
OBJETIVO
ITA
Matemática
Livro do Professor
2

MÓDULO 5

Números

1. **(OBM)** – A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

RESOLUÇÃO:
Para efetuar a primeira troca são necessárias 4 garrafas vazias. A partir desta, para cada nova troca basta acrescentar três novas garrafas vazias à garrafa obtida na troca anterior. Como da primeira troca sobraram 39 garrafas vazias, teremos portanto

$$\frac{39}{3} = 13 \text{ novas trocas.}$$

Assim sendo, são efetuadas quatorze trocas, obtendo-se quatorze litros de leite.
Resposta D

2. **(OBM)** – Há três cartas viradas sobre uma mesa. Sabe-se que em cada uma delas está escrito um número inteiro positivo. São dadas a Carlos, Samuel e Tomás as seguintes informações:

i) todos os números escritos nas cartas são diferentes;
ii) a soma dos números é 13;
iii) os números estão em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Primeiro, Carlos olha o número na carta da esquerda e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Em seguida, Tomás olha o número na carta da direita e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Por fim, Samuel olha o número na carta do meio e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Sabendo que cada um deles sabe que os outros dois são inteligentes e escuta os comentários dos outros, qual é o número da carta do meio?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5
e) Não há informações suficientes para determinar o número.

RESOLUÇÃO:
Se os números escritos nas cartas são inteiros, positivos, em ordem crescente e têm soma 13, eles podem ser

1	**2**	**10**	**2**	**3**	**8**
1	**3**	**9**	**2**	**4**	**7**
1	**4**	**8**	**2**	**5**	**6**
1	**5**	**7**	**3**	**4**	**6**

Se Carlos, ao olhar a primeira carta, tivesse visto 3, saberia dizer quais são os outros números. Como não pôde concluir, os números não são 3, 4 e 6, restando as possibilidades

1	**2**	**10**	**2**	**3**	**8**
1	**3**	**9**	**2**	**4**	**7**
1	**4**	**8**	**2**	**5**	**6**
1	**5**	**7**			

Se Tomás, ao olhar a terceira carta, tivesse visto 6, 9 ou 10, saberia dizer quais são os outros números. Como não pôde concluir, os números não são 1, 2 e 10, nem 1, 3 e 9 e tampouco 2, 5 e 6, restando as possibilidades

1	**4**	**8**	**2**	**3**	**8**
1	**5**	**7**	**2**	**4**	**7**

Se Samuel, ao olhar a carta do meio, tivesse visto 3 ou 5, saberia dizer quais são os outros números. Como não pôde concluir, os números não são 1, 5 e 7 e tampouco 2, 3 e 8, restando as possibilidades

1	**4**	**8**	**2**	**4**	**7**

E, portanto, o número do meio é 4.
Resposta C

3. **(OBM)** – Seja N o número inteiro positivo dado por $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (196883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de N?

RESOLUÇÃO:
A soma dos algarismos das unidades de cada uma das seqüências abaixo é 45.
$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2}$
$\mathbf{11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2}$
$\mathbf{21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2 + 30^2}$
$\vdots$
$\mathbf{(196871)^2 + (196872)^2 + \dots\dots\dots + (196880)^2}$

Existem 19688 seqüências desse tipo.
Como $(196881)^2$ termina em 1, $(196882)^2$ termina em 4 e $(196883)^2$ termina em 9, o algarismo das unidades de N é o mesmo algarismo das unidades de
19688 . 45 + 1 + 4 + 9 = 885974
Resposta: 4

4. **(OBM)** – No triminó marciano, as peças têm 3 números cada uma (diferente do dominó da Terra, no qual cada peça tem apenas 2 números). Os números no triminó marciano também variam de 0 a 6, e para cada escolha de 3 números (não necessariamente distintos), existe uma e somente uma peça que contém esses 3 números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?
a) 756 b) 1512 c) 84 d) 315 e) 900

RESOLUÇÃO:
Vamos contar quantas são as ocorrências de um determinado número (por exemplo, 6). Há 1 peça em que o 6 aparece 3 vezes, 6 em que ele aparece 2 vezes, e 21 em que ele aparece 1 vez (ele aparece em 6 peças acompanhado por dois números iguais e em $C_{6,2}$ = 15 peças acompanhado por dois outros números). Logo, o 6 ocorre 3 . 1 + 2 . 6 + 1 . 21 = 36 vezes. Logo, a soma dos números de todas as peças é 36(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 756 (opção A).
Resposta: A

