

Canguru Brasil 2013 – Nível S

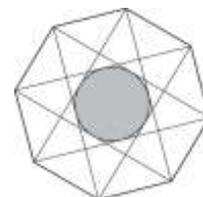
Problemas de 3 pontos

01. Qual dos números a seguir é o maior?

- (A) 2 013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$

02. O octógono regular da figura tem lados de medida 10. Qual é o raio da circunferência inscrita no menor octógono regular formado pelas diagonais?

- (A) 10 (B) 7,5 (C) 5 (D) 2,5 (E) 2



03. Um prisma tem um total de 2013 faces. Quantas arestas tem esse prisma?

- (A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033

04. Qual é a raiz cúbica do número 3^{3^3} ?

- (A) 3^3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} (D) 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

05. O ano 2013 tem seu número formado por 4 algarismos consecutivos: 0, 1, 2 e 3. Antes disso houve anos com esta mesma propriedade. Quantos anos se passaram desde a última vez que um ano foi formado por 4 algarismos consecutivos?

- (A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

06. Seja f a função linear para a qual $f(2013) - f(2001) = 100$. Qual é o valor de $f(2031) - f(2013)$?

- (A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

07. Seja x um número real tal que $2 < x < 3$. Quantas das desigualdades a seguir se verificam?

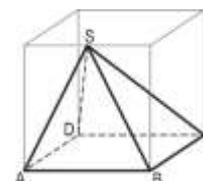
$$4 < x^2 < 9 \quad 4 < 2x < 9 \quad 6 < 3x < 9 \quad 0 < x^2 - 2x < 3$$

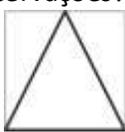
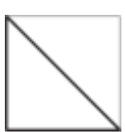
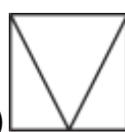
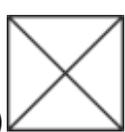
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

08. Seis super-heróis capturam 20 bandidos, sendo que, para cada bandido, é necessário apenas um super-herói para capturá-lo. O primeiro super-herói captura um bandido, o segundo captura dois bandidos e o terceiro captura três. O quarto super-herói captura mais bandidos que qualquer um dos outros cinco. Pelo menos quantos bandidos o quarto super-herói deve ter capturado?

- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

09. Vê-se dentro de um cubo uma pirâmide opaca ABCDS, de base ABCD e cujo vértice S é o ponto médio de uma das arestas do cubo. Olha-se para a pirâmide de cima, de baixo, de trás, de frente, da esquerda e da direita. Qual das formas a seguir não irá aparecer nessas observações?



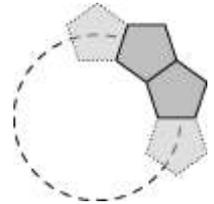
- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Quando uma dada substância sólida derrete, seu volume cresce de $\frac{1}{12}$. De quanto esse volume decresce quando a substância se solidifica novamente?

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

Problemas de 4 pontos

11. Raul tem várias peças iguais de plástico na forma de pentágonos regulares. Ele cola as peças lado a lado até completar um círculo, como ilustrado na figura. Quantas peças ele usou para formar o círculo?

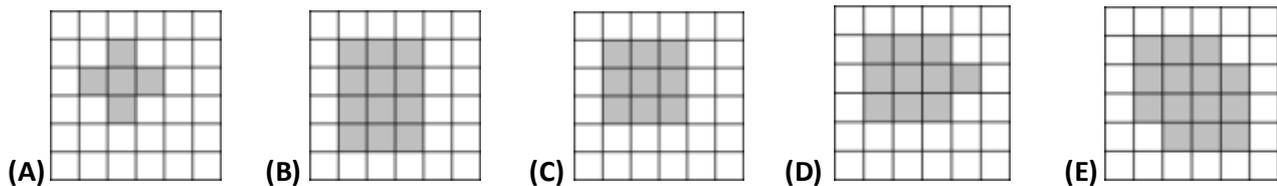


- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

12. Quantos números inteiros positivos n existem tais que $\frac{n}{3}$ e $3n$ são números inteiros de três algarismos?

- (A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

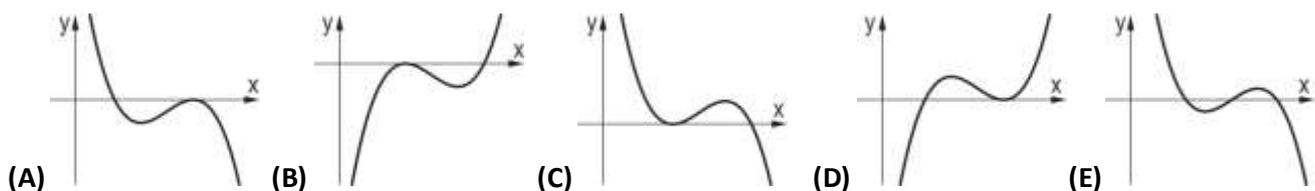
13. Um tapete circular é colocado sobre um piso revestido de lajotas quadradas. Todas as lajotas contendo mais de um ponto de contato com o tapete foram pintadas de cinza. Qual das figuras abaixo não pode ser uma representação da situação descrita?



14. Considere a seguinte afirmação sobre uma função f definida no conjunto dos números inteiros: “Qualquer que seja o número par x , o número $f(x)$ é par”. Qual é a negação desta sentença?

