1° MARATONA DE FÉRIAS ☞ GEOMETRIA PLANA, ESPACIAL E ANALÍTICA

PARTE I – GEOMETRIA PLANA

01. **(ESCOLA NAVAL)** Três circunferências de raios r, 2r e 3r são tais que, cada uma delas tangencia exteriormente as outras duas. O triângulo, cujos vértices são os centros dessas circunferências, tem área:

A) r^2 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$ C) $4r^2$ D) $6r^2$ E) $12r^2$

02. **(ESCOLA NAVAL)** ABC é um triângulo e M é um ponto sobre o lado BC, tal que MC = 2BM. A razão entre as áreas dos triângulos ABC e MAC é:

A) 4 B) 3 C) 2 D) 2,25 E) 1,5

03. **(ESCOLA NAVAL)** Os lados de um paralelogramo medem 4 cm e 6 cm e uma de suas diagonais mede 8 cm. O comprimento da outra diagonal é:

A) $2\sqrt{2}$ cm B) 8 cm C) 10 cm D) $10\sqrt{2}$ cm E) $2\sqrt{42}$ cm

04. **(ESCOLA NAVAL)** A, B e C são três pontos de uma circunferência de raio r, tais que B pertence ao menor dos arcos de extremidades A e C. AB e BC são iguais aos lados do quadrado e do hexágono regular inscritos na circunferência, respectivamente. A distância entre os pontos A e C é igual a:

A) r B) $r\sqrt{\sqrt{3}+2}$ C) $\frac{r}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$ D) $r\sqrt{\sqrt{5}}$ E) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$

05. **(ESCOLA NAVAL)** Uma tigela tem a forma de uma semiesfera de raio 30 cm e de encontra sobre uma mesa. Uma gota d'água se encontra na borda da tigela e começa a escorrer externamente sobre ela com uma velocidade de $2{,}5\pi$ cm/s. Após 2 segundos, a distância entre a gota d'água e a mesa é de:

A) $15\sqrt{3}$ cm B) 15 cm C) 10 cm D) $15\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm E) $\frac{30}{\pi}$ cm

06. **(ESCOLA NAVAL)** Um hexágono regular está inscrito num círculo de raio 5. Um dos lados do hexágono também é lado de um quadrado construído exteriormente ao hexágono. A distância entre o centro do círculo e a interseção das diagonais do quadrado é:

A) $\frac{5}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ B) $5\left(\sqrt{3}+1\right)$ C) 7,50 D) $5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ E) $\frac{5\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$

07. **(ESCOLA NAVAL)** Considere o triângulo ABC de área S, baricentro G e medianas CM e BN. A área do quadrilátero AMGN é igual a:

A) $\frac{S}{2}$ B) $\frac{2S}{3}$ C) $\frac{S}{3}$ D) $\frac{S}{4}$ E) $\frac{3S}{4}$

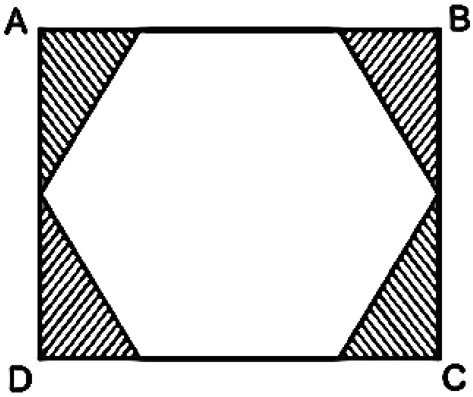
08. **(ESCOLA NAVAL)** O triângulo ABC é retângulo em A e o ângulo C mede 20°. O ângulo formado pela altura e a mediana relativas à hipotenusa é:

A) 10° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

09. **(ESCOLA NAVAL)** Num triângulo retângulo, a hipotenusa é o triplo de um dos catetos. Considerando α o ângulo oposto ao menor lado, podemos afirmar que $tg\alpha + sec\alpha$ é igual a:

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{12+\sqrt{2}}{4}$

10. **(ESCOLA NAVAL)** Do retângulo abaixo foram retirados os quatro triângulos retângulos hachurados hexágono regular de lado igual a 4 cm.



Que percentagem da área do retângulo ABCD é representada pela área do hexágono?

A) 50% B) 60% C) 75% D) 80% E) 90%

11. **(ESCOLA NAVAL)** Considere uma progressão geométrica de razão maior que 1 em que três de seus termos consecutivos representam as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Se o primeiro termo dessa progressão geométrica é 64, então seu décimo terceiro termo vale:

A) $2\left(1+\sqrt{3}\right)^{6}$ B) $\left(1+\sqrt{3}\right)^{12}$ C) $\left(1+\sqrt{5}\right)^{6}$ D) $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{12}}{2}$ E) $1+\sqrt{5}$

12. **(ITA)** Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam AE e AD a altura e a mediana relativa à hipotenusa BC, respectivamente. Se a medida BE é $\left(\sqrt{2}-1\right)cm$ e a medida de AD é 1 cm, então AC mede, em cm:

A) $4\sqrt{2}-5$ B) $3-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$ D) $3\left(\sqrt{2}-1\right)$ E) $3\sqrt{4\sqrt{2}-5}$

PARTE II – GEOMETRIA ESPACIAL

13. **(ESCOLA NAVAL)** Um poliedro convexo possui 11 faces. Sabemos que, de um de seus vértices partem 5 arestas, de 5 outros vértices partem 4 arestas e de cada vértice restante partem 3 arestas. O número de arestas do poliedro é:

A) 20 B) 25 C) 30 D) 37 E) 41

14. **(ESCOLA NAVAL)** Duas seções feitas em uma esfera, por dois planos paralelos distantes 3 cm entre si, situam-se em hemisférios diferentes e tem raios iguais a 1 cm e 2 cm. O raio da esfera é igual a:

A) $2\sqrt{2}$ cm B) $2\sqrt{3}$ cm C) $\sqrt{5}$ cm D) 3 cm E) $3\sqrt{2}$ cm

15. **(ESCOLA NAVAL)** Um plano secciona uma esfera de raio 30 cm, determinando um círculo que é a base de um cilindro e também de um cone de revolução inscritos nessa esfera. O centro da esfera, o cilindro e o cone estão situados num mesmo semiespaço em relação ao plano. Considerando que os volumes do cilindro e do cone são quais, qual a distância do centro da esfera ao plano, em cm?

A) 18 B) 15 C) 12 D) 6 E) 4

16. **(ESCOLA NAVAL)** A área total de uma pirâmide regular é $36\sqrt{3}\ cm^2$ e o raio do círculo inscrito na base mede 2 cm. A altura da pirâmide é, em cm:

A) $3\sqrt{12}$ B) $2\sqrt{15}$ C) $4\sqrt{3}$ D) 4 E) $2\sqrt{3}$

17. **(ESCOLA NAVAL)** A altura de um paralelepípedo retângulo mede 60 cm e sua base é um quadrado. A diagonal do paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do paralelepípedo retângulo é, em cm³:

A) 12000 B) 18000 C) 24000 D) 27000 E) 36000

18. **(ESCOLA NAVAL)** A esfera S_1 está inscrita em cilindro C, circular reto, cujo volume vale $18\,m^3$. A esfera S_2 está circunscrita a C. A diferença entre os volumes de S_2 e S_1 é, em cm³:

A) $6\left(2\sqrt{2}-2\right)$ B) $6\left(2\sqrt{2}-1\right)$ C) $12\left(2\sqrt{2}-2\right)$ D) $12\left(2\sqrt{2}-1\right)$ E) $12\left(\sqrt{2}-1\right)$

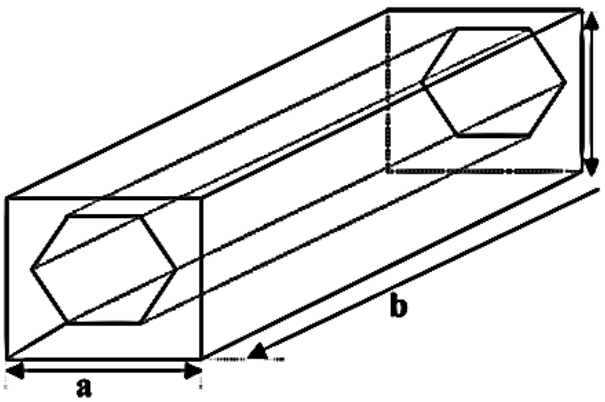
19. **(ESCOLA NAVAL)** Um tetraedro regular ABCD de arestas medindo 12 cm é cortado por um plano que passa pelo vértice D e pelos pontos M e N situados respectivamente sobre as arestas AB e AC. Se $AM = AN = \frac{1}{3}AB$, o volume da pirâmide AMND é, em cm³, igual a:

A) $64\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) 32 D) 24 E) $48\sqrt{2}$

20. **(ESCOLA NAVAL)** Um tanque cônico circular e reto está sendo construído em uma unidade naval e deverá armazenar 2592π litros de água. Sabendo que o raio da sua base, a sua altura e a sua geratriz, nesta ordem, estão em progressão aritmética, pode-se dizer que a altura do tanque, em metros, mede:

A) 2,6 B) 2,4 C) 2,2 D) 1,8 E) 1,2

21. **(ESCOLA NAVAL)** Um navio da Marinha Brasileira utiliza em sua praça de máquinas uma peça de aço maciça com a forma de um paralelepípedo retangular de dimensões a, b e c, transpassada por um furo hexagonal, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $a = 14\,dm$, $b = 15\sqrt{3}\,dm$, $b = 15\sqrt{3}\,dm$, $c = 10\sqrt{3}\,dm$ e que o perímetro da seção transversal (hexágono) do furo é 24 dm, pode-se que o volume da peça é:



A) inferior a 4000 dm³
B) superior a 4000 dm³ e inferior a 4200 dm³
C) superior a 4200 dm³ e inferior a 4500 dm³
D) superior a 4500 dm³ e inferior a 5000 dm³
E) superior a 5000 dm³

22. **(ESCOLA NAVAL)** As dimensões das arestas de um paralelepípedo retângulo são dadas por três número pares consecutivos. Se a área total da superfície do paralelepípedo é 376 m², então a soma dos comprimentos de todas as arestas, em metros, é:
A) 24 B) 48 C) 96 D) 140 E) 150

23. **(ESCOLA NAVAL)** Um poliedro convexo de 25 arestas tem faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces quadrangulares vale o dobro do número de faces pentagonais e o número de faces triangulares excede o de faces quadrangulares em 4 unidades. Pode-se afirmar que o número de vértices deste poliedro é:
A) 14 B) 13 C) 11 D) 10 E) 9

24. **(ESCOLA NAVAL)** Com centros nos vértices de um cubo, traçamos oito esferas congruentes cujos raios são iguais à metade da aresta desse cubo. Com centro no ponto de interseção das diagonais do mesmo cubo, traçamos duas esferas com raios R e r (R > r) tangentes às oitos esferas anteriores. A razão $\frac{R}{r}$ é igual a:
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

PARTE III – GEOMETRIA ANALÍTICA

25. **(ESCOLA NAVAL)** Seja P o ponto da circunferência $x^2+y^2-6x-8y+24=0$ mais próximo da origem. A soma das coordenadas de P é:
A) 3,60 B) 3,50 C) 4,50 D) 5,60 E) 6,50

26. **(ESCOLA NAVAL)** Os pontos A, B, C e D do $\mathbb{R}^2$ são os vértices de um retângulo de lados não paralelos aos eixos coordenados. O produto dos coeficientes angulares das quatro retas suportes dos lados deste retângulo vale:

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) – 2

27. **(ITA)** Seja ABC um triângulo de vértices A = (1,4), B = (5,1) e C = (5,5). O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento:

A) $\frac{15}{8}$ B) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{17}}{5}$ D) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$ E) $\frac{17\sqrt{5}}{8}$

28. **(ITA)** A equação da circunferência localizado no 1° quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às reta $r: 2x - 2y + 5 = 0$ e $s: x + y - 4 = 0$ é:

A) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right) = 4$

B) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4$

C) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

D) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4$

E) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4$

29. **(ITA)** No sistema xOy os pontos A = (2,0), B = (2,5) e C = (0,1) são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidades de comprimento, é igual a:

A) 1 B) $\frac{100}{105}$ C) $\frac{10}{11}$ D) $\frac{100}{115}$ E) $\frac{5}{6}$

30. **(ITA)** Sejam A = (0,0), B = (0,6) e C = (4,3) vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a:

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{\sqrt{97}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{109}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{10}{3}$

31. **(ITA)** A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a:

A) $\frac{19}{2}$ B) 10 C) $\frac{25}{2}$ D) $\frac{27}{2}$ E) $\frac{29}{2}$

32. **(ESCOLA NAVAL)** Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são tais que $|\vec{u}+\vec{v}| = 10$ e $|\vec{u}-\vec{v}| = 4$. O produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vale:

A) -1 B) $2\sqrt{5}$ C) 21 D) 29 E) 40

33. **(ESCOLA NAVAL)** Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são unitários e formam um ângulo de 30°. O módulo do vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ é:

A) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}+2$ E) $3+\sqrt{2}$

34. **(ESCOLA NAVAL)** A equação do plano que contém as retas de equação $\frac{x-4}{3} = y-3 = \frac{z-5}{4}$ e $\frac{x-6}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{2}$ é igual a:

A) $4x+3y+5z=13$
B) $6x+4y+3z=12$
C) $6x-14y-z=0$
D) $6x-14y-z=-23$
E) $4x+3y+5z=12$

35. **(ESCOLA NAVAL)** A componente do vetor $\vec{u}=(5,6,5)$ na direção do vetor $\vec{v}=(2,2,1)$ é o vetor:

A) $\left(\frac{5}{\sqrt{86}},\frac{5}{\sqrt{86}},\frac{5}{2\sqrt{86}}\right)$ B) $(6,6,3)$ C) $(10,10,5)$ D) $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ E) $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$

36. **(ESCOLA NAVAL)** Nas proposições abaixo, coloque (V) no parênteses à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\Re^3$, então $|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.

( ) Se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do $\Re^3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$, então $\vec{v}=\vec{w}$, onde $\vec{u}\cdot\vec{v}$ representa o produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\Re^3$, então eles são paralelos se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

( ) Se $\vec{u}=(3,0,4)$ e $\vec{v}=\left(2,\sqrt{8},2\right)$, então $|\vec{u}|=5$, $|\vec{v}|=4$ e $tg\,\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$, onde θ representa o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

( ) $|\vec{u}+\vec{v}| < |\vec{u}|+|\vec{v}|$ para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\Re^3$.

Lendo-se a coluna de parênteses da esquerda, de cima para baixo, encontra-se:
A) FFFVV
B) FVFFV
C) VFVVF
D) FFFVF
E) VVVFF