1. Movimento harmônico simples angular

A figura 1 representa um disco horizontal oscilando. Desde que as oscilações sejam de pequena amplitude, o fio aplica sobre o disco um torque (veja capítulo 23 do volume 1) restaurador *M* dado por:

$$M = -\beta\theta \quad \text{(I)}$$

sendo β uma constante, chamada **constante de torção**, cujo valor depende do comprimento, do diâmetro e do material do fio.

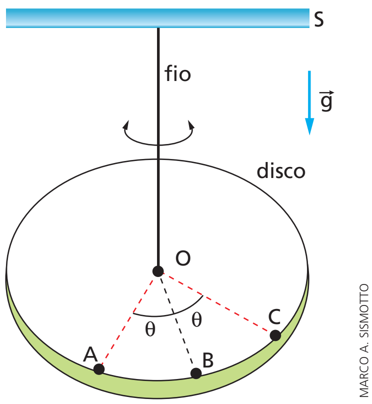


Figura 1. Pêndulo de torção.

Por outro lado, como vimos no conteúdo de CD relativo ao capítulo 23 do volume 1, sendo γ a **aceleração angular** do disco e *I* o seu **momento de inércia** temos:

$$M = I\gamma \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) tiramos:

$$I\gamma = -\beta\theta \quad \text{ou} \quad \gamma = -\frac{\beta}{I}\theta \qquad \text{(III)}$$

Fazendo:

$$\frac{\beta}{I} = c$$

obtemos:

$$\gamma = -c\theta \qquad \text{(IV)}$$

com *c* constante. Assim, como vimos na teoria, o período desse MHS é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{\beta}{I}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\beta}} \qquad \text{(V)}$$

A equação (V) vale para qualquer corpo que tenha efetuado MHS angular. No conteúdo do CD relativo ao capítulo 23 do volume 1, há uma tabela com os momentos de inércia de vários sistemas. A seguir relembramos três casos, sendo *Z* o eixo de rotação:

1º) Partícula de massa *m* à distância *R* de *Z*.

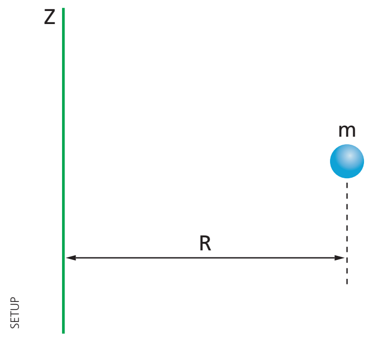


Figura 2. $I = mR^2$

2º) Cilindro homogêneo de massa *M* e raio *R*.

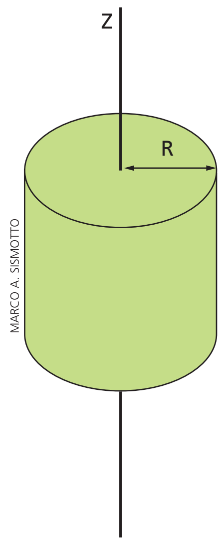


Figura 3. $I = \frac{1}{2}MR^2$

3º) Barra homogênea muito fina, de massa *M* e comprimento *L*.

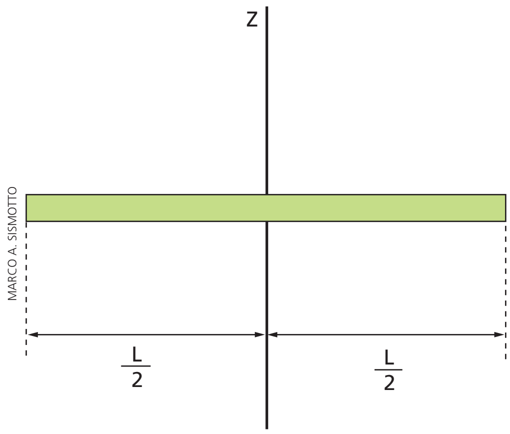


Figura 4. $I = \frac{1}{12}ML^2$

Exercícios

1. Um pêndulo de torção é constituído por um disco horizontal e homogêneo, de massa $M = 0{,}40$ kg e raio $R = 0{,}10$ m, ligado a um fio vertical fixado no centro do disco. Quando uma força $\vec{F}$ de intensidade 4,0 N é aplicada tangencialmente ao disco, este gira 3,6° até atingir a posição de equilíbrio. Determine:

a) o torque de $\vec{F}$ em relação ao centro do disco;

b) a constante de torção do fio;

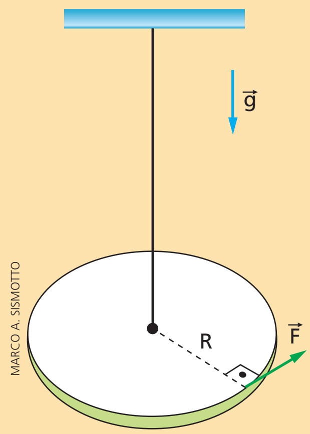
c) o momento de inércia desse disco em relação ao eixo que passa pelo fio;

d) o período de oscilação desse pêndulo.

