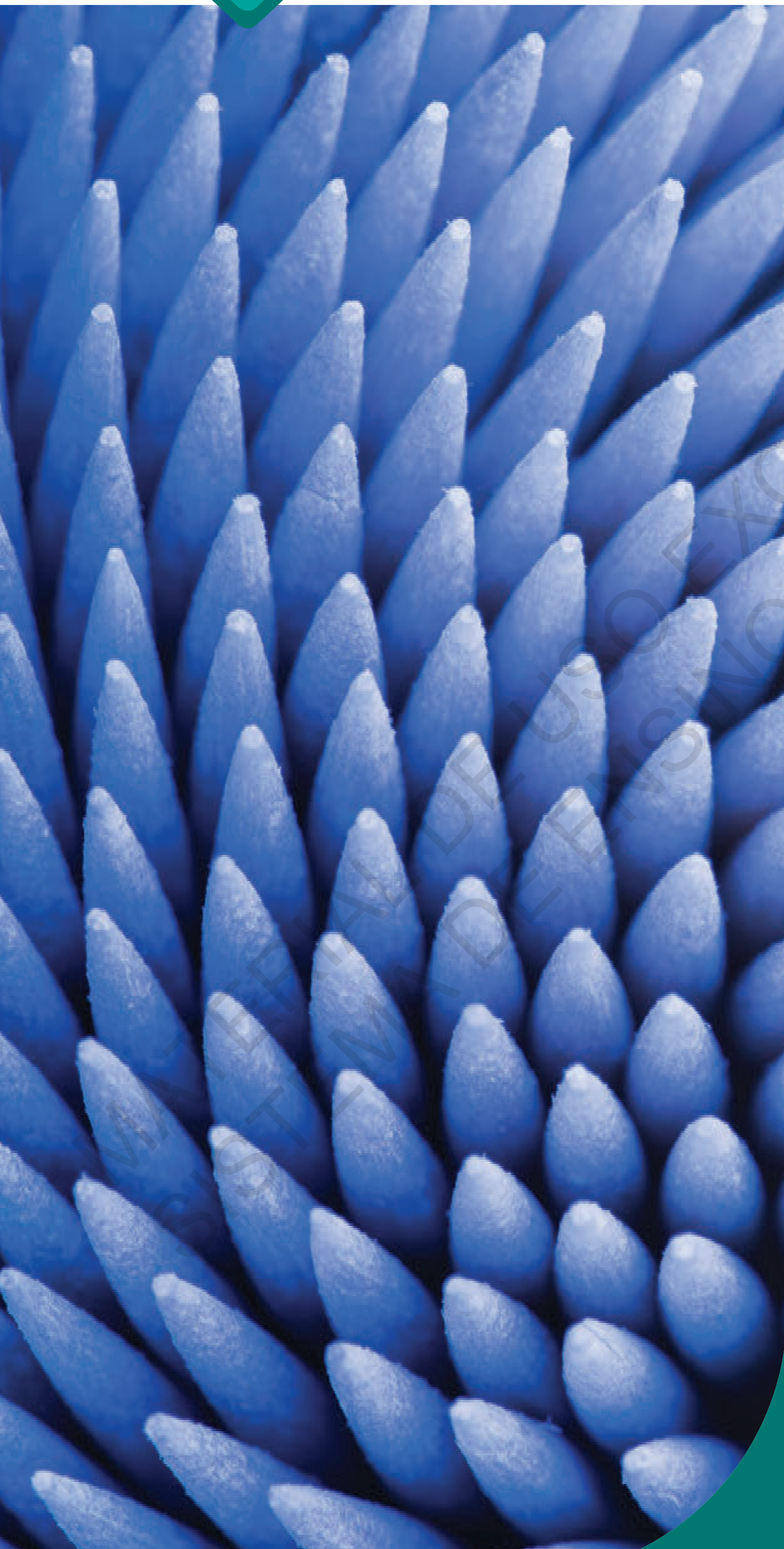
PRÉ-VESTIBULAR
SEMIEXTENSIVO

DOM BOSCO by Pearson



MATERIAL DO PROFESSOR

Matemática

VOLUME 1

DOM BOSCO
by Pearson

MATERIAL DO PROFESSOR

Matemática

PRÉ-VESTIBULAR
SEMIEXTENSIVO

VOLUME
1

DOM BOSCO - SISTEMA DE ENSINO
PRÉ-VESTIBULAR SEMIEXTENSIVO 1
Matemática e suas tecnologias.

Vice-presidência de Educação Juliano Melo Costa
Gerência editorial nacional Alexandre Mattioli
Gerência de produto Silvana Afonso
Autoria Vinícius Piloto Amaro Fernandes, Allan Roberto Fabossi e Edilson Sousa Santos
Coordenação editorial Luiz Molina Luz
Edição de conteúdo Paulo Roberto de Jesus Silva, Egídio Trambaiolli
Assistência de edição Ana Carolina de Almeida Paulino, Felipe Gabriel
Leitura crítica Fernando Manenti e Alessandro Coelho, Curso São Carlos Ltda.
Preparação e revisão Igor Debiasi e Sérgio Nascimento
Gerência de Design Cleber Figueira Carvalho
Coordenação de Design Diogo Mecabo
Edição de arte Alexandre Silva
Coordenação de pesquisa e licenciamento Maiti Salla
Pesquisa e licenciamento Andrea Bolanho, Cristiane Gameiro, Heraldo Colon, Maricy Queiroz, Sandra Sebastião, Shirlei Sebastião
Ilustrações Alex Cói, Carla Viana, Madine Oliveira, Claudia Silveira, Renato Calderaro
Projeto Gráfico Apis design integrado
Diagramação Editorial 5
Capa Apis design integrado
Imagem de capa mvp64/istock
Produtor multimídia Cristian Neil Zaramella
PCP George Baldim, Paulo Campos

Av. Santa Marina, 1193 - Água Branca
São Paulo, SP – CEP 05036-001
Tel. (11) 3521-3500

www.pearson.com.br

APRESENTAÇÃO

Um bom material didático voltado ao vestibular deve ser maior que um grupo de conteúdos a ser memorizado pelos alunos. A sociedade atual exige que nossos jovens, além de dominar conteúdos aprendidos ao longo da Educação Básica, conheçam a diversidade de contextos sociais, tecnológicos, ambientais e políticos. Desenvolver as habilidades a fim de obterem autonomia e entenderem criticamente a realidade e os acontecimentos que os cercam são critérios básicos para se ter sucesso no Ensino Superior.

O Enem e os principais vestibulares do país esperam que o aluno, ao final do Ensino Médio, seja capaz de dominar linguagens e seus códigos; construir argumentações consistentes; selecionar, organizar e interpretar dados para enfrentar situações-problema em diferentes áreas do conhecimento; e compreender fenômenos naturais, processos histórico-geográficos e de produção tecnológica.

O Pré-Vestibular do Sistema de Ensino Dom Bosco sempre se destacou no mercado editorial brasileiro como um material didático completo dentro de seu segmento educacional. A nova edição traz novidades, a fim de atender às sugestões apresentadas pelas escolas parceiras que participaram do Construindo Juntos – que é o programa realizado pela área de Educação da Pearson Brasil, para promover a troca de experiências, o compartilhamento de conhecimento e a participação dos parceiros no desenvolvimento dos materiais didáticos de suas marcas.

Assim, o Pré-Vestibular Semiextensivo Dom Bosco by Pearson foi elaborado por uma equipe de excelência, respaldada na qualidade acadêmica dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as quatro áreas de conhecimento com projeto editorial exclusivo e adequado às recentes mudanças educacionais do país.

O novo material envolve temáticas diversas, por meio do diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes curriculares de uma ou mais áreas do conhecimento, com propostas curriculares que contemplem as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como eixos integradores entre os conhecimentos de distintas naturezas; o trabalho como princípio educativo; a pesquisa como princípio pedagógico; os direitos humanos como princípio norteador; e a sustentabilidade socioambiental como meta universal.

A coleção contempla todos os conteúdos exigidos no Enem e nos vestibulares de todo o país, organizados e estruturados em módulos, com desenvolvimento teórico associado a exemplos e exercícios resolvidos que facilitam a aprendizagem. Soma-se a isso, uma seleção refinada de questões selecionadas, quadro de respostas e roteiro de aula integrado a cada módulo.

SUMÁRIO

WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 1

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

1 POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

- Potenciação
- Radiciação

HABILIDADES

- Operar com potenciação.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações — naturais, inteiros, racionais ou reais.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Diferenciar conceitos de potenciação e radiciação.
- Operar com radiciação.
- Verificar que as operações de potenciação e radiciação são inversas entre si.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Potenciação

Definições

Considere **a** um número real e **n** um número natural diferente de zero:
Para **n** maior que 1, a^n é igual ao produto de **n** fatores idênticos a **a**, isto é:
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\mathbf{n}\text{ vezes}}$
Para n = 1, define-se: $a^1 = a$
Para n = 0 e a ≠ 0, define-se: $a^0 = 1$
Expoente inteiro e negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$

Exemplos:

- $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$
- $2^1 = 2$
- $\pi^0 = 1$
- $5^{-1} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$
- e) $1^{1\,024} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

Notação: o elemento **a** é chamado de **base** e **n** é chamado de *expoente*. Assim, a^n é denominada **potência**.
Base $\leftarrow a^{n \rightarrow \text{Expoente}}$

PROPRIEDADES

Considere números reais **a** e **b** e números naturais **m** e **n**. Existem algumas propriedades da potenciação envolvendo números reais que facilitam na hora de resolver problemas matemáticos. São válidas as propriedades a seguir.

Produto de potências de mesma base

Para multiplicar potências de mesma base, conserva-se a **base** e somam-se os **expoentes**.

Para dois números inteiros **m** e **n**, temos que:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplos:

- $10^5 \cdot 10^2 = 10^7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000\,000$
- $5^{10} \cdot 5^{(-10)} = 5^{10+(-10)} = 5^0 = 1$

Quociente de potências de mesma base

Para dividir potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$$

Exemplos:

- $\dfrac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2 = 25$
- $\dfrac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1} = 0{,}1$
- $\dfrac{2^3}{2^x} = 2^{3-x}$

Produto de potências de mesmo expoente

Para multiplicar potências de mesmo expoente, conserva-se o **expoente** e multiplicam-se as **bases**.

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Exemplos:

- $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$
- $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (a \cdot b \cdot c)^3$

Quociente de potências de mesmo expoente

Para dividir potências de mesmo expoente, conserva-se o **expoente** e dividem-se as **bases**.

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0$

Exemplos:

- $\dfrac{2^2}{10^2} = \left(\dfrac{2}{10}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$
- $\left(\dfrac{a^n}{b^n \cdot c^n}\right) = \left(\dfrac{a^n}{(b \cdot c)^n}\right) = \left(\dfrac{a}{b \cdot c}\right)^n$

Potência de uma potência

Para elevar uma potência a um novo expoente, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

- $(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10} = 1\,024$
- $((2^2)^3)^4 = 2^{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2^{24}$

SITUAÇÕES ESPECIAIS

As potências $(-a)^n$ e $-a^n$ apresentam diferentes resultados caso o número **n** seja par.

Exemplos:

- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4 = 2^2$
- $-2^2 = -(2) \cdot (2) = -4$

As potências $(a^m)^n$ e a^{m^n} em geral apresentam diferentes resultados, pois:

$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{(m \cdot n)}$ e $a^{m^n} = a^{\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ vezes}}}$

Exemplos:

- $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
- $2^{3^2} = 2^{3 \cdot 3} = 2^9 = 512$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Mackenzie-SP – A fração $\dfrac{2^{98} + 4^{50} - 8^{34}}{2^{99} - 32^{20} + 2^{101}}$ é igual a:

a) 1
b) $-\dfrac{11}{6}$
c) 2
d) $-\dfrac{5}{2}$
e) $\dfrac{7}{4}$

Resolução

Transformando todos os termos da fração em potências de 2, temos que

$$\frac{2^{98} + 4^{50} - 8^{34}}{2^{99} - 32^{20} + 2^{101}} = \frac{2^{98} + (2^2)^{50} - (2^3)^{34}}{2^{99} - (2^5)^{20} + 2^{101}} = \frac{2^{98} + 2^{100} - 2^{102}}{2^{99} - 2^{100} + 2^{101}} =$$

$$= \frac{2^{98}(1 + 2^2 - 2^4)}{2^{99}(1 - 2^1 + 2^2)} = \frac{(1 + 4 - 16)}{2(1 - 2 + 4)} = \frac{-11}{2 \cdot 3} = \frac{-11}{6}$$

Alternativa correta: B

2. UEL – Simplificando-se a expressão:

$\dfrac{3^{3-n} + 3 \cdot 3^{2-n} - 9 \cdot 3^{1-n}}{9 \cdot 3^{2-n}}$, para $n \in \mathbb{R}$ obtém-se:

a) $\dfrac{1}{6}$
b) $\dfrac{1}{3}$
c) $6 \cdot 3^{n-1}$
d) $1 - 3^{1-n}$
e) -3^{n+1}

Resolução

Transformando todos os termos da fração em potências de 3, temos que

$$\frac{3^{3-n} + 3^{1+(2-n)} - 3^{2+(1-n)}}{3^{2+(2-n)}} = \frac{3^{3-n} + 3^{3-n} - 3^{3-n}}{3^{4-n}} =$$

$$\frac{3^{3-n}}{3^{4-n}} = 3^{3-n-(4-n)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

POTÊNCIA DE DEZ

É comum o uso da **notação científica**, isto é, escrita de um número com o auxílio de potências de base 10, geralmente no seguinte formato:

$$A \cdot 10^n$$

Nessa fórmula, **A** é um número maior ou igual a 1 e menor que 10; **n** é um número inteiro, expoente de 10.

Números muito grandes

Para escrever um número muito grande em notação científica, procede-se à divisão sucessiva por 10 até que se encontre um resultado maior ou igual a 1 e menor que 10. Ao dividir um número por 10, há o deslocamento da vírgula para a esquerda. A quantidade de divisões efetuadas, ou seja, a quantidade de deslocamentos de vírgula é o expoente de 10.

Exemplo:

No planeta Terra há cerca de 7 bilhões de habitantes, ou seja:

7 bilhões = 7 000 000 000

7 000 000 000 : 1 000 000 000 = 7

Então,

7 bilhões é igual a $7 \cdot 10^9$.

Números muito pequenos

Para escrever um número muito pequeno em notação científica, procede-se à multiplicação sucessiva por 10 até que se encontre um resultado maior ou igual a 1 e menor que 10. Quando se multiplica um número por 10, há o deslocamento da vírgula para a direita. A quantidade de multiplicações efetuadas, ou seja, a quantidade de deslocamentos de vírgula, é representada por um número com sinal negativo, que é o expoente de 10.

Exemplo:

Na Química, a massa de uma molécula de água é aproximadamente 0,0000000000000000000000003 g. Para representar esse número em notação científica, pode-se pensar o cálculo da seguinte forma:

$$\frac{3}{100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

Radiciação

Definições

Considere **a** um número real não negativo e **n**, um número natural diferente de zero. O símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa um número real **b**, não negativo, que satisfaz à igualdade $b^n = a$.

Notação:

O número **a** é chamado de radicando, **n** é denominado índice e $\sqrt[n]{a}$ é a raiz n-ésima de **a**.

Índice $\leftarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow$ Radicando

Observação:

O símbolo $\sqrt{a}$ sem o índice representa a raiz quadrada $\sqrt[2]{a}$.

Exemplos:

- $\sqrt{49} = 7$, pois $7^2 = 49$ (raiz quadrada de 49)
- $\sqrt[1]{3} = 3$, pois $3^1 = 3$ (raiz primeira de 3)
- $\sqrt[3]{0} = 0$, pois $0^3 = 0$ (raiz cúbica de zero)

RAIZ QUADRADA DO QUADRADO DE UM NÚMERO REAL

- $\sqrt{a^2} = a$, se **a** for número real não negativo;
- $\sqrt{a^2} = -a$, se **a** for número real negativo.

Observação:

Não se deve confundir $\sqrt{4} = 2$ com $\sqrt{4} = \pm 2$, pois é falso, de acordo com a definição $2 = \sqrt{4}$ e $-2 = -\sqrt{4}$.

Se for considerada a equação $x^2 = 4$, têm-se como solução as raízes 2 e -2, pois $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$.

POTÊNCIAS COM EXPOENTE RACIONAL

Dado um número real **a**, tal que $a > 0$, além de **n** inteiro e **k** inteiro positivo, então $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$.

Exemplos:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$
- $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

Observação:

Todas as propriedades apresentadas para potências de expoentes inteiros do módulo anterior são válidas para expoentes racionais.

Nem sempre se consegue encontrar um valor inteiro como resultado de uma raiz de um número natural. Por exemplo, $\sqrt{5}$.

É preciso achar um número que, elevado ao quadrado, resulte em 5. Em casos como esse, podem-se utilizar métodos matemáticos para atribuir uma aproximação ao resultado pretendido. Usando uma calculadora, podemos obter um valor com uma boa aproximação para números como esse.

Números com essa característica pertencem ao conjunto dos irracionais, isto é, não podem ser escritos em forma de fração.

PROPRIEDADES

Considere os números reais **a** e **b** não negativos e os naturais não nulos **m**, **n** e **p**. Assim, é possível provar as propriedades a seguir.

Produto de radicais de mesmo índice

Para multiplicar radicais com o mesmo índice, conserva-se o índice e multiplicam-se os radicandos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Exemplos:

- $\sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[5]{5^3} = \sqrt[5]{5^2 \cdot 5^3} = \sqrt[5]{5^5} = 5$
- $\sqrt[9]{1\,024 \cdot 256} = \sqrt[9]{1\,024} \cdot \sqrt[9]{256} = \sqrt[9]{2^{10}} \cdot \sqrt[9]{2^8} =$
  $= \sqrt[9]{2^9 \cdot 2} \cdot \sqrt[9]{2^8} = 2\sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[9]{2^8} = 2 \cdot \sqrt[9]{2 \cdot 2^8} = 2 \cdot \sqrt[9]{2^9} =$
  $= 2 \cdot 2 = 4$

Divisão de radicais de mesmo índice

Para dividir radicais de mesmo índice, conserva-se o índice e dividem-se os radicandos:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Exemplos:

- $\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\frac{128}{4}} = \sqrt[5]{32} = 2$
- $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Potência de uma raiz

Para elevar uma raiz a um expoente, basta elevar o radicando a esse expoente:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

- $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5^2} = 5$
- $(\sqrt[3]{2})^{-6} = \sqrt[3]{2^{-6}} = 2^{-\frac{6}{3}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Raiz de outra raiz

Para calcular a raiz de outra raiz, basta conservar o radicando e multiplicar os índices:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplos:

- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[2\cdot 3\cdot 4]{2} = \sqrt[24]{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[3\cdot 5]{6} = \sqrt[15]{6}$

Simplificação de radicais

Ao se multiplicarem o índice e o expoente de seu radicando por um mesmo número natural não nulo, o valor da raiz não se altera:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} \quad (p \neq 0)$$

Exemplos:

- $\sqrt{3^3} = \sqrt[2\cdot 2]{3^{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{3^6}$
- $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4\cdot 3]{2^{5\cdot 3}} = \sqrt[12]{2^{15}}$

Observação:
O valor de uma raiz não se altera ao se dividirem o índice do radical e o expoente do radicando por um fator comum natural não nulo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/p]{a^{m/p}} \quad (p \neq 0)$$

Exemplos:

- $\sqrt[6]{10^4} = \sqrt[6/2]{10^{4/2}} = \sqrt[3]{10^2}$
- $\sqrt[4]{5^{16}} = \sqrt[4/4]{5^{16/4}} = 5^4$
- $\sqrt[16]{3^{24}} = \sqrt[16/8]{3^{24/8}} = \sqrt{3^3}$
- $\sqrt[3]{27\cdot x^3\cdot y^5\cdot z^2} = \sqrt[3]{3^3\cdot x^3\cdot y^5\cdot z^2} =$
  $= \sqrt[3]{3^3\cdot x^3\cdot y^3\cdot y^2\cdot z^2} = \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^3}\cdot\sqrt[3]{y^2\cdot z^2} =$
  $= 3\cdot x\cdot y\cdot\sqrt[3]{y^2\cdot z^2}$
- $\sqrt{a^2b^3c^4} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^3}\cdot\sqrt{c^4} = abc\sqrt{bc^2}$
- $\sqrt[5]{7776} = \sqrt[5]{32\cdot 243} = \sqrt[5]{2^5\cdot 3^5} = 2\cdot 3 = 6$

REDUÇÃO DE DOIS OU MAIS RADICAIS AO MESMO ÍNDICE

Calcula-se um múltiplo comum aos índices. Em seguida, aplica-se a propriedade: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$ $(p \neq 0)$.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[4]{x^3}$; e $\sqrt[2]{y}$

Logo, $\sqrt[3]{xy^2} = \sqrt[12]{x^4y^8}$, $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9}$ e $\sqrt[2]{y} = \sqrt[12]{y^6}$.

- $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{5}$

Logo, $\sqrt[6]{2} = \sqrt[12]{2^2}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4}$ e $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$.

Observação:
A multiplicação e a divisão de raízes só devem ser efetuadas se os radicais tiverem índices iguais.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{5^4}\cdot\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{5^4\cdot 2^6\cdot 3^3}$$

Para comparação de raízes, os índices devem ser iguais. A maior raiz será aquela que tiver o maior radicando.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 2]{2^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{4}$
- $\sqrt[2]{3} = \sqrt[2\cdot 3]{3^{1\cdot 3}} = \sqrt[6]{27}$, logo $\sqrt[2]{3} > \sqrt[3]{2}$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Queremos eliminar o radical do denominador; para isso, devemos transformar a fração em outra sem radicais irracionais no denominador, facilitando o cálculo da divisão.

A racionalização pode ser feita multiplicando-se numerador e denominador por um mesmo fator, chamado de **fator de racionalização** ou **racionalizante**, obtendo, assim, uma fração equivalente à anterior.

1º caso: denominadores $\sqrt[n]{a^m}$.

Observa-se que:

$$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Portanto, nas frações que têm um denominador do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, basta multiplicar o termo por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ (fator de racionalização). Com isso, eliminamos o radical (número irracional).

Exemplos:

- $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$

Observação:
Se no denominador aparecer uma raiz quadrada, o fator de racionalização é outra raiz quadrada igual à existente no denominador da fração.

2º caso: denominadores $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

Nesse caso, vale relembrar o produto notável $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$. Note que esse produto notável, aplicado aos denominadores, produz um resultado racional.

Ou seja:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

Exemplos:

- $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
- $\dfrac{1}{3\sqrt{3}-3}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}-3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}+3}=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{9\cdot 3-9}=$

  $=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{18}=\dfrac{\sqrt{3}+}{6}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3. ESA-RJ – Simplificando $2\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}$, obtemos:

a) $\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{8}$

c) $\sqrt{8}$

d) $-4\sqrt{2}$

e) $-2\sqrt{2}$

Resolução

$2\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}=2\sqrt{4\cdot 2}-4\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}=$

$=2\cdot 2\sqrt{2}-4\cdot 3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$

ROTEIRO DE AULA

POTENCIAÇÃO

Definição

- $n > 1$, $a^2 =$ $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n vezes}}$
- $a^1 =$ a
- Para $a \neq 0$, $a^0 =$ 1
- Para $a \neq 0$, $a^{-n} =$ $\frac{1}{a}$

Propriedades

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Casos Especiais

- As potências a^{mn} e $(a^m)^n$ geralmente apresentam resultados pares
- As potências $(-a)^n$ e $-a^n$ apresentam resultados diferentes para **n** diferentes

Notação Científica

$A \cdot 10^n$

Sendo $1 \leqslant A < 10$ e n inteiro

ROTEIRO DE AULA

RADICIAÇÃO

Definição

No símbolo $\sqrt[n]{a} = b$, n é o índice, a é o radicando e b é a raiz n-ésima de a.
Define-se:

1. Se n é um número natural par não nulo, a e b são números reais não negativos: $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$.
2. Se n é um número natural ímpar, a e b são números reais: $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$.

Satisfeitas as condições do índice e do radicando, define-se: $c^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{c^k}$.

Propriedades

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C1-H3

Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de *bit*, pode assumir dois valores (0 ou 1). Para representação de caracteres e outras informações, é necessário fazer uso de uma sequência de bits, o *byte*. No passado, um *byte* era composto de 6 bits em alguns computadores, mas atualmente tem-se a padronização que o *byte* é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 *bits*. Esse padrão permite representar apenas 2^8 informações distintas.

Se um novo padrão for proposto, de modo que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2560 informações distintas, o número de bits em um *byte* deve passar de 8 para

a) 10
b) 12
c) 13
d) 18
e) 20

Temos que $2^{11} = 2\,048$ e $2^{12} = 4\,096$. Como $2\,048 < 2\,560 < 4\,096$ então seriam necessários, no mínimo, 12 *bits* em um *byte*.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidades: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

2. CFTMG – Sendo $y = \dfrac{4^{10} \cdot 8^{-3} \cdot 16^{-2}}{32}$, a metade do valor de y é

a) 2^{-3}
b) 2^{-4}
c) 2^{-5}
d) 2^{-6}

Vamos transformar os termos de y em potências de 2

$$y = \frac{(2^2)^{10} \cdot (2^3)^{-3} \cdot (2^4)^{-2}}{2^5} = \frac{2^{20} \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-8}}{2^5} = 2^{20-9-8-5} = 2^{-2}$$

A metade de y é dada por $\dfrac{2^{-2}}{2} = 2^{-3}$

3. UNESP (adaptado) – Uma fórmula matemática para se calcular aproximadamente a área, em metros quadrados, da superfície corporal de uma pessoa é dada por: $S(p) = \dfrac{11}{100} \cdot p^{\frac{2}{3}}$, em que p é a massa da pessoa em quilogramas. Considerando uma criança de 8 kg. Qual é área corporal desta criança e qual massa que ele terá quando a área de sua superfície corporal duplicar? (Use a aproximação $\sqrt{2} = 1{,}4$.)

a) 0,53 m² e 32,4 kg
b) 0,44 m² e 22,5 kg
c) 0,54 m² e 24,6 kg
d) 0,44 m² e 22,4 kg
e) 0,52 m² e 28,4 kg

Calculando a área corporal da criança, temos:

$$S(8) = \frac{11}{100} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 0{,}11 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 0{,}11 \cdot 2^2 = 0{,}44 \rightarrow 0{,}44 \text{ m}^2$$

Calculando a massa quando sua superfície corporal duplicar, temos:

$$0{,}88 = 0{,}11 \cdot p \rightarrow p^{\frac{2}{3}} = 8 = 2^3 \rightarrow (p^{\frac{2}{3}})^3 = (2^3)^3 = 2^9 \rightarrow$$

$$\rightarrow p = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8 \cdot 2} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16 \cdot 1{,}4 = 22{,}4 \rightarrow 22{,}4 \text{ kg}$$

4. UTFPR – Simplificando a expressão $\dfrac{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1}$, obtemos:

a) $\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3$
c) $\dfrac{7}{2} + 2\sqrt{2}$
d) $3 + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
e) $\dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2 - 1} = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

5. IFSP (adaptado) – Considere que:

- a distância média da Terra à Lua é de cerca de 400 000 km; e

- a distância média da Terra ao Sol é de cerca de 150 milhões de quilômetros.

Com base nessas informações, em relação à Terra, o Sol está N vezes mais longe do que a Lua. Calcule o valor de N.

Temos que $\dfrac{150 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^5} = 37{,}5 \cdot 10 = 375$

6. IFAL (adaptado) – Calcule o valor exato da raiz cúbica de 1 728.

Fatorando o número 1 728, temos que:

$1\,728 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2^6$

Portanto, $\sqrt[3]{1\,728} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^6} = 3 \cdot 2^2 = 12$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. IFCE (adaptado) – Calcule o valor da expressão $\dfrac{18^n \cdot 4}{2 \cdot (6^n \cdot 3^n)}$

8. ESPM-SP – A expressão numérica $2 \cdot 81^3 + 3 \cdot 9^6 + 4 \cdot 27^4$ equivale a:

a) 3^{15}
b) 9^7
c) 27^4
d) 3^{21}
e) 9^{12}

9. Sistema Dom Bosco – Qual das alternativas é mais próxima de $\dfrac{(4{,}25)^3 \cdot (9{,}8)^2}{(10{,}1)^4}$?

a) 0,064.
b) 0,64.
c) 6,4.
d) 64.
e) 640.

10. UFRGS-RS – A expressão $(0{,}125)^{15}$ é equivalente a

a) 5^{45}
b) 5^{-45}
c) 2^{45}
d) 2^{-45}
e) $(-2)^{45}$

11. UPE – Analise as sentenças a seguir:

I. Se $2^{3a} = 729$ o resultado de 2^{-a} é igual a $\frac{1}{3}$.

II. O resultado da operação $(1{,}25 \cdot 10^{-4} - 1{,}16 \cdot 10^{-7})$ é igual a $1{,}19 \cdot 10^{-4}$.

III. Se $x^2 = 25^{12}$; $y^6 = 25^{12}$; $w^7 = 25^{63}$. O valor da expressão $(x \cdot y \cdot w)^{12}$ é igual a 25^{168}.

Com base nelas, é CORRETO afirmar que

a) apenas I é falsa
b) apenas II é verdadeira
c) apenas I e II são verdadeiras
d) apenas I e III são verdadeiras
e) I, II e III são falsas

12. Espcex-SP (adaptado) – O derramamento de dez mil litros de óleo em uma bacia hidrográfica, provocou um desastre ambiental que comprometeu a fauna e a flora da região.

Se o óleo que se espalhou na superfície da água atingiu uma área de 150 000 m², calcule a ordem de grandeza da espessura da camada de óleo, estimada em milímetros.

13. PUC-RJ – Quanto vale $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$
b) $\sqrt{2} + 1$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
d) $\frac{5}{2}$
e) 1

14. PUCCamp-SP (adaptado) – Usando a tecnologia de uma calculadora, podemos calcular a divisão de 2 por $\sqrt[3]{4}$ e obter qual resultado?

15. UTFPR – O valor da expressão $\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{98}$ é:

a) $\sqrt{130}$

b) $-5\sqrt{2}$

c) $9\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{13}$

e) $15\sqrt{2}$

16. Sistema Dom Bosco – Colocando os números $a=\sqrt{8}$, $b = 3$ e $c=\sqrt[3]{25}$ em ordem crescente, obtemos a sequência:

a) a, b e c.

b) a, c e b.

c) b, a e c.

d) b, c e a.

e) c, b e a.

17. Sistema Dom Bosco – A expressão numérica $5\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}$ é igual a:

a) $\sqrt[3]{1458}$

b) $\sqrt[3]{729}$

c) $2\sqrt[3]{70}$

d) $2\sqrt[3]{38}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Fuvest-SP C1-H3

De 1869 até hoje, ocorreram as seguintes mudanças de moeda no Brasil: (1) em 1942, foi criado o cruzeiro, cada cruzeiro valendo mil-réis; (2) em 1967, foi criado o cruzeiro novo, cada cruzeiro novo valendo mil cruzeiros; em 1970, o cruzeiro novo voltou a se chamar apenas cruzeiro; (3) em 1986, foi criado o cruzado, cada cruzado valendo mil cruzeiros; (4) em 1989, foi criado o cruzado novo, cada um valendo mil cruzados; em 1990, o cruzado novo passou a se chamar novamente cruzeiro; (5) em 1993, foi criado o cruzeiro real, cada um valendo mil cruzeiros; (6) em 1994, foi criado o real, cada um valendo 2750 cruzeiros reais. Quando morreu, em 1869, Brás Cubas possuía 300 contos. Se esse valor tivesse ficado até hoje em uma conta bancária, sem receber juros e sem pagar taxas, e se, a cada mudança, o depósito tivesse sido normalmente convertido para a nova moeda, o saldo hipotético dessa conta seria, aproximadamente, de um décimo de:

Dados: um conto equivalia a um milhão de réis. Um bilhão é igual a 10^9 e um trilhão é igual a 10^{12}.

a) real
b) milésimo de real
c) milionésimo de real
d) bilionésimo de real
e) trilionésimo de real

19. Enem C1-H1

Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos. Esse tempo escrito em notação científica é

a) $0,4318 \cdot 10^2$
b) $4,318 \cdot 10^1$
c) $43,18 \cdot 10^0$
d) $431,8 \cdot 10^{-1}$
e) $4318 \cdot 10^{-2}$

20. UPE C1-H3

Se um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz em um ano, qual é a ordem de grandeza, em metros, da distância percorrida pela luz em 2 anos, levando-se em consideração um ano tendo 365 dias e a velocidade da luz igual a 300000 km/s.

a) 10^8
b) 10^{10}
c) 10^{13}
d) 10^{15}
e) 10^{16}

2

PRODUTOS NOTÁVEIS FATORAÇÃO, MÚLTIPLOS E DIVISORES

- Produtos notáveis
- Fatoração
- Múltiplos
- Divisores

HABILIDADES

- Desenvolver com rapidez e eficiência produtos notáveis.
- Simplificar uma expressão algébrica usando produtos notáveis.
- Determinar a forma fatorada de um número ou uma expressão algébrica.
- Decompor um número composto de produto de fatores primos.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Determinar a forma fatorada de um número ou uma expressão algébrica.
- Resolver situações-problema que envolvem múltiplos e divisores.
- Decompor um número composto em produto de fatores primos.
- Aplicar propriedades de MMC e MDC de dois ou mais números.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Produtos notáveis

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

O quadrado da soma de dois termos é dado por:
$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemplo:
Desenvolvimento do produto notável $(4x + 3y)^2$
$(4x + 3y)^2 = (4x)^2 + 2 \cdot (4x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 16x^2 + 24xy + 9y^2$

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

O Quadrado da diferença de dois termos, é dado por:
$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemplo:
Desenvolvimento do produto notável $(4x - y)^2$
$(4x - y)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot (4x) \cdot (y) + (y)^2 = 16x^2 - 8xy + y^2$

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE MESMOS TERMOS

O produto da soma pela diferença de mesmos termos, é dado por:
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
Algebricamente, temos:
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemplos:
- Desenvolvimento do produto notável: $(3xy + 4) \cdot (3xy - 4) = (3xy)^2 - (4)^2 = 9x^2y^2 - 16$
- Desenvolvimento do produto notável $(3x + 7y) \cdot (3x - 7y) = (3x)^2 - (7y)^2 = 9x^2 - 49y^2$

CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS

O cubo da soma de dois termos $(a + b)^3$ em sua forma desenvolvida é: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Exemplo:
$(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y) + 3 \cdot (2x) \cdot (3y)^2 + (3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

CUBO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

O cubo da diferença de dois termos $(a - b)^3$ em sua forma desenvolvida é:
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemplo:
$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \cdot (x)^2 \cdot (2) + 3 \cdot (x) \cdot (2)^2 - (2)^3 = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

Fatoração

CASOS DE FATORAÇÃO

Considere **a**, **b**, **c**, **x** e **y** expressões não fatoráveis.

Fator comum

Deve-se reconhecer o fator comum, numérico, literal ou misto. Coloca-se em evidência esse fator comum e simplifica-se a expressão, deixando o produto da soma algébrica com esse fator comum.

$(ab + ac) = a \cdot (b + c)$

Exemplo:

$3x^2y - 6x^2y^2 = 3x^2y \cdot (1 - 2y)$

Agrupamento

Devem-se dispor os termos da expressão algébrica de modo a formar dois ou mais grupos, entre os quais haja um fator comum a ser colocado em evidência.

$ax + ay + bx + by = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$
$= (x + y) \cdot (a + b)$

Diferença de dois quadrados

Uma das técnicas de fatoração mais utilizadas é a fatoração pelo método de **diferença de quadrados**. Ela é empregada sempre que há diferença entre dois monômios cujas partes literais tenham expoentes pares. A fatoração algébrica de tais expressões é obtida com os seguintes passos:

1º Extraem-se raízes quadradas dos monômios.

2º Escreve-se a expressão como produto da soma pela diferença dos novos monômios obtidos.

Exemplo:

A expressão $a^2 - b^2$ seria fatorada da seguinte forma: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Trinômio quadrado perfeito

Essa técnica de fatoração muitas vezes facilita o cálculo de algum problema envolvendo equações do 2º grau.

Uma expressão algébrica pode ser identificada como **trinômio quadrado perfeito** sempre que resultar no quadrado da soma ou na diferença entre dois monômios (expressões algébricas que têm multiplicações entre números e incógnitas).

São trinômios quadrados perfeitos todas as expressões da forma $a^2 \pm 2ab + b^2$, fatoráveis conforme os exemplos:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ e $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Soma de dois cubos

A soma de dois cubos $(a + b)^3$ na sua forma fatorada é $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$.

Exemplo:

$y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y + 3)(y^2 - 3y + 9)$

Diferença de dois cubos

A diferença de dois cubos $(a^3 + b^3)$ na sua forma fatorada é $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$.

Exemplo:

$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

MULTÍPLOS E DIVISORES

NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS

Um número inteiro **p** é primo se tem somente dois divisores: **±1**, **÷p**. Um número natural **p** primo tem unicamente dois divisores naturais: 1, p.

Um número inteiro é dito composto quando, na sua relação de divisores inteiros, tiver mais de quatro divisores positivos.

> Números −1, 0 e 1 não são classificados nem como primos nem como compostos.
>
> Todo número composto pode ser fatorado ou decomposto em um produto de fatores primos.
>
> Por exemplo, o número 42:
>
> $42 = 7 \cdot 6 = 7^1 \cdot 3^1 \cdot 2^1$

DIVISIBILIDADE ARITMÉTICA

Existem critérios que possibilitam reconhecer a divisibilidade entre dois números sem que se faça a divisão. Eles se aplicam aos principais e aos mais usados divisores. Acompanhe.

- **Divisibilidade por 2:** quando o número for par.
- **Divisibilidade por 3**: quando a soma dos algarismos do número resultar em múltiplo de 3.
  - **Exemplo:** 3210 é divisível por 2, pois é **par**, e também é divisível por 3, porque a soma dos algarismos 3 + 2 + 1 + 0 = 6 é divisível por 3.
- **Divisibilidade por 4:** quando os dois últimos algarismos da direita formam um número divisível por 4.
  - **Exemplo:** 1840 é divisível por 4, pois os dois últimos algarismos formam o número 40, que é divisível por 4.
- **Divisibilidade por 5:** quando o algarismo da unidade for zero ou cinco.
- **Divisibilidade por 6:** quando for divisível, separadamente, por 2 e por 3.
- **Divisibilidade por 8:** quando os três últimos algarismos da direita formam um número divisível por 8.
  - **Exemplo:** 35712 é divisível por 8, pois 712 é divisível por 8.
- **Divisibilidade por 9:** quando a soma dos algarismos que formam o número resultar em um múltiplo de 9.
  - **Exemplo:** 18711 é divisível por 9, pois 1 + 8 + 7 + + 1 + 1 = 18 é múltiplo de 9.
- **Divisibilidade por 10:** quando o algarismo da unidade for zero.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Acompanhe o exemplo.

Considere:

- o número 18 e seus divisores naturais
  $D_+(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
- o número 24 e seus divisores naturais
  $D_+(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Podem-se descrever os divisores comuns a 18 e 24 da seguinte forma: $D_+(18) \cap D_+(24) = \{1, 2, 3, 6\}$.

Observando os divisores comuns, é possível identificar o maior divisor comum de 18 e 24: MDC(18, 24) = 6.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Acompanhe o exemplo.

Considere:

- o número 6 e seus múltiplos positivos

$M^*_+(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...\}$

- o número 8 e seus múltiplos positivos

$M^*_+(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...\}$

Podem-se descrever os múltiplos positivos comuns da seguinte forma: $M^*_+(6) \cap M^*_+(8) = \{24, 48, 72, \ldots\}$.

Observando os múltiplos comuns, é possível identificar o mínimo múltiplo comum de 6 e 8: MMC(6, 8) = 24.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. IFCE – Para cada número real positivo m, a expressão

$$(m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}})^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$ é igual a

a) $m^{\frac{1}{2}}$

b) m + 1

c) m + 2

d) m + 3

e) $m+\frac{1}{m}$

Resolução

$$\left(m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)=$$

$$=\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^2+2\cdot\left(m^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(m^{-\frac{1}{2}}\right)^2+1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2=$$

$$=m+2\cdot m^0+m^{-1}+1-m^{-1}=m+3$$

2. UTFPR – Três vendedores viajam a serviço para uma empresa. O primeiro viaja de 12 em 12 dias, o segundo, de 16 em 16 dias e o terceiro, de 20 em 20 dias. Se todos viajarem hoje, calcule daqui a quantos dias eles voltarão a viajar no mesmo dia.

a) 220 dias

b) 120 dias

c) 240 dias

d) 250 dias

e) 180 dias

Resolução

Considere o dia "zero" a data em que os três vendedores viajaram. Os múltiplos não negativos de 12, 16 e 20 são, respectivamente, os dias em que o primeiro, o segundo e o terceiro vendedores viajaram.

