que $a^2 = 99^5$, $b^3 = 99^7$ e $c^6 = 99^{11}$, calcule o valor numérico de x na igualdade $(abc)^{12} = 99^x$?

14. Escreva as potências $a = 3^{31}$, $b = 8^{10}$, $c = 16^8$ e $d = 243^6$ em ordem crescente, justificando sua resposta.

15. Escreva os números a seguir em notação científica:

a) 2.700.000

b) −0,00008597

c) $128,9 \cdot 10^8$

d) $625.800 \cdot 10^{-11}$

e) $-0,0256 \cdot 10^{-5}$

f) $0,00478 \cdot 10^9$

16. A distância entre a Terra e o Sol é aproximadamente 150.000.000 km e que a massa de uma bactéria é 0,000005 g. Expresse-os em notação científica.

17. Dados os números $a = 1.10^{12}, b = 9.10^{11}$ e $c = 1,2.10^{10}$, calcule o valor numérico de:

a) $a + b + c$ b) $2a - b - c$

18. Suponha que a massa de um próton é igual a $1,6.10^{-27}$ kg e a massa de um elétron é igual a $9,1.10^{-31}$ kg. Qual é a soma das massas, em kg, de três mil prótons e dois milhões de elétrons?

19. Leia atentamente as notícias a seguir a respeito da produção de petróleo e gás natural do Brasil em 2.012.


Shutterstock.com

"O país produziu em janeiro 2,23 milhões de barris de petróleo por dia, o que significa aumento de 5,1% na comparação com janeiro de 2.011 e de 0,8% em relação a dezembro."


Shutterstock.com

"A produção de gás natural no Brasil atingiu 71,1 milhões de metros cúbicos por dia, o que representa um incremento de 7,3% em relação a janeiro de 2.011 e de 0,3% na comparação com dezembro."

Fonte: site: http://www.correiobraziliense.com.br.

Com base nessas notícias, calcule a produção mensal de barris de petróleo e a produção bimestral de metros cúbicos de gás natural, expressando-as em notação científica.

20. Simplifique as expressões numéricas a seguir reduzindo-as a uma única potência de base 10:

a) $\dfrac{10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}}{(0,0001)^4}$

b) $\dfrac{(10^3)^2 \cdot (0,0001)^{-5}}{\left(\frac{1}{100}\right)^4 \cdot (0,01)^3}$

21. Escreva o valor de cada uma das expressões numéricas em notação científica:

a) $\dfrac{0,000031 \cdot 0,0025}{775\,000}$

b) $(4900.0,03.8,1.10^{-4}):(0,002.30.10^{-3}.0,0049)$

22. (UFMA) Qual o valor numérico da expressão

$$\frac{35^{-1} \cdot 40^{-1} \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 100}{2^3 \cdot 14^{-1} \cdot 5 \cdot 25}?$$

23. (UNICAMP) O mundo tem, atualmente, 6 bilhões de habitantes e uma disponibilidade máxima de água para consumo em todo o planeta de 9000 km^3/ano. Sabendo-se que o consumo anual "per capita" é de 800 m^3, calcule:

a) o consumo mundial anual de água, em km^3;

b) a população mundial máxima, considerando-se apenas a disponibilidade mundial máxima de água para consumo.

24. Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que uma massa se reduza à metade.


Shutterstock.com

Nessas condições, calcule quantos anos são necessários para que 2^6 gramas de uma substância cuja meia-vida é 7 anos, se reduza a 2^{-30} gramas.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

UNIDADES DE COMPRIMENTO

A principal unidade do comprimento é o metro, cujo símbolo é **m**. A definição de metro, dada na Conferência Geral de Pesos e Medidas é a seguinte:

"Metro é a unidade de comprimento do Sistema Internacional igual 1.650.763,73 comprimentos de onda de radiação da linha alaranjada correspondente à transição entre dois níveis específicos de energia do isótopo de Krípton 86 no vácuo."


Shutterstock.com

Entretanto, existem situações em que se quer medir extensões muito grandes e o metro é muito pequeno, assim como existem situações em que se quer medir extensões muito pequenas e o metro é muito grande. Esse problema pode ser resolvido utilizando-se os múltiplos e submúltiplos do metro (unidades secundárias de comprimento). Na tabela a seguir, temos as unidades de comprimento, seus símbolos e os valores correspondentes em metro.

Quilômetro (km)	Hectômetro (hm)	Decâmetro (dam)	Metro (m)	Decímetro (dm)	Centímetro (cm)	Milímetro (mm)
1.000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Note que:

- Cada unidade de comprimento corresponde a 10 vezes a unidade de comprimento imediatamente inferior (à direita).
- Cada unidade de comprimento corresponde a $\frac{1}{10}$ da unidade de comprimento imediatamente superior (à esquerda).

Portanto:

- Para passar de uma unidade para outra imediatamente inferior devemos fazer uma multiplicação por 10.

Por exemplo:

- $1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 10^2 \text{ cm} = 10^3 \text{ mm}$.
- Para passar de uma unidade para outra imediatamente superior, devemos fazer uma divisão por 10.

Por exemplo:

- $1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ dam} = 10^{-2} \text{ hm} = 10^{-3} \text{ km}$.

Outras medidas de comprimento:

- 1 milha (mi) = 1.609,344 m.
- 1 polegada (in) = 2,54 cm.
- 1 pé (ft) = 30,48 cm.
- 1 jarda (yd) = 91,44 cm.

UNIDADES DE ÁREA

A principal unidade de área é o metro quadrado, cujo símbolo é $\mathbf{m^2}$. Na tabela a seguir, temos as unidades de área, seus símbolos e os valores correspondentes em metro quadrado.

Quilômetro quadrado (km^2)	Hectômetro quadrado (hm^2)	Decâmetro quadrado (dam^2)	Metro quadrado (m^2)	Decímetro quadrado (dm^2)	Centímetro quadrado (cm^2)	Milímetro quadrado (mm^2)
10^6 m²	10^4 m²	10^2 m²	1 m²	10^{-2} m²	10^{-4} m²	10^{-6} m²

Portanto:

- Para passar de uma unidade para outra imediatamente inferior devemos fazer uma multiplicação por 100.

Por exemplo:

- $1\ m^2 = 10^2\ dm^2 = 10^4\ cm^2 = 10^6\ mm^2$.
- Para passar de uma unidade para outra imediatamente superior, devemos fazer uma divisão por 100.

Por exemplo:

- $1\ m^2 = 10^{-2}\ dam^2 = 10^{-4}\ hm^2 = 10^{-6}\ km^2$.

Outras medidas de área:

- 1 hectare (ha) = 10.000 m^2.
- 1 alqueire mineiro = 48.400 m^2.
- 1 alqueire paulista = 24.200 m^2.

UNIDADES DE VOLUME

A principal unidade de volume é o metro cúbico, cujo símbolo é $\mathbf{m^3}$. Na tabela a seguir, temos as unidades de volume, seus símbolos e o valor correspondente em metro cúbico.

Quilômetro cúbico (km^3)	Hectômetro cúbico (hm^3)	Decâmetro cúbico (dam^3)	Metro cúbico (m^3)	Decímetro cúbico (dm^3)	Centímetro cúbico (cm^3)	Milímetro cúbico (mm^3)
10^9 m³	10^6 m³	10^3 m³	1 m³	10^{-3} m³	10^{-6} m³	10^{-9} m³

Portanto:

- Para passar de uma unidade para outra imediatamente inferior devemos fazer uma multiplicação por 1.000.

Por exemplo:

- $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = 10^6\ cm^3 = 10^9\ mm^3$.
- Para passar de uma unidade para outra imediatamente superior, devemos fazer uma divisão por 1.000.

Por exemplo:

- $1\ m^3 = 10^{-3}\ dam^3 = 10^{-6}\ hm^3 = 10^{-9}\ km^3$.

UNIDADES DE CAPACIDADE

Quando enchemos um recipiente com um líquido, ele assume a forma desse recipiente. Assim, a quantidade de líquido, denominada capacidade, é igual ao volume interno do recipiente que o contém.

A principal unidade de capacidade é o litro, cujo símbolo é **L**. Na tabela a seguir, temos as unidades de capacidade, seus símbolos e os valores correspondentes em litro.

Quilolitro (kL)	Hectolitro (hL)	Decalitro (daL)	Litro (L)	Decilitro (dL)	Centilitro (cL)	Mililitro (mL)
1.000 L	100 L	10 L	1 L	0,1 L	0,01 L	0,001 L

Portanto:

- Para passar de uma unidade para outra imediatamente inferior devemos fazer uma multiplicação por 10.

Por exemplo:

- 1 L = 10 dL = 10^2 cL = 10^3 mL.
- Para passar de uma unidade para outra imediatamente superior, devemos fazer uma divisão por 10.

Por exemplo:

- 1 L = 10^{-1} daL = 10^{-2} hL = 10^{-3} kL.

Relação importante:

De acordo com o Comitê Internacional de Pesos e Medidas, o litro é o volume equivalente a um decímetro cúbico, ou seja:

1 litro = 1 dm^3

Outras medidas de capacidade:

- 1 onça líquida (fl Oz) = 29,5735295625 mL.
- 1 galão (gal) = 4,4048827 L.

UNIDADES DE MASSA

Massa de um corpo está ligada a quantidade de matéria que esse corpo possui, sendo, portanto, constante em qualquer lugar do planeta Terra ou fora dela. A unidade principal de massa é o quilograma, cujo símbolo é **kg**. A definição de quilograma, dada na Conferência Geral de Pesos e Medidas é a seguinte:

"Quilograma é a unidade de massa do Sistema Internacional de Unidades e é definido como sendo igual à massa do International Prototype Kilogram (protótipo internacional do quilograma). Esse protótipo é composto por irídio e platina e encontra-se sob custódia do Escritório Internacional de Pesos e Medidas (BIPM) em Sèvres, França."

Apesar de o quilograma ser a unidade fundamental, na tabela a seguir, temos as unidades de massa, seus símbolos e os valores correspondentes em grama.

Quilograma (kg)	Hectograma (hg)	Decagrama (dag)	Grama (g)	Decigrama (dg)	Centigrama (cg)	Miligrama (mg)
1.000 g	100 g	10 g	1 g	0,1 g	0,01 g	0,001 g

Portanto:

- Para passar de uma unidade para outra imediatamente inferior devemos fazer uma multiplicação por 10.

Por exemplo:

- 1 g = 10 dg = 10^2 cg = 10^3 mg.
- Para passar de uma unidade para outra imediatamente superior, devemos fazer uma divisão por 10.

Por exemplo:

- 1 g = 10^{-1} dag = 10^{-2} hg = 10^{-3} kg.

Outras medidas de massa:

- 1 tonelada (t) = 1.000 kg.
- 1 libra (Lbs) = 0,45359237 kg.
- 1 onça troy (oz) = 31,1034768 g.


Shutterstock.com

EXERCÍCIO RESOLVIDO

06. Um município colheu uma produção de 9.000 toneladas de milho em grão em uma área plantada de 3.750 hectares. Qual a produtividade média desse município em termos de sacas de 60 kg por hectare.

Resolução:

- 1 tonelada = 1.000 kg, logo 9.000 toneladas = 9.000 . 1.000 = 9.000.000 kg.
- Em sacas de 60 kg, temos:

$$\frac{9.000.000}{60} = 150.000 \text{ sacas.}$$

- A produtividade em sacas por hectare é:

$$\frac{150.000}{3.750} = 40 \text{ sacas por hectare.}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25. Transforme as medidas de comprimento a seguir:

a) 3,1 km em m

b) 2,4 m em cm

c) 8,1 km em dm

d) 348 mm em m

e) 12 m em km

26. Considerando a medida 28,45 dam, qual de suas conversões a seguir é a única que está errada?

a) 28.450 cm

b) 284,5 m

c) 2,845 hm

d) 0,02845 km

27. Determine o valor da soma a seguir em metros:

$$S = 14{,}6 \text{ m} + 0{,}234 \text{ hm} + 28{,}2 \text{ dam} + 0{,}5 \text{ km}$$

28. Um passo de Bruna equivale a 40 cm. Ao dar uma volta em torno da quadra onde mora, ela contou 480 passos. Quantos metros tem o contorno dessa quadra?

29. A atleta brasileira Fabiana Murer alcançou a marca de 4,60 m no salto com vara, nos Jogos Pan-americanos realizados no Rio de Janeiro em 2.007. Sua melhor marca é de 4,80 m, recorde sul-americano na categoria. Qual é a diferença entre essas duas marcas em mm?

30. Uma cédula de 50 reais tem 14 cm de comprimento e 6,5 cm de largura, e o comprimento da circunferência da Terra, na Linha do Equador, é, aproximadamente, 40.000 km. Um trilhão de reais em cédulas de 50 reais, colocadas uma ao lado da outra, formariam uma fita de 6,5 cm de largura. Quantas voltas que essa fita daria ao redor da Terra na Linha do Equador?

31. Sandro possui uma tartaruga que, após conseguir fugir, percorreu no primeiro dia de fuga 4,14 hm, no segundo dia, percorreu mais 0,57 km e, no terceiro dia, mais 11.600 cm. Qual a distância total, em metros, percorrida pela tartaruga nesses três dias fuga?

32. Marcelo precisa colocar arame farpado em volta de um terreno retangular que mede 0,4 km de comprimento e 0,3 km de largura. Quantos metros de arame farpado ela deve usar?

33. Transforme as medidas de área a seguir:

a) $0{,}25 \text{ dm}^2$ em mm^2

b) 3.200 m^2 em km^2

c) 27.600 m^2 em ha

d) $1{,}015 \text{ m}^2$ em dm^2

e) $0{,}075 \text{ km}^2$ em dam^2

34. Efetue as adições a seguir dando a resposta em m^2:

a) $3.150 \text{ cm}^2 + 0{,}65 \text{ dm}^2 + 20{,}35 \text{ dm}^2$

b) $37{,}61 \text{ m}^2 + 520{,}4 \text{ dm}^2 + 7.690.000 \text{ mm}^2$

35. Priscila possui um terreno retangular de dimensões 125 m por 80 m. Ela quer utilizar parte desse terreno para plantar algumas árvores, porém 30 dam^2 do terreno já estão ocupadas com construções. Assim, qual a área que lhe sobra, em ha?

36. **(UFRJ)** Uma chapa de vidro tem 0,15 metros quadrados. Quanto mede a sua área em centímetros quadrados? Justifique.

37. Uma das paredes do banheiro da cobertura de Samuel tem 5 m de comprimento por 2 m de altura e deve ser coberta com azulejos quadrados, de lado 25 cm. Sabendo que uma caixa desses azulejos tem 20 azulejos, quantas caixas ele deve comprar, no mínimo, para garantir que não faltem azulejos?

38. **(UFRJ)** Um grande ato público em favor da Educação foi organizado em certa cidade. Uma avenida de 1,25 km de extensão e 40 m de largura foi totalmente tomada pelo público. Supondo que quatro pessoas ocupam 1 metro quadrado, calcule quantas pessoas foram ao evento.

39. Transforme as medidas de volume a seguir:

a) 3,728 km^3 em hm^3

b) 1.700 dam^3 em km^3

c) 0,031 m^3 em cm^3

d) 5.000 dm^3 em m^3

e) 785.000 dam^3 em km^3

40. Converta as medidas de volume a seguir em litros:

a) 2,6 dm^3

b) 0,44 m^3

c) 280 cm^3

d) 0,0048 dam^3

41. Um tambor contém 4,35 hl de óleo .Quantas latas de 15 litros poderão ser cheias com esse óleo?

42. Em uma vasilha, cuja capacidade é de 20 litros, coloca-se água até certa altura e, em seguida, coloca-se um objeto de volume 4,5 litros. Calcule o volume de água colocada nessa vasilha sabendo que nessa operação transbordaram 275 cL de água.

43. Em um clube de Goiânia, Carlos viu um menino brincando com uma lata de refrigerante de 350 ml. Perguntando a ele o que estava fazendo, o menino respondeu que estava tirando toda a água da piscina. Sabendo que o volume da piscina era de 70.000 m^3, quantas latinhas cheias de água o menino teria que tirar da piscina para esvaziá-la completamente?

44. Às 8 horas de certo dia foi aberta uma torneira, com a finalidade de encher de água um tanque inicialmente vazio. O volume interno do tanque é 0,025 dam^3, a torneira despeja água no tanque a uma vazão constante de 4L/min e só foi fechada quando o tanque estava completamente cheio. Assim, que horas a torneira foi fechada?

45. Ao colocar gasolina no meu carro, que estava com $\frac{1}{4}$ do tanque, coloquei 60 litros e enchi o tanque.

Shutterstock.com

Qual é a capacidade do total do tanque em cm^3?

46. O Sr. Jean Pierre tem um bistrô no qual vende um vinho de excelente qualidade. Esse vinho é vendido em doses de 70 mL cada uma. Se o tonel de vinho que ele comprou recentemente tem um capacidade de 0,28 m^3, responda:

a) No máximo quantas dessas doses o Sr. Jean Pierre conseguirá vender?

b) Se ele vender em média 40 doses por dia desse vinho, quantos dias vai durar o vinho desse tonel?

47. A taxa de evaporação média diária é a altura média que uma superfície de água exposta ao clima, perde por evaporação a cada dia. Suponha que na cidade de Goiânia a taxa de evaporação média para o mês de outubro seja de 6,2 mm/dia. Assim, calcule a quantidade, em litros, de água evaporada em um dia do mês de outubro de uma piscina com 20 m^2 de superfície.

48. **(UFGO)** O relatório anual da qualidade da água distribuída, feito pela Empresa de Saneamento de Goiás (Saneago) para o ano de 2.006, mostra que um dos três mananciais de abastecimento público, o Ribeirão Samambaia, tem capacidade de captação de água de aproximadamente 16 litros por segundo. Considerando-se que uma residência consome em média 0,8 m^3 de água por dia, o volume de água captado em um dia corresponde ao consumo diário de quantas residências?

49. Num dado momento do dia, o síndico de um edifício observou-se que o volume de água no interior da caixa d'água ocupava $\frac{1}{3}$ de sua capacidade e que, se lá fossem colocados mais 0,24 m^3 de água, o volume de água na caixa passaria a ocupar os $\frac{2}{5}$ de sua capacidade. Considerando que não foi colocada água no interior da caixa, então, no momento da observação, quantos litros de água que seriam necessários para enchê-la?

50. Um caminhão consegue transportar 3,6 toneladas de carga. Sabendo que uma laranja pesa 120 gramas, quantas laranjas o caminhão pode carregar?

51. Uma família é composta do casal e 6 filhos. Cada um come 25 dag de pão por dia. Qual a despesa mensal com pão, se o quilo custa R$ 6,80?

52. Um copo de leite leva 35 g de açúcar para adoçá-lo. Com um pacote de 105 decagramas de açúcar é possível adoçar quantos copos de leite?

53. Muitos remédios controlados pela ANVISA devem ser tomados em doses menores que o 1 mg. Um desses remédios na forma de comprimido tem 0,025 mg de uma certa substância. Assim, quantos comprimidos podem ser feitos com 1 dg desta substância?

54. A embalagem de um produto apresenta as seguintes informações:

- Massa bruta 5,35 hg,
- Massa líquida 52,86 dag.

Assim, qual a massa da embalagem de 10 unidades desse produto, em gramas?

55. Muitas substâncias consideradas tóxicas têm aplicações terapêuticas quando utilizadas em mínimas doses. Exemplo dessa propriedade é o flúor. Embora considerado muito venenoso, é um bom medicamento contra as cáries.

Para Paracelsus (1493-1541) "a dose certa diferencia o veneno do remédio". De acordo com o Ministério da Saúde, o limite máximo de flúor na água para consumo humano é de 1,5 mg/L.

As medidas para as colheres de sopa e de chá estão apresentadas na tabela a seguir.

Calcule a quantidade máxima de flúor para a preparação de um copo de água de 200 mL segundo recomendações do Ministério da Saúde.

56. Um programa de televisão começou às 13 horas, 15 minutos e 20 segundos, e terminou às 15 horas, 5 minutos e 40 segundos. Quanto tempo este programa durou, em segundos?

57. **(UFGO)** Em uma cidade com três mil habitantes, cada morador escova os dentes, em média, três vezes ao dia durante três minutos. Considerando que cada habitante deixa a torneira parcialmente aberta durante a escovação e desperdiça, em média, cinco gotas de água por segundo, quantos litros de água, em média, são desperdiçados a cada 30 dias nessa cidade? Dado: 1 mL = 20 gotas.

RADICIAÇÃO

DEFINIÇÕES

Da mesma forma que a subtração é a operação inversa da adição, a divisão é a operação inversa da multiplicação, uma das operações inversas da potenciação é a **radiciação**.

Assim, dizemos que a raiz n-ésima do número real **a** é igual ao número real **x** se, e somente se, **x** elevado a $n(n \in IN^*)$, for igual a **a**. Simbolicamente, temos:

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

Na igualdade $\sqrt[n]{a} = x$, temos que:

- se n for ímpar, então $a \in IR$ e $x \in IR$.
- se n for par, então $a \in IR_+$ e $x \in IR_+$.
- o símbolo $\sqrt{\ }$ é o radical.
- o número n é o índice.
- o número a é o radicando.
- o número x é a raiz.

Propriedades

Dados os números reais positivos **a** e **b**, e o número natural não-nulo **n**, temos:

- Produto de radicais de mesmo índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

- Divisão de radicais de mesmo índice:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ para } b \neq 0$$

- Radical de um radical:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

- Simplificação do expoente do radicando e do índice do radical:

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ para } m \in Z^* \text{ e } p \in IN^*$$

- Potência de expoente racional:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ para } m \in Z^*$$

- Introdução de um fator no radicando:

$$k.\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n.a}, \text{ para } k \in IR_+$$

OBSERVAÇÕES:

- Todas as propriedades válidas para potências de expoentes inteiros também são válidas para potências de expoentes racionais.
- Dois radicais são chamados de semelhantes quando possuem o mesmo índice e o mesmo radicando.
- Só podemos adicionar ou subtrair radicais semelhantes.

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Racionalizar o denominador de uma fração significa eliminar todos os radicais do denominador da mesma obtendo uma fração equivalente, ou seja, sem alterar o seu valor.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

07. Calcule o valor numérico de:

a) $\sqrt{36}$ d) $\sqrt{-36}$

b) $-\sqrt{36}$ e) $\sqrt[3]{27}$

c) $\pm\sqrt{36}$ f) $\sqrt[3]{-27}$

Resolução:

a) $\sqrt{36} = 6$

b) $-\sqrt{36} = -6$

c) $\pm\sqrt{36} = \pm 6$

d) $\sqrt{-36} =$ não existe nos reais

e) $\sqrt[3]{27} = 3$

f) $\sqrt[3]{-27} = -3$

08. Simplifique os seguintes radicais:

a) $\sqrt{48}$ d) $\sqrt[3]{0,125}$

b) $\sqrt{72}$ e) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$

c) $\sqrt[3]{54}$ f) $\sqrt[5]{\frac{7}{32}}$

Resolução:

a) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt[3]{0,125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = 0,5$

e) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2}$

f) $\sqrt[5]{\frac{7}{32}} = \frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{7}}{2}$

09. Calcule o valor da expressão numérica a seguir: $2\sqrt{45} - 4\sqrt{20} + 7\sqrt{80} - 3\sqrt{125}$.

Resolução:

$2\sqrt{9 \cdot 5} - 4\sqrt{4 \cdot 5} + 7\sqrt{16 \cdot 5} - 3\sqrt{25 \cdot 5}$

$2\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - 4\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + 7\sqrt{16} \cdot \sqrt{5} - 3\sqrt{25} \cdot \sqrt{5}$

$2 \cdot 3\sqrt{5} - 4 \cdot 2\sqrt{5} + 7 \cdot 4\sqrt{5} - 3 \cdot 5\sqrt{5}$

$6\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 28\sqrt{5} - 15\sqrt{5}$

$11\sqrt{5}$

10. Simplifique o radical $\sqrt{4536}$.

Resolução:

Decompondo 4536 num produto de fatores primos, temos que: $4536 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^1$. Portanto:

$$\sqrt{4536} = \sqrt{2^3.3^4.7^1} = \sqrt{2^2.2^1.3^4.7^1} = 2^1.3^2\sqrt{2^1.7^1} = 18\sqrt{14}$$

11. Reduza os radicais $a = \sqrt[3]{4}$ e $b = \sqrt[4]{3}$ para o mesmo índice e, em seguida, calcule a.b.

Resolução:

$$a = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3\cdot 4]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$b = \sqrt[4]{3} = \sqrt[4\cdot 3]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

$$a.b = \sqrt[12]{256}.\sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{256.27} = \sqrt[12]{6912}$$

12. Escreva o radical $\sqrt[6]{5.\sqrt[4]{5^3}}$ na forma de expoente racional.

Resolução:

$$\sqrt[6]{5.\sqrt[4]{5^3}} = \sqrt[6]{\sqrt[4]{5^4.5^3}} = \sqrt[24]{5^7} = 5^{\frac{7}{24}}$$

13. Racionalize os denominadores das frações a seguir:

a) $\dfrac{30}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{88}{\sqrt[3]{11}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}}$

Resolução:

a) $\dfrac{30}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{30\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$

b) $\dfrac{88}{\sqrt[3]{11}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{11^2}}{\sqrt[3]{11^2}} = \dfrac{88\sqrt[3]{121}}{\sqrt[3]{11^3}} = \dfrac{88\sqrt[3]{121}}{11} = 8\sqrt[3]{121}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{3}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \dfrac{6\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}} = \dfrac{6\sqrt[4]{27}}{3} = 2\sqrt[4]{27}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

58. Calcule o valor numérico de:

a) $\sqrt{121}$ d) $\sqrt{-121}$

b) $-\sqrt{121}$ e) $\sqrt[5]{32}$

c) $\pm\sqrt{121}$ f) $\sqrt[5]{-32}$

59. Calcule o valor das expressões numéricas a seguir:

a) $\dfrac{\sqrt{441} - \sqrt[3]{64} + (-7)^0}{(-4)^2 - \sqrt[5]{-243} + \sqrt{196}}$

b) $\dfrac{6\cdot 10^{-3}\cdot[(-4)^2 - (-3)^2]}{15\cdot\sqrt[3]{-0{,}001}}$

60. Simplifique os radicais a seguir:

a) $\sqrt{2352}$ b) $\sqrt[3]{3024}$

61. Calcule o valor de cada uma das expressões a seguir:

a) $\sqrt{\dfrac{2^{17} + 2^{21}}{34}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{3^{26} - 3^{23}}{234}}$

c) $\sqrt[5]{\dfrac{20}{4^7 + 2^{12}}}$

62. Calcule o valor de cada uma das expressões numéricas a seguir:

a) $\sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-125}$

b) $\sqrt[7]{-1} - \sqrt[3]{-0{,}008} + \sqrt[5]{1024}$

c) $\sqrt[6]{729} - \sqrt{1{,}21} + \sqrt[4]{256}$

d) $\sqrt{289} - \sqrt[3]{-64} - \sqrt[5]{243}$

63. Calcule o valor de cada uma das expressões numéricas seguir:

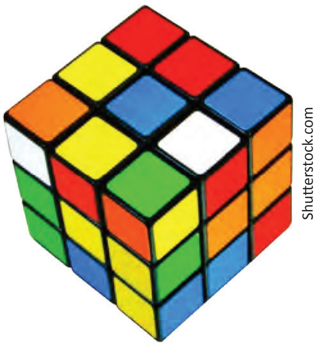
a) $5\sqrt{50} + 3\sqrt{98} - 10\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[3]{48} + 7\sqrt[3]{162} - \sqrt[6]{36}$

c) $\sqrt[4]{80} - 6\sqrt[4]{405} + 3\sqrt[4]{1280}$

d) $2\sqrt[6]{16} + \sqrt[3]{-108} - \sqrt[9]{64}$

64. Dá-se o nome de quadrado perfeito ao número inteiro não negativo cuja raiz quadrada também é um número inteiro não negativo. Já o cubo perfeito, é um número inteiro cuja raiz cúbica também é um número inteiro.



Na figura acima temos o conhecido "Cubo Mágico" ou "Cubo de Rubik". Ele é um quebra-cabeça tridimensional criado pelo húngaro Ermõ Rubik. Observe que esse cubo é composto de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ cubos menores, assim o número 27 é um cubo perfeito. Baseando-se nessas definições, responda os itens a seguir:

a) Qual o menor número natural devemos multiplicar 630 para que o produto assim obtido seja um quadrado perfeito?

b) Qual o menor número natural devemos multiplicar 450 para que o produto assim obtido seja um cubo perfeito?

