MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA I

PROFESSOR(A): FABRÍCIO MAIA

EAD – ITA/IME

AULAS 23 E 24

ASSUNTO: FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS

Resumo Teórico

Seno, Cosseno e Tangente (Arcos notáveis)

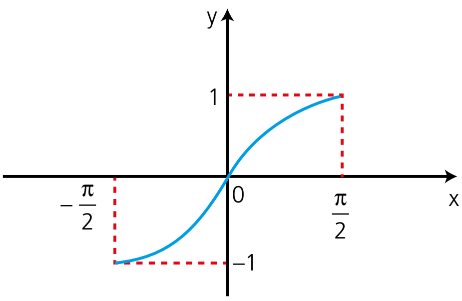
α	sen α	cos α	tg α
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Funções Circulares Inversas

Para definirmos as inversas das funções circulares, iremos modificar o domínio e o conjunto de chegada de cada uma das seis funções trigonométricas apresentadas anteriormente. As restrições aplicadas às funções, visam garantir a sua bijetividade, isto é, a existência de sua inversa.

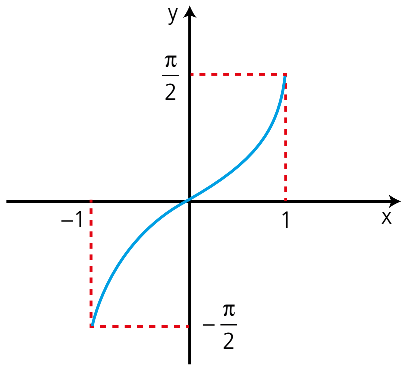
Funções arco-seno

Para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, temos $y = \text{sen } x$, onde $-1 \leq y \leq 1$.



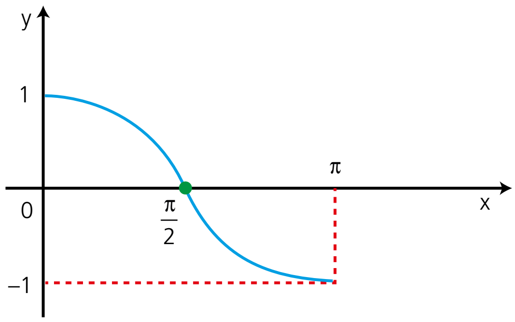
Assim,

Para $-1 \leq x \leq 1$, temos $x = \text{sen } y \leftrightarrow y = \text{arc sen } x$, onde $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.



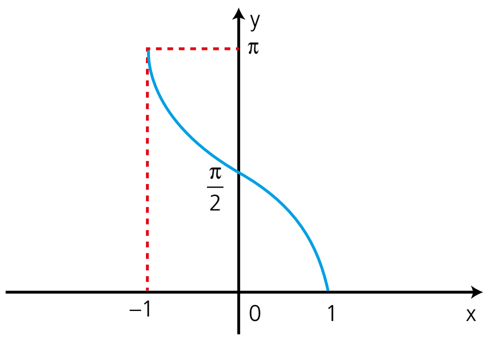
Função arco-cosseno

Para $0 \leq x \leq \pi$, temos $y = \cos x$, onde $-1 \leq y \leq 1$.



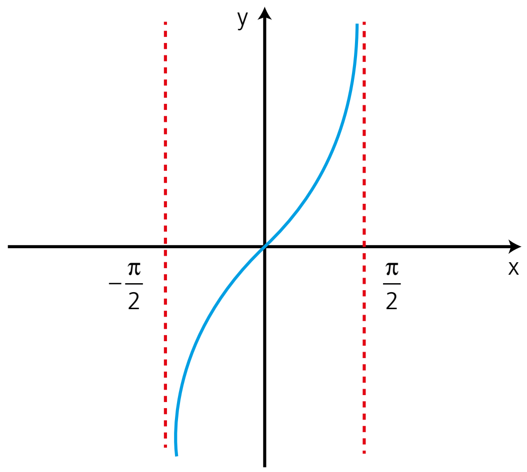
Assim,

Para $-1 \leq x \leq 1$, temos $x = \cos y \leftrightarrow y = \text{arc cos } x$, onde $0 \leq y \leq \pi$.



