Função Composta e Função Inversa

FUNÇÃO BIJETORA

Uma função f: A → B é bijetora se, e somente se, essa função atende às seguintes condições.

i) A sua imagem (Im) é igual ao seu contradomínio (CD) (**f** é sobrejetora).

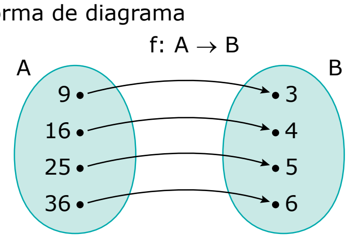
Observe que, ao representarmos simbolicamente uma função **f** na forma f: A → B, o conjunto **A** é o domínio da função, e o conjunto **B** é o contradomínio da função. Portanto, a condição é satisfeita se, e somente se, Im = B.

ii) Para quaisquer elementos x_1 e x_2 do domínio **A**, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$ (**f** é injetora).

Em outras palavras, cada elemento da imagem deve estar relacionado com um único elemento do domínio. Logo, uma função será bijetora quando for sobrejetora e injetora.

Exemplos:

1º) Em forma de diagrama



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = A = {9, 16, 25, 36}

Contradomínio: CD = B = {3, 4, 5, 6}

Imagem: Im = {3, 4, 5, 6}

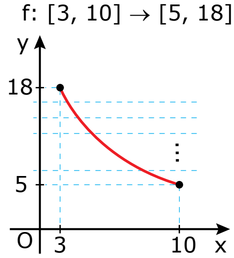
Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio.

2º) Em forma de gráfico

f: [3, 10] → [5, 18]



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = [3, 10]

Contradomínio: CD = [5, 18]

Imagem (projeção do gráfico no eixo das ordenadas): Im = [5, 18]

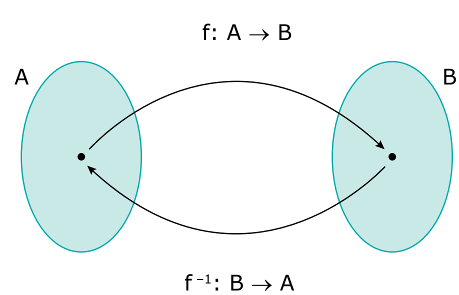
Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio. Para tal verificação, basta traçarmos linhas paralelas ao eixo das abscissas, a partir da imagem. Cada uma dessas linhas deve interceptar a curva em um único ponto, para que a condição seja satisfeita.

FUNÇÃO INVERSA

Considere o diagrama a seguir:



No diagrama, está indicada uma função **f** que associa a cada elemento de **A** a sua imagem em **B**. A função inversa de **f**, indicada por f^{-1}, é a função que associa a cada elemento de **B** o elemento de **A** associado a **B** por **f**.

Observe que **f** deve ser uma função bijetora.

Uma função bijetora f: A → B é inversível, e sua inversa é a função f^{-1}: B → A se, e somente se, para todo $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

Cálculo da função inversa – regra prática

i) Trocar **x** por **y** e **y** por **x**.

ii) Isolar o novo **y**.

Exemplos:

Determinar a função inversa das seguintes funções.

1º) $f(x) = 3x$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**): $x = 3y$

(isolar o novo **y**): $y = \frac{x}{3}$

Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

2º) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, para $x \neq -2$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**):

$x = \frac{y-1}{y+2} \Rightarrow y - 1 = xy + 2x \Rightarrow y - xy = 2x + 1$

(isolar o novo **y**):

$y(1 - x) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{1-x}$, para $x \neq 1$