$M_+(12) = \{0, 12, 24, 36, ..., x, ...\}$.

$M_+(16) = \{0, 16, 32, 48, ..., x, ...\}$.

$M_+(20) = \{0, 20, 40, ..., x, ...\}$.

O dia **x** é a data em que os três vendedores voltaram a viajar no mesmo dia, sendo:

x = MMC(12, 16, 20).

$12 = 2^2 \cdot 3$;

$16 = 2^4$;

$20 = 2^2 \cdot 5$.

$\therefore x = \text{MMC}(12, 16, 20) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15 = 240$.

ROTEIRO DE AULA

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

Produtos notáveis

- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Fatoração

- $(ab + ac) = a \cdot (b^2 + c)$
- $ax + ay + bx + by = (x + y) \cdot (a + b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

ROTEIRO DE AULA

MATEMÁTICA BÁSICA 2

Múltiplos

Qualquer número composto pode ser escrito como produto de números primos.

O menor múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números naturais é um número natural positivo determinado pelo produto dos fatores primos desses números com seus maiores expoentes.

Divisores

O maior divisor comum (MDC) de dois ou mais números naturais é um número natural positivo determinado pelo produto dos fatores primos comuns desses números com seus menores expoentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFPE – Efetuando-se $(2341)^2 - (2340)^2$, obtém-se

a) 6489
b) 1
c) 4681
d) 2681
e) 8689

Temos uma diferença de quadrados, da forma $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
Portanto, podemos reescrever a expressão como:
$(2341)^2 - (2340)^2 = (2341 + 2340) \cdot (2341 - 2340) = 4681 \cdot 1 = 4681$.

2. UEPB – Dado $x - \frac{1}{x} = 13$, o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é igual a:

a) 171
b) 169
c) 167
d) 130
e) $\frac{168}{13}$

Elevando $x - \frac{1}{x}$ ao quadrado, temos:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 13^2 = 169$$

Logo, $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 169 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 171$.

3. IFSC C1-H3

Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles.

Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

– Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?

a) 3min8s
b) 2min48s
c) 1min28s
d) 2min28s
e) 1min48s

O tempo procurado (x), em segundos, é o mínimo múltiplo comum (MMC) entre 24 e 28, ou seja, x = MMC (24, 28).
$24 = 2^3 \cdot 3$; $28 = 2^2 \cdot 7 \therefore x = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 168$
168s = 120s + 48s = 2min48s.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

4. IFAL – Determine o valor do produto $(3x + 2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2$.

a) 27
b) 31
c) 38
d) 49
e) 54

Aplicando o quadrado da soma:
$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$
Como $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2$,
então $(3x + 2y)^2 = 25 + 12 \cdot 2 = 25 + 24 = 49$.

5. Fuvest-SP – Sejam **a** e **b** dois números inteiros positivos. Diz-se que **a** e **b** são equivalentes se a soma dos divisores positivos de **a** coincide com a soma dos divisores positivos de **b**.

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

a) 8 e 9
b) 9 e 11
c) 10 e 12
d) 15 e 20
e) 16 e 25

Calculando os divisores:
D(8) = {1,2,4,8} → Soma = 15
D(9) = {1,3,9} → Soma = 13
D(10) = {1,2,5,10} → Soma = 18
D(11) = {1,11} → Soma = 12
D(12) = {1,2,3,4,6,12} → Soma = 28
D(15) = {1,3,5,15} → Soma = 24
D(16) = {1,2,4,8,16} → Soma = 31
D(25) = {1,5,25} → Soma = 31
Logo, 16 e 25 são dois inteiros positivos equivalentes.

6. ESPM-SP – Dividindo-se o número natural **N** por 13 obtém-se quociente **Q** e resto **R**. Aumentando-se 2 unidades no dividendo e mantendo-se o divisor, o quociente aumenta 1 unidade e a divisão é exata.

Sabendo-se que Q + R = 16, podemos afirmar que os divisores primos de N são:

a) 2 e 19
b) 2, 3 e 13
c) 3 e 17
d) 3, 5 e 7
e) 5 e 11

Como $R = 16 - Q$ e $N = 13Q + R$, temos que: $N = 13Q + 16 - Q \rightarrow$ $\rightarrow N = 12Q + 16$.

Então, se $N + 2 = 13(Q + 1)$, temos: $12Q + 16 + 2 = 13Q + 13 \rightarrow Q = 5$.

Portanto, R = 11 e N = 76.

Escrevendo $76 = 2^2 \cdot 19$, podemos concluir que os divisores primos de N são 2 e 19.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. IFCE (adaptado) – Calcule o valor da expressão $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

8. UTFPR – Simplificando a expressão $\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-y^2}$, com $x \neq y$, obtém-se:

a) $2x - 4xy$
b) $\dfrac{x-y}{x+y}$
c) $\dfrac{2xy}{x+y}$
d) $-2xy$
e) $\dfrac{-4xy}{x-y}$

9. Colégio Naval-RJ – O produto das idades de quatro irmãos é 180. Além disso, todos os irmãos têm idades diferentes. Se o mais velho tem menos de 12 anos, é correto afirmar que a maior soma possível dessas quatro idades é igual a

a) 16
b) 19
c) 20
d) 22
e) 25

10. UECE (adaptado) – Se x é um número real, tal que $x+\dfrac{1}{x}=3$, então calcule o valor de $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

11. Insper-SP – Se $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz = 6$, então um possível valor para a soma $x + y + z$ é

a) $\sqrt{6}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{2}$
e) $3\sqrt{3}$

12. Sistema Dom Bosco – O produto de dois números naturais, que não são primos entre si, é igual a 825. Então, o máximo divisor desses dois números é:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 11
e) 15

13. Col. Pedro II – Antônio é um botânico que desenvolveu em seu laboratório três variedades de uma mesma planta, V_1, V_2 e V_3. Esses exemplares se desenvolvem cada um a seu tempo, de acordo com a tabela a seguir.

Variedade	Tempo de germinação (em semanas, após o plantio)	Tempo de floração (em semanas, após a germinação)	Tempo para uma única colheita (em semanas, após a floração)
V_1	5	3	1
V_2	3	2	1
V_3	2	1	1

Considere um experimento em que as três variedades serão plantadas inicialmente no mesmo dia e que, a cada dia de colheita, outra semente da mesma variedade será plantada.

Com base nos dados da tabela, o número mínimo de semanas necessárias para que a colheita das três variedades ocorra simultaneamente será

a) 36
b) 24
c) 18
d) 16

14. Fac. Albert Einstein-SP – Um torneio de xadrez terá alunos de 3 escolas. Uma das escolas levará 120 alunos; outra, 180 alunos; e outra, 252 alunos. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

a) 12

b) 23

c) 46

d) 69

15. UEL-PR – Os povos indígenas têm uma forte relação com a natureza. Uma certa tribo indígena celebra o Ritual do Sol de 20 em 20 dias, o Ritual da Chuva de 66 em 66 dias e o Ritual da Terra de 30 em 30 dias. A partir dessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Considerando que, coincidentemente, os três rituais ocorram hoje, determine a quantidade mínima de dias para que os três rituais sejam celebrados juntos novamente.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Hoje é segunda-feira. Sabendo que, daqui a 3 960 dias, os três rituais acontecerão no mesmo dia, determine em que dia da semana ocorrerá essa coincidência.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

16. UEPG-PR – Considerando o número natural **a**, tal que MMC(a, 15) = 120 e MDC(a, 15) = 5, e o número natural **b**, tal que MMC(b, 20) = 140 e MDC(b, 20) = 4, assinale o que for correto.

01) MMC(a, b) = 280

02) MDC(a, b) = 4

04) **a** e **b** são números pares.

08) a > b

17. Unigranrio-RJ (adaptado) – Uma mulher tem três filhas matriculadas regularmente no ensino fundamental. O produto da sua idade com as idades de suas filhas é 37 037. Dessa forma, calcule a diferença entre as idades de sua filha mais velha e de sua filha mais nova.

18. UFSC (adaptado) C1-H3

Guardadas as condições de existência, determine o valor numérico da expressão $\dfrac{(x^3-14x^2+49x)\cdot(ax-bx+7a-7b)}{(x^2-49)\cdot(2a-2b)\cdot(7x-49)}$

para x = 966.

a) 35
b) 69
c) 36
d) 138
e) 483

19. IFSC C1-H2

Considere x o resultado da operação $525^2 - 523^2$. Assinale a alternativa CORRETA, que representa a soma dos algarismos de x.

a) 18
b) 13
c) 02
d) 17
e) 04

20. Acafe-SC (adaptado) C1-H3

Um feirante deseja distribuir 576 goiabas, 432 laranjas e 504 maçãs entre várias famílias de um bairro carente. A exigência do feirante é que a distribuição seja feita de modo que cada família receba o mesmo e o menor número possível de frutas de uma mesma espécie.

A quantidade total de frutas recebida pelas famílias, uma a uma, representa um número

a) divisível por 9
b) múltiplo de 7
c) múltiplo de 12
d) entre 40 e 50
e) divisível por 53

3 CONJUNTOS, INTERVALOS REAIS E DIAGRAMA DE VENN

- Introdução à teoria dos conjuntos
- Notação, representação e listagem dos elementos
- Diagrama de Euler-Venn
- Relação de pertinência
- Relação de inclusão
- Conjuntos especiais
- Conjunto de partes
- Igualdade de conjuntos
- Intervalos reais
- Diagrama de Euler-Venn

HABILIDADES

- Conhecer os conceitos principais da teoria dos conjuntos.
- Representar conjuntos e subconjuntos por meio de notações matemáticas.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações de operações e números (naturais, inteiros, racionais ou reais).
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Resolver situações-problema envolvendo teoria de conjuntos e intervalos reais.

Introdução aos conjuntos

A **teoria dos conjuntos** representa um instrumento de grande utilidade em diversos ramos da Matemática, bem como em outros setores das ciências físicas e humanas.

Neste material, adota-se a existência de três conceitos primitivos: **elemento**, **conjunto** e **pertinência**. Assim, por exemplo, é preciso entender que cada pessoa é um elemento do conjunto de moradores desta cidade, ou, melhor, é um **elemento** que **pertence** ao **conjunto** de habitantes da cidade, mesmo que não se tenha definido o que é conjunto, o que é elemento e o que é pertinência.

NOTAÇÃO, REPRESENTAÇÃO E LISTAGEM DOS ELEMENTOS

A notação dos conjuntos geralmente utiliza uma letra maiúscula do alfabeto. Relacionam-se todos os elementos de um conjunto por meio de uma listagem envolvida por um par de chaves. Elementos de um conjunto, quando apresentados na forma de listagem, devem ser separados por vírgula ou ponto e vírgula, caso haja números decimais.

Exemplo:

- Seja A o conjunto das cores da bandeira do Brasil
  Então, A = {verde, amarelo, azul, branco}.
- Seja B o conjunto de talheres em uma mesa de jantar:
  Então, B = {garfo, faca, colher}.
- Seja C o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração
  Então, C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Cardinalidade

A **cardinalidade** de um conjunto n(X) é o número de elementos que um conjunto X tem.

Exemplo:

O conjunto A = {1, 2, 3, 4} contém 4 elementos. Portanto, tem cardinalidade 4, ou seja, n(A) = 4.

Uma propriedade dos elementos do conjunto

Podemos fazer a apresentação do conjunto por meio de uma propriedade (ou mais) desses elementos. Nesses casos, representa-se da seguinte maneira:

A = {x | x tem determinada propriedade P}

Exemplos:

- Seja B o conjunto das vogais do alfabeto
  Então, B = {x | x é vogal do alfabeto}.
- Seja C o conjunto dos algarismos do sistema decimal de numeração
  Então, C = {x | x é algarismo do sistema decimal de numeração}.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

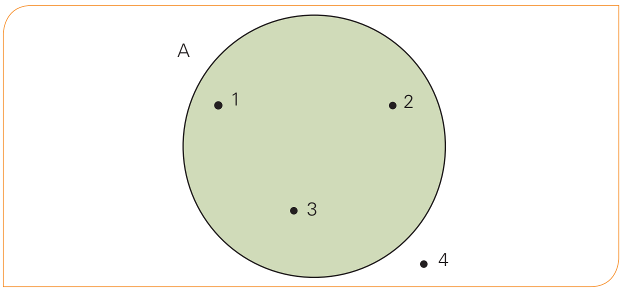
Quando se quer indicar que determinado elemento **x** pertence a um conjunto **A**, diz-se que **x** é elemento do conjunto A: $x \in A$.

> **Observação:** o símbolo ∈ é uma versão da letra grega *épsilon* (ε) e está consagrado em toda a Matemática como indicativo de **pertinência**.

Em outro caso, para indicar que um elemento **x** não pertence ao conjunto **A**, ou seja, não é elemento do conjunto **A**, utiliza-se a representação $x \notin A$.

Exemplos:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  O número 1 pertence ao conjunto A: $1 \in A$.
  O número 10 não pertence ao conjunto A: $10 \notin A$.
- Considere o conjunto a seguir:



Com base na representação, pode-se afirmar que
$1 \in A$
$2 \in A$
$3 \in A$
$4 \notin A$

> **Definição:** quando todo elemento de um conjunto **A** é também elemento de um conjunto **B**, dizemos que **A** é um **subconjunto** ou uma parte de **B**.
> Exemplo: sendo $A = \{1,2\}$ e $B = \{0,1,2,3,4\}$, tem-se que **A** é um subconjunto de **B**.

Conjunto vazio

É chamado **conjunto vazio** aquele formado por nenhum elemento. Conjunto vazio pode ser representado pela letra norueguesa ∅ ou pelo símbolo { }. Não se deve usar as duas notações juntas, representando o conjunto vazio por {∅}, pois, nesse caso, se está apresentando um conjunto unitário cujo elemento é ∅.

> Um conjunto vazio está contido em qualquer conjunto e, por isso, é considerado subconjunto de qualquer conjunto, inclusive dele mesmo.

Conjunto universo

Quando se desenvolve certo assunto na Matemática, é preciso admitir um conjunto ao qual pertencem os elementos que serão utilizados. Esse conjunto é chamado de conjunto universo, representado pela letra maiúscula **U**.

Determinada equação pode ter diversos conjuntos solução de acordo com o conjunto universo estabelecido.

Exemplo:

- A equação $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ apresenta:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -1 \text{ e } x_3 = 3, \text{ se } U = \mathbb{R}$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 3, \text{ se } U = \mathbb{Z}$$

$$x = 3, \text{ se } U = \mathbb{N}$$

CONJUNTO DE PARTES

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado **A** é chamado de conjunto de partes (ou conjunto potência) de **A**, representado por P(A).

Determinação do conjunto de partes

Observe no exemplo a seguir o procedimento que se deve adotar para determinar o conjunto de partes de dado conjunto **A**.

Considere o conjunto: $A = \{2, 3, 5\}$.
Para obter o conjunto de partes do conjunto A(P(A)), basta escrever todos os seus subconjuntos:

1. Subconjunto vazio: {∅}, pois ele é subconjunto de qualquer conjunto.
2. Subconjuntos com um elemento: {2}, {3}, {5}.
3. Subconjuntos com dois elementos: {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}.
4. Subconjuntos com três elementos: A = {2, 3, 5}, pois todo conjunto é subconjunto dele mesmo.

RELAÇÃO DE INCLUSÃO

O conjunto **A** está contido no conjunto **B** se todo elemento que pertencer a **A** também pertencer a **B**. Indica-se que o conjunto **A** é um subconjunto de **B** por meio da seguinte simbologia:

> $A \subset B$ (lê-se: **A** está contido em **B**, ou **A** é subconjunto de **B**).

O conjunto **A** não está contido em **B** quando existe pelo menos um elemento de **A** que não pertence a **B**. Indica-se que o conjunto **A** não está contido em **B** por meio da seguinte simbologia:

> $A \not\subset B$ (lê-se: **A** não está contido em **B**, ou **A** não é subconjunto de **B**).

> **A** é subconjunto de **A**, para todo conjunto **A**.
> ∅ é subconjunto de **A**, para todo conjunto **A**.

Importante

A **relação de pertinência** associa um elemento a um conjunto, e a **relação de inclusão** refere-se sempre a dois conjuntos.

Exemplos:
São afirmações falsas:
$a \subset \{a; e; i; o; u\}$
$\{a\} \in \{a; e; i; o; u\}$

São afirmações verdadeiras:
$\{a\} \in \{a; e; i; o; u\}$
$a \subset \{a; e; i; o; u\}$
$\{a\} \in \{\{a\}; e; i; o; u\}$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

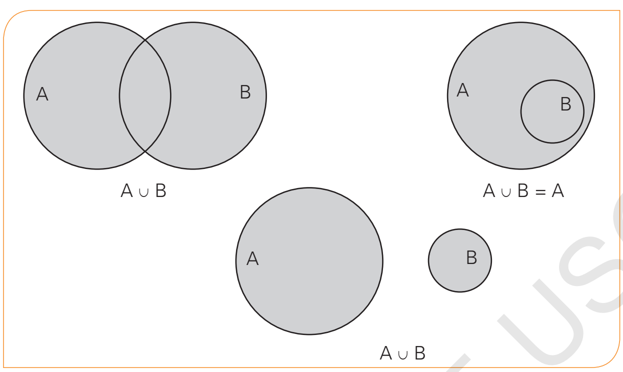
União de conjuntos

Dados os conjuntos **A** e **B**, diz-se que a união entre eles é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A** ou **B**.

Notação: $A \cup B$ (lê-se: **A** união **B**).

Pode-se representar a união de dois conjuntos pela seguinte sentença:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



Exemplo: sendo $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, então $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

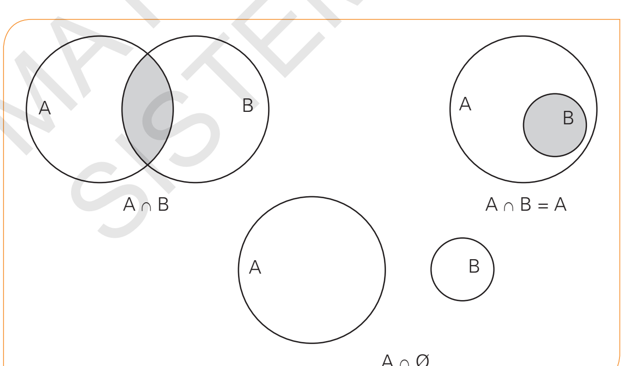
Interseção de conjuntos

Dados os conjuntos **A** e **B**, diz-se que a interseção dos conjuntos **A** e **B** é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A** e **B**, simultaneamente.

Notação: $A \cap B$ (lê-se **A** interseção **B**).

Pode-se representar a interseção de dois conjuntos pela seguinte sentença:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$



Exemplo: sendo $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, então $A \cap B = \{2\}$.

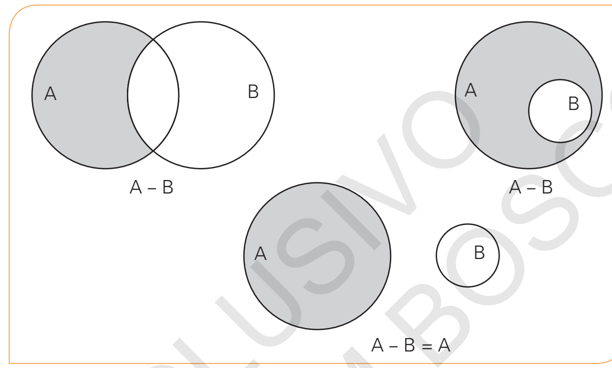
Diferença de conjuntos

Dados os conjuntos **A** e **B**, a diferença entre os conjuntos **A** e **B**, nessa ordem, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a **A**, e não pertencem a **B**.

Notação: $A - B$ (lê-se: **A** menos **B**).

Pode-se representar a diferença de dois conjuntos por meio da seguinte sentença:

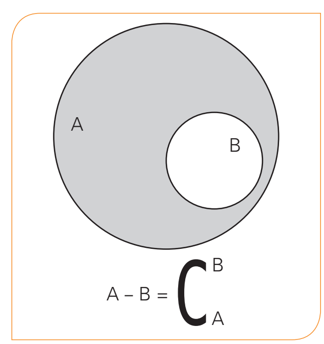
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$



Exemplo: sendo $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, então $A - B = \{0,1\}$ e $B - A = \{3, 4, 5\}$.

Conjunto complementar

Quando dois conjuntos **A** e **B** são de tal maneira que **B** é subconjunto de **A**, $B \subset A$, diz-se que a diferença $A - B$ é o conjunto complementar de **B** em relação a **A**, cuja representação se encontra a seguir:



Exemplo:

Dados $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5\}$ e $D = \{5, 6, 7\}$, calcule:

1. $(A \cup C) \cap B = \{0, 1, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$.

2. $(B \cap C) \cup D = \{4, 5\} \cup \{5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$.

3. $(B - A) \cap C = \{2, 5\} \cap \{4, 5\} = \{5\}$.

4. $\complement_B^C \cup (A \cap B) = \{2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto dos números naturais

O conjunto dos **números naturais** é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, em que:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Observação: alguns autores podem não incluir o número zero no conjunto dos naturais.

Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos **números inteiros** é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, em que:

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Conjunto dos números inteiros não negativos

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$

Por convenção, para qualquer conjunto numérico que, em sua representação, tiver acrescentado o símbolo * (asterisco), este ficará sem o elemento 0 (zero).

Exemplos:

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4,...\}$
- $\mathbb{Z}^* = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$

Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Com relação aos **números racionais**, eles podem ser encontrados de três maneiras:

- número inteiro;
- número decimal exato;
- número decimal periódico (dízimas periódicas).

Conjunto dos números irracionais

Números que não podem ser colocados na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro não nulo são chamados de **irracionais**.

O conjunto dos números irracionais é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$.

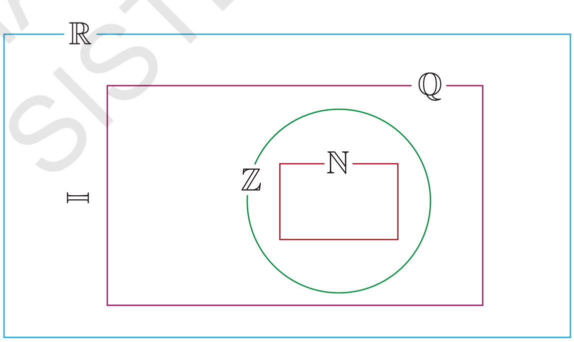
Exemplos:

- $\sqrt{2}$
- π
- $\sqrt[3]{7}$

Conjunto dos números reais

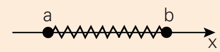
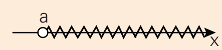
O conjunto dos **números reais** é representado pelo símbolo $\mathbb{R}$, em que: $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\} = \{x|x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$.

Representação de todos os conjuntos numéricos pelo diagrama de Euler-Venn.



Intervalos reais

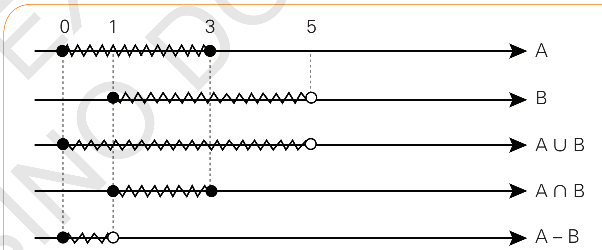
Em uma comparação entre números reais apresentados no eixo real, podem-se estabelecer subconjuntos de extrema importância, chamados de intervalos reais, cuja representação encontra-se na tabela a seguir:

	$a < x < b$	$]a, b[$	(a, b)
	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	$[a, b]$
	$a < x \leq b$	$]a, b]$	$(a, b]$
	$x > a$	$]a, +\infty[$	$(a, +\infty)$
	$x \leq b$	$]-\infty, b]$	$(-\infty, b]$

Observação: os intervalos com $+\infty$ ou $-\infty$ jamais devem ser fechados.

OPERAÇÕES COM INTERVALOS

Pela representação na reta real, tem-se:



$A \cup B = [0, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$
$A \cap B = [1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$
$A - B = [0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$

Diagrama de Venn

Podemos representar um conjunto de forma gráfica, o que torna a resolução de alguns problemas mais prática. Isso pode ser feito por meio do diagrama de Euler-Venn. Os elementos são representados por pontos interiores a uma linha fechada não entrelaçada. Dessa forma, pontos exteriores à linha representam elementos que não pertencem ao conjunto considerado.

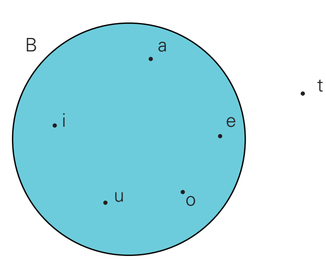
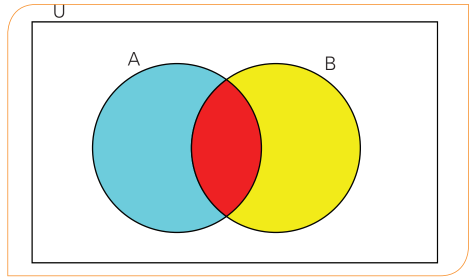
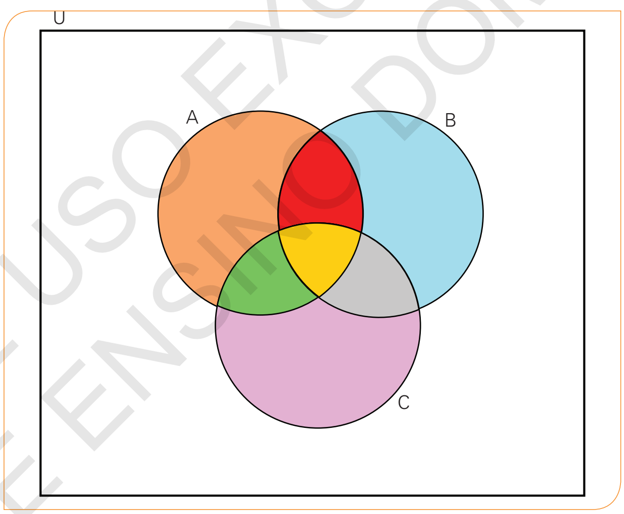


Diagrama de Euler-Venn para o caso B = {x|x é vogal do alfabeto}.

Considere A, B e C subconjuntos de U. Abaixo estão as regiões coloridas associadas às respectivas correspondências.



A: regiões azul e vermelha.
B: regiões amarela e vermelha.
$A \cap B$: região vermelha.
$A - B$: região azul.
$B - A$: região amarela.
$A \cup B$: região azul ou vermelha ou amarela.
$U - (A \cup B)$: região branca.



A: regiões vermelha, amarela, verde e laranja.
B: regiões vermelha, amarela, cinza e azul.
C: regiões verde, amarela, cinza e lilás.
$A \cap B \cap C$: região amarela.
$A \cap B$: regiões amarela e vermelha.
$(A \cap B) - C$: região vermelha.
$A \cap C$: regiões amarela e verde.
$(A \cap C) - B$: região verde.
$B \cap C$: regiões amarela e cinza.
$(B \cap C) - A$: região cinza.
$A - (B \cup C)$: região laranja.
$B - (A \cup C)$: região azul.
$C - (A \cup B)$: região lilás.
$A \cup B \cup C$: regiões azul, vermelha, amarela, cinza, lilás, verde e laranja.
$U - (A \cup B \cup C)$: região branca.

ROTEIRO DE AULA

TEORIA DOS CONJUNTOS

Conjuntos numéricos

Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Irracionais: $\mathbb{I}$. Números que não podem ser escritos na forma de fração com numerador inteiro e denominador inteiro não nulo.

Reais: $\mathbb{R} = \{$ x|x é racional ou x é irracional$\}$.

Simbologia

$x \in A$: o elemento x pertence ao conjunto A.

$x \notin A$: o elemento x não pertence ao conjunto A.

$A \subset B$: o conjunto A está contido no conjunto B.

$A \not\subset B$: o conjunto A não está contido no conjunto B.

Operações com conjuntos

União: $(A \cup B)$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou B.

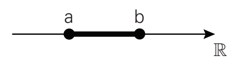
Intersecção: $(A \cap B)$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e B simultaneamente.

Diferença: $(A - B)$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

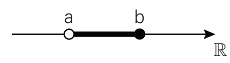
ROTEIRO DE AULA

INTERVALOS REAIS E DIAGRAMA DE EULER-VENN

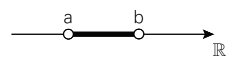
Intervalos reais



$\leftrightarrow [a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$



$\leftrightarrow$ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



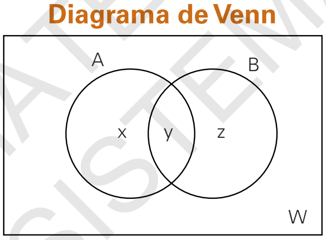
$\leftrightarrow$ $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$\leftrightarrow$ $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$

$\leftrightarrow$ $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$\leftrightarrow$ $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Diagrama de Venn



y: número de elementos que são de A e de B.

x + y: números de elementos que são de A.

y + z: números de elementos que são de B.

x: números de elementos que são somente de A.

z: números de elementos somente de B.

x + y + z: números de elementos que são de A ou de B.

w: números de elementos que não são de A nem de B.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x \leq 8\}$, então $n[(A \cap B) - C]$ é:

a) 10
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

$A = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ e $C = \{5, 6, 7, 8\}$.
$A \cap B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$A \cap B - C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

2. Sistema Dom Bosco – A diferença simétrica representada pelo símbolo * pode ser definida por:

$A * B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Se $A = \{a, b, c\}$ e

$B = \{b, c, d, e\}$, então $A * B$ é:

a) $\varnothing$
b) {a}
c) {b,c}
d) {a,d,e}

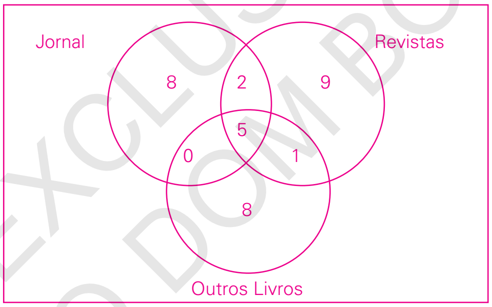
$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
$A \cap B = \{b, c\}$
$A*B = \{a, d, e\}$

3. UEG-GO (adaptado) C1-H1

Em uma pesquisa realizada com 35 moradores na periferia de uma grande cidade para saberem a modalidade de leitura que realizam regularmente entre jornal, revista e livros, foi constatado que: 15 pessoas leem jornal, 17 pessoas leem revista, 14 pessoas leem livros, 7 pessoas leem jornal e revista, 6 pessoas leem revista e livros, 5 pessoas leem jornal, revistas e livros e nenhuma pessoa lê somente jornal e livros. Diante dessas informações, verifica-se que

a) 5 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
b) 4 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
c) 3 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
d) 2 pessoas não leem nenhuma das três modalidades
e) 1 pessoa não lê nenhuma das três modalidades

Moradores pesquisados:



Sendo x o número de pessoas que não leem nenhuma das publicações, temos:
$5 + 1 + 2 + 0 + 8 + 9 + x = 35 \rightarrow x = 2$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

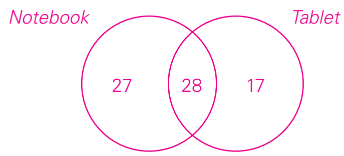
4. Fatec-SP – Em uma pesquisa de mercado sobre o uso de *notebooks* e *tablets* foram obtidos, entre os indivíduos pesquisados, os seguintes resultados:

- 55 usam *notebook*;
- 45 usam *tablet*; e
- 27 usam apenas *notebook*.

Sabendo que todos os pesquisados utilizam pelo menos um desses dois equipamentos, então, dentre os pesquisados, o número dos que usam apenas *tablet* é

a) 8
b) 17
c) 27
d) 36
e) 45

Temos o seguinte diagrama de Euler-Venn:



Logo, os que usam *tablet* e *notebook* são 55 – 27 = 28. Os que usam apenas *tablet* são 45 – 28 = 17.

5. IFCE – Sendo ℝ o conjunto dos números reais, considere

- $A = \left\{x \in \mathbb{R};\ x > \dfrac{5}{8}\right\}$;
- $B = \left\{x \in \mathbb{R};\ x < \dfrac{2}{3}\right\}$; e
- $C = \left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{5}{8} \le x \le \dfrac{3}{4}\right\}$.

O conjunto $(A \cup C) \cap B$ é

a) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \le \dfrac{2}{3}\right\}$

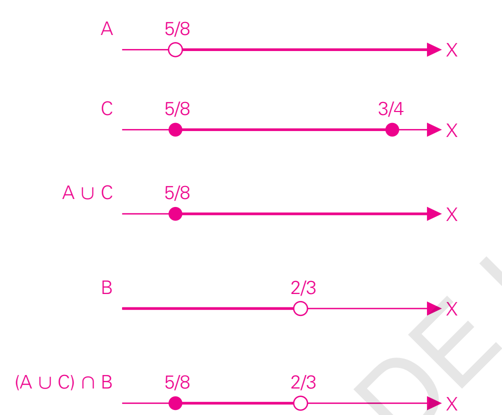
b) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \ge \dfrac{5}{8}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{5}{8} \le x \le \dfrac{3}{4}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \le \dfrac{3}{4}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{5}{8} \le x < \dfrac{2}{3}\right\}$

Como $\dfrac{5}{8} = \dfrac{15}{24}$, $\dfrac{2}{6} = \dfrac{16}{24}$ e $\dfrac{3}{4} = \dfrac{18}{24}$, temos $\dfrac{5}{8} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$. Então:

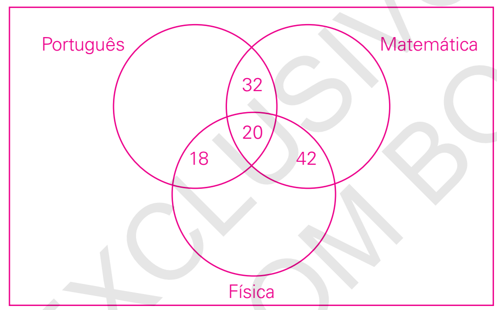


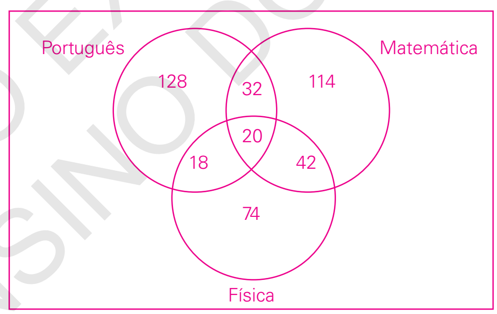
6. IFSul-RS (adaptado) – Analisando os conteúdos nos quais são apresentadas maiores dificuldades de aprendizagem em uma escola com 500 alunos, percebeu-se que: 208 têm dificuldades de aprendizagem em Matemática; 198, em português; 154, em Física; 62, em Matemática e física; 38, em Português e Física; 52, em Matemática e Português; e 20 têm dificuldades nas três disciplinas.

Por esse viés, calcule o número de alunos que não tem dificuldades em nenhuma dessas disciplinas.

Utilizando o diagrama de Euler-Venn, temos:

Subtraindo o total de cada matéria pelas intersecções, temos:





Logo, somando todos os valores e subtraindo 500, temos: 500 – 428 = 72.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. IFAL – Analise as afirmações abaixo:

I. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros.

II. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números racionais.

III. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números irracionais.

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.

b) Apenas a afirmação II é verdadeira.

c) Apenas a afirmação III é verdadeira.

d) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

e) Todas as afirmações são verdadeiras.

8. Sistema Dom Bosco – Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$. Sabendo que $A \cap B = \{0,2\}$ e $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, quais são os elementos que pertencem ao conjunto B?

9. Sistema Dom Bosco – Em um grupo de x pessoas, 14 jogam xadrez, 40 são homens. Se 25% dos homens jogam xadrez e 75% das mulheres não jogam xadrez, então qual é o valor de x?

10. UEG-GO (adaptado) – Dados dois conjuntos, A e B , verifica-se que $A \cap B = \{b, d\}$ $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ e $B - A = \{a\}$. Calcule o conjunto B.

11. Sistema Dom Bosco – Juca disse um número para Judith. Ela não entendeu o número dito por Juca. Sobre esse número, pode-se afirmar que é:

a) natural
b) inteiro
c) racional
d) irracional
e) real

12. Sistema Dom Bosco – Um médico, ao fazer o levantamento do quadro de pessoal de sua clínica, obteve os seguintes resultados:

- 25% dos funcionários são mulheres;
- 20% dos homens têm menos de 30 anos;
- 80% dos funcionários têm pelo menos 30 anos.

Dentre as mulheres, qual é a porcentagem das que têm pelo menos 30 anos?

13. IFPE – No IFPE Campus Olinda foi feita uma pesquisa com alguns alunos do curso de computação gráfica a respeito do domínio sobre três aplicativos. As respostas foram as seguintes:

- 78 dominam o Word;
- 84 dominam o Excel;
- 65 dominam o PowerPoint;
- 61 dominam o Word e Excel;
- 53 dominam o Excel e PowerPoint;
- 45 dominam o Word e PowerPoint;
- 40 dominam os três aplicativos;
- 03 não dominam aplicativo algum.

Com base nas informações acima, o número de estudantes do curso de computação gráfica que responderam a essa pesquisa é

a) 112
b) 227
c) 230
d) 111
e) 129

14. IFPE (adaptado) – Em uma pesquisa de opinião realizada com 200 estudantes do IFPE a respeito da preferência quanto ao estilo musical, constatou-se que:

- 85 estudantes gostam de rock;
- 70 estudantes gostam de forró;
- 65 estudantes gostam de brega;
- 40 estudantes gostam de rock e forró;
- 20 estudantes gostam de rock e brega;
- 30 estudantes gostam de forró e brega;
- 10 estudantes gostam de rock, forró e brega.

Determine quantos estudantes não gostam de nenhum desses três estilos musicais.

15. Fuvest-SP – Dentre os candidatos que fizeram provas de Matemática, Português e Inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em Matemática;
II. 16 não obtiveram nota mínima em Português;
III. 12 não obtiveram nota mínima em Inglês;
IV. 5 não obtiveram nota mínima em Matemática e em Português;
V. 3 não obtiveram nota mínima em Matemática e em Inglês;
VI. 7 não obtiveram nota mínima em Português e em Inglês; e
VII. 2 não obtiveram nota mínima em Português, Matemática e Inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

a) 44
b) 46
c) 47
d) 48
e) 49

16. Sistema Dom Bosco – Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leqslant x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 8\}$. Determine:

a) $(A \cup B) - C$

b) $(B \cap C) - A$

17. Sistema Dom Bosco – O número y não pertence ao intervalo fechado de extremo -3 e 4. Sabendo que $y < -2$ ou $y > 5$, determine o intervalo ao qual y pertence.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UCS-RS C1-H2

Em uma pesquisa de opinião sobre a realização da Copa do Mundo e das Olimpíadas no Brasil, entre os alunos de uma escola, obteve-se o seguinte resultado:

Evento	Número de estudantes favoráveis
Copa do Mundo	135
Olimpíadas	250
Copa do Mundo e Olimpíadas	120

Se a escola tem 420 alunos e todos responderam à pesquisa, quantos dos alunos dessa escola não são favoráveis a nenhum dos eventos no Brasil?

a) 15
b) 155
c) 265
d) 300
e) 290

19. CFTMG (adaptado) C1-H2

Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$. Pode-se afirmar que $(A - B) \cup C$ é:

a) $\varnothing$
b) A
c) B
d) C
e) $\mathbb{R}$

20. PUC-RJ C1-H2

Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Quinze alunos acertaram as duas questões, 20 acertaram a primeira e 22 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

a) 15
b) 13
c) 22
d) 20
e) 12

EQUAÇÕES DO 1º GRAU, EQUAÇÕES DO 2º GRAU, REDUTÍVEIS E IRRACIONAIS

4

- Introdução a equações
- Equações equivalentes
- Equações do 1º grau
- Equações do 2º grau
- Equações irracionais

HABILIDADES

- Reconhecer equações de 1º grau.
- Resolver equações de 1º grau.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Reconhecer equações de 2º grau.
- Resolver equações de 2º grau.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas

Introdução a equações

Na Matemática, as equações são igualdades envolvendo valores desconhecidos, chamados de **incógnitas**. As equações constituem, pelo menos do ponto de vista prático, a parte mais importante dessa área do conhecimento. Qualquer problema que possa ser solucionado por meio dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, pelas equações.