Resolução:

a) $|M| = F \cdot R = (4{,}0 \text{ N})\,(0{,}10 \text{ m})$

$|M| = 0{,}40 \text{ N} \cdot \text{m}$



b) $\theta = 3{,}6° = \dfrac{\pi}{50}$ rad

$|M| = \beta\theta \Rightarrow 0{,}40 \text{ N} \cdot \text{m} = \beta \cdot \dfrac{\pi}{50} \text{ rad} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{20}{\pi} \text{ N} \cdot \text{m/rad} \cong 6{,}4 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$

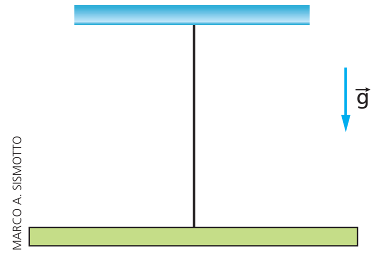
c) $I = \dfrac{1}{2} MR^2 = \dfrac{1}{2}(0{,}40 \text{ kg})(0{,}10 \text{ m})^2$

$I = 2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

d) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\beta}} \cong 2\pi\sqrt{\dfrac{2{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{6{,}4 \text{N} \cdot \text{m/rad}}}$

$T \cong 0{,}018$ s

2. Um pêndulo de torção é formado por uma barra homogênea, fina e horizontal, presa a um fio pelo seu ponto médio. São dados: massa da barra = 120 g; comprimento de barra = 50,0 cm; constante de torção do fio = $= 2{,}00 \cdot 10^{-2}$ N · m/rad.

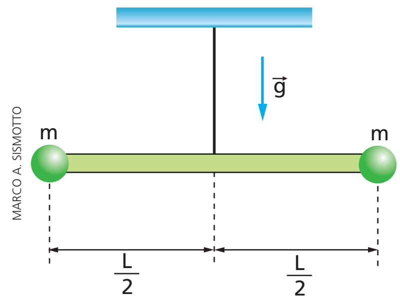


Determine:

a) o momento de inércia da barra para essa situação;

b) o período de oscilação do pêndulo.

3. Um pêndulo de torção é formado por uma barra de massa desprezível e de comprimento L = 40 cm, em cujas extremidades estão fixas duas partículas de massa m = 80 g cada uma.

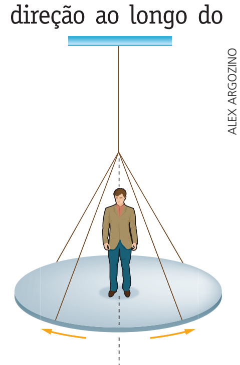


Sabendo que a constante de torção do fio é $\beta = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ N · m/rad, determine o período de oscilação.

4. período de oscilação de um pêndulo de torção formado por uma barra fina suspensa pelo seu ponto médio é T = 4,0 s. Determine o momento de inércia da barra sabendo que a constante de torção do fio é $\beta = 7{,}9 \cdot 10^{-5}$ N · m/rad.

5. Em um movimento harmônico angular, a aceleração angular γ e o deslocamento angular θ obedecem à equação $\gamma = -6{,}3\theta$ em unidades do SI. Qual o período do movimento?

6. Com o objetivo de medir o momento de inércia de uma pessoa em relação a um eixo com direção ao longo do corpo da pessoa e que passa pelo seu centro de massa, foi montado o experimento ilustrado na figura ao lado, tendo o fio constante de torção $\beta = 170$ N · m/rad.
Sem a pessoa mede-se o período do pêndulo, obtendo-se 2,1 s. Com a pessoa o período medido é 2,2 s. Determine o momento de inércia da pessoa.



2. O pêndulo físico

Um pêndulo não simples consiste de um corpo rígido suspenso em um eixo fixo (*E*) que não passe por seu centro de gravidade (*G*), como ilustra a figura 5a.

Tal pêndulo é chamado **pêndulo físico** ou **pêndulo composto**.

