1. Os valores de x que satisfazem a equação $3^{\cos x}=1$ são:

a) $k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$ b) $2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

c) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}.$ d) $\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}.$

2. A soma dos valores inteiros de $\underline{a}$ na igualdade $\cos\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{5-4a}{9}$ é igual a:

a) 11. b) 10. c) 9. d) 6. e) 5.

3. Determine como $m\in R$ pode variar de modo que, $\forall x$, exista m com:

a) $\text{sen}(x)=\frac{2m-4}{3}$ b) $\cos(x)=\frac{3m-5}{7}$

c) $\text{sen}^2(x)=\frac{3m+2}{5}$ d) $\cos^2(x)=\frac{2m+1}{2m-1}$

4. Calcule as demais funções trigonométricas de x se:

a) $\text{sen}(x)=\frac{4}{5};\frac{\pi}{2}<x<\pi$ b) $\text{tg}(x)=-\frac{3}{4};\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

c) $\text{cotg}(x)=\frac{5}{12};\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ d) $\cos(x)=\frac{24}{25};\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

5. Se $x\in R$, determine o intervalo em que podem variar as seguintes expressões:

a) $\frac{1}{3-\cos(x)}$ b) $\frac{4}{3+2\text{sen}(x)}$

c) $\frac{2}{3+3\cos(x)};x\neq\pi+2k\pi,k\in Z$

d) $\frac{1+2\text{sen}(x)}{3+\text{sen}(x)}$

6. Determine os possíveis valores das seguintes expressões, em que $k\in Z$:

a) $\text{sen}\left[(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$ b) $\text{tg}\left[\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{6}\right]$

7. Determine o valor de $m\in R$ de modo que as seguintes sejam válidas simultaneamente:

a) $\text{sen}(x)=2m+1;\ \cos(x)=4m+1$

b) $\text{sen}(x)=m-\frac{1}{2};\ \cos(x)=m+\frac{1}{2}$

8. Sendo dado que sen(x) + cos(x) = a, calcule:

a) $\text{sen}(x)\cos(x)$ b) $\text{sen}^3(x)+\cos^3(x)$

c) $\text{sen}^4(x)+\cos^4(x)$ d) $\text{sen}^5(x)+\cos^5(x)$

e) $\text{sen}^6(x)+\cos^6(x)$

9. Sendo tg(x) + cotg(x) = m, calcule:

a) $\text{tg}(x)-\text{cotg}(x)$ b) $\text{tg}^2(x)+\text{cotg}^2(x)$

c) $\text{tg}^2(x)-\text{cotg}^2(x)$ d) $\text{tg}^3(x)+\text{cotg}^3(x)$

10. Eliminar em cada item as funções circulares existentes, obtendo uma relação entre os demais parâmetros.

a) $\begin{cases}\text{tg}x+\text{sen}x=a\\ \text{tg}x-\text{sen}x=b\end{cases}$ b) $\begin{cases}\text{sen}x+\cos x=a\\ \text{sen}^3x+\cos^3x=b\end{cases}$

c) $a\cdot\text{sen}x=b\cdot\cos x=\frac{2c\cdot\text{tg}x}{1-\text{tg}^2x}$ d) $\begin{cases}a\cdot\cos^2x\cdot\text{sen}x=M\\ a\cdot\text{sen}^2x\cdot\cos x=n\end{cases}$

e) $\begin{cases}(b-c)\text{tg}^2x+(c-a)\text{cotg}^2x=d\\ a\cdot\cos^2x+b\text{sen}^2x=c\end{cases}$

11. Se $y=2-3\text{sen}x$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em $\mathbb{R}$ é:

a) 5. b) 1. c) 3. d) –1. e) 6.

12. Determine a condição que $\underline{m}$ deve satisfazer, de forma que $\text{sen}x=\sqrt{2-m}$ e $\cos x=\sqrt{m^2-1}$.

13. Determine os possíveis valores que $\sqrt{1+\cos^2(x)-\text{sen}^2(x)}+\sqrt{1-\cos^2(x)+\text{sen}^2(x)}+$ $+\sqrt{2}(\text{sen}(x)+\cos(x))$ pode assumir.

14. Seja $\underline{x}$ um ângulo que possui tangente tal que $\text{sen}x+2\cos x=1$. O valor de $\text{tg}x$ é:

a) $\frac{3}{4}$. b) $\frac{4}{3}$. c) $-\frac{3}{4}$. d) $-\frac{4}{3}$. e) 0.

15. Se $\frac{\text{sen}x-\text{sen}y}{\cos x-\cos y}=2$ e $\text{tg}x=\frac{1}{3}$, então $\text{tg}y$ é igual a:

a) 3. b) $\frac{1}{6}$. c) 0. d) $-\frac{1}{6}$. e) –3.