Uma equação de 1º grau, por exemplo, tem a forma $ax + b = 0$, em que a incógnita **x** tem grau 1 ($x = x^1$). Podemos resolver a equação utilizando a técnica útil de imaginar uma balança. Para que ela esteja em equilíbrio, é necessário que ambos os pratos tenham a mesma quantidade, ou seja, deve existir uma relação de igualdade.

Observe as igualdades:

I. $4 + 7 = 10$
II. $4 + 7 = 11$
III. $4 + x = 7$

RAIZ (OU SOLUÇÃO) DE UMA EQUAÇÃO

Uma raiz (ou solução) é um número do conjunto universo que, quando colocado no lugar da incógnita, transforma a sentença matemática aberta em uma sentença matemática fechada verdadeira.

Conjunto universo de uma equação é aquele constituído dos valores que a incógnita pode assumir.

Exemplos:

1. Equação $2x + 10 = 0$ definida em $\mathbb{R}$.
   - Conjunto universo ($\mathbb{R}$), conjunto dos **números reais**.
   - Substituindo **x** por –5 na equação:
     $2x + 10 = 0$
     $2 \cdot (-5) + 10 = 0$
     Essa é uma igualdade verdadeira. Diz-se que –5 é **raiz da equação**.
   - O número 5, mesmo sendo um elemento pertencente ao conjunto universo, não é solução da equação $2x + 10 = 0$, pois $2 \cdot (5) + 10 = 0$ é **falsa**.
2. Equação $2x + 10 = 0$ definida em $\mathbb{N}$.
   - Conjunto universo é o conjunto $\mathbb{N}$, o conjunto dos **números naturais**.
   - Substituindo **x** por –5 na equação:
     $2x + 10 = 0$
     $2x \cdot (-5) + 10 = 0$

Essa é uma igualdade verdadeira. Mas –5 não é raiz da equação, pois não é elemento pertencente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Resolução de equações

Teorema 1: ao adicionar ou subtrair um mesmo número a ambos os membros, a igualdade permanece.
$a = b \leftrightarrow a + c = b + c$ ou $a = b \leftrightarrow a - c = = b - c$

Exemplo: $2 = 2 \leftrightarrow 2 + 3 = 2 + 3$; $2 = 2 \leftrightarrow 2 - 3 = 2 - 3$

Teorema 2: ao multiplicar ou dividir por um mesmo número diferente de zero ambos os membros, a igualdade permanece.

$a = b \leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$; $a = b \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Exemplo: $2 = 2 \leftrightarrow 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$; $2 = 2 \leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Equações do 1º grau

Observando os exemplos de equações citados anteriormente, percebe-se que há diversos tipos de equações, por isso é preciso organizá-las em grupos com características semelhantes.

O primeiro grupo organizado para estudo é o das **equações do 1º grau**.

DEFINIÇÃO

Denomina-se **equação do 1º grau** em $\mathbb{R}$, na incógnita **x**, toda equação que pode ser escrita na forma:

$$ax + b = 0$$

Com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$

Exemplo:

A equação $2x + 10 = 0$ é do **1º grau**. Comparando-a com a forma geral das equações de 1º grau $ax + b = 0$, temos que $a = 2$ e $b = 10$.

RESOLUÇÃO

Os teoremas citados auxiliam na resolução de equações do 1º grau. Observe:

Forma geral: $ax + b = 0$.

Teorema 1: Subtraindo **b** de dois membros da igualdade:

$ax + b - b = 0 - b$

Equação equivalente:

$ax = -b$

Teorema 2: Dividindo os dois membros por **a**:

$\frac{ax}{b} = -\frac{b}{a}$

Equação equivalente:

$x = -\frac{b}{a}$ (descoberto o valor de x)

$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Definição: proposição a ser resolvida com base nas informações implícitas ou explícitas de determinado problema.

Um **problema matemático** pode ter uma, mais de uma ou não ter solução. Para resolvê-lo, é preciso encontrar todos os possíveis valores das incógnitas propostas no enunciado da questão.

Exemplo:

Podemos fazer isso com o auxílio de uma tabela.

Irmão	Idade dos irmãos
Irmão mais novo	x
Irmão mais velho	x + 10 (o enunciado diz que a idade do mais velho excede a do mais novo em 10 anos)

Resolvendo a equação (2):

No enunciado, tem-se:

$x + x + 10 = 30$ (a soma das idades é 30)

$2x + 10 = 30$

$2x = 20$

$x = \frac{20}{2}$

$x = 10$

Analisando o resultado encontrado (3) e apresentando a resposta final (4): o irmão mais novo tem 10 anos e o irmão mais velho, 20 anos.

Equações do 2º grau

Toda equação do 2º grau pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, e $c \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$.

Exemplo:

A equação $2x^2 + x - 1 = 0$ é do 2º grau. Comparando-a com a forma-padrão $ax^2 + bx + c = 0$, temos que $a = 2$, $b = 1$ e $c = -1$.

Equações completas do 2º grau

Apresentam vários métodos de solução. Os mais usuais são:

- Obter um trinômio quadrado perfeito.
- Fórmula resolvente (Bhaskara).
- Regra da soma e do produto.

Vamos analisar cada um desses três métodos.

1º caso: obter um trinômio quadrado perfeito.

Nesse método, é preciso deslocar **c** para o outro lado da igualdade; em seguida, deve-se somar um número conveniente nos dois membros da igualdade para que o trinômio que surgir no membro da esquerda seja trinômio quadrado perfeito.

Exemplo:

Encontrar a solução de $x^2 - 4x - 7 = 0$.

$x^2 - 4x - 7 = 0$

$x^2 - 4x = 7$

$x^2 - 4x + 4 = 7 + 4$

$(x - 2)^2 = 11$

$(x - 2) = \sqrt{11}$ ou $(x - 2) = -\sqrt{11}$

$x = 2 + \sqrt{11}$ ou $x = 2 - \sqrt{11}$

$S = \{2 + \sqrt{11}, 2 - \sqrt{11}\}$

2º caso: fórmula resolvente ou fórmula de Bhaskara.

Dada a equação do 2º grau na forma genérica ($ax^2 + bx + c = 0$), considere os passos matemáticos.

$ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicando dois membros da equação por **4a**:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Somando **−4ac** aos dois membros da equação:

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Adicionando-se b^2 a cada um dos membros da equação:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Trinômio quadrado perfeito do primeiro membro:

$(2ax)^2 + 2(ax)b + b^2 = b^2 - 4ac$

Observe que $(2ax + b)^2 = (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2$ (trinômio quadrado perfeito).

Substituindo:

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

O termo $b^2 - 4ac$ é denominado **discriminante** e geralmente é representado pela letra grega Δ (delta).

$(2ax + b)^2 = \Delta$

$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$

$2ax = -b \pm\sqrt{\Delta}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, podem-se encontrar os valores de x por meio da fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Ela costuma ser designada por fórmula resolutiva de Bhaskara.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. PUC-RJ – O número de soluções da equação

$x = \sqrt{6 - x}$, com $x > 0$, é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução

Temos que

$x = \sqrt{(6 - x)}$

$x^2 = \left(\sqrt{(6 - x)}\right)^2$

$x^2 = 6 - x$

$x^2 + x - 6 = 0$

Então, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{-1 \pm 5}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{4}{2} = 2$ ou $x = \dfrac{-6}{2} = -3$ (não convém, pois $x > 0$)

$S = \{2\}$

2. Sistema Dom Bosco – Resolva em ℝ a equação: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Resolução

$x^2 - 4x + 4 = 0$

Então $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{4 \pm 0}{2 \times 1}$

$x = \dfrac{4}{2}$

$x = 2$

$S = \{2\}$

3. Sistema Dom Bosco – Resolva em ℝ a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Resolução

$x^2 - 2x + 2 = 0$

Então, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = -4 \cdot 1 - 2 = -4$

$\Delta = -4$

Como o valor de Δ é negativo, temos que não existe solução para essa equação em ℝ. Portanto, S = { }.

De maneira geral, em uma equação do 2º grau, pode-se dizer que:

$\Delta > 0 \leftrightarrow$ há duas raízes reais e distintas;
$\Delta = 0 \leftrightarrow$ há duas raízes reais e iguais;
$\Delta < 0 \leftrightarrow$ não há raiz real.

Exemplo:

Resolver em ℝ a equação $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Temos que $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$.

Logo, $S = \dfrac{-b}{a} = -2$ e $P = \dfrac{c}{a} = -3$.

Os números cuja soma é igual a −2 e o produto é igual a −3 são 1 e −3.

Portanto, S = {1, −3}.

Equações biquadradas

Há equações que, mesmo não sendo do 2º grau, podem ser resolvidas com o auxílio desse último tipo. Nessas situações, é preciso se valer de mudanças nas variáveis da equação, de tal forma que ela se transforme, temporariamente, em uma equação do 2º grau, como no caso a seguir.

Exemplo:

Resolva a equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Note que essa é uma equação de 4º grau, porém com uma característica particular: apresenta apenas os termos de **grau par**.

Se substituirmos na equação dada $x^2 = y$:
$y^2 - 3x^2 - 4 = 0$
$y_1 = -1$ e $y_2 = 4$
Como $y = x^2$:
$x^2 = -1$ (não existe $x \in \mathbb{R}$)
ou $x^2 = 4 \rightarrow x = -2$ ou $x = 2$.
$S = \{2, -2\}$

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

São aquelas em que há incógnita em um ou mais radicais.

As raízes podem ter qualquer índice. Mas será dada ênfase nas que apresentarem raízes quadradas.

Não existe fórmula para resolver essas equações. Porém, há um processo de resolução prático e seguro, que conduz a equações cuja resolução já foi apresentada anteriormente.

São exemplos de equações irracionais:

- $\sqrt[3]{x+2} = x - 2$
- $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = 5$

Um método prático para resolução dessas equações pode ser apresentado em quatro passos:

1º Isolar o radical em um dos membros da equação. Se existir mais de um radical, escolher um deles para colocar à parte.

2º Elevar ao quadrado os dois membros da equação.

3º Resolver a equação. Se na primeira vez em que a equação for elevada ao quadrado continuar a existir a raiz quadrada, ela deve ser isolada, e a equação é novamente elevada ao quadrado tantas vezes quanto necessário, até que não exista mais nenhum radical.

4º Caso haja raiz de índice (n) par, verificar se os valores encontrados para a incógnita satisfazem às condições de existência do radicando e da raiz n-ésima.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. UTFPR – Considerando que o valor da raiz positiva da equação $x^4 + 16 = 8x^2$ é numericamente igual a $\frac{1}{21}$ da minha idade, assinale quantos anos tenho.

a) 21
b) 41
c) 42
d) 81
e) 82

Resolução

$x^4 + 16 = 8x^2 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Substituindo $x^2 = y$, temos:

$y^2 - 8y + 16 = 0$

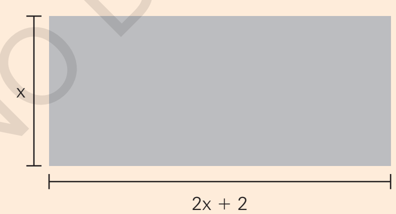
$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$y = x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Como $x > 0$, pois x representa idade, temos que $x = 2$.

Então, como $2 = \frac{\text{idade}}{21} \rightarrow \text{idade} = 42$.

5. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor de x, indicado a seguir, sabendo que a área do retângulo é 18 adicionados ao dobro de x.



Resolução

$x \cdot (2x + 2) = 18 + 2x$
$2x^2 + 2x = 18 + 2x$
$2x^2 = 18$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x = \pm 3$

Como x é uma medida de comprimento, $x > 0$.
Portanto, $x = 3$.

EQUAÇÕES

Equação do 1º grau

Definição

Denomina-se equação do 1º grau em $\mathbb{R}$, na incógnita **x**, toda equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Resolução

Para resolver uma equação do 1º grau em $\mathbb{R}$, basta isolar a incógnita **x**, resultando em $x = -\frac{b}{a}$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES

Equações do 2º grau

Definição

Toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + x = 0$, com a, b e c $\in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$.

Fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Resolução

Regra da soma (S) e do produto (P). Dada uma equação do 2º grau com raízes x_1 e x_2, tem-se:

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Equações redutíveis

Equações biquadradas

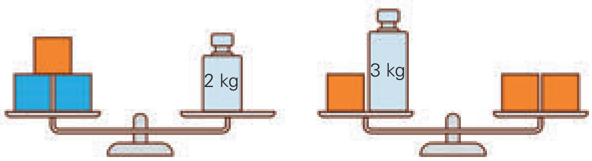
São equações de 4º grau, porém com característica particular: apresentam apenas os termos de grau par. Para resolvê-las, é preciso se valer de mudanças de variáveis da equação, de tal forma que ela se transforme em uma equação do 2º grau.

Equações irracionais

Há incógnita em um ou mais radicais. Para resolvê-las, não existe fórmula, porém pode-se elevar a equação a uma potência, a fim de eliminar todos os radicais. Depois é preciso verificar se as raízes encontradas tornam a equação original verdadeira.

EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. UNESP – Três cubos laranjas idênticos e três cubos azuis idênticos estão equilibrados em duas balanças de pratos, também idênticas, conforme indicam as figuras.



A massa de um cubo laranja supera a de um cubo azul em exato

a) 1,3 kg

b) 1,5 kg

c) 1,2 kg

d) 1,4 kg

e) 1,6 kg

Se *a* for a massa do cubo azul e ℓ a do cubo laranja, temos que

$\ell + 2a = 2 \to \ell = 2 - 2a$ e $a + 3 = 2\ell$

Substituindo a primeira equação na segunda

$a + 3 = 2(2 - 2a) = 4 - 4a \to 5a = 1 \to a = 0{,}2$ kg

Portanto, $\ell = 1{,}6$ kg e, então, $\ell - a = 1{,}4$ kg

2. Unifesp – Raquel imprimiu um número x de fotografias ao custo unitário de 54 centavos. Cada foto foi vendida ao preço de 75 centavos, sobrando, no final do período de vendas, y fotografias sem vender, o que resultou em um prejuízo de 12 reais em relação ao custo total das impressões.

a) Calcule quantas fotografias foram impressas, para o caso em que y = 100.

b) Determine a expressão de y em função de x para a situação descrita no enunciado.

Custo por impressão: 0,54x

Preço de venda: 0,75

Fotos vendidas: x − y

$0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x = -12$

a) Calculando:

Vendas – Custos = Lucro/Prejuízo

$0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x = -12$

$0{,}75 \cdot (x - 100) - 0{,}54x = -12$

$0{,}75x - 75 - 0{,}54x = -12 \to 0{,}21x = 63 \to x = 300$

b) Isolando y:

Vendas – Custos = Lucro/Prejuízo

$0{,}75 \cdot (x - y) - 0{,}54x = -12$

$0{,}75x - 0{,}75y - 0{,}54x = -12$

$0{,}21x - 75y = -12$

$y = \dfrac{-0{,}21x - 12}{-0{,}75} \to y = 0{,}28x + 16$

3. IFPE C5-H21

Um pai percebeu que a soma da sua idade com a de seu filho totalizava 52 anos. Sabendo que a idade do pai é 12 vezes a idade do filho, calcule quantos anos o pai é mais velho que o filho.

a) 36 anos

b) 40 anos

c) 34 anos

d) 44 anos

e) 24 anos

Admitindo que a idade do filho é x anos, temos que a idade do pai é 12x.

Logo, $12x + x = 52 \to 13x = 52 \to x = 4$.

Portanto, a diferença entre as idades será:

$12 - x = 11x = 11 \cdot 4 = 44$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Sistema Dom Bosco – A raiz positiva da equação $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{5}{x^2-9}$ é:

a) $\dfrac{-5+\sqrt{41}}{4}$

b) $\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}$

c) $\dfrac{5+\sqrt{41}}{4}$

d) $\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$

e) $5+\sqrt{41}$

Temos,

$\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{5}{x^2-9} \to \dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{5}{(x+3)\cdot(x-3)} \to$

$\to 2x(x - 3) + (x + 3) = 5 \to 2x^2 - 6x + x + 3 = 5 \to$

$\to 2x^2 - 5x - 2 = 0$

Utilizando Bhaskara:

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$.

Logo, a raiz positiva é $\dfrac{5+\sqrt{41}}{4}$.

5. IFAL – Determine o valor de k na equação $x^2 - 12x + k = 0$, de modo que uma raiz seja o dobro da outra:

a) 12
b) 18
c) 24
d) 28
e) 32

A soma (S) das raízes é dada por:

$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{1} = 12$

Como uma raiz é o dobro da outra, temos que: $x_1 = m$ e $x_2 = 2m$.
Então:

$x_1 + x_2 = 12$

$m + 2m = 12 \rightarrow 3m = 12 \rightarrow m = \frac{12}{3} \rightarrow m = 4$

Logo,

$x_1 = m = 4$ e $x_2 = 2m = 2 \cdot 4 = 8$

Com relação ao produto (P), temos:

$P = \frac{c}{a} = k \rightarrow k = x_1 \rightarrow x_2 = 4 \cdot 8 = 32.$

6. Fuvest-SP – Um empreiteiro contratou o serviço de um grupo de trabalhadores pelo valor de R$ 10.800,00 a serem igualmente divididos entre eles. Como três desistiram do trabalho, o valor contratado foi dividido igualmente entre os demais. Assim, o empreiteiro pagou, a cada um dos trabalhadores que realizaram o serviço, R$ 600,00 além do combinado no acordo original.

a) Quantos trabalhadores realizaram o serviço?
b) Quanto recebeu cada um deles?

a) Seja n o número de trabalhadores; cada trabalhador deveria receber $\frac{10\,800}{n}$.

Cada trabalhador recebeu $\frac{10\,800}{n-3}$. Do enunciado, vem:

$\frac{10\,800}{n-3} - \frac{10\,800}{n} = 600 \rightarrow 10\,800n - 10\,800\,(n-3) = 600\,(n-3) \rightarrow$

$\rightarrow 600n^2 - 1\,800n + 10\,800 \cdot 3 = 0 \rightarrow n^2 - 3n + 54 = 0$

Utilizando a soma e o produto das raízes, temos: $n = 9$ ou $n = -6$.
Como n é natural, pois n é o número de trabalhadores: $n = 9$.

Portanto, o número de trabalhadores que realizaram o serviço foi de $9 - 3 = 6$.

b) Cada um deles recebeu $\frac{10\,800}{6} = 1\,800 \rightarrow$ R$ 1.800,00.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Sistema Dom Bosco – Resolvendo, na incógnita x, a equação $m(x - 2) + 5(3 - 2x) = 2(1 + x + 3m)$, obtemos:

a) $x = \frac{8m-13}{m-12}$; $m \neq 12$

b) $x = \frac{6m+4}{2m-5}$; $m \neq \frac{5}{2}$

c) $x = \frac{2m-5}{m+10}$; $m \neq -10$

d) $x = \frac{m+7}{6m+2}$; $m \neq -\frac{1}{3}$

e) $x = \frac{3m+15}{m-3}$; $m \neq 3$.

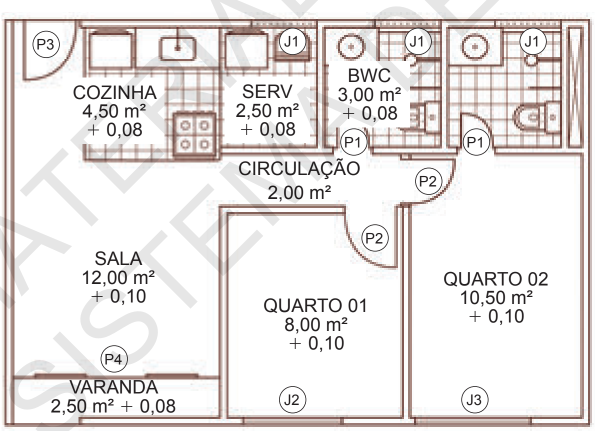
8. Fac. Albert Einstein-SP – Adriana e Beatriz precisam produzir 240 peças. Juntas elas levarão um tempo T, em horas, para produzir essas peças. Se Adriana trabalhar sozinha, ela levará (T + 4h) para produzir as peças. Beatriz, sozinha, levará (T + 9h) para realizar o serviço. Supondo que cada uma delas trabalhe em ritmo constante, o número de peças que Adriana produz a mais do que Beatriz, a cada hora, é igual a

a) 6
b) 8
c) 9
d) 10

9. **IFPE** – Na turma do primeiro período do curso de Computação Gráfica do IFPE – Olinda há 36 pessoas. O número de meninos dessa turma é o triplo do número de meninas. Calcule o número de meninas dessa turma.

10. **UEMA** – Para responder à questão, leia o texto e analise a planta baixa do apartamento descrito abaixo.

Um casal que acabou de receber seu apartamento planeja fazer pequenas modificações no piso. Após analisar a planta baixa, decidiu usar apenas dois tipos de azulejo. No primeiro orçamento, sala, varanda, quartos e circulação foram cotados com o azulejo tipo 01; cozinha, área de serviço e banheiros, com o azulejo tipo 02. No segundo orçamento, o azulejo tipo 01 seria usado para sala, circulação, cozinha e área de serviço; o azulejo tipo 02, aplicado somente aos banheiros. Os dois orçamentos tiveram valores totais de R$ 1 354,00 e R$ 780,00, respectivamente.



Analisando os dados, os valores do metro quadrado, em reais, dos dois tipos de azulejo incluídos nos dois orçamentos são, respectivamente, de

a) R$ 21,00 e R$ 27,00
b) R$ 25,84 e R$ 39,53
c) R$ 30,00 e R$ 25,00
d) R$ 32,00 e R$ 18,00
e) R$ 36,17 e R$ 6,75

11. **UNESP** – Uma imobiliária exige dos novos locatários de imóveis o pagamento, ao final do primeiro mês no imóvel, de uma taxa, junto com a primeira mensalidade de aluguel. Rafael alugou um imóvel nessa imobiliária e pagou R$ 900,00 ao final do primeiro mês. No período de um ano de ocupação do imóvel, ele contabilizou gastos totais de R$ 6.950,00 com a locação do imóvel.

Na situação descrita, a taxa paga foi de

a) R$ 450,00
b) R$ 250,00
c) R$ 300,00
d) R$ 350,00
e) R$ 550,00

12. **Sistema Dom Bosco** – Sobre as raízes da equação $2x + \dfrac{6}{x-3} = 6 + \dfrac{6}{x-3}$, podemos afirmar que:

a) são todas positivas.
b) são negativas.
c) possuem sinais contrários.
d) não existem.
e) são nulas.

13. IFSul-RS (adaptado) – Um exemplo de equação biquadrada é a equação: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Para encontrarmos as suas raízes, é preciso transformá-las em uma equação do segundo grau, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara Akaria (matemático que viveu na Índia em meados do século XII).

Portanto, a soma das raízes da equação

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ é

a) 0
b) -10
c) 2
d) 9

14. IFSC – Considerando-se a equação $E = \left(\sqrt[2]{x^2 - 7x + 12} = 2\sqrt{3}\right)$, sendo $U = \mathbb{R}$, é CORRETO afirmar que o seu conjunto solução será:

a) $S = \{7\}$
b) $S = \{0, -7\}$
c) $S = \{0\}$
d) $S = \{0, 7\}$
e) $S = \{2, 3\}$

15. IFSC – Dada a equação quadrática $3x^2 + 9x - 120 = 0$, determine suas raízes.

Assinale a alternativa que contém a resposta CORRETA.

a) -16 e 10
b) -5 e 8
c) -8 e 5
d) -10 e 16
e) -9 e 15

16. PUC-RJ

a) Resolva a equação $x^2 - x - 2 = 0$, sabendo que $x \in \mathbb{R}$.
b) Resolva a equação $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 2x$, sabendo que $x \in \mathbb{R}$.

17. IFPE – Um grupo de alunos do curso de mecânica decidiu comprar juntos um torno mecânico para montar uma oficina assim que se formassem. O valor de R$ 3.600,00 seria igualmente dividido por todos. Devido a alguns problemas financeiros, oito alunos que estavam no grupo desistiram, e a parte que cada um do grupo deveria pagar aumentou R$ 75,00.

Quantos alunos faziam parte do grupo inicialmente?

a) 20 alunos
b) 16 alunos
c) 18 alunos
d) 24 alunos
e) 12 alunos

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.
Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e R$ 14,70 a de acerola, porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango.

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

a) R$ 1,20
b) R$ 0,90
c) R$ 0,60
d) R$ 0,40
e) R$ 0,30

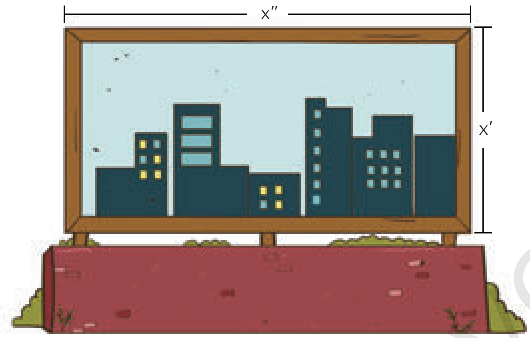
19. Enem C5-H21

Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada. A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

a) R$ 166,00
b) R$ 156,00
c) R$ 84,00
d) R$ 46,00
e) R$ 24,00

20. IFSul- RS (adaptado) C5-H21

As medidas do comprimento e da altura (em metros) do *outdoor* retangular representado na figura abaixo são exatamente as soluções da equação $x^2 - 10x + 21 = 0$.



Dessa forma, é correto afirmar que a área desse *outdoor* é

a) 10 m^2

b) 20 m^2

c) 21 m^2

d) 24 m^2

e) 28 m^2

5

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FUNÇÕES, PROPORCIONALIDADE E FUNÇÃO LINEAR

- Noção intuitiva
- Definição
- Símbolo *f*(*x*)
- Representação de ponto
- Gráfico de uma função
- Grandezas proporcionais
- Função linear

HABILIDADES

- Determinar domínio, imagem e zeros de funções.
- Aplicar conhecimentos de funções em problemas.
- Construir modelos para analisar fenômenos.
- Analisar gráficos de funções.
- Transcrever da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Conceituar grandeza.
- Identificar, matematicamente, a proporcionalidade direta e a inversa.
- Utilizar a definição de grandezas proporcionais no entendimento e resolução de problemas.
- Correlacionar grandezas diretamente proporcionais à função linear.

Funções – noção intuitiva

Considere uma correspondência específica entre dois conjuntos, **A** e **B**, com a seguinte característica: cada elemento do conjunto **A** tem um único elemento correspondente no conjunto **B**.

- Uma correspondência que satisfaz essas características denomina-se **função entre A e B**.

DEFINIÇÃO

Dados dois conjuntos **A** e **B** não vazios, denomina-se **função** uma correspondência especial, formalmente chamada de relação binária, entre os conjuntos **A** e **B**, nessa ordem, de tal maneira que todo elemento $x \in A$ tem em correspondência um único elemento $y \in B$, chamado **imagem** de **x**.

As seguintes denominações são importantes:

- conjunto **A**: **domínio** da função;
  conjunto **B**: **contradomínio** da função;
  subconjunto do contradomínio, formado por todas as imagens dos elementos do domínio: **conjunto imagem.**

DIAGRAMA DE FLECHAS

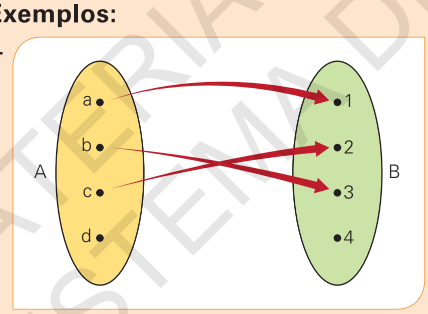
Num diagrama de flechas, são representados os conjuntos domínio e imagem, ligando os elementos por flechas.

Para isso, a relação deve satisfazer a seguinte condição para ser uma função:

Cada elemento de **A** deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

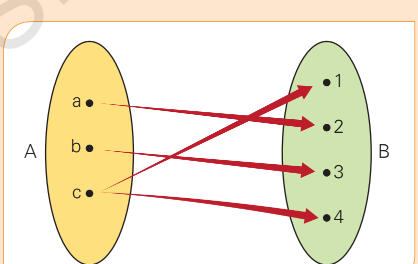
Exemplos:

1.



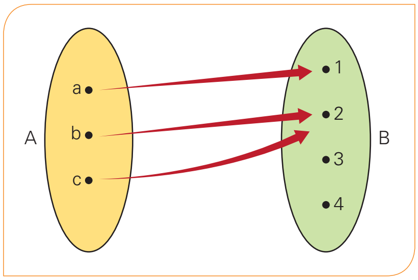
Não é função, pois existe um elemento $d \in A$ que não tem flecha.

2.



Não é função, pois partem duas flechas do elemento $c \in A$.

3.



É uma função, pois satisfaz a condição enunciada.

- Domínio: $A = \{a, b, c\}$
- Contradomínio: $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Imagem $= \{1, 2\}$

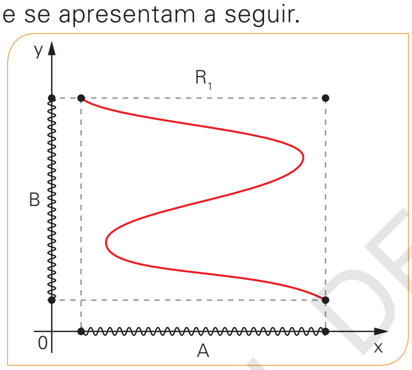
GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

O gráfico de uma função é uma união de todos os pontos, no plano cartesiano (x; y). O número de pontos do gráfico depende da quantidade de elementos do domínio da função.

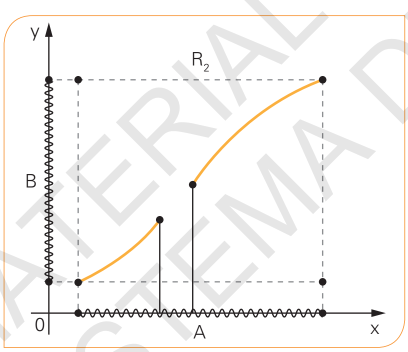
Análise do gráfico cartesiano

Observe os gráficos das relações binárias de A em B, que se apresentam a seguir.

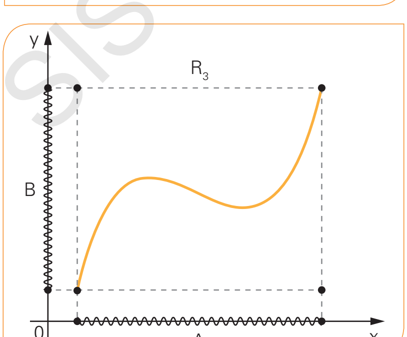
a)



b)



c)



Para ser uma função, todo elemento do domínio deve ter uma única imagem no contradomínio. Com base nesse procedimento, pode-se estabelecer a regra:

Toda reta vertical que passe pelo domínio da relação "corta" uma única vez o gráfico da relação.

Portanto, podemos avaliar os gráficos mostrados anteriormente:

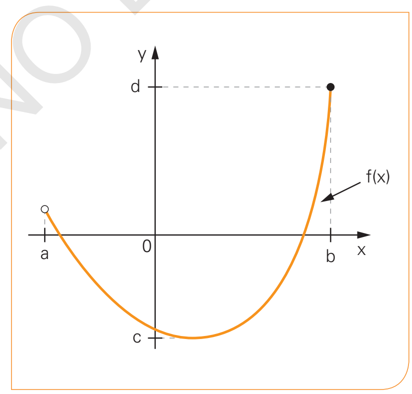
a) R_1 não é função
b) R_2 não é função
c) R_3 é função

DOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

Pode-se determinar o domínio ou conjunto imagem partindo-se do gráfico da função. Para encontrá-los, deve-se primeiro entender o significado de "projeção ortogonal de um ponto do gráfico", respectivamente nos eixos horizontal e vertical.

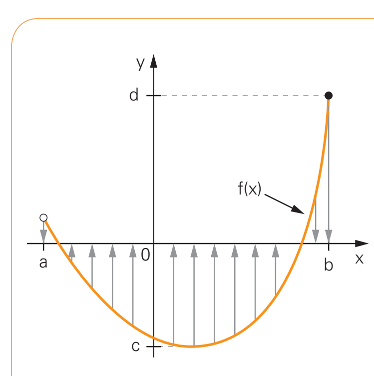
Exemplo:

Considere a função f(x) definida por $A =]a; b]$ em $\mathbb{R}$.



Domínio

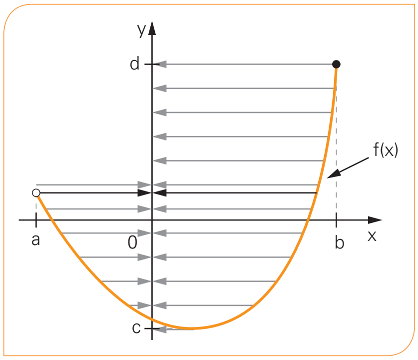
O domínio de uma função é a **projeção ortogonal** do gráfico da função no eixo **x**. Assim, $D =]a; b] = A$.



$D =]a, b]$

Conjunto imagem

O conjunto imagem de uma função é a **projeção ortogonal** do gráfico da função no eixo **y**. Assim, Im = [c, d].

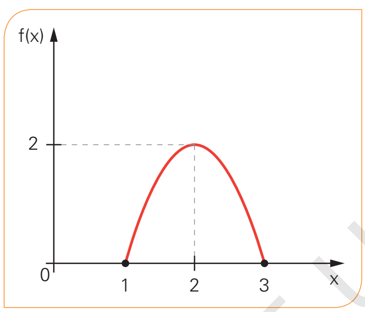


Im = [c, d]

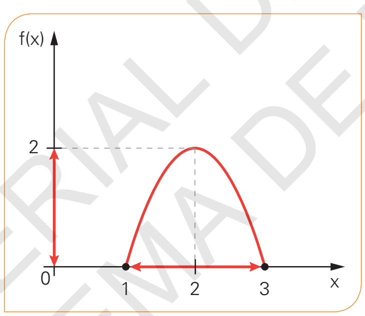
Observação: o contradomínio de uma função é representado por todo o eixo **y**.

Exemplo:

Considere o gráfico da função f: A → B.



Nele podemos obter o domínio e o conjunto imagem da função.



Observe que o intervalo [1; 3] é a projeção de todos os pontos do gráfico sobre o eixo **x,** e a projeção no eixo **y** é o intervalo [0; 2]. Desse modo, o domínio da função é D = [1; 3], e o conjunto imagem é Im = [0; 2].

SÍMBOLO F(X)

As funções podem ser representadas com símbolos, tais como f(x), g(x), h(x) etc. Considere que, no símbolo f(x), a letra *f* representa o nome da função.

No símbolo f(x), interpreta-se:

- leitura: "**f** de **x**";
- **f**: nome da função;
- **x**: variável que representa um elemento do domínio da função (letra que aparece entre parênteses);
- **f(x):** simboliza a imagem do elemento **x** do domínio.

Na notação f: A → B, com f(x) = 2x em que:

- **f:** nome da função;
- **A:** domínio da função;
- **B**: contradomínio.

Exemplo:

Considere uma função de domínio e contradomínio real, definida por f(x) = x + 1. Determine f(2019).

Observe que o domínio e o contradomínio são conjuntos dos reais.

A notação f(2019) indica que se deve encontrar a imagem de um elemento particular do domínio, nesse caso 2019. É preciso substituir, na relação fornecida, a variável **x** pelo elemento particular 2019.

f(2019) = 2019 + 1

f(2019) = 2020

Raiz (ou zero) da função

Um elemento **x** do domínio é dito **zero** ou **raiz** da função quando tem imagem igual a zero, ou seja, f(x) = 0.

Exemplo:

Número real 2 é raiz ou zero da função real definida por f(x) = 2 − x, pois f(2) = 2 − 2 = 0.

Função real e domínio

Para encontrar o mais amplo domínio de uma função real, deve-se estar atento às possibilidades das operações matemáticas, principalmente os seguintes problemas que podem ser encontrados:

1. Se houver variável no denominador de uma fração, este não pode ser zero.
2. Se houver variável no radicando de uma raiz de índice par, o radicando não pode ser negativo.

Exemplos:

1. Encontre o mais amplo domínio da função real definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Resolução: O denominador da fração é $x - 1 \rightarrow x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 0$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

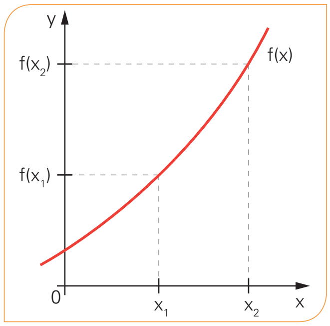
2. Encontre o mais amplo domínio da função real definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Resolução: O radicando da raiz é $x - 1 \rightarrow x - 1 \geqslant 0 \rightarrow x \geqslant 1$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

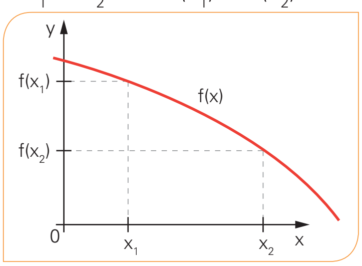
FUNÇÃO CRESCENTE, DECRESCENTE E CONSTANTE

Função crescente: num intervalo, f(x) é crescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 < x_2$ tiver $f(x_1) < f(x_2)$.



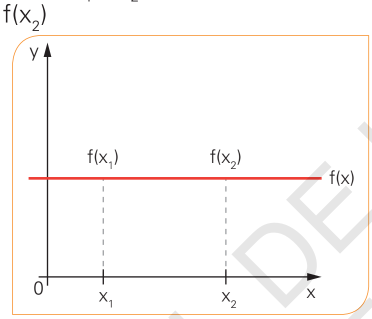
$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Função decrescente: num intervalo, f(x) é decrescente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_1 > x_2$ tiver $f(x_1) > f(x_2)$.



$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Função constante: num intervalo, f(x) é constante se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, tiver $f(x_1) = f(x_2)$



EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. UPE – Na fabricação de 25 mesas, um empresário verificou que o custo total de material foi obtido por meio de uma taxa fixa de R$ 2 000,00, adicionada ao custo de produção que é de R$ 60,00 por unidade. Qual é o custo para fabricação dessas mesas?

a) R$ 1 500,00
b) R$ 2 900,00
c) R$ 3 500,00
d) R$ 4 200,00
e) R$ 4 550,00

Resolução:

Temos então que a lei dessa função será formada por uma parte fixa e outra variável.

Observe que:

$f(x) = 2000 + 60 \cdot x$

Em que f(x) é o custo da produção e x é o número de mesas produzidas.

Para o cálculo da produção de 25 mesas, temos que atribuir 25 ao valor de x.

Assim:

$f(25) = 2000 + 60 \cdot 25 = 2000 + 1500 = 3500$

Proporcionalidade

Grandezas proporcionais

A princípio, vale dizer que se considera uma grandeza como qualquer informação que possa ser expressa numericamente. Há vários exemplos: o tempo de espera em uma fila (10 min.), a temperatura ambiente (−3 °C), a velocidade de um veículo (80 km/h), a massa de um objeto (32 kg) etc.

Matematicamente, caso as grandezas se relacionem de modo proporcional, são classificadas em direta ou inversamente proporcionais. Chamam-se de grandezas diretamente proporcionais se (e somente se) o quociente delas é constante e inversamente proporcional se (e somente se) o produto é constante.

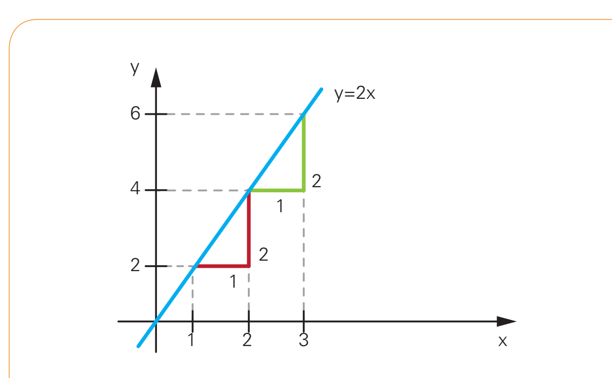
Exemplos:

1. Do estudo da dinâmica, a força resultante (**F**) aplicada em um corpo e sua aceleração (**A**) são grandezas diretamente proporcionais, pois o quociente entre **F** e **A** é constante – nesse caso a massa (**m**) do corpo, ou seja, $\frac{F}{A} = m$ (constante).
2. Considere duas cidades A e B que distam **d** km. Se uma pessoa viajar, semanalmente, de A para B com a mesma velocidade média (**V**) durante o percurso, variando essa velocidade a cada semana, o tempo gasto (**T**), em cada viagem, é inversamente proporcional à velocidade média, pois o produto $V \cdot T = d$ (constante).

