ELIPSE

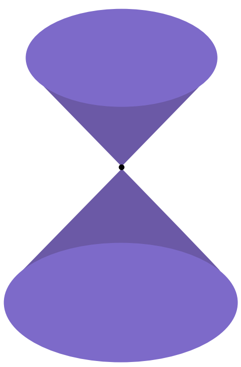
Elipse é uma figura estudada em geometria analítica sendo uma das cônicas que está presente na matemática.

INTRODUÇÃO DAS CÔNICAS

Os planetas e suas dinâmicas são estudados desde antes de 350 a.C, quando Aristóteles propôs que a terra era o centro do universo e outras esferas girando em torno dela. Surge então a primeira teoria matematizada sobre a dinâmica dos planetas, desenvolvida por Ptolomeu no século II d.C., no qual a terra era o centro do universo e os planetas orbitavam em seus próprios círculos cujos centro estava sobre o círculo da terra, os epiciclos. Este modelo ficou conhecido como *Geocêntrico* e se perpetuou ao longo de séculos.

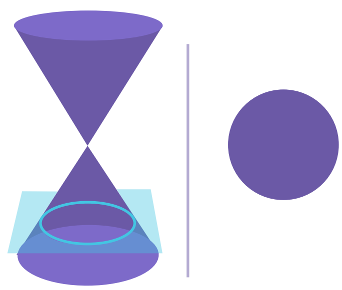
Foi então que Copérnico, cerca de 1.200 anos depois, propôs um modelo em que a terra não fosse o centro do universo, mas sim o sol. Contudo, ele ainda propunha a mesma dinâmica proposta por Ptolomeu. Esse modelo recebeu o nome de Heliocêntrico.

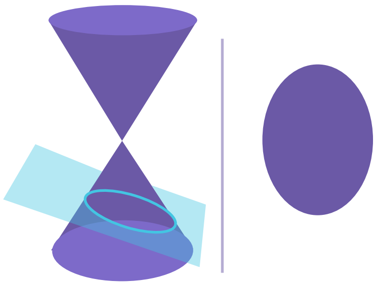
A dinâmica planetária teve seu “capítulo final” com o alemão Johannes Kepler. A sua grande contribuição a esse modelo foi observar que as órbitas não eram formadas por movimentos circulares, com formato semelhante a esse, mas ainda assim diferente. O movimento descrito era tinha um formato conhecido como **Elipse**. Conclui então o modelo heliocêntrico utilizado até os dias atuais, tendo o sol como centro do nosso sistema e as órbitas planetárias com formatos elípticos.



Como vimos no início tópico, algumas formas geométricas foram utilizadas incessantemente com o objetivo de desbravar o espaço e ainda são. Podemos ter órbitas circulares ou elípticas, assim como outras duas, parabólicas e hiperbólicas, que serão discutidas posteriormente. Todas elas surgiram de uma mesma construção. Para obtê-las partimos de um cone simples ou duplo, aqui utilizaremos um cone duplo conforme a figura ao lado.

Se cortamos esse cone duplo com um plano paralelo à base, conforme a imagem seguinte, teremos uma **circunferência**. Já estudamos sobre as características da circunferência em capítulos anteriores. Ela é o lugar geométrico constituído por todos os pontos que estão a uma mesma distância de seu centro.





Se o plano cortar o cone duplo com uma inclinação de modo que ele entre pela lateral e sai pela lateral, não passando pela base ou pelo topo, teremos uma **elipse**. A elipse será a próxima figura geométrica que iremos estudar. Elipse é o lugar geométrico composta por um conjunto de pontos cuja a soma das distâncias entre qualquer um destes pontos e os focos da elipse é sempre um mesmo, ou seja, é um valor constante. Não se preocupe, vamos explorar melhor essa ideia.

Se o plano cortar o cone duplo por uma das laterais e sair pela base ou pelo topo, obteremos uma **parábola**. É o lugar geométrico constituído por todos os pontos que são equidistantes à uma reta e um ponto fixo, simultaneamente.

