PROVA DE MATEMÁTICA

01) (ITA-91) Considere as afirmações:

I- Se f: $\Re \to \Re$ é uma função par e g: $\Re \to \Re$ uma função qualquer, então a composição gof é uma função par.

II- Se f: $\Re \to \Re$ é uma função par e g: $\Re \to \Re$ uma função ímpar, então a composição fog é uma função par.

III- Se f: $\Re \to \Re$ é uma função ímpar e inversível então f^{-1}: $\Re \to \Re$ é uma função ímpar.

Então:

a) Apenas a afirmação I é falsa;
b) Apenas as afirmações I e II são falsas;
c) Apenas a afirmação III é verdadeira;
d) Todas as afirmações são falsas;
e) n.d.a.

Resolução

(I) *Para todo x real, tem-se que g(f(-x)) = g (f(x)), pois f: R → R é uma função par. Logo, gof é uma função PAR.*

(II)

Afirmação	*Justificativa*
S1: ∀ x, x ∈ R, f(g(-x)) = f(-g(x))	*g:R → R é uma função ímpar*
S2: ∀ x, x ∈ R, f(-g(x)) = f(g(x))	*f:R → R é uma função par*
S3: ∀ x, x ∈ R, f(g(-x)) = f(g(x))	*das sentenças S1 e S2*

Logo, fog é uma função PAR

(III) Para todo par (x, y) em R^2, segue que:

Afirmação	*Justificativa*
S1: $f^{-1}(-x) = y \Leftrightarrow f(y) = -x$	*f^{-1} é a função inversa de f*
S2: $f(y) = -x \Leftrightarrow f(-y) = x$	*f é uma função ímpar*
S3: $f(-y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = -y$	*f^{-1} é a função inversa de f*
S4: $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$	*das sentenças S1 e S3*

Portanto f^{-1} é uma função ímpar.
As afirmações I, II e III são VERDADEIRAS.

02) (ITA-91) Sejam a $\in \Re$, a > 1 e f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$. A função inversa de f é dada por:

a) $\log_a(x - \sqrt{x^2 - 1})$, para x > 1
b) $\log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1})$, para $x \in \Re$
c) $\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, para $x \in \Re$
d) $\log_a(-x + \sqrt{x^2 - 1})$, para x < -1
e) nda

Resolução

$y = f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \Rightarrow a^x - 2y - a^{-x} = 0$

Multiplicando por a^x, tem-se que $(a^x)^2 - 2ya^x - 1 = 0$

Segue que: $a^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$

$a^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ ou $a^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$

Como $a^x > 0$ para todo x real, segue que: $a^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$

Como a > 1, tem-se que $x = \log_a(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Sendo f^{-1} a inversa de f, tem-se que $f^{-1}(y) = \log_a(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Portanto, $f^{-1}(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, para x ∈ R

03) (ITA-91) Seja $\Re \to \Re$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{se } x \le 0 \\ x^2 - 1, \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln x, \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

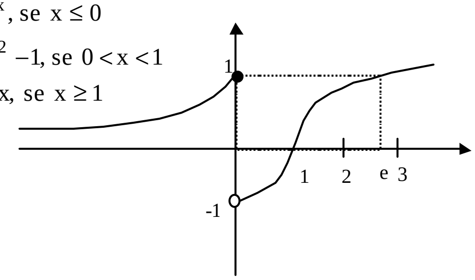
Se D é um subconjunto não vazio de $\Re$ tal que f: D → $\Re$ é injetora, então:

a) D = $\Re$ e f(D) = [-1 , +∞[
b) D =]-∞ , 1] ∪]e , +∞[e f(D) =]-1 , +∞[
c) D = [0 , +∞[e f(D) =]-1 , +∞[
d) D = [0 , e] e f(D) = [-1 , 1]
e) n.d.a.

Notação: f(D) = {y ∈ $\Re$: y = f(x), x ∈ D} e ln x denota o logaritmo neperiano de x.
Observação: esta questão pode ser resolvida graficamente.