MÓDULO 6

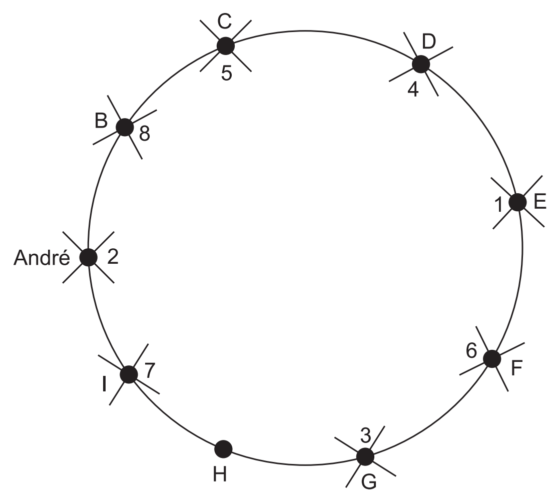
Números (continuação)

1. Se 1 de maio de um certo ano é uma terça-feira, que dia da semana será 1 de janeiro do ano seguinte?

RESOLUÇÃO:
De primeiro de maio de um ano a primeiro de janeiro do ano seguinte transcorrem:
a) 30 dias em maio
b) 30 dias em cada um dos meses de junho, setembro e novembro
c) 31 dias em cada um dos meses de julho, agosto, outubro e dezembro
d) o próprio 1 de janeiro
Assim transcorrem 4 . 30 + 4 . 31 + 1 = 245 dias
Como 245 é múltiplo de 7, 1 de janeiro do ano seguinte ocorrerá no mesmo dia da semana que ocorreu 1 de maio, portanto, terça-feira.

2. Nove alunos da escola estão dispostos em círculo. Para escolherem um chefe de jogo contam até 5 a partir de um deles, no sentido dos ponteiros do relógio, e o quinto sai do círculo. Depois contam novamente até 5 a partir do seguinte, e o quinto sai do círculo, e assim sucessivamente. O último a ficar no círculo será o chefe.
André é quem conta e quer aproveitar-se disso para ser o chefe. Designemos os seus colegas por B, C, D, E, F, G, H, I, no sentido dos ponteiros do relógio.
A partir de quem deve André começar a Contar?
(100 jogos numéricos – Pierre Berloquin)

RESOLUÇÃO:
Admitindo que André comece a contagem por ele mesmo, os amigos serão eliminados na ordem E, A, G, D, C, F, I, B, ficando por último o amigo H, como se pode ver na figura abaixo, onde os números representam a ordem em que os amigos são eliminados.



Observe que o amigo que sobrou está duas posições antes do André, portanto, para que André seja o chefe é necessário começar a contar por C.

3. A soma dos algarismos representados pelos asteriscos na multiplicação seguinte:
$***4** \times 7 = 6743*56$ é:
a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35
(100 jogos numéricos – Pierre Berloquin)

RESOLUÇÃO:
7 multiplicado pelo primeiro algarismo da direita resulta em um número terminado em *6*, portanto, este algarismo só pode ser 8.
Assim temos:
$***4*8 \times 7 = 6743*56$
Como $8 \times 7 = 56$ e o resultado da multiplicação termina em 56, o algarismo das dezenas do primeiro número é *zero*.
Desta forma ficamos com
$***408 \times 7 = 6743*56$
Refazendo a multiplicação obtém-se que o algarismo das centenas do resultado é 8. O resultado é, portanto, 6743856, que dividido por 7 resulta em 963408. A multiplicação proposta é
$963408 \times 7 = 6743856$. A soma dos algarismos representados pelos asteriscos é $9 + 6 + 3 + 0 + 8 + 8 = 34$.