Na figura 5a o pêndulo está na posição de equilíbrio, com o ponto *E* (por onde passa o eixo) e o centro de gravidade *G* na mesma vertical. Se deslocarmos o pêndulo de sua posição de equilíbrio, abandonando-o na posição da figura 5b, haverá um torque restaurador *M*, cujo módulo é dado por:

$$|M| = Pb = mgb \quad (1)$$

Mas:

$$b = d \text{ sen } \theta \quad (2)$$

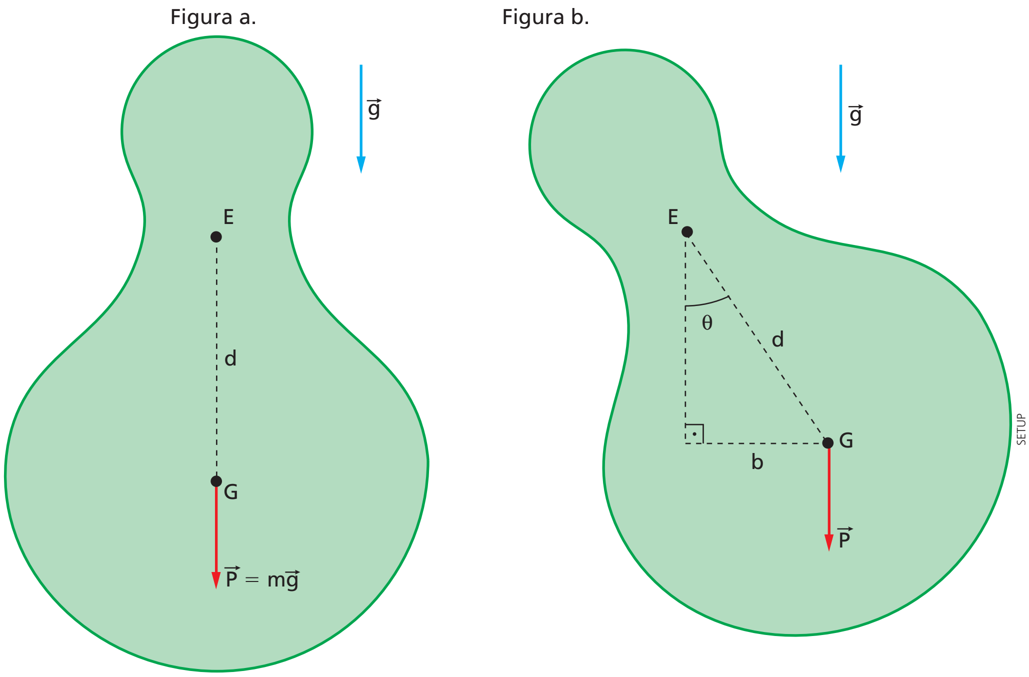


Figura 5. Pêndulo físico (ou composto).

De (2) e (1) tiramos:

$$|M| = mgd \text{ sen } \theta \quad (3)$$

Se o deslocamento angular θ for "pequeno", podemos escrever:

$$\text{sen } \theta \cong \theta \quad (4)$$

com θ medido em radianos.

De (4) e (3) concluímos:

$$|M| = mgd\theta \quad (5)$$

Considerando os valores algébricos, temos:

$$M = -mgd\theta \quad (6)$$

Por outro lado, sendo γ a aceleração angular e *I* o momento de inércia do corpo, sabemos que:

$$M = I\gamma \quad (7)$$

De (7) e (6) obtemos:

$$I\gamma = -mgd\theta \quad \text{ou} \quad \gamma = -\frac{mgd}{I}\theta \quad (8)$$

Mas *m*, *g*, *d* e *I* são constantes. Assim, podemos escrever:

$$\frac{mgd}{I} = \text{constante} = c \qquad (9)$$

Introduzindo (9) em (8):

$$\gamma = -c\theta \qquad (10)$$

No texto teórico (item 4) vimos que a equação (10) define um movimento harmônico angular cujo período *T* é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{c}} \qquad (11)$$

Introduzindo (9) em (11) obtemos o período do pêndulo físico:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (12)$$

Observando a equação (12) podemos ter a impressão de que o período do pêndulo físico depende de sua massa *m*. Porém, devemos lembrar que o momento de inércia *I* é igual ao produto de *m* por um fator numérico, o que acarreta o cancelamento de *m* e, portanto, o período do pêndulo físico não depende da massa.

Devemos observar também que o pêndulo não oscilará se o eixo passar pelo centro de gravidade *G*, isto é, se os pontos *E* e *G* forem coincidentes.

Pêndulo físico e pêndulo simples

Podemos obter a fórmula que dá o período de pêndulos simples a partir da equação (12), lembrando que o momento de inércia de uma partícula de massa *m* é dado por (fig. 6):

$$I = md^2$$

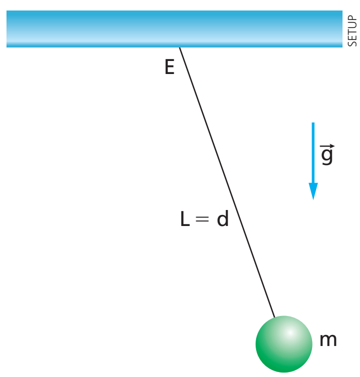


Figura 6. Pêndulo simples.