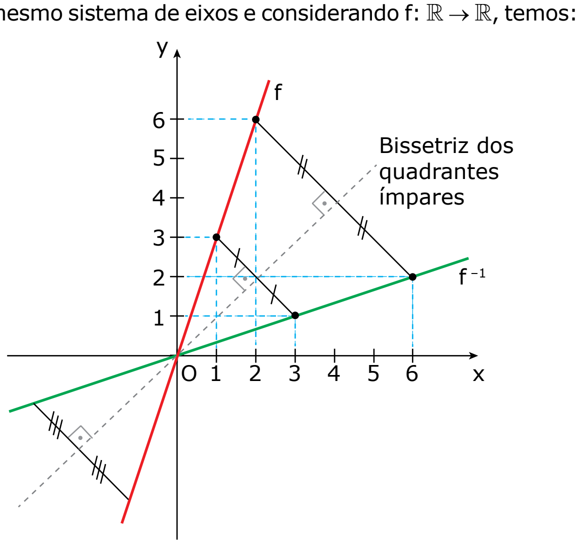
Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

OBSERVAÇÃO

- Os gráficos da função **f** de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo:

Esboçando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ em um mesmo sistema de eixos e considerando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFV-MG) Seja **f** a função real, tal que $f(2x - 9) = x$, para todo **x** real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para **c** igual a:

A) 5.
B) 7.
C) 3.
D) 9.
E) 1.

Resolução:

Cálculo de $f(c)$:

Fazendo $2x - 9 = k$, temos $x = \frac{k+9}{2}$. Portanto, temos que $f(k) = \frac{k+9}{2}$. Logo, podemos dizer que $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Então, para $x = c$, temos $f(c) = \frac{c+9}{2}$.

Cálculo de $f^{-1}(c)$:

Temos $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Trocando **x** por **y** e **y** por **x**, temos:

$x = \frac{y+9}{2} \Rightarrow y = 2x - 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 9$

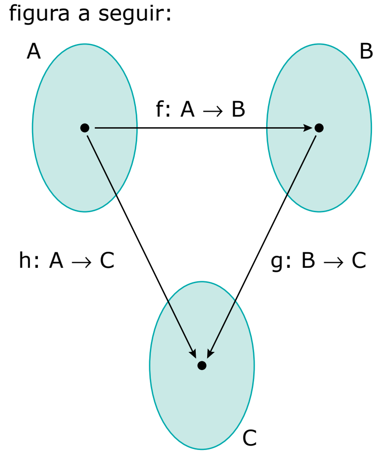
Logo, para $x = c$, temos $f^{-1}(c) = 2c - 9$.

Fazendo $f(c) = f^{-1}(c)$, obtemos:

$\frac{c+9}{2} = 2c - 9 \Rightarrow 4c - 18 = c + 9 \Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9$

FUNÇÃO COMPOSTA

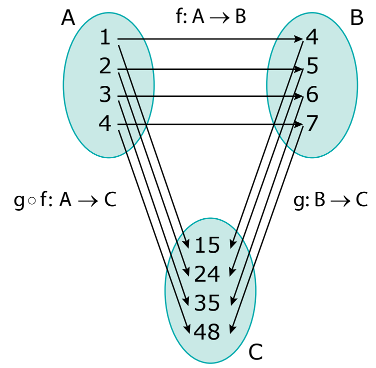
Sejam as funções **f** e **g**, tal que $f: A \to B$ e $g: B \to C$, conforme a figura a seguir:



Considere uma função $h: A \to C$ que produz os mesmos resultados que as funções **f** e **g** aplicadas em sequência, ou seja, que relaciona cada elemento de **A** com o correspondente elemento de **C** sem passar pelo conjunto **B**. Tal função **h** é denominada função composta de **f** e **g**.

Denotamos a função composta h(x) por g(f(x)) ou g ∘ f(x).

Como exemplo, considere os conjuntos **A**, **B** e **C** representados a seguir e sejam as funções f: A → B e g: B → C, tais que f(x) = x + 3 e g(x) = x^2 – 1. Vamos descobrir a expressão matemática da função g(f(x)), que relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.



Para calcular a expressão da função g(f(x)), devemos substituir o **x** na expressão de g(x) por f(x).