16. Analise os valores distintos assumidos abaixo, onde $k\in\mathbb{Z}$:

a) $\text{sen}\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}\pm\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right]$.

b) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}+(-1)^k\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

c) $\text{sen}\left[k\pi+(-1)^k a\right]$.

17. Simplifique $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)\cdot\csc(-a)}{\text{tg}(\pi+a)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}$.

18. Se $f(x)=\frac{\text{tg}7x+\text{tg}11x+\text{tg}5x}{\text{tg}23x+\text{tg}17x+\text{tg}19x}$, qual o valor de $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$?

19. Se $A+B+C=2\pi$ e

$P=\operatorname{sen}A\cdot\operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}C\cdot\operatorname{sen}(B+C)$,

o valor de P é:

a) 0.
b) -1.
c) $\operatorname{sen}A\cdot\operatorname{sen}C$.
d) $\cos C$.
e) 1.

20. Verifique que as igualdades abaixo para todo valor de $x\neq 2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$, onde n é um número inteiro qualquer. Tais igualdades são chamadas identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}=\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}$.
b) $\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

21. Encontre as três menores soluções positivas da equação $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

22. Determine o conjunto dos números reais x tais que $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

23. Quantos são os valores distintos de $\cos\frac{k\pi}{3}$, k inteiro?

24. Determine para que valores de x a função $y=5-\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$ assume seu valor máximo.

25. Determine o conjunto dos números reais x tais que $\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}$.

26. Verdadeiro ou falso?

a) sen 2 > 0
b) cos 4 < 0
c) sen 3 > sen 2
d) cos 3 > cos 2
e) tg 5 > tg 6
f) $\cos\frac{\pi}{4}>\cos 1$
g) $\cos\sqrt{3}<0$

27. Se x está no segundo quadrante e tg x = $2\sqrt{2}$, calcule as demais funções de x.

28. Determine todas as soluções da equação $\sec\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2$

29. Prove as identidades abaixo, para $x\neq n\pi/2$:

a) $\sec x\cdot\operatorname{ctg}x=\operatorname{cosec}x$.
b) $\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}=\operatorname{sen}x$.
c) $\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}=2\operatorname{sen}^2 x-1$.

30. Calcular m para que exista um ângulo x com $\cos x=\dfrac{2}{m-1}$ e $\operatorname{tg}x=\sqrt{m-2}$.

31. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=1-2\operatorname{sen}^2 x$.
b) $\dfrac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}=\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$.
c) $\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}=(\sec x=\operatorname{tg}x)^2$.
d) $\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{cosec}x-\operatorname{ctg}x}=1+\cos x$.

32. Sabendo que $\operatorname{tg}x+\sec x=\frac{3}{2}$, calcular sen x e cos x.

33. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x-3\operatorname{sen}x\cdot\cos=2$, calcular tg x.

34. Sabendo que $\operatorname{sen}x+\cos x=m$, calcular $\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x$.

35. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x=1$, provar que $\cos^4 x+\cos^2 x=1$.

36. Provar que para quaisquer números reais a e b, $2(1-\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b)\geq\cos^2 a+\cos^2 b$.

37. Sabendo que $\begin{cases}1+\cos x=a\operatorname{sen}x\\1-\cos x=b\operatorname{sen}x\end{cases}$ encontre uma relação entre a e b.

38. Calcule k de modo que as raízes da equação $x^2-2kx+k^2+k=0$ sejam o seno e o co-seno de um mesmo ângulo.

39. Sabendo que $\begin{cases}a\sec x=1+\operatorname{tg}x\\b\sec x=1-\operatorname{tg}x\end{cases}$ encontre uma relação entre a e b.

40. Prove a identidade abaixo, válida para todo x onde a expressão do lado esquerdo está bem definida.

$$\frac{\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x-\cos x}=\operatorname{tg}x$$

41. Determinar para que valores de <u>a</u> a equação $1+\operatorname{sen}^2 ax=\cos x$ admite alguma solução não nula.

42. De um triângulo ABC são dados o lado $\overline{BC}$ = a e o ângulo $\widehat{ABC}=\alpha$. Determinar em cada um dos casos: $\alpha<90^\circ$, $\alpha=90^\circ$ e $\alpha>90^\circ$ que valores pode ter o lado AC para garantir a existência do triângulo. Determine ainda, em que caso pode existir mais de uma solução.

43. Prove que para $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\cos^2 x+x\operatorname{sen}x<2$.

44. Se sen θ + cos θ = $\sqrt{2}/3$, onde $\pi/2<\theta<\pi$, determine o valor de sen θ – cos θ.

45. Simplificar a expressão

$$\frac{1}{\operatorname{sen}x}\left[(2\cos x-\operatorname{sen}x)\operatorname{cotg}x+2\operatorname{sen}x+\cos x\right]\cdot\left[1+\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}x}{2\cos x-\operatorname{sen}x}\right)^{-2}\right]^{-1}-$$
$$-\frac{\cos 2x\left[2(1-\operatorname{sen}x\cos x)+(\operatorname{sen}x+\cos x)^2\right]}{6(\operatorname{sen}x+\cos x)^2(1-\operatorname{sen}x\cos x)}$$

46. Encontre a relação entre m e n, eliminando os ângulos θ e φ nas expressões: $m^2 \operatorname{tg}^2\theta + n^2 \operatorname{tg}^2\varphi = 1$, $m^2\cos^2\theta + n^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 1$ e $m \operatorname{sen}\theta = n\cos\varphi$.