Introduzindo esse valor na equação (12), obtemos o período do pêndulo simples (T_s):

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Como d = L (fig. 6), podemos escrever:

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Complementos de teoria e leituras

Centro de oscilação

Consideremos um pêndulo simples, de comprimento L_0, que tenha o mesmo período de um determinado pêndulo físico. O ponto *C*, que está alinhado com *E* e *G* (fig. 7) e tal que

$$EC = L_0$$

é chamado **centro de oscilação** do pêndulo físico. É como se o pêndulo físico se transformasse em um pêndulo simples, com toda a massa concentrada no ponto *C*.

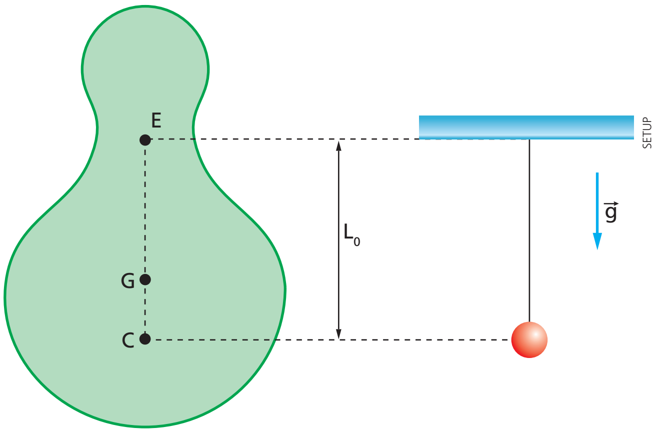


Figura 7. O ponto *C* é o centro de oscilação.

O ponto *C* tem duas propriedades interessantes:

1ª) Se o pêndulo for suspenso por um eixo que passa por *C*, o período não se altera, e o ponto *E* é o novo centro de oscilação. Por esse motivo, os pontos *E* e *G* são chamados **conjugados**.

2ª) Na figura 8 representamos um taco de beisebol articulado em *E* sendo atingido pela bola na altura do ponto *C*. Nesse caso, na articulação *E* não há esforço lateral, a tendência do taco é girar em torno de *E*. Isso significa que, se um jogador estiver segurando o taco em *E*, ele não sentirá esforço lateral em sua mão. Por isso o ponto *C* é também chamado **centro de percussão**.

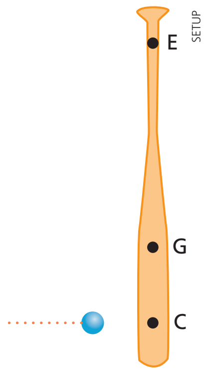
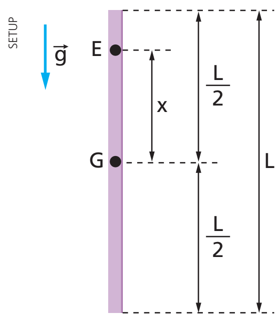


Figura 8.

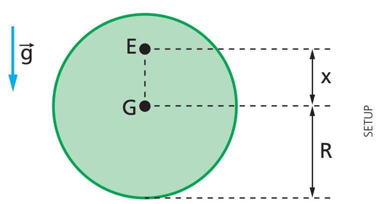
Momentos de inércia de dois sistemas

Para utilização nos exercícios, apresentamos a seguir os momentos de inércia de dois corpos oscilando com eixo em *E*.



$$I = M\left(\frac{L^2}{12} + x^2\right)$$

Figura 9. Barra fina e homogênea de massa *M*.



$$I = M\left(\frac{R^2}{2} + x^2\right)$$

Figura 10. Disco homogêneo de massa *M* e raio *R*.

7. Uma barra fina e homogênea, de massa M e comprimento $L = 2,40$ m, foi colocada a oscilar em torno de um eixo E que passa por uma de suas extremidades. Adotando $g = 10,0$ m/s², determine:

a) o período do movimento oscilatório;

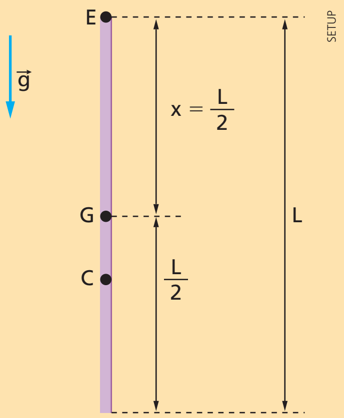
b) a posição do centro de oscilação.