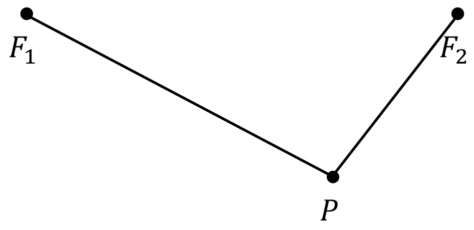
Por fim, mas não menos importante, podemos realizar um corte de modo que o plano entre pela base e saia pelo topo, ou vice-versa. De qualquer forma, esse corte nos concederá uma nova forma geométrica chamada de **hipérbole**. Hipérbole é lugar geométrico dos pontos cuja a diferença em módulo da distância entre qualquer ponto e os focos é sempre a mesma. Todas essas formas geométricas são conhecidas como seções cônicas ou simplesmente cônicas.

ELIPSE

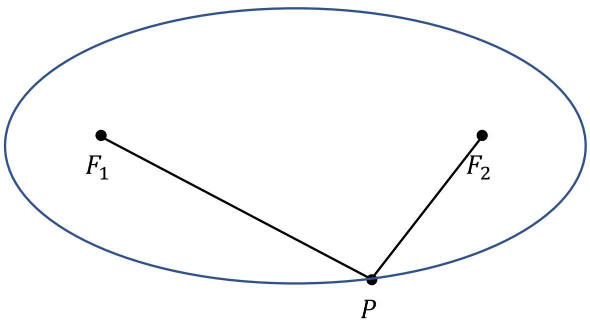
Elipses são formas geométricas cuja a soma das distâncias entre um ponto e os focos é sempre a mesma. Aqui podemos elencar dois elementos que estarão presentes no estudo de elipses: focos e distância. Para realizar a construção de uma elipse iniciamos com dois pontos, aos quais chamaremos de focos F_1 e F_2.

Podemos afirmar que sempre é possível escolher um número real positivo r de modo que r seja maior que a distância entre os focos F_1 e F_2 , ou seja, d(F_1, F_2)< r. Vamos considerar agora um ponto P qualquer de modo que a distância entre P e F_1 mais a distância entre P e F_2 seja igual ao valor do r escolhido. Algebricamente e geometricamente falando:

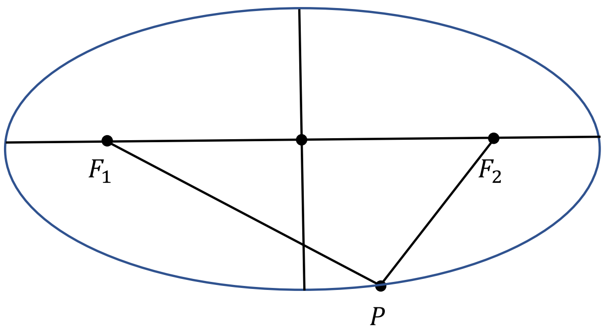
$$d(F_1,P)+d(F_2,P)=r$$



Todos os pontos que satisfazerem essa equação compõe a elipse de focos F_1 e F_2. Após encontrarmos todos os pontos que satisfazem a equação chegamos no seguinte resultado:



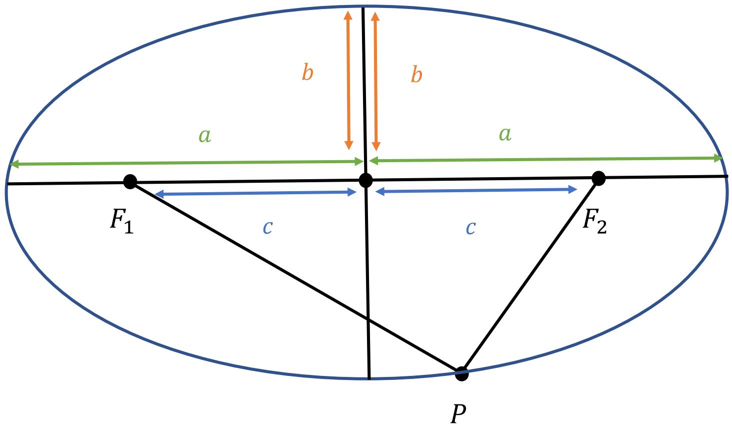
Por fim, construímos dois eixos: um passando pelos focos e indo até a extremidade da elipse e outro passando no ponto médio dos focos.