4. **(IME)** – Seja N um número inteiro de 5 algarismos. O número P é construído agregando-se o algarismo 1 à direita de N e o número Q é construído agregando-se o algarismo 1 à esquerda de N. Sabendo-se que P é o triplo de Q, o algarismo das centenas do número N é:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

RESOLUÇÃO:
Seja N = abcde o número inteiro considerado. Agregando-se 1 à direita de N, temos:
P = abcde1 = abcde0 + 1 = 10N + 1
Agregando-se 1 à esquerda de N, temos:
Q = 1abcde = 100000 + abcde = 100000 + N
Como P = 3Q, temos:
$10N + 1 = 3 \cdot (100000 + N) \Rightarrow 7N = 299999 \Rightarrow N = 42857$
Resposta: E

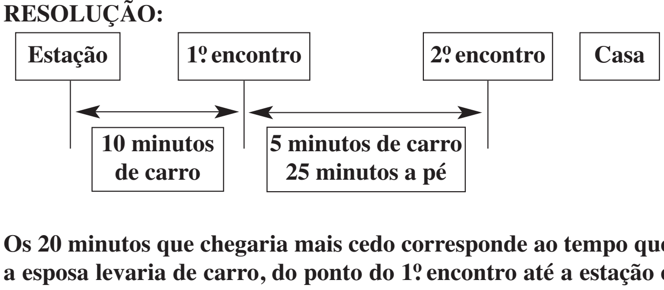
MÓDULO 7

Números (continuação)

1. (OBM) – Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

RESOLUÇÃO:
Todo ano, bissexto ou não, possui 52 semanas
(pois, $365 = 52 \times 7 + 1$ ou $366 = 52 \times 7 + 2$). Desta forma, dependendo de que dia da semana o ano começou, o ano tem 52 ou 53 domingos. Cada mês têm entre quatro e cinco domingos. Desta forma, como $53 = 12 \times 4 + 5$, no máximo cinco meses poderá ter cinco domingos.
Resposta C

2. Todos os dias, à mesma hora, depois do trabalho, Timóteo toma o comboio para os subúrbios, onde mora. Na estação espera-o a mulher para o levar de carro para casa. Um dia, sem avisar a mulher, Timóteo apanhou a comboio mais cedo do que o habitual e resolveu ir andando a pé para casa. Cruzou-se com a mulher, que, infelizmente, não o viu, senão teria chegado 20 minutos mais cedo do que o costume. E continuou a caminhar durante 25 minutos. Nesse momento a mulher, não o tendo visto no comboio, deixa imediatamente a estação e consegue alcançá-lo. Entra para o carro e chega a casa à hora habitual. Supõe-se que a mulher de Timóteo conduz a velocidade constante nos dois sentidos. Os tempos mortos são nulos. Que adiantamento trazia o comboio apanhado nesse dia por Timóteo sobre o comboio habitual? (do livro 100 jogos numéricos de Pierre Berloquin)

RESOLUÇÃO:


Os 20 minutos que chegaria mais cedo corresponde ao tempo que a esposa levaria de carro, do ponto do 1º encontro até a estação e voltar a esse ponto de encontro, uma vez que daí para a casa seguiria de carro, como sempre o faz. Assim, do 1º encontro a estação a esposa leva 10 minutos, tempo necessário para a chegada do comboio habitual. Durante os 25 minutos seguinte sua esposa gastou 10 minutos para chegar à estação, 10 minutos para ir da

estação ao primeiro encontro e 5 minutos do 1º para o 2º encontro. O que Timóteo percorreu em 25 minutos sua esposa gastou apenas 5 minutos, portanto a velocidade de Timóteo é um quinto da velocidade do carro.
Desta forma, da estação ao 1º encontro Timóteo caminho durante 50 minutos e neste momento faltam 10 minutos para a chegada do comboio habitual. O primeiro comboio chegou, portanto 50 + 10 = 60 minutos antes.