Resolução:

a) $L = 2,40 \text{ m} \Rightarrow x = \dfrac{L}{2} = 1,20 \text{ m}$

$$I = M\left(\frac{L^2}{12} + x^2\right) = M\left[\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = M\frac{L^2}{3}$$

$$d = x = \frac{L}{2}$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ML^2}{3}}{Mg\frac{L}{2}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \cong (6,28)\sqrt{\frac{2(2,40)}{3(10,0)}} \cong (6,28)\sqrt{0,16} \cong$$

$$\cong (6,28)(0,40) \Rightarrow \boxed{T \cong 2,5 \text{ s}}$$

b) O comprimento do pêndulo simples que tem o mesmo período do pêndulo físico é:

$L_0 = EC$

$$2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \Rightarrow \frac{L_0}{g} = \frac{2L}{3g} \Rightarrow$$

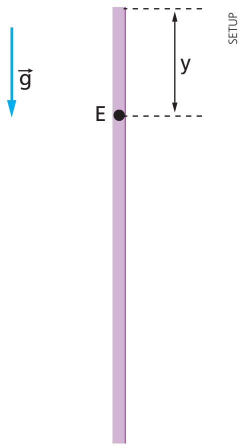
$$\Rightarrow L_0 = \frac{2}{3}L \Rightarrow L_0 = \frac{2}{3}(2,40 \text{ m}) = 1,6 \text{ m}$$

Logo,

$\boxed{EC = 1,6 \text{ m}}$

8. No exercício anterior se o pêndulo fosse suspenso pelo ponto C qual seria o novo período?

9. Uma barra de comprimento 2,00 m é colocada a oscilar em torno de um eixo E que está à distância $y = 40,0$ cm de sua extremidade superior.

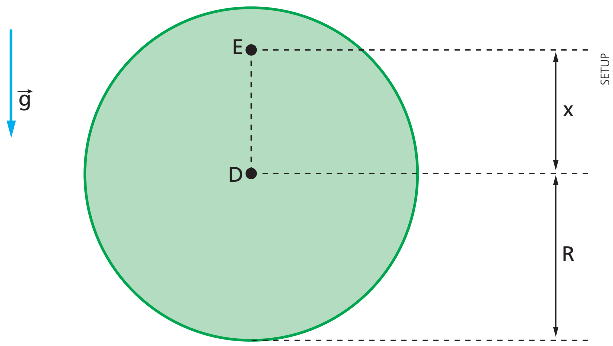


Adotando $g = 10,0$ m/s², determine:

a) o período do movimento;

b) a distância entre E e o centro de oscilação.

10. Um disco homogêneo, de raio $R = 20,0$ cm, é colocado a oscilar em torno de um eixo que passa por um ponto E situado à distância $x = 15,0$ cm acima de seu centro D.



Sendo $g = 10,0$ m/s², determine:

a) o período de oscilação do disco;

b) a distância entre D e o centro de oscilação.

11. Um pêndulo físico, em forma de chapa homogênea, oscila em torno de um eixo que fica à distância 0,20 m de seu centro de gravidade, com frequência $f = 0,64$ Hz. Sabendo que a massa do pêndulo é 30 kg e que $g = 10$ m/s², determine o momento de inércia desse pêndulo.

3. Outras formas para as equações horárias do MHS

A maioria dos autores apresenta as equações horárias do MHS nas formas que vimos no texto e que chamaremos de **forma padrão** (equações 1, 2 e 3, a seguir). Porém, há autores que preferem apresentar essas equações em outras formas e que chamaremos de **formas alternativas** equações (4, 5 e 6, a seguir).

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \theta_0) & (1) \\ v = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \theta_0) & (2) \\ a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0) & (3) \end{cases}$$

(formas padrão)

$$\begin{cases} x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) & (4) \\ v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0) & (5) \\ a = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) & (6) \end{cases}$$

(formas alternativas)

Para passar da forma alternativa para a forma padrão, podemos usar duas identidades vistas em Trigonometria e que lembraremos a seguir.