Você pode realizar essa construção com isopor (ou papelão), palitos de dente, barbante e uma caneta. Basta posicionar os palitos de dente como sendo os focos e pegar um pedaço de barbante maior do que a distância entre os palitos. Em seguida amarrar as pontas do barbante nos palitos de dente e posicionar a caneta como sendo o ponto o ponto P e finalizar fazendo uma rotação de 360°.

ELEMENTOS DA ELIPSE

Agora que construímos nossa elipse, vamos conhecer alguns de seus elementos. O primeiro elemento é o eixo maior que consiste no segmento de reta que contém os focos e tem início e fim nas extremidades da elipse. Esse eixo possui tamanho $2a$ e é chamado **eixo maior** onde o valor de a corresponde à metade do tamanho do segmento que contém os focos, conforme ilustrado abaixo. O segundo elemento é o **eixo menor** cujo tamanho mede $2b$, no qual b corresponde à metade do tamanho do segmento que passa pelo ponto médio e não contém os focos. O terceiro elemento é a **distância focal** que como o próprio nome já indica, consiste na distância entre os focos, cujo tamanho é $2c$.



Legenda

$2a$ – Eixo maior

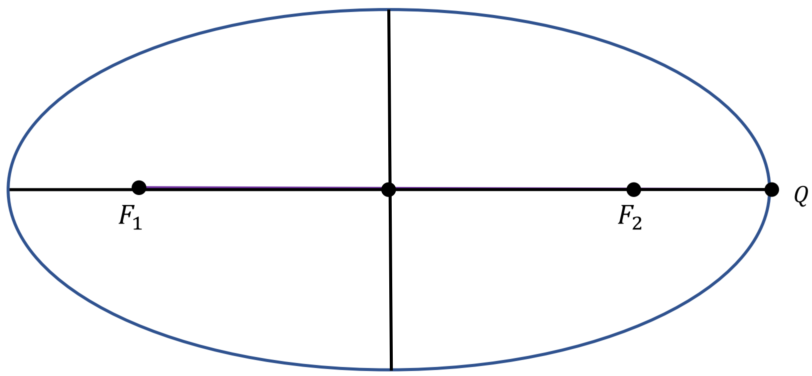
$2b$ – Eixo menor

$2c$ – Distância focal

$F1$ e $F2$ – Focos

P – Ponto da elipse

Sabendo dos elementos da elipse, veja a seguir o ponto Q sobre a extremidade do eixo maior da elipse de focos F_1 e F_2:



Pela relação que vimos anteriormente, $d(F_1,Q)+d(F_2,Q)=r$. Porém, sabemos que a distância de F_1 até Q é a soma da distância do centro até o foco (c) e a distância do centro até a extremidade do eixo maior *(a)*, ou seja, $d(F_1,Q)=a+c$. Além disso, a distância de F_2 até Q é a diferença entre a distância do centro à extremidade do eixo maior (a) com a distância do centro até os focos *(c)*, isto é, $d(F_1,Q)=a\text{-}c$. Sendo assim, r pode ser expresso como:

$$d(F_1,Q)+d(F_2,Q)=r$$

$$(a+c)+(a-c)=r$$

$$2a=r$$

Então a relação final fica como $d(F_1,Q)+d(F_2,Q)=2a$, ou seja, **a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse até os focos é igual a medida do eixo maior da elipse**.

Existe uma outra relação que usamos recorrentemente que também será útil aqui:

$$a^2=b^2+c^2$$

E pode ser entendida como: “O quadrado da metade do eixo maior é igual à soma entre o quadrado da metade do eixo menor com o quadrado da metade da distância focal”.

EXCENTRICIDADE

Um último conceito importante para as cônicas é a excentricidade. Cada cônica possuí excentricidade bem definida, podendo ser obtida pela relação:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

Em outras palavras, é a razão entre a distância focal e o eixo maior. Perceba que, no caso da elipse, a distância focal é sempre menor que o eixo maior. Logo, o valor de $0<e<1$. Quando o valor de $e=0$, temos uma circunferência. Os casos $e=1$ e $e>1$ serão estudados posteriormente. No fim, Ptolomeu não estava tão equivocado, pois a excentricidade das órbitas dos planetas é próxima de 0, logo se assemelham a circunferências.

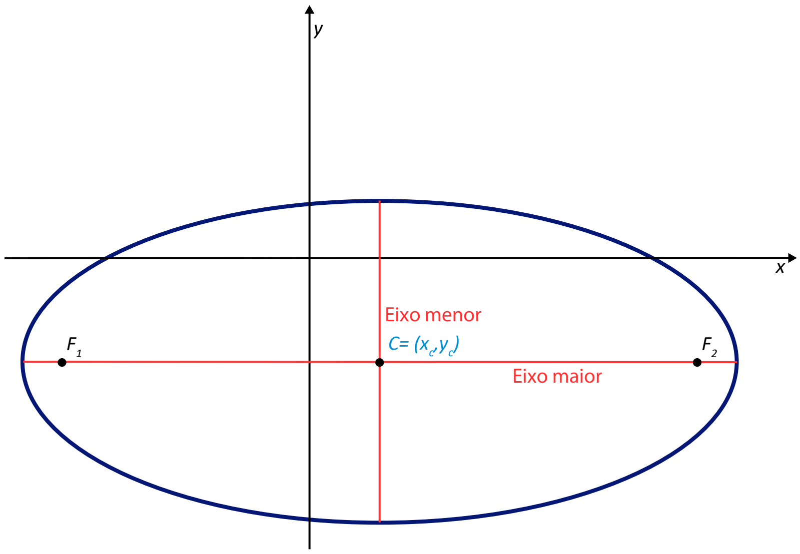
EQUAÇÃO DA ELIPSE

Toda discussão realizada até o momento, não se fez necessário uma análise mais analítica, pois não precisamos calcular a distância que define a elipse, mas agora será necessário e iremos recorrer ao plano cartesiano. Primeiro ponto a se observar é que, ao construirmos uma elipse no plano cartesiano, podemos ter duas perspectivas: 1ª) o eixo maior pode estar na horizontal, podendo estar sobre o eixo x ou ser paralelo à ele; 2ª) o eixo maior pode estar na vertical, podendo estar sobre o eixo y ou ser paralelo à ele.

- **1ª caso:** A equação da elipse quando o eixo maior está na horizontal é:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1,$$

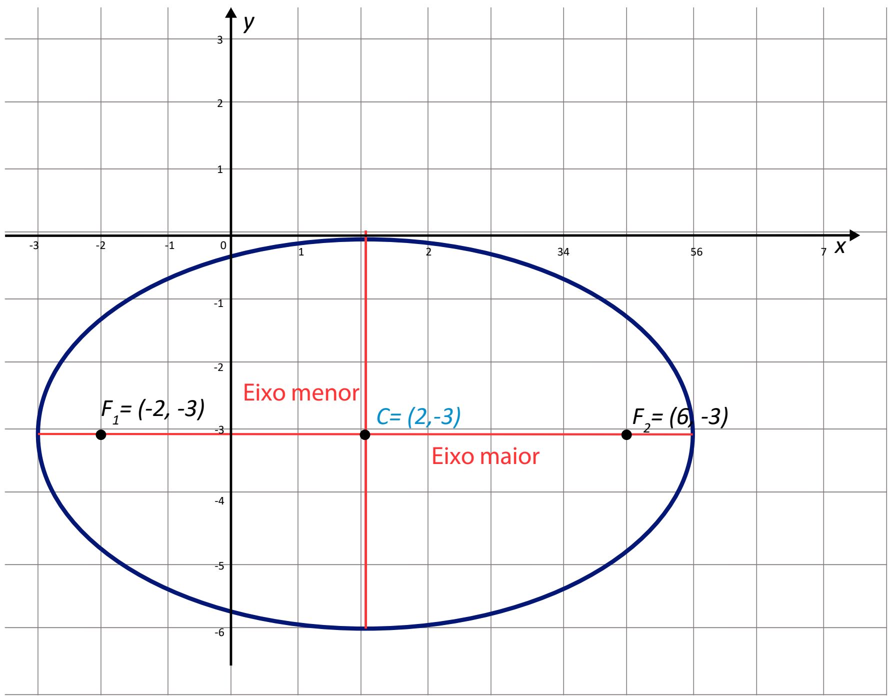
com x_c e y_c sendo as coordenadas do centro $C=(x_c,y_c)$, correspondente ao ponto médio entre focos.