Resolução
Segue o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \le 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ln x, \text{ se } x \ge 1 \end{cases}$$



Pelo gráfico, pode-se concluir que existe uma infinidade de conjuntos D, D ⊂ R, tais que: f: D → R seja injetora.
Seguem alguns exemplos
D =]-∞,0] e f(D) =]0,1]
D = [1,e] e f(D) = [0,1]
D =]-∞,0[e f(D) =]-1,+∞[
D =]-∞,1] e f(D) =]-1,+∞[, mencionada na alternativa B é um exemplo interessante, mas não constitui uma condição necessária, como é exigido no enunciado.

04) (ITA-91) Sejam w = a + bi com b ≠ 0 e a, b, c $\in \Re$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:

a) Um par de retas paralelas.
b) Uma circunferência.
c) Uma elipse.
d) Uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.
e) n.d.a.

Resolução
Seja z = x + yi, {x,y} Ì R e i^2 = -1
(a + bi)(x + yi) + (ai - bi)(x - yi) + c = 0
ax + ayi + bxi - by + ax - ayi - bxi - by + c = 0
2ax - 2by + c = 0 \ y = a/bx + c/2b
Assim, descreve uma reta com coeficiente angular m = a/b.

---

05) (ITA-91) Se z = cos t + i sen t, onde 0 < t < 2π, então podemos afirmar que $w = \frac{1+z}{1-z}$ é dado por:

a) $i\,\text{cotg}\frac{t}{2}$ b) $i\,\text{tg}\frac{t}{2}$ c) i cotg t
d) i tg t e) n.d.a.

Resolução

$$w=\frac{1+\cos t+i\,\text{sen}\,t}{1-\cos t-i\,\text{sen}\,t}\therefore w=\frac{1+\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)+i\left(2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}\right)}{1-\left(1-2\,\text{sen}^2\frac{t}{2}\right)-i\left(2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}\right)}$$

$$\therefore w=\frac{-i^2.2\cos^2\frac{t}{2}+i2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\,\text{sen}^2\frac{t}{2}+i2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$$\therefore w=\frac{2i\cos\frac{t}{2}\left(\text{sen}\,\frac{t}{2}-i\cos\frac{t}{2}\right)}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\left(\text{sen}\,\frac{t}{2}-i\cos\frac{t}{2}\right)}\therefore w=i\cot g\frac{1}{2}$$

---

06) (ITA-91) Os valores de m de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas de suas raízes somando um, são:

a) 0 b) $\sqrt{3}$ e 3 c) 1 e -1
d) 2 e -2 e) nda

Resolução
Sejam $x_1.x_2$ e x_3 as raízes desta equação.
Do enunciado: $x_1 + x_2 = 1$ I
Pelas relações de Girard: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ II
Substituindo I em II, temos
$1 + x_3 = 6$ \ $x_3 = 5$
Daí: $5^3 - 6 . 5^2 - m^2 . 5 + 30 = 0$ \ $5m^2 = 5$ \ m = 1 ou m = -1

---

07) (ITA-91) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$. Podemos afirmar que:
a) S ⊂]-1 , 0[∪]0 , 1[∪]1 , 2[
b) S ⊂]-2 , -1[∪]0 , 1[∪]3 , 4[
c) S ⊂ [0 , 4]
d) S ⊂]-2 , -1[∪]1 , 2[∪]3 , 4[
e) n.d.a.

Resolução
$12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$
$4x^2(3x - 4) - (3x - 4) = 0$
$(3x - 4)(4x^2 - 1) = 0$
Daí: 3x - 4 = 0 \ x = 4/3
Ou
$4x^2 - 1 = 0$ \ x = 1/2 ou x = -1/2
Assim: S = {4/3,1/2,-1/2}
Como: -1/2 Î]-1,0[\ 1/2 Î]-1,0[\ 4/3 Î]1,2[
Então S Ì]-1,0[È]0,1[È]1,2[

---

08) (ITA-91) Considere as afirmações:
I- A equação $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ só admite raízes reais.
II- Toda equação recíproca admite um número par de raízes.
III- As raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$. São exatamente o dobro das raízes de $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.
Então:
a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é falsa.
c) Apenas III é verdadeira.
d) Todas são verdadeiras.
e) n.d.a.