Consideremos dois ângulos α e β tais que (fig. 11):

$$\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$$

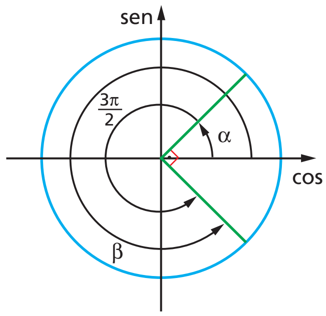


Figura 11. $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$

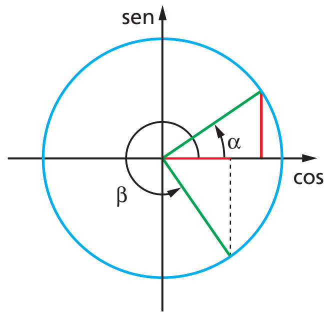


Figura 12. $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$

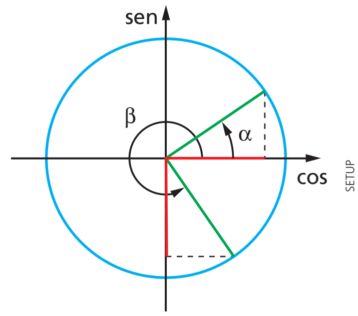


Figura 13. $\cos\alpha = -\text{sen}\,\beta = -\text{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$

Observando a figura 11, percebemos que:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad (7)$$

e observando a figura 13, percebemos que:

$$\cos\alpha = -\text{sen}\,\beta = -\text{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad (8)$$

Exercícios

12. As equações horárias da elongação, da velocidade escalar e da aceleração escalar de um MHS são:

$$\begin{cases} x = 5\,\text{sen}\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) & (9) \\ v = 10\cos\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) & (10) \\ a = -20\,\text{sen}\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) & (11) \end{cases}$$

no SI. Obtenha as formas padrão dessas equações.

Resolução:

À expressão entre parênteses somamos $\frac{3\pi}{2}$, seguindo as identidades 7 e 8.

$$\text{sen}\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2t + \underbrace{\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}}_{\frac{13\pi}{6}}\right) =$$

$$= \cos\left(2t + \frac{13\pi}{6}\right)$$

Porém, $\frac{13\pi}{6} > 2\pi$, isto é, $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$

Portanto, podemos "descontar" uma volta e escrever:

$$\text{sen}\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2t + \frac{13\pi}{6}\right) =$$
$$= \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (12)$$

Do mesmo modo, temos:

$$\cos\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(2t + \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) =$$
$$= -\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (13)$$

Substituindo (12) e (13) nas equações (9), (10) e (11), obtemos as equações horárias na forma padrão:

$$\begin{cases} x = 5\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \\ v = -10\,\text{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \\ a = -20\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

13. No Sistema Internacional, as equações horárias da elongação, da velocidade escalar e da aceleração escalar de um MHS são:

$$\begin{cases} x = 4\,\text{sen}\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right) \\ v = 20\cos\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right) \\ a = -100\,\text{sen}\left(5t + \frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Obtenha as formas padrão dessas equações.

14. (Vunesp-SP) Uma partícula de massa *M* oscila presa a uma mola de constante elástica *k*, descrevendo uma trajetória retilínea de comprimento 2A. Se a equação horária da posição dessa partícula é $x = A \cdot \text{sen}\,\omega t$, obtenha a posição e a velocidade dela nos instantes $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ e $t_2 = \frac{\pi}{6\omega}$.

	t_1: x	t_1: v	t_2: x	t_2: v
a)	A	0	$\frac{A}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega$
b)	0	$A\omega$	A	$\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega$
c)	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$	$\frac{A\omega}{2}$	0	$A\omega$
d)	A	0	A	$A\omega$
e)	0	$A\omega$	A	0

Forma de Fourier

O físico e matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), de quem já falamos no capítulo sobre transmissão de calor, demonstrou um teorema que se aplica a uma função periódica qualquer como, por exemplo, a função *f*, cujo gráfico apresentamos na figura 14. A função *f* é periódica de período T = 4.

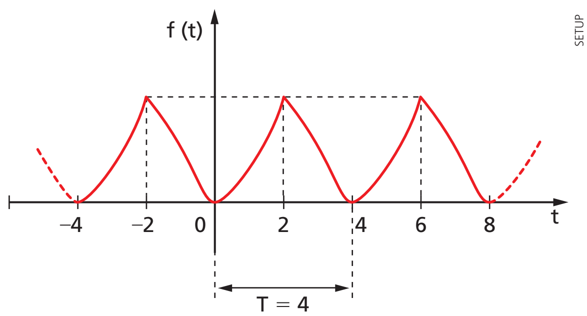


Figura 14.

Sendo *T* o período de uma função periódica qualquer *f*, e fazendo $\omega = \frac{2\pi}{T}$, o teorema afirma que f(t) pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(t) = \underbrace{b + (c_1 \cos\omega t + d_1\,\text{sen}\,\omega t) + (c_2 \cos 2\omega t + d_2\,\text{sen}\,2\omega t) + \ldots}_{\text{(infinitos termos)}} \quad (14)$$

sendo *b*, c_1, d_1, c_2, d_2, ... constantes.