Por exemplo, para a equação:

$$\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

Temos que o centro é $C=(2,-3)$, os focos são $F_1=(-2,-3)$ e $F_2=(6,-3)$. Note que para obter os valores a e b precisamos identificar os pontos extremos dos eixos maior e menor. Com o auxílio da representação geométrica no plano cartesiano, podemos observar que os vértices do eixo maior são $A_1=(-3,-3)$ e $A_2=(7,-3)$. Já os pontos extremos do eixo menor são $B_1=(2,0)$ e $B_2=(2,-6)$. Logo, temos que:



Eixo maior:

$$d(A_1, A_2)=\sqrt{(-3-7)^2+(-3-(-3))^2}=\sqrt{(10^2+(0)^2)}=\sqrt{100}=10$$

$$d(A_1, A_2)=10=>2a=10$$

Eixo menor:

$$d(B_1, B_2)=\sqrt{((2-2)^2+(0-(-6))^2)}=\sqrt{(0^2+6^2)}=\sqrt{36}=6$$

$$d(B_1, B_2)=6=>2b=6$$

Para encontrarmos a distância focal podemos fazer de duas maneiras distintas $d(F_1, F_2)$ ou utilizar a relação $a^2=b^2+c^2$. Utilizaremos a relação para encontrar o valor de c, mas fica de prática calcular a distância entre os focos.

$$a^2=b^2+c^2$$

$$5^2=3^2+c^2$$

$$5^2-3^2=c^2$$

$$c^2=25-9=16$$

$$c^2=16$$

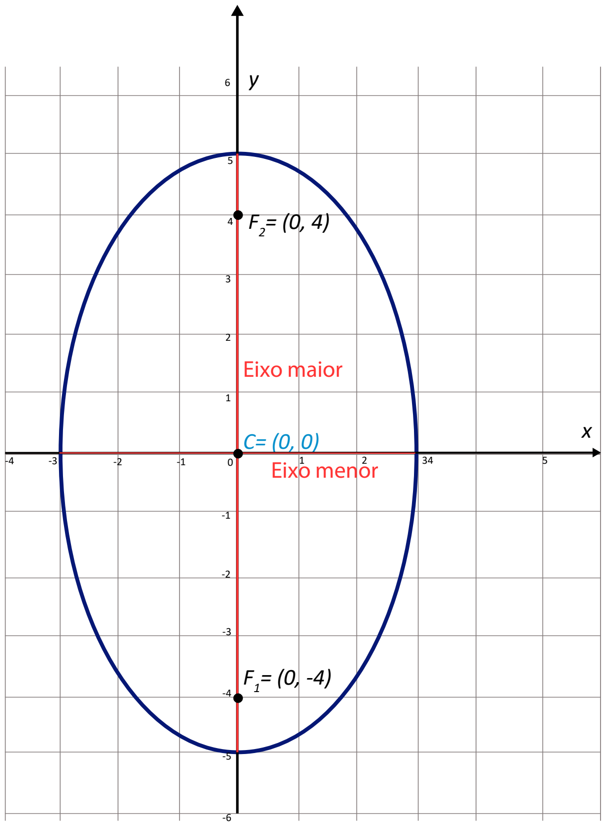
$$c=\pm 4$$

Portanto a distância focal será $2c=8$.

- **2ª caso:** A equação da elipse quando o eixo maior está na vertical é:

$$\frac{(x-x_c)^2}{b^2}+\frac{(y-y_c)^2}{a^2}=1,$$

No exemplo abaixo temos a elipse de equação $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1,$ no qual o eixo maior está na vertical sobre o eixo y e com centro na origem. Nada muda na maneira de encontrar os valores de a, b e c.



Uma curiosidade acerca das propriedades da elipse é relacionada à acústica. Construções elípticas possuem a propriedade de que ao ser produzido sons em um dos focos, quando o som "toca" na parede ele é redirecionado para o outro foco.

ANOTAÇÕES