OBJETIVO

ITA

Matemática

10

MÓDULO 37

Inequação

1. **(ITA)** – Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) apenas I e III.
e) todas.

2. **(ITA)** – Uma vez que, para todo $x \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade $x^n > n(x - 1)$, temos como consequência que, para $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

a) $x^{n-1} < [n(1 + x)]^{-1}$
b) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{-1}$
c) $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$
d) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
e) $x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$

3. Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{a \cdot x^2 - b}{ax - b} < x$, sabendo-se que **a** e **b** são números reais de sinais contrários.

4. Encontrar todos os valores reais de m, de modo que $(m^2 - 1) \cdot x^2 + 2 \cdot (m - 1)x + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

MÓDULO 38

Inequação

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2,$$ para todo x real?

2. **(OBM)** – Os valores reais de x que satisfazem a inequação $\sqrt{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x}} \le 2$ são:

a) $-1 \le x \le 1$ b) $x = 1$ c) $x \le 1$
d) $x \ge 1$ e) $x \le 2$

3. Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} \ge \frac{7}{12}$$

MÓDULO 39

Inequação

1. Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} + \left|\frac{x - 1}{x - 2}\right| - 12 < 0$$

2. **(ITA)** – Considere as funções f e g definidas por $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$, para $x \neq 0$, e $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$, para $x \neq -1$. O conjunto de todas as soluções da inequação

$(gof)(x) < g(x)$ é:

a) $[\,1, +\infty\,[$

b) $]\,-\infty, -2\,[$

c) $[\,-2, -1\,[$

d) $]\,-1, 1\,[$

e) $]\,-2, -1\,[\ \cup\ ]\,1, +\infty\,[$

3. **(ITA)** – Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com a < b, o número real b – a é chamado de comprimento de I.

Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$.

A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a

a) $\dfrac{3}{4}$. b) $\dfrac{3}{2}$. c) $\dfrac{7}{3}$. d) $\dfrac{11}{6}$. e) $\dfrac{7}{6}$.

MÓDULO 40

Inequação

1. Resolver a inequação $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$

2. **(OPM)** – Determine os valores reais de r para os quais o trinômio abaixo seja positivo para todos os valores reais de x.

$y = (1 - r^2)x^2 + 2(r + 1)x + 1$

3. **(IME)** –

a) Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que:

$\dfrac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$. Em que condições a igualdade se verifica?

b) Considere um paralelogramo (entenda paralelepípedo reto retângulo) de lados a, b e c e área total S_0. Determine o volume máximo desse paralelogramo em função de S_0. Qual a relação entre a, b e c para que esse volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 37

1. Prove que todo número de três algarismos não nulos, dividido pela soma de seus algarismos, resulta em um número menor que 100.

2. Os valores reais de k e p que tornam a inequação $\dfrac{-x^2 + (2-k)x + (p+4)}{x^2 - 5x + (2p+1)} > 0$ verdadeira qualquer que seja x real, são tais que k + p é igual a:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

■ MÓDULO 38

1. Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2$

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\sqrt{\frac{2x-5}{2x+5}} + \sqrt{\frac{2x+5}{2x-5}} < \frac{13}{6}$$

■ MÓDULO 39

1. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 1} - 7 \cdot \left(\frac{x+3}{x-1}\right) + 10 \geq 0$$

2. A soma e o produto dos valores inteiros de x que satisfazem a inequação $x^3 - 14x^2 + 49x - 36 \geq 0$ e são menores que 12, são, respectivamente:

a) 30 e 32070 b) 35 e 73620 c) 38 e 12630
d) 40 e 23760 e) 42 e 37260

■ MÓDULO 40

1. Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

2. Demonstre que para qualquer valor de n natural e maior que 1 tem-se

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

3. **(OPM)** – Prove que, para quaisquer reais x e y maiores ou iguais a $\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x + y + 1}$

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 37

1) Sejam *a*, *b* e *c*, distintos entre si, algarismos do número "abc" de três algarismos distintos. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{100a = 100a} \\ \mathbf{10b < 100b} \\ \mathbf{1c < 100c} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{100a + 10b + 1c < 100a + 100b + 100a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{“abc”} < 100 \cdot (a+b+c) \Leftrightarrow \frac{\text{“abc”}}{a+b+c} < 100, \text{ pois}$$

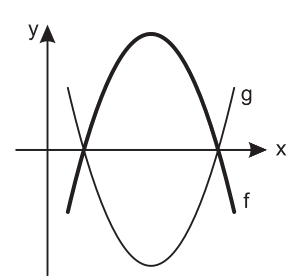
"abc" = 100a + 10b + 1c e a + b + c > 0

Resposta: Demonstração

2) Para que a inequação $\dfrac{-x^2 + (2-k)x + (p+4)}{x^2 - 5x + (2p+1)} > 0$

seja verdadeira qualquer que seja x real, e tal que $x^2 - 5x + (2p+1) \neq 0$**, as funções** $f(x) = -x^2 + (2-k) + (p+4)$ **e** $g(x) = x^2 - 5x + (2p+1)$ **deverão ter as mesmas raízes e gráficos como os expostos abaixo.**

Desta forma, a soma das raízes de *f* deve ser igual a soma das raízes de *g* e o produto das raízes de *f* deve ser igual ao produto das raízes de *g*.



Assim, $-(2-k) = 5$ **e** $p + 4 = 2p + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 7$ **e** $p = 3 \Rightarrow k + p = 10$.

Resposta: C

■ MÓDULO 38

1) $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} - 2 \leq 0 \\ \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 1} \leq 0 \\ \dfrac{2x^2 - 7x + 7}{x^2 + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \text{ (I)} \\ 2x^2 - 7x + 7 > 0 \text{ (II)} \end{cases}$, pois $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

De (I) tem-se $1 \leq x \leq 6$ e de (II) tem-se $\forall x \in \mathbb{R}$.

De (I) e (II) tem-se $1 \leq x \leq 6$.

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$

2) Fazendo $\sqrt{\dfrac{2x - 5}{2x + 5}} = y \geq 0$, temos:

$\sqrt{\dfrac{2x - 5}{2x + 5}} + \sqrt{\dfrac{2x + 5}{2x - 5}} < \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow y + \dfrac{1}{y} < \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow 6y^2 - 13y + 6 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < y < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < \sqrt{\dfrac{2x - 5}{2x + 5}} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < \dfrac{2x - 5}{2x + 5} < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{4}{9} < \dfrac{2x - 5}{2x + 5} \Leftrightarrow \dfrac{2x - 5}{2x + 5} - \dfrac{4}{9} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{10x - 65}{9(2x + 5)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 13}{2x + 5} > 0 \\ \dfrac{2x - 5}{2x + 5} < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2x - 5}{2x + 5} - \dfrac{9}{4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-10x - 65}{4(2x + 5)} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 13}{2x + 5} > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 13)(2x + 5) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{5}{2} \text{ ou } x > \dfrac{13}{2} \\ (2x + 13)(2x + 5) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{13}{2} \text{ ou } x > -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\dfrac{13}{2} \text{ ou } x > \dfrac{13}{2}$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{13}{2} \text{ ou } x > \dfrac{13}{2} \right\}$

■ MÓDULO 39

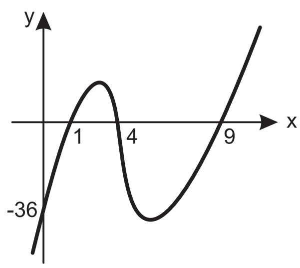
1) $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 1} - 7 \cdot \left(\dfrac{x + 3}{x - 1} \right) + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x + 3}{x - 1} \right)^2 - 7 \cdot \left(\dfrac{x + 3}{x - 1} \right) + 10 \geq 0$. Fazendo

$\left(\dfrac{x + 3}{x - 1} \right) = y$ temos: $\left(\dfrac{x + 3}{x - 1} \right)^2 - 7 \cdot \left(\dfrac{x + 3}{x - 1} \right) + 10 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 10 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \leq 2 \text{ ou } y \geq 5 \Rightarrow \dfrac{x + 3}{x - 1} \leq 2 \text{ ou } \dfrac{x + 3}{x - 1} \geq 5 \Leftrightarrow \dfrac{-x + 5}{x - 1} \leq 0 \text{ ou } \dfrac{-4x + 8}{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x \geq 5) \text{ ou } 1 < x \leq 2$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$

2) Observemos que 1 é raiz da função
$f(x) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36$, pois
$f(1) = 1^3 - 14.1^2 + 49.1 - 36 = 0$.
Fatorando a função temos:
$f(x) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36 = x^3 - x^2 - 13x^2 + 13x +$
$+ 36x - 36 = x^2 . (x - 1) - 13x .(x - 1) + 36. (x - 1) =$
$= (x - 1) . (x^2 - 13x + 36) = (x - 1)(x - 4)(x - 9)$
Assim, as raízes da função são 1, 4 e 9 e o gráfico da função é do tipo



Do gráfico se conclui $x^3 - 14x^2 + 49x - 36 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$ ou $x \geq 9$. Neste intervalo são inteiros e menores que 12 os números 1, 2, 3, 4, 9, 10 e 11.
A soma e o produto desses números são, respectivamente, 40 e 23760.
Resposta: D

■ MÓDULO 40

1) I) $3x^2 + 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{2}{3}$ ou $x \geqslant 0$

II) $$\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x < x^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x\,(x^3 - 3x - 2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot (x^3 - x - 2x - 2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\,[x\,(x + 1)\,(x - 1) - 2\,(x + 1)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\,(x + 1)\,(x^2 - x - 2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\,(x + 1)\,(x + 1)\,(x - 2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\,(x + 1)^2\,(x - 2) > 0 \Rightarrow x\,(x - 2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 2) \text{ e } x \neq -1$$

De I e II, concluímos que $\left(x \leq -\dfrac{2}{3} \text{ e } x \neq -1\right)$ ou $x > 2$

Resposta: $A =]-\infty; -1[\cup \left]-1; -\dfrac{2}{3}\right] \cup]2; +\infty[$

2) Sendo cada um dos número consecutivos (n + 1), (n + 2), (n + 3), ..., (2n – 1) sempre menores que 2n, temos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{n+2} > \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{n+3} > \dfrac{1}{2n} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > n . \left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

Resposta: Demonstração

3) Sendo x e y maiores ou iguais a $\dfrac{1}{2}$, temos

$$\left.\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{2} \\ y \geq \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x . y \geq \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4xy \geq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq x + 1 + y \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x})^2 \geq x + y + 1,$$

pois os números envolvidos são todos positivos.
Desta forma, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x + y + 1}$
Resposta: Demonstração