FC2_CD_C15.indd 9 24/09/12 18:09

Esse teorema tem importantes aplicações na Matemática e na Física e voltaremos a falar dele. Porém, por enquanto, nos limitaremos a aplicá-lo a uma situação particular. Quando *f*(*t*) é do tipo:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \quad \text{ou} \quad f(t) = B\,\text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

O lado direito da equação (14) deixa de ter infinitos termos e se reduz a:

$$f(t) = c_1 \cdot \cos\omega t + d_1 \cdot \text{sen}\,\omega t$$

isto é:

$$\left.\begin{matrix} f(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \\ \text{ou} \\ f(t) = B\,\text{sen}(\omega t + \theta_0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(t) = c_1\cos\omega t + d_1\,\text{sen}\,\omega t \qquad (15)$$

Chamaremos a equação (15) de **forma de Fourier**.

Para passar da forma padrão para a forma de Fourier (ou vice-versa), usamos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$$
$$\text{sen}\,(x + y)\ \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x$$

Exercícios

15. A equação horária da elongação de um MHS, no SI é: $x = 3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Obtenha a forma de Fourier dessa equação.

Resolução:

$$\frac{\pi}{3}\,\text{rad} = 60° \Rightarrow \text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi t)\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \text{sen}(\pi t)\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3} =$$
$$= \cos(\pi t)\cdot\frac{1}{2} - \text{sen}(\pi t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cos(\pi t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(\pi t)$$

Portanto:

$$x = 3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 3\left[\frac{1}{2}\cos(\pi t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(\pi t)\right]$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\cos\pi t - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,\pi t}$$

16. A forma de Fourier da equação horária da elongação de um MHS é:

$x = -2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}t - 2\,\text{sen}\frac{\pi}{2}t$ no SI. Obtenha a forma padrão dessa equação.

Resolução:

A forma padrão é:

$x = A\cos(\omega t + \theta_0)$, com $A > 0$; $\omega > 0$ e $\theta_0 > 0$.

Aplicando a fórmula para o cosseno da soma, temos:

$$x = A\cos(\omega t + \theta_0) = A[\cos(\omega t)\cos\theta_0 -$$
$$- \text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\,\theta_0] \Rightarrow x = [A\cos\theta_0]\cos(\omega t) -$$
$$- [A\,\text{sen}\,\theta_0]\text{sen}(\omega t) \quad (16)$$

A equação dada foi:

$$x = -2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}t - 2\,\text{sen}\frac{\pi}{2}t \quad (17)$$

Comparando (16) e (17) obtemos:

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{e} \begin{cases} A\cos\theta_0 = -2\sqrt{3} \\ -A\,\text{sen}\,\theta_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{A} \\ \text{sen}\,\theta_0 = \frac{2}{A} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2\theta_0 = \frac{12}{A^2} \\ \text{sen}^2\,\theta_0 = \frac{4}{A^2} \end{cases} \quad (18)$$

Lembrando da identidade: $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$,

a partir das igualdades (18) temos:

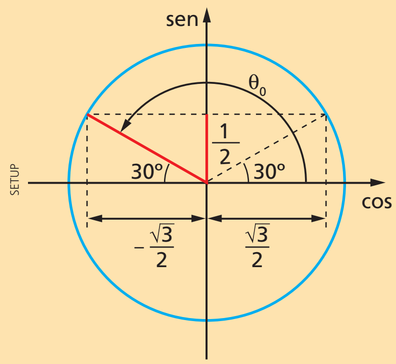
$$\frac{12}{A^2} + \frac{4}{A^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{A^2} = 1 \Rightarrow A^2 = 16 \Rightarrow A = \pm 4$$

Mas como devemos ter $A > 0$, obtemos:
$A = 4$
Assim:

$$\begin{cases} \cos\theta_0 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{A} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta_0 = \dfrac{2}{A} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como $\cos\theta_0 < 0$ e $\text{sen}\,\theta_0 > 0$, concluímos que θ_0 é um arco do 2º quadrante. Além disso, sabemos que:

$$\frac{1}{2} = \text{sen } 30^\circ \text{ e } \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$



Assim, observando a figura, concluímos que:

$$\theta_0 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, a forma padrão da equação horária da elongação, no SI, é:

$$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

17. A equação horária da elongação de um MHS é: $x = 4\cos 4t + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,4t$, no SI. Obtenha a equação horária na forma padrão.

18. Apresentamos a forma de Fourier da equação horária da velocidade escalar de um MHS, no SI: $v = 6\sqrt{3}\,\text{sen}\,2t + 6\cos 2t$. Obtenha as formas padrão das equações horárias da elongação, da velocidade escalar e da aceleração escalar.