GABARITO

1. A **2.** E

2.

a) 0 b) 1

c) 1 d) 0

e) $\frac{101}{2}$

3.

a) $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ b) $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$

c) $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ d) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

4.

a) $\cos(x) = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg}(x) = -\frac{4}{3}, \operatorname{cotg}(x) = -\frac{3}{4}, \sec(x) = -\frac{5}{3}, \operatorname{cossec}(x) = \frac{5}{4}$

b) $\operatorname{sen}(x) = -\frac{3}{5}, \cos(x) = \frac{4}{5}, \operatorname{cotg}(x) = -\frac{4}{3}, \sec(x) = \frac{5}{4}, \operatorname{cossec}(x) = -\frac{5}{3}$

c) $\operatorname{sen}(x) = -\frac{12}{13}, \cos(x) = -\frac{5}{13}, \operatorname{tg}(x) = \frac{12}{5}, \sec(x) = -\frac{13}{5}, \operatorname{cossec}(x) = -\frac{13}{12}$

d) $\operatorname{sen}(x) = -\frac{7}{25}, \operatorname{tg}(x) = -\frac{7}{24}, \operatorname{cotg}(x) = -\frac{24}{7}, \sec(x) = \frac{25}{24}, \operatorname{cossec}(x) = -\frac{25}{7}$

5.

a) $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ b) $\left[\frac{4}{5}, 4\right]$

c) $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ d) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

6.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.

a) $-1, -\frac{1}{5}$ b) $\pm\frac{1}{2}$

8.

a) $\frac{a^2-1}{2}$ b) $\frac{3a-a^3}{2}$

c) $\frac{1+2a^2-a^4}{2}$ d) $\frac{5a-a^5}{4}$

e) $\frac{1+6a^2-3a4}{4}$

9.

a) $\pm\sqrt{m^2-4}$ b) m^2-2

c) $\mp m\sqrt{m^2-4}$ d) m^3-3m

10.

a. $(a^2-b^2)^2 = 16ab$

b. $a^3 + 2b = 3a$

c. $(a^2-b^2)^2 = 4c^2(a^2+b^2)$

d. $(M^2+n^2)^3 = a^2 \cdot M^2 \cdot n^2$

e. $a + d = b$

11. A

12. $m = 1$.

13) $2\sqrt{2}(\operatorname{sen}x + \cos x), 2\sqrt{2}\operatorname{sen}x, 0, 2\sqrt{2}\cos x$

14. C

15. E

16.

a) $\operatorname{sen}a$. b) $\cos a$. c) $\operatorname{sen}a$.

17. $-\cos a$.

18. 1.

19. 0.

20. Demonstração.

21. $\pi/4, 7\pi/12$ e $11\pi/12$.

22. $\{k\pi/2 + \pi/6 \mid k \in Z\}$.

23. 4.

24. $2k\pi + 4\pi/5$.

25. $\{k\pi/2 + \pi/6 \mid k \in Z\}$.

26.

a) V; b) V; c) F; d) F; e) F; f) V; g) V.

27.

$\operatorname{sen} x = 2\sqrt{2}/3$, $\cos x = -1/3$, $\operatorname{cosec} x = -3\sqrt{2}/4$, $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{2}/4$, $\sec x = -3$.

28. $x = k\pi, x = k\pi - \pi/3$.

29. Demonstração.

30. 5.

31. Demonstração.

32. 5/13 e 12/13.

33. – 1 ou – 2.

34. $(3m - m^3)/2$.

35. Demonstração.

36. Demonstração.

37. $ab = 1$.

38. $(1-\sqrt{3})/2$.

39. $a^2 + b^2 = 2$.

40. Demonstração.

41. a racional.

42. Há uma única solução para $\overline{AC} = a \cdot \operatorname{sen}\alpha$ e para $\overline{AC} \geq a$.

Há duas soluções para $a \cdot \operatorname{sen}\alpha < \overline{AC} < a$.

Não há solução para $\overline{AC} < a \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

43. Demonstração

44. 4/3

45. $\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}$

46. $m \neq 0$, $n \neq 0$, $0 < \frac{m^2+n^2-1}{2n^2} \leq 1$,

$0 < \frac{m^2-n^2+1}{2m^2} \leq 1$ e $\frac{2m^4}{m^2-n^2+1} + \frac{2n^4}{m^2+n^2-1} = m^2+n^2+1$