Resolução
I - Observe que 1 é raiz da equação recíproca $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$.
Pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, segue que
$(x - 1)(3x^3 - 7x^2 - 7x + 3) = 0$
Observe que -1 é raiz da equação $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.
Aplicando, de novo, o dispositivo de Briot-Ruffini,
$(x - 1)(x + 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0$
Como o discriminante da expressão $3x^2 - 10x + 3$ é positivo, conclui-se que a equação dada só admite raízes reais.
II - x + 1 = 0 é uma equação recíproca (de 1ª espécie) e não possui um número par de raízes. Portanto, a afirmação "Toda equação recíproca admite um número par de raízes" é FALSA.
Outro exemplo é a equação recíproca $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ encontrada no item acima.
III - Sejam a b e g as raízes da equação $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. Observe que as raízes da transformada multiplicativa

$\left(\frac{x}{2}\right)^3+2\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)-2=0$ ***são 2a, 2b e 2g.***

$$\left(\frac{x}{2}\right)^3+2\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)-2=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{8}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+4x^2-4x-16=0$$

Portanto, apenas a afirmação (II) é falsa.

---

09) (ITA-91) Se A = {x ∈ ℜ: $|x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x - 3|$}, então temos:

a) A = [-2 , $\frac{1}{2}$] ∪ [4 , +∞[

b) A = [$\frac{1}{2}$, 4]

c) A = [-3 , 1]
d) A =]-∞ , -3] ∪ [1, +∞[
e) n.d.a.

Resolução
O discriminante da expressão $x^2 + x + 1$ é D = -4 e, portanto, $x^2 + x + 1 > 0$, para todo x real.
Conclui-se daí que para todo x Î R:
$|x^2 + 2x - 3|$ ³ $|x^2 + x + 1|$ Û $|x^2 + 2x - 3|$ ³ $x^2 + x + 1$
Û $x^2 + 2x - 3$ ³ $x^2 + x + 1$ ou
$x^2 + 2x - 3$ ³ $- x^2 - x - 1$
Û x ³ 4 ou $2x^2 + 3x - 2$ £ 0
Û x ³ 4 ou -2 £ x £ 1/2
Portanto, A = {x Î R\ x ³ 4 ou -2 £ x £ 1/2}
A = [-2,1/2] È [4,+¥ [

10) (ITA-91) Na divisão de $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$ por $x - 1$, obteve-se o quociente $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e o resto -6. Sabe-se que (b_4 , b_3 , b_2 , b_1) é uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e $q \neq 1$. Podemos afirmar:

a) $b_3 + a_3 = 10$ b) $b_4 + a_4 = 6$ c) $b_3 + b_0 = 12$
d) $b_4 + b_1 = 16$ e) n.d.a.

Resolução
Do enunciado temos: (Briot-Ruffini)

1	a_5	***2***	a_4	***8***	***-32***	a_3
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	***-6***

Então:

$$\begin{cases} b_4 = a_5 \rightarrow \text{I} \\ b_3 = b_4 + 2 \rightarrow \text{II} \\ b_2 = b_3 + a_4 = b_4 + a_4 + 2 \rightarrow \text{III} \\ b_1 = b_2 + 8 = b_4 + a_4 + 10 \rightarrow \text{IV} \end{cases}$$

De III e IV: $b_1 - b_2 = 8$
De IV: $b_4 + a_4 = b_2 - 2$
Por outro lado: (b_4, b_3, b_2, b_1) ***P.G. de razão*** $q > 0$ ***e*** q ***¹ 1***