19. A aceleração escalar de um MHS é dada pela seguinte equação horária, no SI: $a = -18\cos 3t + 18\sqrt{3}\,\text{sen}\,3t$. Apresente as formas padrão das equações horárias da elongação, da velocidade escalar e da aceleração escalar.

Equações horárias e derivada

Quando, no volume 1, estudamos o **Movimento Uniformemente Variado**, no CD vimos que Newton e Leibniz criaram um processo matemático denominado **derivação**, por meio do qual:

- da equação horária da posição obtemos a equação horária da velocidade escalar;
- da equação horária da velocidade escalar obtemos a equação horária da aceleração escalar.

Assim, dizemos que:

- A velocidade escalar é a **derivada** da posição.
- A aceleração escalar é a **derivada** da velocidade escalar.

No volume 1 mostramos como derivar funções polinomiais e, agora, vamos mostrar como derivar as funções **seno** e **cosseno**. Antes, porém, vamos recordar algumas regras de derivação.

Consideremos uma constante $k \neq 0$ e duas funções *f* e *g*. Indicado a derivada de uma função *f* por *f'* temos:

$$(k)' = 0$$
$$(kf)' = kf'$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Sendo ω e θ constantes, as derivadas das funções **seno** e **cosseno** são obtidas do seguinte modo:

$$[\text{sen}\,(\omega t + \theta_0)]' = \omega\cos(\omega t + \theta_0)$$
$$[\cos(\omega t + \theta_0)]' = -\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \theta_0)$$

Exemplos

a) Suponhamos que a equação horária da elongação de um MHS seja: $x = 3\,\text{sen}\,2t$.
Para obtermos a equação horária da velocidade escalar, efetuamos a derivação de x:

$$v = (x)' = (3\,\text{sen}\,2t)' = 3\underbrace{(\text{sen}\,2t)'}_{2\cos 2t} = (3)(2\cos 2t) = 6\cos 2t$$

Para obtermos a aceleração escalar, derivamos novamente:

$$a = (v)' = (6\cos 2t)' = 6\underbrace{(\cos 2t)'}_{-2\operatorname{sen} 2t} = (6)(-2\operatorname{sen} 2t) = -12\operatorname{sen} 2t$$

b) Sendo x = 4 cos 3t a equação horária da elongação de um MHS, temos:

$$v = x' = (4\cos 3t)' = 4\underbrace{(\cos 3t)'}_{-3\operatorname{sen} 3t} = 4(-3\operatorname{sen} 3t) = -12\operatorname{sen} 3t$$

c) A forma de Fourier da equação horária da elongação de um MHS é: x = 6 cos 5t – 8 sen 5t.
A velocidade escalar é dada por:

$$v = (x)' = [6\cos 5t - 8\operatorname{sen} 5t]' = (6\cos 5t)' - (8\operatorname{sen} 5t)' = 6(\cos 5t)' - 8(\operatorname{sen} 5t)' =$$
$$= 6[-5\operatorname{sen} 5t] - 8[5\cos 5t] = -30\operatorname{sen} 5t - 40\cos 5t$$

d) Consideramos um MHS cuja equação horária da elongação é:

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

A velocidade escalar é dada por:

$$v = (x)' = \left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\right]' = 2\underbrace{\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\right]'}_{-\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= 2\left[-\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\right] = -\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

e) Sendo *A*, ω e θ_0 constantes, consideremos um MHS cuja equação horária da elongação é: $x = A\cos(\omega t + \theta_0)$.
Vamos obter as equações horárias da velocidade escalar e da aceleração escalar usando a derivação.

$$v = (x)' = [A\cos(\omega t + \theta_0)]' = A[\underbrace{\cos(\omega t + \theta_0)}_{-\omega\operatorname{sen}(\omega t+\theta_0)}]'$$

$$v = A[-\omega\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)] = -\omega A\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$a = (v)' = [-\omega A\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)]' = -\omega A[\underbrace{\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)}_{\omega\cos(\omega t+\theta_0)}]' =$$

$$= -\omega A[\omega\cos(\omega t + \theta_0)] = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta_0)$$

Exercícios

20. Em cada caso a seguir é fornecida a equação horária da elongação de um MHS, no SI. Em cada caso, obtenha as equações da velocidade escalar e da aceleração escalar.

a) x = 3 cos 4t + 2 sen 4t

b) x = −5 cos 2t − 7 sen 2t

21. A forma de Fourier da equação horária da elongação de um MHS é: $x = 4\cos\frac{\pi}{6}t - 4\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}t$. No SI obtenha:

a) a forma de Fourier da equação horária da velocidade escalar;

b) o valor da velocidade escalar no instante t = 3 s.