SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS, POLÍGONOS E QUADRILÁTEROS

1. (IME 2020) Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente em um plano, gerando um triângulo isósceles, cujo ângulo desigual mede $30°$. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é:

a. $2\sqrt{3}-3$

b. $4-2\sqrt{3}$

c. $2-\sqrt{3}$

d. $1-\sqrt{3}$

e. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$

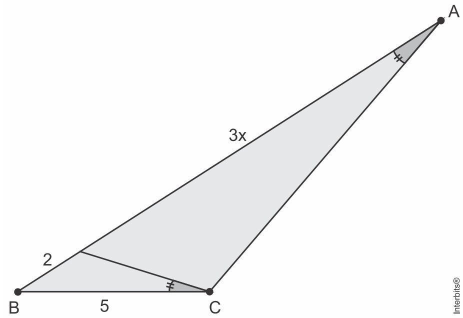
2. (ACAFE 2020) Analise as afirmações e assinale a alternativa correta.

a. Se f é o quociente de duas funções reais, então f é uma função racional.

b. O conjunto solução da equação $\log_3(3x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_3(x)$ é formado por dois elementos.

c. Maria divulgou uma nova música na internet. O empresário dela informou que o número de acessos está crescendo em progressão geométrica, e apresentou os seguintes dados: 800 acessos no primeiro dia e 3.200 acessos no terceiro dia. No final de cinco dias, a partir do lançamento da música na internet, o número total de acessos foi de 24.800.

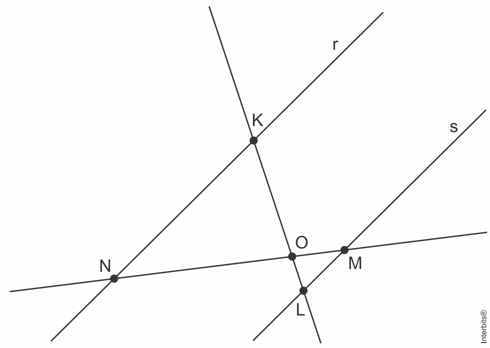
d. Considere a figura a seguir.



O valor de x é um número divisível por 3.

3. (UFSC 2020) Some os números associados às proposições corretas.

01. Na figura a seguir, r e s são retas paralelas.

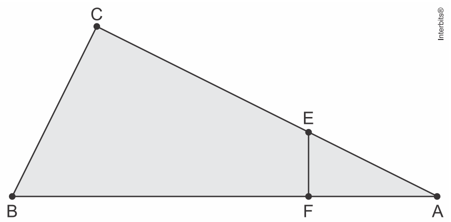


Se os segmentos $\overline{LO}, \overline{KO}, \overline{NO}$ e $\overline{MO}$ medem, respectivamente, $x-2;\ 5x-14;\ 5x+1;$ e $x+3,$ então a medida do segmento $\overline{MN}$ é 28 unidades de comprimento.

02. Se num pentágono convexo as medidas dos ângulos internos são indicadas por $2x, 3x, 150°, 120°$ e $135°$, então a diferença entre as medidas do maior e do menor ângulo é $130°$.

04. O triângulo ABC da figura a seguir

é retângulo em C; por outro lado, o triângulo AFE é retângulo em F.



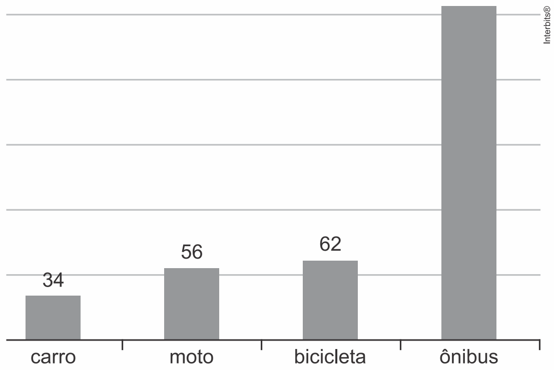
Se os segmentos $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{AF}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 12 cm, $\frac{35}{4}\text{ cm}$, $x\text{ cm}$ e 5 cm, então a medida x é um número racional.

08. Um hexágono cujo lado mede 4 cm está inscrito numa circunferência. Se existe um quadrado circunscrito a essa circunferência, então seu perímetro mede 32 cm.

16. Todo losango é um paralelogramo.

32. Se os lados de um triângulo medem $8\text{ cm}, 10\text{ cm}$ e 16 cm, então esse triângulo é acutângulo e escaleno.

64. Numa pesquisa, foi feito um levantamento entre os estudantes que usam apenas um tipo de transporte para ir à universidade. O gráfico ao lado indica a frequência obtida em cada tipo de transporte. Ocorre que, por algum problema técnico, a quantidade de respondentes que se locomovem de ônibus não apareceu na impressão do gráfico. Se a média aritmética obtida, considerando os quatro tipos de transporte, foi de 102, então a quantidade de alunos que se locomovem de ônibus é um número múltiplo de 3.



4. (UEM 2020) Assinale o que for **correto**.

01. Existe um triângulo retângulo com 1 cm de perímetro e 1 cm^2 de área.

02. A área de qualquer triângulo é sempre menor do que o produto das medidas de dois lados dele.

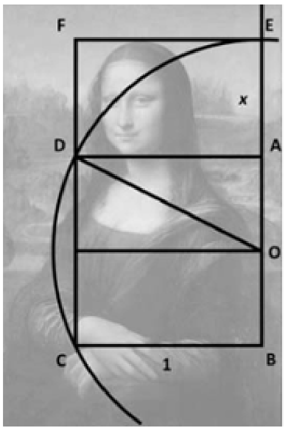
04. Não existe um triângulo cujas medidas dos lados estejam em uma proporção $1:2:4$.