Daí: $\dfrac{b_3}{b_4} = q \therefore \dfrac{b_4 + 2}{b_4} = q \therefore b_4 = \dfrac{2}{q-1}$

ainda: $b_1 = b_4.q^3 = \dfrac{2q^3}{q-1}$ e $b_2 = b_4.q^2 = \dfrac{2q^2}{q-1}$

Como $b_1 - b_2 = 8$***, temos:***

$\dfrac{2q^3 - 2q^2}{q-1} = 8 \therefore \dfrac{2q^2(q-1)}{q-1} = 8 \therefore q = 2$ ou $q = -2$ ***(não convém)***

Assim: $b^2 = \dfrac{2q^2}{q-1} = 8$ ***e*** $b_4 + a_4 = b_2 - 2 = 6.$

11) (ITA-91) Numa progressão geométrica de razão q, sabe-se que:
I- o produto do logaritmo natural do primeiro termo a_1 pelo logaritmo natural da razão é 24.
II- a soma do logaritmo natural do segundo termo com o logaritmo natural do terceiro termo é 26.
Se ln q é um número inteiro então o termo geral 2n vale:

a) e^{6n-2} b) e^{4+6n} c) e^{24n} d) e^{4+6n} e) nda

Notação: ln q denota o logaritmo natural (ou neperiano) de q

Resolução

$$\begin{cases} \lambda na_1.\lambda nq = 24 \therefore \lambda nq = \dfrac{24}{\lambda na_1} \rightarrow \text{I} \\ \lambda n(a_1.q) + \lambda n(a_1.q^2) = 26 \therefore 2\lambda na_1 + 3\lambda nq = 26 \rightarrow \text{II} \end{cases}$$

Substituindo I em II temos:

$$2\lambda na_1 + 3.\frac{24}{\lambda na_1} = 26 \therefore 2.(\lambda na_1) - 26\lambda na_1 + 72 = 0$$

$$\therefore (\lambda na_1)^2 - 13\lambda na_1 + 36 = 0$$

$\lambda na_1 = 9$ e $\lambda nq = \dfrac{24}{9}$ ***(Não convém pois*** ***l*nq é inteiro)**

ou

$\lambda na_1 = 4$ e $\lambda nq = \dfrac{24}{4} = 6$

Assim: $a_1 = e^4$ ***e*** $q = e^6$
Logo:
$a_n = a_1.q^{n-1}$ **** $a_n = e^4.(e^6)^{n-1} = e^4.e^{6n-6} = e^{6n-2}$
$a_n = e^{6n-2}$

12) (ITA-91) O conjunto dos números reais que verificam a inequação $3\log x + \log(2x + 3)^3 < 3 \log 2$, é dado por:

a) $\{x \in \Re: x > 0\}$ b) $\{x \in \Re: 1 \leq x \leq 3\}$
c) $\{x \in \Re: 0 < x \leq \frac{1}{2}\}$ d) $\{x \in \Re: \frac{1}{2} \leq x < 1\}$
e) n.d.a.

Notação: log*a* denota o logarítimo de ***a*** na base 10

Resolução
Com x > 0 tem-se que:
3logx + log(2x+3)³ £ 3log2 Û
Û 3logx + 3log(2x+3) £ 3log2
Û logx + log(2x+3) £ log2
Û log[x (2x+3)] £ log2 e x > 0
Û 2x² + 3x £ 2 e x > 0
Û 2x² + 3x - 2 £ 0 e x > 0
Û -2 £ x £ 1/2 e x > 0
Û 0 < x £ 1/2

O conjunto dos números reais que verificam a inequação dada é: {x Î R | 0 < x £ 1/2}.

13)(ITA-91) Sejam $A = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 3^k$ e $B = \sum_{k=0}^{n-1} [{}^{n-1}_{k}] 11^k$.

Se $\ln B - \ln A = \ln \dfrac{6561}{4}$ então n é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) n.d.a.