Assim, como g(x) = x^2 – 1, temos:

g(f(x)) = $f(x)^2$ – 1

Mas, f(x) = x + 3. Portanto, temos:

g(f(x)) = g(x + 3) = $(x + 3)^2$ – 1 = x^2 + 6x + 9 – 1

Assim, g(f(x)) = x^2 + 6x + 8.

Observe que essa expressão realmente relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.

- Para x = 1, temos g(f(1)) = 1^2 + 6 . 1 + 8 = 15.
- Para x = 2, temos g(f(2)) = 2^2 + 6 . 2 + 8 = 24.
- Para x = 3, temos g(f(3)) = 3^2 + 6 . 3 + 8 = 35.
- Para x = 4, temos g(f(4)) = 4^2 + 6 . 4 + 8 = 48.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. Sejam as funções f: ℝ → ℝ e g: ℝ → ℝ tais que f(x) = 2x + 3 e g(x) = x – 2. Calcular:

A) f(g(2))

Resolução:

f(g(2)) = f(0) = 3

B) f ∘ g ∘ g(1)

Resolução:

f ∘ g ∘ g(1) = f(g(g(1))) = f(g(–1)) = f(–3) = –3

C) f(g(x))

Resolução:

f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x – 2) + 3 = 2x – 1

D) g ∘ f(x)

Resolução:

g ∘ f(x) = g(f(x)) = f(x) – 2 = 2x + 3 – 2 = 2x + 1

03. Considere as funções f(x) = 4x + 11 e f(g(x)) = 6x – 10. Determinar a expressão de g(x).

Resolução:

Pela definição de função composta, temos que f(g(x)) = 4g(x) + 11. Igualando esse resultado com a expressão fornecida, temos:

$4g(x) + 11 = 6x - 10 \Rightarrow 4g(x) = 6x - 21 \Rightarrow g(x) = \dfrac{6x - 21}{4}$

04. Sejam as funções h(x) = 5x – 3 e t(h(x)) = 15x + 32. Determinar a expressão de t(x).

Resolução:

t(h(x)) = 15x + 32 ⇒ t(5x – 3) = 15x + 32 (I)

Vamos denotar 5x – 3 por **k**. Assim, temos:

$5x - 3 = k \Rightarrow x = \dfrac{k+3}{5}$

Substituindo na expressão (I), temos:

$t(k) = 15.\left(\dfrac{k+3}{5}\right) + 32 \Rightarrow t(k) = 3k + 9 + 32 \Rightarrow$

t(k) = 3k + 41

Daí, se a expressão vale para **k**, também vale para **x**, ou seja, t(x) = 3x + 41.

05. (UFU-MG) Seja **f** uma função real de variável real definida

por $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ f(f(-x)), & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Então, f(–1) é igual a

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) –1.
E) 3.

Resolução:

Para x = –1, temos f(–1) = f(f(1)).

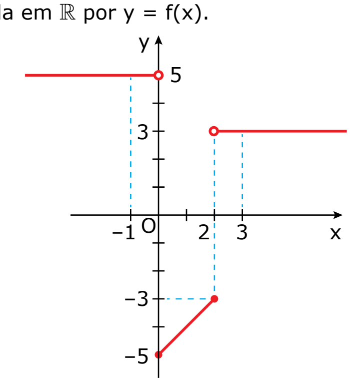
Mas f(1) = 1 + 1 ⇒ f(1) = 2.

Logo, f(–1) = f(2).

Mas f(2) = 2 + 1 ⇒ f(2) = 3.

Logo, f(–1) = 3.

06. (Mackenzie-SP) O gráfico a seguir representa uma função definida em ℝ por y = f(x).



O valor de f(2) + f(f(–5)) é igual a

A) –2.
B) –1.
C) 0.
D) 1.
E) 2.

Resolução:

Pelo gráfico, verificamos que f(2) = –3.