08. Em um triângulo retângulo qualquer, a medida da hipotenusa é sempre inferior ao dobro da medida do menor cateto.

16. Um triângulo sempre ocupa mais de um quarto da área do círculo a ele circunscrito.

5. (UEL 2020) A icônica obra Mona Lisa, de Leonardo Da Vinci, exposta no Museu do Louvre, possibilita pôr à prova as proporções matemáticas nela presentes. Partindo de um quadrado $ABCD$ de lado 1, que delimita uma região abaixo da cabeça, pode-se obter um retângulo, que contém a cabeça da Mona Lisa, por meio da construção geométrica descrita a seguir.

Seja O o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Tome a circunferência de centro O e raio $\overline{OD}$. Encontre o ponto E dado pela intersecção da circunferência com a semirreta $\overrightarrow{BA}$. Considere o ponto F de modo a obter o retângulo de vértices EADF, como ilustrado na figura a seguir.



Com base na construção geométrica fornecida e na figura, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o comprimento do segmento $\overline{EA}$.

a. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

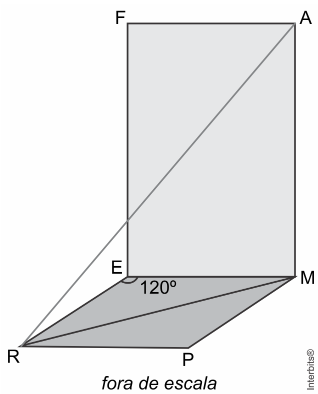
b. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

c. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

d. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

e. $\dfrac{\sqrt{5}+2}{2}$

6. (FAMERP 2020) A figura indica o retângulo FAME e o losango MERP desenhados, respectivamente, em uma parede e no chão a ela perpendicular. O ângulo $M\hat{E}R$ mede $120°$, $ME = 2\text{ m}$ e a área do retângulo FAME é igual a 12 m^2.



Na situação descrita, a medida de $\overline{RA}$ é

a. $3\sqrt{3}$ m

b. $4\sqrt{3}$ m

c. $5\sqrt{2}$ m

d. $3\sqrt{2}$ m

e. $4\sqrt{2}$ m

7. (UECE 2019) Se dois círculos cujas medidas dos raios são respectivamente u e v com $u < v$ são tangentes exteriormente no ponto P e se estes círculos também tangenciam os lados de um ângulo com vértice no ponto M, então, o comprimento do segmento MP é

a. $\dfrac{2u+v}{v-u}$.

b. $\dfrac{2uv}{v-u}$.

c. $\dfrac{uv}{v-u}$.

d. $\dfrac{2(u+v)}{v-u}$.

8. (ESPCEX (AMAN) 2019) Os centros de dois círculos distam 25 cm. Se os raios desses círculos medem 20 cm e 15 cm, a medida da corda comum a esses dois círculos é

a. 12 cm.

b. 24 cm.

c. 30 cm.

d. 32 cm.

e. 26 cm.

9. (ESPM 2019) Num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, a medida da altura relativa à hipotenusa é igual a

4. O valor da expressão $\frac{a}{b \cdot c} + \frac{b}{a \cdot c} + \frac{c}{a \cdot b}$ é igual a:

a. 1

b. 2

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{4}$

e. $\frac{1}{8}$

10. (ESPCEX (AMAN) 2019) Em um triângulo ABC, $\overline{BC} = 12 \text{ cm}$ e a mediana relativa a esse lado mede 6 cm. Sabendo-se que a mediana relativa ao lado AB mede 9 cm, qual a área desse triângulo?

a. $\sqrt{35} \text{ cm}^2$.

b. $2\sqrt{35} \text{ cm}^2$.

c. $6\sqrt{35} \text{ cm}^2$.

d. $\frac{\sqrt{35}}{2} \text{ cm}^2$.

e. $3\sqrt{35} \text{ cm}^2$.

11. (ESPM 2019) Uma praça tem a forma de um quadrado de 200 m de lado. Partindo juntas de um mesmo canto P, duas amigas percorrem o perímetro da praça caminhando em sentidos opostos, com velocidades constantes. O primeiro encontro delas se dá em um ponto A e o segundo, em um ponto B. Se a medida do segmento PA é 250 m, então, o segmento PB mede:

a. 50 m

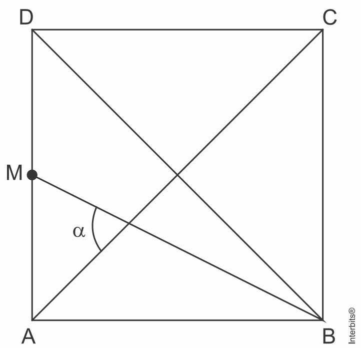
b. 100 m

c. 150 m

d. 200 m

e. 250 m

12. (ESPM 2019) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e M é ponto médio do lado AD. O valor de $\text{tg}\,\alpha$ é:



a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

13. (UEPG 2018) Os lados de um triângulo medem 6, 7 e 8 centímetros. Em relação a esse triângulo, assinale o que for correto.

01. A medida do cosseno do ângulo oposto ao lado de medida 7 é igual a 17/32.

02. A medida do seno do menor ângulo vale $\frac{3\sqrt{15}}{16}$.

04. A tangente do maior ângulo mede $\sqrt{15}$.

08. A soma das medidas dos cossenos dos três ângulos internos é maior que um.

16. A soma das secantes do maior com o menor ângulo tem medida maior que cinco.

14. (UEPG 2017) Assinale o que for correto.

01. Se a área de um escritório é de $12\ m^2$ e para revesti-lo são necessários, exatamente, 300 peças iguais de porcelanato na forma de um quadrado, então cada peça de porcelanato mede 400 centímetros de lado.

02. Se um triângulo ABC tem lados AB e BC medindo, respectivamente, 5 centímetros e 7 centímetros e o ângulo B medindo $60°$, então a medida do lado AC pertence ao intervalo $[6, 7]$.