65. Calcule o valor numérico de:

a) $\sqrt{4+\sqrt{23+\sqrt{1+\sqrt{9}}}}$

b) $\sqrt[5]{725+\sqrt[3]{67-\sqrt[3]{28+\sqrt[5]{-1}}}}$

c) $\sqrt{44+\sqrt[3]{155-5\sqrt{30+3\sqrt[4]{16}}}}$

66. Calcule o valor de cada uma das expressões numéricas a seguir:

a) $5(\sqrt{2}+3).(2-3\sqrt{2})$

b) $3\sqrt{3}(5\sqrt{12}-2\sqrt{75}+6\sqrt{48})$

c) $\dfrac{2\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}}{5\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{4}}$

67. Calcule o valor de cada uma das expressões numéricas a seguir:

a) $\sqrt{7+\sqrt{24}}.\sqrt{7-\sqrt{24}}$

b) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}.\sqrt{8-3\sqrt{7}}$

c) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2.(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$

68. Escrever os radicais a seguir em ordem crescente:

a) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}$ e $\sqrt[6]{5}$

b) $\sqrt[5]{4}, \sqrt[10]{8}$ e $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}$ e $\sqrt{3}$

69. Escreva na forma de um único radical as expressões a seguir:

a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[4]{13} \cdot \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{15} : \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[6]{72} : \sqrt[4]{12}$

70. Escreva sob forma de um único radical as expressões numéricas a seguir:

a) $\sqrt[4]{3\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$

c) $\sqrt[4]{3\sqrt[5]{9\sqrt[6]{3}}}$

71. Simplifique as expressões algébricas a seguir:

a) $\sqrt[4]{16a^9b^7}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{54a^8b^{10}}{c^{12}}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{a}{b}}$

72. Escrever na forma de radical cada uma das potências de expoentes fracionários:

a) $3^{\frac{2}{3}}$

b) $5^{-\frac{3}{4}}$

c) $(-11)^{\frac{2}{3}}$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}$

73. (FEI-SP) Calcular o valor numérico da expressão:

$$-\sqrt[3]{-8}+16^{-\frac{1}{4}}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+8^{\frac{4}{3}}$$

74. Calcule o valor de cada uma das expressões numéricas:

a) $32^{\frac{2}{5}}-216^{\frac{1}{3}}+(-343)^{\frac{2}{3}}$

b) $(1,21)^{\frac{1}{2}}+81^{0,25}-(-27)^{-\frac{2}{3}}$

c) $\left[16^{-\frac{3}{4}}+(-0,125)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$

75. Simplifique as expressões numéricas a seguir reduzindo-as a uma única potência de expoente racional:

a) $\left(5^{\frac{1}{3}}.5^{2}\right):\left(5^{-1}.5^{\frac{1}{4}}\right)$

b) $\left(2^{\frac{1}{2}}.2^{-3}.2^{0,75}\right):\left(2^{0,25}:2^{-2}\right)$

c) $(7^{-2})^{\frac{1}{5}}.(7^{5})^{\frac{3}{5}}:(7^{-2})^{-\frac{1}{4}}$

76. (CFT-CE) Simplifique a expressão

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}.\sqrt{(a-\sqrt{b})}.\sqrt{(a^2-b)},$$

com a e b positivos e $a > b$.

77. Racionalize os denominadores das frações a seguir:

a) $\frac{42}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{26}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{12}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{36}{\sqrt[4]{3}}$

TESTES DE VESTIBULARES

01. (CEFET-MG) Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou próximos de zero, são escritos em notação científica, que consiste em um número x, tal que $1 < x < 10$ multiplicado por uma potência de base 10. Assim sendo, 0,00000045 deve ser escrito da seguinte forma:

a) $0,45 \cdot 10^{-7}$

b) $4,5 \cdot 10^{-7}$

c) $45 \cdot 10^{-6}$

d) $4,5 \cdot 10^{-8}$

02. (CESGRANRIO) O número de algarismos do produto $5^{17}.4^{9}$ é igual a:

a) 17

b) 18

c) 26

d) 24

e) 35

03. (UNIFESP-SP) Quando se diz que numa determinada região a precipitação pluviométrica foi de 10 mm, significa que a precipitação naquela região foi de 10 litros de água por metro quadrado, em média. Se numa região de 10 km^2 de área ocorreu uma precipitação de 5 cm, quantos litros de água foram precipitados?

a) $5 \cdot 10^{7}$

b) $5 \cdot 10^{8}$

c) $5 \cdot 10^{9}$

d) $5 \cdot 10^{10}$

e) $5 \cdot 10^{11}$

04. (PUC-SP) Se $3^3.2^5 = 4.6^k$, o valor de k é:

a) 15

b) 8

c) 6

d) 3

e) nda

05. (UFRN) Se a = 0,1 e b = 0,2, o valor de

$\dfrac{a^2b^2 - a^3b}{b^2 - a^2}$ é:

a) $\frac{1}{300}$

b) $\frac{1}{150}$

c) $\frac{1}{100}$

d) $\frac{1}{75}$

e) $\frac{1}{200}$

06. (ESPM-SP) A expressão $2^{51} - 2^{50} - 2^{49}$ é igual a:

a) 2^{-48}

b) -2^{49}

c) 2^{48}

d) 2^{49}

e) 2^{50}

07. (UEMT) Simplificando-se a expressão

$[2^9 \div (2^2 \cdot 2)^3]^{-3}$, obtém-se:

a) 2^{36}

b) 2^{-30}

c) 2^{-6}

d) 1

e) $\frac{1}{3}$

08. (FGV-SP) O resultado da expressão

$$\frac{a \cdot b^{-2} \cdot (a^{-1} \cdot b^2)^4 \cdot (a \cdot b^{-1})^2}{a^{-2} \cdot b \cdot (a^2 \cdot b^{-1}) \cdot (a^{-1} \cdot b)}$$

para $a = 10^{-3}$ e $b = -10^{-2}$ faz parte de qual conjunto?

a) $\{10^6, 10^{-6}\}$

b) $\{-10^6, -10^{-6}\}$

c) $\{-10^9, 10^{-9}\}$

d) $\{-10^{-9}, 10^9\}$

e) nda

09. (MACK-SP) A fração $\dfrac{2^{98} + 4^{50} - 8^{34}}{2^{99} - 32^{20} + 2^{101}}$ é igual a:

a) 1

b) $-\frac{11}{6}$

c) 2

d) $-\frac{5}{2}$

e) $\frac{7}{4}$

10. (UEL-PR) Simplificando-se a expressão

$\dfrac{3^{3-n} + 3 \cdot 3^{2-n} - 9 \cdot 3^{1-n}}{9 \cdot 3^{2-n}}$ para $n \in IR$, obtém-se:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $6 \cdot 3^{n-1}$

d) $1 - 3^{1-n}$

e) -3^{n+1}

11. (UFMG) A expressão $\dfrac{a^{-\frac{1}{9}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{-a^2} : \left(-\frac{1}{a}\right)^2$, com $a \neq 0$, é equivalente a:

a) $\sqrt[9]{-a^5}$

b) $\sqrt[9]{a^5}$

c) $\sqrt[9]{-a^7}$

d) $\sqrt[9]{a^7}$

e) $\sqrt[9]{a^{-7}}$

12. (UFES) A expressão $\sqrt[3]{8^{-4}}$ é igual a:

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{6}$

d) 6

e) 16

13. (UFMG) Simplificando

$\sqrt{9\cdot 10^{-6}}\cdot\sqrt{0{,}0049}\cdot\sqrt{2{,}5\cdot 10^{3}}$, obtém-se:

a) 105
b) 10,5
c) 1,05
d) 0,105
e) 0,0105

14. (ESPM-SP) Simplificando a expressão

$\sqrt{\dfrac{2^{13}+2^{16}}{2^{15}}}$ obtemos:

a) $\sqrt{2}$
b) 1,5
c) 2,25
d) 2^7
e) 1

15. (UFMG) O valor da expressão

$(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}).(\sqrt{72}+\sqrt{20}-4\sqrt{2})$ é:

a) 6
b) $6\sqrt{2}$
c) 16
d) 18
e) $12\sqrt{5}$

16. (PUC-CAMP) Efetuando-se $\sqrt[3]{\dfrac{14}{125}+\sqrt{\dfrac{3}{5}-\dfrac{11}{25}}}$, obtém-se:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{14}+2}{5}$
b) $\dfrac{\sqrt[3]{114}}{5}$
c) $\dfrac{6}{5}$
d) $\dfrac{4}{5}$
e) $\dfrac{3}{5}$

17. (PUC-RJ) Se $\sqrt{3-b\sqrt{b}}\,.\,\sqrt{3+b\sqrt{b}}=1$, então b é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 1
e) 1

18. (UFTM) O conjunto de todos os números inteiros n que satisfazem a condição $5\sqrt{3}<n<8\sqrt{2}$ possui:

a) 1 elemento
b) 2 elementos
c) 3 elementos
d) 4 elementos
e) 5 elementos

19. (UFC) Dentre as alternativas a seguir, marque aquela que contém o maior número.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5\cdot 6}}$
b) $\sqrt{6\cdot\sqrt[3]{5}}$
c) $\sqrt{5\cdot\sqrt[3]{6}}$
d) $\sqrt[3]{5\cdot\sqrt{6}}$
e) $\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{5}}$

20. (UFLA-MG) O resultado da divisão

$\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}\div\sqrt[6]{\dfrac{a}{b^5}}$ é:

a) $\sqrt[6]{a^5b^7}$
b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^5}{b^7}}$
c) $\sqrt{ab}$
d) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
e) $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

21. (ENEM) Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1.999 e agosto de 2.000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20.000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto: O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos.

Considerando que um ano tem aproximadamente 32.10^6 s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km^2 (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de:

a) 10.000 km^2, e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.

b) 10.000 km^2, e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.

c) 20.000 km^2, e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.

d) 40.000 km^2, e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.

e) 40.000 km^2, e ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

22. (ENEM) Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani

O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1.200.000 quilômetros quadrados, dos quais 840.000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.

Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

Disponível em: http://noticias.terra.com.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do aquífero Guarani é:

a) $1,5 \cdot 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.

b) $1,5 \cdot 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.

c) $1,5 \cdot 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.

d) $1,5 \cdot 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.

e) $1,5 \cdot 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

23. (PUC-CAMP) Efetuando-se

$$\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}},$$ obtém-se:

a) $-\frac{22}{5}$

b) $\frac{-8\sqrt{6}}{5}$

c) 0

d) $-4\sqrt{6}+11$

e) $\frac{-2(4\sqrt{6}+11)}{5}$

24. (FUVEST-SP) O menor número natural n, diferente de zero, que torna o produto de 3.888 por n um cubo perfeito é:

a) 6

b) 12

c) 15

d) 18

e) 24

25. (UFJF-MG) A densidade demográfica de certa cidade é de 0,002 habitantes por metro quadrado. Se essa cidade ocupa uma área de 180 Km^2, o número de seus habitantes é:

a) 36 milhões

b) 9 milhões

c) 360 mil

d) 3,6 milhões

e) 60 mil

26. (FATEC-SP) Em um recipiente contendo 5 decilitros de água, foram colocados 300 centigramas de açúcar, obtendo-se, assim, uma mistura homogênea. Quantos miligramas de açúcar existem em uma amostra de 1 cm^3 dessa mistura?

a) 0,06

b) 0,6

c) 6

d) 60

e) 600

27. (UNIMONTES-MG) Um analgésico deve ser ingerido na quantidade de 3 mg por quilograma de massa corporal. Não pode, contudo, exceder 200 mg por dose ministrada. Cada gota contém 5 mg do remédio. Quantas gotas desse analgésico devem ser prescritas a um paciente de 80 kg?

a) 60 gotas

b) 48 gotas

c) 30 gotas

d) 40 gotas

28. (UFPE) Acomodando cada 6 pessoas em uma região com 1 m^2 de área, qual a área da região necessária para acomodarmos a população de 6 bilhões de pessoas da Terra?

a) 1.000 km^2

b) 10.000 km^2

c) 100.000 km^2

d) 1.000.000 m^2

e) 10.000.000 m^2

29. (UFTM) Como combustível, o etanol de cana-de-açúcar e o etanol de milho têm qualidades iguais. O grande diferencial entre eles é a produtividade. Sabe-se que 1 hectare de cana-de-açúcar produz 7.500 litros de etanol, enquanto 1 hectare de milho produz apenas 3.000 litros. Uma região específica da usina tem x hectares plantados, divididos entre cana e milho, de forma diretamente proporcional à produtividade de cada cultura. Considerando que 1 ha = 10.000 m^2 e que ao plantio do milho couberam 400 hectares, a área total, em m^2, dessa região específica pode ser corretamente expressa por

a) $1,2.10^6$

b) $1,3.10^6$

c) $1,4.10^7$

d) $1,4 .10^8$

e) $1,6.10^8$

30. (MACK-SP) Na construção de um dique, foram utilizadas 90 toneladas de terra, acondicionadas em sacos plásticos de 5 litros. Considerando que cada cm^3 de terra pesa 3 gramas, a menor quantidade necessária de sacos para a construção do dique foi de:

a) 4.000

b) 6.000

c) 8.000

d) 9.000

e) 10.000

31. (UEPB) Para apertar um parafuso, um mecânico precisa de urna chave de boca de $\frac{100}{157}$ de polegada. Sabendo que 1 polegada é igual a aproximadamente 25 mm, e que o mecânico dispõe de chaves com medidas de 8, 10, 12, 14 e 16 milímetros, a chave adequada para a tarefa é a de:

a) 14 mm

b) 10 mm

c) 12 mm

d) 8 mm

e) 16 mm

32. (UFRGS) A atmosfera terrestre contém 12.900 quilômetros cúbicos de água. Esse valor corresponde, em litros, a:

a) $1{,}29.10^{9}$

b) $1{,}29.10^{12}$

c) $1{,}29.10^{15}$

d) $1{,}29.10^{16}$

e) $1{,}29.10^{18}$

33. (CFT-MG) Para realizar uma campanha de imunização infantil, a prefeitura recebeu 1.728 litros de certa vacina distribuída em 80 caixas, cada uma contendo o mesmo número de ampolas de 18 cm^3. Para vacinar 114.000 crianças, em dose única, o número de caixas, a mais, da vacina que a prefeitura deverá receber é:

a) 5

b) 10

c) 15

d) 20

34. (UEPB) A velocidade da luz, que é de trezentos mil quilômetros por segundo, expressa em centímetros por segundo, será igual a:

a) $3{,}0.10^{9}$ cm/s

b) $3{,}0.10^{8}$ cm/s

c) $3{,}0.10^{10}$ cm/s

d) $3{,}0.10^{11}$ cm/s

e) $3{,}0.10^{6}$ cm/s

35. (CFT-MG) O hectare (ha) é a unidade de medida mais empregada em áreas rurais e 1 ha equivale a 10.000 m^2. Um engenheiro agrônomo recomendou a um fazendeiro aplicar 500 kg/ha de adubo em uma área de 2.500 m^2 de plantação de milho. Dessa forma, a quantidade de adubo necessária, em kg, é igual a:

a) 125

b) 250

c) 375

d) 500

36. (ENEM) Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota de água tem volume de 0,2 mL. Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

a) 0,2

b) 1,2

c) 1,4

d) 12,9

e) 64,8

37. (ENEM) O matemático americano Eduardo Kasner pediu ao filho que desse um nome a um número muito grande, que consistia do algarismo 1 seguido de 100 zeros. Seu filho batizou o número de gugol. Mais tarde, o mesmo matemático criou um número que apelidou de gugolplex, que consistia em 10 elevado a um gugol. Quantos algarismos tem um gugolplex?

a) 100

b) 101

c) 10.100

d) 10.100 + 1

e) 101.000 + 1

38. (ENEM) Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale à aproximadamente 2,95 centilitros (cL). Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL. Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de:

a) 0,83

b) 1,20

c) 12,03

d) 104,73

e) 120,34

O INFINITO

Por Cristiano Siqueira

Você sabia que podemos calcular potências (quadrados perfeitos) através da soma de números ímpares positivos?

Observe os seguintes exemplos:

$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$

$10^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$

Você notou que o número de parcelas é igual à base da potência calculada? Assim, podemos enunciar este curioso fato matemático da seguinte forma: $\mathbf{n^2}$ é igual à soma dos **n** primeiros números naturais ímpares positivos.

Se você achou isso intrigante, dê uma olhada na soma infinita das potências de base “2” abaixo. É de deixar o cabelo em pé! Olha só:

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \ldots$$

Claro que também podemos escrever a soma acima da seguinte maneira:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots$$

Mas será que podemos encontrar um resultado para “S” mesmo tratando-se de uma soma de infinitas parcelas? Bom, não custa tentar. Vamos nos valer de um método bem simples para um resultado espantoso! Vamos lá:

Note que a equação (II) foi inteiramente multiplicada por "−2"

$$\begin{cases} S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots (\text{I}) \\ -2.S = -2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 + \ldots (\text{II}) \end{cases}$$

O que aconteceria se somássemos membro a membro as equações do sistema acima? Vamos tentar? Observe que haverá uma série de infinitas simplificações de números opostos ou simétricos!

$$\begin{cases} S = 1 + \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{8} + \cancel{16} + \cancel{32} + \cancel{64} + \ldots \\ -2.S = -\cancel{2} - \cancel{4} - \cancel{8} - \cancel{16} - \cancel{32} - \cancel{64} + \ldots \end{cases} +$$

$$-S = 1$$

$$-S = 1 \,.\, (-1)$$

$$\boxed{S = -1}$$

E aí?! O que você acha? O resultado é loucura, magia, indução ao erro ou misticismo? Vá atrás! Pesquise, converse com outras pessoas, investigue e tire suas próprias conclusões. A curiosidade é a alma do conhecimento! Bons estudos.

03 EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

INTRODUÇÃO

No início da década de 90, o Brasil alcançou a sexta maior produção mundial de aço bruto, superando 24 milhões de toneladas exportadas para vários países.

O aperfeiçoamento constante dos processos e o desenvolvimento de pesquisas destinadas à produção de aços especiais mostram a preocupação da siderurgia nacional com a necessidade de se trabalhar com tecnologia de ponta, bem como com a qualidade de seus produtos.

Nesse contexto, a pequena metalúrgica do Sr. Antônio de Lima produz três tipos de peças utilizadas em motores de canoas. Os preços de venda das peças do tipo 1, 2 e 3 são, respectivamente, iguais a 37 reais, 48 reais e 95 reais. Sendo x a quantidade de peças vendidas do tipo 1, y a quantidade de peças vendidas do tipo 2 e z a quantidade de peças vendidas do tipo 3, é possível determinar uma expressão que fornece o valor, em reais, obtido na venda dos três tipos de peças.

A expressão que é dada por $37x + 48y + 95z$ é um exemplo de expressão formada por números e letras ligadas pelas operações matemáticas. Expressões desse tipo são chamadas de **expressões algébricas**.

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

DEFINIÇÃO

Expressões algébricas (ou literais) são conjuntos de números e letras ligadas entre si pelas operações de multiplicação, divisão, adição, subtração, potenciação e radiciação. Observe os exemplos:

- $x^2 - 2y$ é uma expressão algébrica composta de dois termos.
- $7x + \frac{2\sqrt{x}}{5y} - 9$ é uma expressão algébrica composta de três termos.

OBSERVAÇÃO:

- Termo é o elemento fundamental de qualquer expressão algébrica. É composto por números e letras ligados entre si pelas operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

As expressões algébricas são extremamente importantes, pois são capazes de sintetizar situações matemáticas de maneira bastante precisa.

Por exemplo:

- O triplo de um número: $3x$.
- O quadrado da diferença de dois números: $(x - y)^2$.
- A soma dos cubos de dois números: $x^3 + y^3$.
- A razão entre a soma e a diferença de dois números: $\frac{x+y}{x-y}$.

VALOR NUMÉRICO

O valor numérico de uma expressão algébrica é o número que se obtém ao atribuir números às letras que a compõem. Por exemplo, o valor numérico da expressão algébrica $x^2 + y^2 + 2xy$ para $x = 5$ e $y = 3$ é $5^2 + 3^2 + 2.5.3 = 25 + 9 + 30 = 64$.

FATORAÇÃO

DEFINIÇÃO

Fatorar uma expressão algébrica significa transformá-la em uma outra expressão algébrica equivalente que esteja na forma de produto.

Por exemplo:

- A expressão equivalente à expressão algébrica $3x^4 - 6x^2$, na forma fatorada, é $3x^2.(x^2 - 2)$.
- A expressão equivalente à expressão algébrica $9x^2 - 16$, na forma fatorada, $(3x + 4).(3x - 4)$.

PRINCIPAIS CASOS DE FATORAÇÃO:

- **1º caso: Fator comum**

$$ax + bx = x.(a + b)$$

Por exemplo:

$4x^2 + 12xy = 4x.(x + 3y)$

- **2º caso: Agrupamento**

$$ax + bx + ay + by = x.(a + b) + y.(a + b) = (a + b).(x + y)$$

Por exemplo:

$x^4 + x^2 - 4x^2 - 4 = x^2(x^2 + 1) - 4.(x^2 + 1) = (x^2 + 1).(x^2 - 4)$

- **3º caso: Diferença de dois quadrados**

$$x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)$$

Por exemplo:

$25x^2 - 36y^2 = (5x)^2 - (6y)^2 = (5x + 6y).(5x - 6y)$

- **4º caso: Trinômio quadrado perfeito**

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Por exemplo:

$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2.x.4 + 4^2 = (x + 4)^2$

- **5º caso: Soma de cubos**

$$x^3 + y^3 = (x + y).(x^2 - xy + y^2)$$

Por exemplo:

$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3).(x^2 - 3x + 9)$

- **6º caso: Diferença de cubos**

$$x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$$

Por exemplo:

$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2).(x^2 + 2x + 4)$

- **7º caso: Cubo perfeito**

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$$
$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$$

Por exemplo:

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$

- **8º caso: Trinômio do 2º grau**

$$ax^2 + bx + c = a.(x - x').(x - x'')$$

sendo x' e x'' as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Por exemplo:

$x^2 - 4x + 3 = (x - 3).(x - 1)$, pois as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ são $x' = 3$ e $x'' = 1$.

RADICAL DUPLO

Radicais da forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ com $a^2 - b \geq 0$ são chamados radicais duplos. Tais radicais podem ser transformados numa soma ou numa diferença de radicais simples. Assim, se $a^2 - b$ for um quadrado perfeito, é possível obter as seguintes igualdades:

- $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
- $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Represente através de uma expressão algébrica, as sentenças a seguir:

a) O produto da soma pela diferença de dois números.

b) A ordem dos fatores não altera o produto.

c) O cubo de um número é maior que o dobro do quadrado do outro.

d) O quádruplo de um número aumentado de 6 é igual ao triplo do quadrado de outro.

Resolução:

a) $(x + y).(x - y)$

b) $x.y = yx$

c) $x^3 > 2y^2$

d) $4x + 6 = 3x^2$

02. Determinar o valor numérico da expressão algébrica $\frac{x^3 + 2y}{4x - y^2}$ para $x = 2$ e $y = -1$.

Resolução:

Substituindo $x = 2$ e $y = -1$ na expressão algébrica

$\frac{x^3 + 2y}{4x - y^2}$ temos $\frac{2^3 + 2(-1)}{4.2 - (-1)^2} = \frac{8-2}{8-1} = \frac{6}{7}$.

03. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $5x^7 + 15x^4 - 30x^3$

b) $xy - y - x + 1$

c) $x^2 - 25$

d) $x^2 - 4xy + 4y^2$

e) $x^6 + y^6$

f) $64x^6 - 1$

g) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

h) $2x^2 + x - 1$

Resolução:

a) $5x^7 + 15x^4 - 30x^3 = 5x^3.(x^4 + 3x - 6)$

b) $xy - y - x + 1 = y(x-1) - 1.(x-1) = (x-1).(y-1)$

c) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x + 5).(x - 5)$

d) $x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$

e) $x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2).(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

f) $64x^6 - 1 = (4x^2)^3 - 1^3 = (4x^2 - 1).(16x^4 + 4x^2 + 1)$

g) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 = (3x - 2y)^3$

h) $2x^2 + x - 1 = 2.(x - \frac{1}{2}).(x + 1) = (2x - 1).(x + 1)$

pois as raízes da equação $2x^2 + x - 1 = 0$ são

$x' = \frac{1}{2}$ e $x'' = -1$

04. Simplifique as expressões numéricas a seguir:

a) $\frac{6x^2 - 12xy + 6y^2}{3x - 3y}$ b) $\frac{x^3 - 125}{x^2 - 25}$

Resolução:

a) $\frac{6x^2 - 12xy + 6y^2}{3x - 3y} = \frac{6(x^2 - 2xy + y^2)}{3(x - y)}$

$\frac{6(x-y)^2}{3(x-y)} = 2(x - y)$

b) $\frac{x^3 - 125}{x^2 - 25} = \frac{(x-5).(x^2 + 5x + 25)}{(x-5).(x+5)}$

$\frac{x^2 + 5x + 25}{x + 5}$

05. Simplifique as expressões numéricas a seguir:

a) $\frac{8}{4 + 2\sqrt{3}}$ b) $\frac{114}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

Resolução:

a) $\frac{8}{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{32 - 16\sqrt{3}}{4^2 - (2\sqrt{3})^2}$

$\frac{16(2 - \sqrt{3})}{16 - 12} = \frac{16(2 - \sqrt{3})}{4} = 4(2 - \sqrt{3})$

b) $\frac{114}{5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{114(5\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{(5\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2}$

$\frac{114(5\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{75 - 18} = 2(5\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$

06. Transforme o número $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ numa soma de radicais simples.

Resolução:

Como $7^2 - 48 = 1$ é um quadrado perfeito, é possível transformar $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ em uma soma de radicais simples. Observe:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \Rightarrow \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^2 = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$

$$7+\sqrt{48} = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{x}.\sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2$$

$$7+\sqrt{48} = x+y+2\sqrt{xy} \Rightarrow 7+\sqrt{48} = x+y+\sqrt{4xy}$$

Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 4xy=48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \Rightarrow x=5 \text{ e } y=2$$

Portanto, $\sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Dada a expressão algébrica $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, determine o valor numérico de x para $a = 1$, $b = 4$ e $c = 3$.

02. Calcular o valor numérico das expressões algébricas a seguir:

a) $2x^3 - x^2 + 6x - 1$ para $x = 3$

b) $4x^2y^3 - 5x^3y^2 + 3$ para $x = -1$ e $y = 2$

c) $\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y^2}{4}$ para $x = 4$ e $y = -3$

d) $\dfrac{xy - x^2}{\sqrt{y}}$ quando $x = -\dfrac{1}{10}$ e $y = \dfrac{1}{100}$

03. Determine a expressão algébrica $A + [B - (C + D)]$ sabendo-se que:

- $A = 4x^2 - 3xy + 6y^2$
- $B = -x^2 - 7xy - 5y^2$
- $C = 3x^2 - 4xy + 3y^2$
- $D = -4x^2 + xy - 2y^2$

04. Reduza as expressões a seguir à sua forma mais simples:

a) $4x + 2(5 - 3x) - 6(1 - 2x)$

b) $4(x^2 + x + 1) + 3(x^2 + 2x - 2) - (x^2 + 3x - 4)$

c) $2y(2x^2 - 2xy - y^2) - x(x^2 - 3xy + 4y^2)$

d) $x(x + y - z) + y(y + z - x) + z(x - y + z)$

05. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $20xy^3 - 16x^4y$

b) $6x^3y^2 - 3x^2y^4 + 9xy$

c) $15x^2yz + 5xy^2z - 10xyz^2$

06. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $5x - 5y + 8x - 8y$

b) $x^3 - x^2y + xy - y^2$

c) $x^6 + x^4 - x^2 - 1$

07. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $4x^2 - 81$

b) $9x^4y^2 - 25$

c) $(x + y)^2 - y^2$

08. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $4x^2 + 28x + 49$

b) $25a^2 - 20a + 4$

c) $x^4y - 8x^2y^2 + 16y^3$

09. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $8x^3 - 27y^3$

b) $2x^3 + 54$

c) $2x^4y + 16xy^4$

10. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

c) $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

11. (UNESP) Transforme a função polinomial $P(x) = x^5 + x^2 - x - 1$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 3º grau.