Além disso, f(–5) = 5.

Logo, f(f(–5)) = f(5) = 3.

Portanto, f(2) + f(f(–5)) = –3 + 3 = 0.

MATEMÁTICA

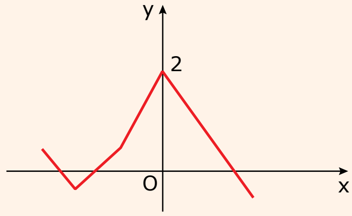
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 5LAK (IFMA) Considere as funções afins f(x) e p(x), definidas de reais em reais, em que f(x) = 2x + 4 e p(x) = 6x – 2m, sendo **m** uma constante real. O valor de **m** para que p(f(x)) = f(p(x)) é

A) –7.
B) $\frac{1}{3}$.
C) 5.
D) 7.
E) –10.

02. (EFOA-MG) A figura a seguir representa o gráfico de uma função **f**.



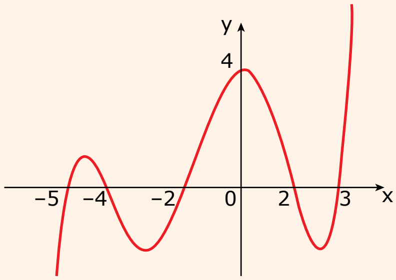
O total de elementos **x** tais que f(f(x)) = 2 é

A) 2.
B) 4.
C) 0.
D) 3.
E) 1.

03. BHJE (IFCE) Seja f:]1, +∞[⊂ ℝ → ℝ uma função dada por $f(x) = \frac{x}{x-1}$. A expressão da função composta g(x) = f(f(x+1)) é:

A) $g(x) = \frac{1}{x-1}$
B) $g(x) = \frac{x}{x-1}$
C) g(x) = x + 1
D) g(x) = x – 1
E) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

04. VRTX (UPF-RS) Considere a função real **g**, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo g ∘ g a função composta de **g** com **g**, então o valor de (g ∘ g)(–2) é



A) 0.
B) 4.
C) 2.
D) –2.
E) –5.

05. GZKR (UECE–2020) A função f: R – {–1} → R – {1}, definida por $f(x) = \frac{x}{1+x}$ é invertível. Considerando-se **g** sua inversa, o valor positivo de **k**, para o qual $f(k) + g(k) = \sqrt{3}$, é igual a

A) $3\sqrt{3}$.
B) $2\sqrt{3}$.
C) $\sqrt{3}$.
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

06. 3NM2 (UPF-RS–2018) Um estudo das condições ambientais de um município do Rio Grande do Sul indica que a taxa média de monóxido de carbono (CO) no ar será de C(P) = 0,2P – 1 partes por milhão (ppm) quando a população for **P** milhares de habitantes. Sabe-se que, em **t** anos, a população desse município será dada pela relação P(t) = 50 + 0,05t². O nível de monóxido de carbono, em função do tempo **t**, é dado por:

A) $C(t) = 9 + 0{,}01t^2$
B) $C(t) = 0{,}2(49 + 0{,}05t^2)$
C) $C(t) = 9 + 0{,}05t^2$
D) $C(t) = 0{,}1(1 + 0{,}05t^2) - 1$
E) $C(t) = 10 + 0{,}95t^2$

07. DXEL (UERN) Considerando as funções f(x) = 3x – 2 e g(x) = –2x + 1, o valor de **k**, com k ∈ ℝ tal que $f(g(k))^{-1} = 1$ é

A) 3.
B) 2.
C) –1.
D) –5.

08. BJG7 (UECE) A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ é invertível. Se f^{-1} é sua inversa, então, o valor de $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2$ é

A) 1.
B) 4.
C) 9.
D) 16.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FGV-SP) Dada a função f(x) = x² + 3, qual o valor da expressão $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$?