04. Um motociclista deve dar mais de 405 voltas numa pista circular de raio 200 metros para percorrer $502,4$ quilômetros de distância.

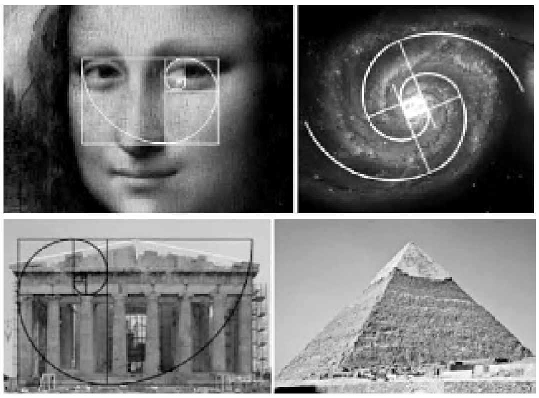
08. Se um polígono tem todos os lados com medidas iguais, então todos os seus ângulos internos também têm medidas iguais.

16. Considerando que um triângulo equilátero ABC, com lados medindo 8 centímetros, AH é a altura relativa ao vértice A e M é o ponto médio de AH, então CM tem medida maior que 5 centímetros.

15. (FEPAR 2017) O *retângulo áureo* é uma forma de grande apelo estético e das mais utilizadas na arquitetura antiga e moderna (as pirâmides e o Partenon, por exemplo, têm as dimensões frontais do retângulo áureo). A proporção áurea também é recorrente em outras obras de arte; é comum sua utilização em pinturas renascentistas, como as do mestre Giotto e as de Leonardo da Vinci.

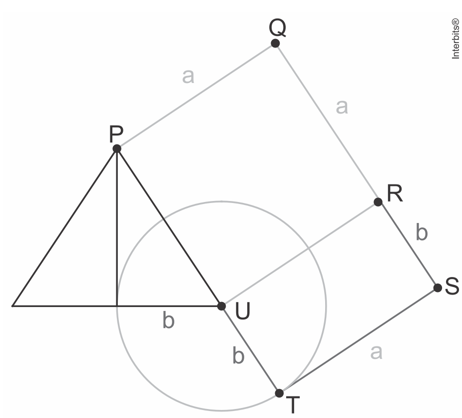
Phi, como é denominado o número de ouro, está vinculado à lógica da natureza (nas constelações, nas estruturas biológicas) e pode ser verificado no homem (o tamanho das falanges dos dedos, por exemplo). Justamente por ser encontrado em estruturas naturais, o número de ouro ganhou status de "ideal", tornando-se tema de pesquisadores, artistas e escritores. O fato de ser expresso em matemática é que o torna fascinante.

Matematicamente falando, a proporção áurea é uma constante real algébrica irracional obtida quando dividimos uma reta em dois segmentos, de forma que o segmento mais longo, dividido pelo segmento menor, dê um número igual ao da reta completa dividida pelo segmento mais longo.



Considere o retângulo $PQST$ semelhante ao retângulo $RSTU$. Sabendo que o triângulo não é isósceles, avalie as afirmativas.

Considere $\varphi = \frac{a}{b}$



( ) Em razão da semelhança entre os dois retângulos é possível afirmar que $a^2 - ab - b^2 = 0$.

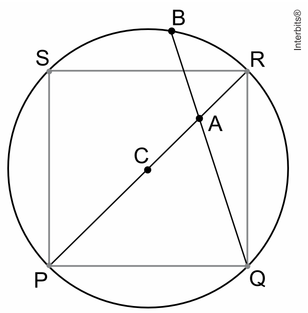
( ) A razão entre a área do quadrado PQRU e a área do retângulo RSTU é φ.

( ) Em razão da semelhança entre os dois retângulos é possível afirmar que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

( ) A proporção $a/b + a/b = 1$ é verdadeira.

( ) A relação entre os lados b e a é dada por $b = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$

16. (FGV 2017) O quadrado PQRS está inscrito em um círculo de centro C. A corda intersecta a diagonal do quadrado em A, sendo que $\overline{QA} = 6$ cm e $\overline{AB} = 4$ cm.



Nas condições descritas, a medida do lado do quadrado PQRS, em cm, é igual a

a. $2\sqrt{10}$.

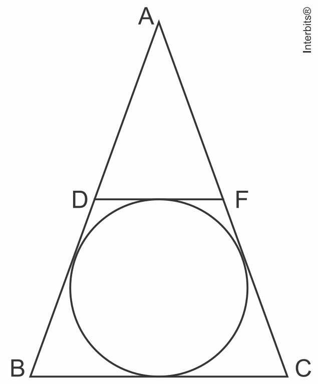
b. $5\sqrt{2}$.

c. $2\sqrt{15}$.

d. $6\sqrt{2}$.

e. $7\sqrt{2}$.

17. (ACAFE 2017) A figura a seguir representa um triângulo isósceles ABC, cuja base é $\overline{BC} = 8$ cm e o segmento $\overline{DF} = 2$ cm paralelo à $\overline{BC}$.



Sabendo que a circunferência está inscrita no quadrilátero BCDF, então a medida, em unidades de área, da região circular, é igual a:

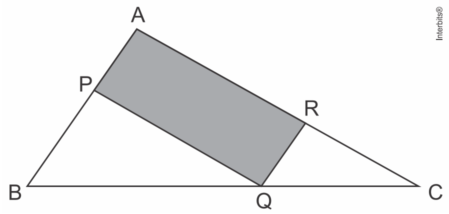
a. 4π.

b. 2π.

c. π.

d. $\pi/4$.