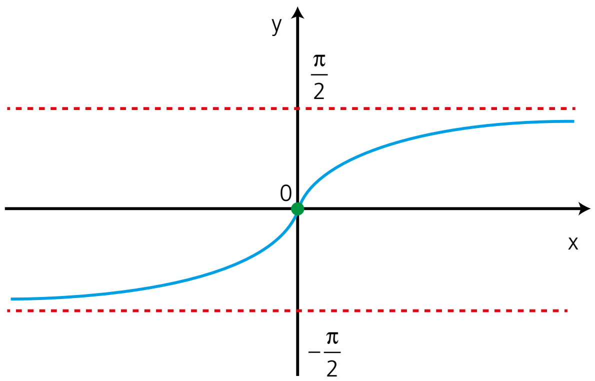
Função arco-tangente

Para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $y \in \mathbb{R}$, $y = \text{tg } x$.



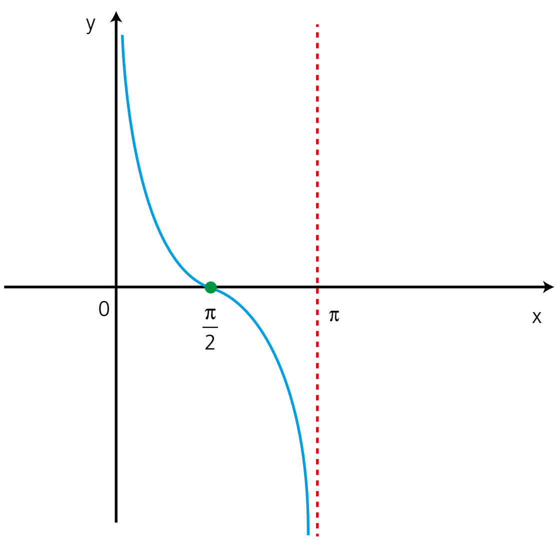
Assim,

Para $x \in \mathbb{R}$, e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $y = \text{arc tg } x$.

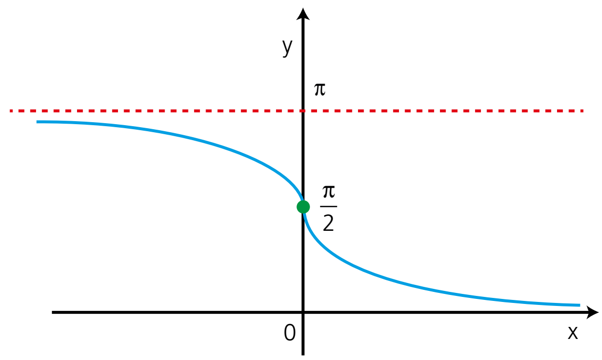


Função arco-cotangente

Para $0 < x < \pi$ e $y \in \mathbb{R}$, $y = \text{cotg } x$.

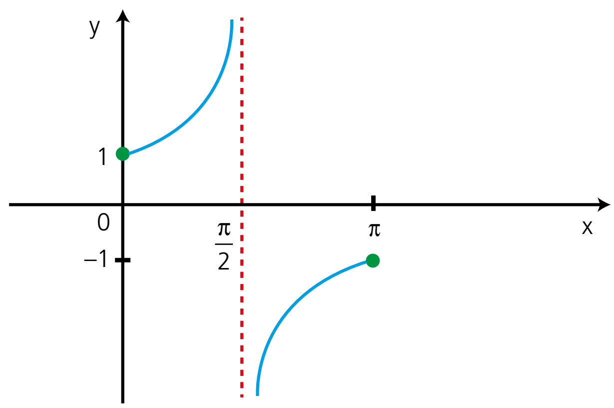


Assim,
Para $x \in \mathbb{R}$, $0 < y < \pi$, $y = \text{arc cotg } x$.



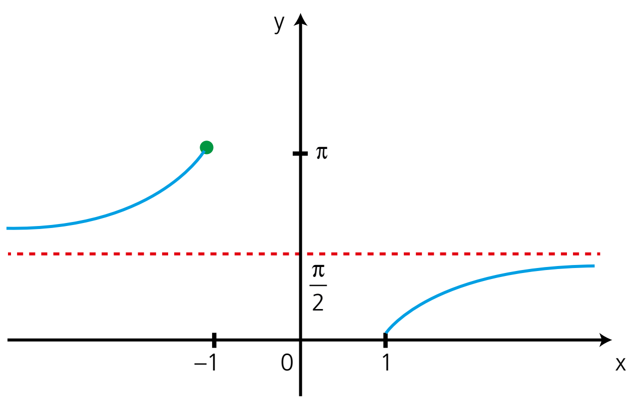
Função arco-secante

$y = \sec x$, para $0 \le x \le \pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}$ e $(y \le -1$ ou $y \ge 1)$.



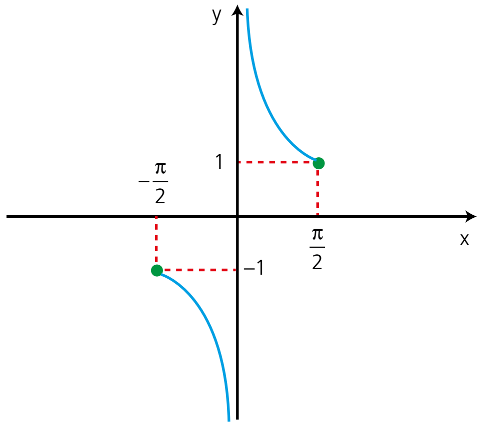
Assim,

$y = \text{arc sec } x$, para $x \le -1$ ou $x \ge 1$ e $0 \le y \le \pi$, $y \ne \frac{\pi}{2}$.



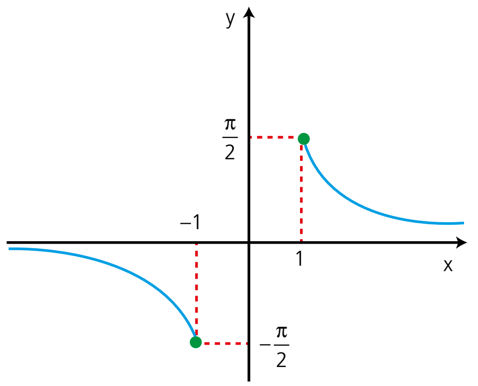
Função arco-cossecante

$y = \text{cosec } x$, para $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $x \ne 0$ e ($y \le -1$ ou $y \ge 1$).



Assim,

$y = \text{arc cosec } x$, para $x \le -1$ ou $x \ge 1$ e $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, $y \ne 0$.



Exercícios

01. Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\sec\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) - \text{arctg}(1-e^x)\right] = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Então:
A) $S = \varnothing$
B) $S = R$
C) $S \subset [1, 2]$
D) $S \subset [-1, 1]$
E) $S = [-1, 2[$

02. Encontre todos os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, para os quais a equação na variável real **x**, $\text{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) + \text{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a$, admite soluções.

03. Resolva: $\text{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \text{arctg}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) = \text{arctg}\left(\frac{23}{36}\right)$

04. A equação em x, $\text{arctg}(e^x + 2) - \text{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4}$, $x \in \mathbb{R}^*$,

A) admite infinitas soluções, todas positivas.
B) admite uma única solução, e esta é positiva.
C) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.
D) admite apenas soluções negativas.
E) não admite solução.

05. Considerando as funções $\text{arcsen}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e arccos: $[-1, 1]: [0, \pi]$, assinale o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arccos}\frac{4}{5}\right)$.

A) $\frac{6}{25}$

B) $\frac{7}{25}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{5}$

E) $\frac{5}{12}$

06. Se $w = \text{tg}\left(\text{arctg}\frac{3}{5} + \text{arcsen}\frac{3}{5}\right)$, encontre o valor de 11w.

A) 13
B) 18
C) 21
D) 23
E) 27

07. Qual é o valor máximo da função $f(x) = 100^{\text{arcsenx}}$?
A) $10^{-\pi}$
B) 1
C) 10
D) 100
E) 10^{π}

08. Se = arctg 2+ arctg 3, então tg 3α é igual a:
A) –1
B) 0
C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) 1
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

09. Calcule o valor da expressão

$$n = 5 \cdot \text{tg}\left[\frac{\pi}{4} + 2\text{arccossec}\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right) - \text{arc sec } 2{,}6\right].$$

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

10. Resolva: $\operatorname{arc\,cotg} x - \operatorname{arccotg}(x+2) = \frac{\pi}{12}$.

11. Prove que $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) + 2 \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$.

12. A solução da equação:

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$, definida no conjunto dos reais diferentes de -1 é:

A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{2}$ e 1
D) 2
E) 2 e 1

13. A solução da equação $\arccos x + \arccos 2x = \frac{\pi}{3}$ é dada por:

A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{2}$ e 1
D) 2
E) 2 e 1

14. Se $n = \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13}\right)$, encontre o valor de 65n.

A) 16
B) 17
C) 18
D) 19
E) 20

15. Resolva:

$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right) + \operatorname{arcsen}\left(-\frac{x}{4}\right) = 2 \cdot \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

Anotações

Gabarito

1	2	3	4	5
D	–	–	B	B
6	**7**	**8**	**9**	**10**
E	E	D	D	–
11	**12**	**13**	**14**	**15**
–	B	B	A	–

– Demonstração.

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: FABRÍCIO MAIA
DIG.: GEORGENES – 16/01/18 – REV.: AMÉLIA