Resolução

$$A = \sum_{k=0}^{n} (n_k)3^k = (1+3)^n = 4^n = 4^{n-1}.4 \text{ e}$$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1_k)11^k = (1+11)^n = 12^{n-1}$$

Se ***l*nB - *l*nA = *l*n** $\dfrac{6561}{4}$ ***, então:***

***l*n(B/A) = *l*n** $\dfrac{6561}{4}$

$\therefore \dfrac{B}{A} = \dfrac{6561}{4} \therefore \dfrac{12^{n-1}}{4^{n-1}.4} = \dfrac{6561}{4}$

\\ 3^{n-1} = 6561 \\ $3^{n-1} = 3^8$ \\ n - 1 = 8 \\ n = 9

14) (ITA-91) Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, com no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química ?

a) 875 b) 1877 c) 1995
d) 2877 e) n.d.a.

Resolução
Sejam então:

$$18 \text{ professores} \begin{cases} 7 \text{ Matemática } (M) \\ 3 \text{ Física } (F) \\ 4 \text{ Química } (Q) \\ 4 \text{ Demais disciplinas } (D) \end{cases}$$

Do enunciado temos as seguintes possibilidades

5M
- 2F
  - $1Q - 4D \rightarrow C_{7,5} \cdot C_{3,2} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,4} = 252$
  - $2Q - 3D \rightarrow C_{7,5} \cdot C_{3,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,3} = 1512$
- 3F
  - $0Q - 4D \rightarrow C_{7,5} \cdot C_{3,3} \cdot C_{4,0} \cdot C_{4,4} = 21$
  - $1Q - 3D \rightarrow C_{7,5} \cdot C_{3,3} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,3} = 336$
  - $2Q - 2D \rightarrow C_{7,5} \cdot C_{3,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} = 756$

252 + 1512 + 21 + 336 + 756 = 2877
Assim podemos formar 2877 comissões;

15) (ITA-91) Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que a matriz mA + nB seja não inversível é necessário que:
a) m e n sejam positivos.
b) m e n sejam negativos.
c) m e n tenham sinais contrários.
d) $n^2 = 7m^2$.
e) n.d.a.

Resolução
Para que a matriz mA + nB seja não inversível, devemos ter:
det (mA + nB) = 0

$$mA + nB = m\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m-n & m+n \\ 3m & 5m+n \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2m-n & m+n \\ 3m & 5m+n \end{vmatrix} = 0$$

(2m - n)(5m + n) - 3m(m + n) = 0
$7m^2 - 6mn - n^2 = 0$

$$m = \frac{6n \pm \sqrt{36n^2 + 28n^2}}{14}$$

Assim: m = n (não convém) ou m = -n/7
Logo m e n têm sinais contrários.

16) (ITA-91) Sejam M e B matrizes quadradas de ordem n tais que $M - M^{-1} = B$. Sabendo que $M^t = M^{-1}$ podemos afirmar que:
a) B^2 é a matriz nula.
b) $B^2 = -2I$.
c) B é simétrica.
d) B é anti-simétrica.
e) n.d.a.

Notações: M^t e M^{-1} denotam, respectivamente a matriz transposta de M e a matriz inversa de M. Por I denotamos a matriz identidade de ordem n.

Resolução
Nas condições do enunciado, temos que:

$B = M - M^t$
$B^t = (M - M^t)^t$
$B^t = M^t - (M^t)^t$
$B^t = M^t - M$
Como $M^t = M^{-1}$,
$B^t = M^{-1} - M$
Como $M - M^{-1} = B$, $B^t = -B$
Logo, a matriz B é anti-simétrica

17) (ITA-91) Considere o sistema:

$$(P) \begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2 w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

Podemos afirmar que (P) é possível e determinado quando:
a) $k \neq 0$
b) $k \neq 1$
c) $k \neq -1$
d) $k \neq 0$ e $k \neq -1$
e) n.d.a.