18. (EPCAR (AFA) 2017) Considere, no triângulo ABC abaixo, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$ e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



Sabendo que $\overline{BQ} = 3$ cm, $\overline{QC} = 1$ cm e que a área do triângulo ABC é $8\ cm^2$, então a área do paralelogramo hachurado, em cm^2, é igual a

a. 2

b. 3

c. 4

d. 5

19. (IME 2017) Dado um quadrado $ABCD$, de lado a, marcam-se os pontos E sobre o lado AB, F sobre o lado BC, G sobre o lado CD e H sobre o lado AD, de modo que os segmentos formados AE, BF, CG, e DH tenham comprimento igual a $\frac{3a}{4}$.

A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos AF, BG, CH, e DE mede:

a. $\frac{a^2}{25}$

b. $\frac{a^2}{18}$

c. $\frac{a^2}{16}$

d. $\frac{a^2}{9}$

e. $\frac{2a^2}{9}$

20. (IME 2016) Considere quatro pontos distintos coplanares. Das distâncias entre esses pontos, quatro delas valem a e duas delas valem b. O valor máximo da relação $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é

a. 2

b. $1+\sqrt{3}$

c. $2+\sqrt{3}$

d. $1+2\sqrt{2}$

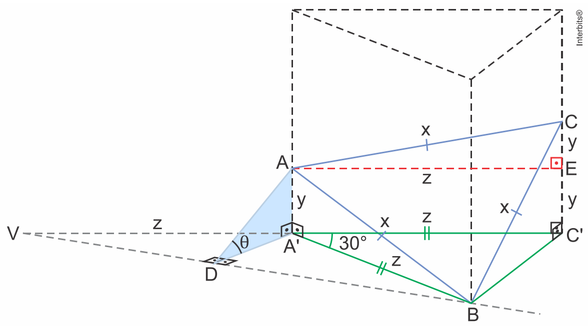
e. $2+2\sqrt{3}$

ANOTAÇÕES

GABARITO

1. [A]

Do enunciado, podemos criar a seguinte figura



$EC' = AA' = y$

Os triângulos ACE e ABA' são congruentes, pelo caso hipotenusa-cateto, logo, $AA' = CE = y.$

No triângulo $A'BC'$,

$$(BC')^2 = z^2 + z^2 - 2 \cdot z \cdot z \cdot \cos 30°$$

$$(BC')^2 = 2z^2 - 2z^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(BC')^2 = z^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$BC' = z\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

No triângulo BCC',

$$x^2 = (2y)^2 + (BC')^2$$

$$x^2 = 4y^2 + z^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \qquad \text{(i)}$$

No triângulo $AA'B$,

$$x^2 = y^2 + z^2 \qquad \text{(ii)}$$

Das equações (i) e (ii),

$$4y^2 + z^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = y^2 + z^2$$

$$3y^2 = z^2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$y^2 = \frac{z^2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)}{3}$$

$$y = \frac{z \cdot \sqrt{\sqrt{3} - 1}}{\sqrt{3}}$$

Note que o triângulo VBC' é retângulo em B, pois a mediana $\overline{BA'}$ possui medida igual à metade da medida do lado $\overline{VC'}$.

Dessa forma, $\overline{DA'}$ é base média do triângulo VBC' e sua medida é $DA' = \dfrac{z \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

No triângulo ADA',

$$(AD)^2 = (DA')^2 + y^2$$

$$(AD)^2 = \frac{z^2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{4} + \frac{z^2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{3}$$

$$(AD)^2 = \frac{3z^2\left(2 - \sqrt{3}\right) + 4z^2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{12}$$

$$(AD)^2 = \frac{z^2\left(6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 4\right)}{12}$$

$$(AD)^2 = \frac{z^2\left(2 + \sqrt{3}\right)}{12}$$

$$AD = \frac{z\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{12}}$$

Portanto, no triângulo $AA'D$,

$$\cos\theta = \frac{A'D}{AD}$$

$$\cos\theta = \frac{\dfrac{z\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\dfrac{z\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{12}}}$$

$$\cos\theta = \frac{z\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{12}}{z\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)} \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = 2\sqrt{3} - 3$$

2. [C]

[A] Falsa. Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$. Note que f é o quociente de duas funções reais. Porém, a função $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sqrt{x}$, não é um polinômio e, assim, f não é racional.

[B] Falsa. Sendo $U = \mathbb{R}_+^*$ o conjunto universo das soluções da equação, temos

$$\begin{aligned}\log_3(3x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=\log_3 x &\Leftrightarrow \log_3(3x+1)+\log_{3^{-1}}(x+1)=\log_3 x\\ &\Leftrightarrow \log_3(3x+1)-\log_3(x+1)=\log_3 x\\ &\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)=\log_3 x\\ &\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+1}=x\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2=2\\ &\Rightarrow x=\sqrt{2}+1.\end{aligned}$$

Portanto, segue que o conjunto solução da equação é unitário.

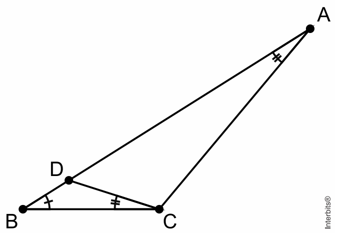
[C] Verdadeira. De fato, seja a progressão geométrica de termos positivos $(800, a_2, 3200, a_4, a_5, \ldots)$. Logo, se q é a razão da progressão geométrica, então

$$3200 = 800\cdot q^2 \Rightarrow q = 2.$$

Portanto, segue que o número total de acessos após cinco dias foi de

$$800\cdot\frac{2^5-1}{2-1}=24800.$$

[D] Falsa. Considere a figura.



Desde que $A\hat{B}C$ é comum e $B\hat{C}D \equiv B\hat{A}C$, podemos afirmar que os triângulos BCD e BAC são semelhantes por AA. Logo, temos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} &\Leftrightarrow \frac{5}{3x+2}=\frac{2}{5}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

É imediato que $\frac{7}{2}$ não é múltiplo de $3.$

3. 01 + 04 + 08 + 16 = 29.