A) 2x
B) 2x + 1
C) 2x – h
D) 2x – 1
E) 2x + h

02. P1T5

(UECE–2017) A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$, para $x \neq -\frac{1}{4}$ é invertível. Sua inversa **g** pode ser expressa na forma $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, em que **a**, **b**, **c** e **d** são números inteiros.

Nessas condições, a soma a + b + c + d é um número inteiro múltiplo de

A) 6. B) 5. C) 4. D) 3.

03. (CEFET-MG) Dadas as funções f(x) = 2x − 1 e $g(x) = x^2 + 3x + c$, o maior valor inteiro de **c** tal que a equação g(f(x)) = 0 apresente raízes reais é

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

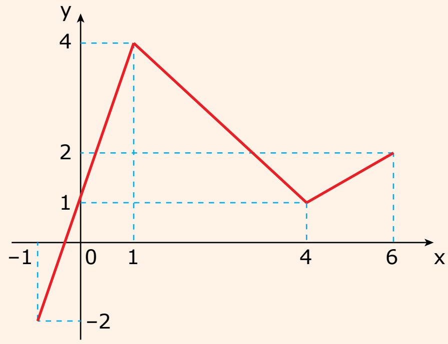
04. WWMA

(ESPM-SP) Sejam **f** e **g** funções reais, tal que f(2x + 1) = 2x + 4 e g(x + 1) = 2x − 1 para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que a função $f \circ g(x)$ é igual a:

A) 2x − 1
B) x + 2
C) 3x + 1
D) 2x
E) x − 3

05. TKXJ

(ACAFE-SC) O gráfico a seguir representa a função real f(x), definida no intervalo [−1, 6].



Considerando a função h(x) = f(x − 2), então, o valor da expressão dada por f(h(3)) + h(f(4)) é igual a

A) 7. B) −2. C) 5. D) −1.

06. HLLI

(IFCE) Se $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$ possui inversa:

A) $f^{-1}(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{2x+1}}$

B) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x^3+1}$

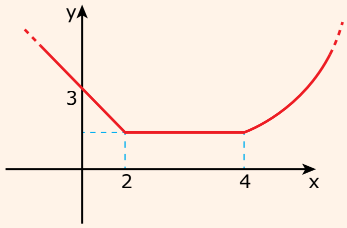
C) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

D) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

E) $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$

07. AØH8

(ESPM-SP) A figura a seguir representa o gráfico cartesiano da função f(x).



Sabendo-se que f(1) = 2, o valor de f [f(π)] é

A) 1. B) $\frac{3}{2}$. C) $\frac{3}{4}$. D) 2. E) $\frac{5}{2}$.

08. N35N

(UFSM-RS) Os praticantes de exercícios físicos se preocupam com o conforto dos calçados utilizados em cada modalidade. O mais comum é o tênis, que é utilizado em corridas, caminhadas, etc. A numeração para esses calçados é diferente em vários países, porém existe uma forma para converter essa numeração de acordo com os tamanhos. Assim, a função $g(x) = \frac{x}{6}$ converte a numeração dos tênis fabricados no Brasil para a dos tênis fabricados nos Estados Unidos, e a função f(x) = 40x + 1 converte a numeração dos tênis fabricados nos Estados Unidos para a dos tênis fabricados na Coreia. A função **h** que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é:

A) $h(x) = \frac{20}{3}x + \frac{1}{6}$

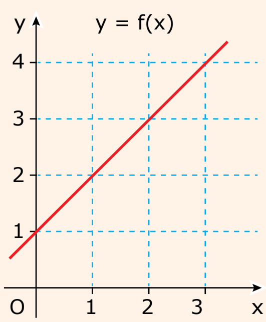
B) $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

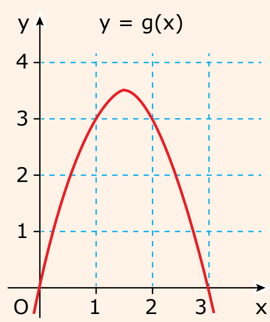
C) $h(x) = \frac{20}{3}x + 1$

D) $h(x) = \frac{20x+1}{3}$

E) $h(x) = \frac{2x+1}{3}$

09. (UFJF-MG) A seguir, encontram-se representados os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.