- (A) Qualquer que seja o número par x , o número $f(x)$ é ímpar.
 (B) Qualquer que seja o número ímpar x , o número $f(x)$ é par.
 (C) Qualquer que seja o número ímpar x , o número $f(x)$ é ímpar.
 (D) Existe um número par x tal que o número $f(x)$ é ímpar.
 (E) Existe um número ímpar x tal que o número $f(x)$ é ímpar.

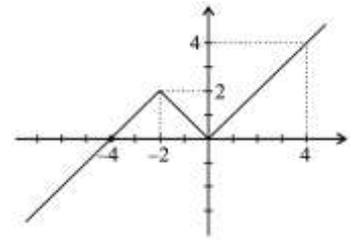
15. O gráfico da função g dada por $g(x) = (a-x)(b-x)^2$, com $a < b$, está representado em uma das alternativas abaixo. Em qual delas?



16. A medida de um dos lados de um retângulo é 5. Este retângulo pode ser cortado em um quadrado e um retângulo, sendo que um destes quadriláteros tem área 4. Quantos retângulos existem nessas condições?

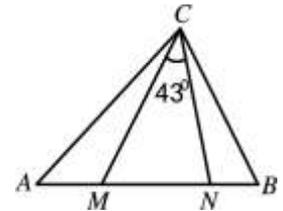
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

17. Vera desenhou o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, composto de duas semirretas e um segmento de reta. Quantas soluções tem a equação $f(f(f(x))) = 0$?



- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

18. No triângulo ABC ao lado, os pontos M e N sobre o lado AB são tais que $AN = AC$ e $BM = BC$. Calcule a medida do ângulo \widehat{ACB} sabendo que a medida do ângulo \widehat{MCN} é 43° .



- (A) 86° (B) 89° (C) 90° (D) 92° (E) 94°

19. Quantos pares $(x; y)$ de números inteiros positivos satisfazem a equação $x^2 y^3 = 6^{12}$?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) outro número

20. Uma caixa contém 900 cartões numerados de 100 a 999, um número para cada cartão. Francisco deseja pegar alguns cartões ao acaso e calcular a soma dos algarismos dos números de cada cartão. Pelo menos quantos cartões ele precisa pegar para ter certeza de que três desses cartões apresentarão a mesma soma?

- (A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

Problemas de 5 pontos

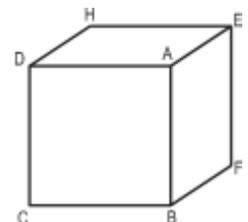
21. Quantos pares $(x; y)$ de números inteiros tais que $x \leq y$ têm seu produto igual a 5 vezes sua soma?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades: a) f é periódica de período 5; b) no intervalo $[-2; 3[$, f é definida por $f(x) = x^2$. Qual é o valor de $f(2013)$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

23. O cubo da figura ao lado é cortado por um plano que passa pelos vértices B , D e E , vizinhos do vértice A . Semelhantemente, este cubo é cortado por outros sete planos contendo os três vértices vizinhos de cada um dos demais vértices B , C , D , etc. do cubo. Irá restar um sólido menor contendo o centro do cubo. Qual é o aspecto desse sólido?



- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) não irá sobrar nada

24. Quantos pares de números reais $(x; y)$ são soluções da equação $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

- (A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) infinitos

25. Seja $f: N \rightarrow N$ (N é o conjunto dos números naturais) a função definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

Para um inteiro positivo k , o símbolo $f^k(n)$ representa o número dado pela expressão $f(f(\dots f(n)\dots))$, na qual o símbolo f aparece k vezes. Qual é o número de soluções da equação $f^{2013}(n) = 1$?

- (A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} (D) 2^{2013} (E) infinitas

26. Algumas retas foram traçadas num plano. A reta a intersecta exatamente três outras retas e a reta b intersecta exatamente quatro outras retas. A reta c intersecta exatamente n outras retas, sendo $n \neq 3, n \neq 4$. Quantas retas foram traçadas?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) mais de 7

27. A soma dos n primeiros números inteiros positivos é um número de três algarismos iguais. Qual é a soma dos algarismos de n ?

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

28. Na ilha dos esquilos, vivem apenas dois tipos de esquilos, os ticos e os tecos. Os ticos sempre dizem a verdade e os tecos sempre mentem. Um visitante da ilha encontrou dois habitantes em seu caminho e perguntou ao mais alto se eles eram ticos. Este respondeu, mas o visitante ficou sem saber o que eles eram realmente. Então o visitante perguntou ao mais baixo se o mais alto era tico. Depois que este último respondeu, o visitante descobriu o que eles eram. O que eram?

- (A) Os dois eram ticos.
(B) Os dois eram tecos.
(C) O mais alto era tico e o mais baixo era teco.
(D) O mais alto era teco e o mais baixo era tico.
(E) Impossível saber, por falta de informações.

29. Giuliano escreveu um algoritmo que produz a sequência de números em que $a_1 = 1$ e $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, onde m e n são números naturais. Para testar o algoritmo, Giuliano irá usá-lo para calcular o termo a_{100} , cujo valor correto ele já sabe. Se o algoritmo estiver correto, que valor irá fornecer?

- (A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050

30. Cinco carros entram numa rotatória ao mesmo tempo, vindos de direções diferentes, conforme mostrado na figura. Cada carro dá menos de uma volta inteira na rotatória; além disso, não há dois carros que saem da rotatória na mesma direção. De quantas maneiras diferentes os cinco carros podem sair da rotatória?

- (A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120