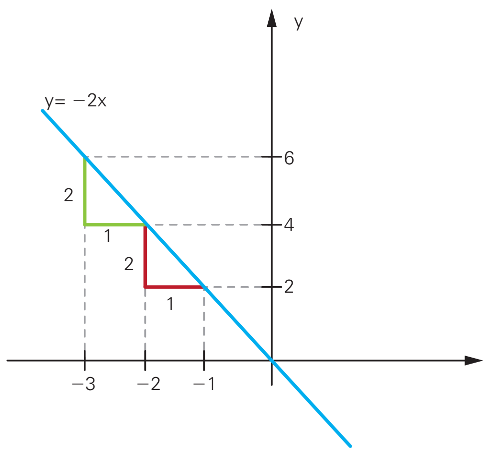
Função linear

A função real representada algebricamente por $f(x) = ax$ ou $y = ax$, sendo a constante, é chamada de **função linear**. Seu gráfico é uma reta.

Nota-se, na figura ao lado, que nos triângulos de catetos coloridos, o quociente entre os catetos verticais e horizontais de mesma cor, nessa ordem, é $\frac{2}{1}$, ou seja, a constante é 2



A constante a indica a variação (positiva ou negativa) do y a cada aumento de uma unidade no valor de x. No caso do exemplo na página anterior, a variação é positiva, pois a função é crescente. Portanto, a = 2.



Nota-se na figura acima que, nos triângulos de catetos coloridos, o quociente entre os catetos verticais e horizontais de mesma cor, nessa ordem, é $\frac{2}{1}$, ou seja, a constante é 2. No caso do último exemplo, a variação é negativa, pois a função é decrescente. Portanto, a = −2.

É importante ressaltar que em uma função linear tem-se que as grandezas y e x são diretamente proporcionais.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2. Sistema Dom Bosco – Os lados de um triângulo retângulo são proporcionais 3, 4 e 5. Se o perímetro é 150 cm, então a área do triângulo, em cm^2, é:

a) 312,5
b) 625
c) 937,5
d) 1 875
e) 1 562,5

Resolução

Sejam x, y e z as medidas dos lados proporcionais a 3, 4 e 5, respectivamente.

Então: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$ (constante) $\rightarrow x = 3k$; $y = 4k$ e $z = 5k$.

Como o perímetro é 150, temos:

$x + y + z = 150 \rightarrow 3k + 4k + 5k = 150 \rightarrow$
$\rightarrow 12k = 150 \rightarrow k = \frac{150}{12} = \frac{25}{2}$.

A área do triângulo retângulo de catetos x e y é:

$$\frac{x \cdot y}{2} = \frac{12k^2}{2} = 6 \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{625}{4} = 3 \cdot \frac{625}{2} =$$
$$= 3 \cdot 312{,}5 = 937{,}5 \rightarrow 937{,}5\ cm^2.$$

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO

Definição

- Uma função f: A → B é uma correspondência específica entre dois conjuntos, A e B.
- Todo elemento do conjunto A tem um único elemento correspondente no conjunto B.

Nomenclatura (f: A → B)

- Domínio da função: conjunto A
- Contradomínio da função: conjunto B
- Conjunto imagem: subconjunto do contradomínio, formado por todas as imagens dos elementos do domínio.

Representação

- Diagrama de flechas
- Conjunto formado por pares ordenados
- Plano cartesiano

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÕES

- **Proporcionalidade**
  - Inversa
    - Produto é constante.
  - Direta
    - Quociente é constante.
- **Função linear**
  - Algébrica
    - $y = a \cdot x \; (a \in \mathbb{R})$.
  - Gráfica
    - Reta que passa pela origem.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unifor-CE – Uma empresa, em processo de restauração, propôs a seus funcionários uma indenização financeira para os que pedissem demissão, que variava em função do número de anos trabalhados. A tabela abaixo era utilizada para calcular o valor (i) da indenização, em função do tempo trabalhado (t).

Tempo trabalhado (em anos)	Valor da indenização (em Reais)
1	450
2	950
3	1 450
4	1 950

Baseado na tabela acima, podemos afirmar que um funcionário com 15 anos de trabalho nessa empresa receberia uma indenização em reais de:

a) 6 950
b) 7 100
c) 7 450
d) 8 100
e) 8 900

Temos que a função que modela esse problema é dada por:
$i(t) = 450 + 500 \cdot (t - 1)$
Então, em 15 anos:
$i(15) = 450 + 500 \cdot 14 \rightarrow i(15) = 7\,450$

2. UFU-MG (adaptado) – Um estudante recorre a uma imobiliária na expectativa de alugar um apartamento. A imobiliária exige de seus locatários o pagamento de um depósito caução, dividido em três parcelas fixas e de iguais valores, a serem pagas junto com as mensalidades do aluguel nos três primeiros meses. Essas mensalidades são fixas e de iguais valores. O estudante desembolsará, em um ano de contrato, um total de R$ 8400,00, de maneira que o desembolso total, após o término do pagamento do depósito caução, será 80% superior àquele correspondente ao desembolso referente aos três primeiros meses.

Nas condições apresentadas, calcule o valor do depósito caução.

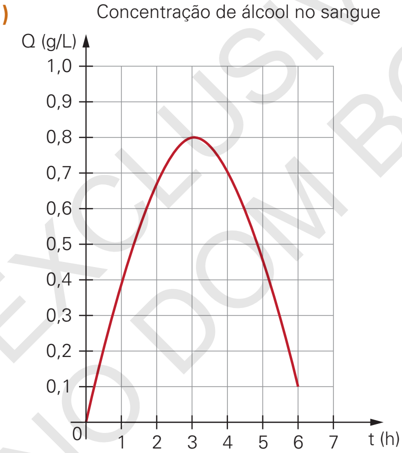
Chamamos de P a parcela dos 3 primeiros meses e X, o valor mensal do aluguel.
Logo, o estudante pagará P + X por mês nos 3 primeiros meses e X, nos 9 meses restantes.
Assim, a soma total anual T é dada por:
$T = 3(P + X) + 9X = 8\,400.$
Temos também que, no pagamento das três parcelas do depósito caução, ou seja, 9X, o valor desembolsado foi 80% maior que aquele pago nos três primeiros meses.
$9X = (1{,}8) \cdot 3 \cdot (P + X)$
$9X = 5{,}4 \cdot (P + X)$
$3{,}6X = 5{,}4P$
$X = 1{,}5P$
Portanto, $3 \cdot (1{,}5P + P) + 9 \cdot 1{,}5P = 8\,400.$
$13{,}5P + 4{,}5P + 3P = 8\,400$
$21P = 8\,400$
$P = 400$
Assim, o depósito caução 3P é dado por R$ 1.200,00.

3. Enem C5-H21

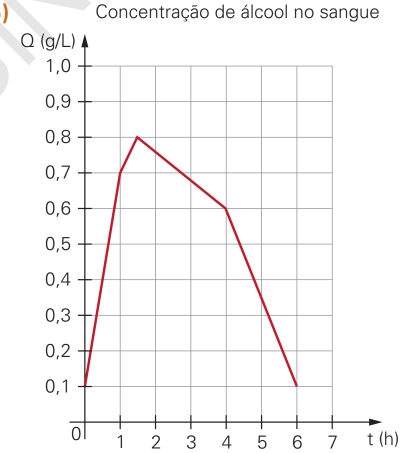
O Código de Trânsito de certo país estabelece penas para quem conduzir veículo automotor na via pública, estando com concentração de álcool no sangue igual ou superior a 0,6 grama por litro. Um pesquisador monitorou um indivíduo que ingeriu bebida alcoólica somente após o jantar. Exames realizados no sangue desse indivíduo mostraram que a concentração Q de álcool no sangue, dada em grama por litro, aumentou durante 1 hora e meia. Depois disso, começou a diminuir e atingiu a concentração permitida para dirigir, três horas após a ingestão de álcool.

Um gráfico que pode representar a relação entre o tempo após a ingestão e a concentração de álcool no sangue desse indivíduo é

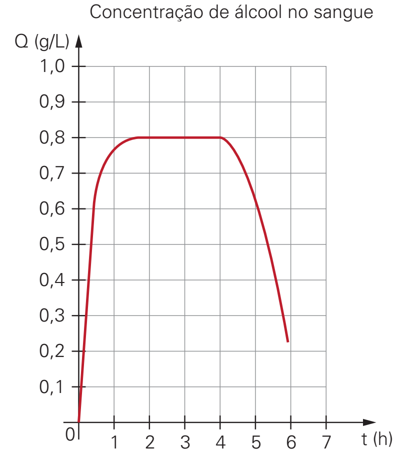
a) Concentração de álcool no sangue



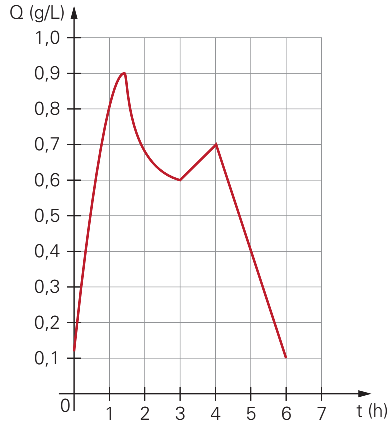
b) Concentração de álcool no sangue



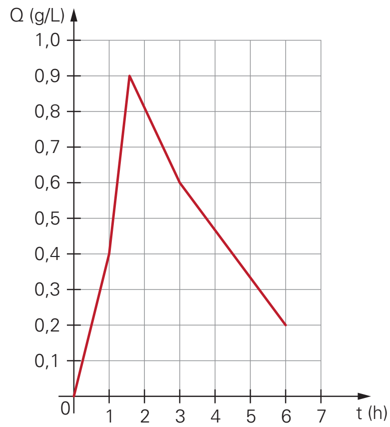
c) Concentração de álcool no sangue



d) Concentração de álcool no sangue



e) Concentração de álcool no sangue



Durante uma hora e meia houve um aumento na concentração de álcool no sangue. Logo, na primeira 1,5 hora a função é crescente. Depois de 1,5 hora, a função fica decrescente, atingindo 0,6 g/L quando t = 3h.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

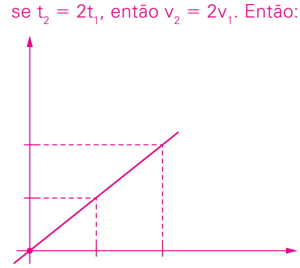
Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Sistema Dom Bosco – A lei geral dos gases é expressa pela relação $\frac{P \cdot V}{T} = k$, em que a pressão (P), o volume (V) e a temperatura (T) são números reais positivos, bem como a constante k.

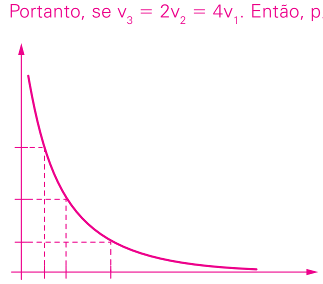
a) Sendo a pressão constante, esboce o gráfico do volume em função da temperatura.

b) Considerando que a temperatura não varie, esboce o gráfico da pressão em função do volume.

a) Se P é constante, então $\frac{V}{T}$ também é constante, pois o produto $\frac{k}{P}$ é constante. Logo, V e T são diretamente proporcionais. Portanto, se $t_2 = 2t_1$, então $v_2 = 2v_1$. Então:



b) Se T é constante, então P · V também é constante, pois o produto k · T é constante. Logo, P e V são inversamente proporcionais. Portanto, se $v_3 = 2v_2 = 4v_1$. Então, $p_1 = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{4}$. Daí vem:



5. UEL-PR (adaptado) – Numa gráfica, 6 máquinas de mesmo rendimento imprimem uma quantidade de cópias de folheto publicitário em 8 horas de trabalho. Se 2 dessas máquinas quebrassem, em quanto tempo de trabalho as demais máquinas fariam o mesmo serviço?

a) 5 horas e 20 minutos
b) 6 horas e 40 minutos
c) 10 horas e 30 minutos
d) 12 horas
e) 14 horas e 15 minutos

A quantidade de máquinas (m) e o número de horas trabalhadas (n) são grandezas inversamente proporcionais. Daí temos:

$m \cdot n = k$ (constante) $\rightarrow 6 \cdot 8 = (6 - 2) \cdot n \rightarrow n = \frac{48}{4} \rightarrow n = 12.$

6. Fatec-SP – Um certo setor de uma empresa tem várias máquinas, todas com o mesmo custo operacional por hora. Se o custo da operação de 3 delas, em 2 dias, funcionando 6 horas por dia, é de R reais, então o custo de operação, em reais, de duas delas, em 4 dias, funcionando 5 horas por dia, é igual a:

a) $\frac{8}{9}R$
b) $\frac{10}{9}R$
c) 2R
d) 2,5R
e) 5R

Custo operacional por hora de 3 máquinas: $\frac{R}{2 \cdot 6} = \frac{R}{12}$;

Custo operacional por hora de 1 máquina: $\frac{\frac{R}{12}}{3} = \frac{R}{36}$;

Custo operacional de 2 máquinas em 4 dias, funcionando 5 horas por dia:

$\frac{R}{36} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = \frac{40R}{36} = \frac{10R}{9}$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFPR – Uma pizza a 185 °C foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65 °C será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura T da pizza, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo t, em minutos, pela expressão $T = 160 \times 2^{-0,8 \times t} = 25$. Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa *pizza* com as mãos nuas, sem se queimar?

a) 0,25 minutos
b) 0,68 minutos
c) 2,5 minutos
d) 6,63 minutos
e) 10,0 minutos

8. UPE (adaptada) – Muitos brasileiros passaram a comprar veículos novos, os famosos "0 Km". O problema é que, ao ser retirado da concessionária, o processo de depreciação do bem é iniciado, como publicado na revista online Exame.com em 28/02/2013, estimulando especialistas a recomendarem a compra de veículos seminovos. Uma das funções utilizadas para determinar o valor final após a depreciação de um automóvel é dada por $f(X) = C \cdot 0,8^x$, onde C representa o valor inicial do veículo, e X, o tempo de depreciação em anos.

Com base nessa função, calcule após quanto tempo, um veículo comprado por R$ 40 000,00 valerá 51,2% do seu preço original.

9. Sistema Dom Bosco – 50 bois foram numerados e utilizados para testar uma nova medicação. Injetou-se o medicamento em cada um dos bois. Se o boi reagisse positivamente era marcado com o número 1 e, negativamente, com zero. O domínio dessa função é o conjunto:

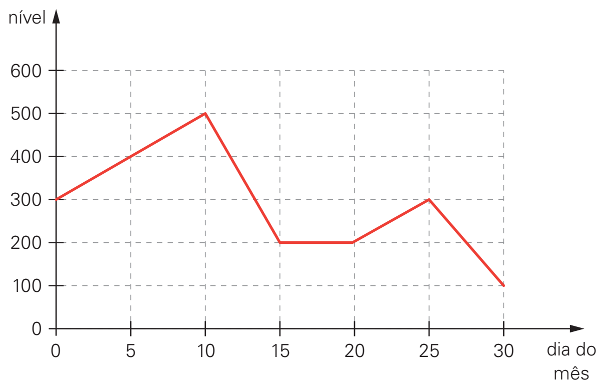
a) $\{0, 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 51\}$
c) $[0, 1]$
d) $[0, 50]$
e) $[1, 51]$

10. Unicamp-SP – O índice de massa corporal de uma pessoa adulta é dado pela fórmula $I = \frac{M}{h^2}$ sendo M a massa do corpo, dada em quilogramas, e h, a altura da pessoa, em metros. O índice I permite classificar uma pessoa adulta de acordo com a seguinte tabela:

Homens	Mulheres	Classificação
$20 \leqslant I \leqslant 25$	$19 \leqslant I \leqslant 24$	Normal
$25 < I \leqslant 30$	$25 < I \leqslant 29$	Levemente Obeso
$I \geqslant 30$	$I > 29$	Obeso

a) Calcule o índice I para uma mulher cuja massa seja 64,0 kg e cuja altura seja 1,60 m. Classifique-a segundo a tabela dada.
b) Qual é a altura mínima para que um homem com massa de 97,2 kg não seja considerado obeso?

11. Insper-SP – O gráfico abaixo mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



O período do mês em que as variações diárias do nível do reservatório, independentemente se para enchê-lo ou esvaziá-lo, foram as maiores foi

a) nos dez primeiros dias
b) entre o dia 10 e o dia 15
c) entre o dia 15 e o dia 20
d) entre o dia 20 e o dia 25
e) nos últimos cinco dias

12. Sistema Dom Bosco – Os irmãos André, Carlos e Juca têm, respectivamente, um, dois e três filhos. Considere dois conjuntos: um formado pelos irmãos e outro pelos filhos e as seguintes relações:

I. a que associa cadapai ao seu filho;
II. a que associa cada filho ao seu pai;
III. a que associa cada filho ao se primo.

São Funções:

a) somente a I.
b) somente a II.
c) somente a III.
d) as três.
e) nenhuma.

13. Sistema Dom Bosco – Robert Hooke (1635/1703) é considerado o maior cientista experimental do século XVII. Entre suas inúmeras contribuições está o estudo das deformações elásticas que resultou na Lei: "Em regime de deformação elástica, a intensidade F da força aplicada a uma mola é diretamente proporcional à deformação x da mola. Essa lei, conhecida como 'Lei de Hooke', pode ser expressa pela função linear $F = k \cdot x$, em que k é uma constante de proporcionalidade chamada de constante elástica da mola."

a) De acordo com o texto, responda: aplicando-se uma força de 30 Newtons à mola, esta comprime 2 cm. Qual a força aplicada se a compressão da mola foi de 5 cm?

b) Esboce o gráfico da Lei de Hooke para a constante elástica obtida no item anterior.

14. ESPM-SP (adaptado) – Quando um automóvel é freado, a distância que ele ainda percorre até parar é diretamente proporcional ao quadrado de sua velocidade. Se um automóvel a 35 km/h é freado e para depois de percorrer mais 7 metros, se estivesse a 70km/h, pararia após percorrer mais quantos metros?

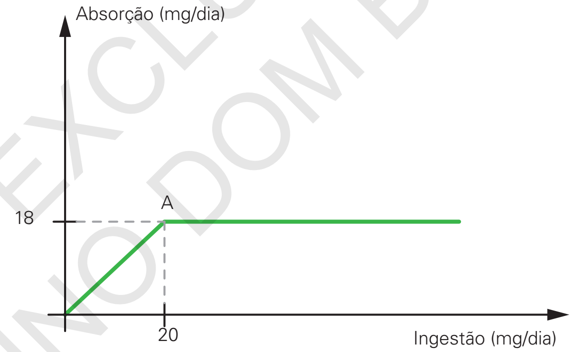
15. Faap-SP (adaptado) – Dois sócios lucraram R$ 5.000,00. O primeiro entrou para a sociedade com o capital de R$ 18.000,00 e o segundo com R$ 23.000,00. Se os lucros de cada sócio são proporcionais aos capitais, a diferença entre os lucros foi de aproximadamente:

a) R$ 509,00
b) R$ 609,00
c) R$ 709,00
d) R$ 809,00
e) R$1.009,00

16. PUC-PR (adaptado) – Uma construtora edificou 5 residências com as seguintes áreas construídas, em m^2: 110, 112, 120, 116 e 102 e destinou uma área comum para lazer de 84 m^2 que deve ser dividida em partes proporcionais à área de cada residência. Assim, a área correspondente à residência de 110 m^2, em m^2, é igual a:

a) 15,3
b) 16,5
c) 16,8
d) 17,4
e) 18

17. UFMG – Observe o gráfico, em que o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas.



Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia. Analisando as afirmativas relativas ao gráfico.

I. Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

II. A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.

III. Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.

IV. A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.

Quantas são falsas?

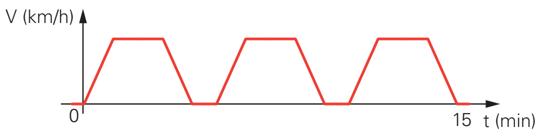
a) nenhuma
b) uma
c) duas
d) três
e) todas

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H19

Um semáforo e composto, geralmente, de três círculos de luzes coloridas (vermelho, amarelo e verde). A cor vermelha indica que o veículo deve estar parado e permanecer assim até que a cor verde volte a acender.

O gráfico apresenta a variação de velocidade de um carro ao longo de um percurso de 15 minutos de duração, da residência de uma pessoa até seu local de trabalho. Durante esse percurso, o carro parou somente nos semáforos existentes ao longo de seu trajeto.

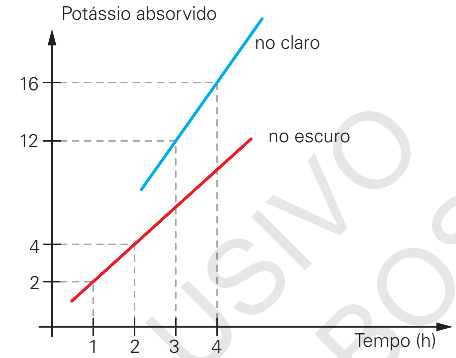


Em quantos semáforos ele parou?

a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

19. UNESP C6-H25

O gráfico mostra o resultado de uma experiência relativa à absorção de potássio pelo tecido da folha de um certo vegetal, em função do tempo e em condições diferentes de luminosidade.



Nos dois casos, a função linear $y = m \cdot x$ ajustou-se razoavelmente bem aos dados, daí a referência a m como taxa de absorção (geralmente medida em m – moles– por unidade de peso por hora). Com base no gráfico, se m_1 é a taxa de absorção no claro e m_2 a taxa de absorção no escuro, a relação entre essas duas taxas é:

a) $m_1 = m_2$
b) $m_2 = 2m_1$
c) $m_1 \cdot m_2 = 1$
d) $m_1 \cdot m_2 = -1$
e) $m_1 = 2m_2$

20. UFMG-Juiz de Fora (adaptado) C6-H25

Em um certo restaurante, as *pizzas* são feitas em formas de base circular. Os preços das *pizzas* do mesmo tipo variam proporcionalmente em relação à área da base da forma. Se uma *pizza* feita numa forma cuja base tem 20 cm de diâmetro custa R$ 36,00 então uma outra *pizza*, do mesmo tipo, feita numa forma cuja base tem 30 cm de diâmetro, deve custar:

a) R$ 54,00
b) R$ 79,00
c) R$ 81,00
d) R$ 85,00
e) R$ 89,00

6

FUNÇÃO AFIM, FUNÇÃO LINEAR, IDENTIDADE E CONSTANTE

- Introdução
- Definição
- Gráfico da função
- Raiz ou zero da função
- Coeficientes da função
- Função linear
- Função identidade
- Função constante

HABILIDADES

- Identificar função afim.
- Utilizar função afim para resolver problemas.
- Identificar função linear com o conceito de grandezas proporcionais.
- Representar graficamente função afim.
- Compreender o significado dos coeficientes da função afim.
- Identificar função afim descrita por meio do gráfico cartesiano.
- Identificar função linear com o conceito de grandezas proporcionais.
- Representar e identificar
- graficamente funções afim, linear, identidade e constante.
- Compreender o significado dos coeficientes das funções descritas.

Função afim

Definição

Chama-se **função afim** ou **função polinomial do 1º grau** a função real f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que pode ser escrita na forma:

$f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$

Temos então:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $CD(f) = \mathbb{R}$ e
- $Im(f) = \mathbb{R}$

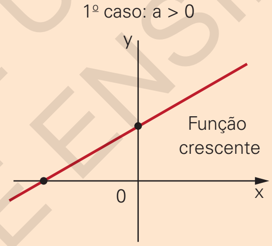
Na função $f(x) = ax + b$, o número a é o coeficiente de x e o número b, o termo constante.

Quando temos a função afim $f(x) = 0$, ela se transforma em uma equação do 1º grau $ax + b = 0$.

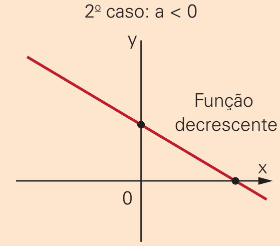
GRÁFICO DA FUNÇÃO

O gráfico da função afim é uma reta crescente (quando a é positivo) ou decrescente (quando a é negativo), conforme os esquemas a seguir.

1º caso: $a > 0$



2º caso: $a < 0$



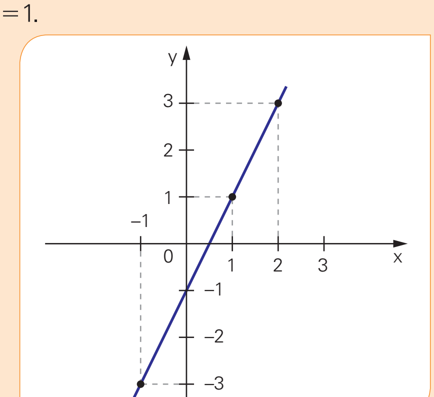
Para esboçar o gráfico, é importante destacar dois pontos distintos, porque por dois pontos passa uma única reta.

Exemplos:

1. Vamos esboçar o gráfico da função real definida por $f(x) = 2x - 1$.

Precisamos calcular dois pontos distintos:

- Se $x = 0$, temos $y = -1$;
- Se $y = 1$, então $x = 1$.

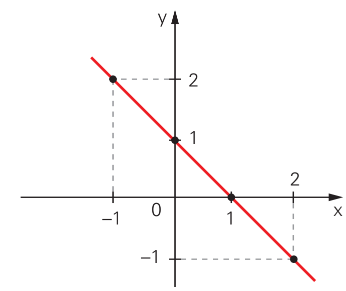


A função é **crescente**, pois $a = 2$, ou seja, positivo.

2. Vamos esboçar o gráfico da função real definida por $f(x) = -x + 1$.

Precisamos calcular dois pontos distintos:

- Se $x = 0$, temos $y = 1$;
- Se $y = 0$, então $x = 1$.



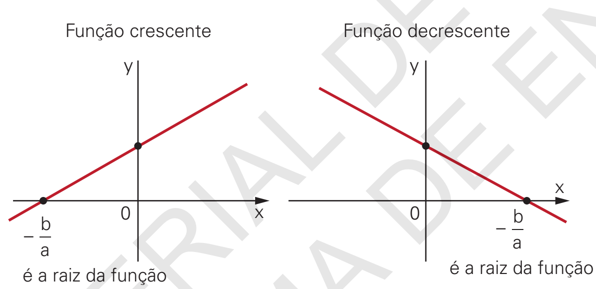
A função é **decrescente**, pois $a = -1$, ou seja, negativo.

RAIZ OU ZERO DA FUNÇÃO

Determinação do valor de **x** tal que $f(x) = 0$, em que f é a função cuja raiz será definida, ou seja:

$f(x) = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$ é a única raiz da função.

A raiz de uma função afim, crescente ou decrescente, é representada pelo ponto no qual o gráfico intercepta o eixo das **abcissas** (x).



O ponto (x, y) no qual a reta intercepta o eixo horizontal **x** é $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

COEFICIENTES DA FUNÇÃO

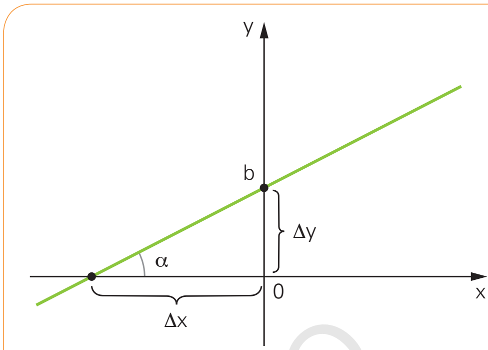
Na função afim $f(x) = ax + b$, **a** é denominado coeficiente angular e **b**, coeficiente linear.

O ponto de interseção com o eixo vertical ocorre quando $x = 0$. Desse modo:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \rightarrow f(0) = b$$

Isso significa que o gráfico intercepta o eixo **y** no ponto (0, b).

Significado geométrico



Função linear

A função linear é um caso particular da função afim e ocorre quando $b = 0$. Isto é, a função real definida por $f(x) = ax$ é chamada de função linear.

Quando uma função é linear, os valores do domínio e os respectivos conjuntos imagens são diretamente proporcionais. Neste caso a constante de proporcionalidade é **a**.

Considere a função afim definida por $f(x) = ax + b$ e que sejam dois pontos distintos x_1 e x_2. Logo, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$.

$f(x_2) - f(x_1) = ax_1 + b - (ax_2 + b)$

$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_1 - x_2)$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} = a$

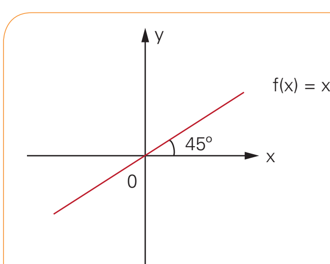
Função identidade

A função identidade é um caso particular da função linear, cujo valor de **a** é igual a 1. Ou seja, $f(x) = x$, em que cada elemento tem como imagem ele mesmo.

$D = \mathbb{R}$, $CD = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$.

x	y
–1	–1
0	0
1	1

O gráfico de uma função identidade é uma reta bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano, passando pela origem do sistema.



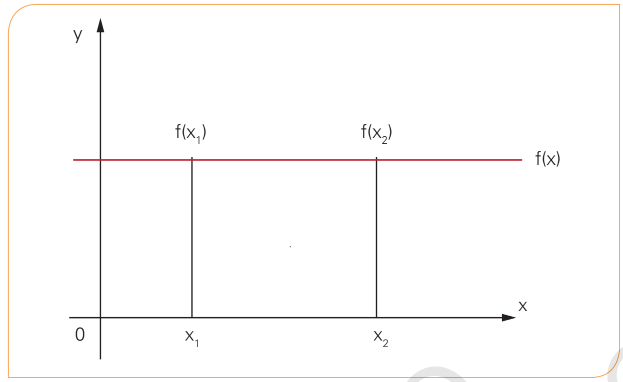
Na função $f(x) = x$, como o coeficiente angular **a** vale 1, então $\tan \alpha = 1 \rightarrow a = 45°$

O coeficiente linear **b** vale 0, ou seja, o gráfico intercepta o eixo y na origem.

Função constante

É a função real definida por $f(x) = k$, na qual k é uma constante. Observe que a função tem imagem k para qualquer valor de x.

O gráfico é uma reta paralela ao eixo x, passando na ordenada k. De maneira geral, a função f(x) é constante se, para quaisquer x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$ pertencentes a determinado intervalo, tiver $f(x_1) = f(x_2)$.



Numa função constante, qualquer que seja o elemento do domínio, ele sempre terá a mesma imagem. Ou seja, ao variar x encontra-se sempre o mesmo valor k.

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO AFIM

Representação

Algébrica

$y = $ $a \cdot x + b$; $(a \neq 0)$

Gráfica

Reta

Dois pontos

$(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO

Representação

Algébrica
(a, b ∈ ℝ

Função linear: y = ax.

Função identidade: y = x.

Função constante: y = b.

Gráfica

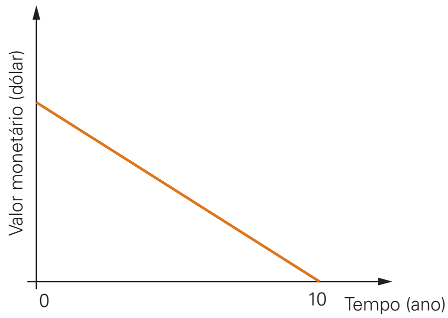
Função linear: reta que passa pela origem.

Função identidade: reta que é bissetriz dos quadrantes I e III.

Função constante: reta paralela do eixo x.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem – Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente.

Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

a) 30
b) 60
c) 75
d) 240
e) 30.

Temos que a depreciação é de 100% em 10 anos; portanto, uma depreciação de 10% ao ano.

Para o bem A, em 8 anos, temos um valor final de:

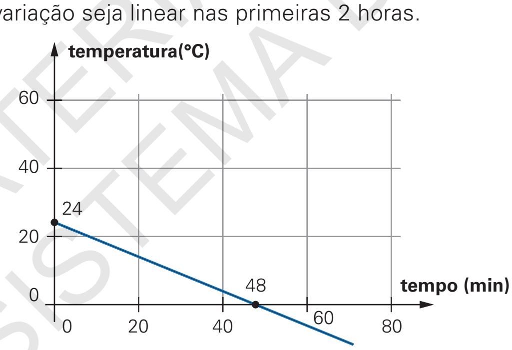
$1200 \cdot (100\% - 8 \cdot 10\%) = 1\,200 \cdot (1 - 8 \cdot 0{,}1) = 1\,200 \cdot (1 - 0{,}8) =$
$= 1\,200 \cdot 0{,}2 = 240$. Ou seja, 240 dólares.

Para o bem B, em 8 anos, temos um valor final de:

$900 \cdot (100\% - 8 \cdot 10\%) = 900 \cdot (1 - 8 \cdot 0{,}1) = 900 \cdot (1 - 0{,}8) =$
$= 900 \cdot 0{,}2 = 180$. Ou seja, 180 dólares.

O que nos dá uma diferença entre A e B de 60 dólares.

2. ESPM-SP (adaptado) – O gráfico abaixo mostra a variação da temperatura no interior de uma câmara frigorífica desde o instante em que foi ligada. Considere que essa variação seja linear nas primeiras 2 horas.



Qual o tempo necessário para que a temperatura atinja −18 °C?

Temos uma função afim: $T(t) = a \cdot t + b$.

Logo, $a = \dfrac{T(48) - T(0)}{48 - 0} = \dfrac{0 - 24}{48} = \dfrac{-24}{48} = -\dfrac{1}{2}$.

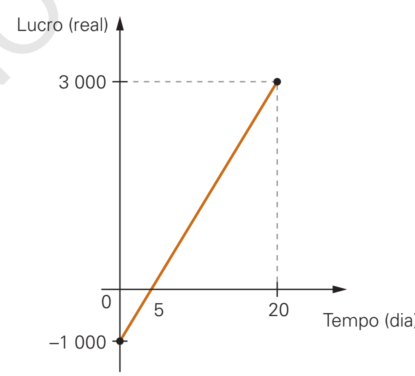
Assim, $T(48) = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{2} \cdot 48 + b = 0 \rightarrow -24 + b = 0 \rightarrow b = 24$.

Então, podemos calcular o valor da função da temperatura (T) quando se atinge −18 °C.

$T(t) = -18 \rightarrow -\dfrac{1}{2} \cdot t + 24 = -18 \rightarrow \dfrac{1}{2}t = 42 \rightarrow t = 84$, ou seja, 84 min.

3. Enem C6-H25

Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (f) é

a) $L(t) = 20t + 3000$
b) $L(t) = 20t + 4000$
c) $L(t) = 200t$
d) $L(t) = 200t - 1000$
e) $L(t) = 200t + 3000$

Para uma função afim $L(t) = a \cdot t + b$, podemos obter o valor de a calculando a variação do lucro pelo tempo no gráfico:

$a = \dfrac{1000}{5} \rightarrow a = 200$, ou seja, 200 reais/dia.

Temos também que $L(5) = 0$. Logo:

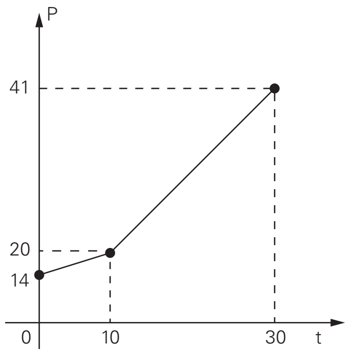
$L(5) = 200 \cdot 5 + b \rightarrow 200 \cdot 5 + b = 0 \rightarrow B = -1000$, ou seja, −1 000 reais.

Assim, $L(t) = 200t - 1\,000$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. EBMSP-BA



Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) o segmento populacional que mais tem aumentado no Brasil é o de idosos – pessoas com 60 anos ou mais. Em 2000, 14,2 milhões de brasileiros tinham 60 anos ou mais. Em 2010, eram 19,6 milhões e estima-se para 2030, 41,5 milhões. O gráfico foi esboçado, considerando-se uma aproximação do número de idosos P, em milhões, como função de t, em que t = 0, ..., 30 corresponde a 2000, ..., 2030, respectivamente. Com base no gráfico e considerando que em cada intervalo de tempo destacado na figura a razão de aumento dessa população é constante, pode-se afirmar que de 2000 a 2020 houve um aumento aproximado do número de idosos, em milhões, de

a) 24,5
b) 22,8
c) 20,4
d) 18,6
e) 16,5

A partir de $t = 10$, temos o coeficiente $a = \frac{41-20}{20} = \frac{21}{20}$. Logo, em 2020, ou seja, $t = 20$, temos um aumento de $10 \cdot \frac{21}{20} = 10{,}5$ milhões de idosos. Então, $P(20) = 20 + 10{,}5 \rightarrow P(20) = 30{,}5$. Assim, de 2000 a 2020 tivemos um aumento de $30{,}5 - 14 = 16{,}5 \rightarrow 16{,}5$ milhões de idosos.

5. Unicamp-SP (adaptada) – Em 14 de outubro de 2012, Felix Baumgartner quebrou o recorde de velocidade em queda livre. O salto foi monitorado oficialmente e os valores obtidos estão expressos de modo aproximado na **tabela** e no gráfico abaixo. Supondo que a velocidade continuasse variando de acordo com os dados da tabela, encontre o valor da velocidade, em km/h, no trigésimo segundo.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4
Velocidade (km/h)	0	35	70	105	140

Temos que a relação matemática da velocidade pelo tempo pode ser descrita por uma função linear $v(t) = 35 \cdot t$. Portanto, quando $t = 30$, temos que $v(30) = 35 \cdot 30 \rightarrow v(30) = 1050 \rightarrow 1050$ km/h.

6. FCM-PB – A equação $X = 3 + 2t$ é a função f(x) para a posição de um móvel adimensional no tempo **t**. Qual o instante no qual o móvel ocupa a posição de 20 metros e qual a posição desse móvel após 6 segundos respectivamente? Considere os valores da equação expressos em unidades do sistema internacional (SI).

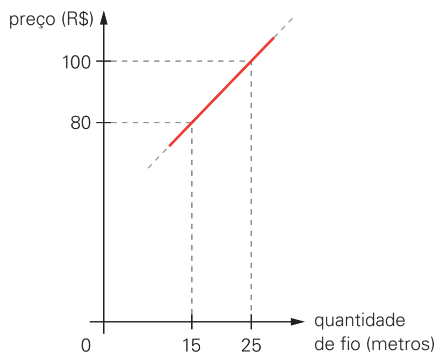
a) 3 segundos e 2 metros
b) 8,5 segundos e 15 metros
c) 2 segundos e 3 metros
d) 3 segundos e 6 metros
e) 3 segundos e 1,5 metros

Temos que calcular t e X dados $X = 20$ e $t = 6$, respectivamente.
Logo, $20 = 3 + 2t \rightarrow 2t = 17 \rightarrow t = \frac{17}{2} \rightarrow t = 8{,}5 \rightarrow 8{,}5$ s.
$X = 3 + 2 \cdot 6 \rightarrow X = 15 \rightarrow 15$ m

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. AFA-SP – Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contatou dois eletricistas.

O Sr. Luiz, que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:



Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento.

Com relação às informações acima, é correto afirmar que

a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00.
b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.
c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.
d) se forem gastos 20 m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

8. IFPE – Numa prova de Rally de regularidade competem 25 carros. Os carros partem da largada, um após o outro, com intervalo de 15 minutos entre eles. Se o primeiro carro partiu às 7 horas da manhã, a que horas partiu o último carro?

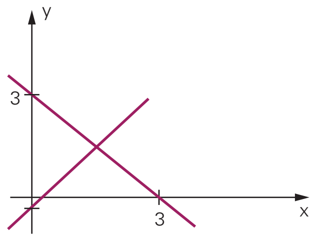
a) 13 horas
b) 13 horas e 15 minutos
c) 13 horas e 30 minutos
d) 13 horas e 45 minutos
e) 14 horas

9. Unemat-MT – Em um derramamento de óleo na Baía de Guernica, alguns cientistas constataram que a concentração de hidrocarbonetos na água aumenta a uma taxa de 750 ppm (partes por milhão) por dia.

Sabendo que no primeiro dia do derramamento a taxa de concentração era de 360 ppm, qual será a concentração de hidrocarbonetos na água 27 dias após o derramamento?

a) 10 470 ppm
b) 19 860 ppm
c) 21 360 ppm
d) 20 250 ppm
e) 20 610 ppm

10. Sistema Dom Bosco – Na figura a seguir, estão representadas funções f, g e o ponto A de intersecção de seus gráficos. f é definida por $y = -x + 3$ e abscissa de A é 2. Qual expressão algébrica define a função g?



11. UFGD-MS – Um provedor de acesso à internet disponibiliza dois planos (A e B) a seus clientes com a mesma velocidade. No Plano A, cobra uma assinatura mensal de R$ 15,00 mais R$ 0,05 para cada minuto de conexão durante o mês. O Plano B determina que o consumidor pagará uma quantia fixa mensal de R$ 40,00 mais R$ 0,02 a cada minuto de conexão. Com base nessas informações, pode-se dizer que:

a) o Plano A sempre será mais vantajoso que o Plano B.
b) para um consumidor que permanece conectado uma hora por dia, o Plano A é o mais indicado.
c) se o consumidor ficar conectado 85 horas por mês, não faz diferença em escolher o Plano A ou Plano B, pois pagaria o mesmo valor.
d) se um cliente permanecer menos de 900 minutos conectado por mês, sempre o Plano A será mais vantajoso.
e) se o cliente planeja ficar mais que 15 horas conectado, será melhor escolher o Plano B.

12. UFRN – Uma empresa de tecnologia desenvolveu um produto do qual, hoje, 60% das peças são fabricadas no Brasil, e o restante é importado de outros países. Para aumentar a participação brasileira, essa empresa investiu em pesquisa, e sua meta é, daqui a 10 anos, produzir no Brasil 85% das peças empregadas na confecção do produto.

Com base nesses dados e admitindo-se que essa porcentagem varie linearmente de acordo com o tempo, contado em anos, o percentual de peças brasileiras na fabricação desse será de 95% no ano de:

a) 2032
b) 2033
c) 2034
d) 2035
e) 2036

13. Famevaço-MG – Uma determinada máquina hospitalar sofre uma desvalorização no seu preço com o tempo. Se o seu preço de fábrica é de R$ 40.000,00 e supondo que, após 4 anos de uso, a máquina sofra uma desvalorização de R$ 8.000,00, qual será o seu valor depois de 8 anos de uso, considerando que a variação do preço com o tempo seja linear?

a) R$ 34.000,00
b) R$ 25.000,00
c) R$ 22.000,00
d) R$ 24.000,00

14. Sistema Bom Bosco – Para publicar uma revista, há um investimento inicial de R$ 100.000,00 e, depois um gasto de R$ 4,00 por exemplar. Calculando-se o número de exemplares se for custo R$ 200.000,00 e o custo por exemplar, numa tiragem de 5 000 exemplares, obtém-se, respectivamente:

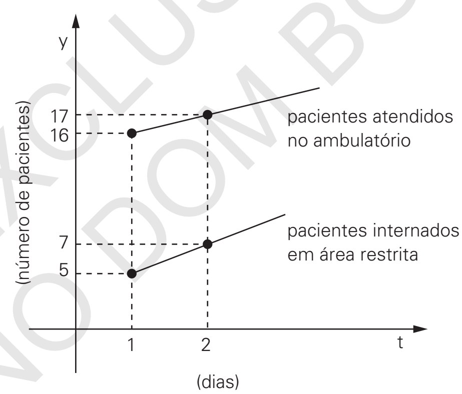
a) 50.000 e R$ 4,00
b) 50.000 e R$ 24,00
c) 25.000 e R$ 4,00
d) 25.000 e R$ 24,00

15. Unicamp-SP – O consumo mensal de água nas residências de uma pequena cidade é cobrado como se descreve a seguir. Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço é fixo e igual a 20 reais. Para um consumo superior, o preço é de 20 reais acrescidos de 4 reais por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos. Considere C(x) a função que associa o gasto mensal com o consumo de metros cúbicos de água.

a) Esboce o gráfico da função C(x) no plano cartesiano para x entre 0 e 30.

b) Para um consumo mensal de 4 metros cúbicos de água, qual é o preço efetivamente pago por metro cúbico? E para um consumo mensal de 25 metros cúbicos?

16. ESCS-DF (adaptada)



A figura acima apresenta os gráficos de duas funções do 1º grau que representam o número de pacientes atendidos no ambulatório de um hospital e o número de pacientes internados em uma área restrita, no primeiro e no segundo dias de observação. Considerando que essas funções representem os referidos números ao longo de 30 dias, em qual dia, a partir do primeiro dia, o número de pacientes atendidos no ambulatório será igual ao número de internados em área restrita?

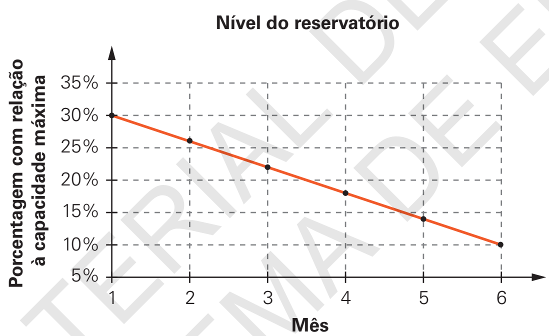
17. Sistema Dom Bosco – Seja A o ponto de interseção dos gráficos das funções reais $f(x) = 3x$ e $g(x) = 2x + 2$. Se B e C são, respectivamente, a interseção das funções com os eixos das abscissas, a área do triângulo ABC é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C6-H25

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio
b) 3 meses e meio
c) 1 mês e meio
d) 4 meses
e) 1 mês

19. Enem C5-H21

O gerente de um estacionamento, próximo a um grande aeroporto, sabe que um passageiro que utiliza seu carro nos traslados casa-aeroporto-casa gasta cerca de R$ 10,00 em combustível nesse trajeto. Ele sabe, também, que um passageiro que não utiliza seu carro nos traslados casa-aeroporto-casa gasta cerca de R$ 80,00 com transporte. Suponha que os passageiros que utilizam seus próprios veículos deixem seus carros nesse estacionamento por um período de dois dias. Para tornar atrativo a esses passageiros o uso do estacionamento, o valor, em real, cobrado por dia de estacionamento deve ser, no máximo, de

a) 35,00
b) 40,00
c) 45,00
d) 70,00
e) 90,00

20. Enem C5-H21

Uma empresa de entregas presta serviços para outras empresas que fabricam e vendem produtos. Os fabricantes dos produtos podem contratar um entre dois planos oferecidos pela empresa que faz as entregas. No plano A, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de R$ 500,00, além de uma tarifa de R$ 4,00 por cada quilograma enviado (para qualquer destino dentro da área de cobertura). No plano B, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de R$ 200,00, porém a tarifa por cada quilograma enviado sobe para R$ 6,00. Certo fabricante havia decidido contratar o plano A por um período de 6 meses. Contudo, ao perceber que ele precisará enviar apenas 650 quilogramas de mercadoria durante todo o período, ele resolveu contratar o plano B.

Qual alternativa avalia corretamente a decisão final do fabricante de contratar o plano B?

a) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 500,00 a menos do que o plano A custaria

b) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 1.500,00 a menos do que o plano A custaria

c) A decisão foi ruim para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 1.000,00 a mais do que o plano A custaria

d) A decisão foi ruim para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 1.300,00 a mais do que o plano A custaria

e) A decisão foi ruim para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R$ 6.000,00 a mais do que o plano A custaria

7

FUNÇÃO QUADRÁTICA, SEUS MÁXIMOS E MÍNIMOS

- Introdução
- Definição
- Gráfico da função
- Raízes da função
- Forma fatorada
- Vértice da parábola
- Conjunto imagem
- Pontos extremos
- Aplicações

HABILIDADES

- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

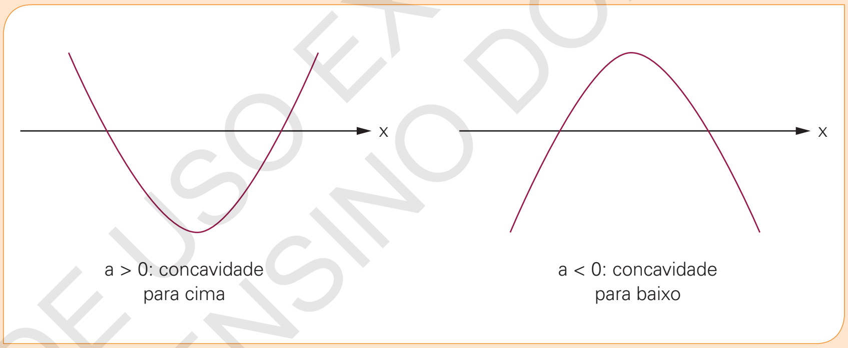
DEFINIÇÃO

Função quadrática ou função polinomial do 2º grau é uma função real que pode ser expressa por

$f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$.

GRÁFICO DA FUNÇÃO

No gráfico de uma parábola, a concavidade pode estar voltada para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$).



Exemplo:

Verifique se a parábola que representa cada função tem concavidade para cima ou para baixo.

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$
  Concavidade voltada para cima, pois ($a > 0$).
- $g(x) = -4x^2 + 4x + 1$
  Concavidade voltada para baixo, pois ($a < 0$).

RAÍZES DA FUNÇÃO

As raízes (ou zeros) da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são valores de x reais tais que $f(x) = 0$. Portanto, são soluções da equação do 2º grau. Ou seja, para encontrá-las, faz-se $ax^2 + bx + c = 0$, o que leva a uma equação do 2º grau.

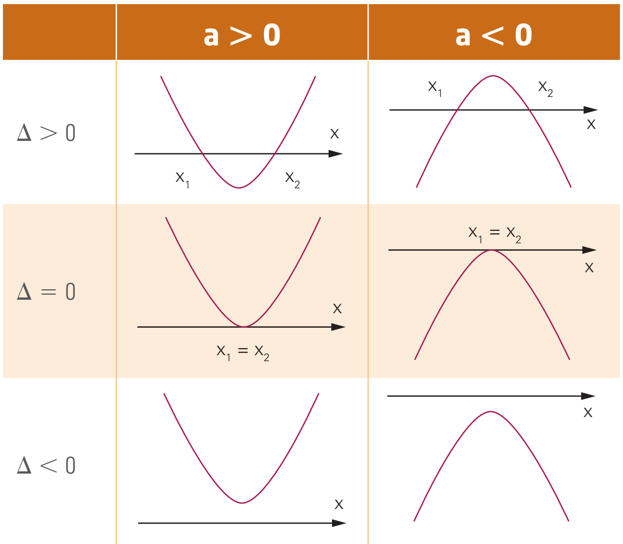
A resolução da equação do 2º grau pode ser feita com auxílio da chamada fórmula resolutiva de **Bhaskara:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Conforme o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, a interseção do gráfico com o eixo **x** pode ocorrer em apenas um ponto, em dois pontos pode ou não existir.

Significado geométrico das raízes

Interpretando geometricamente, diz-se que as raízes da função quadrática são os pontos em que a parábola corta o eixo das **abscissas**.



FORMA FATORADA

O trinômio $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado quando são conhecidas as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Dadas as raízes x_1 e x_2, podemos escrever:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Em muitos exercícios, será útil utilizar $f(x) =$
$= a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ no lugar de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplo:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$a = 1$, e as raízes são $x = 1$ e $x = 3$

$f(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$

Máximos e mínimos de uma função quadrática

Vértice da parábola

O **vértice** é um ponto do gráfico sobre o eixo de simetria, no qual a parábola inverte o sentido de crescimento, isto é, de **decrescente** para **crescente** ou vice-versa. Corresponde a um ponto especial do gráfico, pois, dependendo da concavidade da parábola, o vértice pode indicar o ponto mais "alto" do gráfico (concavidade para baixo) ou o mais "baixo" (concavidade para cima). No ponto máximo, diz-se que a função tem um valor **máximo.** No segundo caso, tem valor **mínimo**, conforme os gráficos a seguir.

Essa análise é de grande aplicabilidade, pois existem diversas situações reais em que precisamos encontrar extremos de uma função. Por exemplo: encontrar o máximo de lucro da venda de um produto em que seu lucro é descrito por uma função quadrática.

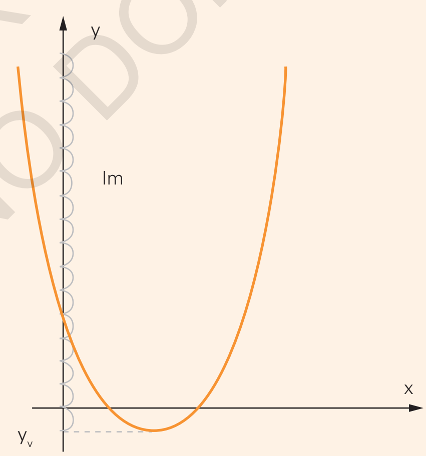
CÁLCULO DO VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA

Representando o vértice por $V(x_v, y_v)$ e sabendo que $y_v = f(x_v)$, tem-se $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Portanto, conhecendo y_v, obtém-se o **conjunto imagem**.

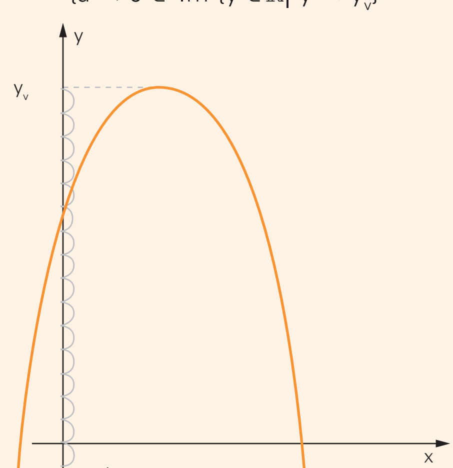
CONJUNTO IMAGEM

O conjunto imagem de uma função quadrática está associado ao ponto extremo, ou seja, à ordenada do vértice y_v:

$\{a \geq 0 \in \text{Im } \{y \in \mathbb{R} |\ y \geq y_v\}$

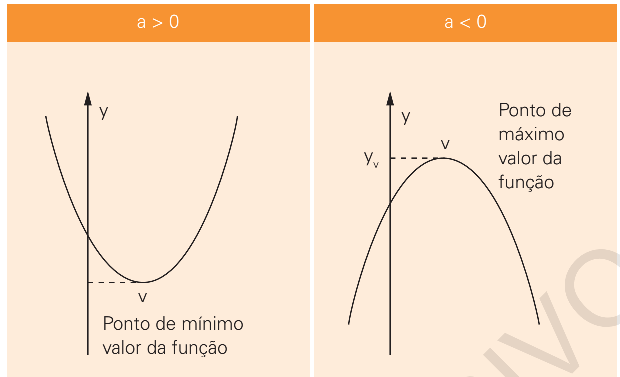


$\{a < 0 \in \text{Im } \{y \in \mathbb{R} |\ y \leq y_v\}$



Valores extremos

Quando a função quadrática tem concavidade para cima, ocorre um **valor mínimo (y_v).** Para baixo, tem-se **valor máximo (y_v).**



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. UFV-MG – A temperatura de uma estufa, em graus Celsius, é regulada em função do tempo t, de acordo com a lei f definida pela sentença $f(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t + 10$, sendo $t \geq 0$. É correto afirmar que:

a) a estufa nunca atinge zero grau.
b) a temperatura é sempre positiva.
c) a temperatura mais alta é atingida para $t = 2$.
d) o valor da temperatura máxima é 18 graus.
e) a temperatura é positiva só para $1 < t < 5$.

Resolução

A abscissa do vértice x_v é dada por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = \frac{-4}{-1} \rightarrow x_v = 4$$

Logo, $y_v = f(x_v) = f(4) = 18$

Portanto, o vértice da parábola fica no ponto V(4; 18).

Assim, temos que a temperatura máxima é de 18 graus.

ROTEIRO DE AULA

Função quadrática

Representação

Algébrica

y = $ax^2 + bx + c$
($a \neq 0$ e b; c $\in \mathbb{R}$)
Representação

Gráfica

Parábola

$a > 0$: Concavidade para cima

$a < 0$: Concavidade para baixo

Pontos de intersecção com eixo x

$\Delta > 0$: Dois pontos de intersecção.

$\Delta = 0$: um ponto de intersecção.

$\Delta < 0$: não há ponto de intersecção.

ROTEIRO DE AULA

VÉRTICE DA PARÁBOLA

Graficamente

Ponto V: $V\ (x_v; y_v)$

Concavidade para cima: ponto mais baixo.

Concavidade para baixo: ponto mais alto.

Algebricamente

$x_v = -\frac{b}{2a}$

$y_v = f(x)$

Raízes: x_1 e x_2

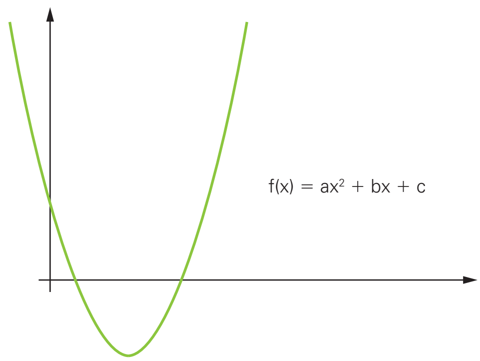
f(x): função que representa a parábola.

a > 0: y_v é o menor valor de y.

a < 0: y_v é o maior valor de y.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unisinos-SP – No gráfico abaixo, está representada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.



a) $a < 0$, $c > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
b) $a < 0$, $c < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
c) $a > 0$, $c < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
d) $a > 0$, $c > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
e) $a > 0$, $c > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

Analisando o gráfico, temos a concavidade voltada para cima (a . 0), intersecção com o eixo y positivo (c . 0) e duas raízes reais ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$).

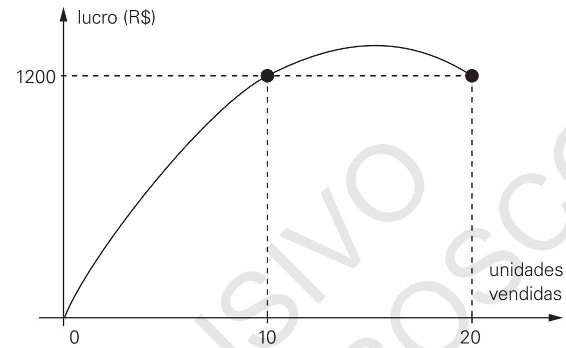
2. Faap-SP – Para que a parábola da equação $y = ax^2 + bx - 2$ contenha os pontos $(-3,1)$ e $(1,1)$, os valores de a e b são, respectivamente,

a) 1 e 2
b) 2 e 1
c) -2 e -1
d) 1 e $\frac{1}{2}$
e) -1 e -2

Temos no ponto $(-3,1)$:
$1 = a(-3)^2 + b(-3) - 2 \rightarrow 9a - 3b = 3 \rightarrow 3a - b = 1$
No ponto $(1,1)$:
$1 = a \cdot (1)^2 + b \times (1) - 2 \rightarrow a - b = 3$
Então, somando as duas equações:
$4a = 4 \rightarrow a = 1$
Como $a + b = 3 \rightarrow 1 + b = 3 \rightarrow b = 2$.

3. ESPM-SP C5-21

O lucro de uma pequena empresa é dado por uma função quadrática cujo gráfico está representado na figura abaixo:



Podemos concluir que o lucro máximo é de:

a) R$ 1.280,00
b) R$ 1.320,00
c) R$ 1.400,00
d) R$ 1.410,00
e) R$ 1.350,00

O lucro máximo é atingido no vértice da parábola.
A abscissa do vértice é dada pela média aritmética entre dois pontos simétricos, logo: $x_v = \frac{10 + 20}{2} = 15$
A parábola intercepta o eixo y na origem, ou seja, $c = 0$.
Logo, $f(x) = ax^2 + bx$
Nos pontos do gráfico:
$f(10) = 100a + 10b = 1\,200 \rightarrow 10a + b = 120$ (I)
$f(20) = 400a + 20b = 1\,200 \rightarrow 20a + b = 60$ (II)
Então fazendo (II) – (I), vem: $10a = -60 \rightarrow a = -6$
Assim, $b = 180$
Portanto, $y_v = f(x_v) = f(15) = -6 \cdot 225 + 180 \cdot 15 = 1\,350 \rightarrow$ R$ 1.350,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. CESUPA – O lucro de uma empresa é dado pela função $L(x) = -15x^2 + 180 - 300$, onde x representa o número de unidades vendidas. O valor de x para que o lucro seja máximo é

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

O lucro é máximo no vértice da parábola.

O valor de x para que o lucro seja máximo é x_v dado por:

$-\frac{b}{2a} = \frac{-180}{2 \cdot (-15)} = 6.$

5. UNESP – Uma função quadrática f é dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais. Se $f(1) = -1$ e $f(2) - f(3) = 1$, o menor valor que f(x) pode assumir, quando x varia no conjunto dos números reais, é igual a

a) –12
b) –6
c) –10
d) –5
e) –8

Do enunciado, temos:

$f(1) = 1^2 + b + c = 1 + b + c = -1 \rightarrow b + c = -2$

$f(2) = 2^2 + 2b + c = 4 + 2b + c$

$f(3) = 3^2 + 3b + c = 9 + 3b + c$

$f(2) - f(3) = -5 - b = 1 \rightarrow b = -6,\ c = 4 \rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 4$

O menor valor que a função pode assumir é o y_v.

$$y_v = \frac{-(6^2 - 4^2)}{4} = \frac{-(-36-16)}{4} = \frac{-20}{4} = -5\ .$$

6. UPE (adaptado) – Um professor de matemática apresentou a seguinte função quadrática para os seus alunos: $F_1(x) = x^2 - 2x + 1$. Em seguida, começou a alterar os valores do termo independente de x dessa função, obtendo três novas funções:

$F_2(x) = x^2 - 2x + 8;$

$F_3(x) = x^2 - 2x + 16;$

$F_4(x) = x^2 - 2x + 32.$

Sobre os gráficos de $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, em relação ao gráfico da função $F_1(x)$, é CORRETO afirmar que

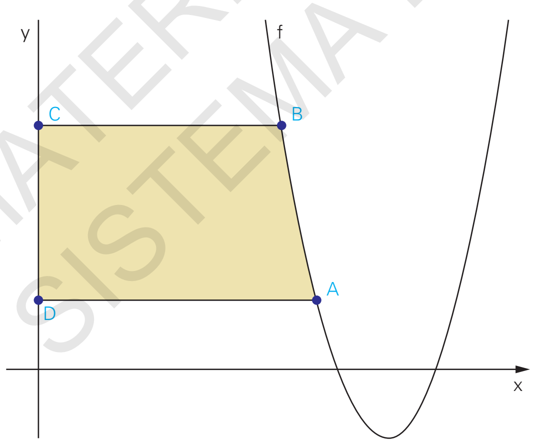
a) interceptarão o eixo "x" nos mesmos pontos.
b) interceptarão o eixo "y" nos mesmos pontos.
c) terão o mesmo conjunto imagem.
d) terão o mesmo "x" do vértice.
e) terão o mesmo "y" do vértice.

Como o valor da abscissa do vértice só depende dos coeficientes a e b = $\left(x_v = \frac{-b}{2a}\right)$ e todas as funções têm a = 1 e b = – 2

Portanto, todos os gráficos terão a mesma abscissa do vértice.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UPF-RS – Na figura, está representada, no referencial xy, parte do gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 20x + 98$. O ponto C tem ordenada 7 e o ponto A tem abscissa 8. Desprezando a curvatura da parábola e, assim, considerando o lado BC do trapézio retângulo ABCD como um segmento reto, a área desse trapézio é:



a) 48 unidades de área
b) 40 unidades de área
c) 37,5 unidades de área
d) 35,7 unidades de área
e) 35 unidades de área

8. Sistema Dom Bosco – Encontrar a função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos:

A(0, 1); B(21, 22) e C(22, 27).

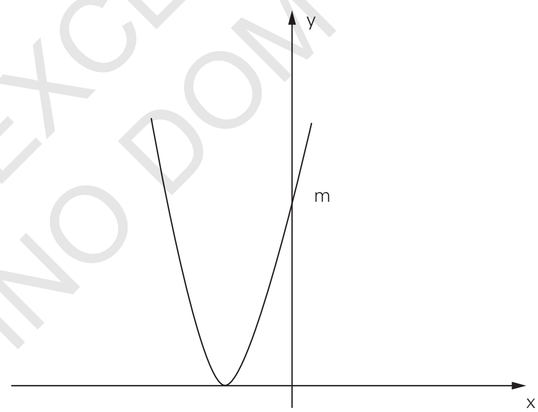
9. Sistema Dom Bosco – Os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = mx$ se encontram em um único ponto. Então, o valor de m é:

a) -1 ou 1
b) -2 ou 2
c) $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$
d) -3 ou 3
e) $-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$

10. Sistema Dom Bosco – A função $g(x) = ax^2 + bx + 3$ tem $g(1) = 9$ e $g(-1) = 1$. O valor de a − b é:

a) -6
b) -2
c) 1
d) 2
e) 4

11. Sistema Dom Bosco – Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + kx + (8 - k)$.



O valor de m é:

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 32

12. Sistema Dom Bosco – A parábola $y = x^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1,2) e seu vértice é o ponto (2,n). Pode-se afirmar que n é:

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2

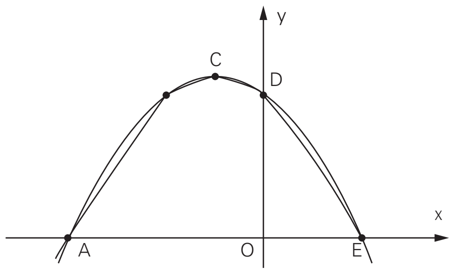
13. Fac. Albert Einstein-SP – Suponha que, em janeiro de 2016, um economista tenha afirmado que o valor da dívida externa do Brasil era de 30 bilhões de reais. Nessa ocasião, ele também previu que, a partir de então, o valor da dívida poderia ser estimado pela lei $D(x) = -x^2 + 18x + 30$ em que x é o número de anos contados a partir de janeiro de 2016 (x = 0). Se sua previsão for correta, o maior valor que a dívida atingirá, em bilhões de reais, e o ano em que isso ocorrerá, são, respectivamente,

a) 52 e 2020
b) 52 e 2018
c) 48 e 2020
d) 48 e 2018

14. ESPM-SP – O lucro (em reais) obtido com a produção e venda de x unidades de um certo produto é dado pela função $L = k \cdot (x + 10) \cdot (x - 50)$, onde k é uma constante negativa. Podemos avaliar que o maior lucro possível será obtido para x igual a:

a) 24
b) 22
c) 15
d) 20
e) 18

15. AFA-SP – No plano cartesiano abaixo estão representados o gráfico da função real f definida por $f(x) = -x^2 - x + + 2$ e o polígono ABCDE.



Considere que:

- o ponto C é vértice da função f;
- os pontos B e D possuem ordenadas iguais;
- as abscissas dos pontos A e E são raízes da função f.

Pode-se afirmar que a área do polígono ABCDE, em unidades de área, é

a) $8\frac{1}{16}$ **b)** $4\frac{1}{8}$ **c)** $4\frac{1}{4}$ **d)** $8\frac{1}{2}$

16. Sistema Dom Bosco – Dois números reais x e y são tais que $2x + y = 12$. O maior produto $x \cdot y$ é:

17. UECE – Sejam E e I os pontos onde o gráfico da função $f : R \rightarrow R$, definida por $f(x) = -x^2 + 9x - 18$ intercepta o eixo dos x. Se P(a,b) é o ponto do gráfico de f tal que os ângulos PÊI e PÎE são congruentes, então a abscissa a do ponto P é igual a:

a) 3,5 **b)** 4,5 **c)** 5,0 **d)** 5,5

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem (adaptada) C5-H21

Um posto de gasolina vende 10 000 litros de álcool por dia a R$ 3,15 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do litro foi R$ 3,13 foram vendidos 10 200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em reais, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a) $V = 30000 + 215x - x^2$
b) $V = 30000 + 215x + x^2$
c) $V = 31500 - 215x - x^2$
d) $V = 31500 + 215x - x^2$
e) $V = 31500 - 215x + x^2$

19. Enem C6-H26

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa **c)** média **e)** muito alta
b) baixa **d)** alta

20. UEG-GO C5-H21

A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10$, com x dado em horas.

A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de

a) 0 °C **c)** 12 °C **e)** 24 °C
b) 10 °C **d)** 22 °C

INEQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU, PRODUTO E QUOCIENTE

8

- Introdução a inequações
- Inequações do 1° e do 2° grau
- Inequações, produto e quociente

HABILIDADES

- Identificar geometricamente inequações do 1° e do 2° grau.
- Resolver inequações do 1° e do 2°grau.
- Avaliar resultados de situações-problema que envolvam inequações do 1° e do 2° grau.
- Resolver situação-problema que contemple medidas de grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Identificar geometricamente inequações produto e
- quociente.
- Resolver inequações produto e quociente.
- Avaliar resultados de situações-problema que envolvam inequações produto e quociente.
- Interpretar resultados obtidos na resolução de inequações produto e quociente.
- Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Introdução a inequações

Inequações são sentenças matemáticas, com uma ou mais incógnitas, representadas por desigualdades por meio de relações que não são de equivalência. Em sua estrutura, as inequações utilizam sinais de diferente ($\neq$), maior ($>$), menor ($<$), maior ou igual ($\geqslant$) ou menor ou igual ($\leqslant$).

Inequações do 1º grau

Denomina-se **inequação do 1° grau** toda desigualdade que pode ser escrita numa das formas a seguir, em que **x** é variável e **a** e **b** são constantes reais.

I. $a \cdot x + b \leqslant 0, a \neq 0$

II. $a \cdot x + b \geqslant 0, a \neq 0$

III. $a \cdot x + b < 0, a \neq 0$

IV. $a \cdot x + b > 0, a \neq 0$

V. $a \cdot x + b \neq 0, a \neq 0$

RESOLUÇÃO

O procedimento de resolução da inequação do 1º grau segue os mesmos caminhos da resolução da equação do 1º grau, respeitando-se evidentemente as propriedades das desigualdades.

Aplicando as propriedades enunciadas anteriormente, pode-se isolar **x** em qualquer uma delas.

Exemplo:

Tomando a primeira propriedade:

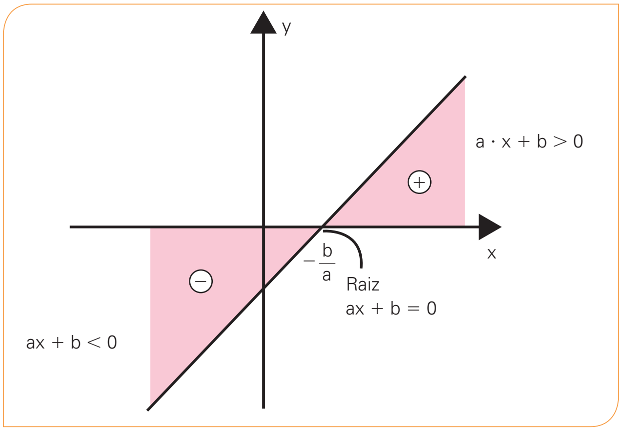
$$a \cdot x + b - b \leqslant 0 - b \leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a > 0 \\ x \geq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

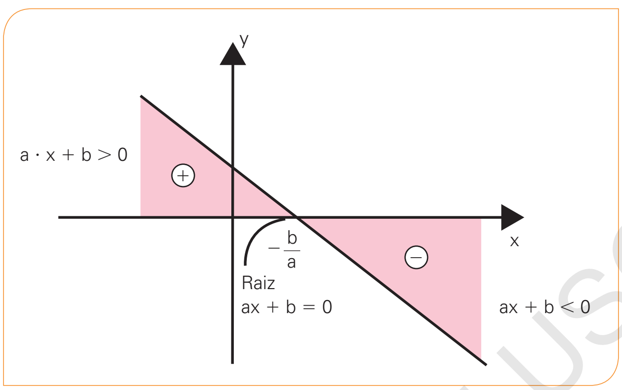
Solução: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a > 0\right\}$ e

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \dfrac{-b}{a} \text{ se } a < 0\right\}$$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E ANÁLISE DOS SINAIS DE UMA FUNÇÃO AFIM

Existem duas formas de interpretar a solução de uma inequação do 1º grau. Veja os esquemas.





Inequações do 2º grau

Denomina-se inequação do 2º grau toda desigualdade que pode ser escrita em uma das formas a seguir, em que x é variável e a, b e c são constantes reais.

I. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0,\ a \neq 0$
II. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0,\ a \neq 0$
III. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0,\ a \neq 0$
IV. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0,\ a \neq 0$
V. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \neq 0,\ a \neq 0$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E ANÁLISE DOS SINAIS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Para resolver inequações do 2º grau, recorre-se ao estudo do sinal de uma função quadrática,

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$

Para estudar a variação de sinal de uma função do 2º grau, basta conhecer a posição da concavidade da parábola, voltada para cima ou para baixo, e a existência e quantidade de raízes que ela apresenta.

Considere a função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \neq 0$, e observe a análise do sinal da função em cada caso de concavidade e valor de Δ.

	a > 0
$\Delta > 0$	$x < x_1$ ou $x > x_2 \rightarrow f(x) > 0$ $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) < 0$
$\Delta = 0$	$x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$ $x \neq x_1 \rightarrow f(x) > 0$
$\Delta < 0$	$f(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

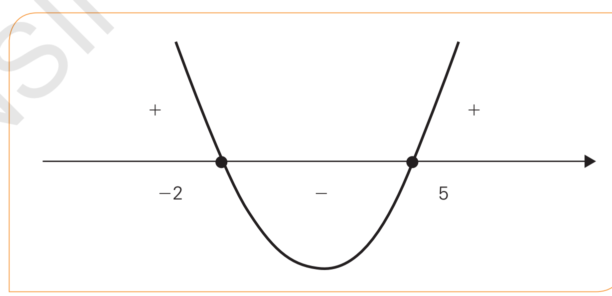
	a < 0
$\Delta > 0$	$x < x_1$ ou $x > x_2 \rightarrow f(x) < 0$ $x = x_1$ ou $x = x_2 \rightarrow f(x) = 0$ $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) > 0$
$\Delta = 0$	$x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$ $x \neq x_1 \rightarrow f(x) < 0$
$\Delta < 0$	$f(x) < 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Tomam-se como solução para a inequação regiões do eixo x que atenderam às exigências da desigualdade.

Exemplo:

Estude o sinal da função $f(x) = x^2 - 3 \cdot x - 10$.

As raízes de $x^2 - 3 \cdot x - 10 = 0$ são $x_1 = -2$ ou $x_2 = 5$.



Estudo do sinal:

- $x < -2$ ou $x > 5 \leftrightarrow f(x) > 0$
- $x = -2$ ou $x = 5 \leftrightarrow f(x) = 0$
- $-2 < x < 5 \leftrightarrow f(x) < 0$

Para resolver a inequação $x^2 - 3 \cdot x - 10 > 0$, utiliza-se o estudo do sinal da função que leva a imagem de f(x) a valores maiores que zero. Isto é, no exemplo anterior, valores de **x** são tais que $x < -2$ ou $x > 5$. Se, por outro lado, deseja resolver a inequação $x^2 - 3 \leq x - 10 \leq 0$, têm-se como solução valores de **x** tais que $-2 \leq x \leq 5$.

Observação: a simbologia de (+) ou (−) utilizada no esboço do gráfico anterior representa o sinal da imagem da função na região adotada e deve ser uma convenção usada para resolução dos demais exercícios. Não se devem confundir esses sinais com o sinal de domínio.

Inequações produto e quociente

INEQUAÇÃO PRODUTO

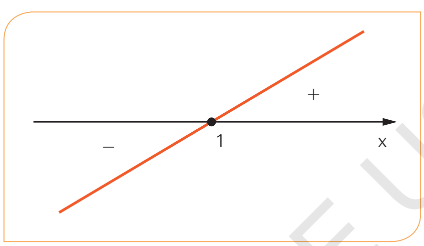
Desigualdade, que pode ser encontrada numa das formas a seguir, em que **x** é variável e **f(x)** e **g(x)** são sentenças matemáticas de funções reais.

I. $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$
II. $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$
III. $f(x) \cdot g(x) < 0$
IV. $f(x) \cdot g(x) > 0$

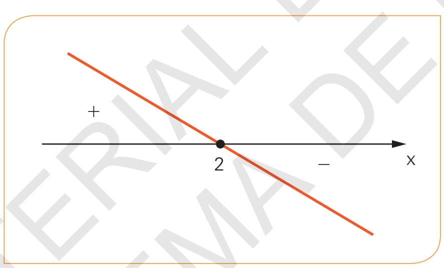
Após fatorar a expressão a ser analisada, podemos estudar cada um dos fatores e, em seguida, analisar o produto dos sinais.

Exemplo:
Resolva a inequação: $(x - 1) \cdot (2 - x) \geqslant 0$.

Resolução
Denominam-se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2 - x$.
O problema se resume a analisar $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.
Estudando o sinal de f(x) e g(x):
$f(x) = x - 1 \rightarrow$ raiz: $x = 1$
No gráfico:



$g(x) = 2 - x \rightarrow$ raiz: $x = 2$
No gráfico:



Com o resultado da análise dos sinais de f(x) e de g(x), é possível estudar o sinal do produto $f(x) \cdot g(x)$. Para isso, uma tabela tal qual a seguinte é muito útil:

f(x)	–	1	+		+
g(x)	+		+	2	–
x · g(x)	–		+		–
		1		2	

Pela tabela:

- f(x) é negativa para $x < 1$, é nula para $x = 1$ e é positiva para $x > 1$;
- g(x) é positiva para $x < 2$, é nula para $x = 2$ e é negativa para $x > 2$;
- $f(x) \cdot g(x)$ é negativa para $x < 1$ ou $x > 2$, é nula para $x = 1$ ou $x = 2$ e é positiva para $1 < x < 2$.

Com $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$, o intervalo que interessa é $1 \leqslant x \leqslant 2$. Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

INEQUAÇÃO QUOCIENTE

Desigualdade que pode ser encontrada numa das formas a seguir, em que **x** é variável e **f(x)** e **g(x)** são sentenças matemáticas de funções reais.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

A resolução de uma inequação quociente é semelhante à de inequação produto, pois a regra do sinal da divisão de dois termos é a mesma para o produto de dois fatores. Mas há uma observação importante no caso da inequação quociente: **nunca pode(m) ser usada(s) raiz(raízes) proveniente(s) do denominador.** O motivo é simples: não está definida no conjunto dos reais a divisão por zero.

Exemplo:
Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{x-1}{2-x} \geq 0$.

Resolução:
Denominam-se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2 - x$.

O problema se resume a analisar $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

Os sinais de f(x) e g(x) foram estudados no exemplo anterior. Com os sinais de f(x) e de g(x), efetua-se a análise do sinal do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$.

		1		2	
f(x)	–		+		+
g(x)	+		+	0	–
f(x)/ g(x)	–		+	∄	–
		1		2	

Pela representação geométrica dos intervalos, tem-se:

- f(x) é negativa para $x < 1$, é nula para $x = 1$ e é positiva para $x > 1$;
- g(x) é positiva para $x < 2$, é nula para $x = 2$ e é negativa para $x > 2$;
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ é negativa para $x < 1$ ou $x > 2$, é nula para $x = 1$, é positiva para $1 < x$, 2 e não está definida para $x = 2$.

Quando $1 \leqslant x < 2$, tem-se $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$. Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 2\}$. A raiz de g(x), que está no denominador, não foi utilizada.

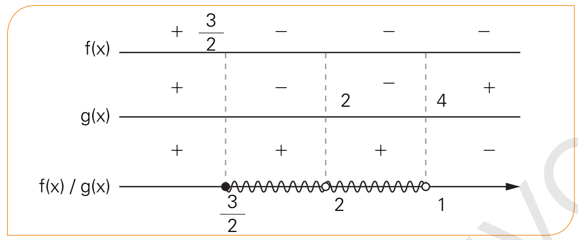
Exemplo

Resolva a inequação $\frac{-2x+3}{x^2-6x+8} \geq 0$.

Resolução:

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente, temos:

$f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 6x + 8$. As raízes de f são $x = \frac{3}{2}$, e as raízes de g são $x = 2$ e $x = 4$.