[01] Verdadeira. Com efeito, sendo os triângulos OKN e OLM semelhantes por AA, temos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{LO}}{\overline{KO}}=\frac{\overline{MO}}{\overline{NO}} &\Leftrightarrow \frac{x-2}{5x-14}=\frac{x+3}{5x+1}\\ &\Leftrightarrow (x-2)(5x+1)=(5x-14)(x+3)\\ &\Leftrightarrow -9x-x=-42+2\\ &\Leftrightarrow x=4 \text{ u.c.}\end{aligned}$$

Por conseguinte, vem

$$\begin{aligned}\overline{MN}&=\overline{MO}+\overline{NO}\\ &=6x+4\\ &=28 \text{ u.c.}\end{aligned}$$

[02] Falsa. A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo é igual a $180°(5-2)=540°.$ Logo, temos

$$\begin{aligned}2x+3x+150°+120°+135°=540° &\Leftrightarrow 5x=135°\\ &\Leftrightarrow x=27°.\end{aligned}$$

Portanto, sendo $150°$ a medida do maior ângulo e $54°$ a medida do menor ângulo, segue que a diferença é $150°-54°=96°.$

[04] Verdadeira. De fato, é imediato que $\overline{AB}=13\,\text{cm}.$ Logo, como os triângulos ABC e AEF são semelhantes por AA, temos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}-\overline{CE}}{\overline{AB}} &\Leftrightarrow \frac{x}{12}=\frac{12-\frac{35}{4}}{13}\\ &\Leftrightarrow x=3.\end{aligned}$$

Portanto, segue que x é um número racional.

[08] Verdadeira. Com efeito, se $\ell_6=4\,\text{cm},$ então o raio da circunferência circunscrita ao hexágono tem medida $r=4\,\text{cm}$ e, portanto, o perímetro do quadrado circunscrito a essa mesma circunferência é igual a $2p_4=4\cdot 2r=32\,\text{cm}.$

[16] Verdadeira. De fato, como todo losango possui os quatro lados congruentes, todo losango é um paralelogramo.

[32] Falsa. Sendo $16^2>10^2+8^2,$ podemos afirmar que o triângulo é obtusângulo escaleno.

[64] Falsa. Se n é o número de respondentes que se locomovem de ônibus, então

$$\frac{34+56+62+n}{4}=102 \Leftrightarrow n=256.$$

Mas $256=2^8$ e, desse modo, não é um múltiplo de $3.$

4. 02 + 04 = 06.

[01] Falsa. Sendo a e b os catetos do triângulo, temos que:

$$\frac{a\cdot b}{2}=1 \Rightarrow a\cdot b=2$$

Sendo assim, pelo menos um dos catetos deve ser maior que $1\,\text{cm},$ inviabilizando um perímetro de mesma medida.

[02] Verdadeira. Para um triângulo qualquer, sendo a e b o valor de dois de seus lados e θ o ângulo entre eles, temos:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen}\theta$$

Como $\text{sen}\theta \leq 1$:

$$A \leq \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow A < a \cdot b.$$

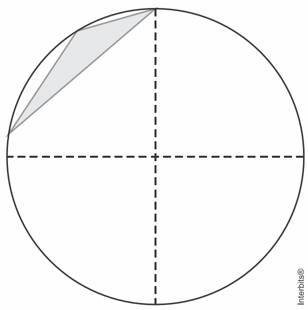
[04] Verdadeira. Podemos representar os lados como $k,$ $2k$ e $4k.$ Dado que:

$$4k > k + 2k$$

Não é possível termos um triângulo com lados em tal proporção.

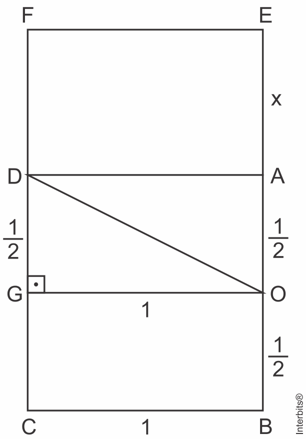
[08] Falsa. No triângulo retângulo de lados $5,$ 12 e $13,$ por exemplo: $13 > 2 \cdot 5.$

[16] Falsa. No contraexemplo abaixo, o círculo foi dividido em 4 quadrantes iguais:



5. [C]

Do enunciado, segue a figura:



Como $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$ são raios da circunferência dada,

$$OD = OE$$

No triângulo $DGO,$

$$(DO)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(DO)^2 = \frac{5}{4}$$

$$DO = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Então,

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + x$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$EA = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

6. [B]

Sendo $12\,m^2$ a área do retângulo $FAME,$ temos

$$\overline{EM} \cdot \overline{AM} = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{AM} = 12$$
$$\Leftrightarrow \overline{AM} = 6\text{ m}.$$

Como $MERP$ é losango, vem $\overline{ER} = \overline{EM} = 2\text{ m}$ e $E\hat{M}R \equiv E\hat{R}M = 30°.$ Portanto, pela Lei dos Senos, temos

$$\frac{\overline{MR}}{\text{sen}\,M\hat{E}R} = \frac{\overline{EM}}{\text{sen}\,E\hat{R}M} \Leftrightarrow \frac{\overline{MR}}{\text{sen}\,120°} = \frac{2}{\text{sen}\,30°}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MR} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

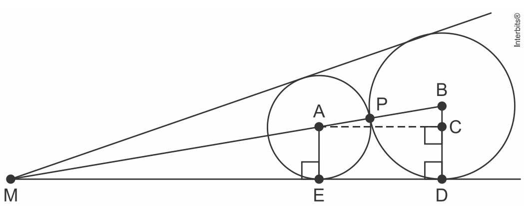
$$\Leftrightarrow \overline{MR} = 2\sqrt{3}\text{ m}.$$

Em consequência, do triângulo $AMR,$ pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{AR}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MR}^2 \Leftrightarrow \overline{AR}^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2$$
$$\Rightarrow \overline{AR} = \sqrt{48}$$
$$\Rightarrow \overline{AR} = 4\sqrt{3}\text{ m}.$$

7. [B]

Considere a figura.



