Quarta-feira, 7 de julho de 2010

Problema 1. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

para todos os números $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ designa o maior inteiro que é menor ou igual a z.)

Problema 2. Seja ABC um triângulo, I o seu incentro e Γ a sua circunferência circunscrita. A recta AI intersecta novamente Γ no ponto D. Sejam E um ponto do arco $\widehat{BDC}$ e F um ponto do lado BC tais que

$$B\hat{A}F = C\hat{A}E < \tfrac{1}{2} B\hat{A}C.$$

Seja G o ponto médio do segmento IF. Mostre que as rectas DG e EI se intersectam sobre Γ.

Problema 3. Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos inteiros positivos. Determine todas as funções $g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tais que

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

é um quadrado perfeito para todos $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Quinta-feira, 8 de julho de 2010

Problema 4. Seja Γ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC e P um ponto no interior do triângulo. As rectas AP, BP e CP intersectam novamente Γ nos pontos K, L e M, respectivamente. A recta tangente a Γ em C intersecta a recta AB em S. Supondo que $SC = SP$, mostre que $MK = ML$.

Problema 5. Em cada uma de seis caixas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ há inicialmente só uma moeda. Dois tipos de operações são possíveis:

Tipo 1: Escolher uma caixa não vazia B_j, com $1 \leq j \leq 5$. Retirar uma moeda de B_j e adicionar duas moedas a B_{j+1}.

Tipo 2: Escolher uma caixa não vazia B_k, com $1 \leq k \leq 4$. Retirar uma moeda de B_k e trocar os conteúdos das caixas (possivelmente vazias) B_{k+1} e B_{k+2}.

Determine se existe uma sucessão finita destas operações que deixa as caixas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vazias e a caixa B_6 com exactamente $2010^{2010^{2010}}$ moedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sucessão de números reais positivos. Sabe-se que para algum inteiro positivo s,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \text{ tal que } 1 \leq k \leq n-1\}$$

para todo $n > s$. Mostre que existem inteiros positivos ℓ e N, com $\ell \leq s$, tais que $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ para todo $n \geq N$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos