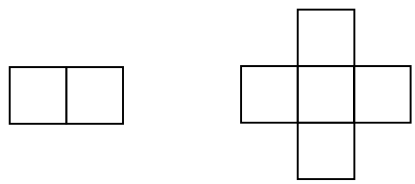
Preparação para a X Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Lista 02 – 23/03/99

▶ PROBLEMA 1

Prove que o número $\underbrace{11\ldots1}_{1997}\underbrace{22\ldots2}_{1998}5$ é um quadrado perfeito.

▶ PROBLEMA 2

É possível cobrir um tabuleiro 75×75 usando peças dos formatos abaixo? (cada quadrado tem lado de medida 1)



▶ PROBLEMA 3

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, M o ponto médio de BC e N o ponto médio de AD. Prove que

$$[ABMN] = [NMCD] \Leftrightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AD}.$$

[ ] denota área.

▶ PROBLEMA 4

Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma $P.A$ de reais positivos tal que $\frac{a_2}{a_1} \notin \mathbb{Q}$. Prove que é impossível escolhermos três termos distintos dessa P.A que estejam em P.G.

▶ PROBLEMA 5

São dados n números reais ao redor de uma circunferência. Se quatro números consecutivos a, b, c, d forem tais que $(a-d)(b-c) > 0$, então podemos trocar os números b e c de posição. Prove que é impossível continuar tal processo indefinidamente.

▶ PROBLEMA 6

Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $\angle ABC = \angle DEA = 90°$, $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EA} = 1$ e $\overline{BC} + \overline{DE} = 1$. Calcule a área do pentágono.

▶ PROBLEMA 7

Seja $n > 1$ um inteiro positivo fixo. Determine todos os reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{1^2} + \dfrac{x_2}{2^2} + \dfrac{x_3}{3^2} + \cdots + \dfrac{x_n}{n^2} = \dfrac{n}{n+1} \\ \dfrac{1}{2^2 x_1} + \dfrac{1}{3^2 x_2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2 x_n} = \dfrac{n}{n+1}. \end{cases}$$

▶ PROBLEMA 8

Sejam a, b, c reais positivos. Prove que

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{a^2 b^2 c^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

▶ PROBLEMA 9

Dados dois círculos exteriores, traçamos uma tangente comum interna e outra externa. Os pontos de tangência resultantes definem uma corda em cada círculo. Prove que o ponto de interseção das retas suportes dessas duas cordas é colinear com os centros dos círculos.

▶ PROBLEMA 10

Quantas são as permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ de $(1, 2, \ldots, 6)$ tais que, para $1 \leq i \leq 5$, $(a_1, \ldots, a_i)$ não seja uma permutação de $(1, 2, \ldots, i)$?

▶ PROBLEMA 11

A cada subconjunto de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ associamos uma dentre 100 cores possíveis. Qual o menor valor de n para o qual possamos garantir que existam $A, B \subseteq X$, com $A \neq B$ e tais que $A, B, A \cup B$ sejam associados a uma mesma cor?

▶ PROBLEMA 12

Prove que não existem racionais positivos x, y tas que

$$x^2 + xy + y^2 = 2.$$

▶ PROBLEMA 13

Seja M um conjunto não-vazio de inteiros positivos tais que $4x$ e $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ pertencem a M sempre que x pertence a M. Prove que M é o conjunto de todos os inteiros positivos.

▶ PROBLEMA 14

Seja $p > 2$ um primo. Prove que os fatores de $2^p - 1$ são da forma $2kp + 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

Prazo para devolução: 12 de abril.