12. Fatore as expressões algébricas a seguir:

a) $x^2 - 7x + 12$

b) $-x^2 + 15x - 56$

c) $3x^2 - 5x + 2$

13. (UFF) Calcule o valor numérico de $\frac{1}{M}$ sendo

$M = -2 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2}$, $a = 0,998$ e $b = 1$.

14. Desenvolva as expressões a seguir:

a) $(1 + 3x).(1 - 3x)$

b) $(6x + 7y).(6x - 7y)$

c) $(3x + y)^2$

d) $(2x - y)^3$

15. Reduza as expressões a seguir à sua forma mais simples:

a) $(x - 3)^2 + x^2 - 2(x + 2)^2$

b) $(x - 5)^2 - (x + 5).(x - 5)$

c) $(x + 2)^3 - (x - 1)^3$

16. Responda os itens a seguir:

a) Sabendo que $x + y = -9$ e $x - y = 13$, qual o valor de $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2)$?

b) Sabendo que $a^2 + b^2 = 74$ e $ab = 35$, qual o valor numérico de $(a - b)^2$?

17. Simplifique as frações algébricas a seguir:

a) $\dfrac{x - y}{x^2 - xy}$

b) $\dfrac{9x^2}{3x^2 + 3xy}$

c) $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 4x + 3}$

d) $\dfrac{x^4 + x^3y - xy^3 - y^4}{x^2 - y^2}$

e) $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$

f) $\dfrac{2ax + ay + 2bx + by}{ax - ay + bx - by}$

18. Simplifique as frações algébricas a seguir:

a) $\dfrac{x - y}{z + w} : \dfrac{x^2 - y^2}{z^2 - w^2}$

b) $\left(\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}\right) : \left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right)$

c) $\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x + 1}$

d) $\left(1 - \dfrac{x - y}{x + y}\right) : \left(\dfrac{x + y}{x - y} - 1\right)$

e) $\left(x^2 - y + \dfrac{2y^2}{x^2 + y}\right).(x^2 + y)$

f) $\dfrac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^3 - y^3}$

19. Simplifique a fração algébrica a seguir:

$$\frac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} - b^{-2}}$$

20. Considere os números reais a, b e c, tais que:

- $a + b + c = 10$
- $ab + ac + bc = 20$

Nessas condições, calcule o valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

21. Sendo $x + \frac{1}{x} = m \ (m \in IR)$ calcule, em função de m, os valores de:

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

b) $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

22. Fatore a expressão $ab^3 + 7ab^2 - 3ab$ e, em seguida, determine seu valor numérico sabendo que $ab = 6$ e $b^2 + 7b = 20$.

23. Fatore a expressão $xm + xn + ym + yn$ e, em seguida, determine o seu valor numérico sabendo que $x + y = 12$ e $m + n = 4$.

24. Dada a expressão $x^2y^2 - z^2$, calcule o seu valor numérico sabendo que $xy + z = 7$ e $xy - z = 3$.

25. Racionalize o denominador de cada uma das frações a seguir:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$

d) $\dfrac{20}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$

26. Efetue as operações indicadas a seguir:

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

27. Transforme os números a seguir em soma ou subtrações de radicais simples.

a) $\sqrt{12+\sqrt{80}}$

b) $\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{15+4\sqrt{14}}$

d) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

TESTES DE VESTIBULARES

01. (FGV-SP) O valor da expressão $\dfrac{0,49-x^2}{0,7+x}$ para $x = -1,3$ é:

a) 2

b) -2

c) 2,6

d) 1,3

e) $-1,3$

02. (UFMG) Sejam a, b e c números reais e positivos tais que $\dfrac{ab}{b+c} = \dfrac{b^2-bc}{a}$. Então, é correto afirmar que:

a) $a^2 = b^2 + c^2$

b) $b = a + c$

c) $b^2 = a^2 + c^2$

d) $a = b + c$

03. (UFC) O valor exato da expressão numérica $\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}}$ é:

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

e) 8

04. (UECE) Considere a expressão algébrica $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-1}{1-\dfrac{x+1}{1-x}}$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Seu valor numérico para $x = \dfrac{2}{5}$ é:

a) 5^{-1}

b) negativo

c) 2,5

d) 5,2

05. (MACK-SP) Se $(x - y)^2 - (x + y)^2 = -20$, então x.y é igual a:

a) -1
b) 0
c) 10
d) 5
e) $\frac{1}{5}$

06. (MACK-SP) O valor de $\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$ para $x = 111$ e $y = 112$ é:

a) 215
b) 223
c) 1
d) -1
e) 214

07. (MACK-SP) Se k é um número real positivo, então $\frac{1}{\sqrt{k^2+1} - k}$:

a) Diminui quando k aumenta
b) É menor que 0
c) Está entre 0 e k
d) Está entre k e 2k
e) É maior que 2k

08. (UFU-MG) Sejam p e q dois números inteiros para os quais tem-se que $\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^{-1} = 1$ e $pq = -16$.

Assim, $|p - q|$ é igual a:

a) 0
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

09. (UEPB) Os sinais das operações aritméticas são hoje de fácil identificação e aplicação graças ao grande mestre alemão Michael Stifel (1.487–1.567) que no início do século XVI começou a empregar os símbolos + e – como sinais das operações usadas atualmente. A fração $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, quando $a = 193$ e $b = 192$, é igual a:

a) 0
b) $1932 - 1922$
c) 1
d) 101
e) 385

10. (ITA-SP) Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

a) $x \in]0,2[$
b) x é racional
c) $\sqrt{2x}$ é irracional
d) x^2 é irracional
e) $x \in]2;3[$

11. (UFAM) Sabendo-se que $3x^2 + 4xy + y^2 + x + y = 30$ e $3x + y = 5$. Então o valor de $x + y$ é:

a) 9
b) 6
c) 10
d) 5
e) 7

12. (UFPEL) Se $a^{2x} = 3$, o valor da expressão $A = \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ é:

a) $\frac{7}{5}$

b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

13. (FUVEST-SP) A expressão numérica $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é igual a:

a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}$

e) $\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}$

14. (ESPM-SP) Sabendo-se que $x+y^{-1}=7$ e que $x=4y$ o valor da expressão x^2+y^{-2} é igual a:

a) 49

b) 47

c) 45

d) 43

e) 41

15. (IFCE) Se $x+y=2$ e $x^2+y^2=3$, então x^3+y^3 vale:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

16. (CFT-MG) Simplificando a expressão algébrica $\frac{a^4+a^3b-ab^3-b^4}{a^2-b^2}$, com $a\neq b$, obtém-se:

a) $\frac{a+b}{a-b}$

b) a^2+ab+b^2

c) $a-b$

d) $(a+b)^3$

17. (FGV-SP) Sendo x um número positivo tal que $x^2+\frac{1}{x^2}=14$, o valor de $x^3+\frac{1}{x^3}$ é:

a) 52

b) 54

c) 56

d) 58

e) 60

18. (INSPER-RJ) O valor de $\frac{2009^2-4}{2009^2+2009-2}$ é igual a:

a) $\frac{2007}{2008}$

b) $\frac{2008}{2009}$

c) $\frac{2007}{2009}$

d) $\frac{2009}{2008}$

e) $\frac{2009}{2007}$

19. (FGV) Simplificando a fração a seguir, obtêm-se:

$$\frac{m^2+m}{5m^2+10m+5}$$

a) $\frac{1}{11}$

b) $\frac{m}{5(m+1)}$

c) $\frac{m}{5(m-1)}$

d) $\frac{m+1}{5m}$

e) $\frac{m-1}{5m}$

20. (UFC) Sabe-se que $a^2-2bc-b^2-c^2=40$ e $a-b-c=10$ com a, b e c números reais. Então o valor de $a+b+c$ é igual a:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 10

e) 20

21. (CFT-MG) Simplificando a expressão a seguir, para $x \in IR - \{-1, 0, 1\}$, obtém-se:

$$\frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}$$

a) x

b) x^2

c) $x - 1$

d) $x^2 - 1$

22. (ESPM-SP) O par ordenado $(x, y) \in IN \times IN$ é solução da equação $x^3 + x^2y - 8x - 8y = 7$. O valor de $x - y$ é:

a) 1

b) 2

c) -1

d) 0

e) -2

23. (CFT-RJ) Leia com atenção a demonstração a seguir:

Vamos provar por $a + b$ que $1 + 1 = 1$

Passo 0: Sejam a e b números reais não nulos tais que $a = b$.

Passo 1: Se $a = b$, podemos multiplicar os dois membros desta igualdade por a e obter: $a^2 = ab$

Passo 2: A seguir, subtraímos b^2 dos dois membros da igualdade: $a^2 - b^2 = ab - b^2$

Passo 3: Fatorando as expressões, temos: $(a + b)(a - b) = b\,(a - b)$

Passo 4: Agora, dividimos ambos os membros por $(a - b)$ e obtemos: $a + b = b$

Passo 5: Como no início, supomos que $a = b$, podemos substituir a por b. Assim: $b + b = b$

Passo 6: Colocando b em evidência, obtemos: $b\,(1 + 1) = b$

Passo 7: Por fim, dividimos a equação por b e concluímos que: $1 + 1 = 1$

É evidente que a demonstração acima está incorreta. Há uma operação errada:

a) No passo 2

b) No passo 3

c) No passo 4

d) No passo 6

24. (CFT-MG) Ao simplificar a expressão a seguir em que $x \neq 2$ e $x \neq 4$ obtém-se:

$$y = \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{x^2 - 6x + 8}$$

a) x

b) $x - 2$

c) $x + 2$

d) $x + 4$

25. (UFRGS) O quadrado do número a seguir é:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

26. (FGV) Fatorando completamente o polinômio $x^9 - x$ em polinômios e monômios com coeficientes inteiros, o número de fatores será

a) 7

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

27. (CFT-CE) Sabendo-se que $p + q = 4$ e $pq = 5$, então o valor de $E = p^3 + q^3 + p^2q + pq^2$ é:

a) 24

b) 26

c) 30

d) 34

e) 36

28. (UFES) O número $N = 2002^2 . 2000 - 2000 . 1998^2$ é igual a:

a) 2.10^6

b) 4.10^6

c) 8.10^6

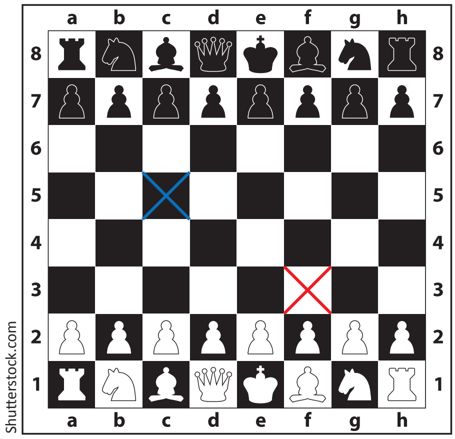
d) 16.10^6

e) 32.10^6

XADREZ & NOTAÇÃO ALGÉBRICA

Por Cristiano Siqueira

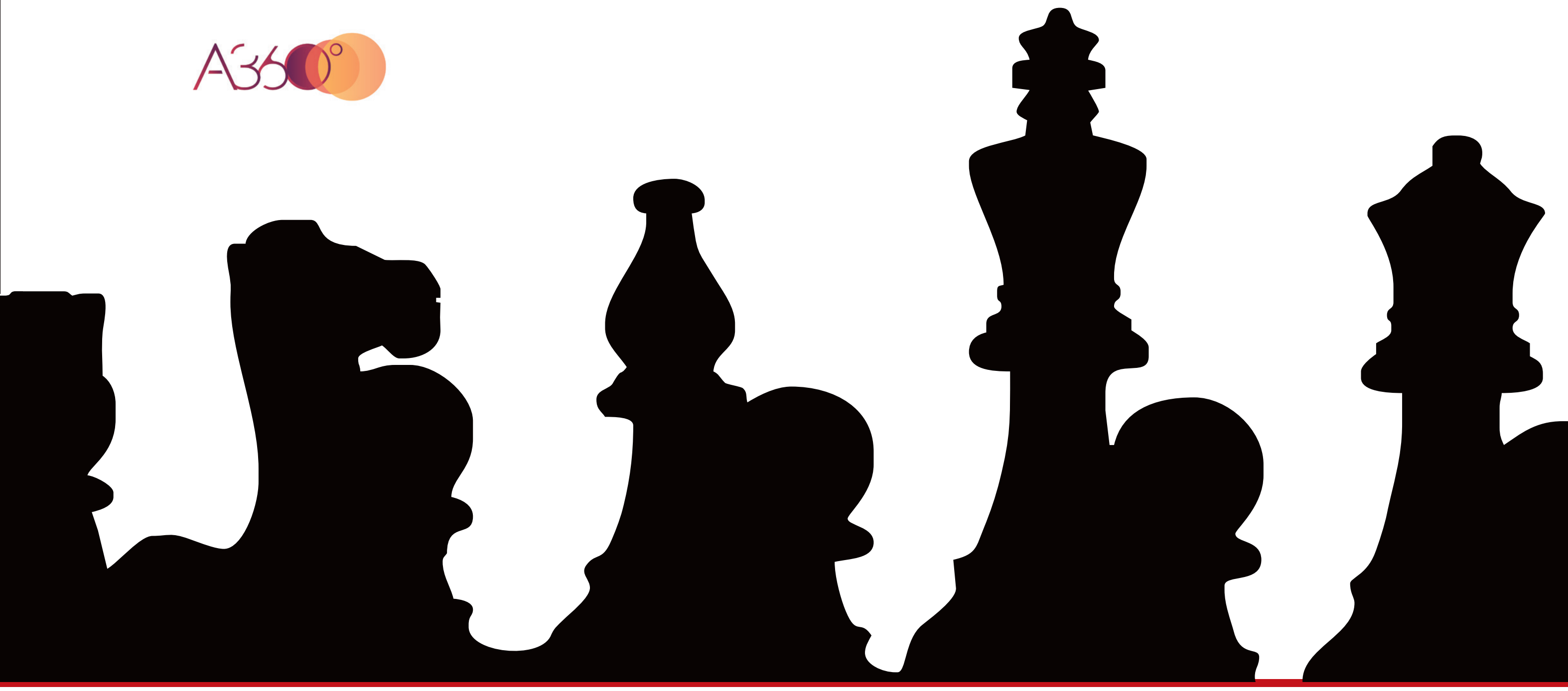
A notação enxadrística baseia-se em uma maneira muito elegante e inteligente de se anotarem os lances do jogo. Trata-se de um método matemático bastante simples e eficiente. Vejamos passo a passo como isso funciona. Primeiramente vamos ao tabuleiro:



Repare que todas as casas do tabuleiro são representadas através de um sistema de coordenadas, similar a um jogo de "batalha naval". Cada casa está relacionada a um par que é constituído por uma letra e um número. A letra identifica a coluna e o número, a linha (vide o diagrama ao lado). A casa marcada com um X vermelho é denominada "f3", e a casa marcada com um X azul, "c5".

Agora, vamos explicar como as peças são descritas. Elas são representadas por letras maiúsculas do nosso alfabeto: Rei = **R**; Dama = **D**; Torre = **T**; Bispo = **B**; Cavalo = **C**. Apenas a inicial **P**, referente aos peões, não é utilizada.

Veja como é simples escrevermos ou lermos um movimento. Vamos direto aos exemplos, explicando cada um deles (peça movimentada e casa de destino): **Cg2** – o cavalo vai para a



casa **g2—; Db4** — a dama vai para a casa **b4**—; **Th6** — a torre vai para a casa **h6**—; **Bg7** — o bispo vai para a casa **g7**.

Para a indicação das capturas, o lance é anotado colocando-se um **x** imediatamente à direita da letra inicial da peça. Por exemplo: **Dxh2** (a dama captura em **h2**); **Cxd8** (o cavalo captura em **d8**). Note que não nos interessa qual a peça está sendo capturada, mas sim a peça que faz a captura.

A título de curiosidade, veja uma partida anotada entre Viswanathan Anand (Indiano) e Magnus Carlsen (Norueguês) que disputam o atual campeonato mundial de xadrez. A vitória foi do jovem europeu Carlsen, considerado o pupilo do enxadrista mais famoso de todos os tempos: o ex-campeão russo Garry Kasparov.

1. c4 e6 2. d4 d5 3. Nc3 c6 4. e4 dxe4 5. Nxe4 Bb4+ 6. Nc3 c5 7. a3 Ba5 8. Nf3 Nf6 9. Be3 Nc6 10. Qd3 cxd4 11. Nxd4 Ng4 12. O-O—O Nxe3 13. fxe3 Bc7 14. Nxc6 bxc6 15. Qxd8+ Bxd8 16. Be2 Ke7 17. Bf3 Bd7 18. Ne4 Bb6 19. c5 f5 20. cxb6 fxe4 21. b7 Rab8 22. Bxe4 Rxb7 23. Rhf1 Rb5 24. Rf4 g5 25. Rf3 h5 26. Rdf1 Be8 27. Bc2 Rc5 28. Rf6 h4 29. e4 a5 30. Kd2 Rb5 31. b3 Bh5 32. Kc3 Rc5+ 33. Kb2 Rd8 34. R1f2 Rd4 35. Rh6 Bd1 36. Bb1 Rb5 37. Kc3 c5 38. Rb2 e5 39. Rg6 a4 40. Rxg5 Rxb3+ 41. Rxb3 Bxb3 42. Rxe5+ Kd6 43. Rh5 Rd1 44. e5+ Kd5 45. Bh7 Rc1+ 46. Kb2 Rg1 47. Bg8+ Kc6 48. Rh6+ Kd7 49. Bxb3 axb3 50. Kxb3 Rxg2 51. Rxh4 Ke6 52. a4 Kxe5 53. a5 Kd6 54. Rh7 Kd5 55. a6 c4+ 56. Kc3 Ra2 57. a7 Kc5 58. h4 1—0

O incrível é que através da notação algébrica é possível jogar xadrez por telefone, e-mail ou até mesmo verbalmente. Além do mais, o método nos permite documentar e acompanhar integralmente as partidas. Interessou-se pelo assunto? Procure saber mais! O xadrez é um ótimo instrumento para o aprimoramento do raciocínio lógico.


Shutterstock.com

04 MÚLTIPLOS E DIVISORES

INTRODUÇÃO

A Biblioteca Nacional do Brasil, cujo nome oficial institucional é Fundação Biblioteca Nacional, é a depositária do patrimônio bibliográfico e documental do Brasil, localizada na cidade do Rio de Janeiro. Ela é considerada pela UNESCO como a sétima maior biblioteca nacional do mundo e, também, a maior biblioteca da América Latina.

Para fazer um trabalho na Biblioteca Nacional, o professor Antônio Carlos precisa dividir os 60 alunos de uma turma de 1º ano. Ele pretende distribuir igualmente todos os alunos em grupos com, no mínimo, 9 e, no máximo, 12 alunos. Quais são as maneiras possíveis de se formar esses grupos?

Como ele quer distribuir igualmente todos os 60 alunos em grupos, não podemos ter aluno sobrando. Então, basta dividir 60 por 9, 10, 11 e 12 e considerar apenas as divisões exatas.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 9 \\ \cline{2-2} 6 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 11 \\ \cline{2-2} 5 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

A divisão de 60 por 10 é exata, assim podem-se formar 6 grupos com 10 alunos. Nessa situação, dizemos que 60 é múltiplo de 10, ou ainda, que 10 é divisor de 60.

A divisão de 60 por 12 é exata, assim podem-se formar 5 grupos com 12 alunos. Nessa situação, dizemos que 60 é múltiplo de 12, ou ainda, que 12 é divisor de 60.

MÚLTIPLOS E DIVISORES

Dados dois números inteiros **a** e **b**, dizemos que **a** é múltiplo de **b** se, e somente se, existir um inteiro **k** tal que a = k.b. Nessas condições, também pode-se dizer que **a** é divisor (ou fator) de **b**.

Por exemplo:

- Dizemos que 15 é múltiplo de 5, ou ainda, que 5 é divisor de 15, pois $15 = 5 . 3$.
- Dizemos que 18 é múltiplo de 9, ou ainda, que 9 é divisor de 18, pois $18 = 9 . 2$.
- Os múltiplos inteiros de 3 são 0, ±3, ±6, ±9, ±12, ...
- Os divisores inteiros de 8 são ±1, ±2, ±4 e ±8.

OBSERVAÇÕES:

- Dizer que um número inteiro **a** é múltiplo de um número inteiro **b** é equivalente a dizer que **a** é divisível por **b**.
- O número zero é múltiplo de todo número inteiro.
- O números ±1 são divisores de todo número inteiro.

NÚMERO PAR E NÚMERO ÍMPAR

Um número inteiro **a** é par se, e somente se, ele for múltiplo de 2. Se um número inteiro não é par, então esse número é chamado de ímpar. Assim, são números pares 0, ±2, ±4, ±6, ±8, ±10, ... e são números ímpares ±1, ±3, ±5, ±7, ±9, ...

OBSERVAÇÕES:

- Todo número inteiro par pode ser representado na forma 2k, sendo k um número inteiro.
- Todo número inteiro ímpar pode ser representado nas formas $2k + 1$ ou $2k - 1$, sendo k um número inteiro.

NÚMERO PRIMO E NÚMERO COMPOSTO

Um número inteiro **p** é chamado de número primo se, e somente se, possui exatamente 4 divisores inteiros. Tais divisores são ±1 e $\pm p$.

Assim, são números primos ±2, ±3, ±5, ±7, ±11, ±13, ... Os números inteiros que não são primos são chamados de números compostos.

Mas como verificar se, por exemplo, o número 147 é um número primo?

- Primeiramente, deve-se determinar todos os números primos positivos cujos quadrados não superam 147. São eles 2, 3, 5, 7 e 11 pois, $13^2 = 169$.
- Posteriormente, basta verificar se 147 é divisível por algum desses números primos.
- Como 147 não é divisível por nenhum deles, dizemos que 147 é um número primo. Caso contrário, 147 seria um número composto.

OBSERVAÇÕES:

- Os únicos primos que são pares são ±2.
- Existem infinitos números primos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Todo número composto pode ser expresso por um produto de fatores primos, sendo essa decomposição única, exceto pela ordem dos fatores primos. Assim, por exemplo:

- $396 = 2^2 . 3^2 .11^1$
- $2.100 = 2^2 . 3^1 . 5^2 . 7^1$

Esta forma de representar o inteiro é chamada de fatoração completa (ou decomposição canônica) do número.

Para se obter, por exemplo, a fatoração completa do número 1.176 basta dividi-lo sucessivamente pelos menores divisores primos até que se obtenha o quociente 1. Observe o esquema a seguir:

1.176	**2** (menor primo que divide 1.176)
588	**2** (menor primo que divide 588)
294	**2** (menor primo que divide 294)
147	**3** (menor primo que divide 147)
49	**7** (menor primo que divide 49)
7	**7** (menor primo que divide 7)
1	

Portanto, temos que $1.176 = 2^3.3^1.7^2$.

QUANTIDADE DE DIVISORES

As quantidades de múltiplos e divisores de um número inteiro são, respectivamente, infinita e finita. Logo, como determinar, por exemplo, a quantidade de divisores positivos de 1.200?

- Primeiramente, tem-se que $1.200 = 2^4 . 3^1 . 5^2$.
- Assim, todo divisor de 1.200 pode ser escrito na forma $2^a . 3^b . 5^c$ sendo $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 1$ e $0 \leq c \leq 2$.
- Logo, o expoente **a** pode assumir (4 + 1) valores, o expoente **b** pode assumir (1 + 1) valores e o expoente **c** pode assumir (2 + 1) valores.
- Portanto, a quantidade total de divisores de 1.200 é dada pelo produto $(4 + 1) . (1 + 1) . (2 + 1) = 30$ divisores positivos.

Assim, de maneira geral, a quantidade Q de divisores positivos de um número n, expresso pela decomposição completa $n = p_1^{k_1} . p_2^{k2} . p_3^{k_3} . ... p_n^{k_n}$, é dada por:

$$Q = (k_1 + 1) . (k_2 + 1) . (k_3 + 1) . ... . (k_n + 1)$$

OBSERVAÇÕES:

- A quantidade de divisores positivos é igual à quantidade de divisores negativos.
- A quantidade de divisores inteiros é dada pelo dobro do valor obtido pela expressão anterior.

DIVISÃO EUCLIDIANA

Dados os números inteiros **a**, **b**, **q** e **r** ($b \neq 0$), chamados, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto, dividir **a** por **b** significa obter os inteiros **q** e **r** tais que:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array} \Leftrightarrow a = b . q + r \text{ e } 0 \leq r < |b|$$

Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 9 \\ \hline 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & -4 \\ \hline 3 & -7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -35 & 9 \\ \hline 1 & -4 \end{array}$$

Observe que o resto é sempre não-negativo e menor que o valor absoluto (desconsiderando o sinal) do divisor.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

As amigas Karen e Bruna adoram assistir filmes e hoje, estão juntas no cinema que sempre frequentam. Sabendo-se que Karen vai a esse cinema a cada 6 dias, e Bruna vai a cada 9 dias, daqui a quantos dias as duas amigas irão se reencontrar nesse cinema?

Shutterstock.com

Como Karen vai ao cinema a cada 6 dias, ela vai aos dias que são múltiplos de 6. Como Bruna vai ao cinema a cada 9 dias, ela vai aos dias que são múltiplos de 9. Então, para se determinar daqui quantos dias elas se reencontrarão, basta se obter o menor número que seja múltiplo de 6 e 9, ao mesmo tempo.

- Os múltiplos positivos de 6 são: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...
- Os múltiplos positivos de 9 são: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ...
- Os múltiplos comuns de 6 e 9 são: 18, 36, 54, ...
- O mínimo múltiplo comum entre 6 e 9 é 18, portanto, elas voltarão a se encontrar daqui a 18 dias.

Assim, de maneira geral, dados dois números inteiros positivos **a** e **b**, dizemos que mínimo múltiplo comum entre **a** e **b**, indicado por mmc (a, b), é o menor dos múltiplos que eles têm em comum.

MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

João precisa cortar duas barras de ferro, uma com 36 dm de comprimento e outra com 30 dm de comprimento, em pequenos pedaços, todos do mesmo tamanho e de maior comprimento possível. Qual deve ser o comprimento, em dm, de cada pedaço?

Shutterstock.com

Como João precisa cortar as duas barras em tamanhos iguais, não pode haver sobras. Então, para determinar esse comprimento, ele precisa obter o maior número que seja divisor ao mesmo tempo de 36 e 30. A esse número damos o nome de máximo divisor comum.

- Os divisores positivos de 36 são: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18 e 36.
- Os divisores positivos de 30 são: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30.
- Os divisores comuns de 36 e 30 são: 1, 2, 3 e 6.
- O máximo divisor comum entre 36 e 30 é 6, portanto, o maior comprimento é 6 dm.

Assim, de maneira geral, dados dois números inteiros positivos **a** e **b**, dizemos que máximo divisor comum entre **a** e **b**, indicado por mdc (a, b), é o maior dos divisores que eles têm em comum.

OBSERVAÇÃO:

- Dados dois números inteiros positivos **a** e **b**, temos que: mmc (a, b) . mdc (a, b) = a . b.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

Dados dois números inteiros não-nulos **a** e **b**, diz-se que **a** e **b** são primos entre si se, e somente se, os únicos divisores comuns entre **a** e **b** for ±1. Vamos verificar, por exemplo, se 20 e 63 são primos entre si.

- Os divisores inteiros de 20 são: ±1, ±2, ±4, ±5, ±10, ±20.
- Os divisores inteiros de 63 são: ±1, ±3, ±7, ±9, ±21, ±63.
- Os divisores comuns entre 20 e 63 são: ±1.
- Portanto, 20 e 63 são primos entre si.

OBSERVAÇÕES:

- Dois números primos são sempre primos entre si.
- Dois números consecutivos são sempre primos entre si.
- Se os inteiros positivos **a** e **b** são primos entre si, então mmc(a, b) = a . b e mdc(a, b) = 1.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Os critérios de divisibilidade são regras que permitem verificar se um número inteiro **a** é divisível (ou múltiplo) de um número inteiro **b**, com base em sua representação decimal.

Divisibilidade por 2

Um número inteiro é divisível por 2 quando o algarismo das unidades for 0, 2, 4, 6, ou 8.

Por exemplo:

- O inteiro 1.238 é divisível por 2, pois o algarismo das unidades é 8.

Divisibilidade por 3

Um número inteiro é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 3.

Por exemplo:

- O inteiro 2.346 é divisível por 3, pois a soma dos algarismos 2 + 3 + 4 + 6 = 15 é divisível por 3.

Divisibilidade por 4

Um número inteiro é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos forem iguais a zero ou quando o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

Por exemplo:

- O inteiro 3.932 é divisível por 4, pois os dois últimos algarismos formam o número 32 que é divisível por 4.

Divisibilidade por 5

Um número inteiro é divisível por 5 quando o algarismo das unidades é 0 ou 5.

Por exemplo:

- O inteiro 3.575 é divisível por 5, pois o algarismo das unidades é 5.

Divisibilidade por 7

Um número inteiro é divisível por 7 quando a diferença entre o dobro do último algarismo e o número formado pelos demais algarismos for divisível por 7.

Por exemplo:

- O inteiro 1.218 é divisível por 7, pois 121 − 16 (dobro de 8) = 105 que é divisível por 7.

Divisibilidade por 8

Um número inteiro é divisível por 8 quando os três últimos algarismos forem iguais a zero ou quando o número formado por seus três últimos algarismos for divisível por 8.

Por exemplo:

- O inteiro 1.512 é divisível por 8, pois os três últimos algarismos formam o número 512 que é divisível por 8.

Divisibilidade por 9

Um número inteiro é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

Por exemplo:

- O inteiro 6.246 é divisível por 9, pois a soma dos algarismos $6 + 2 + 4 + 6 = 18$ é divisível por 9.

Divisibilidade por 10

Um número inteiro é divisível por 10 quando o algarismo das unidades é 0.

Por exemplo:

- O inteiro 7.820 é divisível por 10, pois o algarismo das unidades é 0.

Divisibilidade por 11

Um número inteiro é divisível por 11 quando a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par for divisível por 11.

Por exemplo:

- O inteiro 2.904 é divisível por 11, pois:
- A soma dos algarismos de ordem ímpar é $4 + 9 = 13$
- A soma dos algarismos de ordem par é $0 + 2 = 2$
- A diferença entre essas somas é $13 - 2 = 11$ que é divisível por 11.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Qual é o menor número natural que se deve subtrair de 431 para se obter um número divisível por 17?

Resolução:

Dividindo-se 431 por 17, obtém-se resto 6.

$$\begin{array}{r|l} 431 & 17 \\ \hline 6 & 25 \end{array}$$

Para que um número seja divisível por 17, o resto de sua divisão por 17 deve ser zero. Portanto, basta subtrair 6 de 431 obtendo-se 425.

02. Sendo x, y e z números inteiros positivos tais que:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases}$$

Mostre que $a + b + c$ é sempre par.

Resolução:

Somando as três equações membro a membro, temos que:

$a + b + c = (x + y) + (x + z) + (y + z)$

$a + b + c = 2x + 2y + 2z$

$a + b + c = 2 \,.\, (x + y + z)$

Portanto, para qualquer valor de x, y e z, temos que $a + b + c$ é sempre par.

03. Determine o valor de k, sabendo-se que o número inteiro $2^k \,.\, 3^2 \,.\, 5$ possui exatamente 24 divisores positivos.

Resolução:

A quantidade de divisores positivos de $2^k \,.\, 3^2 \,.\, 5^1$ é dada por:

$(k + 1) \,.\, (2 + 1) \,.\, (1 + 1) = 24 \Rightarrow k + 1 = 4 \therefore k = 3$

04. Determine os divisores positivos de 120.

Resolução:

Primeiramente, deve-se fazer a decomposição completa de 120.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Em seguida, traça-se uma linha vertical e escreve-se o número 1 (divisor de qualquer número) no canto superior direito.

		1
120	2	
60	2	
30	2	
15	3	
5	5	
1		

Por último, multiplica-se sucessivamente cada fator primo que está à esquerda da linha pelos números que estão à sua direita e acima, colocando-se os resultados nas linhas correspondentes sem repetir resultados.

		1
120	2	**2**
60	2	**4**
30	2	**8**
15	3	**3, 6, 12, 24**
5	5	**5, 10, 20, 40, 15, 30, 60 e 120**
1		

Portanto, os divisores positivos de 120 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 e 120.

05. O número x dividido pelo número y dá quociente 2 e resto 3. Já a divisão do número x + 2 pelo número y dá quociente 3 e resto zero. Sabendo-se que x e y são números naturais, determine-os.

Resolução:

$$\begin{array}{l|l} x & y \\ \hline 3 & 2 \end{array} \Leftrightarrow x = 2y + 3$$

$$\begin{array}{l|l} x+2 & y \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Leftrightarrow x + 2 = 3y + 0 \Rightarrow x = 3y - 2$$

Igualando as equações, temos:

$$3y - 2 = 2y + 3 \therefore y = 5 \text{ e } x = 13$$

06. Dados os números $a = 2^3 . 3^2 . 5^1$ e $b = 2^1 . 3^3 . 7^3$, determine o mmc (a, b) e o mdc (a, b).

Resolução:

A partir da decomposição completa dos números, o mínimo múltiplo comum é dado pelo produto dos fatores primos não comuns e fatores primos comuns de maior expoente. Assim, temos que:

$$\text{mmc}(a, b) = 2^3 . 3^3 . 5^1 . 7^3$$

A partir da decomposição completa dos números, o máximo divisor comum é dado pelo produto dos fatores primos comuns de menor expoente. Assim, temos que:

$$\text{mdc}(a, b) = 2^1 . 3^2$$

07. Determine o mínimo múltiplo comum entre 36, 48 e 56.

Resolução:

Através da decomposição simultânea desses números, temos que:

36 – 48 – 56	2
18 – 24 – 28	2
9 – 12 – 14	2
9 – 6 – 7	2
9 – 3 – 7	3
3 – 1 – 7	3
1 – 1 – 7	7
1 – 1 – 1	

O mínimo múltiplo comum é dado pelo produto dos fatores primos que dividem pelo menos um desses números. Assim, temos que:

$$mmc(36, 48, 56) = 2^4 . 3^2 . 7^1 = 1.008$$

Portanto, o mmc entre 36, 48 e 56 é 1.008.

08. Determine o máximo divisor comum entre 48, 60 e 168.

Resolução:

Através da decomposição simultânea desses números, temos que:

$$\begin{array}{ccccc|c} 48 & - & 60 & - & 168 & 2 \\ 24 & - & 30 & - & 84 & 2 \\ 12 & - & 15 & - & 42 & 3 \\ 4 & - & 5 & - & 14 & \end{array}$$

O máximo divisor comum é dado pelo produto dos fatores primos que dividem esses números simultaneamente. Assim, temos que:

$$mdc(48, 60, 168) = 2^2 . 3 = 12$$

Portanto, o mdc entre 48, 60 e 168 é 12.

09. Considere o número inteiro de quatro algarismos 1.45n, sendo n o algarismo das unidades. Nessas condições, determine o(s) valor(es) de n para que o número dado seja:

a) Divisível por 3.
b) Divisível por 11.

Resolução:

a) Para que um número seja divisível por 3 é necessário que a soma dos seus algarismos seja divisível por 3. Sendo S essa soma, temos que:

$$S = 1 + 4 + 5 + n \Rightarrow S = 10 + n$$

Assim, esse número será divisível por 3 para:

n = 2 (soma 12)

n = 5 (Soma 15)

n = 8 (Soma 18)

b) Para que um número seja divisível por 11 é necessário que a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par for divisível por 11. Sendo S_P a soma dos algarismos de ordem par e S_I a soma dos algarismos de ordem ímpar, temos que:

$S_P = 5 + 1 = 6$

$S_I = n + 4$

$S_I - S_P = n + 4 - 6 = n - 2$

Assim, esse número será divisível por 11 para:

n = 2 (diferença zero)

10. Considere o número inteiro de cinco algarismos 75.a2b, sendo a o algarismo das centenas e b o algarismo das unidades. Nessas condições, determine os valores de a e b para que o número dado seja divisível por 30.

Resolução:

Para que um número seja divisível por 30, ele deve ser divisível por **a** e **b**, primos entre si, tais que a.b = 30. Logo, deve ser divisível por 3 e 10.

Para que um número seja divisível por 10 é necessário que o algarismo das unidades seja igual a 0. Portanto, para b = 0.

Para que um número seja divisível por 3 é necessário que a soma dos seus algarismos seja divisível por 3. Sendo S essa soma, temos que:

$$S = 7 + 5 + a + 2 + b \Rightarrow S = 14 + a + b.$$

Para b = 0, temos que

$$S = 14 + a + 0 \Rightarrow S = 14 + a$$

Assim, esse número será divisível por 3 para:

a = 1 (soma 15)

a = 4 (soma 18)

a = 7 (soma 21)

Portanto, para que o número seja divisível por 30, temos que b = 0 e a = 1 ou a = 4 ou a = 7.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Escreva:

a) Os múltiplos positivos de 4.

b) Os múltiplos inteiros de 5.

c) Os divisores positivos de 24.

d) Os divisores inteiros de 36.

02. Dados os números inteiros 3 e 15, julgue os itens as seguir em certo (C) ou errado (E).

a) 3 é múltiplo de 15.

b) 15 é divisível por 3.

c) 3 e 15 são números primos.

d) 3 é divisor de 15.

e) 15 é divisor de 5.

03. Julgue os itens a seguir em certo (C) ou errado (E).

a) O número zero é divisor de todo número inteiro.

b) O número 1 é divisor de todo número inteiro.

c) O número zero tem infinitos divisores.

d) O número 1 tem infinitos múltiplos.

e) Qualquer número inteiro, diferente de zero, possui infinitos múltiplos.

04. Julgue os itens a seguir em certo (C) ou errado (E):

a) Todo número par é divisível por 4.

b) Todo número divisível por 3 é divisível por 9.

c) Todo número divisível por 3 e 7 é divisível por 21.

d) Todo número ímpar divisível por 3 também é divisível por 7.

e) A soma de dois números ímpares é sempre um número ímpar.

05. Um campeonato de futebol será disputado por 48 times. Os organizadores pretendem dividir igualmente esses times em grupos com, no mínimo 5 e, no máximo 18 equipes.

Shutterstock.com

Quais as possíveis maneiras de se fazer essa divisão?

06. Responda os itens a seguir:

a) A soma de dois números pares consecutivos é 206. Quais são esses números?

b) A soma de três números ímpares consecutivos é 249. Quais são esses números?

07. Determine três números naturais e múltiplos sucessivos de 3, tais que o quádruplo do menor seja igual ao triplo do maior.

08. Responda os itens a seguir:

a) Qual é o menor número natural que se deve subtrair de 357 para se obter um número divisível por 13?

b) Qual é o menor número natural que se deve adicionar a 233 para se obter um número divisível por 7?

09. (UNICAMP-SP)

a) Quais são o quociente e o resto da divisão de 3.785 por 17?

b) Qual o menor número natural, maior que 3.785, que é múltiplo de 17?

10. Resolva os problemas a seguir:

a) Qual é o menor número de 3 algarismos que dividido por 13 dá resto 6?

b) Qual é o maior número de 3 algarismos que dividido por 7 dá resto 4?

11. Qual das alternativas a seguir é constituída apenas de números primos?

a) 2, 3, 8, 43
b) 5, 11, 13, 21
c) 1, 5, 11, 17, 19
d) 3, 19, 23, 37

12. Verifique quais números a seguir são primos.

a) 143 b) 169 c) 191 d) 203

13. Os números 72 e 140 são primos entre si? Justifique sua resposta.

14. Responda os itens a seguir:

a) Quantos divisores positivos possui o número 960?

b) Quantos divisores inteiros possui o número 420?

c) Quais são os divisores positivos de 180?

15. Dado o número inteiro $a = 2^n \cdot 3^2 \cdot 5^3$, determine o valor de n para que a tenha 48 divisores positivos.

16. Responda os itens a seguir:

a) Quantos divisores inteiros e positivos possui o número $a = 18^3 \cdot 15^2$?

b) Qual é o valor de k para que o número inteiro 8.7^k tenha 72 divisores inteiros?

17. (UNICAMP-SP) O teorema fundamental da aritmética garante que todo número natural $n > 1$ pode ser escrito como um produto de números primos. Além disso, se $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_r^{t_r}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são números primos distintos, então o número de divisores positivos de n é $d(n) = (t_1 + 1)(t_2 + 1) \ldots (t_r + 1)$.

a) Calcule d(168), isto é, o número de divisores positivos de 168.

b) Encontre o menor número natural que tem exatamente 15 divisores positivos.

18. Considere as seguintes definições:

- Divisores próprios de um número positivo N são todos os divisores inteiros positivos de N, exceto o próprio N.
- Um número é perfeito quando puder ser escrito como soma de seus divisores próprios.

Nessas condições, responda os itens a seguir:

a) O número 28 é perfeito? Justifique.

b) O número 496 é perfeito? Justifique.

19. (UFGO) Dois números são ditos “amigáveis”, se um é a soma dos divisores próprios do outro. Divisores próprios são todos os divisores positivos do número, exceto o próprio número. Verifique se os números 220 e 284 são amigáveis.

20. Determine o número natural que dividido por 25 dá quociente 13 e resto 8.

21. Um número natural x ao ser dividido por 22 dá quociente 6 e resto maior resto possível. Qual é o valor de x?

22. Determine os números inteiros x e y tais que:

- Na divisão de x por y, obteve-se quociente 5 e resto 2;
- Na divisão de x por $y + 1$, obteve-se quociente e resto iguais a 4.

23. (UNB-DF) Dois números positivos, a e b, têm produto igual a 525. Sabendo que a divisão de a por x tem quociente 4 e resto 1 e que a divisão de b por $x + 1$ tem também quociente 4 e resto 1, calcule o valor de $a + b$.

24. Quais são os inteiros positivos menores que 100 que ao serem divididos por 27 obtém-se quociente e resto iguais?

25. Colocando-se 20 selos em cada folha de um álbum, sobram duas folhas; colocando-se 15 selos em cada folha, todas as folhas são ocupadas e ficam sobrando ainda 60 selos.

Qual é o número total de selos e o número de folhas do álbum?

26. Um ônibus parte do terminal rodoviário de Goiânia de 30 em 30 minutos, outro de 45 em 45 minutos e outro de 50 em 50 minutos. Se partirem juntos agora, quantos minutos depois vão partir juntos pela primeira vez?

27. Para a montar um armário, um marceneiro tem a sua disposição duas peças de madeira de comprimentos 350 cm e 140 cm.

Shutterstock.com

Sabendo-se que elas serão divididas em pedaços iguais, com o maior comprimento possível, calcule o número total de pedaços obtidos.

28. Três motociclistas percorrem um circuito, no mesmo sentido, saindo do mesmo ponto, e ao mesmo tempo. O primeiro faz o percurso a cada 30 segundos, o segundo a cada 36 segundos e o terceiro a cada 40 segundos. Nessas condições, responda os itens a seguir:

a) Após quanto tempo os três motociclistas se encontrarão novamente no ponto de partida pela primeira vez?

b) Quantas voltas terá dado o primeiro, o segundo e o terceiro motociclistas na condição do item a?

29. A casa de Priscila possui uma sala retangular com 4,00 m de comprimento por 3,36 m de largura. Ela deseja cobrir todo o piso da sala com peças de granito quadradas de mesmo tamanho (sem que haja sobras).

Nessas condições, responda os itens a seguir.

a) Qual é a medida máxima, em centímetros, dessas peças?

b) Quantas peças, no mínino, são necessárias?

30. Dados os números $a = 2^3 . 3^2 . 5^1$ e $b = 2 . 3^3 . 5^2$, determine:

a) A quantidade de divisores positivos de a e b.

b) O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre a e b.

31. (UFF-RJ)

a) Escreva o número 306 como produto de números primos.

b) Considere os números naturais $a = 2^{17} . 3^{28} . 7^{10}$ e $b = 2^9 . 5^2 . 7^{16}$. Escreva o maior divisor comum e o menor múltiplo comum de a e b como produto de potências de números primos.

c) Quantos divisores inteiros positivos o número $b = 2^9 . 5^2 . 7^{16}$ possui?

32. Considere os seguintes números inteiros:

- $a = 2^2 . 3^k . 5^2 . 7^3$
- $b = 2^3 . 3^5 . 7^p . 11^1$

Determine os valores de **k** e **p** sabendo-se que:

a) O número inteiro **a** possui 108 divisores naturais e o inteiro **b** possui 96 divisores naturais.

b) O máximo divisor comum entre **a** e **b** é 18.900.

33. Suponha que um determinado país possui três cargos A, B e C do poder legislativo. Cada um desses cargos é preenchido através de eleições entre a população. Admita que os candidatos ao cargo A sejam eleitos para o mandato de 4 anos, os do cargo B para o mandato de 5 anos e os do cargo C para o mandato de 6 anos. Se em 2.001, houve eleições simultâneas para todos esses cargos, responda os itens a seguir.

a) Em qual ano serão realizadas eleições simultâneas para os cargos A e C pela primeira vez?

b) Em qual ano serão realizadas eleições simultâneas para os cargos A e B pela segunda vez?

c) Em qual ano serão realizadas eleições simultâneas para os cargos A, B e C pela primeira vez?

34. Os dois livros de Literatura mostrados a seguir têm 128 e 80 páginas e são constituídos por capítulos com o mesmo número de páginas.

Shutterstock.com

Nessas condições, responda os itens a seguir:

a) Qual é a quantidade máxima de páginas que cada capítulo desses livros podem possuir?

b) Quantos capítulos possuem cada um dos livros nas condições do item a?

35. Responda os itens a seguir:

a) Qual é o menor número inteiro positivo que, ao ser dividido por 2, 3 ou 5 deixa resto 1?

b) Qual é o número inteiro n, $200 < n < 300$, que dividido por 3, 5 ou 8 deixa resto 3?

36. Na fazenda do Sr. Miguel, a colheita de maçãs ficou entre 400 e 700 unidades. Se essas maçãs fossem colocadas em caixas com 45 ou 60 unidades cada uma, sobrariam 20 maçãs.

Shutterstock.com

Assim, qual a quantidade total de maçãs que foram colhidas?

37. (UNESP) Uma parede de 350 cm de altura e 500 cm de comprimento será revestida de azulejos quadrados iguais. Desprezando-se a necessidade de deixar espaço entre os azulejos e supondo-se que não haverá perdas provenientes do corte deles,

a) Determine o número de azulejos de 20 cm de lado necessários para revestir a parede;

b) Encontre a maior dimensão de cada peça de azulejo para que não haja necessidade de cortar nenhum deles.

38. (UNESP) A tabela mostra aproximadamente a duração do ano (uma volta completa em torno do Sol) de alguns planetas do sistema solar, em relação ao ano terrestre.

Planeta	Duração do ano
Júpiter	12 anos terrestres
Saturno	30 anos terrestres
Urano	84 anos terrestres

Se, em uma noite, os planetas Júpiter, Saturno e Urano são observados alinhados, de um determinado local na Terra, determine, após essa ocasião, quantos anos terrestres se passarão para que o próximo alinhamento desses planetas possa ser observado do mesmo local.

39. (UFRJ) Seu Almeida possuía uma quantidade de azulejos maior do que 150 e menor do que 250. Ele arrumou os azulejos em várias caixas, cada uma contendo 17 azulejos. Sobraram 15 azulejos. Ele, então, resolveu guardar tudo em caixas menores, cada uma contendo 11 azulejos. Dessa vez, ficaram sobrando 4 azulejos. Determine quantos azulejos seu Almeida possuía.

40. Utilizando os critérios de divisibilidade, escreva o menor e o maior número inteiro de 3 algarismos distintos que seja divisível por:

a) 2 c) 4 e) 9

b) 3 d) 5 f) 10

41. Considere o número N = 3.25x, sendo x o algarismo das unidades. Determine o valor de x para que N seja divisível por:

a) 2 c) 5 e) 9

b) 3 d) 6 f) 11

42. Um número é composto de três algarismos. O algarismo das centenas é 5 e o das dezenas é 7. Determine o algarismo das unidades para que esse número seja divisível por 7.

43. Determine os valores de x para que o número de 5 algarismos 73.x2x seja divisível por 6.

44. Considere o número N = 2.974.31x, sendo x o algarismo das unidades. Determine os possíveis valores de x para que N seja múltiplo de:

a) 3 b) 4 c) 8

45. Considere o número M = 5.1x8, sendo x o algarismo das dezenas. Determine o valor de x para que M seja múltiplo de:

a) 9 b) 11 c) 99

46. Considere o número de 9 algarismos, dos quais o algarismo das unidades é n e todos os demais são iguais a 2. Determine n para esse número seja divisível por:

a) 2 b) 4 c) 6

47. Dado o número P = 3.k70, sendo k o algarismo das centenas. Determine os possíveis valores de k para que P seja divisível por 15.

48. Determine os valores numéricos de **a** e **b** para que o número 5.a6b seja um número divisível por 3 e 4.

49. João Vitor propôs a seus colegas de sala o seguinte problema:

"Qual o algarismo que se deve intercalar entre os algarismos do número 76 de modo que o numeral obtido seja divisível por 4 e 9?"

Sabendo-se que Anna Vitória calculou corretamente esse número, qual foi a sua resposta?

50. Utilizando o critério de divisibilidade, um aluno do professor Valdir verificou que há pelo menos um múltiplo de 11 entre os números a seguir. Quais são eles?

a) 50.623 b) 40.194 c) 71.819

51. **(UNB-DF)** Um investigador, em busca de informações precisas, encontrou uma velha nota fiscal, na qual estava registrada a aquisição de 72 itens de uma mesma mercadoria por um valor total de R$ x67,9y, sendo que o primeiro e o último algarismos — x e y — estavam ilegíveis. Sabendo que é possível achar o valor exato da nota fiscal, determine o produto xy.


Shutterstock.com

TESTES DE VESTIBULARES

01. **(UFMG)** José decidiu nadar, regularmente, de quatro em quatro dias. Começou a fazê-lo em um sábado; nadou pela segunda vez na quarta-feira seguinte e assim por diante. Nesse caso, na centésima vez em que José for nadar, será:

a) Terça-feira
b) Quarta-feira
c) Quinta-feira
d) Sexta-feira

02. **(UERJ)** Considere o conjunto formado pelos inteiros p para os quais $\frac{p^2+5}{p+2}$ também é um número inteiro. O número de elementos desse conjunto é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

03. (UFPI) O algarismo das unidades de $3 \,.\, 5 \,.\, 87 \,.\, 114 \,.\, 213 \,.\, 311$ é:

a) 8

b) 5

c) 3

d) 1

e) 0

04. (PUC-SP) Considere o número inteiro $P = 100 \,.\, 101 \,.\, 102 \ldots\ldots 200$, produto de 101 números inteiros sucessivos. Ao escrever-se P como um produto de fatores primos, o número de vezes que o fator 7 aparece é:

a) 15

b) 16

c) 17

d) 18

e) 19

05. (PUC-SP) A função de Euler $\varnothing$ é definida para todo natural $n \geq 1$ da seguinte maneira: $\varnothing(n)$ é o número de números naturais primos com n e menores que n. Quanto vale $\varnothing(12)$?

a) 4

b) 5

c) 3

d) 6

e) 0

06. (FUVEST-SP) No alto de uma torre de uma emissora de televisão duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltaram a piscar simultaneamente?

a) 12

b) 10

c) 20

d) 15

e) 30

07. (UNESP) Três viajantes partem num mesmo dia de uma cidade A. Cada um desses três viajantes retorna à cidade A exatamente a cada 30, 48 e 72 dias, respectivamente. O número mínimo de dias transcorridos para que os três viajantes estejam juntos novamente na cidade A é:

a) 144

b) 240

c) 360

d) 480

e) 720

08. (UFMG) No sítio de Paulo, a colheita de laranjas ficou entre 500 e 1.500 unidades. Se essas laranjas fossem colocadas em sacos com 50 unidades cada um, sobrariam 12 laranjas e, se fossem colocadas em sacos com 36 unidades cada um, também sobrariam 12 laranjas. Assim sendo, quantas laranjas sobrariam se elas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um?

a) 4

b) 6

c) 7

d) 2

09. (FGV-SP) Pedro tirou menos de uma centena de fotos da festa em comemoração ao seu aniversário e quer colocá-las todas num álbum de 20 páginas. Em cada página desse álbum cabem, no máximo, 10 fotos. Inicialmente, Pedro tentou colocar 6 fotos em cada página. Ao final, depois de preenchidas algumas páginas do álbum, ficou sobrando uma foto. Em nova tentativa, dispôs 7 fotos por página e ainda assim sobrou uma foto. Finalmente, Pedro conseguiu colocar todas as fotos, de modo que cada página contivesse o mesmo número de fotos. Quantas páginas do álbum Pedro preencheu?

a) 9

b) 17

c) 18

d) 19

e) 20

10. (UFPB) Um pequeno agricultor tem um sítio em forma triangular, com as seguintes dimensões: 154 m, 165 m e 187 m. O agricultor deseja plantar cajueiros ao longo da cerca que delimita a sua propriedade, de modo que mantenha a mesma distância entre cajueiros consecutivos e que haja um cajueiro em cada vértice do sítio. A quantidade mínima de cajueiros que devem ser plantados, de modo que a distância (em metros) entre dois cajueiros consecutivos seja dada por um número inteiro, é:

a) 42

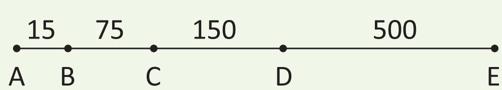
b) 49

c) 46

d) 40

e) 48

11. (EPCAR-MG) Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.



Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância d entre todos eles fosse a mesma e a maior possível. Se x representa o número de vezes que a distância d foi obtida pelo agricultor, então x é um número divisível por:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

12. (ESPM-SP) Dividindo-se 218 ou 172 pelo natural **n**, obtém-se resto 11. Dividindo-se **n** por 11 obtém-se resto igual a:

a) 3

b) 0

c) 1

d) 2

e) 5

13. (UFGO) Uma confecção atacadista tem no seu estoque 864 bermudas e 756 calças e deseja vender toda essa mercadoria dividindo-se em pacotes, cada um n_1 bermudas e n_2 calças, sem sobrar nenhuma peça no estoque. Deseja-se montar o maior número de pacotes nessas condições. Nesse caso, o número de peças, em cada pacote, deve ser igual a:

a) 9

b) 12

c) 15

d) 18

e) 20

14. (UNIFESP-SP) O número de inteiros positivos que são divisores do número $N = 21^4 \, . \, 35^3$, inclusive 1 e N, é:

a) 84

b) 86

c) 140

d) 160

e) 162

15. (UFU-MG) Se p é um número natural primo e a soma de todos os divisores positivos de p^2 é igual a 31, então p é igual a:

a) 5

b) 7

c) 3

d) 2

e) 11

16. (UFMA) Dados $n = 2^2.3^a.5^2.7^3$ e $m = 2^3.3^5.7^b.11$, os valores de **a** e **b**, tais que o mdc(m, n) = 18.900, são:

a) $a = 2$ e $b = 3$

b) $a = 3$ e $b = 1$

c) $a = 0$ e $b = 2$

d) $a = 3$ e $b = 2$

e) $a = 2$ e $b = 2$

17. (UFU-MG) O número de três algarismos 2m3 é somado ao número 326, resultando o número de três algarismos 5n9. Sabendo-se que 5n9 é divisível por 9, temos que $m + n$ é igual a:

a) 2

b) 6

c) 4

d) 8

18. (UFGD-MS) Um estudante de Teoria dos Números escreveu corretamente um múltiplo de 9 com 1.525 algarismos, todos diferentes de zero. Da direita para esquerda, os seus algarismos são 1.134 algarismos 3, quatro algarismos n e 387 algarismos 2. O algarismo n é:

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) 9

19. (PUC-CAMP) No conjunto dos números naturais, considere um número n, que dividido por 3, deixa resto 2; dividido por 4 deixa resto 3 e dividido por 5 deixa resto 4. Conclua que o menor valor de n pertence ao intervalo:

a) $30 < n < 50$

b) $50 < n < 80$

c) $80 < n < 110$

d) $110 < n < 140$

e) nda

20. (UFMG) O quadrado da diferença entre o número natural x e 3 é acrescido da soma de 11 e x. O resultado é, então, dividido pelo dobro de x, obtendo-se quociente 8 e resto 20. A soma dos algarismos de x é:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 2

e) 6

21. (ENEM) Nosso calendário atual é embasado no antigo calendário romano, que, por sua vez, tinha como base as fases da lua. Os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro possuem 31 dias, e os demais, com exceção de fevereiro, possuem 30 dias. O dia 31 de março de certo ano ocorreu em uma terça-feira. Nesse mesmo ano, qual dia da semana será o dia 12 de outubro?

a) Domingo

b) Segunda-feira

c) Terça-feira

d) Quinta-feira

e) Sexta-feira

22. (ENEM) Em uma floresta, existem 4 espécies de insetos, A, B, C e P, que têm um ciclo de vida semelhante. Essas espécies passam por um período, em anos, de desenvolvimento dentro de seus casulos. Durante uma primavera, elas saem, põem seus ovos para o desenvolvimento da próxima geração e morrem. Sabe-se que as espécies A, B e C se alimentam de vegetais e a espécie P é predadora das outras 3. Além disso, a espécie P passa 4 anos em desenvolvimento dentro dos casulos, já a espécie A passa 8 anos, a espécie B passa 7 anos e a espécie C passa 6 anos. As espécies A, B e C só serão ameaçadas de extinção durante uma primavera pela espécie P, se apenas uma delas surgir na primavera junto com a espécie P. Nessa primavera atual, todas as 4 espécies saíram dos casulos juntas. Qual será a primeira e a segunda espécies a serem ameaçadas de extinção por surgirem sozinhas com a espécie predadora numa próxima primavera?

a) A primeira a ser ameaçada é a espécie C e a segunda é a espécie B.

b) A primeira a ser ameaçada é a espécie A e a segunda é a espécie B.

c) A primeira a ser ameaçada é a espécie C e a segunda é a espécie A.

d) A primeira a ser ameaçada é a espécie A e a segunda é a espécie C.

e) A primeira a ser ameaçada é a espécie B e a segunda é a espécie C.

AS CIGARRAS
E OS NÚMEROS PRIMOS

Por Cristiano Siqueira

Uma espécie de cigarra de nome científico *Magicicada* foi amplamente estudada pelos cientistas. Eles observaram que a vida dessas cigarras principia como uma larva embaixo da terra. As *Magicicadas*, antes de se tornarem adultas, desenvolvem-se em sua fase larvar durante incríveis 17 anos.

Após saírem à superfície, as cigarras se acasalam, botam seus ovos e morrem para recomeçar um novo ciclo de 17 anos; o mais extenso dentre todos os insetos. O misterioso é que o longo ciclo vital das cigarras e o fato de esse período ocorrer dentro de um número primo de anos têm a ver com a sobrevivência da espécie. E mais, a natureza se incumbiu de pensar matematicamente na questão. Acredita?

Segundo os cientistas, a explicação é que existiam parasitas que destruíam os ovos dessas cigarras. Desse modo, elas desviaram-se do ciclo de vida dos mesmos. A explicação é bem simples: cogitemos que esse parasita possua um ciclo de vida que ocorra de dois em dois anos para se desenvolver e atacar as *Magicicadas*. Observe o que sucederia:

CICLO DAS CIGARRAS (MÚLTIPLOS DE 17)

0	17	34	51	68	85	. . .

CICLO DOS PARASITAS (MÚLTIPLOS DE 2)

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	. . .

Não é difícil observar que os parasitas surgiram no ano “16” e no ano “18” e as cigarras ficaram no meio desses dois anos; aos 17 anos. Consequentemente, elas escaparam de seus parasitas. Podemos também verificar outros ciclos como, a título de exemplo, os que se manifestam através dos múltiplos de 3. Independentemente de qualquer período, as cigarras estariam protegidas de seus parasitas. O que as livra é o fato de que “17” é um número primo e, por conseguinte, somente é divisível por 1 e por ele mesmo.

Ainda que os predadores encerrassem ciclos de apenas um ano, somente depois de sua 17ª geração eles predariam as cigarras. Mas como iriam sobreviver até lá sem alimento? A natureza tem sua inteligência. Há uma consciência que permeia a vida capaz de engendrar um meio criativo de adaptação de uma espécie. O que é mais interessante é que, não raro, ela se vale de fundamentos matemáticos!

05 GRANDEZAS PROPORCIONAIS

INTRODUÇÃO

Para muita gente, um café quente na parte da manhã é um dos prazeres do dia. Milhões de pessoas tomam café pelas mesmas razões, mas nem imaginam que a bebida também ajuda a aliviar as dores musculares, além de melhorar a memória e ajudar a prevenir o câncer de pele e de fígado.

Disponível em: http:/saude.terra.com.br. Acesso em: 12 nov. 2.013.

Assim, no consultório do doutor Cleiber, o café é preparado automaticamente em uma máquina e pode ser servido de 3 maneiras diferentes, variando a quantidade de café e a quantidade de açúcar.

- 1ª opção: Xícara de 50 mL e 2 g de açúcar;
- 2ª opção: Xícara de 70 mL e 3 g de açúcar;
- 3ª opção: Xícara de 90 mL e 4 g de açúcar.

Nessa situação, para se determinar, por exemplo, qual dos três cafés é o mais doce, temos que estabelecer uma relação entre a quantidade de açúcar e a quantidade de café. Essa relação só pode ser estabelecida por se tratar de **grandezas proporcionais** entre si.

RAZÃO

Maria possui R$ 75,00 e João possui R$ 25,00. Ao determinar o quociente entre as quantias que Maria e João possuem, obtém-se $\frac{75}{25} = 3$.

Assim, pode-se afirmar que a quantia em dinheiro que Maria possui é o triplo da quantia em dinheiro que João possui. Essa comparação foi estabelecida através de um quociente chamado de razão.

Shutterstock.com

Várias são as situações do nosso cotidiano que devemos comparar duas grandezas através da razão.

Por exemplo:

- Para determinar o consumo de combustível de um automóvel, devemos dividir a distância percorrida, normalmente em quilômetros, pela quantidade de combustível, normalmente em litros, gasto para percorrer tal distância.
- Para determinar o número de candidatos por vaga de um vestibular para determinado curso, devemos dividir o número de candidatos inscritos nesse curso pelo total de vagas do mesmo.
- Para se determinar a escala utilizada na planta de uma casa, devemos dividir uma distância qualquer do desenho pela distância equivalente no tamanho real.

De maneira geral, a razão entre os números **a** e **b** (b $\neq$ 0), nessa ordem, é dada pela quociente $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$. O número **a** é chamado de antecedente (ou primeiro termo) e o número **b** é chamado de consequente (ou segundo termo).

Por exemplo:

- A razão entre 24 e 6 é $\frac{24}{6}$, que é igual a 4.
- A razão entre 5 e 8 é $\frac{5}{8}$, que é igual a 0,625.

OBSERVAÇÃO:

- A razão inversa entre **a** e **b** é dada por $\frac{b}{a}$ (a $\neq$ 0). Assim, por exemplo, a razão inversa entre 4 e 15 é $\frac{15}{4}$, que é igual a 3,75.

ESCALAS

Uma folha de papel muitas vezes não permite representar um objeto no seu tamanho natural devido à limitação de espaço. Daí a necessidade de reduzir todas as dimensões do objeto de maneira que não haja distorções. Logo, a relação entre as dimensões reais e as representadas no desenho deve ser constante. A essa relação, que é dada por uma razão, dá-se o nome de escala.

Por exemplo:

- Qual é a escala adotada em um desenho que uma distância de 4 m está representada por um segmento de 20 cm?

A escala desse desenho é dada pela razão:

- $\frac{20\text{ cm}}{4\text{ m}} = \frac{20\text{ cm}}{4.000\text{ cm}} = \frac{1}{200}$

Nesse caso, a escala é 1:200 (lê-se: 1 para 200). Isso significa que cada distância no desenho é 200 vezes menor que a distância equivalente no tamanho original.

De maneira geral, chamamos de escala de um desenho à razão entre o comprimento considerado no desenho e o comprimento real correspondente, ambos medidos na mesma unidade.

Simbolicamente, temos que:

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$$

PROPORÇÃO

Com 320 kg de um tipo de uva é possível fazer 200 litros de vinho.

Shutterstock.com

Para determinar quantos kg de uva são necessários para se fazer 250 litros de vinho, Bruna montou uma tabela utilizando, intuitivamente, a seguinte ideia.

Se quantidade de uva fosse reduzida a metade, a quantidade de vinho produzida também seria reduzida a metade.

Uva	Vinho
320 kg	200 L
160 kg	100 L
80 kg	50 L

Assim, para se produzir 250 litros de vinho, deve-se utilizar $320 + 80 = 400$ kg de uva. Esse resultado foi obtido utilizando o conceito de proporção.

De maneira geral, dá-se o nome de proporção à igualdade de duas, ou mais razões. Assim, dados os números **a, b, c** e **d** ($b \neq 0$ e $d \neq 0$), formam uma proporção se, e somente, a razão entre **a** e **b** é igual à razão entre **c** e **d**. Simbolicamente, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } (a : b = c : d)$$

- Lê-se: **a** está para **b**, assim como **c** está para **d**.

Os termos **a** e **d** são chamados de extremos e os termos **b** e **c** são chamados de meios. Assim, por exemplo, os termos 12, 3, 20 e 5 formam uma proporção nessa ordem pois, $\frac{12}{3} = \frac{20}{5} = 4$

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

Numa proporção qualquer, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Assim, dados os números **a**, **b**, **c** e **d** ($b \neq 0$ e $d \neq 0$) simbolicamente, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Calcular a razão entre os números $\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$.

Resolução:

A razão entre esses números é dada por:

$$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}$$

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}-1$$

02. Calcular a razão entre as grandezas 3 km e 500 m.

Resolução:

No cálculo da razão de grandezas da mesma espécie, as medidas devem ser expressas na mesma unidade e, nesse caso, a razão é apenas um número. Assim, a razão entre essas grandezas é dada por:

$$\frac{3\text{ km}}{500\text{ m}} = \frac{3.000\text{ m}}{500\text{ m}} = 6$$

03. Fabíola recebeu 48 exercícios para resolver e acertou 36. Já Priscila recebeu 60 exercícios para resolver e acertou 45. Qual das duas obteve o melhor desempenho?

Resolução:

- Fabíola acertou 36 exercícios num total de 48, assim, ela acertou $\frac{36}{48} = 0,75$.
- Priscila acertou 45 exercícios num total de 60, assim, ela acertou $\frac{45}{60} = 0,75$.

Portanto, as duas tiveram o mesmo desempenho.

04. Calcule o valor de $x \in \mathbb{N}$ na proporção a seguir:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{4}{x-1}$$

Resolução:

Como em qualquer proporção, produto dos meios é igual ao produto dos extremos, temos que:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{4}{x-1} \Rightarrow (x+1).(x+1) = 6.4$$

$$x^2 - 1 = 24$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5.$$

Portanto, o valor natural de x é 5.

05. A soma de dois números é 88. Determine esses números sabendo-se que estão na proporção de 4 para 7.

Resolução:

Sendo x e y os números procurados, temos que:

$$\begin{cases} x + y = 88 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Isolando y na primeira equação e substituindo na segunda equação, temos que:

$$\frac{x}{88-x} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7x = 352 - 4x \Rightarrow x = 32$$

Substituindo na primeira equação, temos que:

$$32 + y = 88 \Rightarrow y = 56$$

Portanto, os números são 32 e 56.

06. Na planta de um apartamento, desenhada na escala 1:50, a sala está representada por um retângulo cujas medidas são 15 cm e 8 cm. Quais são as dimensões reais dessa sala?

Shutterstock.com

Resolução:

Podemos montar as seguintes proporções para determinar as dimensões reais x e y dessa sala.

$$\frac{1}{50} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 750\text{ cm} = 7,5\text{ m}.$$

$$\frac{1}{50} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 400\text{ cm} = 4,0\text{ m}.$$

Portanto, as dimensões reais são 7,5 m e 4,0 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Calcule a razão entre:

a) 5,2 km e 1.300 m

b) 600 g e 0,5 kg

c) 300 mL e 0,002 L

d) 3 km^2 e 2.000 m^2

e) 1,2 m^3 e 6 cm^3

f) 400 km e 8 h

02. Em uma escola estudam 800 mulheres e 600 homens. Calcule:

a) A razão entre o número de homens e número de mulheres que estudam nessa escola.

b) A razão entre o número de homens e o número total de alunos dessa escola.

03. (UFRJ) O painel de um automóvel indica o consumo médio de combustível da seguinte forma:

12,5 L / 100 km

Determine quantos quilômetros esse automóvel percorre, em média, com 1 litro desse combustível.

04. Em uma empresa, a razão de número de mulheres para o número de homens é de $\frac{6}{5}$. Se o número total de pessoas que trabalha nessa empresa é de 55, determine a quantidade de mulheres.

05. Marcos pretende dividir R$ 2.500,00 em duas partes tais que a soma do triplo da primeira com a terça parte da segunda seja R$ 2.700,00. Determine essas partes.

06. (UFGO) Três espécies de peixes para aquários custam:

- espécie A – R$ 2,00 cada peixe
- espécie B – 5 peixes por R$ 9,00
- espécie C – 7 peixes por R$ 15,00

Qual das 3 espécies acima é a mais cara? Qual a mais barata? Justifique sua resposta.

07. Uma mistura de álcool e gasolina tem 72 litros. Sabe-se que a mistura foi feita na razão de 4 quantidades de álcool por 5 quantidades de gasolina. Quantos litros de gasolina há nessa mistura?

08. Em uma fábrica que funciona em 3 períodos a quantidade de funcionários está assim distribuída.

Shutterstock.com

- $\frac{1}{3}$ dos funcionários trabalha pela manhã;
- $\frac{1}{4}$ dos funcionários trabalha pela tarde;
- 60 funcionários trabalham à noite.

Nessas condições, determine:

a) A quantidade total de funcionários.

b) A quantidade de funcionários que trabalham pela manhã.

09. (UNICAMP-SP) Após ter corrido $\frac{2}{7}$ de um percurso e, em seguida, caminhado $\frac{5}{11}$ do mesmo percurso um atleta verificou que ainda faltavam 600 metros para o final do percurso.

a) Qual o comprimento total do percurso?

b) Quantos metros o atleta havia corrido?

c) Quantos metros o atleta havia caminhado?

10. (UFGO) Dois combustíveis são obtidos através da mistura de álcool e gasolina. O combustível A contém 4 partes de seu volume de álcool para cada 7 partes de gasolina, enquanto que o combustível B contém 3 partes do seu volume de álcool para cada 2 partes de gasolina. Com base nos dados, responda:

a) Qual combustível possui maior concentração de álcool?

b) Qual a proporção, entre álcool e gasolina, de uma mistura de 1 litro do combustível A e 1 litro do combustível B?

11. Calcule o valor de x nas proporções a seguir:

a) $\frac{x-3}{6-x} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{\frac{2}{3} - x}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{\frac{3}{8}}$

12. Em uma escala de 1:600, uma distância de 150 m deve ser representada por um segmento de quantos centímetros?

13. Com o auxílio de uma régua, Bruna mediu a distância entre duas cidades num mapa na escala 1:500.000 e encontrou 8 cm. Assim, qual distância real entre essas duas cidades?

14. (UNICAMP) Em uma fotografia aérea, um trecho retilíneo de uma estrada que mede 12,5 km aparece medindo 5 cm e, na mesma fotografia, uma área queimada aparece com 9 cm^2. Calcule:

a) O comprimento que corresponde a 1 cm na mesma fotografia.

b) A área da superfície queimada.

15. (UNESP) Uma Universidade tem 1 professor para cada 6 alunos e 3 funcionários para cada 10 professores. Determine o número de alunos por funcionário.

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Um objeto de ferro de 20 cm^3 pesa 160 g; nas mesmas condições da anterior, uma barra 40 cm^3 pesa 320 g e uma de 80 cm^3 pesa 640 g. Colocando esses dados em uma tabela, temos:

Massa (g)	160	320	640
Volume (cm^3)	20	40	80

Observe que ao dobrarmos o volume do objeto, sua massa também dobra. Assim, temos que:

$$\frac{160}{20} = \frac{320}{40} = \frac{640}{80} = 8$$

Como a razão entre os elementos das grandezas massa e volume é constante, dizemos que massa e volume são grandezas diretamente proporcionais. A constante obtida, nesse caso, é a densidade do ferro em g/cm^3.

De maneira geral, dadas as grandezas A de valores (a_1, a_2, a_3, ... a_n) e B de valores (b_1, b_2, b_3, ..., b_n), dizemos que A e B são grandezas diretamente proporcionais se, e somente se:

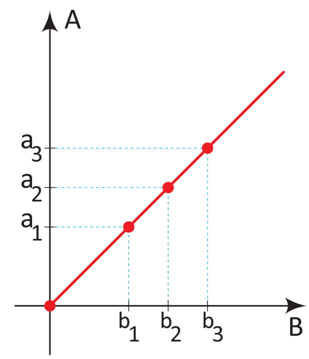
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$$

O número k é chamado de constante de proporcionalidade.

OBSERVAÇÃO:

- O gráfico de duas grandezas diretamente proporcionais é uma semirreta crescente que passa pela origem.

Observe o gráfico a seguir:



GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Certa distância pode ser percorrida por um trem, a uma velocidade de 40 km/h em 8 horas; a uma velocidade de 80 km/h em 4 horas; e a velocidade de 160 km/h em 2 horas. Colocando esses dados em uma tabela, temos:

Velocidade (km/h)	40	80	160
Tempo (h)	8	4	2

Observe que ao dobrarmos a velocidade do trem, o tempo gasto para percorrer a mesma distância se reduz a metade. Assim, temos que:

$$40 \,.\, 8 = 80 \,.\, 4 = 160 \,.\, 2 = 320$$

Como o produto entre os elementos das grandezas velocidade e tempo é constante, dizemos que velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais. A constante obtida, nesse caso, é a distância total em km.

De maneira geral, dadas as grandezas A de valores (a_1, a_2, a_3, ... a_n) e B de valores (b_1, b_2, b_3, ..., b_n), dizemos que A e B são grandezas inversamente proporcionais se, e somente se:

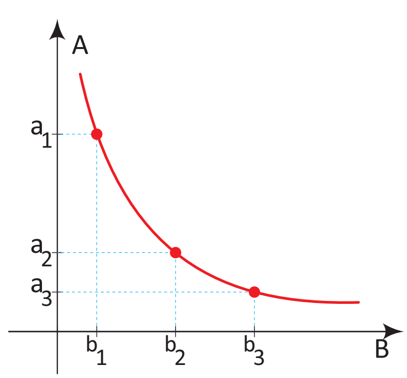
$$a_1 \,.\, b_1 = a_2 \,.\, b_2 = a_3 \,.\, b_3 = ... = a_n \,.\, b_n = k$$

O número k é chamado de constante de proporcionalidade.

OBSERVAÇÃO:

- O gráfico de duas grandezas inversamente proporcionais é um ramo de hipérbole equilátera.

Observe o gráfico a seguir:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

07. Sabendo que (5, x, 4) e (y, 24, 16) são sucessões de números diretamente proporcionais, determine os valores numéricos de x e y.

Resolução:

Como (5, x, 4) e (y, 24, 16) são diretamente proporcionais, temos que:

$$\frac{5}{y} = \frac{x}{24} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Logo, $\frac{5}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 20$ e $\frac{x}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 6$

Portanto, x = 6 e y = 20.

08. Sabendo que (x, 12, 4) e (3, y, 6) são sucessões de números inversamente proporcionais, determine os valores numéricos de x e y.

Resolução:

Como (x, 12, 4) e (3, y, 6) são diretamente proporcionais, temos que:

$$x \,.\, 3 = 12 \,.\, y = 4 \,.\, 6 = 24$$

Logo, $3x = 24 \Rightarrow x = 8$ e $12y = 24 \Rightarrow y = 2$

Portanto, x = 8 e y = 2.

09. Dividir o número 180 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4.

Resolução:

Dividir 180 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4 significa determinar 3 números a, b e c tais que:

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \text{ (constante)} \end{cases}$$

Na segunda equação, temos que:

$a = 2k$, $b = 3k$ e $c = 4k$

Substituindo na primeira equação, temos que:

$2k + 3k + 4k = 180 \Rightarrow k = 20$

Assim, temos que:

$a = 2.20 = 40$, $b = 3.20 = 60$ e $c = 4.20 = 80$.

Portanto, os números são 40, 60 e 80.

10. Dividir o número 93 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 5.

Resolução:

Dividir 93 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 5 significa determinar 3 números a, b e c tais que:

$$\begin{cases} a + b + c = 93 \\ a \,.\, 2 = b \,.\, 3 = c \,.\, 5 = k \text{ (constante)} \end{cases}$$

Na segunda equação, temos que:

$a = \frac{k}{2}$, $b = \frac{k}{3}$ e $c = \frac{k}{5}$

Substituindo na primeira equação, temos que:

$\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 93 \Rightarrow k = 90$

Assim, temos que:

$a = \frac{90}{2} = 45$, $b = \frac{90}{3} = 30$ e $c = \frac{90}{5} = 18$.

Portanto, os números são 45, 30 e 18.

11. Uma comissão de R$ 16.000,00 foi distribuída por uma firma a três de seus vendedores em partes diretamente proporcionais à quantidade de mercadorias que cada um deles vendeu. O primeiro vendeu 25 mercadorias, o segundo, 36 e o terceiro, 19. Quanto recebeu cada vendedor?

Resolução:

Dividir 16.000 em partes diretamente proporcionais a 25, 36 e 19 significa determinar 3 números a, b e c tais que:

$$\begin{cases} a + b + c = 16.000 \\ \frac{a}{25} = \frac{b}{36} = \frac{c}{19} = k \text{ (constante)} \end{cases}$$

Na segunda equação, temos que:

$a = 25k$, $b = 36k$ e $c = 19k$

Substituindo na primeira equação, temos que:

$25k + 36k + 19k = 16.000 \Rightarrow k = 200$

Assim, temos que:

$a = 25 \,.\, 200 = 5.000$
$b = 36 \,.\, 200 = 7.200$
$c = 19 \,.\, 200 = 3.800$

Portanto, as quantias são R$ 5.000,00, R$ 7.200,00 e R$ 3.800,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Determine o valor de x e y em cada uma das seguintes sucessões de números diretamente proporcionais:

a) (4, x, 9) e (8, 14, 18)

b) (12, 81, 57) e (y, 27, 19)

c) (2, x, 8) e (y, 12, 20)

d) (26, 34, x) e (y, 51, 57)

17. Determine o valor de x e y em cada uma das seguintes sucessões de números inversamente proporcionais:

a) (6, 2, x) e (9, 27, 18)

b) (16, 10, 8) e (25, y, 50)

c) (x, 4, 12) e (24, 54, y)

d) (70, 35, x) e (4, y, 10)

18. **(UFRJ)** No mar, a pressão em cada ponto é diretamente proporcional a sua profundidade. Quando a profundidade é igual a 100 metros, a pressão correspondente é de 10,4 atmosferas. Determine a pressão p em um ponto situado a uma profundidade d.

19. Responda os itens a seguir:

a) Sabe-se que $a + 1$ é diretamente proporcional a $b - 1$ e que quando $a = 3$, temos que $b = 2$. Qual o valor de b quando $a = 9$?

b) Sabe-se que $a - 1$ é inversamente proporcional a $b + 2$ e que quando $a = 3$, temos que $b = 4$. Qual o valor de b quando $a = 5$?

20. Após uma brusca frenagem, a distância que um automóvel percorre até parar é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade no momento da frenagem. Supondo que um determinado veículo a 40 km/h, leva 10 m para parar completamente, responda os itens a seguir.

a) Qual seria a distância percorrida por esse veículo se a velocidade no momento da frenagem fosse 80 km/h?

b) Qual seria a velocidade desse veículo se a distância percorrida após a frenagem fosse de 90 m?

21. Divida o número 70 em partes diretamente proporcionais a 6 e 8.

22. Divida o número 63 em partes inversamente proporcionais a 6 e 8.

23. Divida o número 51 em partes diretamente proporcionais a 6 e 4 e inversamente proporcionais a 8 e 6.

24. **(UNICAMP-SP)** A quantia de R$ 1.280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

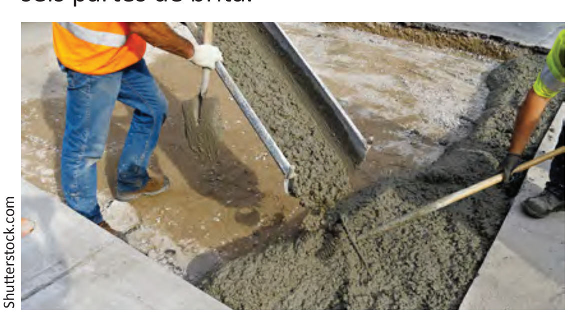
a) A divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?

b) A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

25. Um comerciante dividiu R$ 25.200,00 entre seus funcionários em partes diretamente proporcionais ao número de anos de serviço de um. Sabendo-se que o primeiro tem 7 anos, o segundo tem 5 anos e o terceiro 2 anos de serviços prestados, quanto receberá cada um?

26. Uma pequena empresa tem dois sócios e, após um ano, deu um lucro de R$ 20.000,00. Se o primeiro sócio tem R$ 1.900,00 de capital e o segundo sócio tem R$ 2.100,00, qual o lucro anual de cada um deles?

27. O traço do concreto utilizado na construção de uma casa é 1:3:6, ou seja, é constituído por uma parte de cimento, três partes de areia e seis partes de brita.



Shutterstock.com

Qual a quantidade de cada um desses materiais seria necessária para se obter 270 m^3 de concreto?

28. Para digitar um livro, foram contratados três digitadores por R$ 1.440,00. O primeiro trabalhou 8 horas por dia, durante 10 dias; o segundo, 10 horas por dia, durante 5 dias e o terceiro 5 horas por dia, durante 4 dias. Quanto deverá receber cada um se o pagamento for feito de forma diretamente proporcional às horas trabalhadas?

29. (UEGO) Uma sociedade constituída por três sócios obteve um lucro de R$ 1.002,00. Um dos sócios aplicou R$ 200,00 durante 5 meses; o outro aplicou R$ 240,00 durante 6 meses e o terceiro R$ 180,00 durante 5 meses. Considerando que o lucro de cada um é proporcional ao capital aplicado e ao tempo de aplicação, determine o lucro de cada sócio.

30. (UFGO) João fundou uma empresa em 1º de janeiro de 93, com o capital de US$ 1,500.00; em 1º de março, Carlos tornou-se sócio da empresa empregando US$ 1,000.00. Para que a firma crescesse, os dois sócios convidaram Geraldo para participar da sociedade. Geraldo investiu a quantia de US$ 1,200.00, em 1º de maio. Em 1º de setembro, os sócios fizeram um balanço da firma e verificaram um rendimento de US$ 7,980.00. Se os sócios dividiram o lucro proporcionalmente ao número de meses de participação na sociedade e ao capital empregado, qual foi o lucro de cada sócio?

31. Frederico pretende dividir R$ 2.870,00 entre seus três filhos em partes inversamente proporcionais às suas idades. Sabendo-se que o primeiro tem 28 anos, o segundo tem 12 anos e o terceiro tem 8 anos, quanto receberá cada um?

32. O presidente de um pequeno time de futebol resolveu distribuir um total de R$ 12.000,00 para premiar os três jogadores que cometeram o menor número de faltas durante o campeonato. O jogador A cometeu 15 faltas, o jogador B cometeu 12 faltas e o jogador C foi faltoso apenas 4 vezes.


Shutterstock.com

Se a quantia será dividida em partes inversamente proporcionais ao número de faltas cometidas, quanto receberá cada jogador?

33. As prefeituras das cidades A, B e C construíram uma ponte sobre o rio próximo a estas cidades. A ponte dista 10 km de A, 12 km de B e 18 km de C. O custo da construção, 8,6 milhões de reais, foi dividido em partes inversamente proporcionais às distâncias das cidades à ponte. Com a construção, qual o gasto, em milhões de reais, da prefeitura da cidade A?

34. A quantia de R$ 17.100,00 será dividida entre duas pessoas em partes diretamente proporcionais a 4 e 5 e inversamente proporcionais a 5 e 8. Quanto deverá receber cada pessoa?

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Dadas duas grandezas proporcionais A de valores (a_1, a_2) e B de valores (b_1, b_2). A regra de três simples é um processo prático para se determinar um desses valores (incógnita do problema) conhecendo-se os outros três. Supondo que a_2 seja a incógnita, pode-se montar os esquemas a seguir:

- Supondo que as grandezas A e B são diretamente proporcionais. (Essa condição será representada no esquema a seguir com duas setas voltadas para cima

Grandeza A	Grandeza B
↑ a_1	↑ b_1
a_2	b_2

Nesse caso para se determinar a_2, basta montar a proporção a seguir:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ (conserva-se a segunda razão)}$$

- Supondo que as grandezas A e B são inversamente proporcionais. (Essa condição será representada no esquema a seguir com duas setas de sentido contrário, sendo que a voltada para cima fica junto à grandeza que possui a incógnita).

Grandeza A	Grandeza B
$\uparrow$ a_1	$\downarrow$ b_1
a_2	b_2

Nesse caso, para se determinar a_2, basta montar a proporção a seguir:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \text{ (inverte-se a segunda razão)}$$

OBSERVAÇÃO:

- A seta voltada para baixo indica que a grandeza B é inversamente proporcional à grandeza A (possui a incógnita).

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Dadas as grandezas proporcionais A de valores (a_1, a_2), B de valores (b_1, b_2) e C de valores (c_1, c_2). A regra de três composta é um processo prático para se determinar um desses valores (incógnita do problema) conhecendo-se os outros. Supondo que a_2 seja a incógnita, pode-se montar o esquema a seguir:

Grandeza A	Grandeza B	Grandeza C	Grandeza D
$\uparrow$ a_1	$\uparrow$ b_1	$\downarrow$ c_1	$\uparrow$ d_1
a_2	b_2	c_2	d_2

Comparando-se cada uma das grandezas (B, C e D) com a grandeza A (a que contém a incógnita), separadamente e de acordo com o esquema, temos que:

- B é diretamente proporcional a A.
- C é inversamente proporcional a A.
- D é diretamente proporcional a A.

Nesse caso, para se determinar a_2, basta montar a proporção a seguir:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} \text{ (inverte-se apenas a terceira razão)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12. Se um operário recebe R$ 1.200,00 por 25 dias de trabalho, quanto ele receberia por 40 dias?

Resolução:

Observe que se dobramos a quantidade de dias trabalhados, o valor recebido também dobra. Assim, pode-se concluir que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

Valor (R$)	Dias
$\uparrow$ 1200	$\uparrow$ 25
x	40

Nesse caso para se determinar x, basta montar a proporção a seguir:

$$\frac{1.200}{x} = \frac{25}{40} \text{ (conserva-se a segunda razão)}$$

Isolando a variável x, temos que:

$$x = \frac{1.200.40}{25} = 1.920$$

Portanto, o operário receberia R$ 1.920,00.

13. Se 40 operários fazem uma tarefa em 15 dias, quantos operários seriam necessários para fazer a mesma tarefa em 25 dias?

Resolução:

Observe que se dobramos a quantidade de operários, a quantidade de dias se reduz à metade. Assim, pode-se concluir que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais.

Operários	Dias
↑ 40	↓ 15
x	25

Nesse caso, para se determinar x, basta montar a proporção a seguir:

$\frac{40}{x} = \frac{25}{15}$ (inverte-se a segunda razão)

Isolando a variável x, temos que:

$$x = \frac{15 \,.\, 40}{25} = 24$$

Portanto, seriam necessários 24 operários.

14. Uma torneira enche um reservatório em 2 duas horas. Uma outra torneira enche o mesmo reservatório em 3 horas. Estando inicialmente vazio, em quantos minutos as duas encheriam o mesmo reservatório?

Resolução:

- Se a primeira torneira enche o reservatório em 2 horas, então ela enche $\frac{1}{2}$ da capacidade do reservatório a cada hora.
- Se a segunda torneira enche o reservatório em 3 horas, então ela enche $\frac{1}{3}$ da capacidade do reservatório a cada hora.
- Assim, as duas juntas enchem $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ da capacidade do reservatório a cada hora.

Observe que se dobramos a capacidade do reservatório, o tempo para enchê-lo também dobra. Assim, pode-se concluir que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

Horas	Volume
↑ 1	↑ $\frac{5}{6}$
x	1

Nesse caso para se determinar x, basta montar a proporção a seguir:

$\frac{1}{x} = \frac{\frac{5}{6}}{1}$ (conserva-se a segunda razão)

Isolando a variável x, temos que:

$$x = \frac{6}{5} = 1,2$$

Em minutos, temos: 1,2 . 60 = 72.

Portanto, o tempo seria de 72 minutos.

15. Em 45 dias, 18 operários construíram 54 metros de um muro. Nessas condições, quantos dias são necessários para que 12 operários construam 60 metros do mesmo muro?

Resolução:

- Primeiramente deve-se verificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais àquela que contém a incógnita, nesse caso, o número de dias.
- Se dobrarmos a quantidade de operários, a quantidade de dias se reduz a metade. Assim, a quantidade e operários é inversamente proporcional à quantidade de dias.
- Se dobrarmos a quantidade de muro a ser construído, a quantidade de dias também dobra. Assim, a quantidade de muro a ser construído é diretamente proporcional à quantidade de dias.

Assim, podemos montar o seguinte esquema:

Dias	Operários	Metros de Muro
↑ 45	↓ 18	↑ 54
x	12	60

Nesse caso para se determinar x, basta montar a proporção a seguir:

$\frac{45}{x} = \frac{12}{18} \cdot \frac{54}{60}$ (inverte-se a segunda razão)

Isolando a variável x, temos que:

$$x = \frac{45 \,.\, 18 \,.\, 60}{12 \,.\, 54} = 75$$

Portanto, são necessários 75 dias.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

35. Em um dia de trabalho de 8 horas, um operário executou 60 m^2 de muro. Quantas horas ele levaria para construir 90 m^2 do mesmo muro?

36. Com 50 kg de farinha de trigo, pode-se obter 75 kg de pão francês. Quantos kg são necessários para obter 120 kg de pão francês?

37. **(UFGO)** Um feirante vende uma dúzia de laranjas por R$ 1,50. Se um cliente comprar 20 laranjas, quanto ele irá pagar ao feirante?

38. Trabalhando 12 horas por dia, uma equipe de operários leva 15 dias para executar certa obra.

Shutterstock.com

Quantos dias levariam esses operários para executar a mesma obra trabalhando 9 horas por dia?

39. Num livro de 200 páginas há 30 linhas em cada página. Quantas páginas teria esse livro se houvesse 25 linhas em cada página?

40. **(UEM-PR)** Embalando alimentos doados para o programa "Fome Zero", 4 voluntários gastaram 75 horas. Se fosse possível contar com 12 voluntários, trabalhando no mesmo ritmo daqueles 4, em quanto tempo o trabalho teria sido feito?

41. Uma torre projeta uma sombra de 110 m de comprimento, quando, ao mesmo tempo, uma vara de 2 m de altura, colocada verticalmente próxima à torre, projeta uma sombra de 5 m. Qual é a altura da torre?

42. Uma lebre está a 90 m na frente de um cachorro que a persegue. Enquanto a lebre percorre 16 m, o cachorro percorre 20 m. Quantos metros deverá percorrer o cachorro para alcançar a lebre?

43. Uma torneira enche um reservatório em 6 horas. Uma outra torneira enche o mesmo reservatório em 9 horas. Estando inicialmente vazio, em quanto tempo as duas encheriam o mesmo reservatório?

44. **(UFRRJ)** Um tanque de volume V é abastecido por duas torneiras A e B. A torneira A sozinha enche o tanque em 10 minutos e a torneira B, também sozinha, em 20 minutos. Calcule o tempo que as torneiras A e B juntas levam para encher o tanque.

45. **(UFGO)** Para encher um reservatório de água, usam-se três torneiras. Se usadas separadamente, a primeira enche o tanque em duas horas, a segunda em três horas e a terceira em seis horas. Pergunta-se:

a) Que fração do reservatório a primeira torneira enche em uma hora?
b) Em quanto tempo as três torneiras juntas enchem o reservatório?

46. José pode colher todos os limões do seu pomar em 10 horas. Sua esposa Maria faria o mesmo trabalho em 12 horas. Se o casal fizer essa colheita juntamente com o primo João, os três juntos colheriam fariam todo o trabalho em 4 horas. Em quantas horas João colheria todos os limões trabalhando sozinho?

47. **(UFGO)** O preço de 10 g de um determinado chip de computador é R$ 350,00, enquanto o preço de 60 kg de soja é R$ 35,00. Quantas toneladas de soja devem ser vendidas para a compra de uma tonelada de chip?

48. Um canil tem ração suficiente para alimentar 320 cães durante 22 dias; no fim de 4 dias são adquiridos mais 40 cães. Se a quantidade de ração diária de cão não for diminuída, quantos dias durará a ração?

49. Um criador de frangos tem ração para alimentar seus 42 frangos durante 30 dias; no fim de 6 dias compra mais 30 frangos.

Shutterstock.com

Quanto tempo durará a ração se a quantidade de ração diária de cada frango for constante?

50. (UNIOESTE-PR) Numa fábrica de bebidas, 15 funcionários produzem 10.000 latas de refrigerante em 9 dias, funcionando 9 horas por dia. Se ela aumentar seu horário de funcionamento diário em 6 horas, quantos dias serão necessários para produzir 200.000 latas com 20 funcionários?

51. Trinta operários, trabalhando 8 horas por dia, levam 27 dias para concluir uma obra. Quantos dias levariam 18 operários para fazer a mesma obra, trabalhando 9 horas por dia?

52. Uma família composta de 6 pessoas consome em 2 dias 3 kg de pão. Quantos quilos serão necessários para alimentá-la durante 5 dias estando ausentes 2 pessoas?

53. Numa excursão à Disney 35 garotas gastam US$ 15,400.00 pelas refeições de 22 dias.

s_bukley / Shutterstock.com

Quantos dólares gastariam 100 garotas pelas mesmas refeições em 83 dias nessa excursão?

54. Uma equipe de mineiros composta por 15 homens extraiu, em 30 dias, 3.500 kg de carvão de uma mina. Se essa equipe tivesse 20 homens, em quanto tempo extrairiam 7.000 kg de carvão na mesma mina?

55. Para asfaltar 1 km de estrada, 30 homens gastaram 20 dias trabalhando 8 horas por dia. Vinte homens, para asfaltar 2 km da mesma estrada, trabalhando 12 horas por dia gastaram quantos dias?

56. O gerente de um pequeno hotel comprou 216 litros de suco de laranja para o consumo de 12 pessoas, durante 45 dias. Após 20 dias chegaram mais 3 hóspedes. Quantos dias a mais durará o suco de laranja?

57. Oito lâmpadas de certa potência, permanecem acesas por 13 noites, 3 horas por noite e consomem 39 kW. Quantos kW seriam consumidos se 5 lâmpadas com o dobro da potência permanecessem acesas 16 noites, 4 horas por noite?

58. A 1ª edição de um livro tem 420 páginas, 25 linhas em cada página e de 66 letras em cada linha. Quantas páginas teria uma 2ª edição desse livro com os mesmos caracteres, porém utilizando 30 linhas em cada página e 60 letras em cada linha?

59. Em uma gráfica, 144.000 impressos deveriam ser preparados em 3 dias. Esse serviço poderia ser feito por 3 máquinas de mesmo rendimento, operando ininterruptamente com velocidade constante durante 4 horas por dia. Entretanto, ao encerrar o expediente do primeiro dia, uma das máquinas apresentou um defeito que só poderia ser sanado após uma semana. Para cumprir o prazo previsto, quantas horas por dia as outras máquinas deveriam operar no dois dias seguintes?

60. (UFPE) Certa tarefa seria executada por 15 operários trabalhando 8 horas por dia, durante 20 dias. Se 5 trabalhadores foram transferidos quando completados 13 dias do início da tarefa, em quantos dias os 10 trabalhadores restantes concluirão a tarefa, se, agora, eles trabalharão 7 horas por dia?

TESTES DE VESTIBULARES

01. (PUC-MG) Certa máquina de calcular faz 200 operações por minuto, enquanto um calculista faz 46 dessas operações no mesmo tempo. Pode-se afirmar que a calculadora é m vezes mais rápida que o calculista. O valor de m é tal que:

a) $1 < m \leq 4$

b) $4 < m \leq 7$

c) $7 < m \leq 10$

d) $10 < m \leq 13$

02. (UEL-PR) Três grandezas X, Y e Z são tais que X é diretamente proporcional a Y é inversamente proporcional a Z. Quando X vale $\frac{2}{3}$ tem-se Y valendo $\frac{3}{5}$ e Z valendo $\frac{9}{5}$. Assim, se Y vale $\frac{7}{8}$ e Z vale $\frac{1}{4}$, X vale:

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{5}{7}$

d) $\frac{7}{2}$

e) 7

03. (UFMG) Um lago tem superfície de área 12 km^2 e 10 m de profundidade média. Sabe-se que o volume do lago é dado pelo produto da área de sua superfície por sua profundidade média. Certa substância está dissolvida nesse lago, de modo que cada metro cúbico de água contém 5 g da substância. Assim sendo, a quantidade total dessa substância, em gramas, no lago é de:

a) 6.10^8

b) 6.10^9

c) 6.10^{10}

d) 6.10^{11}

04. (UFPE) Um loteamento de forma triangular está representado numa planta em escala de 1:2000, por um triângulo de perímetro igual a 240 cm cujos dois de seus lados medem 80 cm e 60 cm. Indique qual das alternativas abaixo é a área, em m^2, deste loteamento.

a) 2.400

b) 4.800

c) 9.600

d) 96.000

e) 960.000

05. (ENEM) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2.000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de:

a) 1:250

b) 1:2.500

c) 1:25.000

d) 1:250.000

e) 1:25.000.000

06. (FGV-SP) Em uma escola, a razão entre o número de alunos e o de professores é de 50 para 1. Se houvesse mais 400 alunos e mais 16 professores, a razão entre o número de alunos e o de professores seria de 40 para 1. Podemos concluir que o número de alunos da escola é:

a) 1.000

b) 1.050

c) 1.100

d) 1.150

e) 1.200

07. (UFCE) Uma garrafa está cheia de uma mistura, na qual $\frac{2}{3}$ do conteúdo é composto pelo produto A e $\frac{1}{3}$ pelo produto B. Uma segunda garrafa, com o dobro da capacidade da primeira, está cheia de uma mistura dos mesmos produtos da primeira garrafa, sendo agora $\frac{3}{5}$ do conteúdo composto pelo produto A e $\frac{2}{5}$ pelo produto B. O conteúdo das duas garrafas é derramado em uma terceira garrafa, com o triplo da capacidade da primeira. Que fração do conteúdo da terceira garrafa corresponde ao produto A?

a) $\frac{10}{15}$

b) $\frac{5}{15}$

c) $\frac{28}{45}$

d) $\frac{17}{45}$

e) $\frac{3}{8}$

08. (ENEM) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg

b) 800 kg

c) 720 kg

d) 600 kg

e) 570 kg

09. (FGV-SP) Na tabela a seguir, x é diretamente proporcional ao quadrado de y. Sendo $y > 0$, os valores de m e p são, respectivamente:

x	1	m	4
y	2	8	P

a) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{16}$

b) 4 e 16

c) 16 e 4

d) $\frac{1}{16}$ e 1

e) 4 e 8

10. (UFU-MG) Paulo, Ana e Luís formaram uma sociedade e investiram, respectivamente, R$ 2.500,00; R$ 3.500,00 e R$ 4.000,00 num fundo de investimentos. Após um ano, a aplicação estava com um saldo de R$ 12.500,00. Se os três investidores resgatarem somente o rendimento e dividirem-no em partes diretamente proporcionais aos valores investidos, a diferença entre os valores recebidos por Ana e Paulo, em reais, será igual a:

a) 1.250

b) 1.000

c) 250

d) 500

11. (UFMG) Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais para o almoço durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais 500 empregados, a quantidade de marmitas já adquiridas, seria suficiente para um número de dias igual a:

a) 10

b) 12

c) 15

d) 18

e) 20

12. (EPCAR-MG) Para a reforma do Ginásio de Esportes da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (2ª feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados. No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folga em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é:

a) domingo

b) segunda-feira

c) terça-feira

d) quarta-feira

13. (FATEC-SP) Em uma indústria há duas máquinas que funcionam em velocidades constantes, mas distintas entre si. Funcionando ininterruptamente, juntas, produzem X peças iguais em 2 horas e 40 minutos. Uma delas, sozinha, produziria essas X peças em 4 horas de funcionamento ininterrupto. A outra produziria as X peças funcionando ininterruptamente em:

a) 8 horas e 15 minutos

b) 8 horas

c) 7 horas e meia

d) 7 horas e 15 minutos

e) 7 horas

14. (FAAP-SP) Dois guindastes, trabalhando juntos, descarregam um navio em 6 horas. Trabalhando em separado, sabendo-se que um deles pode descarregar o navio em 5 horas menos que o outro, quantas horas levaria cada um?

a) 5 e 10

b) 11 e 16

c) 10 e 15

d) 3 e 8

e) 6 e 11

15. (ESPM-SP) Em 10 minutos, 27 secretárias com a mesma habilidade digitaram o equivalente a 324 páginas. Nas mesmas condições, se o número de secretárias fosse 50, em quantos minutos teoricamente elas digitariam 600 páginas?

a) 10 minutos

b) 45 minutos

c) 5 minutos

d) 5 minutos e 24 segundos

e) 34 minutos e 29 segundos

16. (PUC-CAMP) Sabe-se que 5 máquinas, todas de igual eficiência, são capazes de produzir 500 peças em 5 dias, se operarem 5 horas por dia. Se 10 máquinas iguais as primeiras operassem 10 horas por dia durante 10 dias, o número de peças produzidas seria:

a) 1.000

b) 2.000

c) 4.000

d) 5.000

e) 8.000

17. (CESGRANRIO-RJ) 3 profissionais fazem 24 peças em 2 horas, e 4 aprendizes fazem 16 peças em 3 horas. Em quantas horas 2 profissionais e 3 aprendizes farão 48 peças?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

18. (UFSM) Um trabalhador gasta 3 horas para limpar um terreno circular de 5 metros de raio. Se o terreno tivesse 15 metros de raio, em horas, ele gastaria:

a) 6

b) 9

c) 18

d) 27

e) 45

19. (ENEM) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

a) 12 kg

b) 16 kg

c) 24 kg

d) 36 kg

e) 75 kg

20. (ENEM) Você pode adaptar as atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:

- Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.
- Meia hora de supermercado: 100 calorias.
- Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.
- Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.
- Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.
- Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.

Disponível em: http://cyberdiet.terra.com.br. Acesso em: 27 abr. 2.010 (adaptado).

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias. A partir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?

a) 50 minutos

b) 60 minutos

c) 80 minutos

d) 120 minutos

e) 170 minutos.

21. (ENEM) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6:5:4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4:4:2, respectivamente. Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350

b) 300, 300, 150

c) 300, 250, 200

d) 200, 200, 100

e) 100, 100, 50

22. (UFRN) Duas velas, cada uma com 1 m de comprimento, são feitas de modo que uma queime completamente em 6 horas depois de acesa e a outra leve 4 horas para queimar. Se as velas forem acesas simultaneamente, o tempo necessário para que uma atinja duas vezes o comprimento da outra será:

a) 2 horas

b) 3 horas

c) 4 horas

d) 1 hora

23. (UFGO) Para encher um recipiente de 5 litros, uma torneira gasta 12 segundos. Uma segunda torneira gasta 18 segundos para encher o mesmo recipiente. Nestas condições, para encher um tanque de 1.000 litros, usando as duas torneiras ao mesmo tempo, serão necessários, em minutos:

a) 20

b) 24

c) 33

d) 50

e) 83

E SE TODO O NOSSO PLANETA FOSSE REDUZIDO A UMA ALDEIA COM APENAS 100 HABITANTES?

Por Cristiano Siqueira

Olhe que curiosa esta publicação das Nações Unidas datada de 10 de agosto de 1996. É um cálculo fascinante! O propósito é observar o mundo estatisticamente a partir da redução da população terrestre a de um vilarejo de apenas 100 pessoas. O fato é que, quando nos deparamos com estas proporções, ficamos impressionados com o baixo nível de evolução que adquirimos até então. Senão, vejamos:

- A aldeia seria habitada por 8 africanos, 14 americanos, 21 europeus e 57 asiáticos;
- O total de brancos seria de 30 e o restante (70) não brancos;
- 30 seriam cristãos e 70, não cristãos;
- A metade da riqueza de todo o planeta terrestre estaria concentrada nas mãos de 6 pessoas norte-americanas;
- O número de analfabetos seria de 70;
- 50 pessoas seriam desnutridas;
- 80 viveriam em habitações bastante precárias;
- Somente 1 possuiria um curso universitário.

Da mesma forma que esse estudo é encantador do ponto de vista estatístico - uma vez que nos permite olhar de maneira mais focada – é de igual modo assustador pelo fato de escancarar um nível de desenvolvimento humano preocupante no que diz respeito à educação, alimentação e moradia da população mundial. O que você, eu, nós podemos fazer no sentido de melhorar ao menos um pouco essa situação? Você já pensou nisso? Qual a parte que nos cabe? Vale a reflexão?

Shutterstock.com

06 TRIGONOMETRIA NOS TRIÂNGULOS

INTRODUÇÃO

Pesquisas indicam que os brasileiros estão entre os passageiros que mais têm medo de viajar pelo mundo.

Shutterstock.com

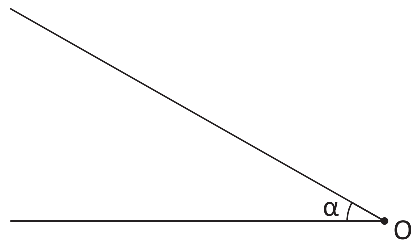
Especialmente após a ocorrência de tragédias como a de 17 de julho de 2.007, quando um Airbus A320 da companhia aérea brasileira TAM, voo 3.054, que ligava as cidades de Porto Alegre e São Paulo ultrapassou o fim da pista do Aeroporto de Congonhas durante a aterrissagem, vindo a chocar-se contra um depósito de cargas da própria TAM, situado nas proximidades da cabeceira da pista, no lado oposto da avenida Washington Luís que delimita o aeroporto. Estavam no avião 187 pessoas, não houve sobreviventes. Houve ainda outras doze mortes no solo. O voo 3.054 foi o pior acidente aéreo da história da América Latina por 22 meses, até o Voo Air France 447 em 31 de maio de 2.009.

Seguramente, esse medo se acentua durante as decolagens e aterrissagens, que são as fases mais perigosas do voo. Durante as decolagens, a aceleração de um avião é muito elevada, o que causa aquela sensação de “grudar na poltrona”.

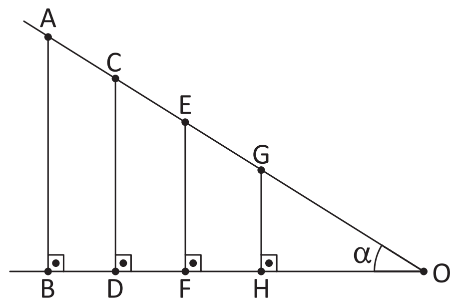
Supondo que a velocidade e o ângulo de subida do avião sejam constantes durante a decolagem, é possível calcular a altura que ele atinge após um determinado tempo. Para isso, basta utilizar relações que envolvem ângulos e distâncias chamadas de **razões trigonométricas**.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO

Na figura a seguir, temos um ângulo agudo, de vértice O e medida α.



Sobre os lados desse ângulo traçam-se os segmentos AB, CD, EF e GH, todos perpendiculares a um dos de seus lados.



Os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são todos semelhantes entre si, pois possuem três ângulos de mesma medida.

Logo, podemos estabelecer as seguintes relações entre seus lados.

1ª relação:

- $\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} =$ constante.

A essa razão, dá-se o nome de seno do ângulo agudo α, que é indicada por sen α.

2ª relação:

- $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} =$ constante.

A essa razão, dá-se o nome de cosseno do ângulo agudo α, que é indicada por cos α.

3ª relação:

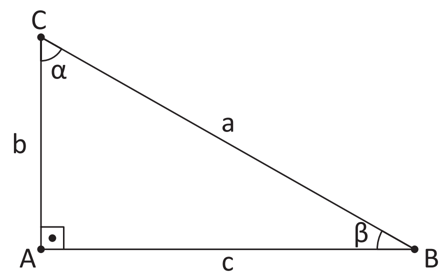
- $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} =$ constante.

A essa razão, dá-se o nome de tangente do ângulo agudo α, que é indicada por tg α.

Essas relações, que dependem exclusivamente da medida α, são chamadas de razões trigonométricas do ângulo agudo α.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto, ou seja, de medida 90°. Observe a figura a seguir:



No triângulo ABC, temos que:

- O ângulo BAC é reto.
- Os ângulos ABC (medida β) e ACB (medida α) são agudos.
- O lado BC é a hipotenusa.
- O lado AC é o cateto oposto ao ângulo ABC e cateto adjacente ao ângulo ACB.
- O lado AB é o cateto oposto ao ângulo ACB e cateto adjacente ao ângulo ABC.

Utilizando as definições de seno, cosseno e tangente, no triângulo ABC, temos:

Para o ângulo ABC, de medida β, temos:

- $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\text{cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}.$
- $\cos\beta = \dfrac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \beta}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}.$
- $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\text{cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \beta} = \dfrac{b}{c}.$

Para o ângulo ACB, de medida α, temos:

- $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}.$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}.$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \dfrac{c}{b}.$

Observando que os ângulos de medidas α e β são complementares, temos que:

- $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \dfrac{c}{a}.$
- $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \dfrac{b}{a}.$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{c}{b}.$

Portanto, podemos afirmar que se dois ângulos são complementares, então:

- O seno de um deles é igual ao cosseno do outro.
- A tangente de um deles é o inverso da tangente do outro.

RELAÇÕES ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

O seno, o cosseno e tangente de um ângulo agudo se relacionam mediante as seguintes expressões:

1ª relação fundamental:

A soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo é igual a 1. Assim, para um ângulo agudo x, podemos demonstrar através do teorema de Pitágoras que:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

2ª relação fundamental:

A tangente de um ângulo agudo é igual a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo. Assim, para um ângulo agudo x, dividindo as razões do seno e do cosseno, nessa ordem, temos que:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

TABELA DE VALORES NOTÁVEIS

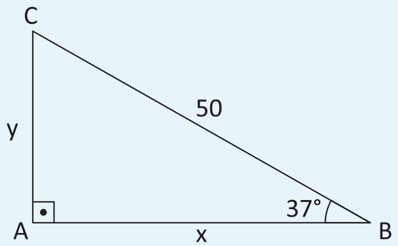
Os ângulos de 30°, 45° e 60° são considerados notáveis, pois frequentemente estão presentes nos problemas envolvendo as razões trigonométricas.

Por esse motivo, seus valores trigonométricos correspondentes estão organizados na tabela a seguir.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Sabendo que sen 37° = 0,60 e cos 37° = 0,80, calcule os valores de x e y da figura a seguir sabendo que as medidas estão em metros.



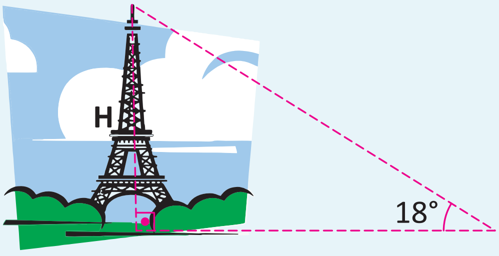
Resolução:

$$\text{sen } 37^\circ = \frac{y}{50} \Rightarrow 0,60 = \frac{y}{50} \Rightarrow y = 30.$$

$$\cos 37^\circ = \frac{x}{50} \Rightarrow 0,80 = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 40.$$

Portanto, x = 40 m e y = 30 m.

02. Uma pessoa que está a 80 metros de distância, observa uma torre sob um ângulo de 18°, como mostra a figura a seguir. Dado: tg 18° = 0,32.



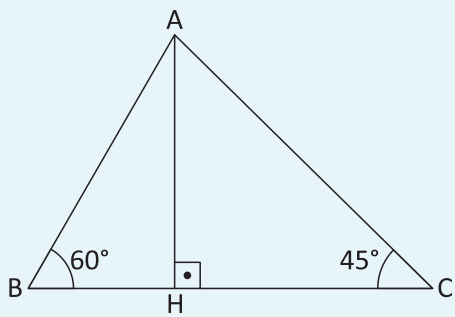
Desprezando a altura da pessoa, calcule a altura H da torre, em metros.

Resolução:

$$\text{tg } 18^\circ = \frac{H}{80} \Rightarrow 0,32 = \frac{H}{80} \Rightarrow H = 25,6.$$

Portanto, a altura H = 25,6 m.

03. Calcule a medida do segmento AC na figura a seguir, sabendo que AB = 6 cm.



Resolução:

Fazendo AH = x, no triângulo ABH, temos:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}.$$

Fazendo AC = y, no triângulo ACH, temos:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{y}.$$

$$y = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}.$$

Portanto, o lado AC mede $3\sqrt{6}$ m.

04. Calcule o valor numérico da expressão a seguir:

$$E = \frac{2 \,.\, \text{sen } 48^\circ + 4 \,.\, \cos 42^\circ}{3 \,.\, \text{sen } 48^\circ}$$

Resolução:

Como 48° e 42° são complementares, temos que:

$$E = \frac{2 \,.\, \text{sen } 48^\circ + 4 \,.\, \text{sen } 48^\circ}{3 \,.\, \text{sen } 48^\circ}$$

$$E = \frac{6 \,.\, \text{sen } 48^\circ}{3 \,.\, \text{sen } 48^\circ} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto, temos E = 2.

05. Sendo α um ângulo agudo do triângulo retângulo e $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, calcule $\text{tg } \alpha$.

Resolução:

Utilizando as relações fundamentais, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

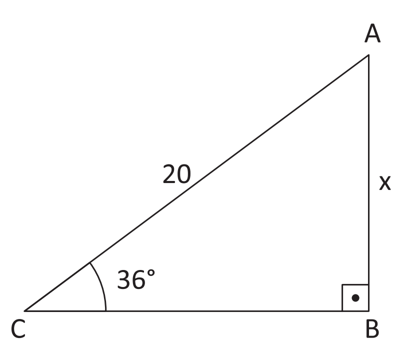
$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Portanto, $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

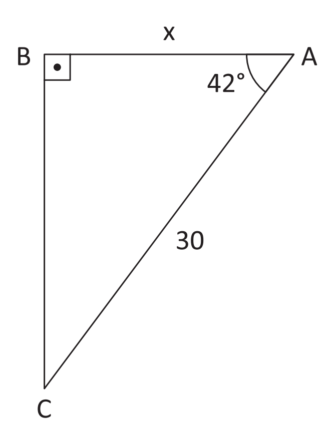
01. Calcule o valor de x no triângulo da figura a seguir utilizando um dos valores aproximados:

- sen 36° = 0,59 e tg 36° = 0,73.



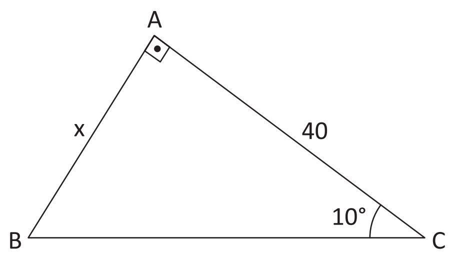
02. Calcule o valor de x no triângulo da figura a seguir utilizando um dos valores aproximados:

- sen 42° = 0,67 e cos 42° = 0,74.

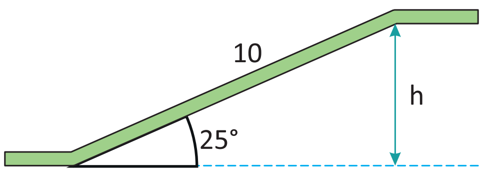


03. Calcule o valor de x no triângulo da figura a seguir utilizando um dos valores aproximados:

- cos 10° = 0,98 e tg 10° = 0,18.

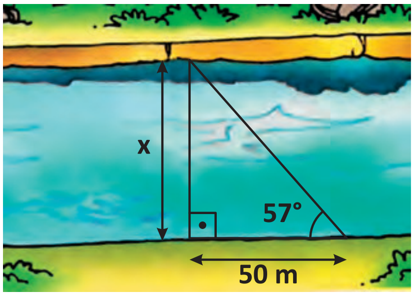


04. Na figura a seguir, temos uma rampa de 10 m de comprimento que um faz ângulo de 25° com o plano horizontal.



Nessas condições, qual é o valor de h, em metros? Dados: sen 25° = 0,43 e tg 25° = 0,47?

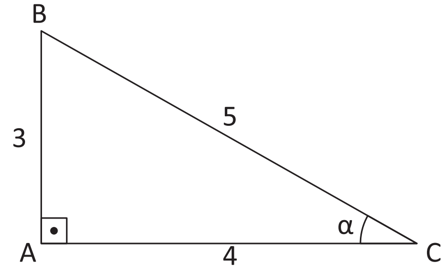
05. Na figura a seguir, temos o trecho de um rio de largura x e dois pontos da margem inferior distantes 50 m.



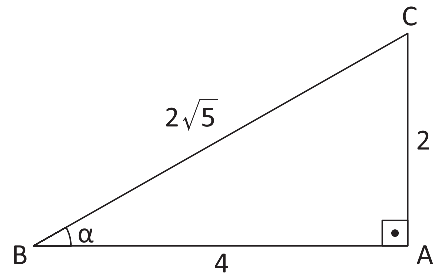
Nessas condições, qual é o valor de x, em metros?
Dados: cos 57° = 0,54 e tg 57° = 1,54

06. Determine o valor de sen α, cos α e tg α nos triângulos retângulos a seguir:

a)

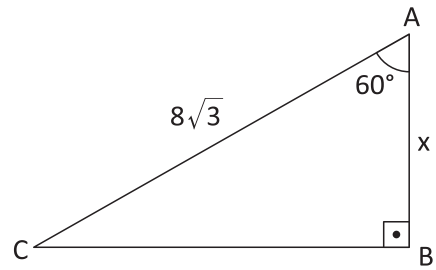


b)

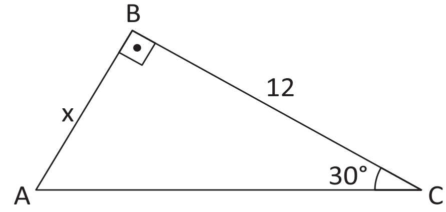


07. Determine o valor de x nos triângulos retângulos a seguir:

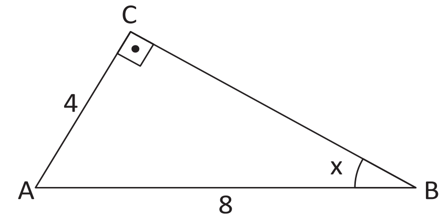
a)



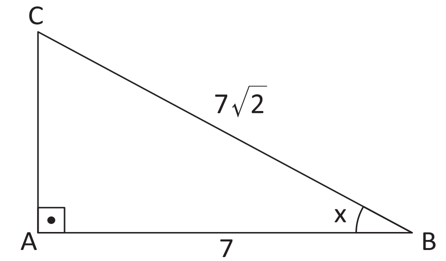
b)



c)



d)

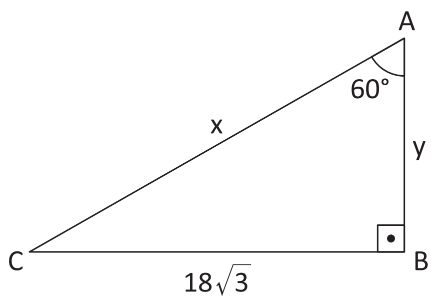


08. Sabendo que sen 12° = 0,21 e cos 82° = 0,14, calcule os valores de:

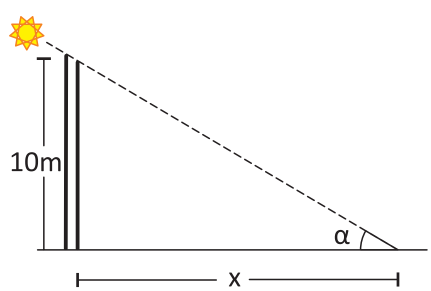
a) cos 78°

b) sen 8°

09. Dado o triângulo retângulo ABC da figura a seguir, calcule as medidas x e y indicadas.

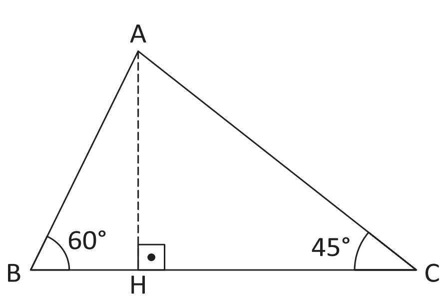


10. (UFRRJ) Milena, diante da configuração representada a seguir, pede ajuda aos vestibulandos para calcular o comprimento da sombra x do poste, mas, para isso, ela informa que o sen $\alpha = 0{,}6$.



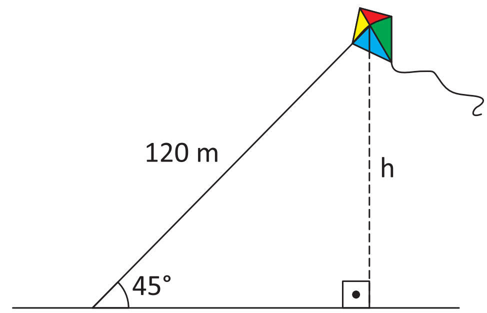
Calcule o comprimento da sombra x.

11. Na figura a seguir, temos que $AB = 8\sqrt{6}$ m



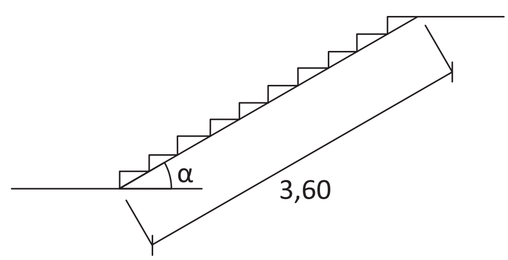
Nessas condições, calcule a medidas da altura AH e do lado AC, em metros.

12. Na figura a seguir, temos uma pipa presa a uma linha esticada que forma um ângulo de 45° com o solo.

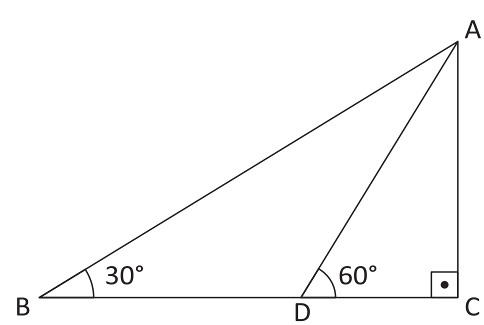


Assim, calcule a altura h, em metros, da pipa em relação ao solo.

13. (UFPE) Dois pavimentos de uma construção devem ser ligados por uma escada com 10 degraus de mesma altura, construída sobre uma rampa de 3,6 m como ilustrado na figura abaixo. Se sen $\alpha = \frac{1}{2}$, indique a altura, em centímetros, de cada degrau.



14. Na figura a seguir, temos que BD = 60 m.



Nessas condições, calcule a medida do lado AC, em metros.

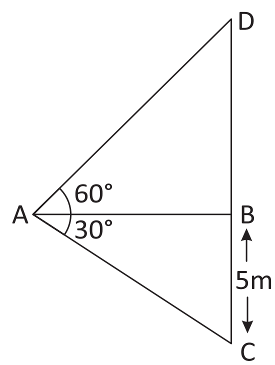
15. (UFES) Um homem de 1,80 m de altura avista o topo de um edifício sob um ângulo de 45° em relação à horizontal. Quando ele se aproxima 20 m do edifício, esse ângulo aumenta para 60°. Qual a altura do edifício?

16. Sabendo que sen 57° = 0,60 e tg 66° = 2,25, calcule:

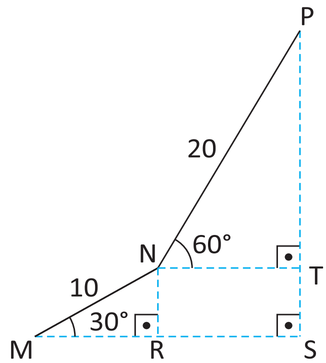
a) cos 57°

b) tg 24°

17. (UEM-PR) Para obter a altura CD de uma torre, um matemático, utilizando um aparelho, estabeleceu a horizontal AB e determinou as medidas dos ângulos $\alpha = 30°$ e $\beta = 60°$ e a medida do segmento BC = 5 m, conforme especificado na figura. Nessas condições, calcule a altura da torre, em metros.

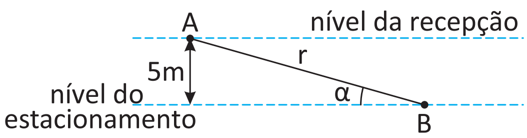


18. (UFRN) Ao se tentar fixar as extremidades de um pedaço de arame reto, de 30 m de comprimento, entre os pontos M e P de um plano, o arame, por ser maior do que o esperado, entortou, como mostra a figura abaixo.



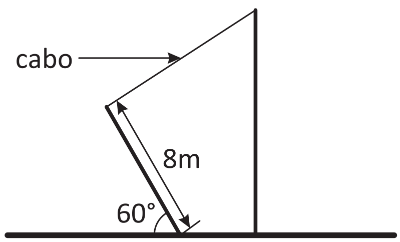
A partir desses dados, calcule, em metros, o comprimento dos segmentos MS e SP.

19. (UNESP) Um prédio hospitalar está sendo construído em um terreno declivoso. Para aperfeiçoar a construção, o arquiteto responsável idealizou o estacionamento no subsolo do prédio, com entrada pela rua dos fundos do terreno. A recepção do hospital está 5 metros acima do nível do estacionamento, sendo necessária a construção de uma rampa retilínea de acesso para os pacientes com dificuldades de locomoção. A figura representa esquematicamente esta rampa (r), ligando o ponto A, no piso da recepção, ao ponto B, no piso do estacionamento, a qual deve ter uma inclinação α mínima de 30° e máxima de 45°.



Nestas condições e considerando $\sqrt{2} = 1{,}4$, quais deverão ser os valores máximos e mínimos, em metros, do comprimento desta rampa de acesso?

20. (UFGO) Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60°, conforme a figura a seguir.



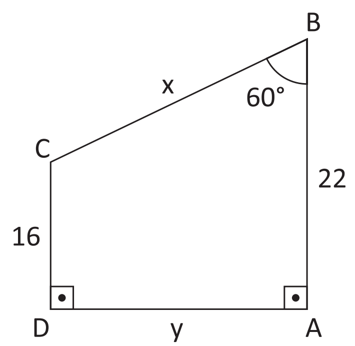
Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo.

21. (UNICAMP) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância AB = 1.200 metros. Quando em A ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo NAB é de 60°, e quando em B, verifica que o ângulo NBA é de 45°.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

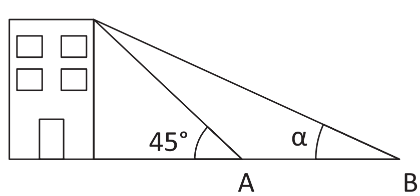
b) Calcule a distância a que se encontra o navio da praia.

22. Na figura a seguir, ABCD é um trapézio retângulo, x e y são as medidas de seus lados não paralelos.



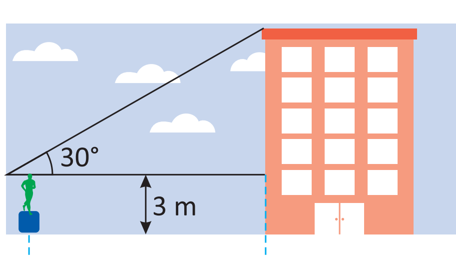
Nessas condições, determine os valores de x e y.

23. Na figura a seguir João está no ponto A e vê o topo de um prédio sob um ângulo de 45°. A partir desse ponto, afastando-se do prédio 12 m, ele atinge o ponto B, de onde passa a ver o topo do mesmo prédio sob um ângulo α tal que $\text{tg}\,\alpha = \frac{7}{8}$.



Nessas condições, calcule a altura do prédio em metros.

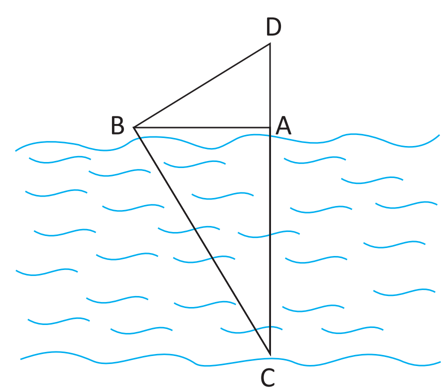
24. Gregório, utilizando os conhecimentos de matemática, deseja determinar a altura de um edifício. Assim, ele se coloca a 15 metros do edifício sobre uma peça de madeira e o observa o edifício segundo um ângulo de 30°, conforme mostra a figura.



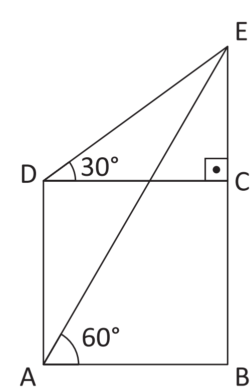
Nessas condições, qual a altura do edifício?

25. (UFGO) Um topógrafo deseja calcular a largura de um rio em um trecho onde suas margens são paralelas e retilíneas. Usando como referência uma árvore, A, que está na margem oposta, ele identificou dois pontos B e C, na margem na qual se encontra, tais que os ângulos ABC e ACB medem 135° e 30°, respectivamente. O topógrafo, então, mediu a distância entre B e C, obtendo 20 metros. Considerando-se o exposto, calcule a largura do rio. Dado $\sqrt{3} = 1,7$.

26. (UNICAMP) Para medir a largura AC de um rio um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo ABC fosse 60°; determinou o ponto D no prolongamento de CA de forma que o ângulo CBD fosse de 90°. Medindo AD = 40 metros, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio.



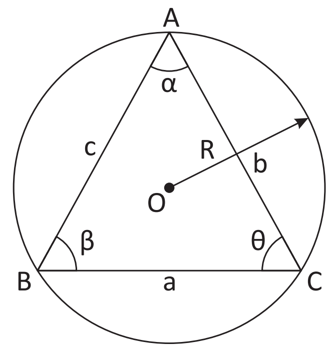
27. Na figura a seguir, temos que ABCD é um retângulo, o lado AD mede 50 cm, o ângulo EDC mede 30° e o ângulo EAB mede 60°.



Nessas condições, calcule a medida do lado EC, em centímetros.

LEI DOS SENOS

Em um triângulo qualquer, a razão entre as medidas dos lados e os senos dos ângulos opostos a esses lados é constante. Essa constante é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Observe a figura a seguir:

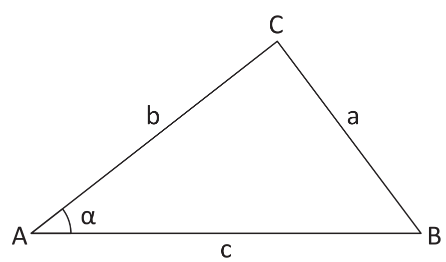


Para o triângulo ABC, podemos estabelecer a seguinte relação chamada lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\theta} = 2R$$

LEI DOS COSSENOS

Em um triângulo qualquer o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. Observe a figura a seguir:



Para o triângulo ABC, podemos estabelecer a seguinte relação chamada lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \,.\, \cos\alpha$$

SENO E COSSENO DE ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Através do triângulo retângulo, foram definidos o seno e cosseno de ângulos agudos. No entanto, é possível estender esses conceitos para ângulos suplementares através da circunferência trigonométrica.

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual à 180°. Logo, dados dois ângulos suplementares, um obtuso de medida α e um agudo de medida $180° - \alpha$, temos que:

- O seno do ângulo obtuso é igual ao seno do ângulo agudo, ou seja:

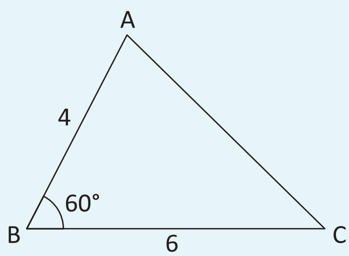
$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(180° - \alpha)$$

- O cosseno do ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno do ângulo agudo, ou seja:

$$\cos\alpha = -\cos\,(180° - \alpha)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

06. Calcule a medida do lado AC da figura a seguir sabendo que as medidas estão em metros.



Resolução:

Fazendo AC = x e, em seguida, aplicando a lei dos cossenos, temos que:

$$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \cos 60^\circ$$

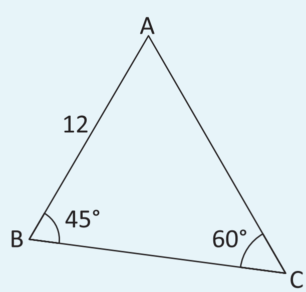
$$x^2 = 16 + 36 - 48 \,.\, \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 52 - 24$$

$$x = 2\sqrt{7}$$

Portanto, o lado AC mede $2\sqrt{7}$ m.

07. Calcule a medida do lado AC da figura a seguir sabendo que a medida do lado AB está em metros.



Resolução:

Fazendo AC = x e, em seguida, aplicando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{12}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{x}{\text{sen } 45^\circ} \Rightarrow x \,.\, \text{sen } 60^\circ = 12 \,.\, \text{sen } 45^\circ$$

$$x \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \,.\, \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \,.\, x = 6\sqrt{2}$$

$$x = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 2\sqrt{6}$$

Portanto, o lado AC mede $2\sqrt{6}$ m.

08. Calcule o valor de sen 150° e cos 135°.

Resolução:

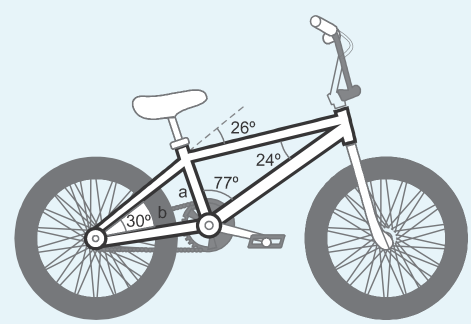
Os ângulos que medem 150° e 30° são suplementares, assim, temos que:

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Os ângulos que medem 135° e 35° são suplementares, assim, temos que:

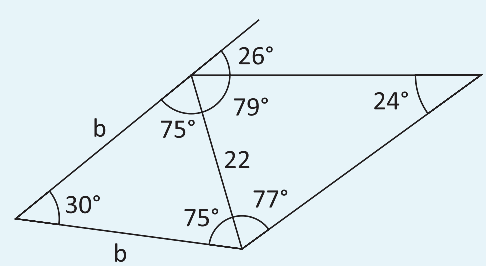
$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

09. **(UNICAMP)** Laura decidiu usar sua bicicleta nova para subir uma rampa. O quadro da bicicleta de Laura está destacado na figura à direita. Com base nos dados da figura, e sabendo que a mede 22 cm, calcule o comprimento b da barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais.



Resolução:

Aplicando a lei dos cossenos, temos:



$$22^2 = b^2 + b^2 - 2b \,.\, b \,.\, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

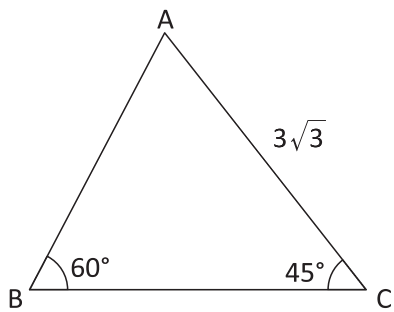
$$b^2 = \frac{22^2}{2 - \sqrt{3}} \,.\, \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$b = \sqrt{22^2 . (2 + \sqrt{3})}$$

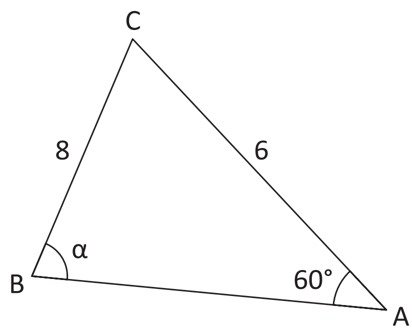
Portanto, $b = 22\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

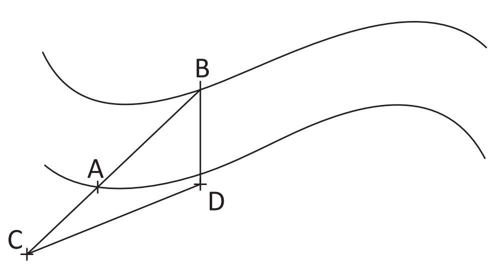
28. Calcule a medida do lado AB da figura a seguir, sabendo que a medida do lado AC está em metros.



29. Calcule sen α no triângulo ABC da figura a seguir.

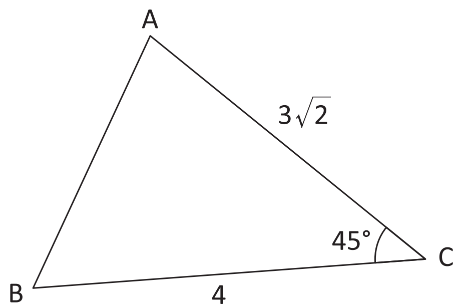


30. **(UNESP)** Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra junto a A afasta-se 20 m da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a 40 m de C, do qual ainda pode ver as árvores.

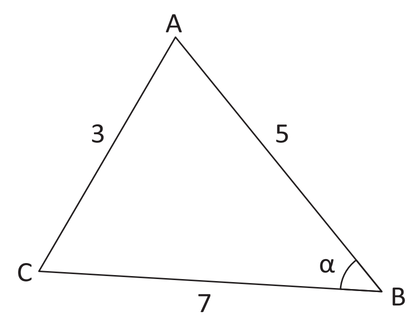


Tendo verificado que os ângulos DCB e BDC medem, respectivamente, cerca de 15° e 120°, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6} = 2,4$?

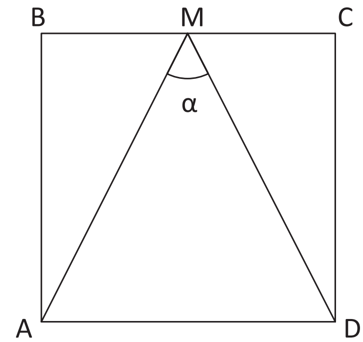
31. Calcule a medida do lado AB da figura a seguir, sabendo que a medida dos lados AC e BC estão em metros.



32. Calcule cos α no triângulo ABC da figura a seguir.



33. **(UFMS)** Na figura, ABCD é um quadrado. Sendo M o ponto médio do lado BC e α o ângulo correspondente ao vértice M do triângulo AMD, calcule o valor de $30 \cdot \cos \alpha$.



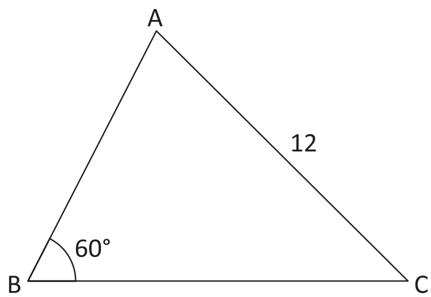
34. Considere a seguinte definição:

Paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos, ângulos opostos congruentes e ângulos consecutivos suplementares.

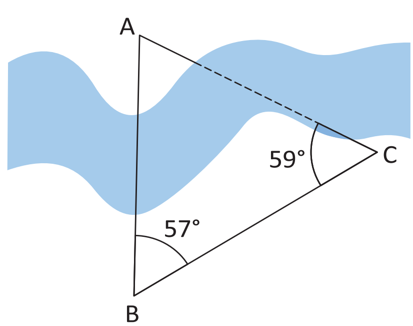
Assim, considere um paralelogramo que possui lados consecutivos medindo 4 m e 7 m e a diagonal menor medindo $\sqrt{37}$ m.

Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.

35. Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura a seguir, sabendo que a medida do lado AC está em metros.