Vale ressaltar que o quadro de sinais é a análise dos sinais das funções f e g em torno do eixo x (raízes). Ao final do quadro de sinais (última linha), consta a solução da inequação quociente, ou seja, os valores de x tais que $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4 \text{ e } x \neq 2\}$. Note que a bola aberta em 2 e 4 indica que esses valores de x não podem ser solução, pois são raízes do denominador.

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO

Função afim:

$y = a \cdot x + b$

Inequação do 1º grau

Resolução: isolar a variável x ou analisar os sinais da função afim.

$a \cdot x + b \leqslant 0$

- $x \leqslant \frac{-b}{a}$ se $a > 0$
- $x \geqslant \frac{-b}{a}$ se $a < 0$

Função quadrática:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Inequação do 2º grau

Resolução: análise dos sinais da função quadrática.

$\Delta > 0$

- $a > 0$
  - $x < x_1$ ou $x < x_2 \rightarrow f(x) > 0$
  - $x = x_1$ ou $x = x_2 \rightarrow f(x) = 0$
  - $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) < 0$
- $a < 0$
  - $x < x_1$ ou $x > x_2 \rightarrow f(x) < 0$
  - $x = x_1$ ou $x = x_2 \rightarrow f(x) = 0$
  - $x_1 < x < x_2 \rightarrow f(x) > 0$

$\Delta = 0$

- $a > 0$
  - $x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$
  - $x \neq x_1 \rightarrow f(x) > 0$
- $a < 0$
  - $x = x_1 \rightarrow f(x) = 0$
  - $x \neq x_1 \rightarrow f(x) < 0$

$\Delta < 0$

- $a > 0$
  - $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $a < 0$
  - $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

ROTEIRO DE AULA

INEQUAÇÕES:

Desigualdades que podem ser encontradas numa das formas a seguir, em que x é variável e f(x) e g(x) são sentenças matemáticas de funções reais.

Produto

- $f(x) \cdot g(x)$ < 0
- $f(x) \cdot g(x)$ ⩾ 0
- $f(x) \cdot g(x))$ > 0
- $f(x) \cdot g(x)$ < 0
- $f(x) \cdot g(x)$ = 0

Para resolver, é preciso:

- analisar a variação de sinais de cada uma das funções;
- determinar a variação de sinais da operação indicada;
- selecionar os valores da variável que tornam a sentença verdadeira e apresentar a solução;
- seguir quadro de sinais.

Quociente

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ ⩽ 0
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ ⩾ 0
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ < 0
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ > 0
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ = 0

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. FGV-RJ – Quantos são os valores inteiros de x que satisfazem $-2 \leq 2x + 5 \leq 10$?

a) Infinitas
b) 6
c) 4
d) 7
e) 5

Temos que:
$-2 \leq 2x + 5 \leq 10$
$-2 - 5 \leq 2x \leq 10 - 5$
$-7 \leq 2x \leq 5$
$-3{,}5 \leq x \leq 2{,}5$
Portanto, os valores inteiros de x são {–3, –2, –1, 0, 1, 2}.

2. Acafe-SC (adaptado)

Uma pequena fábrica de tubos de plástico calcula a sua receita em milhares de reais, através da função $R(x) = 3{,}8x$, onde x representa o número de tubos vendidos. Sabendo que o custo para a produção do mesmo número de tubos é 40% da receita mais R$ 570,00. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de tubos de plástico que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

a) [240 ; 248]
b) [248 ; 260]
c) [252 ; 258]
d) [255 ; 260]
e) [257 ; 258]

Temos que a receita é $R(x) = 3{,}8x$ e o custo é
$C(x) = 0{,}4 \rightarrow R(x) + 570 = 0{,}4 \rightarrow 3{,}8x + 570 = 1{,}52x + 570$.
Para evitar prejuízo, devemos ter $R(x) \geq C(x)$.
Então: $3{,}8x \geq 1{,}52x + 570 \rightarrow 2{,}28x \geq 570$.
$x \geq 250$. Portanto, o número mínimo é 250.

3. UEMA C5-H21

Uma função consiste na associação de dois conjuntos A e B de números reais, por meio de uma lei f. O subconjunto dos elementos de A que corresponde a um, e somente um, elemento de B é denominado domínio da função D(f).

Considerando que a expressão $f(X) = \sqrt{\dfrac{(2x^2-8)(x^2+x-6)}{x^2+2x-3}}$ é uma função, determine o domínio de f(x).

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1;\ x \leq -2 \text{ e } x \neq -3\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1;\ x < -2 \text{ e } x \neq -3\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1;\ x \geq -2 \text{ e } x = -3\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1;\ x \leq -2 \text{ e } x = -3\}$
e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1;\ x > -2 \text{ e } x \neq -3\}$

Manipulando a função $f(X) = \sqrt{\dfrac{(2x^2-8)(x^2+x-6)}{x^2+2x-3}}$, temos:

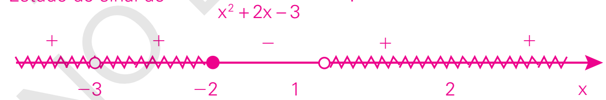
$\dfrac{(2x^2-8)\cdot(x^2+x-6)}{x^2+2x-3} \geq 0$

Condição de existência:
$x^2+2x-3 \neq 0$

$x \neq -3$ ou $x \neq 1$

Raízes:
$2x^2-8=0 \rightarrow x=2$ ou $x=-2$
$x^2+x-6=0 \rightarrow x=-3$ ou $x=2$

Estudo do sinal de $\dfrac{(2x^2-8)\cdot(x^2+x-6)}{x^2+2x-3}$:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1; x \leq -2 \text{ e } x \neq -3\}$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. PUC-RJ – Determine para quais valores reais de x vale cada uma das desigualdades abaixo:

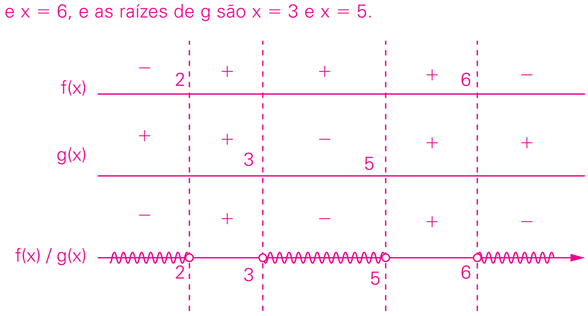
a) $\dfrac{1}{x^2-8x+15} < 0$ **b)** $\dfrac{1}{x^2-8x+15} < \dfrac{1}{3}$

a) Como o numerador é positivo e o quociente é negativo, concluímos que o denominador é negativo: Então: $x^2 - 8x + 15 < 0$. Analisando os sinais de $y = x^2 - 8x + 15 < 0$ em torno do eixo x, temos que $3 < x < 5$.

b) Manipulando a inequação $\dfrac{1}{x^2-8x+15} < \dfrac{1}{3}$, obtemos:

$\dfrac{1}{x^2-8x+15} < \dfrac{1}{3} \rightarrow \dfrac{1}{x^2-8x+15} - \dfrac{1}{3} < 0 \rightarrow \dfrac{-x^2+8x-12}{3\cdot(x^2-8x+15)} < 0$

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente, temos:
$f(x) = -x^2 + 8x - 12$ e $g(x) = (x^2 - 8x + 15)$. As raízes de f são $x = 2$ e $x = 6$, e as raízes de g são $x = 3$ e $x = 5$.

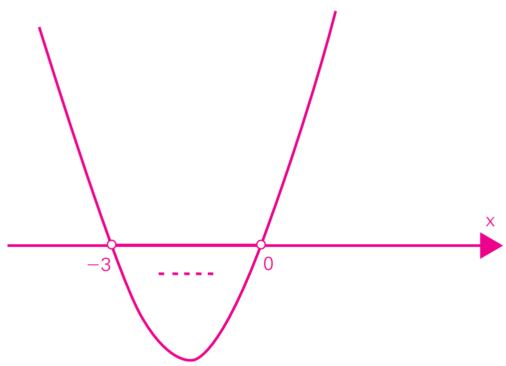


Logo, $x < 2$ ou $3 < x < 5$ ou $x > 6$ são os valores quando $\dfrac{1}{x^2-8x+15} < \dfrac{1}{3}$.

5. PUC-RJ – Considere as funções reais f (x) = x² + 4x e g(x) = x. Qual é o maior inteiro para o qual vale a desigualdade f (x) < g(x)?

a) –3
b) –1
c) 0
d) 3
e) 4

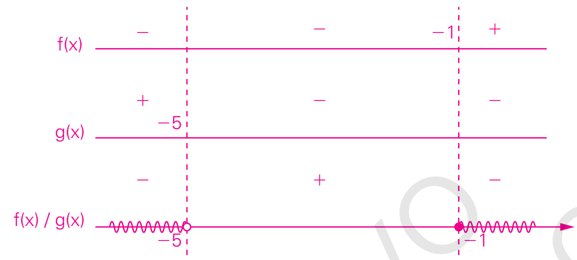
Temos que:
$x^2 + 4x < x$
$x^2 + 4x - x < 0$
$x^2 + 3x < 0$
Sendo $y = x^2 + 3x$, as raízes dessa função são x = 0 e x = −3. Esboçando o gráfico da função em torno das raízes, temos:



Portanto, y < 0 se −3 < x < 0.
O maior valor inteiro é −1.

6. PUC-RJ (adaptado) – Considere a inequação $\frac{x+1}{-x-5} \le 0$, com $x \in \mathbb{R}$. Qual é o conjunto solução da inequação?

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente do enunciado, obtemos:

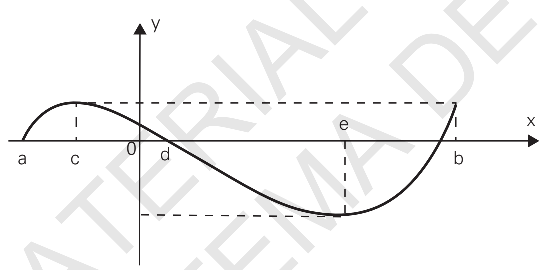


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x \geq -1\}$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Espcex-SP – Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real [a,b].

Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:



desenho ilustrativo – fora de escala

a) f é crescente no intervalo [a,0]
b) f(x) ≤ f(e) para todo x no intervalo [d, b]
c) f(x) ≤ 0 para todo x no intervalo [c, 0]
d) a função f é decrescente no intervalo [c, e]
e) se $x_1 \in [a, c]$ e $x_2 \in [d, e]$ então $f(x_1) < f(x_2)$

8. PUC-RJ – Sejam as funções f(x) = x² − 6x e g(x) = 2x − 12. O produto dos valores inteiros de x que satisfazem a desigualdade f(x) < g(x) é:

a) 8
b) 12
c) 60
d) 72
e) 720

9. UEG-GO – O conjunto imagem da função real $y = -2x^2 + 3x - 4$ são os valores reais de y tal que

a) $y > 2{,}875$
b) $y > -2{,}875$
c) $y < 2{,}875$
d) $y < -2{,}875$

10. Sistema Dom Bosco – O conjunto solução da inequação $ax + b < 0$ é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$. Pode-se afirmar que:

a) $a < 0$ e $b < 0$
b) $a < 0$ e $b > 0$
c) $a > 0$ e $b < 0$
d) $a > 0$ e $b > 0$
e) $a \cdot b < 0$

11. Sistema Dom Bosco – Todos os possíveis valores de m que satisfazem a desigualdade $2x^2 - 20x + 2m > 0$, para todo x pertencente ao conjunto dos reais, são dados por:

a) $m < 5$
b) $m > 10$
c) $m > 25$
d) $m < 30$
e) $m > 30$

12. UEPB – Com relação ao número de soluções inteiras da equação $\frac{(5 - x^2)(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} > 0$, podemos garantir que existem:

a) infinitas
b) quatro
c) três
d) seis
e) duas

13. Mackenzie-SP – A função $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio o conjunto solução:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } 1 \leqslant x < 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < -1 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

14. UFMG (adaptada) – Há várias regras para se determinar, com base na dose recomendada para adultos, a dose de um medicamento a ser ministrada a crianças. Analise estas duas fórmulas:

Regra de Young: $c=\dfrac{x}{x+12}a$

Regra de Cowling: $c=\dfrac{x+1}{24}a$

em que:

- x é a idade da criança, em anos;
- a é a dose do medicamento, em cm^3, para adultos; e
- c é a dose do medicamento, em cm^3, para crianças.

Considerando essas informações e sabendo que as duas regras são aplicadas no cálculo de doses para crianças entre 2 e 13 anos de idade, determine os valores de x para os quais a regra de Young leva a uma dose maior que a regra de Cowling.

15. Univag-MT – Considere as funções reais dadas pelas leis $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 2$. O conjunto solução da inequação $f(x) > f(g(x))$ é dado por

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

16. IME-RJ – O sistema de inequações abaixo admite k soluções inteiras $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-14}{x} > 3 \\ x \leq 12 \end{cases}$. Pode-se afirmar que:

a) $0 \leqslant k < 2$
b) $2 \leqslant k < 4$
c) $4 \leqslant k < 6$
d) $6 \leqslant k < 8$
e) $k \geqslant 8$

17. Col. Naval-RJ – Seja S a soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação $\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \leq 0$. Sendo assim, pode-se afirmar que

a) S é um número divisível por 7.
b) S é um número primo.
c) S^2 é divisível por 5.
d) $\sqrt{S}$ é um número racional.
e) 3S + 1 é um número ímpar.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação q = 400 − 100p, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 ≤ p < R$ 1,50
b) R$ 1,50 ≤ p < R$ 2,50
c) R$ 2,50 ≤ p < R$ 3,50
d) R$ 3,50 ≤ p < R$ 4,50
e) R$ 4,50 ≤ p < R$ 5,50

19. FGV-SP C5-H21

Um importante conceito usado em economia para analisar o quanto uma variação do preço unitário $p > 0$ influencia na variação da receita é o de elasticidade da demanda, denotado por $E(p)$, uma vez que a elasticidade E é dada em função de p. Se $E(p) > 1$, então se diz que a demanda é elástica, o que quer dizer que um pequeno aumento do preço unitário resulta em uma diminuição da receita, ao passo que um pequeno decréscimo do preço unitário irá causar um aumento da receita. Admitindo-se a elasticidade da demanda dada por $E(p) = \dfrac{-p^2 - 2p^2 + 1}{-49 + 1}$, então o intervalo de p para o qual a demanda é elástica é:

a) $\left]0; \dfrac{1}{4}\right[\cup \left]1 + \sqrt{2}; +\infty\right[$

b) $]\dfrac{1}{8}; 2[$

c) $]0; 2[$

d) $\left]0; \dfrac{1}{4}\right[\cup]2; +\infty[$

e) $\left]\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$

20. UPE C5-H21

Antônio foi ao banco conversar com seu gerente sobre investimentos. Ele tem um capital inicial de R$ 2.500,00 e deseja saber depois de quanto tempo de investimento esse capital, aplicado a juros compostos, dobrando todo ano, passa a ser maior que R$ 40.000,00. Qual a resposta dada por seu gerente?

a) 1,5 anos

b) 2 anos

c) 3 anos

d) 4 anos

e) 5 anos

9

FUNÇÃO COMPOSTA

- Introdução
- Definição
- Notação
- Determinação da função composta

HABILIDADES

- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Introdução

Uma função é uma relação entre os elementos de um conjunto (chamado **domínio**) e um único elemento de outro conjunto (chamado **contradomínio)**.

Em um caso particular, pode haver duas funções **f** e **g**, em que o domínio da função **g** é o contradomínio da função **f**.

Por exemplo, em uma conta de telefone de uma família, cada pessoa faz em média 4 ligações por dia, sendo o custo de cada uma de aproximadamente R$ 0,70.

Ao analisarmos matematicamente essa situação, temos que a quantidade de ligações (**y**) está em função da quantidade de pessoas **(x**) que utilizam o telefone diariamente. Como cada uma faz em média 4 ligações:

$$y = f(x) = 4x$$

Portanto, o preço das ligações (**z**) está em função da quantidade de ligações (**y**) feitas por dia. Como o preço de cada ligação é R$ 0,70:

$$z = g(y) = 0{,}70y.$$

Com base nessas informações, podemos relacionar diretamente o preço das ligações (**z**) ao número de pessoas (**x**) que utilizam o telefone nessa casa.

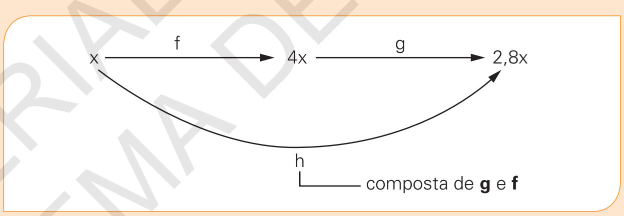
Para isso, devemos fazer uma composição entre as duas funções.

Considerando $y = 4x$ e $z = 0{,}70y$, ao substituirmos $4x$ no lugar de **y** na função **z**, temos:

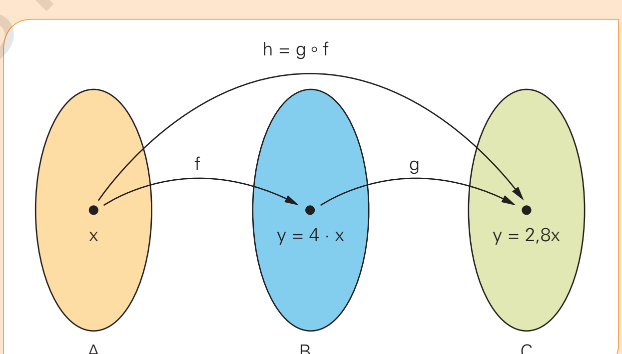
$$z = h(x) = 0{,}70 \cdot 4x,$$

Ou seja:

$$z = h(x) = 2{,}8 \cdot x.$$



Assim, obtemos a função **h**, chamada **função composta de g com** f, a qual pode ser identificada por $g \circ f$.



Portanto, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in D(f)$.

Também podemos obter quantas funções compostas forem necessárias. Se tivermos **n** funções **f**, podemos definir $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ etc. Assim: $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n vezes).

Temos então que f° é a identidade da função em seu domínio.

$$f^1 = f$$
$$f^2 = f \circ f$$
$$\vdots$$
$$f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f \text{ (n vezes).}$$

Com isso, podemos estabelecer a relação
$$f^n \circ f^m = f^{n+m}.$$

Definição

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, denomina-se **função composta de g e f** a função $g \circ f: A \to C$, que é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, em que $x \in A$.

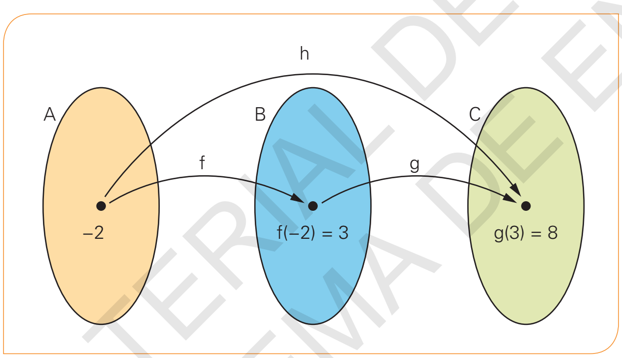
Exemplo:

Vamos considerar duas funções reais, definidas pelas sentenças $f(x) = 2x + 7$ e $g(x) = x^2 - 1$. Podemos determinar a imagem do elemento -2 usando a sentença $f(x)$ da seguinte maneira: $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 7 = 3$.

Pelo uso da sentença $g(x)$, temos que $g(3) = 3^2 - 1 = 8$.

Assim: $g(3) = g[f(-2)] = 8$.

A função composta de **f** e **g** é uma sentença **h** capaz de diretamente conduzir o elemento -2 até a imagem 8.



Só podemos compor as funções **g** com **f** se o conjunto da imagem **f** for o domínio da função **g** ($Im(f) = D(g)$).

Notação

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Para exemplificar a determinação da função composta, utilizamos as funções já apresentadas:

$$f(x) = 2x + 7 \text{ e } g(x) = x^2 - 1$$

Assim:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x)^2 - 1 = (2x + 7)^2 - 1 =$$
$$= 4x^2 + 28x + 49 - 1$$
$$g \circ f(x) = 4x^2 + 28x + 48$$

Aproveitando as duas funções e tendo-as como exemplo de determinação da sentença que representa a composição delas, vamos determinar a sentença $f \cdot g(x)$.

Assim:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = 2g(x) + 7 = 2(x^2 - 1) + 7 =$$
$$= 2x^2 - 2 + 7$$
$$f \circ g(x) = 2x^2 + 5$$

Se houver uma terceira função **h**, dada por $h(x) = x + 1$, podemos calcular a composta:

$$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 1)) =$$
$$= f((x + 1)^2 - 1) = f(x^2 + 2x + 1 - 1) = f(x^2 + 2x) =$$
$$= 2(x^2 + 2x) + 7 = 2x^2 + 4x + 7$$

Ou, como $f \circ g(x) = 2x^2 + 5$, temos:

$$f \circ g(h(x)) = 2(x + 1)^2 + 5 = 2x^2 + 4x + 2 + 5 =$$
$$= 2x^2 + 4x + 7.$$

Comparando os dois exemplos de composição de funções, notamos que ela não admite a **propriedade comutativa**. Ou seja, em geral:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Cefet-PR – Se $f(x) = x^5$ e $g(x) = x - 1$, a função composta $f[g(x)]$, será igual a:

a) $x^5 + x - 1$
b) $x^6 - x^5$
c) $x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 5x^2 - 5x + 1$
d) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
e) $x^5 - 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 - 5x - 1$

Resolução:

Fazendo f composta em g, temos:

$f[g(x)] = (x - 1)^5$

Assim:

$f[g(x)] = (x - 1)^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 1)$

$f[g(x)] = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 1)$

$f[g(x)] = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1)$

$f[g(x)] = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO COMPOSTA

Definição

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, denominamos função composta de g e f a função $g \circ f =$ g[f(x)], em que $x \in$ A

Notação

$g \circ f =$ g[f(x)]

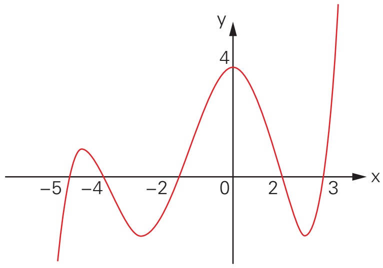
FUNÇÃO COMPOSTA

Em geral, $g \circ f$ ≠ $f \circ g(x)$

Só é possível compor as funções g com f se o conjunto imagem f for o domínio da função g

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPF-SC – Considere a função real g, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo g ∘ g a função composta de g com g, então o valor de g ∘ g(−2) é:



a) 0
b) 4
c) 2
d) −2
e) −5

Temos que $g \circ g(-2) = g(g(-2))$.
Mas $g(-2) = 0$.
Então, $g(g(-2)) = g(0) = 4$.

2. Unifenas-MG – Sejam $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = 2x$, onde $x \in \mathbb{R}$. Encontre $g \circ f(5)$.

a) 56
b) 65
c) 70
d) 75
e) 87

Temos que $g \circ f(5) = g(f(5)) = g(25 + 3) = g(28) = 2 \cdot 28 = 56$.

3. UPF-RS C5-H21

Um estudo das condições ambientais de um município do Rio Grande do Sul indica que a taxa média de monóxido de carbono (CO) no ar será de $C(P) = 0{,}2P - 1$ partes por milhão (ppm) quando a população for P milhares de habitantes. Sabe-se que em t anos, a população desse município será dada pela relação $P(t) = 50 + 0{,}5t^2$. O nível de monóxido de carbono, em função do tempo t, é dado por

a) $C(t) = 9 + 0{,}01t^2$
b) $C(t) = 0{,}2(49 + 0{,}05t^2)$
c) $C(t) = 9 + 0{,}05t^2$
d) $C(t) = 0{,}1(1 + 0{,}05t^2) - 1$
e) $C(t) = 10 + 0{,}951t^2$

De acordo com o enunciado, temos:
$C(P) = 0{,}2P - 1$
$P(t) = 50 + 0{,}5t^2$
Assim:
$C(t) = 0{,}2 \cdot (49 + 0{,}05t^2)$
$C(t) = 10 + 0{,}01t^2 - 1$
$(t) = 9 + 0{,}01t^2$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos

4. Unicamp-SP – Considere a função afim $f(x) = ax + b$ definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que $f(4) = 2$, podemos afirmar que $f(f(3) + f(5))$ é igual a

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

Como $f(4) = 2$, temos que $4a + b = 2$.
Assim, $f(3) = 3a + b$ e $f(5) = 5a + b$.
Logo, $f(3) + f(5) = 3a + b + 5a + b = 8a + 2b = 2 \cdot (4a + b) = 2 \cdot 2 = 4$.
Então, $f(f(3) + f(5)) = f(4) = 2$.

5. PUC-SP – Considere as funções $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + b$ e $g(x) = x + k$, com b e k, números reais. Sabendo que $f(g(-5)) = g(-2)$ e que $g(f(-2)) = 12$, o valor de $f(-4)$ é igual a

a) $g(g(0))$
b) $f(g(-3))$
c) $2f(2)$
d) $5 + g(1)$

Temos que $g(-5) = k - 5$. Logo, $f(g(-5)) = f(k-5) = \dfrac{(k-5)^2}{2} + b = k - 2 = g(-2)$ (1).

Temos também que $g(f(-2)) = g\left(\dfrac{4}{2} + b\right) = g(b + 2) = b + k + 2 = 12$.

Assim, $b + k = 10 \rightarrow b = 10 - k$.
Substituindo na equação (1):

$$\frac{(k-5)^2}{2} + 10 - k = k - 2$$

$$\frac{(k-5)^2}{2} = 2k - 12$$

$k^2 - 10k + 25 = 4k - 24$
$k^2 - 14k + 49 = 0$
Resolvendo a equação, temos: $k = 7 \rightarrow b = 3$

Então, $f(-4) = \dfrac{16}{2} + 3 = 11 = f(g(-3))$.

6. UFPR – O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por $N(t) = 20 \cdot t - t^2$, sendo que $0 \le t \le 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por $C(N) = 50 + 30 \cdot N$.

a) Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora.

b) Em que instante t, de um dia de produção, o custo alcançará o valor de 2 300 milhares de reais?

a) $C \circ N(t) = C(N(t)) = 50 + 30N(t) = 50 + 30(20t - t^2) = 50 + 600t - 30t^2$
$C(t) = -30t^2 + 600t + 50$.

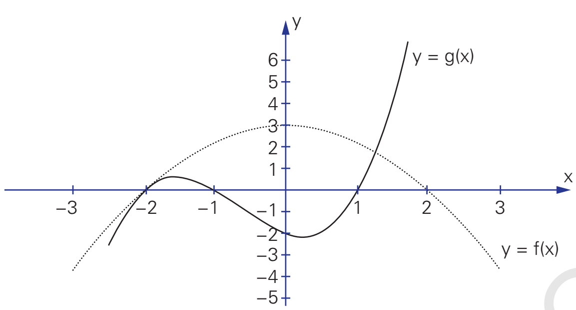
b) $C(t) = 2\,300 \rightarrow -30t^2 + 600t + 50 = 2\,300$
$-3t^2 + 60t + 5 = 230$
$-3t^2 + 60t - 225 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos: $t = 15$ ou $t = 5$

Como $0 \le t \le 10$, temos que $t = 5$ horas.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEG-GO – O gráfico das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ é mostrado na figura a seguir.



De acordo com o gráfico, verifica-se que o valor de $g(f(2)) + f(g(0))$ é

a) -2 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 3

8. Unicamp-SP (adaptado) – Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. Calcule o número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$.

9. UEM-PR – Em relação às funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 + x - 1$ e $g(x) = 2^x$ para todo x real, assinale o que for **correto**.

01) A função g é injetora.

02) Para todo x real, $(g \circ f)(x) \ge \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

04) $(f \circ g)(x) = 2^{2x} + 2^x - 1$, para todo x real.

08) $f(-1) = -3$.

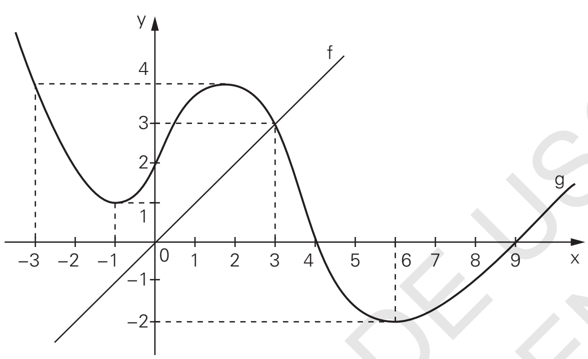
16) $g(-2) = -4$.

10. Unicamp-SP – Seja a um número real positivo e considere as funções afins $f(x) = ax + 3a$ e $g(x) = 9 - 2x$, definidas para todo número real x.

a) Encontre o número de soluções inteiras da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

b) Encontre o valor de a tal que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo número real x.

11. AFA-SP – Considere as funções reais $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados abaixo.



Sobre essas funções, é correto afirmar que

a) $\forall x \in [0, 4]$, $g(x) - f(x) > 0$.

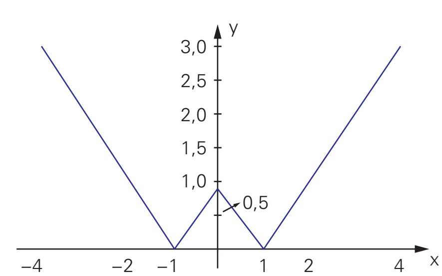
b) $f(g(0)) - g(f(0)) > 0$.

c) $\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} \leq 0$, $\forall x \in \,]-\infty, 0[\cup [4, 9]$.

d) $\forall x \in [0, 3]$ tem-se $g(x) \in [2, 3]$.

12. ITA-SP – Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, em que α é uma constante real positiva, e $g: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$.

13. PUC-PR – Considere os seguintes dados. Pode-se dizer que quando duas variáveis x e y são tais que a cada valor de x corresponde um único valor de y, segundo uma lei matemática, diz-se que y é função de x. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ que é representada pelo gráfico ao lado.



Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir.

I. f é ímpar.

II. f é injetora.

III. A lei matemática de f é $f(x) = ||x| - 1|$.

IV. f é crescente se, e só se, $x > 1$.

V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

a) Somente II é correta.

b) Somente I é correta.
c) Somente III e V são corretas.
d) Todas as proposições são corretas.
e) Todas as proposições são falsas.

14. UFGD-MS – Sendo $f(x) = ax + b$, para quais valores de a e b tem-se $(f \circ f)(x) = x - 3$?

a) $a = 1$ e $b = -\frac{3}{2}$
b) $a = -1$ e $b = 0$
c) $a = -1$ e $b = -\frac{3}{2}$
d) $a = 1$ e $b = -1$
e) $a = 0$ e $b = -1$

15. Sistema Dom Bosco – Sejam as funções $f(x) = 4x^2 + 5$, $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = x - 4$, com $x \in$. Calcule o valor de $f \circ g \circ h(6)$.

16. Unioeste-PR – Considere as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$. É correto afirmar que

a) $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) o gráfico de $f(g(x))$ não intercepta o gráfico de $g(f(x))$.
c) $g(f(x)) = 8x^2 + 20x + 13$.
d) $f(g(x)) = 2x^2 + 4$.
e) o domínio da função $h(x) = f(g(x))$ é o conjunto $(0, \infty)$.

17. Unicamp-SP – Seja a função h(x) definida para todo número real x por

$$h(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{se} \quad x \leq 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Então, $h(h(h(0)))$ é igual a

a) 0. **b)** 2. **c)** 4. **d)** 8.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C5-H21

Em uma empresa são consumidos, em média, 15 copinhos de plástico por pessoa em um mês, e cada copinho custa R$ 0,05. Considerando **y** o número de copinhos, **p** o número de pessoas e **v** o valor gasto, a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente o valor gasto em função do número de pessoas é

a) $v = 0{,}075 \cdot p$
b) $v = 0{,}75 \cdot p$
c) $v = 300 \cdot p$
d) $v = 3{,}00 \cdot p$
e) $v = 7{,}5 \cdot p$

19. Sistema Dom Bosco C5-H21

Uma fábrica de produtos químicos produz um composto que possui uma quantidade média de cloreto de sódio que pode ser descrita por $\mathbf{c(v) = 0{,}5v + 2}$ partes por milhão, em que v representa o volume do composto produzido. O volume total produzido por dia nessa fábrica é de $\mathbf{v(t) = 0{,}2t^2 + 5}$. A função que expressa a quantidade média de cloreto de sódio no composto em função do tempo é

a) $c(t) = 0{,}1t^2 + 1$
b) $c(t) = 0{,}02t^2$
c) $c(t) = 0{,}01t^2 + \frac{9}{2}$
d) $c(t) = 0{,}01^2 + 9$
e) $c(t) = 0{,}01t^2$

20. UFSM-RS C5-H22

Os praticantes de exercícios físicos se preocupam com o conforto dos calçados utilizados em cada modalidade. O mais comum é o tênis, que é utilizado em corridas, caminhadas, etc. A numeração para esses calçados é diferente em vários países, porém existe uma forma para converter essa numeração de acordo com os tamanhos.

Assim, a função $g(x) = \frac{x}{6}$ converte a numeração dos tênis fabricados no Brasil para a dos tênis fabricados nos Estados Unidos, e a função $f(x) = 40x + 1$ converte a numeração dos tênis fabricados nos Estados Unidos para a dos tênis fabricados na Coreia. A função h que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é

a) $h(x) = \frac{20}{3}x + \frac{1}{6}$.
b) $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$.
c) $h(x) = \frac{20}{3}x + 1$.
d) $h(x) = \frac{20x + 1}{3}$.
e) $h(x) = \frac{2x + 1}{3}$.

10

FUNÇÃO MODULAR

DEFINIÇÃO

A distância de um número real não negativo até o zero é dada pelo próprio número. E a distância de um número real negativo até o zero é dada pelo oposto do número.

Vamos supor um número x na reta real orientada. Temos, então:

$|x| = x$, se $x \geq 0$

$|x| = -x$, se $x < 0$

Em outras palavras, se $a \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

$a > 0 \rightarrow |a| = a$

$a = 0 \rightarrow |a| = 0$

$a < 0 \rightarrow |a| = -a$

Exemplos

Calcule o valor de:

- $|1 - \sqrt{2}|$

  Como $1 - \sqrt{2} < 0$, temos que $|1 - \sqrt{2}| =$
  $= -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.

- $|\sqrt{2} - 1|$

  Como $\sqrt{2} - 1 > 0$, temos que $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$.

PROPRIEDADES IMPORTANTES

I. O módulo de um número é igual ao módulo de seu simétrico: $|x| = |-x|$.

II. O módulo do quadrado de um número é igual ao quadrado desse número: $|x^2| = x^2$.

III. O módulo da diferença de dois números é comutativo: $|a - b| = |b - a|$.

IV. O módulo de um número é igual à raiz quadrada de seu quadrado: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Exemplos

- $|2| = 2 = |-2|$
- $|2^2| = |4| = 4 = 2^2$
- $|2 - 1| = |1| = 1 = |-1| = |1 - 2|$
- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$

GRÁFICO DA FUNÇÃO

Vamos construir uma tabela com os valores da função $y = f(x) = |x|$.

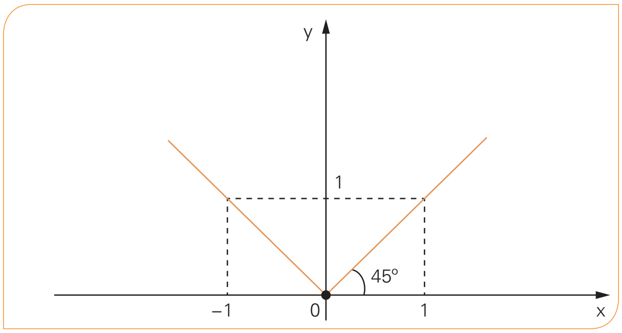
x	y = f(x) = |x|
−2	2
−1	1
0	0
1	1
2	2

- Introdução
- Módulo de um número real

HABILIDADES

- Identificar representações algébricas que expressam a relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representam relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Com isso, podemos construir um gráfico constituído de duas semirretas de origem em (0, 0), uma passando pelo ponto (−1, 1), para $x \leq 0$, e outra por (1, 1), quando $x \geq 0$.

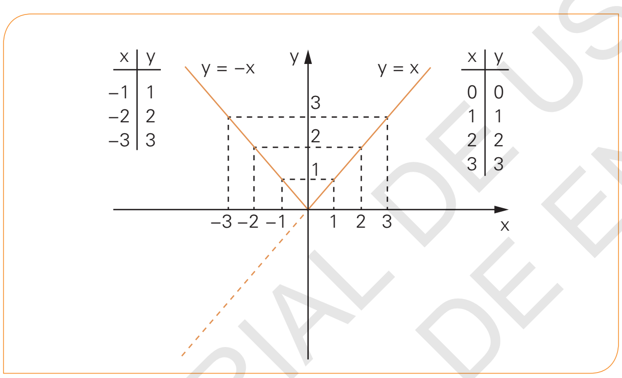


O gráfico da função modular $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = |x|$, é simétrico. O eixo de simetria é representado por **y**.

O domínio e o contradomínio dessa função são os números reais. Já o conjunto imagem dessa função é $Im(f) = \mathbb{R}_+$. Isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

Vejamos outros exemplos.

1. Considere o gráfico da função $y = f(x) = |x|$.



A função dentro do módulo (y = x) foi mantida para valores de **y** positivos (acima do eixo **x**). Para valores negativos de **y** (abaixo do eixo **x**), a função foi rebatida em relação ao eixo **x**. Obtemos uma nova função (y = = −x) simétrica à anterior em relação ao eixo **x**.

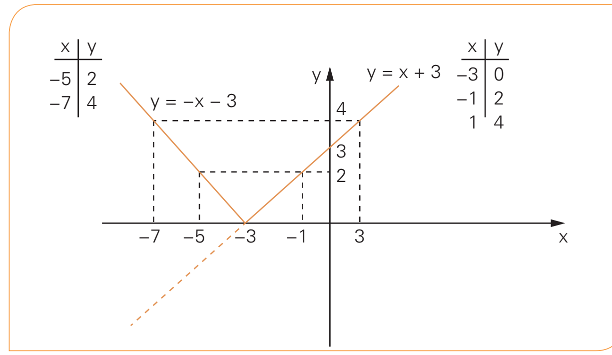
$$D(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = \mathbb{R}_+$$

A parte da função que estava abaixo do eixo **x** foi refletida para cima do eixo **x**. Esse conceito pode se estender para todas as funções modulares.

2. Construa o gráfico da função $y = f(x) = |x + 3|$.

Ao aplicarmos a definição, temos:

$$y \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \geq 3 \\ -x - 3, \text{ se} < 3 \end{cases}$$



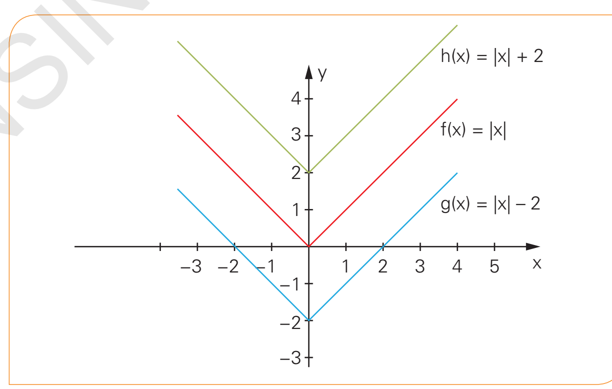
A função que estava dentro do módulo (y = x + 3) foi mantida para valores de **x** maiores que −3 (acima do eixo **x**). Para valores menores que −3 (abaixo do eixo x), a função foi rebatida em relação ao eixo **x**. Obtemos, então, uma nova função (y = − x − 3) simétrica à anterior em relação ao eixo **x**.

Podemos ver que o gráfico da função $y = |x + 3|$ foi deslocado 3 unidades para a esquerda em relação à função $y = |x|$.

$$D(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = \mathbb{R}_+$$

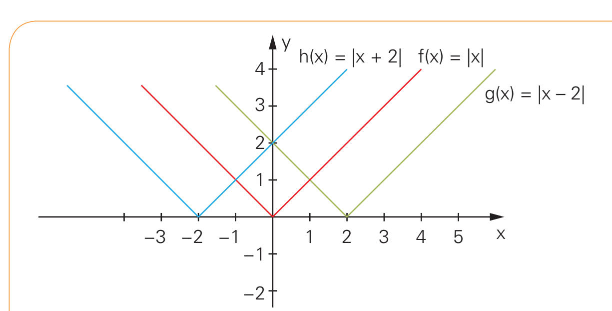
Analogamente, podemos examinar outros gráficos que são variações da função modular $y = f(x) = |x|$ em diversos casos.