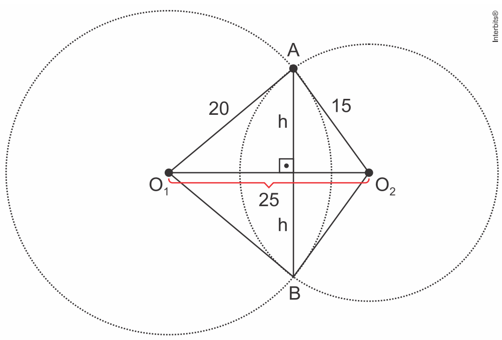
Sendo $\overline{AP} = u$ e $\overline{PB} = v$, temos $\overline{BC} = v - u$. Assim, da semelhança dos triângulos MAE e ABC, vem

$$\frac{\overline{MA}}{u+v} = \frac{u}{v-u} \Leftrightarrow \overline{MA} = \frac{u^2 + uv}{v-u}.$$

A resposta é

$$\begin{aligned}\overline{MP} &= \overline{MA} + \overline{AP} \\ &= \frac{u^2+uv}{v-u} + u \\ &= \frac{2uv}{v-u}.\end{aligned}$$

8. [B]



Considerando a figura acima, temos:

O triângulo AO_1O_2 é retângulo em A, pois:

$25^2 = 15^2 + 20^2.$

Logo, o segmento de medida h é altura desse triângulo.

$20 \cdot 15 = 25 \cdot h \Rightarrow h = 12$

Portanto, $AB = 2 \cdot h = 24$ cm.

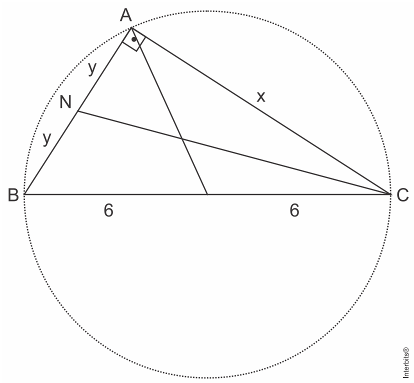
9. [C]

Uma das relações métricas de um triângulo retângulo nos diz que o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura, ou seja, $b \cdot c = a \cdot h.$. Logo:

$$\frac{a}{b \cdot c} + \frac{b}{a \cdot c} + \frac{c}{a \cdot b} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a^2+a^2}{a \cdot a \cdot h} = \frac{2 \cdot a^2}{a^2 \cdot h} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

10. [C]

Considerando que $BC = 12$ cm e que a mediana relativa a este lado mede 6cm, podemos considerar que o triângulo ABC é retângulo em A, pois pode ser inscrito em uma semicircunferência com mostra a figura abaixo:



$$\text{No } \Delta ABC: x^2 + (2y)^2 = 12^2 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 144 \quad \text{(I)}$$
$$\text{No } \Delta ANC: x^2 + y^2 = 9^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 81 \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) – (II), obtemos:

$3y^2 = 63 \Rightarrow y = \sqrt{21}$

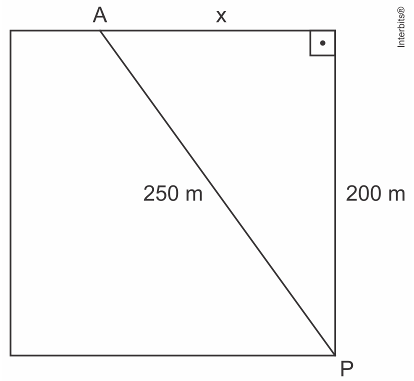
$x^2 + \left(\sqrt{21}\right)^2 = 81 \Rightarrow x = 2 \cdot \sqrt{15}$

Portanto, a área do triângulo ABC será dada por:

$$S = \frac{2y \cdot x}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{21} \cdot 2 \cdot \sqrt{15}}{2} = 6 \cdot \sqrt{35}$$

11. [B]

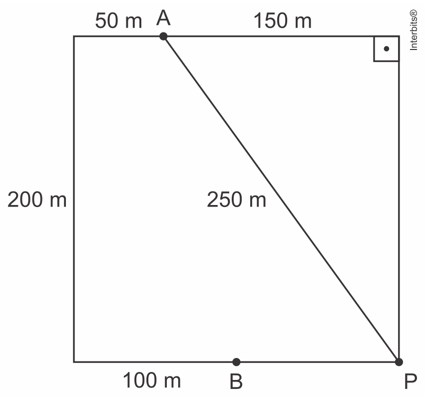
O primeiro passo é calcular a medida x indicada na figura abaixo:



$x^2 + 200^2 = 250^2 \Rightarrow x = 150$ m

Concluímos então que uma das amigas irá percorrer 350 m até o primeiro ponto de encontro A.

Para chegar ao ponto B esta mesma amiga deverá percorrer mais 350 m a partir do ponto A.

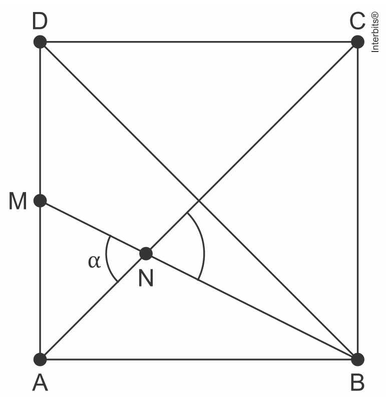


Logo, a medida do segmento de extremos P e B será dada por:

$$PB = 200 - 100 = 100 \text{ m}.$$

12. [C]

Considere a figura.



Sem perda de generalidade, considere $\overline{AB} = 2.$ Logo, segue que $\overline{AM} = 1$ e, assim, pelo Teorema de Pitágoras, vem $\overline{BM} = \sqrt{5}.$

Como $M\hat{A}N \equiv B\hat{C}N = 45°$ e $A\hat{N}M \equiv B\hat{N}C = \alpha,$ podemos afirmar que os triângulos ANM e CNB são semelhantes por AA. Portanto, temos

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BN}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{MN}}{\sqrt{5} - \overline{MN}}$$
$$\Leftrightarrow \overline{MN} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ademais, pela Lei dos Senos, encontramos

$$\frac{\overline{AM}}{sen\,\alpha} = \frac{\overline{MN}}{sen\,M\hat{A}N} \Leftrightarrow \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\Leftrightarrow cossec\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}.$$

Finalmente, sabendo que $1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \text{cossec}^2\,\alpha,$ temos

$$\text{cotg}^2\,\alpha = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}\right)^2 - 1 \Rightarrow \text{cotg}^2\,\alpha = \frac{1}{9}$$
$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 3.$$

13. 01 + 02 + 04 + 08 + 16 = 31.

Analisando as alternativas uma a uma:

[01] CORRETA. Calculando:

$$7^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos x \Rightarrow -51 = -96 \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{51}{96} = \frac{17}{32}$$

[02] CORRETA. Calculando:

$$6^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos x \Rightarrow -77 = -112 \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{77}{112} = \frac{11}{16}$$
$$\text{sen}^2 x + \left(\frac{11}{16}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{121}{256} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{135}{256} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

[04] CORRETA. Calculando:

$$8^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos x \Rightarrow -21 = -84 \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$
$$\text{sen}^2 x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{15}{16} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$\text{tg } x = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{4}{1} = \sqrt{15}$$

[08] CORRETA. Calculando:

$$\frac{17}{32} + \frac{11}{16} + \frac{1}{4} = \frac{17 + 22 + 8}{32} = \frac{47}{32} > 1$$

[16] CORRETA. Calculando:

$$\frac{16}{11} + \frac{4}{1} = \frac{16 + 44}{11} = \frac{60}{11} > 5$$

14. 02 + 16 = 18.

[01] INCORRETA. Calculando:

$$12 \div 300 = 0{,}04 \text{ m}^2/\text{peça} \Rightarrow \text{lado} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2\text{m} = 20\text{cm}$$

[02] CORRETA. Calculando:

$$AC^2 = 5^2 + 7^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 60°$$
$$AC^2 = 39 \Rightarrow AC = \sqrt{39} \Rightarrow \sqrt{6^2} < AC < \sqrt{7^2}$$

[04] INCORRETA. Calculando:

$$R = 200$$
$$C = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 200 = 400\pi \approx 1256 \text{ m} = 1{,}256 \text{ km}$$
$$502{,}4 \div 1{,}256 = 400 \text{ voltas}$$

[08] INCORRETA. O losango é um exemplo de polígono com lados iguais e ângulos diferentes.

[16] CORRETA. Calculando:

$$8^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{48}$$

$$CM^2 = \left(\frac{\sqrt{48}}{2}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow CM = \sqrt{28} > \sqrt{5^2}$$

15. V – V – V – F – V.

[V] Teremos:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} \rightarrow ab + b^2 = a^2 \rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

[V] Teremos:

$$\frac{S_{PQRU}}{S_{RSTU}} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b} = \varphi$$

[V] Utilizando-se a relação encontrada no primeiro item, teremos:

$$\frac{a^2 - ab - b^2}{b^2} = \frac{0}{b^2} \rightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

[F] Não, a proporção verdadeira é $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = 1$, conforme calculado no item anterior.

[V] Utilizando-se a relação encontrada no terceiro item, teremos:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0 \rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

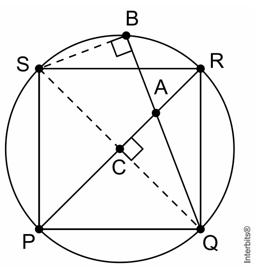
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1 \cdot (1+\sqrt{5})}{2} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \rightarrow b = \frac{a \cdot (\sqrt{5}-1)}{2}$$

16. [C]

Considere a figura, em que ℓ é a medida do lado do quadrado **PQRS.**



É fácil ver que os triângulos **BQS** e **CQA** são semelhantes por **AA.** Ademais, como $\overline{QS} = \ell\sqrt{2}\,\text{cm}$ e **C** é ponto médio de **QS,** temos

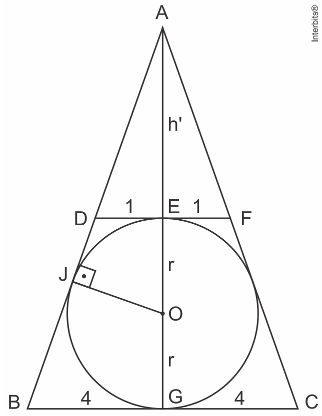
$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QS}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{6}{\ell\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = 60$$

$$\Rightarrow \ell = 2\sqrt{15}\,\text{cm}.$$

17. [A]

Calculando:



$$\Delta AED \sim \Delta AGB$$

$$\frac{h'}{h'+2r} = \frac{1}{4} \Rightarrow h' = \frac{2r}{3}$$

Em ΔAJO:

$$(h'+r)^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow (h')^2 + 2h'r + r^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow (h')^2 + 2h'r = x^2$$

$$\left(\frac{2r}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2r}{3} \cdot r = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4r^2}{9} + \frac{4r^2}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{16r^2}{9} \Rightarrow x = \frac{4r}{3}$$

$$\Delta AJO \sim \Delta AGB$$

$$\frac{x}{h'+2r} = \frac{r}{4} \Rightarrow \frac{\frac{4r}{3}}{\frac{2r}{3}+2r} = \frac{r}{4} \Rightarrow \frac{4r}{8r} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = 2$$

$$S_c = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow S_c = 4\pi\ \text{cm}^2$$

18. [B]

Calculando:

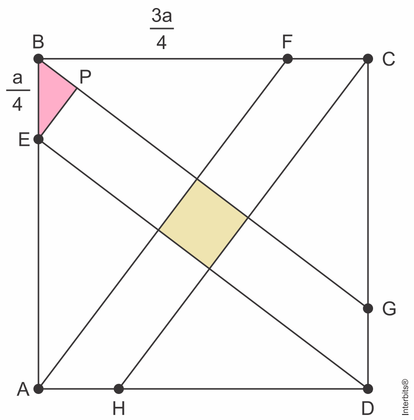
$$\frac{CQ}{CB} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{S_{RQC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{S_{RQC}}{8} \rightarrow S_{RQC} = {}^{1}\!/_{2}$$

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{RQC}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = \frac{9}{1} \rightarrow \frac{9}{1} = \frac{S_{PBQ}}{{}^{1}\!/_{2}} \rightarrow S_{PBQ} = {}^{9}\!/_{2}$$

$$S_{hachurado} = S_{ABC} - S_{PBQ} - S_{RQC} = 8 - {}^{9}\!/_{2} - {}^{1}\!/_{2} \rightarrow S_{hachurado} = 3$$

19. [A]

Pode-se desenhar, segundo o enunciado:



$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = \dfrac{3a}{4}$

$\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{AH} = \dfrac{a}{4}$

$\Delta AED \equiv \Delta BFA \equiv \Delta CGB \equiv \Delta DHC$

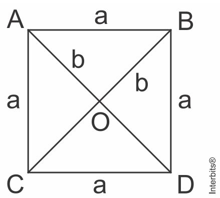
Quadrilátero amarelo $\rightarrow$ quadrado de lado x

$\dfrac{\overline{PE}}{\overline{DG}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \rightarrow \dfrac{x}{a/4} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2}} \rightarrow x = \dfrac{a}{5} \rightarrow \text{Área} = x^2 = \dfrac{a^2}{25}$

20. [C]

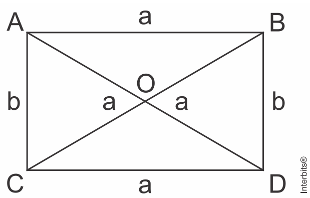
As distâncias mencionadas podem formas triângulos ou quadriláteros.

No caso de quadriláteros, podem ser: quadrado, retângulo ou trapézios, conforme figuras a seguir:



$\Delta ABC = \Delta ABD = \Delta BCD = \Delta ACD$

$b^2 = a^2 + a^2 \rightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 2$

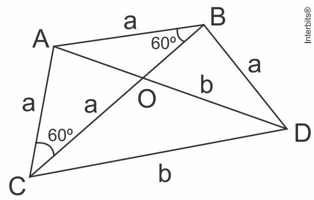


$\begin{cases} \overline{OC} + \overline{OD} > a \\ \overline{OA} + \overline{OB} > a \end{cases}$

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} > 2a$

$\left(\overline{OA} + \overline{OD}\right) + \left(\overline{OB} + \overline{OC}\right) > 2a$

$2a > 2a \rightarrow$ não é possível

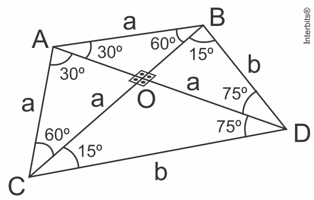


$\begin{cases} \overline{OC} + \overline{OD} > b \\ \overline{OA} + \overline{OB} > b \end{cases}$

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} > a + b$

$\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right) + \left(\overline{OB} + \overline{OD}\right) > a + b$

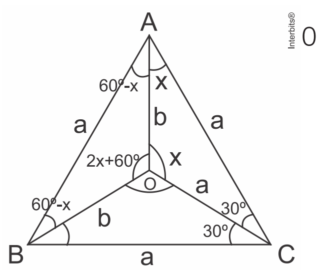
$a + b > a + b \rightarrow$ não é possível



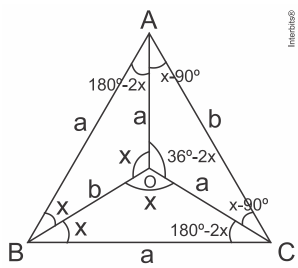
$\Delta ABC \equiv \Delta ACD$

$b^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 30° \rightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$

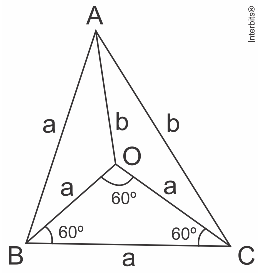
No caso de triângulos, podem ser conforme figuras a seguir:



$\left.\begin{matrix} x < 60° \\ x = 75° \end{matrix}\right\} \rightarrow$ não é possível

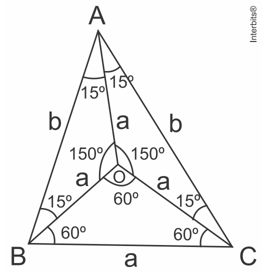


$\left.\begin{matrix} \Delta AOB \rightarrow x > 90° \\ \Delta AOC \rightarrow x < 90° \end{matrix}\right\} \rightarrow$ não é possível



$\Delta ABC \equiv \Delta ABO$

$\measuredangle ABC = \measuredangle ABO \rightarrow$ não é possível



$\Delta ABO \equiv \Delta AOC$

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 150° \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

Portanto, o maior valor de $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é $2 + \sqrt{3}.$

ANOTAÇÕES