Resolução
Pelo teorema de Cramer, (P) é possível e determinado, se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & -k^2 \\ 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$$

Desenvolvendo pela 2ª coluna, temos que:

$$k.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2(k-1) \neq 0 \therefore k \neq 0 \text{ e } k \neq 1$$

18) (ITA-91) Se (x , y , z , t) é solução dos sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

Qual das alternativas abaixo é verdadeira ?
a) x + y + z + t e x tem o mesmo sinal.
b) x + y + z + t e t tem o mesmo sinal.
c) x + y + z + t e y tem o mesmo sinal.
d) x + y + z + t e z tem sinais contrários.
e) n.d.a.

Resolução
Sendo (x,y,z,t) uma solução do sistema,

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \quad \times\,(-3) \quad \times\,(-1) \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \rightarrow I \\ 0x + 4y - 3z + 4t = 0 \rightarrow II \\ 0x + 4y - 3z - 4t = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{4t}{3} \rightarrow III \end{cases}$$

Substituindo III em II: $4y - 3\left(\dfrac{-4t}{3}\right) + 4t = 0 \therefore y = -2t$

Substituindo III e II em I:

$$x - (-2t) + 2.\left(\frac{-4t}{3}\right) - t = 0 \therefore x = \frac{5t}{3}$$

O conjunto solução do sistema é:

$$S = \left\{\left(\frac{5t}{3}, -2t, \frac{-4t}{3}, t\right) \middle|\, t \in C\right\}$$

Comentário:

Como as alternativas a, b, c e d mencionam "sinais" da soma x + y + z + t e de x ou y ou z ou t, elas são falsas, pois não se define sinal de um número complexo.

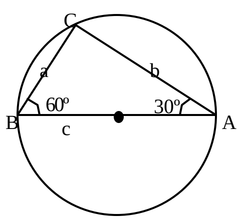
Mesmo que o enunciado afirmasse que (x, y, z, t) é uma quadra de números reais, ainda assim, a alternativa correta seria E, pois a quadra (0, 0, 0, 0) é solução do sistema e não se define sinal para o número zero.

---

19) (ITA-91) Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$. Sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos A, B e C respectivamente. Sabendo que a = $2\sqrt{3}$ e (A,B,C) é uma progressão aritmética, podemos afirmar que:

a) C = $4\sqrt{3}$ e A = 30º b) C = $3\sqrt{3}$ e A = 30º
c) B = 6 e C = 85º d) B= 3 e C = 90º
e) n.d.a.

Resolução
(A, B, C) é uma PA. Sendo r sua razão, podemos escrever:
(B - r, B, B + r)
Pelo teorema angular de Tales:
A + B + C = 180º   I
B - r + B + B + r = 180º
3B = 180º ∴ B = 60º
Como o triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $R = 2\sqrt{3}$***, temos pelo teorema dos senos:***



$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R = 4\sqrt{3}$$

Sendo $a = 2\sqrt{3}$***, temos:***

$$\frac{2\sqrt{3}}{\text{sen } A} = 4\sqrt{3}$$

senA = 1/2, logo A = 30º ou 150º(não convém)
Segue-se de I que C = 90º
Logo,

$$\frac{c}{\text{sen } 90º} = 4\sqrt{3} \therefore c = \text{sen } 90º.4\sqrt{3} \therefore c = 4\sqrt{3}$$

---

20) (ITA-91) Se $a \in \Re$ com $a > 0$ e arc sen $\dfrac{a-1}{a+1}$ está no primeiro quadrante, então o valor de tg [arc sen $\dfrac{a-1}{a+1}$ + arc tg $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$] é:

a) $\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{a\sqrt{a}}{3a+1}$ c) $\dfrac{2a\sqrt{a}}{3a+1}$

d) $\dfrac{2a}{3a+1}$ e) n.d.a.