1º caso: deslocamento vertical



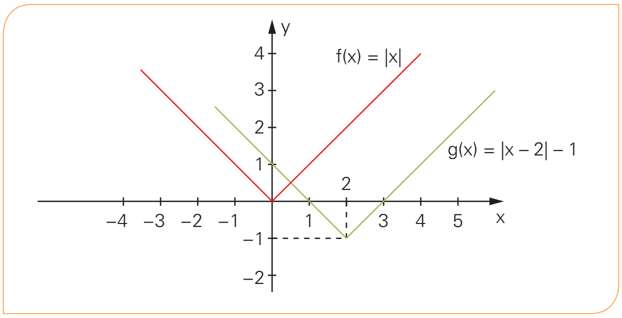
Ao comparar os gráficos das funções **g** e **h** com o da função **f**, é possível afirmarmos que eles são semelhantes. No entanto, houve um deslocamento **vertical** 2 unidades para cima e 2 para baixo.

2º caso: deslocamento horizontal



Ao comparar os gráficos das funções **g** e **h** com o da função **f**, é possível afirmarmos que eles são semelhantes. No entanto, houve um deslocamento **horizontal** 2 unidades para a direita e 2 para a esquerda.

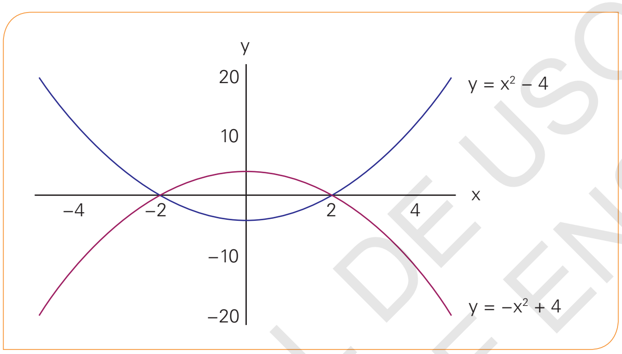
3º caso: deslocamento vertical e horizontal



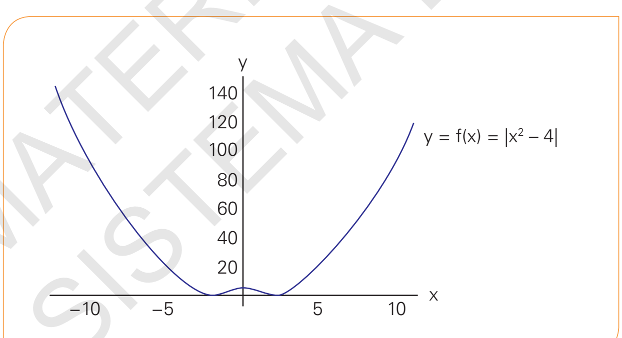
Ao comparar o gráfico da função **g** com o da função **f**, é possível afirmarmos que são semelhantes. No entanto, houve um deslocamento **horizontal** 2 unidades para a direita e um deslocamento **vertical** 1 unidade para baixo.

Vejamos como ficaria o gráfico do módulo de uma função quadrática.

Para construir o gráfico da função $y = f(x) = |x^2 + 4|$, temos:



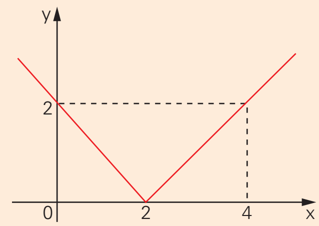
Portanto, o gráfico da função $y = f(x) = |x^2 - 4|$ é dado por:



Observe que as partes da parábola $y = x^2 - 4$ à direita de 2 e à esquerda de -2 no eixo **x** foram mantidas, uma vez que tinham **y** não negativo (“acima” ou no próprio eixo **x**). A parte situada entre $-2 < x < 2$ foi rebatida para cima, visto que tinha sinal negativo de **y** (“abaixo” do eixo **x**).

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

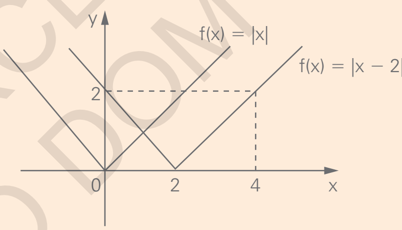
1. PUC-BA – A figura representa o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:



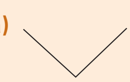
a) $f(x) = |x| + 2$
b) $f(x) = |x - 2|$
c) $f(x) = |x + 2|$
d) $f(x) = |x| - 2$
e) $f(x) = ||x| + 2|$

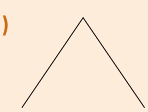
Resolução:

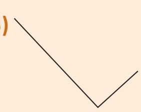
É possível perceber, por inspeção direta, que o gráfico representado na questão corresponde a uma translação, para a direita em duas unidades, do gráfico da função $y = f(x) = |x|$. Logo, o gráfico representado será correspondente à função $f(x) = |x - 2|$

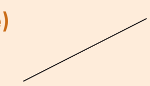


2. UPE – Dos gráficos, o que mais se assemelha ao gráfico da função f(x) 5 ||x 1 2| 2 2| no intervalo 25 , x , 5 é

a)


d)


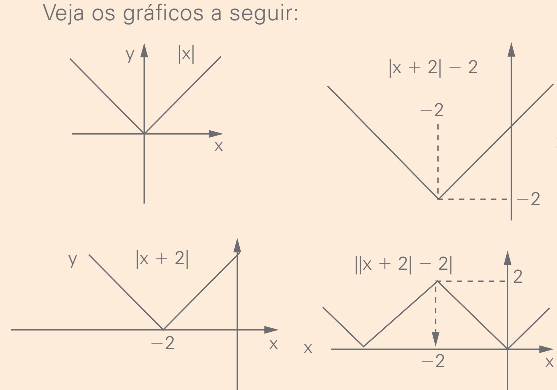
b)


e)


c)


Resolução:

Veja os gráficos a seguir:



Observando os gráficos e considerando o intervalo $-5 < x < 5$, a alternativa **c** está adequada.

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO MODULAR

Módulo

A distância de um número real não negativo até zero é dada pelo próprio número.
E a distância de um número real negativo até o zero é dada pelo oposto de um número.

$|x| = x$, se $x \geq 0$

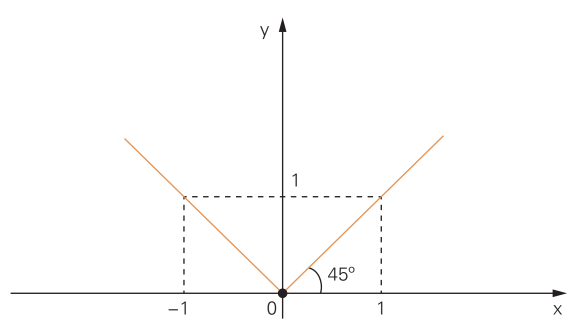
$|x| = -x$, se $x < 0$

FUNÇÃO MODULAR

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$,

então $\begin{cases} f(x) = x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ f(x) = -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

O gráfico é formado pelas bissetrizes do 1º e 2º quadrantes



Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$

Contradomínio: $CD(f) = \mathbb{R}$

Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Calcule os módulos.

a) $|\sqrt{5} - 2|$

b) $\left|\frac{\pi}{2} - 2\right|$

c) $|0|$

a) Como $\sqrt{5} - 2 > 0$, temos que $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$.

b) Como $\frac{\pi}{2} - 2 < 0$, temos que $\left|\frac{\pi}{2} - 2\right| = 2 - \frac{\pi}{2}$.

c) Como $0 \geq 0$, temos que $|0| = 0$.

2. PUC-RS – Se $|4x - 8| > 16$, então

a) $x > 6$

b) $x > 6$ e $x < -2$

c) $x > 6$ ou $x < 2$

d) $x > 2$ ou $x < -6$

e) $x > 6$ ou $x < -2$

Temos que $|4x - 8| > 16$.
Se $4x - 8 \geq 0$, temos:

$4x - 8 > 16$

$x > 6$

Se $4x - 8 < 0$, temos:

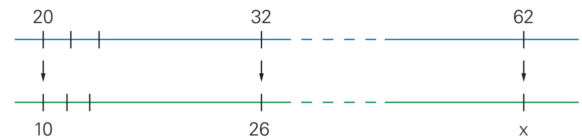
$-4x + 8 > 16$

$-x > 2$

Logo, $x < -2$.

3. FGV-RJ C5-H21

Duas escalas lineares graduadas em unidades diferentes foram colocadas lado a lado, como mostra a figura a seguir.



Observando as duas correspondências, o número x da escala de baixo que está associado ao número 62 da escala de cima é

a) 68

b) 64

c) 62

d) 66

e) 70

Na escala de cima, podemos ver que existem 12 unidades (32 – 20), que correspondem a 16 unidades na escala de baixo.

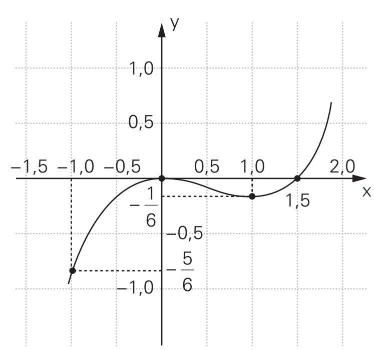
Portanto, temos uma razão de variação de escala de 3:4.

Entre 62 e 32 existem 30 unidades. Como a variação é de 3:4, o número 26 da escala de baixo vale 26 + 40 = 66.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. PUC-RJ (adaptado) – Considere a função real $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ cujo gráfico está exibido abaixo:

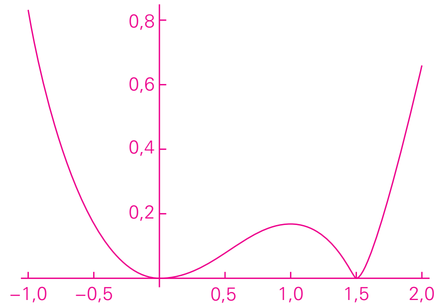


a) Determine as raízes de $f(x) = 0$.

b) Esboce o gráfico de $g(x) = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|$.

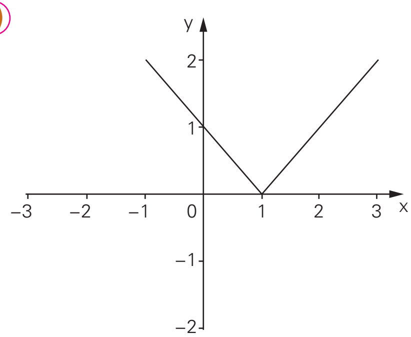
a) Podemos observar no gráfico que $f(x) = 0$ nos pontos $x = 0$ e $x = 1,5$.

b) O gráfico de $g(x) = \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|$ é a reflexão da curva do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo **y**. Assim:

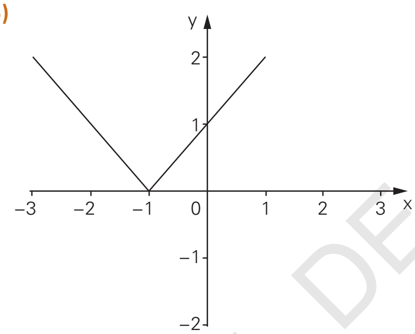


5. PUC-RJ – Considere a função real $f(x) = |-x + 1|$. O gráfico que representa a função é:

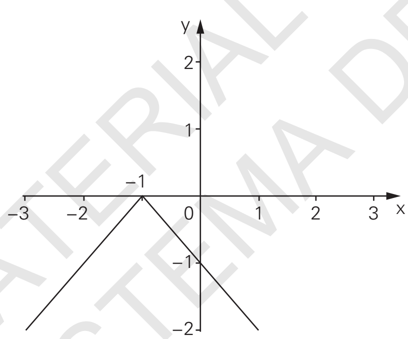
a)



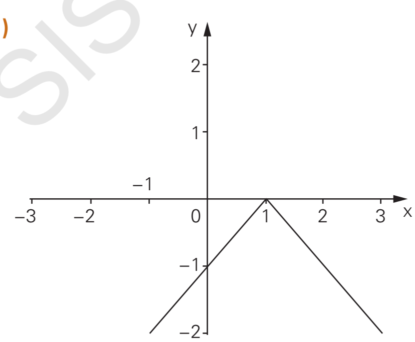
b)



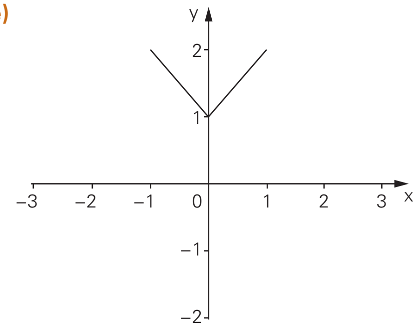
c)



d)



e)



Temos a função $f(x) = |-x + 1|$.
Então, para $x > -1$, $f(x) = -x + 1$.
Para $x < -1$, $f(x) = x - 1$.

6. UEM-PR – Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Assinale o que for correto.

01) Se $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x$, então $f(x) > g(x)$ para todo número real x.

02) Se f e g são funções modulares definidas por $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = |x - 1|$, então seus gráficos não têm intersecção.

04) Se f é a função modular definida por $f(x) = |2x|$ e g é a função constante definida por $g(x) = 10$, então $f(x) < g(x)$ quando $-5 < x < 5$; e $f(x) > g(x)$ se $x > 5$ ou $x < -5$.

08) Se $f(x) = 5 - |x + 1|$, então podemos calcular $\sqrt{f(x)}$ para todo $x > 0$.

16) Se f é a função modular definida por $f(x) = |x + 1|$, então o conjunto imagem de f é $Im(f) = [1, +\infty)$.

05 (01 + 04)

01) Verdadeiro. Temos que $x^2 > x$. Portanto, como $x^2 > 0$ para todo número real x, $x^2 + 1 > x^2 > x$. Ou seja, $x^2 + 1 > x$.

02) Falso. Suponha que $f(x) = g(x)$, ou seja, $|x + 1| = |x - 1|$.

Para $-1 < x < 1$, temos que $x + 1 = 1 - x \to x = 0$. Logo, seus gráficos se interceptam no ponto $x = 0$.

04) Verdadeiro. No caso $f(x) < g(x)$, temos que $|2x| < 10$.

Assim, para $2x > 0$, temos $2x > 10 \to x > 5$.

Para $2x < 0$, temos $-2x > 10 \to x < -5$.

Ou seja, $-5 < x < 5$.

No caso $f(x) > g(x)$, temos que $|2x| > 10$.

Assim, para $2x > 0$, temos $2x > 10 \to x > 5$.

Para $2x < 0$, temos $-2x > 10 \to x < -5$.

08) Falso. Não, pois, quando $f(x) = 5 - |x + 1| < 0$, não podemos calcular sua raiz no conjunto dos números reais.

16) Falso. Temos que $|x + 1| > 0$. Então, para $x > -1$, temos $|x + 1| > 0$, e o conjunto imagem é dado por $Im(f) = [0, +\infty)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. PUC-MG (adaptado) – Certo estudante do Ensino Médio, após fazer um curso sobre inequações, escreveu as duas afirmativas a seguir:

I. A solução da desigualdade $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

II. Se $|x + 2| < 2$, então $x \in]-3, -1[$.

O número de afirmativas corretas é:

a) Nenhuma
b) Somente I
c) Somente II
d) I e II

8. Sistema Dom Bosco – Encontre as soluções da equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$.

9. Unit-AL – Sabendo-se que x_1 e x_2 são números reais distintos que satisfazem a equação $|3x + 10| = |5x + 2|$, é correto afirmar que o valor de $|x_1 - x_2|$ é

a) $\frac{7}{2}$
b) 4
c) $\frac{11}{2}$
d) 6
e) $\frac{15}{12}$

10. Unitau-SP (adaptado) – Sendo x um número real, encontre o conjunto solução da inequação $||4x - 6| - 2| < 3$ é

11. UESB-BA – Se b é uma constante real com $|b| < 40$, então o polinômio $p(x) = -x^2 + bx - 441$ tem raízes cujo módulo é um divisor de

a) 49

b) 54

c) 65

d) 72

e) 84

12. ITA-SP (adaptado) – Calcule o número de soluções inteiras da inequação $0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2$.

13. UEM-PR – Sobre as funções f e g definidas por $f(x) = 3^{-x}$ e $g(x) = |x - x^2|$, assinale o que for **correto**.

01) $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

02) $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

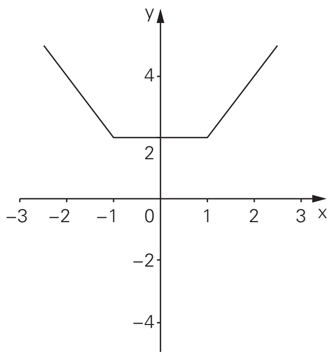
04) f é sobrejetora.

08) $g(f(0)) = f((g(0))$.

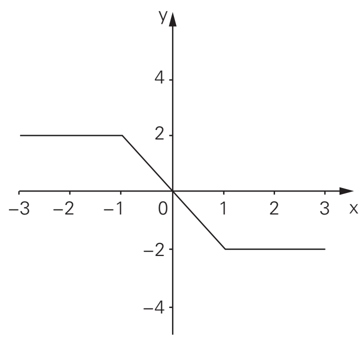
16) O gráfico da função g é uma parábola.

14. PUC-RJ – Considere a função real $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$. O gráfico que representa a função é:

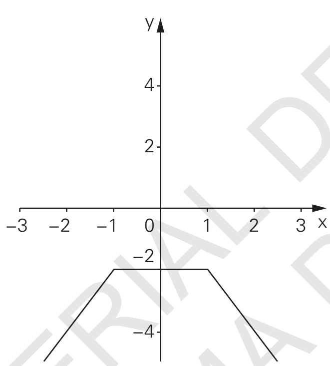
a)



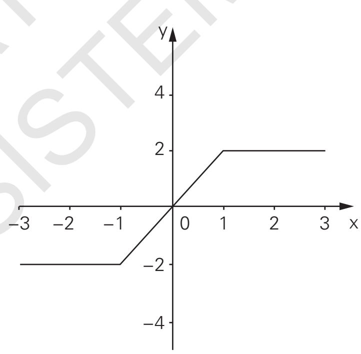
b)



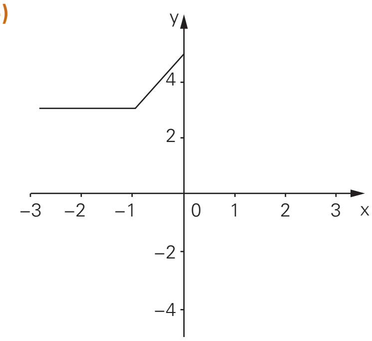
c)



d)



e)



15. Unicamp-SP (adaptado) – Considere a função $f(x) = |2x - 4| + x - 5$, definida para todo número real x.

Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no plano cartesiano para $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

16. Espcex-SP – Os gráficos de $f(x) = 2$ e $g(x) = x^2 - |x|$ têm dois pontos em comum. O valor da soma das abscissas dos pontos em comum é igual a

a) 0
b) 4
c) 8
d) 10
e) 15

17. UEM-PR – Considerando o módulo de números reais e as funções envolvendo módulo, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

01) $|x| \neq -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

02) Se f e g estão definidas no mesmo domínio e no mesmo contradomínio, então o gráfico de $f(x) = |x + 2| - 2$ é igual ao gráfico de $g(x) = |x|$, mas deslocado em duas unidades para a esquerda no eixo x e duas unidades para baixo no eixo y.

04) A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = |x|$, é injetora e sobrejetora.

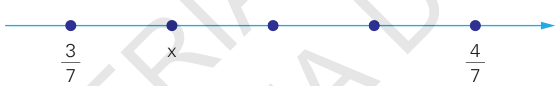
08) A solução da equação $\left|\cos(x+4) - \text{sen}(x-1) + \sqrt{x+2} - 1\right| + 5 = 0$ é $k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}^+$.

16) A equação $|x + 1| - |x - 1|$ não possui solução real.

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. FGV-RJ C5-H21

Na reta numérica indicada a seguir, todos os pontos marcados estão igualmente espaçados.

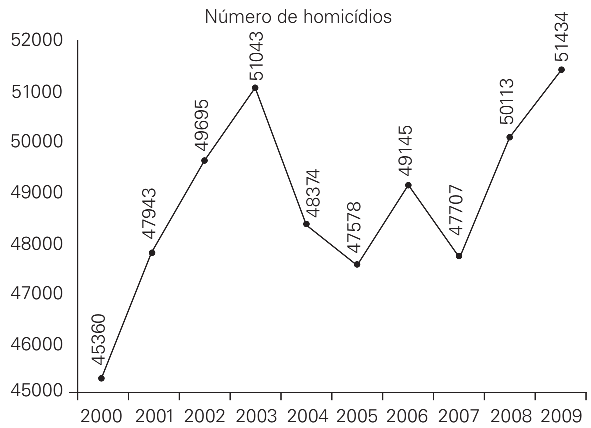


Sendo assim, a soma do numerador com o denominador da fração irredutível que representa x é igual a

a) 39
b) 40
c) 41
d) 42
e) 43

19. Enem C5-H22

Ano após ano, muitos brasileiros são vítimas de homicídio no Brasil. O gráfico apresenta a quantidade de homicídios registrados no Brasil, entre os anos 2000 e 2009.



WAISELFISZ, J. J. **Mapa da violência 2012:** os novos padrões da violência homicida no Brasil. São Paulo: Instituto Sangari. 2011 (adaptado).

Se o maior crescimento anual absoluto observado nessa série se repetisse de 2009 para 2010, então o número de homicídios no Brasil ao final desse período seria igual a

a) 48 839
b) 52 755
c) 53 840
d) 54 017
e) 54 103

20. EBMSP-BA C5-H22

Os valores cobrados por um cinema pela entrada "inteira" e pela "meia" entrada correspondem, em reais, aos valores absolutos das raízes do polinômio $P(x) = x^2 + 10x - 144$. Com fins beneficentes, foi estipulado que a todos os espectadores que comparecessem a uma determinada sessão fosse cobrado o valor da entrada "inteira", razão pela qual um grupo de dez pessoas que foram juntas à referida sessão, pagou R$ 40,00 a mais do que pagaria em uma sessão normal. Com base nessas informações, pode-se afirmar que o número de pessoas, desse grupo, que normalmente pagaria "meia" entrada é igual a

a) 7
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

11

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES MODULARES

- Módulo de um número
- Equação modular
- Inequação Modular

HABILIDADES

- Resolver equações e situações-problema que envolvam módulo.
- Identificar representações algébricas que expressam relação entre grandezas.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
- Resolver inequações e situações-problema que envolvam módulo.
- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Resolver situações--problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Módulo de um número

Propriedades

Tomando como base o conceito geométrico de módulo de um número, podemos definir que: $|x| \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

As principais propriedades relacionadas ao módulo de um número real são:

I. $|x| \geq 0$, para qualquer **x** real e $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$.
II. $|x| = a \rightarrow x = a$ ou $x = -a$, com $a \geq 0$.
III. $|x| = |y| \rightarrow x = y$ ou $x = -y$.
IV. $|x| > a \rightarrow x > a$ ou $x < -a$, com $a \geq 0$.
V. $|x| < a \rightarrow -a < x < a$, com $a \geq 0$.
VI. $|x \cdot y| = |x| \cdot |x|$.
VII. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$.
VIII. $\sqrt{x^2} = |x|$
IX. $|x|^{2n} = |x^{2n}| = x^{2n}$

Equação modular

Uma equação é dita modular quando há pelo menos uma incógnita no módulo. O tipo mais simples de equação modular tem a forma $|x| = a$.

RESOLUÇÃO

Considere a equação $|x| = a$. Pela definição de módulo, temos:
$x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow x = a$
$x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow -x = a \rightarrow x = -a$
Podemos afirmar então que:
$|x| = a \leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$

Exemplo 1:
Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x| = 64$.
Pela definição, podemos afirmar que:
$x = 64$ ou $x = -64$
$S = \{-64; 64\}$

É possível utilizarmos esse método toda vez que, na equação, podemos estabelecer a igualdade entre um símbolo de módulo contendo a variável e um número real.

Exemplo 2:
Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $|x - 40| = 50$.
Ao aplicarmos a definição, temos:
$x - 40 = -50$ ou $x - 40 = 50$
$x = -10$ ou $x = 90$
$S = \{-10; 90\}$

No caso em que $a < 0$, a equação $|x| = a$ não tem solução, pois um módulo sempre representa valor positivo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. UFJF-MG – O número de soluções negativas da equação $|5x - 6| = x^2$ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Pela definição de equação modular, temos:

$5x - 6 = x^2$ ou $5x - 6 = -x^2$

Então:

$x^2 - 5x + 6 = 0$ ou $x^2 + 5x - 6 = 0$

Da primeira equação, vem:

$x = 3$ ou $x = 2$

Da segunda equação, temos:

$x = 1$ ou $x = -6$

Portanto, essa equação tem apenas 1 solução negativa.

INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação modular é uma desigualdade entre dois termos, sendo que pelo menos um deles tem uma incógnita entre as barras, as quais denotam o símbolo do módulo.

As mais simples inequações modulares são:

- $|x| \geq a$
- $|x| \leq a$
- $|x| > a$
- $|x| < a$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2. PUC-RS – A expressão $|x - a| < 16$ também pode ser representada por:

a) $x - a < 16$
b) $x + a > 16$
c) $-a - 16 < x < a + 16$
d) $-16 + a < x < a + 16$
e) $-a < -16$ ou $x - a > 0$

Temos que:

$|x - a| < 16$

$-16 < x - a < 16$

$a - 16 < x < a + 16.$

3. Espcex-SP – O conjunto da inequação $||x - 4| + 1| \leq 2$ é um intervalo do tipo [a, b]. O valor de a + b é igual a

a) -8
b) -2
c) 0
d) 2
e) 8

Resolução:

Por meio da teoria, temos:

$||x - 4| + 1| \leq 2$

$-2 \leq |x - 4| + 1 \leq 2$

$-3 \leq |x - 4| \leq 1$

Primeiro, vamos separar a equação em dois casos e aplicarmos novamente a teoria:

(I) $-3 \leq |x - 4| \rightarrow -3 \leq x - 4 \leq 3 \rightarrow 1 \leq x \leq 7$

(II) $|x - 4| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x - 4 \leq 1 \rightarrow 3 \leq x - 4 \leq 5$

Portanto, a solução deve comportar tanto a solução de I quanto de II. Podemos utilizar a "técnica do varal" para ter o conjunto intersecção de I com II. Logo: S = [3, 5].

Portanto, o valor de $a + b = 3 + 5 = 8$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÃO MODULAR

Definição:

$$|x| \begin{cases} x \text{ se } \underline{\quad x \geq 0 \quad} \\ -x \text{ se } \underline{\quad x < 0 \quad} \end{cases}$$

A principal meta na resolução é substituir as barras de módulo pelo estudo do sinal da expressão matemática.

$|x| = a \leftrightarrow \underline{\quad x = a \quad}$ ou $\underline{\quad x = -a \quad}$

INEQUAÇÃO MODULAR

A meta na resolução é substituir as barras do módulo pelo estudo do sinal da expressão matemática.

$|x| \geqslant a \leftrightarrow x \underline{\quad \geqslant \quad} a$ ou $x \underline{\quad \leqslant \quad} -a$

$|x| < a \leftrightarrow -a \underline{\quad < \quad} x \underline{\quad < \quad} a$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Determine, no conjunto dos reais, o conjunto solução da equação $x^2 - 2|x| + 1 = 0$.

Temos que, se $x \geq 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x - 1)^2 = 0$
$x = 1$
Se $x < 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$
$(x + 1)^2 = 0$
$x = -1$
$S = \{-1, 1\}$.

2. Udesc – A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é:

a) 10
b) 7
c) 0
d) 3
e) 4

Temos que, se $x - 3 \geq 0$:
$x^2 - 5x + 6 = x - 3$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$(x - 3)^2 = 0$
$x = 3$, (não há raízes distintas)
Se $x - 3 < 0$:
$x^2 - 5x + 6 = -x + 3$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
A soma das raízes é dada por $S = \frac{-b}{a} = 4$.

3. PUC-MG C5-H21

Os pesos aceitáveis do pãozinho de 50 g verificam a desigualdade $|x - 50| \leq 2$, em que x é medido em gramas. Então, assinale o peso mínimo aceitável de uma fornada de 100 pãezinhos, em quilogramas.

a) 4,5
b) 4,8
c) 5,2
d) 5,5
e) 5,8

O peso mínimo pode ser obtido por meio da desigualdade $|x - 50| \leq 2$. Resolvendo, teremos:
$|x - 50| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x - 50 \leq 2 \rightarrow 48 \leq x \leq 52$
Portanto, o peso mínimo é 48 g = 0,048 kg.
Utilizando o método da regra de três, podemos calcular o peso mínimo para 100 pães. Logo:
1 pão ------------ 0,048 kg
100 pães -------- y
$y = 0{,}048 \cdot 100 = 4{,}8$ kg
Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. PUC-RJ – Três números proporcionais a 5, 8 e 9 são tais que a diferença do maior para o menor supera o módulo da diferença entre os dois menores em 5 unidades.

a) 45
b) 54
c) 63
d) 72
e) 81

De acordo o enunciado, os números 5x, 8x e 9x > 0.
Então, $9x - 5x - 5 = |8x - 5x| \rightarrow 4x - 5 = |3x|$.
Como $x > 0$, então:
$4x - 5 = 3x \rightarrow x = 5$
Logo, os números são 25, 40 e 45.
Portanto, o maior dos números é 45.

5. Sistema Dom Bosco – O conjunto de todas as soluções reais que satisfazem a inequação $|2x - 1| \leqslant 4x + 1$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

Temos que, se $2x - 1 \geqslant 0$:
$2x - 1 \leqslant 4x + 1$
$-2x \leqslant -2$
$x \geqslant 1$
Se $2x - 1 < 0$:
$-2x + 1 \leqslant 4x + 1$
$-6x \leqslant 0$
$x \geqslant 0$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

6. **Una-MG** – A desigualdade $1 < |x - 2| < 2$ verifica-se para todos os números reais x, tais que:
a) $1 < x < 3$
b) $x < 3$ ou $x > 4$
c) $0 < x < 4$
d) $0 < x < 1$ ou $3 < x < 4$
e) $x < 1$ ou $x > 3$

Temos que, se $x - 2 \geq 0$:
$1 < x - 2 < 2$
$3 < x < 4$
Se $x - 2 < 0$:
$1 < -x + 2 < 2$
$-1 < -x < 0$
$0 < x < 1$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. **Cesgranrio-RJ** – O número de raízes reais da equação $|2x - 1| = |1 - x|$ é igual a:
a) 0
b) 2
c) 3
d) 4
e) 6

8. **UFAL** – Determine, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\left|x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}\right| = \frac{1}{4}$.

9. **Espcex-SP/Aman-RJ** – O número de soluções da equação $\frac{1}{2}|x| \cdot |x - 3| = 2 \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right|$, no conjunto $\mathbb{R}$, é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

10. **UECE** – Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então os valores dos números reais a e b são, respectivamente,
a) -1 e 6
b) 5 e 6
c) 0 e 36
d) 5 e 36

11. UEPB – A soma das raízes da equação modular $||x - 2| - 7| = 6$ é:

a) 15
b) 30
c) 4
d) 2
e) 8

12. ITA-SP – Considere as funções f_1, f_2, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f_1(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$, $f_2(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine:

a) Todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$.
b) O menor valor assumido pela função f.
c) Todas as soluções da equação $f(x) = 5$.

13. UFPI – O conjunto solução da inequação $|x^2 - 4x + 3| < 3$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

14. Fuvest-SP – Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade $|x^2 - 10x + 21| \leqslant |3x - 15|$.

16. Sistema Dom Bosco – Seja a função modular $f(x) = |x^2 - 6x - 8|$, $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores de x que satisfazem a inequação $f(x) < 1$.

15. Facisa-MG – O conjunto-solução da inequação $|x^2 - 4x| \leq 3$ é dado por:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} \leq x \leq 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 - \sqrt{7} \text{ ou } x \geq 2 + \sqrt{7}\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 - \sqrt{7} \text{ e } x \geq 2 + \sqrt{7}\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} < x \leq 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} \leq x \leq 1 \text{ e } 3 \leq x \leq 2 + \sqrt{7}\}$

17. UFF-RJ – Com relação aos conjuntos $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq \sqrt{7}\}$ e $Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 0{,}333...\}$, afirma-se:

I. $P \cup Q = P$
II. $Q - P = \{0\}$
III. $P \subset Q$
IV. $P \cap Q = Q$

Somente são verdadeiras as afirmativas:

a) I e III.
b) I e IV.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFSCar-SP (adaptado) C5-H22

Um reservatório contém 3 600 litros de água e precisa ser esvaziado para reparos. A água será retirada de acordo com a função $y = |3\,600 - 45x|$, sendo x o tempo, em minutos, e y o número de litros de água restantes. O tempo necessário para que o reservatório fique totalmente vazio é

a) 1 hora.
b) 1 hora e 5 minutos.
c) 1 hora e 10 minutos.
d) 1 hora e 15 minutos.
e) 1 hora e 20 minutos.

19. AFA-SP C5-H21

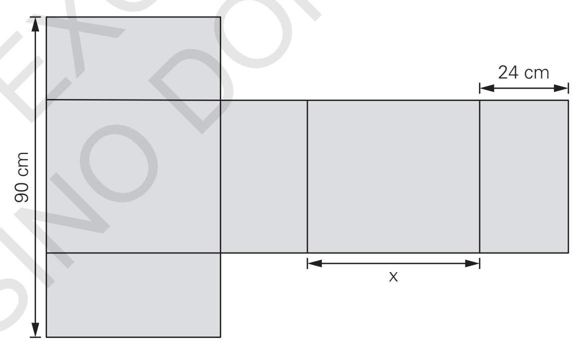
Durante 16 horas, desde a abertura de uma certa confeitaria, observou-se que a quantidade q de unidades (t) vendidas do doce "amor em pedaço", entre os instantes $(t - 1)$ e t, é dada pela lei $q(t) = ||t - 8| + t - 14|$, em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{3, 2, 1, \ldots, 16\}$. É correto afirmar que

a) entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de "amor em pedaço".
b) a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.
c) em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.
d) o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

20. Enem C5-H21

Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac, é:

a) 25
b) 33
c) 42
d) 45
e) 49

12 EQUAÇÕES E FUNÇÕES EXPONENCIAIS

- Introdução
- Equações exponenciais
- Propriedades da potência
- Funções exponenciais
- Inequações exponenciais

HABILIDADES

- Identificar fenômenos que crescem ou decrescem exponencialmente.
- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Introdução

PROPRIEDADES DA POTÊNCIA

Definições

Considerando **b** um número real e **n** e **k**, números naturais, temos:

- $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ vezes}}$, para $n > 1$

Em que:
b = base
n = expoente
b^n = potência

- $b^1 = b$
- $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, com $b \neq 0$
- $b^0 = 1$, com $b \neq 0$
- $b^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{b^n}$, com $b^n > 0$ e $k \neq 0$

Propriedades

Considerando **a** e **b** números reais diferentes de zero e **n** e **m**, números inteiros, temos:

- $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$
- $(b^n)^m = b^{n \cdot m}$
- $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$
- $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equações que têm potências com incógnita no expoente são chamadas **equações exponenciais**. A possibilidade de compararmos potências com a mesma base facilita o trabalho de encontrar solução para equação exponencial. No caso de bases distintas, precisamos utilizar logaritmos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. UFRGS-RS – Sabendo-se que $6^{x+2} = 72$, tem-se que 6^{-x} vale

a) –4
b) –2
c) 0
d) $\frac{1}{2}$
e) e) 2

Resolução:

Temos que:

$6^{(x+2)} = 72 \to 6^x \cdot 6^2 \to 6^x = \frac{72}{36} \to 6^x = 2$

$6^{-x} = \frac{1}{6^x} = \frac{1}{2}$

2. UFS – Determine o conjunto verdade da equação $2^{x+\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

Resolução:

Temos que:

$2^{x+\frac{3}{2}} = 2^3 \to x + \frac{3}{2} = 3 \to x = \frac{3}{2}$

Portanto, $x = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

3. UESPI – O conjunto solução da equação é

a) {0}
b) {1, 0}
c) {0, 1}
d) {1}
e) {–1}

Resolução:

Temos que:

$2^{2x} = 3 \cdot 2^x - 2 \rightarrow (2^x)^2 = 3 \cdot 2^x - 2$

Chamando $2^x = y$

$y^2 = 3 \cdot y - 2 \rightarrow y^2 - 3 \cdot y + 2 = 0$

$$\begin{matrix} s = 2 \\ P = 2 \end{matrix} \begin{cases} y = 1 \\ \text{ou} \\ y = 2 \end{cases}$$

$2^x = 1$ ou $2^x = 2$

$2^x = 2^0$ ou $2^x = 2^1$

$x = 0$ ou $x = 1$

$S = \{0; 1\}$

Funções exponenciais

DEFINIÇÃO

Função exponencial é aquela com domínio e contradomínio no conjunto dos reais. É expressa por $f(x) = b^x$, com

$b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$ e com $\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$.

GRÁFICO

Com auxílio de tabelas, veremos como construir um gráfico de função exponencial.

Nas tabelas a seguir, a primeira coluna apresenta números inteiros quaisquer. A segunda refere-se às potências cujos expoentes são os respectivos elementos da primeira coluna. Organizando os dados em pares ordenados, podemos apresentar cada informação na forma de par ordenado por $(x; b^x)$, em que **b** é um número real maior que zero e diferente de 1.

Vamos considerar as funções $y = 2x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Tabela I

x	2^x
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Ao representarmos os pares ordenados $(x, 2^x)$ no plano cartesiano, temos:

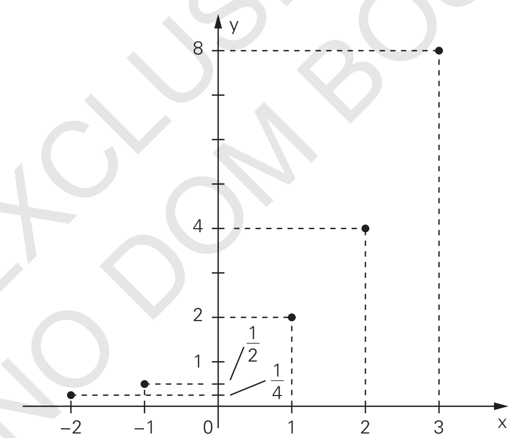
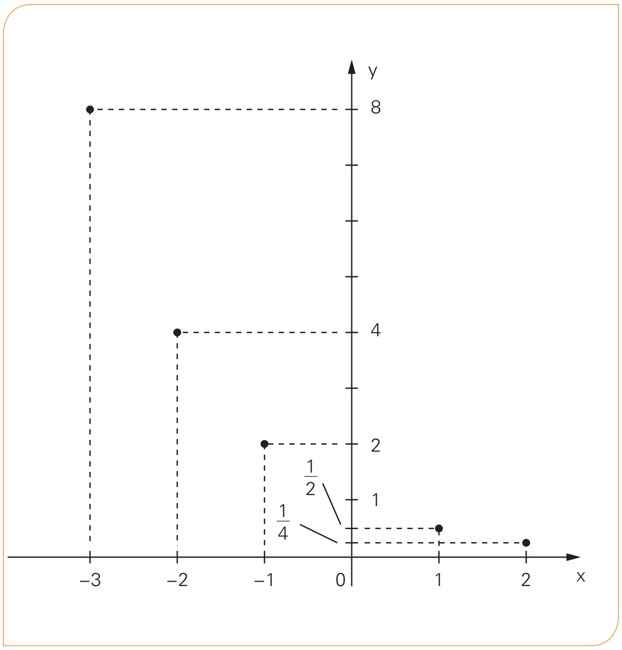


Tabela II

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

Ao representarmos os pares ordenados $\left(x, \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$ no plano cartesiano, temos:



Considerando a possibilidade de usarmos todo o conjunto dos números reais, em vez de apenas alguns valores inteiros de **x**, podemos pensar nesses pares ordenados, representados no plano cartesiano, formando o gráfico da função exponencial.