3. **(OBM)** – Qual é o maior valor da soma dos algarismos da soma dos algarismos de um número de três algarismos?
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

RESOLUÇÃO:
O menor número de três algarismos é 100. O maior é 999. A soma dos algarismos desses números varia no intervalo de 1 a 27. A soma dos algarismos dos números de 1 a 27 varia no intervalo de 1 a 10, como se pode ver na tabela seguinte:

Número	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Soma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Número	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Soma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Número	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
Soma	**10**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Resposta: D

4. **(OBM)** – Qual é o menor inteiro positivo n para o qual qualquer subconjunto de n elementos de {1,2,3,…,20} contém dois números cuja diferença é 8?
a) 2 b) 8 c) 12 d) 13 e) 15

RESOLUÇÃO:
Considere as sequências (1, 9, 17); (2, 10, 18); (3, 11, 19); (4, 12, 20); (5, 13); (6, 14); (7, 15) e (8, 16) cuja diferença entre dois elementos seguidos é 8. Escolhendo-se um elemento de uma dessas sequências e outro elemento de outra dessas sequências a diferença entre eles nunca será 8. Das quatro primeiros podemos tomar no máximo 2 elementos cuja diferença não é 8 (por exemplo 1 e 17 ou 2 e 18) e dos demais no máximo 1. Logo o número máximo de elementos que se pode escolher entre 1 e 20 de modo a não haver dois números cuja diferença é 8 é 4 × 2 + 4 × 1 = 12. Por exemplo o conjunto {1, 17, 2, 18, 3, 19, 4, 20, 5, 6, 7, 8}. Assim, o menor valor de n para que qualquer subconjunto com n elementos contenha dois números cuja diferença é 8, é 13.
Resposta: D.

5. **(OBM)** – Com três algarismos distintos a, b e c, é possível formar 6 números de dois algarismos distintos. Quantos conjuntos {a, b, c} são tais que a soma dos 6 números formados é 484?
a) Um b) Dois c) Três
d) Quatro e) Mais que quatro

RESOLUÇÃO:
Quando se escreve um número de dois algarismos o que se está escrevendo é, na verdade, uma soma. Assim, por exemplo, o número 37 equivale a soma 3 . 10 + 7 e o número "ab" equivale a soma 10 . a + b. Com os algarismos do conjunto {a, b, c} é possível formar os números "ab", "ba", "ac", "ca", "bc" e "cb". A soma desses números é "ab" + "ba" + "ac" + "ca" + "bc" + "cb" =
= (10 . a + b) + (10 . b + a) + (10 . a + c) + (10 . c + a) +
+ (10 . b + c) + (10 . c + b) = 22 . (a + b + c) = 484 ⇔ a + b + c = 22
Sendo a, b e c algarismos distintos, e supondo, sem perdas de generalidades, que a < b < c, podemos ter (a = 6, b = 7 e c = 9) ou (a = 5, b = 8 e c = 9). Assim, os possíveis conjuntos {a, b, c} são {6, 7, 9} e {5, 8, 9}.
Resposta: B

MÓDULO 8

Números (continuação)

1.

a) Prove que $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n.(n+1)}$

b) Calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{99.100}$$

RESOLUÇÃO:

a) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-n}{n.(n+1)} = \dfrac{1}{n.(n+1)}$

b) $\dfrac{1}{n.(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2.3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3.4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4.5} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{1}{99.100} = \dfrac{1}{99} - \dfrac{1}{100} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \Rightarrow S = \frac{99}{100} = 0{,}99$$

2. Demonstre que se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

3. **(IME)** – Sejam a, b e c números reais não nulos. Sabendo que $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\dfrac{a+b}{c}$.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} =$$

$$= \frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{c+a+b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Resposta: 2

4.

a) Prove ser múltiplo de 7 o número 111111

b) Verifique se é múltiplo de 7 o número $10^{2010} - 1$

RESOLUÇÃO:

a)
```
111111 |_7____
  41     15873
   61
    51
     21
      0
```

b) **Todo número composto de uma quantidade múltipla de seis de algarismos 1 é múltiplo de 7, pois é da forma**

**$111111 \,.\, 10^k + 111111 \,.\, 10^{k-6} + 111111 \,.\, 10^{k-12} +$
$+ \ldots + 111111 \,.\, 10^0$ com k múltiplo de 6.**

Por exemplo, $\underbrace{111\ldots1}_{\text{18 algarismos 1}}$ é múltiplo de 7, pois é da forma

$111111 \,.\, 10^{12} + 111111.10^6 + 111111.10^0$

Também são múltiplos de 7 todos números da forma 999...9, com uma quantidade múltipla de *seis* de algarismos 9, pois é da forma 9 x 111...1, com o algarismo *1* aparecendo uma quantidade múltipla de *seis*.