Resolução

Fazendo $\alpha = \text{arcsen}\dfrac{a-1}{a+1}$ ***e*** $\beta = \text{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$***, queremos determinar tg(α + β). Assim:***

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{a-1}{a+1} (0 < \alpha < \pi/2 \text{ do enunciado}) \\ \text{tg}\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}, -\pi/2 < \beta < \pi/2 \end{cases}$$

Pelo relação fundamental:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}} = \sqrt{\frac{(a+1)^2(a-1)^2}{(a+1)^2}} = \sqrt{\frac{4a}{(a+1)^2}} = \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \textit{ (pois a > 0)}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} \therefore \text{tg}\alpha = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\text{tg}\beta} \therefore \text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}}{1 - \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}.\dfrac{1}{2\sqrt{a}}} = \frac{\dfrac{a-1+1}{2\sqrt{a}}}{\dfrac{4a-a+1}{4a}}$$

$$= \frac{4a^2}{2\sqrt{a}.(3a+1)} = \frac{2a\sqrt{a}}{3a+1}$$

---

21) (ITA-91) Sejam a e b constantes reais positivas. Para que a equação $\cos^3 x + (a - 1)\cos^2 x - (a + b)\cos x + b = 0$ tenhas duas raízes reais distintas no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ devemos ter:

a) $0 < b \leq a - 1$ b) $0 < b < a + 1$ c) $a < b < a + 2$
d) $a + 1 < b \leq a + 2$ e) n.d.a.

Resolução
$\cos^3 x + a\cos^2 x - \cos^2 x - a\cos x - b\cos x + b = 0$
$\cos^2 x(\cos x - 1) + a\cos x(\cos x - 1) - b(\cos x - 1) = 0$
$(\cos x - 1)(\cos^2 x + a\cos x - b) = 0$
$\cos x = 1 \therefore x = 0$ ***(pois*** $x \in [0, \pi/2]$***)***
ou
I

$$\cos^2 x + a\cos x - b = 0 \begin{cases} \cos x = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos x = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{cases}$$

Sendo a > 0, b > 0 e o produto das raízes da equação do 2º grau na variável cosx negativo, temos que:

$$0 < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} < 1 \therefore 0 < -a + \sqrt{a^2 + 4b} < 2 \therefore$$

$$\therefore a < \sqrt{a^2 + 4b} < a + 2 \therefore a^2 < a^2 + 4b < a^2 + 4a + 4 \therefore$$

$$\therefore 0 < 4b < 4(a+1) \therefore 0 < b < a + 1$$

---

22) (ITA-91) Considere a região ao plano cartesiano xy definido pela desigualdade: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \leq 0$. Quando

esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta y + x + 1 = 0, ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:

a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{4\pi}{9}$ e) n.d.a.

Resolução

A desigualdade $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \le 0$ é equivalente a $(x - 1)^2 + (y + 2)^2$ e representa no plano xy um círculo de centro C = (1,-2) e raio R = 1.

A reta de equação y + x + 1 = 0 passa pelo centro desse círculo, já que o par ordenado (1,-2) verifica a equação.

Girando o círculo de $\pi/3$ rad em torno da reta obtemos um sólido formado por duas cunhas esféricas opostas pelo diâmetro. Essas cunhas são congruentes e portanto tem o mesmo volume.

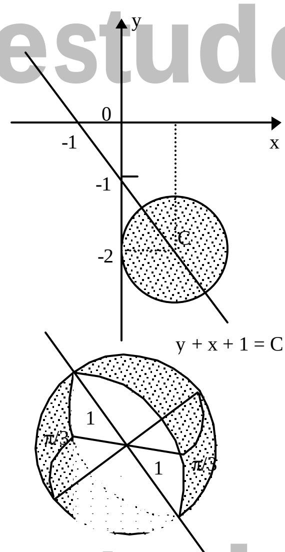
Seja V o volume de uma delas. Devemos ter:

2π rad - $4/3\pi 1^3$ (volume da esfera)

$\pi/3$ rad - V

Portanto V = $2\pi/9$

Logo, o volume do sólido gerado é 2V, ou seja, $4\pi/9$.



23) (ITA-91) As arestas da base de uma pirâmide triangular regular medem λ cm e as faces laterais são triângulos retângulos. O volume desta pirâmide é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}\lambda^3 cm^3$ b) $\frac{\sqrt{3}}{12}\lambda^3 cm^3$ c) $\frac{\sqrt{3}}{24}\lambda^3 cm^3$

d) $\frac{\sqrt{2}}{12}\lambda^3 cm^3$ e) n.d.a.

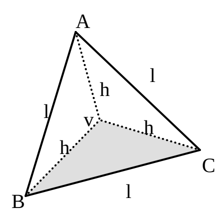
Resolução

Uma pirâmide triangular regular cujas faces laterais são triângulos retângulos é um tetraedro tri-retangular cuja face oposta ao triedro tri-retângulo é um triângulo eqüilátero de lado l.

Cálculo de h:

Na face AVC, temos:

$$h^2 + h^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2/2 \Rightarrow h = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}$$



Cálculo da área da base BVC:

$B = 1/2h^2 = l^2/4$

Cálculo do volume da pirâmide:

$$V = 1/3.B.h = 1/3.l^2/4.\frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{24}.l^3 cm^3$$

24) (ITA-91) Seja r a mediatriz do segmento de reta de extremos M = (-4 , -6) e N = (8 , -2). Seja R o raio da circunferência com centro na origem e que tangencia a reta r. Então:

a) R = $\frac{\sqrt{7}}{3}$ b) R= $\frac{\sqrt{15}}{3}$ c) R= $\frac{\sqrt{10}}{3}$

d) R = $\frac{\sqrt{10}}{5}$ e) n.d.a.

Resolução

Sendo:

P o ponto médio do segmento MN;

m_r o coeficiente angular da reta r;

m_s o coeficiente angular de MN;

O a origem do sistema e

R a medida do raio da circunferência de centro O e tangente à reta r, temos que:

P (2, -4) e $m_r = -\frac{1}{m_s} = -3$ (r perpendicular MN)

Logo, a equação da reta r é:

$y + 4 = -3(x - 2) \Rightarrow (r)\ 3x + y - 2 = 0$

Assim, devemos Ter:

$$R = \frac{|3.0 + 0 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

25) (ITA-91) Seja C a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$. Se P = (a , b) é o ponto em C mais próximo da origem, então:

a) $a = -\frac{3}{2}$ e $4b^2 + 24b + 15 = 0$

b) $a = -\frac{1}{2}$ e $4b^2 + 24b + 33 = 0$

c) $a = \frac{\sqrt{10}}{10} - 1$ e b = 3a

d) $a = -1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$ e b = 3a

e) n.d.a.

Resolução

C: $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$ ou C: $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$

(centro de C: (-1;-3) e raio de C: 1)

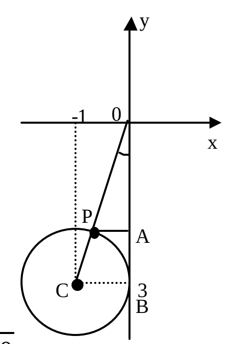
Gráfico de C

O ponto de C mais próximo da origem O está na interseção de C com a reta OC. Temos:

$$OC = \sqrt{(0+1)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{10}$$

$$OP = \sqrt{10} - 1$$

Traçando por P e C os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{CB}$ paralelos ao eixo dos x, resulta os triângulos OPA e OCB semelhantes (1º caso). Logo,



$$\frac{OP}{OC} = \frac{PA}{CB} \therefore \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}} = \frac{|a|}{1} \therefore |a| = 1 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

e

$$\frac{OA}{OB} = \frac{PA}{CB} \therefore \frac{|b|}{3} = \frac{|a|}{1} \therefore |b| = 3.|a|$$

Sendo P(a,b) ponto do 3º quadrante, resulta

$$a = -\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{10}\right) \therefore a = \frac{\sqrt{10}}{10} - 1 \textbf{ e } b = 3a$$