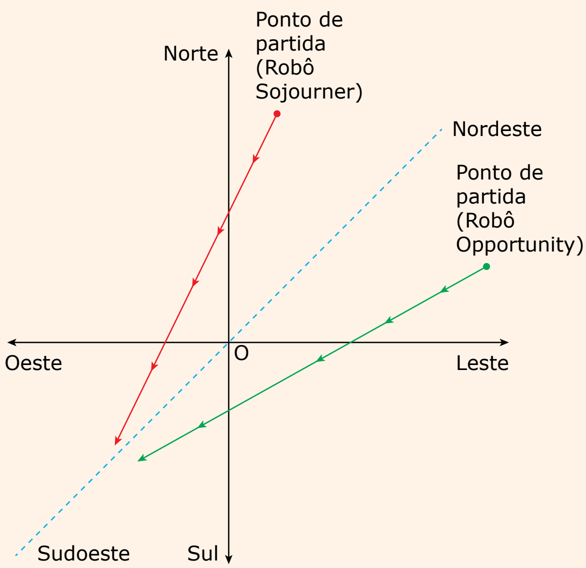
Sabendo que **f** possui inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o valor de $f \circ g \circ f^{-1}(2)$ é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

01. A figura a seguir indica as trajetórias de dois robôs, Sojourner e Opportunity, utilizados pela Agência Espacial Americana no projeto de exploração científica do planeta Marte. Considere que os dois robôs tenham partido, simultaneamente, de pontos distintos da superfície de Marte, com a mesma velocidade e em trajetória retilínea, em uma missão de exploração. Cada um dos robôs é controlado por um operador na Terra.



Sabe-se que o robô Sojourner intercepta a linha norte-sul a 4 km ao norte do ponto de referência **O**, e intercepta a linha leste-oeste a 2 km a oeste desse mesmo ponto de referência. Considerando-se que a trajetória do robô Opportunity seja simétrica à trajetória do robô Sojourner em relação à linha sudoeste-nordeste, e que não ocorram imprevistos que atrasem os robôs, pode-se afirmar que eles vão se encontrar a, aproximadamente,

(Considere: $\sqrt{2} \cong 1{,}4$)

A) 1,4 km do ponto O.

B) 2,8 km do ponto O.

C) 4,2 km do ponto O.

D) 5,6 km do ponto O.

E) 7,0 km do ponto O.

02. Uma das etapas da implementação de uma rotina de programação de computadores consiste na determinação de um parâmetro φ. Esse parâmetro é obtido da seguinte forma:

- Um dado de entrada **x** é inserido no programa.
- Multiplica-se **x** por 8.
- Adiciona-se 11 ao resultado anterior.

Em uma etapa subsequente, o programador calcula um parâmetro σ, utilizando o valor de φ calculado anteriormente, do seguinte modo:

- Adiciona-se 13 ao valor de φ.
- Eleva-se o valor obtido ao quadrado.

Um programador decidiu determinar o parâmetro σ em uma única etapa, a partir do dado de entrada **x**. A expressão matemática correspondente a essa operação é:

A) $\sigma = 64(x^2 + 6x + 9)$

B) $\sigma = 64(x^2 + 11x + 13)$

C) $\sigma = 64(x^2 + 9)$

D) $\sigma = 64(x^2 - 3x + 12)$

E) $\sigma = 64(4x^2 + 6x + 9)$

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E	05. D
02. D	06. A
03. C	07. D
04. B	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. E	06. D
02. C	07. D
03. B	08. C
04. D	09. E
05. D	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	02. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %