MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): ISAAC LUÍS

EAD – ITA/IME

AULAS 05 A 07

ASSUNTO: PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROPRIEDADES

Resumo Teórico

Progressão Aritmética – Definições e Exemplos

Uma Progressão Aritmética (ou PA, abreviadamente) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, corresponde à soma do anterior com uma constante **r** dada, denominada razão da PA.

A sequência dos números ímpares positivos, por exemplo, é uma PA de razão r = 2:

$$(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots).$$

Diremos que uma PA é crescente quando cada termo for maior do que aquele que o antecede. Note que isso ocorre se, e somente se, a razão **r** da PA for positiva. Com efeito, indicando o enésimo termo de uma PA por a_n, temos

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow r = a_n - a_{n-1} > 0.$$

Por outro lado, se cada termo for menor do que aquele que o antecede, a PA será decrescente. Além disso, se cada termo é igual àquele que o antecede, a PA é dita constante ou estacionária.

O Termo geral de uma PA

Teorema: Em uma PA de primeiro termo a_1 e razão **r**, tem-se que

$$a_n = a_1 + (n - 1)r,$$

para todo $n \geq 1$.

Prova. Faremos indução sobre **n**. Se n = 1, temos

$$a_1 + (1 - 1)r = a_1,$$

e a fórmula funciona nesse caso. Agora, suponha que esse resultado seja verdadeiro para algum $n \geq 1$. Por fim, note que

$$a_{(n+1)} = a_n + r = a_1 + (n - 1)r + r =$$
$$= a_1 + [(n + 1) - 1]r,$$

o que encerra a prova.

Para calcularmos o 2018º termo da sequência dos números ímpares positivos, por exemplo, basta fazermos

$$1 + (2018 - 1) \times 2 = 1 + 4034 = 4035.$$

A soma dos n primeiros termos de uma PA

O teorema anterior nos permite estabelecer uma fórmula fechada simples para o cálculo da soma S_n dos **n** primeiros termos de uma PA.

Teorema: A soma S_n dos **n** primeiros termos de uma PA é tal que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Prova. Mais uma vez, faremos indução sobre **n**. Para n = 1, a fórmula é claramente verdadeira, posto que

$$\frac{(a_1 + a_1) \times 1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1 = S_1.$$

Suponha o resultado válido para algum $n \geq 1$. Temos

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} =$$

$$= \frac{[a_1 + (a_{n+1} - r)] + n + 2a_{n+1}}{2} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_{n+1})n - nr + (a_1 + nr) + a_{n+1}}{2} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_{n+1})n + (a_1 + a_{n+1})}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2},$$

e a prova está encerrada.

Agora, daremos uma demonstração direta para a fórmula obtida anteriormente, usando o conceito de número triangular, que foi apresentado no **exemplo 2** do material de indução matemática. Repare que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} [a_1 + (i-1)r] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_1 - r) + r \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= n(a_1 - r) + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(a_1 - r) + rn(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{[2a_1 - 2r + nr + r]n}{2} = \frac{\{a_1 + [a_1 + (n-1)r]\}n}{2} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

como queríamos.

Exemplo 1: Sabe-se que os números **k**, **w** e **z**, formam, nessa ordem, uma PA de razão 2. A função quadrática **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é tal que f(k) = –2, f(w) = –14 e f(z) = –34. Determine o coeficiente do termo de grau 2 de **f**.

Solução. Inicialmente, note que, como (k, w, z) é uma PA de razão 2, as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$w - k = 2;\ z - k = 4;\ z - w = 2 \ (\text{I}).$$

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} k^2a + kb + c = -2 \\ w^2a + wb + c = -14 \\ z^2a + zb + c = -34 \end{cases}$$

Calculando o determinante D da matriz incompleta desse sistema, vem

$$D = \begin{vmatrix} k^2 & k & 1 \\ w^2 & w & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & w & z \\ k^2 & w^2 & z^2 \end{vmatrix} = -(w-k)(z-k)(z-w),$$

uma vez que

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & w & z \\ k^2 & w^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

é uma matriz de Vandermonde. De (I), segue-se que

$$D = -(2 \times 4 \times 2) = -16,$$

de modo que, pelo teorema de Cramer, o sistema anterior tem uma única solução. Como

$$= \begin{vmatrix} -2 & k & 1 \\ -14 & w & 1 \\ k-34 & z & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 7 & w & 1 \\ 17 & z & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(w + 17k + 7z - 17w - z - 7k) =$$

$$= (-2)[17(k-w) + 7(z-k) + (w-z)] \overset{(\text{I})}{=}$$

$$\overset{(\text{I})}{=} (-2)[17 \times (-2) + 7 \times 4 + (-2)] = (-2)[-34 + 28 - 2] = 16,$$

o teorema de Cramer também nos permite concluir que

$$a = \frac{16}{(-16)} = -1$$

Exemplo 2: Seja $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ uma PA tal que $a_m \neq 0$, para todo $m \geq 1$. Mostre que

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n},$$

para todo $n \geq 2$.

Solução. Faremos indução sobre **n**. Para n = 2, a conclusão é imediata. Suponha o resultado válido para algum $n \geq 2$. Nesse caso, temos

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n-1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}} =$$

$$= \frac{(n-1)a_{n+1} + a_1}{a_1a_na_{n+1}} = \frac{na_{n+1} - (a_1 + nr) + a_1}{a_1a_na_{n+1}} = \frac{n(a_{n+1} - r)}{a_1a_na_{n+1}} =$$

$$= \frac{na_n}{a_1a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}} = \frac{(n+1) - 1}{a_1a_{n+1}},$$

o que encerra a demonstração.

Exemplo 3: Mostre que, se os lados de um triângulo retângulo formam uma PA de razão r > 0, então o raio da circunferência inscrita nesse triângulo é numericamente igual a **r**.

Solução. Sejam x – r, x e x + r os lados do triângulo em questão. Como r > 0, x + r é o maior lado, isto é, a hipotenusa do triângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$x^2 + (x - r)^2 = (x + r)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = [(x + r) + (x - r)][(x + r) - (x - r)] = 4xr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4r,$$

já que $x \neq 0$. Assim, a área A do triângulo é dada por

$$\frac{x(x-r)}{2} = \frac{4r \times 3r}{2} = 6r^2 \quad (\text{I})$$

Por outro lado,

$$A = \frac{(x-r) + x + (x+r)}{2} \times R = \frac{3x}{2} \times R = 6rR \quad (\text{II}),$$

onde R é o raio da circunferência inscrita no triângulo. Comparando (I) e (II), vem

$$6rR = 6r^2 \Rightarrow R = r.$$

Propriedades das PA's

No que segue, apresentamos duas importantes propriedades das progressões aritméticas. Mas, antes, vejamos a seguinte

Definição: Dizemos que dois termos a_p e a_q de uma sequência numérica finita com $n \geq 2$ termos são equidistantes dos extremos (1° e último termos) quando

$$p + q = n + 1.$$

Propriedade 1: Em uma PA finita, a soma dos extremos é igual à soma de dois termos quaisquer equidistantes dos extremos.

Prova. Sejam a_p e a_q termos equidistantes dos extremos de uma PA finita de razão **r** com n ≥ 3 termos. Pela fórmula do termo geral, podemos escrever

$$a_p + a_q = a_1 + (p - 1)r + a_1 + (q - 1)r =$$
$$= a_1 + \{a_1 + [(p + q - 1) - 1]r\} = a_1 + \{a_1 + [n - 1]r\} =$$
$$= a_1 + a_n.$$

Propriedade 2: Em uma PA de razão **r** com um número n ≥ 3 ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética dos extremos.

Prova. Note que o termo médio é aquele cujo índice é $\frac{n+1}{2}$. Pela fórmula do termo geral, temos

$$a_{\frac{n+1}{2}} + a_1 + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)r + a_1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)r =$$

$$= \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} = \frac{a_1 + [a_1 + (n-1)r]}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Observe, ainda, que, em virtude da Propriedade 1, o termo médio é, também, igual à média aritmética de qualquer par de termos equidistantes dos extremos.

Exemplo 4: (Professor Isaac Luís) Os números formados apenas por algarismos iguais a 1 são chamados de *repunits*. Denotemos por 1_k o k-ésimo termo da sequência dos *repunits*:

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

Mostre que não existem três ou mais *repunits* em progressão aritmética não constante.

Solução. Suponha, por absurdo, que $(1_m, 1_n, 1_p)$ seja uma PA crescente, sem perda de generalidade. Pela Propriedade 2, teríamos

$$1_n = \frac{1_m + 1_p}{2} \Leftrightarrow 2 \times 1_n = 1_m + 1_p,$$

claramente uma impossibilidade, posto que $2 \times 1_n$ é um número constituído de **n** algarismos iguais a 2, e

$$1_m + 1_p = \underbrace{1\cdots1}_{(p-m)1\text{'s}}\ \underbrace{2\cdots2}_{m\ 2\text{'s}},$$

uma vez que p > m.

Exercícios

01. Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é –1. Sabendo que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são números reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então p(–2) é igual a
A) –25
B) –27
C) –36
D) –39
E) –40

02. Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos (2,5), (–1,2) e tal que **a**, **b** e **c** formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto (2, 5).

03. Considere as **n** retas

$$r_i : y = m_ix + 10,\ i = 1,2,\ldots,n;\ n \geq 5,$$

em que os coeficientes m_i, em ordem crescente de i, formam uma progressão aritmética de razão q > 0. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de **q**.

04. Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_{50})$ de razão **d**. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

A) 3
B) 6
C) 9
D) 11
E) 14

05. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, detA = –1000 e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão d > 0. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

A) –4
B) –3
C) –2
D) –1
E) 1

06. Sejam ABCD um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado ABCD, do trapézio BEDC e do triângulo ADE. Sabendo que essas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm², a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

A) $\frac{10}{3}$
B) 5
C) $\frac{20}{3}$
D) $\frac{25}{3}$
E) 10

07. Sabe-se que (x + 2y, 3x – 5y, 8x – 2y, 11x – 7y + 2z) é uma progressão aritmética com o último termo igual a –127. Então, o produto xyz é igual a
A) –60
B) –30
C) 0
D) 30
E) 60

08. Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a 10 cm³. Calcule:
A) As medidas das arestas do paralelepípedo.
B) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

09. Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

A) $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$
B) $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$
C) $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$
D) $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$
E) $\left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)$

10. Uma pirâmide de altura h = 1 cm e volume V = 50 cm³ tem como base um polígono convexo de **n** lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se n – 3 diagonais que o decompõem em n – 2 triângulos cujas áreas S_i, i = 1, 2,..., n – 2, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}\text{cm}^2$ e $S_6 = 3\ \text{cm}^2$. Então, **n** é igual a

A) 22
B) 24
C) 26
D) 28
E) 32

11. Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \text{ é}$$

A) –96
B) –85
C) 63
D) 99
E) 115

12. Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão –5. Determine o número de vértices do poliedro.

13. Seja um triângulo ABC com lados **a**, **b** e **c** opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Os lados **a**, **b** e **c** formam uma progressão aritmética nessa ordem. Determine a relação correta entre as funções trigonométricas dos ângulos dos vértices desse triângulo.

A) $2\text{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}\hat{A} + \text{sen}\hat{C}$
B) $2\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \cos\hat{A} + \cos\hat{C}$
C) $2\text{sen}(\hat{A} - \hat{C}) = \text{sen}\hat{A} - \text{sen}\hat{C}$
D) $2\cos(\hat{A} - \hat{C}) = \cos\hat{A} - \cos\hat{C}$
E) $2\cos(\hat{A} + \hat{C}) = \text{sen}\hat{A} + \text{sen}\hat{C}$

14. (Professor Isaac Luís) Considere as afirmativas a seguir:

I. Seja $a \in \mathbb{R}^*$. Se os inteiros **n** e **m** são tais que (a, na, ma) é uma progressão aritmética, então **m** é ímpar;
II. Não existe progressão aritmética não constante da forma $(a^\alpha, a^\beta, a^\gamma)$, com **a**, α, β e γ inteiros positivos;
III. Se **p**, **q** e **r** são primos distintos em progressão aritmética, nessa ordem, então o número p + r tem 4 divisores;
IV. Se **a**, **b** e **c** são reais positivos e **d** é positivo e diferente de 1, então (a, b, c) e $(\log_d a, \log_d b, \log_d c)$ são progressões aritméticas, se, e somente se, a = b = c.

Quantas dessas afirmativas são verdadeiras?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Todas são falsas.

15. (Professor Isaac Luís) Seja T_n o enésimo número triangular. Mostre que existem infinitas ternas (T_a, T_b, T_c) tais que T_a, T_b e T_c formam, nessa ordem, uma progressão aritmética não constante.

Gabarito

01	02	03	04	05
A	*	*	D	D
06	**07**	**08**	**09**	**10**
C	A	*	C	C
11	**12**	**13**	**14**	**15**
A	6	A	D	–

– Demonstração.

***02:** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

03: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

08: A) 3 cm, 4 cm e 5 cm.
B) 60 cm³ e 94 cm².

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: ISAAC LUÍS
DIG.: ESTEFANIA – REV.: LÍCIA