Desta forma, $10^{2010} - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{\text{2010 algarismos 9}}$ é múltiplo de 7, pois 2010 é múltiplo de *seis*.

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 5

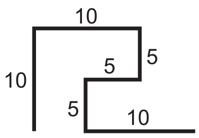
1. **(IME)** – Um homem nascido no século XX diz a seguinte frase para o filho: "seu avô paterno, que nasceu trinta anos antes de mim, tinha x anos no ano x^2". Em consequência, conclui-se que o avô paterno nasceu no ano de:

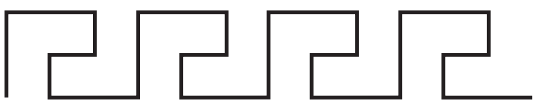
a) 1892 b) 1898 c) 1900 d) 1936 e) 1942

2. Se as semanas tivessem apenas quatro dias (segunda, terça, quarta e quinta) e 1º de maio de um certo ano é uma terça-feira, que dia da semana será 1º de janeiro do ano seguinte?

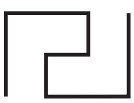
■ MÓDULO 6

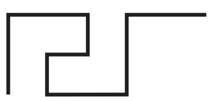
1. **(OBM)** – Um serralheiro solda varetas de metal para produzir peças iguais que serão juntadas para formar o painel abaixo. O desenho ao lado apresenta as medidas, em centímetros, de uma dessas peças. O serralheiro usa exatamente 20 metros de vareta para fazer o seu trabalho.

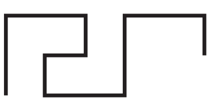


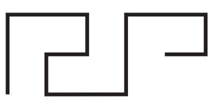


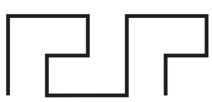
Qual dos desenhos abaixo representa o final do painel?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2. Qual o algarismo das unidades de
$N = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 2010^3$?

■ MÓDULO 7

1. **(OBM)** – Um feirante vende batatas e, para pesar, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de 1 kg, um peso de 3 kg e um peso de 10 kg. Considere a seguinte afirmação: "Este feirante consegue pesar (com uma pesagem) n quilogramas de batatas". Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?

a) 7 b) 10 c) 12 d)13 e)14

2. Com quatro algarismos distintos a, b, c e d, é possível formar 12 números de dois algarismos distintos. Se a soma desses 12 números é 429, qual o maior número possível de se formar com estes algarismos, sem repeti-los?

a) 5431 b) 6521 c) 7321 d) 8532 e) 9310

■ MÓDULO 8

1. a) Prove que $\dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{2}{n.(n+2)}$

b) Calcule a soma

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots + \frac{1}{9999}$$

2. Se $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{b+c}{b} = \dfrac{a+c}{c}$, qual o valor da fração $\dfrac{a}{a-b+c}$?

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 5

1) 1) Se o homem nasceu no século XX, nasceu entre 1901 e 2000.

2) Seu avô, que nasceu 30 anos antes, nasceu entre 1871 e 1970.

3) O ano em que seu avô completou *x* anos é um quadrado perfeito, pois é x^2. No intervalo de 1871 a 1970, o único quadrado perfeito é 1936 (quadrado de 44), pois $43^2 = 1849$, $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$.

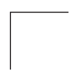
4) Se em 1936 seu avô completou 44 anos, então nasceu em 1936 – 44 = 1892 e, neste caso, o homem nasceu em 1892 + 30 = 1922.

Resposta: A

2) De 1º de maio de um certo ano até 1º de janeiro do ano seguinte são transcorridos 245 dias, ou seja, 61 semanas completas e mais um dia
(pois 245 = 4 x 61 + 1). Portanto, 1º de janeiro do ano seguinte é uma quarta feira.

■ MÓDULO 6

1) Para confeccionar a peça do destaque o serralheiro utiliza 45 cm de vareta. Com 20 metros (2000 cm) o serralheiro pode confeccionar 44 peças completas e ainda lhe sobram 20 cm de varetas
(pois $2000 = 44 \times 45 + 20$). Com os 20 cm que sobram o serralheiro pode confeccionar a peça abaixo. Desta forma, o final do painel é o da alternativa B.