36. (UFPE) Uma ponte deve ser construída sobre um rio, unindo os pontos A e B, como ilustrado na figura a seguir. Para calcular o comprimento AB, escolhe-se um ponto C, na mesma margem em que B está, e medem-se os ângulos CBA = 57° e ACB = 59°. Sabendo que BC mede 30 m, indique, em metros, a distância AB. (Dados: sen 59° = 0,87 e sen 64° = 0,90)



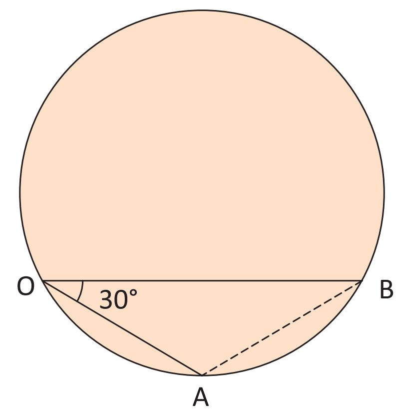
37. (UFRJ) Os ponteiros de um relógio circular medem, do centro às extremidades, 2 metros, o dos minutos, e 1 metro, o das horas. Determine a distância entre as extremidades dos ponteiros quando o relógio marca 4 horas.

38. (UNICAMP) Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares consecutivos cuja soma é 15.

a) Quais são esses números?

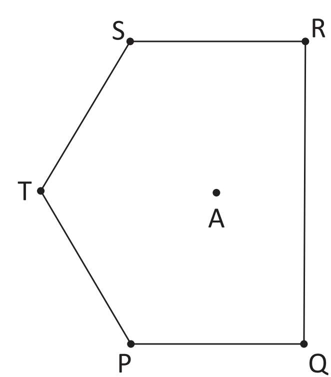
b) Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.

39. (UFRN) Para medir o raio de um pequeno lago circular, uma pessoa usa o seguinte procedimento: traça um ângulo AOB de 30°, sendo que os pontos *A, O* e *B* estão sobre a margem do lago, e, em seguida, mede a distância de *A* a *B*, conforme a figura abaixo.



Justifique por que a medida do segmento AB corresponde ao raio do lago.

40. (UFGO) Uma empresa de vigilância irá instalar um sistema de segurança em um condomínio fechado, representado pelo polígono da figura a seguir.



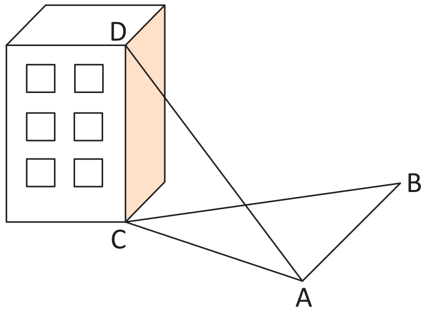
A empresa pretende colocar uma torre de comunicação, localizada no ponto A, indicado na figura, que seja equidistante dos vértices do polígono, indicados por P, Q, R, S e T, onde serão instalados os equipamentos de segurança. Sabe-se que o lado RQ desse polígono mede 3.000 m e as medidas dos outros lados são todas iguais à distância do ponto A aos vértices do polígono. Calcule a distância do ponto A, onde será instalada a torre, aos vértices do polígono.

41. Considere que os pontos A, B e C são pontos de uma circunferência tais que a medida ângulo ABC é 135°, a medida do segmento AB é 2 m e a medida do segmento BC é $\sqrt{2}$ m. Nessas condições, calcule:

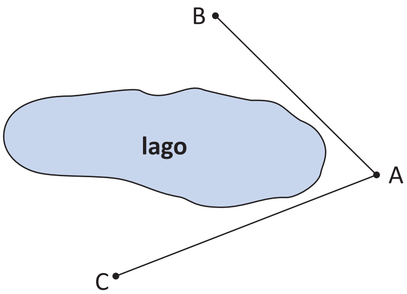
a) A medida do segmento AC, em metros.

b) A medida do raio da circunferência, em metros.

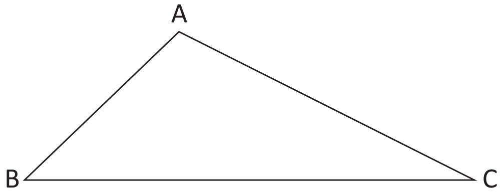
42. (UNB-DF) Um observador, situado no ponto A, distante 30 m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura abaixo. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$. Dados: AB = 30 m; DAC = 30°; CAB = 75°; ABC = 60°; DCA = 90°.



43. (UFGO) Na figura abaixo, um observador no ponto A consegue visualizar dois marcos, um no ponto B e outro no ponto C, sob um ângulo cujo cosseno é 0,4. As distâncias que separam o observador do ponto B e do ponto C são 400 m e 500 m, respectivamente. Nessas condições, calcule a distância entre os marcos B e C.



44. Na figura a seguir, temos BC = x + 2, AB = x, AC = x + 1 e BAC = 120°.



Sabendo-se que as medidas dos lados estão expressas em centímetros, determine o perímetro o perímetro do triângulo ABC.

TESTES DE VESTIBULARES

01. (ITA-SP) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante quando o navio está em A, observa um farol em L, e calcula o ângulo LAC = 30°. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo LBC = 75°. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

a) 4

b) $2\sqrt{2}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

e) nda

02. (UTF-PR) Um caminhão, cuja carroceria está a uma altura de 1,2 m do chão está estacionado em um terreno plano. Deseja-se carregar uma máquina pesada neste caminhão e para isso será colocada uma rampa da carroceria do caminhão até o chão. O comprimento mínimo da rampa para que esta forme com o chão um ângulo máximo de 30° é, em metros, de:

a) $0{,}8\sqrt{3}$

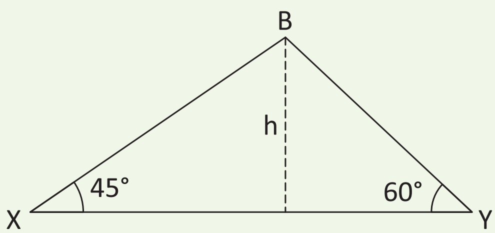
b) 2,4

c) $1{,}2\sqrt{3}$

d) $0{,}6\sqrt{3}$

e) 0,6

03. (FATEC-SP) De dois observatórios, localizados em dois pontos X e Y da superfície da Terra, é possível enxergar um balão meteorológico B, sob ângulos de 45° e 60°, conforme é mostrado na figura abaixo.



Desprezando-se a curvatura da Terra, se 30 km separam X e Y, a altura h, em quilômetros, do balão à superfície da Terra, é:

a) $30 - 15\sqrt{3}$

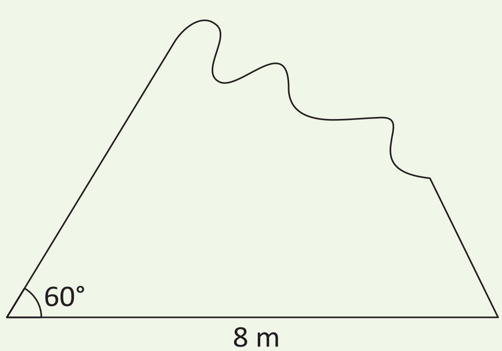
b) $30 + 15\sqrt{3}$

c) $60 - 30\sqrt{3}$

d) $45 - 15\sqrt{3}$

e) $45 + 15\sqrt{3}$

04. (UEM-PR) Um engenheiro precisa conhecer a medida de cada lado de um terreno triangular cujo perímetro é 20 m, porém a planta do terreno foi rasgada e o que restou foi um pedaço, como na figura a seguir. Os lados do triângulo que não aparecem totalmente na planta do terreno medem:



a) $3\sqrt{3}$ m e $(12 - 3\sqrt{3})$ m

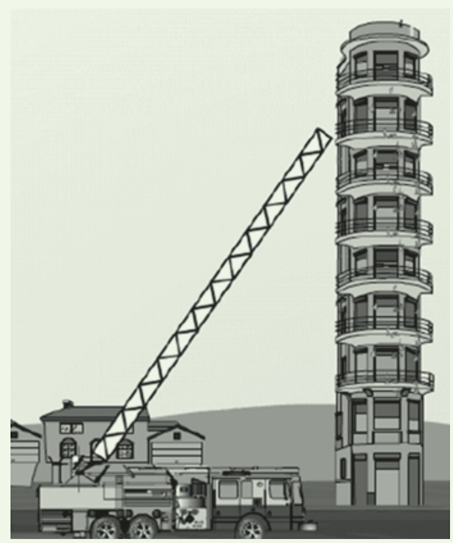
b) 5 m e 7 m

c) 4,5 m e 7,5 m

d) 8 m e 4 m

e) 3 m e 9 m

05. (UNIFOR-CE) O Edifício Joelma tornou-se conhecido nacional e internacionalmente quando, em fevereiro de 1.974, um incêndio provocou a morte de 188 pessoas. Foi inaugurado em 1.971 e continha vinte e cinco andares, sendo dez de garagens. Hoje é denominado Edifício Praça da Bandeira. Suponha que cada andar tem 2 metros de altura e um carro de bombeiro tenha se posicionado em frente ao prédio incendiado. Se a inclinação máxima da escada é 30° e o seu tamanho máximo é 60 m, qual será o último andar alcançado pela escada?



(Imagem disponível em: www.rived.mec.gov.br. Acesso em: 01/11/2.010.)

a) 5º andar

b) 7º andar

c) 8º andar

d) 10º andar

e) 15º andar

06. (MACK-SP) Se as medidas dos ângulos agudos x e y de um triângulo retângulo são tais que $\cos^2 x = 3\cos^2 y$, então a diferença entre essas medidas é:

a) 15°

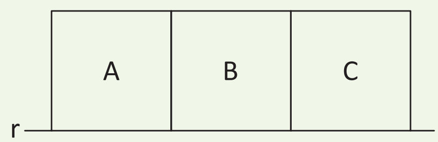
b) 30°

c) 45°

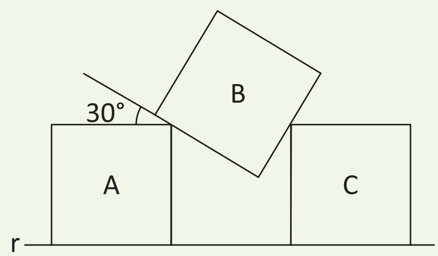
d) 60°

e) 75°

07. (FGV-SP) A, B e C são quadrados congruentes de lado igual a 1 em um mesmo plano. Na situação inicial, os três quadrados estão dispostos de forma que dois adjacentes possuem um lado em comum e outro sobre a reta r. Na situação final, os quadrados A e C permanecem na mesma posição inicial, e o quadrado B é reposicionado, conforme indica a figura.



situação inicial



situação final

A menor distância da reta r a um vértice do quadrado B é:

a) $\frac{(2-\sqrt{3})}{4}$

b) $\frac{(3-\sqrt{3})}{4}$

c) $\frac{(4-\sqrt{3})}{4}$

d) $\frac{(3-\sqrt{3})}{2}$

e) $\frac{(4-\sqrt{3})}{2}$

08. (PUC-RJ) Queremos encostar uma escada de sete metros de comprimento em uma parede de modo que ela forme um ângulo de 30° com a parede. A que distância da parede devemos apoiar a escada no solo?

a) 1,0 m
b) 2,0 m
c) 2,5 m
d) 3,5 m
e) 5,0 m

09. (UEL-PR) Um topógrafo que necessitava medir a largura de um rio, sem atravessá-lo, procedeu da seguinte forma: de um ponto X, situado na beira do rio, avistou o topo de uma árvore na beira da margem oposta, sob um ângulo de 45° com a horizontal. Recuando 30 m, até o ponto Y, visou novamente o topo da mesma árvore, registrando 30° com a horizontal. Desconsiderando a altura do topógrafo e sabendo que a árvore e os pontos X e Y estão alinhados perpendicularmente ao rio, é correto afirmar que a largura aproximada do rio, em metros, é:

a) $\sqrt{6}+3$

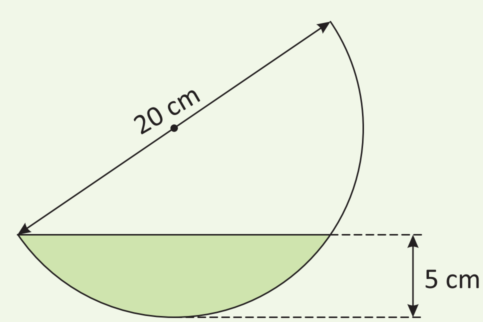
b) $15(\sqrt{2}-1)$

c) $15(\sqrt{3}+1)$

d) $30(\sqrt{6}+3)$

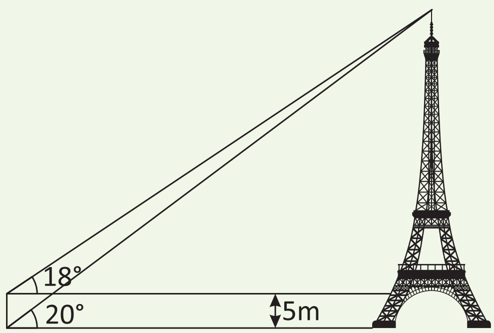
e) $30(\sqrt{2}+1)$

10. (UFPR) Um recipiente, no formato de hemisfério, contém um líquido que tem profundidade máxima de 5 cm. Sabendo que a medida do diâmetro do recipiente é de 20 cm, qual o maior ângulo, em relação à horizontal, em que ele pode ser inclinado até que o líquido alcance a borda, antes de começar a derramar?



a) 75°
b) 60°
c) 45°
d) 30°
e) 15°

11. (UFAL) De um ponto A, situado no mesmo nível da base de uma torre, o ângulo de elevação do topo da torre é de 20°. De um ponto B, situado na mesma vertical de A e 5 m acima, o ângulo de elevação do topo da torre é de 18°. Qual a altura da torre? Dados: (tg 20° = 0,36 e tg 18° = 0,32)



a) 42 m

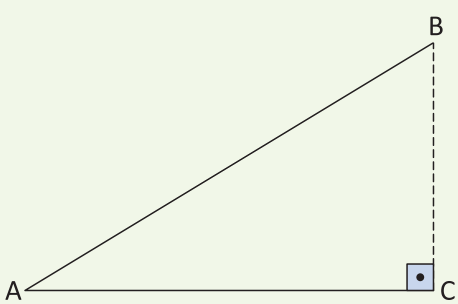
b) 43 m

c) 44 m

d) 45 m

e) 46 m

12. (UNESP-SP) Três cidades, A, B e C, são interligadas por estradas, conforme mostra a figura.



As estradas AC e AB são asfaltadas. A estrada CB é de terra e será asfaltada. Sabendo-se que AC tem 30 km, que o ângulo entre AC e AB é de 30°, e que o triângulo ABC é retângulo em C, a quantidade de quilômetros da estrada que será asfaltada é:

a) $30\sqrt{3}$

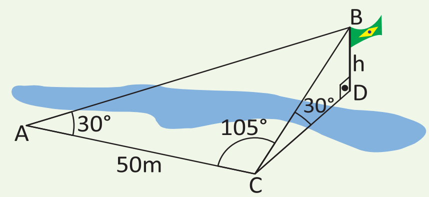
b) $10\sqrt{3}$

c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

d) $8\sqrt{3}$

e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

13. (UNESP-SP) Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos BAC e BCD valem 30°, e o ângulo ACB vale 105°, como mostra a figura.



A altura h do mastro da bandeira, em metros, é:

a) 12,5

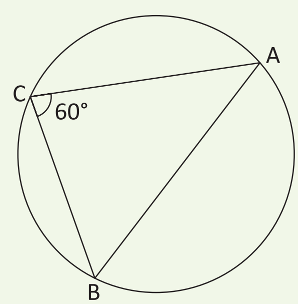
b) $12{,}5\sqrt{2}$

c) 25,0

d) $25{,}0\sqrt{2}$

e) 35,0

14. (UFJF) Uma praça circular de raio R foi construída a partir da planta a seguir:



Os segmentos AB, BC e CA simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que AB = 80 m. De acordo com a planta e as informações dadas, é correto afirmar que a medida de R, em m, é igual a:

a) $\frac{160\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. (UESPI) Se os lados de um triângulo medem a, b, e $\sqrt{a^2+ab+b^2}$, quanto mede o maior ângulo do triângulo?

a) 30°

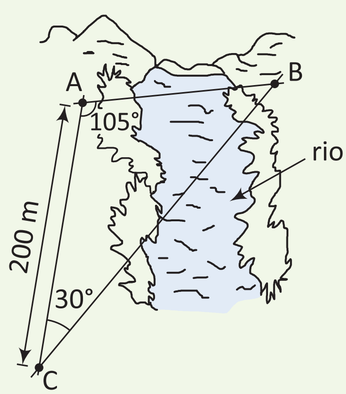
b) 45°

c) 60°

d) 90°

e) 120°

16. (UFPB) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200 m do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos BCA e CAB mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

a) $200\sqrt{2}$

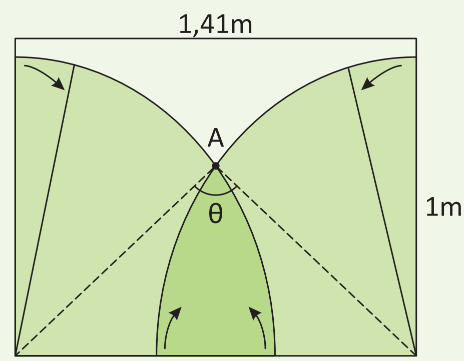
b) $180\sqrt{2}$

c) $150\sqrt{2}$

d) $100\sqrt{2}$

e) $50\sqrt{2}$

17. (UFGO) O para-brisa frontal de um carro tem formato plano retangular, medindo 1,41 m de comprimento por 1 m de altura. Os limpadores de para-brisa desse carro funcionam no sistema oposto, ou seja, contêm duas palhetas idênticas, fixadas nos cantos inferiores do para-brisa, como mostra a figura. Ao serem acionadas, as palhetas fazem um movimento em sentido circular para limpar o vidro. Considere que as pontas das palhetas ficam rentes uma da outra ao passarem pelo ponto A, em que o menor ângulo formado entre as palhetas é θ, tal que $\cos\theta = -0{,}125$. Tendo em vista estes dados, o tamanho da palheta é, em metros:



a) 0,80

b) 0,94

c) 1,00

d) 1,08

e) 1,41

18. (UFSM) Entre os pontos A e C, localizados na margem de um lago, será estendido um cabo com bóias sinalizadoras que demarcará a parte permitida para o passeio de pedalinhos. Para a compra do material a ser utilizado, é necessário determinar a distância entre esses pontos. A medição direta da distância entre A e C não pode ser realizada, pois fica sobre a superfície do lago. Assim, marcou-se um ponto B intermediário, de modo que as distâncias entre A e B e entre B e C pudessem ser feitas sobre terra firme. Sabendo que a distância entre A e B é 100 metros, que a distância entre B e C é 60 metros e que o ângulo com vértice em B determinado por A, B e C é 120 graus, a distância entre A e C, em metros, é:

a) 120

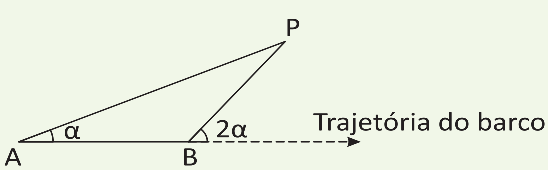
b) 140

c) 150

d) 155

e) 160

19. (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2.000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1.000 m

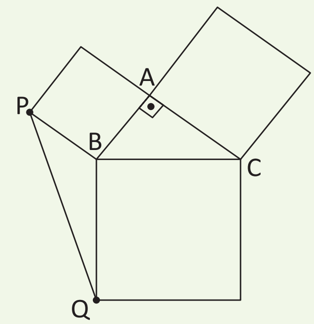
b) $1.000\sqrt{3}$ m

c) $2.000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

d) 2.000 m

e) $2.000\sqrt{3}$ m

20. (FEPECS-DF) Um painel, formado por três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo ABC de catetos AB e AC medindo 3 m e 4 m, respectivamente, necessita para sustentá-lo, de um cabo de aço retilíneo que liga os vértices P e Q como mostra a figura. O comprimento do cabo PQ vale:



a) $2\sqrt{10}$ m

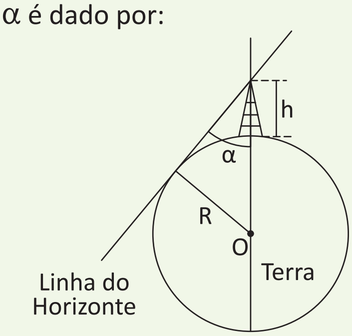
b) $2\sqrt{11}$ m

c) $\sqrt{46}$ m

d) $2\sqrt{13}$ m

e) $2\sqrt{15}$ m

21. (ESPCEX) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:



a) $R = \dfrac{\text{sen}(\alpha h)}{1 - \text{sen}\alpha}$

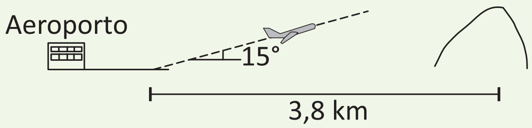
b) $R = \dfrac{h\text{sen}\alpha}{1 - \text{sen}\alpha}$

c) $R = \dfrac{h\text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha - 1}$

d) $R = \dfrac{1 - \text{sen}\alpha}{h\text{sen}\alpha}$

e) $R = \dfrac{1 + \text{sen}\alpha}{h\text{sen}\alpha}$

22. (UNICAMP) Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala.



Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de:

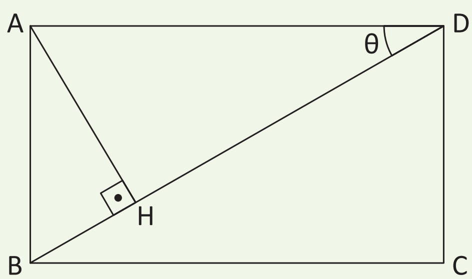
a) 3,8 tan (15°) km

b) 3,8 sen (15°) km

c) 3,8 cos (15°) km

d) 3,8 sec (15°) km

23. (IFSP) Na figura, ABCD é um retângulo em que BD é uma diagonal, AH é perpendicular a BD, $AH = 5\sqrt{3}$ cm e $\theta = 30^\circ$ A área do retângulo ABCD, em centímetros quadrados, é:



a) $100\sqrt{3}$

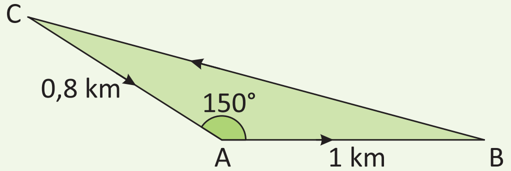
b) $105\sqrt{3}$

c) $110\sqrt{3}$

d) $150\sqrt{2}$

e) $175\sqrt{2}$

24. (UFSM) A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhora da qualidade de vida. Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura.



Quantos quilômetros ela terá caminhado, se percorrer todo o trajeto?

a) 2,29

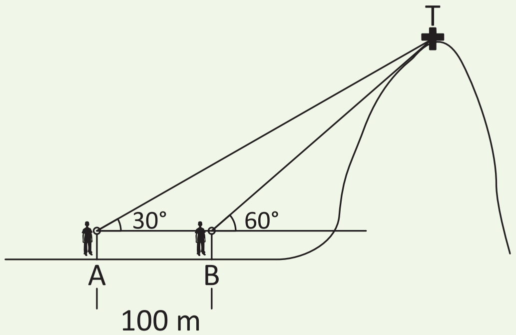
b) 2,33

c) 3,16

d) 3,50

e) 4,80

25. (UFSJ) O teodolito é um instrumento de medida de ângulos bastante útil na topografia. Com ele, é possível determinar distâncias que não poderiam ser medidas diretamente. Para calcular a altura de um morro em relação a uma região plana no seu entorno, o topógrafo pode utilizar esse instrumento adotando o seguinte procedimento: situa o teodolito no ponto A e, mirando o ponto T no topo do morro, mede o ângulo de 30° com a horizontal; desloca o teodolito 160 metros em direção ao morro, colocando-o agora no ponto B, do qual, novamente mirando o ponto T, mede o ângulo de 60° com a horizontal.



Se a altura do teodolito é de 1,5 metros, é correto afirmar que a altura do morro com relação à região plana à qual pertencem A e B é, em metros:

a) $80\sqrt{3} + 1,5$

b) $80\sqrt{3} - 1,5$

c) $\frac{160\sqrt{3}}{3} + 1,5$

d) $\frac{160\sqrt{3}}{3} - 1,5$

UM TEOREMA IMPORTANTE DECORRENTE DA LEI DOS COSSENOS

Por Cristiano Siqueira

Em geometria plana, o Teorema de Stewart relaciona as medidas dos lados de um triângulo com a medida de qualquer uma de suas cevianas.

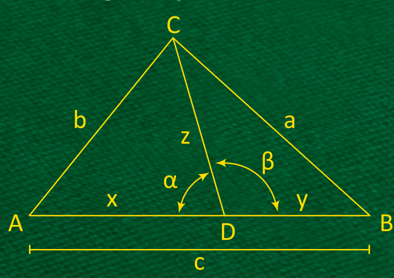
A ceviana é todo segmento de reta que possui uma de suas extremidades num vértice de um triângulo e a outra num ponto qualquer do lado oposto a esse mesmo vértice.

Esse nome vem do matemático italiano Giovanni Ceva. São exemplos de cevianas: a mediana, a bissetriz e a altura.

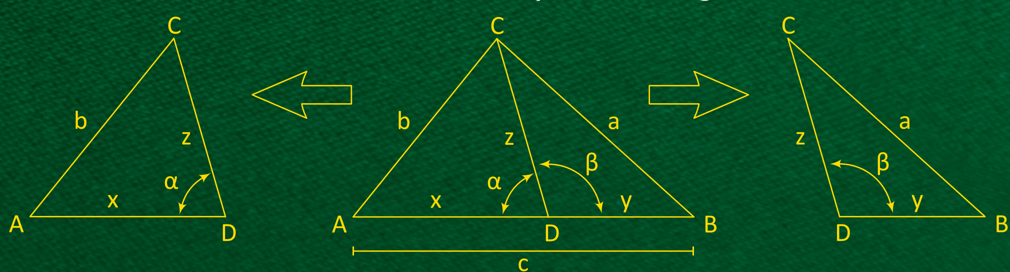
Teorema: seja um triângulo ABC qualquer, cujos lados medem a, b e c. Seja z uma ceviana que tem uma extremidade em C e outra em D. O Teorema de Stewart assegura que:

$$a^2x + b^2y - z^2c = cxy$$

Vamos à demonstração deste teorema. Considere o triângulo ABC abaixo. O segmento CD representado pela letra z é ceviana do triângulo apresentado.



A título de um melhor entendimento, vamos separar os triângulos ADC e DCB:



De acordo com os triângulos ACD e DCB, convém, de antemão, anotar que $\beta = 180^\circ - \alpha$.

Portanto, $\cos\beta = -\cos\alpha$ (I)

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ACD, temos:

$$b^2 = x^2 + z^2 - 2.x.z.\cos\alpha \text{ (II)}$$

Aplicando também a Lei dos Cossenos no triângulo DCB, ficamos na dependência de:

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2.y.z.\cos\beta \text{ (III)}$$

Substituindo (I) em (III):

$$a^2 = y^2 + z^2 + 2.y.z.\cos\alpha \;(IV)$$

Temos, portanto, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} b^2 = x^2 + z^2 - 2.x.z.\cos\alpha \;(II) \\ a^2 = y^2 + z^2 + 2.y.z.\cos\alpha \;(IV) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (II) por y e a equação (IV) por x ficamos com:

$$\begin{cases} b^2.y = x^2.y + z^2.y - 2.x.y.z.\cos\alpha \;(II) \\ a^2.x = y^2.x + z^2.x + 2.x.y.z.\cos\alpha \;(IV) \end{cases}$$

Somando as equações (II) e (IV):

$$a^2.x + b^2.y = x^2.y + y^2.x + z^2.y + z^2x \;(V)$$

Desenvolvendo a equação (V):

$$a^2.x + b^2.y = xy(x+y) + z^2.(y+x) \;(VI)$$

Assim, de acordo com a figura, x + y = c. Então podemos escrever:

$$a^2.x + b^2.y = cxy + z^2.c$$

$$\boxed{a^2x + b^2y - z^2c = cxy}$$

C.Q.D.

A360°

SISTEMA
DE ENSINO