Resposta: B

2) A soma dos algarismos de cada uma das sequências abaixo

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$

$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 + 15^3 + 16^3 + 17^3 + 18^3 + 19^3 + 20^3$

$21^3 + 22^3 + 23^3 + 24^3 + 25^3 + 26^3 + 27^3 + 28^3 + 29^3 + 30^3$

....

....

$2001^3 + 2002^3 + 2003^3 + 2004^3 + 2005^3 + 2006^3 +$
$+ 2007^3 + 2008^3 + 2009^3 + 2010^3$

é 1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 0 = 45
O valor de N é a soma dessas 201 sequências e a soma dos algarismos das unidades é $201 \times 45 = 9045$. Desta forma, o algarismo das unidades de N é 5.

■ MÓDULO 7

1)
a) Usando 1 peso, temos 3 possibilidades: 1, 3 e 10;
b) Colocando dois pesos num único prato, temos as seguintes possibilidades:
1 + 3 = 4; 1 + 10 = 11; 3 + 10 = 13;
c) Colocando três pesos num prato, pesamos
1 + 3 + 10 = 14;
d) Colocando um peso em cada prato temos:
3 – 1 = 2; 10 – 1 = 9; 10 – 3 = 7;
e) Colocando dois pesos num prato e um peso no outro, temos:
10 – (1 + 3) = 6; (10 + 1) – 3 = 8; (10 + 3) – 1 = 12

Os valores de n são: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (treze valores)
Resposta: D

2) Com os algarismos do conjunto {a, b, c, d} é possível formar os números “ab”, “ba”, “ac”, “ca”, “ad”, “da”, “bc”, “cb”, “bd”, “db”, “cd” e “dc”. Se todos são de dois algarismos, $a.b.c.d \neq 0$. A soma desses números é
“ab” + “ba” + “ac” + “ca” + “ad” + “da” + “ bc” +
+ “cb” + “bd” + “db” + “cd” + “dc” =
$= (10 . a + b) + (10 . b + a) + (10 . a + c) + (10 . c + a) +$
$+ (10 . a + d) + (10 . d + a) + (10 . b + c) + (10 . c + b) +$
$+ (10 . b + d) + (10 . d + b) + (10 . c + d) + (10 . d + c) =$
$= 33 . (a + b + c + d) = 429 \Leftrightarrow a + b + c + d = 13$
Sendo a, b, c e d algarismos distintos, e supondo, sem perdas de generalidades, que $a < b < c < d$, podemos ter (a = 1, b = 2, c = 3 e d = 7) ou (a = 1 , b = 2, c = 4 e d = 6) ou ainda (a = 1, b = 3, c = 4 e d = 5). Assim, o maior número possível de se formar com os algarismos a, b, c e d é 7321.
Resposta: B

■ MÓDULO 8

1) a) $\dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n-1}{n} =$

$$= \frac{(n+1) . n - (n-1) . (n+2)}{n . (n+1)} =$$

$$= \frac{(n^2 + n) - (n^2 + 2n - n - 2)}{n . (n+2)} = \frac{2}{n.(n+2)}$$

b) Pela igualdade do item (a) temos:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} - \dfrac{0}{1} = \dfrac{2}{1.3} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3.5} = \dfrac{2}{15} \\ \dfrac{6}{7} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5.7} = \dfrac{2}{35} \\ \dfrac{8}{9} - \dfrac{6}{7} = \dfrac{2}{7.9} = \dfrac{2}{63} \\ \quad \vdots \\ \dfrac{100}{101} - \dfrac{98}{99} = \dfrac{2}{99.101} = \dfrac{2}{9999} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{101} - \frac{0}{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \ldots + \frac{2}{9999} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{101} = 2 \,.\, S \Leftrightarrow S = \frac{50}{101}$$

Respostas: a) Demonstração **b)** $S = \frac{50}{101}$

2) $\frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a+c}{c} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} \frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a+c}{c} = \frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{a+b+c} = \frac{2.(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \\ \frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a+c}{c} = \frac{(a+b)-(b+c)+(a+c)}{a-b+c} = \frac{2.a}{a-b+c} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \frac{2\,.\,a}{a-b+c} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{a-b+c} = 1$$

Resposta: 1