Gráfico da função $f(x) = 2^x$

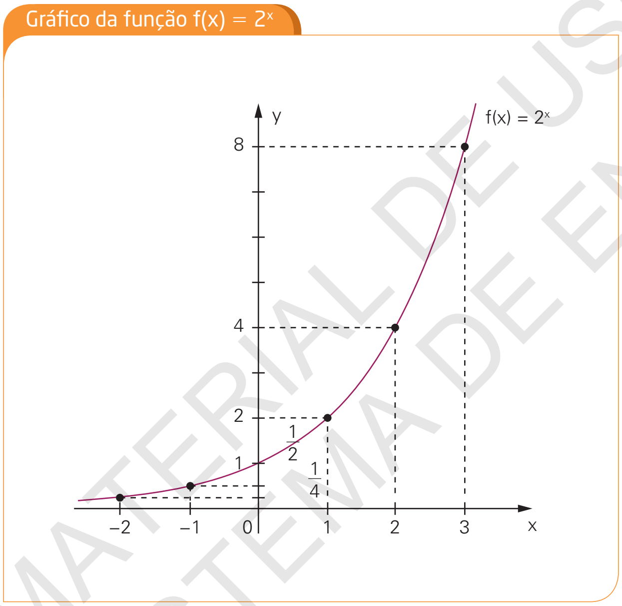
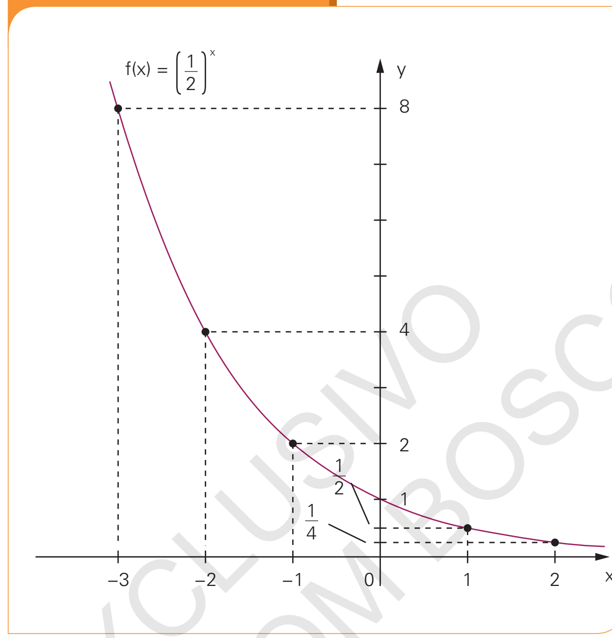


Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Domínio: $D = \mathbb{R}$

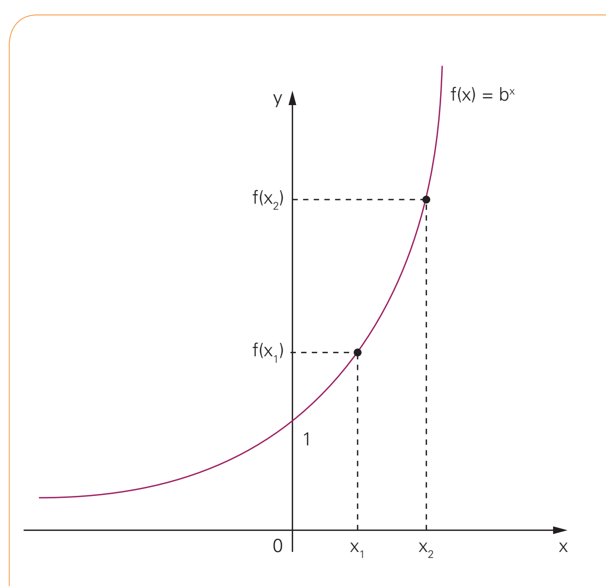
Contradomínio: $CD = \mathbb{R}$

Conjunto imagem: $Im = \mathbb{R}_+^*$

Assim, a função exponencial é **crescente** quando a base da potência é um número real maior que 1 e **decrescente** quando a base da potência apresenta valor real entre 0 e 1.

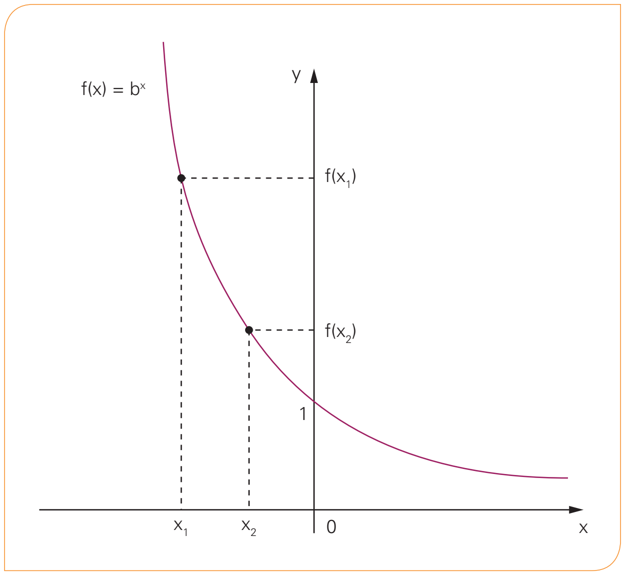
Ao analisarmos os gráficos, podemos fazer as seguintes considerações:

- Se $b > 1$, a função é crescente.



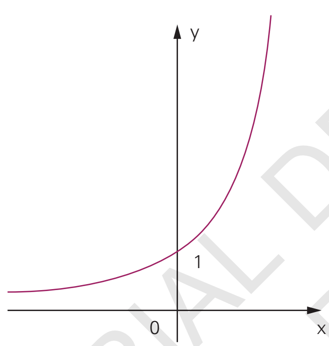
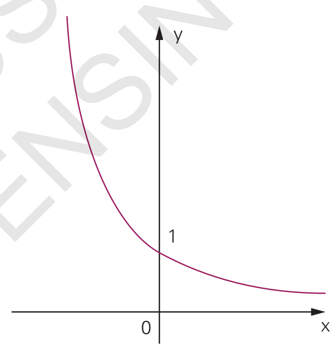
$$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Se $0 < b < 1$, a função é decrescente.



$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Resumo

$f(x) = b^x$ com $b > 0$, $b \neq 1$	
$b > 1$	$0 < b < 1$
	
Crescente	Decrescente
$x_1 < x_2 \leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$	$x_1 < x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$
$x_1 > x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$	$x_1 > x_2 \leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$

Inequações exponenciais

Inequação exponencial é toda inequação que apresenta a variável no expoente, sendo as bases iguais ou não. Ela pode ser reduzida a uma destas formas:

$b^{f(x)} > b^{g(x)}$

$b^{f(x)} \geqslant b^{g(x)}$

$b^{f(x)} < b^{g(x)}$

$b^{f(x)} \leqslant b^{g(x)}$

$b^{f(x)} \neq b^{g(x)}$

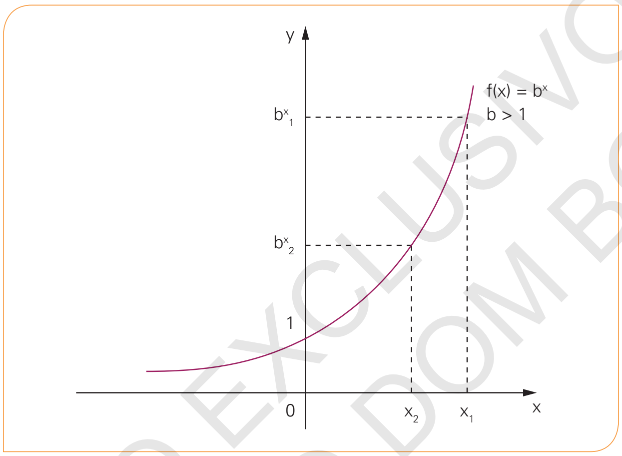
Lembre-se de que **b** representa um número real positivo e diferente de 1.

RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

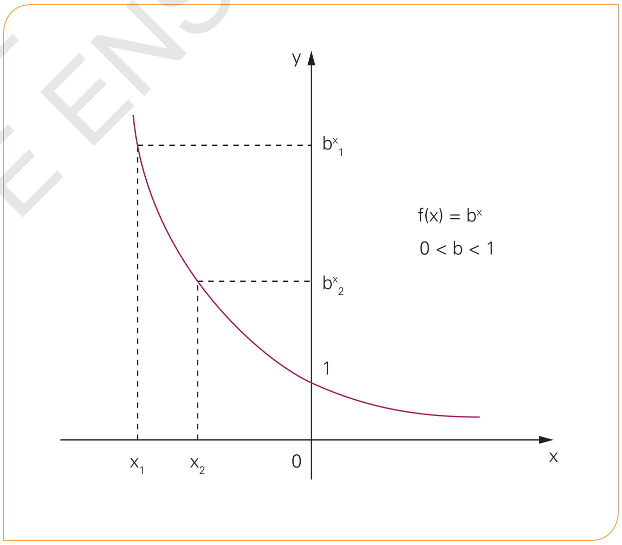
Para resolvermos as inequações exponenciais de bases iguais, vale lembrar que a função exponencial é **sempre** crescente ou decrescente, conforme a base seja um número real maior que 1 ou varie entre 0 e 1.

Então, quando a base é um número real maior que 1, a função é crescente, considerando que, quanto maior a potência, maior é seu expoente. Logo, o sentido da desigualdade entre as potências é o mesmo da desigualdade entre os respectivos expoentes.

Assim, para $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$, segue $x_1 < x_2 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow b^{x_1} < b^{x_2}$ e $x_1 > x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$. Isso pode ser visto no gráfico a seguir.



Por outro lado, quando a base é um número real entre 0 e 1, a função é decrescente, considerando que, quanto maior a potência, menor é seu expoente. Então, o sentido da desigualdade entre as potências deve ser invertido em relação à desigualdade entre os respectivos expoentes.



Assim, para e $b \in \mathbb{R}$ e $0 < b < 1$, segue que $x_1 < < x_2 \leftrightarrow b^{x_1} > b^{x_2}$ e $x_1 > x_2 \leftrightarrow$ $b^{x_1} < b^{x_2}$.

Resumo

- $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $b > 1$
  Nesse caso, a função exponencial envolvida é crescente, e os expoentes são comparados, respectivamente, usando a desigualdade **no mesmo sentido** ao das potências, isto é, $f(x) > g(x)$.
- $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $0 < b < 1$

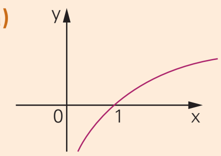
Nesse caso, a função exponencial é decrescente, e os expoentes são comparados, respectivamente, usando a desigualdade **no sentido contrário** ao das potências, isto é, $f(x) < g(x)$.

Observação: É possível que as potências nas desigualdades não tenham a mesma base. Torna-se necessário, então, recorrermos aos logaritmos.

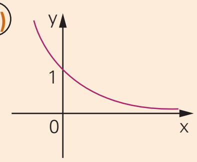
EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. Unifor-CE – Uma possível representação gráfica da função definida por $f(x) = 10^{-x}$ é

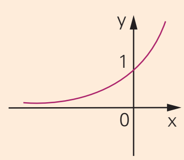
a)



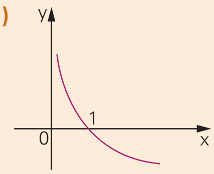
b)



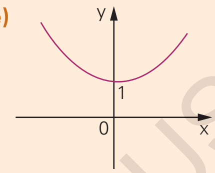
c)



d)



e)



Resolução:

Temos que:

$$f(x) = 10^{-x} = (10^{-1})^x = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

A função é decrescente, logo o item b representa uma possível representação gráfica da função $f(x) = 10^{-x}$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Propriedades da potência

As principais propriedades de potência são:

$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

$\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$

$\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

ROTEIRO DE AULA

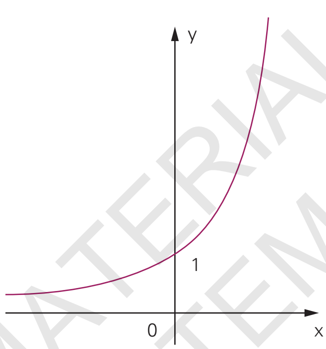
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Definição: A função exponencial tem domínio no conjunto dos reais. É expressa pela equação $f(x) = b^x$, com $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$ e $Im = \mathbb{R}_+^*$.

Gráfico

$f(x) = b^x$ com $b > 0$, $b \neq 1$

$b > 1$

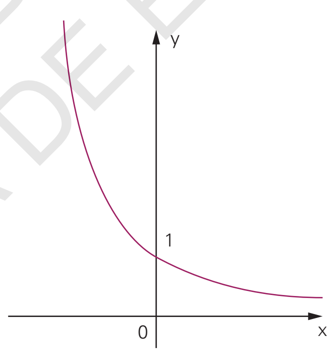


Crescente

$x_1 < x_2 \leftrightarrow$ b^{x_1} < b^{x_2}

$x_1 > x_2 \leftrightarrow$ b^{x_1} > b^{x_2}

$0 < b < 1$



Decrescente

$x_1 < x_2 \leftrightarrow$ b^{x_1} > b^{x_2}

$x_1 > x_2 \leftrightarrow$ b^{x_1} < b^{x_2}

Inequações exponenciais

Inequações que apresentam a variável no expoente, sendo as bases iguais ou não. Podem ser escritas das seguintes formas:

$b^{f(x)}$ > $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ ≥ $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ < $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ ≤ $b^{g(x)}$

$b^{f(x)}$ ≠ $b^{g(x)}$

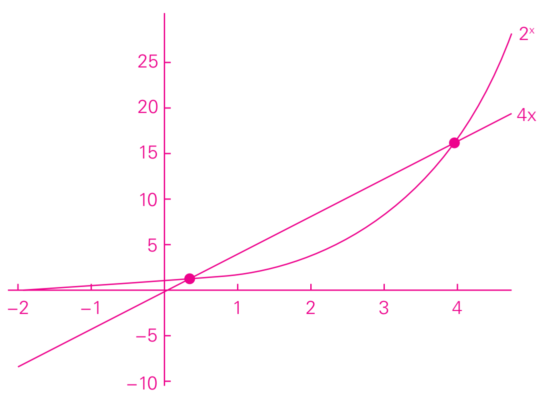
- No caso $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $b > 1$, a função exponencial é crescente.
- No caso $b^{f(x)} > b^{g(x)}$ e $0 < b < 1$, a função exponencial é decrescente.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEG-GO – Dada a função $y = x - 2^x + 2$, verifica-se que ela

a) não possui raiz real.
b) possui uma raiz real.
c) possui duas raízes reais.
d) possui três raízes reais.

Temos que:
$x - 2^x + 2 = 0$
$2^x = x + 2$
Fazendo $a = x + 2$:
$2^a \cdot 2^{-2} = a$
$2^a = 4a$
Analisando os gráficos de 2^a e 4^a:



Podemos identificar duas soluções reais para a equação.

2. UFPR (adaptado) – A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1\,000 \cdot 2^{0{,}0625 \cdot t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

No início da aplicação, $t = 0$. Logo, $V(0) = 1\,000$.
Então, para que $V(t) = 2\,000$, temos:
$2\,000 = 1\,000 \cdot 2^{0{,}0625 \cdot t}$
$2^1 = 2^{0{,}0625 \cdot t}$
$0{,}0625 \cdot t = 1$
$t = 16$ anos.

3. UNP-RN C5-H21

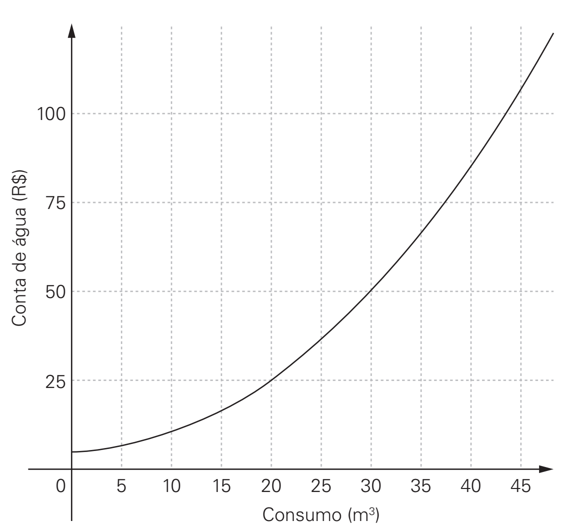
Um grupo de pesquisa de nossa Universidade Potiguar vem realizando uma pesquisa e constatou que em uma colônia de bactérias do tipo XX, uma bactéria divide-se em duas a cada hora. Com essa afirmação constatada, o número de bactérias originadas de uma só bactéria dessa colônia depois de 15 horas é de:

a) 34 256
b) 43 765
c) 15 634
d) 32 768
e) 27 648

O número de bactérias (y) é igual a uma potência na base 2.
Logo, $y = y(x) = 2^x$ (em que x é o número de horas decorridas).
Então, em 15 horas, $y(15) = 2^{15} = 32\,768$ bactérias.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Fatec-PR (adaptado) – Suponha que, em determinada cidade, o valor da conta de água residencial em função do seu consumo seja dado pelo gráfico.



Em uma residência, o valor da conta de água no mês de junho foi de R$ 50,00. Diante dos gastos, os moradores resolveram economizar e reduzir o valor da conta à metade. Para tanto, a redução de consumo deve ser, em metros cúbicos, de

Segundo o gráfico, para diminuirmos o valor da conta pela metade (nesse caso, R$ 25,00), devemos consumir 20 m^3. Ou seja, precisamos reduzir 10 m^3 do consumo.

5. Univag-MT – Um grupo de ambientalistas alocou, no início de 1990, uma pequena população de 270 indivíduos de uma espécie animal em extinção em uma área de proteção ambiental. Devido ao ambiente propício para o desenvolvimento e procriação da espécie, os ambientalistas projetaram que o número N(t) de indivíduos dessa população cresceria exponencialmente ao longo dos primeiros 30 anos, segundo a função $N(t) = 270 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot t}$, sendo t o número de anos transcorridos após 1990.

Se após 20 anos o número de indivíduos dessa população passou a ser 480, confirmando a projeção feita pelos ambientalistas, então no início do ano 2020, quando serão completados os primeiros 30 anos, é esperado que o número de indivíduos dessa população seja igual a

a) 640
b) 690
c) 725
d) 585
e) 860

Temos que $N(20) = 270 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot 20} = 480$.

Logo $\left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot 20} = \frac{16}{9} \rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{k \cdot 20} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$.

$20k = 2$
$k = 0,1$

Portanto, $N(30) = 270 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{0,1 \cdot 30} = 270 \cdot \frac{64}{27} = 640$.

6. UFPA (adaptado) – Uma substância ingerida pelo organismo é excluída pelo sistema excretor segundo uma função exponencial. A vida média é o tempo que metade de uma quantidade ingerida leva para decair à metade, que, para a substância em questão, é de 12 horas. Calcule a quantidade da substância, em miligramas, a ser ingerida de modo que, ao final de 36 horas, a quantidade restante seja de 10 mg.

O tempo de meia-vida da substância é de 12h.

Então, em 36 horas teríamos a quantidade reduzida em $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ vezes.

Como a quantidade restante é de 10 mg, a quantidade inicial é de

$\frac{10}{\frac{1}{8}} = 80$ mg.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Espcex-SP – As raízes inteiras da equação $2^{3x} - 7 \cdot 2^x + 6 = 0$ são

a) 0 e 1
b) −3 e 1
c) −3, 1 e 2
d) −3, 0 e 1
e) 0, 1 e 2

8. UniCEUB-DF – O dobro da soma das raízes da equação

$$2\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = -3 \text{ é}$$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

9. UNP-RN – Um professor de educação física, com auxílio de um colega matemático, criou uma fórmula matemática para calcular aproximadamente a área, em metros quadrados (m^2), da superfície corporal de uma criança (Sc), em função da massa da criança (m) em quilograma, definida por: $SC = \frac{11}{100} m^{\frac{2}{3}}$.

Pegando como experiência uma criança de 8 kg e considerando $\left(2^{\frac{1}{2}} = 1{,}4\right)$, qual a massa que a criança terá quando a área de sua superfície corporal duplicar?

a) 32 kg
b) 16,7 kg
c) 18,92 kg
d) 22,4 kg

10. Unicamp-SP – Considere as funções

$f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

11. UESPI – Quantos números reais satisfazem a equação $(x^2 - 5x + 7)^{x+1} = 1$?

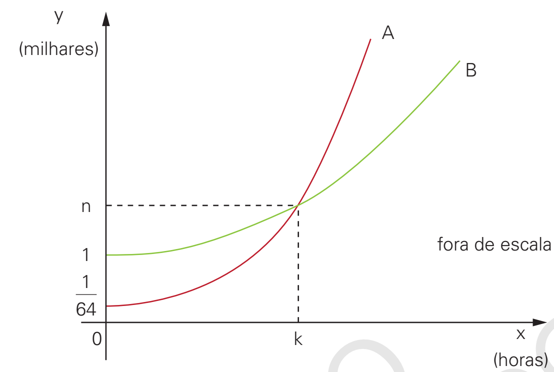
12. ITA-SP – A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação $8^{\sqrt{x+1}} + 44 \cdot \left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$ é igual a

a) 8 **c)** 16 **e)** 20
b) 12 **d)** 18

13. SLMANDIC-SP – A concentração de um fármaco no sangue é dada pela função $y = 100\ (0{,}9)^t$, com y em mg e t, em horas. A dose inicial e a quantidade deste fármaco no sangue de um paciente, após 3 horas da aplicação, são dadas, respectivamente, por:

a) 27 mg e 84,3 mg
b) 90 mg e 27 mg
c) 90 mg e 68,4 mg
d) 100 mg e 72,9 mg
e) 100 mg e 81 mg

14. Unicid-SP (adaptado) – O gráfico representa o crescimento de duas colônias de bactérias, A e B, que podem ser representadas, respectivamente, pelas funções $A(x) = a^{-x+2}$ e $B(x) = (4)^{\frac{x}{2}}$, sendo x o tempo em horas e A(x) e B(x) o número de bactérias (em milhares) das colônias A e B, respectivamente.



Sabendo que no momento k as duas colônias tinham o mesmo número n de bactérias (em milhares), calcule o valor de k + n.

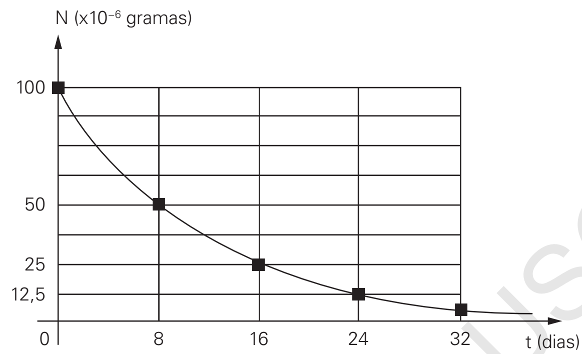
15. Mackenzie-SP – Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $g(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$. Então, podemos afirmar que

a) f é crescente e g é decrescente
b) f e g se interceptam em x = 0
c) $f(0) = -\,g(0)$
d) $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$
e) $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

16. UDESC – O conjunto solução da inequação $\left(\dfrac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x+1} \geqslant 0$ é

a) $[-2, -1]$
b) $[0, 1]$
c) $]-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty[$
d) $[0, +\infty[$
e) $[-2, -1] \cup [0, 1]$

17. PUC-RS (adaptado) – Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama. O iodo 131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico a seguir representa a massa residual de iodo 131 (n) presente em uma amostra em função do tempo (t).



A função que melhor descreve a massa residual de iodo 131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0e^{kt}$, onde

a) $N_0 > 0$ e $k > 0$
b) $N_0 < 0$ e $k > 0$
c) $N_0 > 0$ e $k < 0$
d) $N_0 < 0$ e $k < 0$

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFSM-RS C5-H22

Para tornar o conhecimento científico mais prático, uma escola resolveu montar um laboratório. A ideia surgiu depois da divulgação da pesquisa sobre o letramento científico no Brasil realizada pela primeira vez em 2014 pelo Instituto Abramundo, a qual aponta que apenas 5% das pessoas pesquisadas têm letramento científico proficiente. Para realizar a compra dos equipamentos, a direção da escola teve de recorrer a uma instituição financeira. O valor de cada parcela do financiamento foi de R$ 2.600,00. Em um dado mês, a direção atrasou o pagamento, o que acarretou uma multa de 2% sobre o valor da parcela e mais uma taxa de juro composto de 0,033% sobre o valor inicial da parcela por dia de atraso. A expressão que descreve o valor do juro pago pela escola em função do tempo t de atraso em dias é

a) $2600\,[(1{,}00033)^t - 0{,}98]$
b) $2600\,[(1{,}0033)^t - 0{,}98]$
c) $2600\,[(1{,}00033)^t + 0{,}02]$
d) $2600\,[(1{,}0033)^t + 0{,}02]$
e) $2600\,[(1{,}00033)^t - 0{,}8]$

19. EBMSP-BA C5-H21

Um novo tipo de circuito eletrônico que se dissolve em contato com líquidos, após cumprir sua função, acaba de ser desenvolvido por uma equipe internacional de cientistas. O circuito eletrônico biodegradável é um chip que apresenta componentes que se dissolvem em água ou em fluidos corporais porque têm dimensões nanométricas. Quem controla a dissolução do conjunto é seu envoltório, feito de seda, especialmente produzida pelo bicho-da-seda. Para garantir a característica semicondutora dos elementos ativos do chip e permitir o seu funcionamento, usou-se o silício, o material mais apropriado para essa função. Um circuito eletrônico, além dos elementos ativos, contém vários elementos passivos, como resistores, capacitores e indutores, nesse caso, fabricados com nanofios de magnésio e óxido de magnésio, que têm dissolução quase imediata quando entram em contato com o meio aquoso. Essa nova classe de dispositivos biodegradáveis tem grande aplicação na medicina porque apresenta biocompatibilidade e quantidades de substâncias muito menores do que aquelas usadas em procedimentos médicos corriqueiros, como cirurgias intravasculares, encapsulamento de medicamentos e suturas.

SANTOS, TIRABOSCHI, 2012.

Admitindo-se hipoteticamente que o percentual de funcionalidade do chip decresça em t dias de acordo com o modelo exponencial $f(t) = Ca^{-kt} - 150$, em que C, a e k são constantes reais, $a > 0$ e $a \neq 1$, e considerando-se que o circuito biodegradável é totalmente funcional no dia 0 e tem a metade de sua funcionalidade no dia 20, pode-se estimar corretamente que a queda de funcionalidade nos 40 primeiros dias é de

a) 94%
b) 90%
c) 86%
d) 82%
e) 78%

20. PUC-PR C5-H21

As leis governamentais dos Estados Unidos exigem que, antes que o querosene possa ser usado como combustível de jatos, deve haver a remoção dos poluentes do querosene com uso de argila. A argila fica no interior de um tubo e cada metro do tubo remove 20% dos poluentes que entram nele. Seja P_0 a quantidade inicial de poluentes e $P = f(n)$ a quantidade de poluentes que ainda permanecem após n metros da tubulação, a função $P = f(n)$ que melhor representa a quantidade de poluentes retidos no tubo é

a) $P = P_0(1,8)n^2$
b) $P = P_0(0,8)^n$
c) $P = P_0(0,2)^n$
d) $P = P_0(1,2)^n$
e) $P = P_0(0,8)n$

13

TIPOS DE FUNÇÃO E FUNÇÃO INVERSA

- Introdução
- Função injetora
- Função sobrejetora
- Função bijetora
- Função Inversa

HABILIDADES

- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Tipos de função

Introdução

As funções apresentam algumas propriedades que as caracterizam. Entre elas, podemos destacar: função injetora, função sobrejetora e função bijetora.

Na sequência, veremos em detalhes cada uma delas.

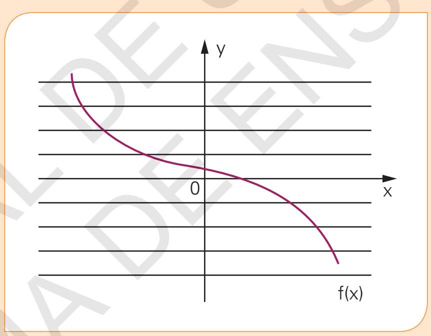
Função injetora

Uma função f: A $\rightarrow$ B é **injetora** (ou **injetiva**) quando elementos distintos do domínio apresentam imagens também distintas no contradomínio. Isso significa que, para cada valor de **x** que pertence ao domínio **A**, existe um único valor **y** (ou f(x)) que pertence ao contradomínio **B**.

Então $\forall x_1, x_2 \in A$, temos $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

MÉTODO PRÁTICO DE RECONHECIMENTO

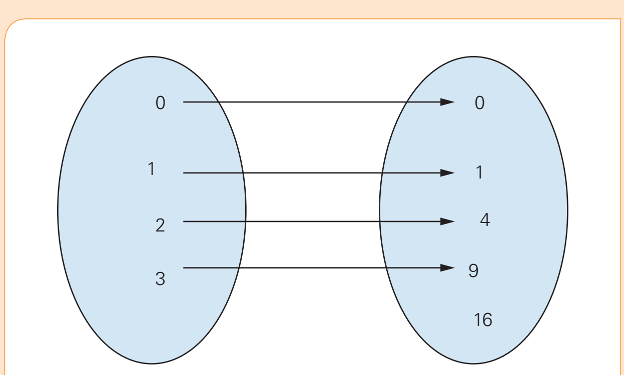
Graficamente se reconhece a função injetora quando uma reta horizontal qualquer intercepta o gráfico da função **uma única vez**.



Portanto, **f(x)** é injetora, pois uma reta qualquer horizontal intercepta o gráfico da função em um único ponto.

Exemplo 1

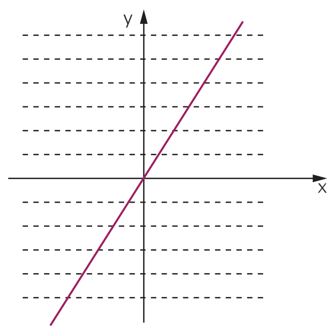
Verifique se a função **f** de A = {0, 1, 2, 3} em B = {0, 1, 4, 9, 16}, definida pela lei $f(x) = x^2$ é injetora.



Note que, se tomarmos dois elementos distintos de **A**, teremos como imagem dois elementos distintos de **B**. Como não existem dois elementos de **A** convergindo para um mesmo elemento de **B**, podemos afirmar que a função é **injetora.**

Exemplo 2

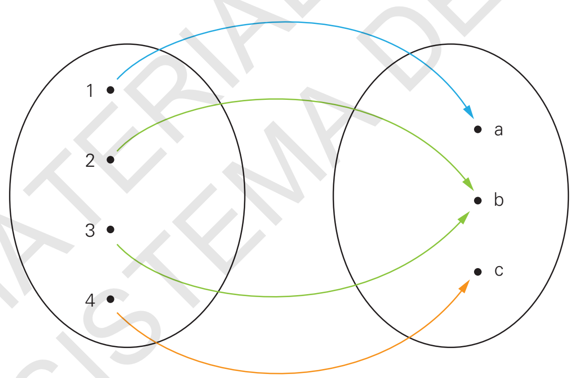
Verifique se a função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = 3x$, é injetora. Note que, para quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$, tem-se $4x_1 \neq 4x_2$, ou seja, $f(x_2) \neq f(x_2)$.



Portanto, para todo elemento **y** de **R**, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de **f** uma única vez. Assim, podemos concluir que a função **f** é **injetora.**

Função sobrejetora

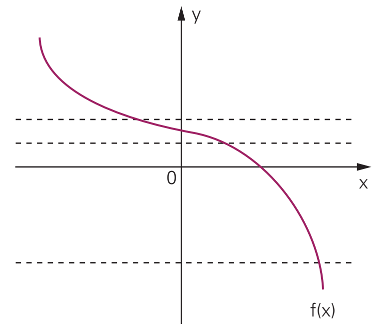
Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** (ou **sobrejetiva**) quando, para todo **y** pertencente ao contradomínio **B**, existe pelo menos um **x** pertencente a **A**, tal que $f(x) = y$. Ou seja, $\forall y, y \in B \to \exists x \in A : f(x) = y$.



Quando $f: A \to B$ é sobrejetora, Im (f) = B

MÉTODO PRÁTICO DE RECONHECIMENTO

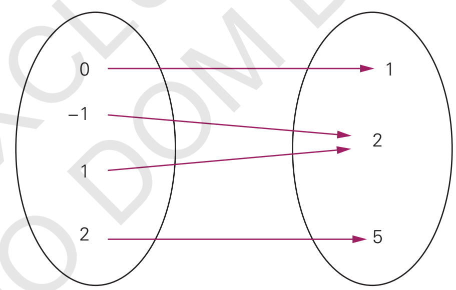
Graficamente se reconhece a função sobrejetora quando a reta horizontal que intercepta o eixo no contradomínio intercepta também o gráfico da função **pelo menos uma vez**.



Assim, **f(x)** é sobrejetora, pois há uma reta horizontal que intercepta o gráfico da função em pelo menos um ponto.

Exemplo 1

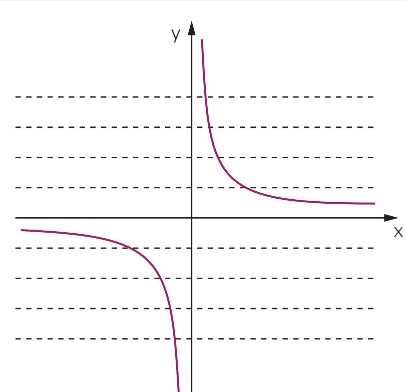
Verifique se a função f de A = {−1, 0, 1, 2} em B = {1,2,5}, definida pela lei $f(x) = x^2 + 1$, é sobrejetora.



Observe que, para todo elemento **y** de **B**, existe um elemento **x** de **A**, tal que $y = x^2 + 1$. Portanto, podemos afirmar que a função **f** é sobrejetora.

Exemplo 2

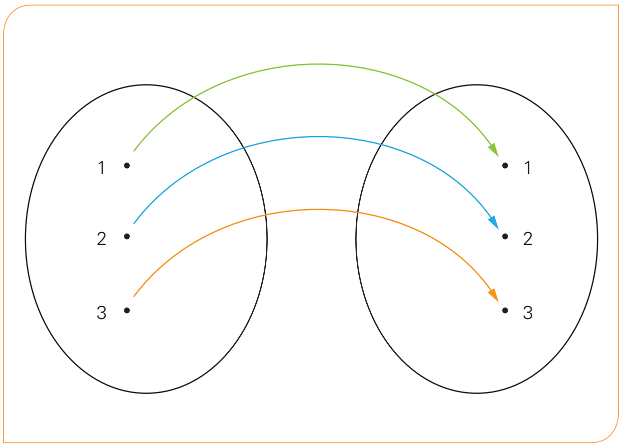
Dada a função **f** de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$, definida pela lei $f(x) = \frac{1}{x}$, verifique se a função é sobrejetora. Note que, para todo elemento **y** de $\mathbb{R}^*$, existe um elemento **x** de $\mathbb{R}^*$, tal que $y = \frac{1}{x}$.



Assim, para todo elemento **y** de $\mathbb{R}^*$, há uma reta paralela ao eixo das abscissas que intercepta o gráfico de **f**. Portanto, podemos concluir que a função **f** é sobrejetora.

Função bijetora

Uma função f: A → B é bijetora (ou bijetiva) quando apresenta as características de função **injetora e sobrejetora** simultaneamente. Ou seja, seus elementos distintos têm sempre imagens distintas, e todos os elementos do contradomínio são imagens de **pelo menos um elemento do domínio**.



Observação: Uma função bijetora apresenta o que se chama de relação biunívoca: para cada elemento, há uma única imagem e vice-versa. Uma função que não é nem injetora nem sobrejetora não apresenta uma classificação especial.

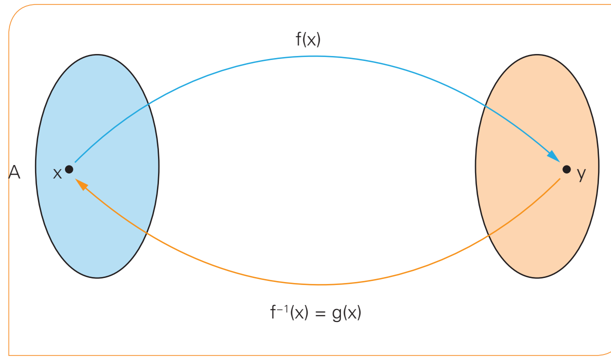
Função inversa

CONCEITO

Seja **f** uma função que converte a temperatura de graus Celsius (°C) para graus Fahrenheit (°F), então $F = f(C) = \frac{9}{5}(F - 32)$.

Portanto, precisamos utilizar certos métodos se quisermos encontrar uma função que converta graus Fahrenheit para Celsius. Essa nova função é chamada **função inversa**, representada por f^{-1}.

Vamos considerar uma função **f** com domínio **A** e contradomínio **B**, para a qual cada elemento **x** pertencente ao conjunto **A** apresenta imagem y = f(x) pertencente ao conjunto **B**. Podemos pensar na existência de uma função que, com base na imagem **y**, determine o elemento **x**, ou seja, uma função **g** tal que g(y) = x. Essa função **g**, que faz o caminho inverso da função **f**, é a função inversa de $f(f^{-1})$.

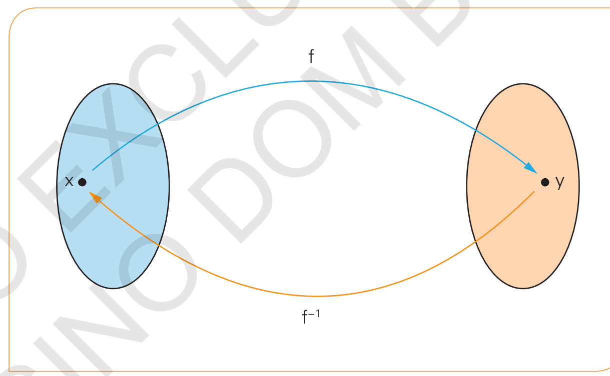


Observação: só pode existir a inversa da função **f** se **f** for bijetora.

Assim, podemos perceber que:

- o domínio da função **f** é o contradomínio de f^{-1};
- o contradomínio de **f** é o domínio de f^{-1}.

Logo, $D(f) = CD(f^{-1}) = Im(f^{-1})$.



$CD(f) = D(f^{-1}) = Im(f)$

DETERMINAÇÃO DA INVERSA

Enquanto a função **f** toma o elemento **x** e, por meio de **f**, apresenta o valor de sua imagem **y**, a função inversa f^{-1} toma a imagem **y** e, por meio de f^{-1}, apresenta o elemento **x**. Observe a aplicação dessa ideia no exemplo a seguir.

Determine a função inversa da função f(x) = 2x – 4.

1º Substituímos a notação de imagem de f(x) por **y**. Assim: y = 2x − 4.

2º Para determinar a inversa, isolamos o **x**. Logo: $2x = y + 4 \rightarrow x = \frac{y+4}{2}$.

3º Podemos dizer que encontramos a sentença que representa a inversa de f, pois, para cada imagem y dada, é possível obtermos o elemento **x** para o qual **y** serve de imagem. Para efeito de notação, porém, é comum permutarmos as letras x e y, obtendo, então, $y = \frac{x+4}{2}$.

4º Retornando à notação inicialmente usada para a função, substituímos **y** por $f^{-1}(x)$. Finalmente: $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$.

TIPOS DE FUNÇÃO

Injetora

Uma função f: A → B é injetora quando elementos distintos do domínio apresentam imagens também distintas no contradomínio

$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Bijetora

Uma função f: A → B é bijetora quando apresenta características de função injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Sobrejetora

Uma função f: A → B é sobrejetora quando para todo **y** pertencente ao contradomínio **B** existir um x pertencente a **A**, tal que f(x) = y.

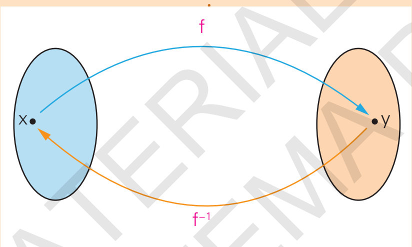
ROTEIRO DE AULA

FUNÇÃO INVERSA

Uma função bijetora f: A → B, a função inversa de f é f^{-1}; B → A, tal que (x, y) ∈ f ↔ (y, x) ∈ f^{-1}.

Para existir a inversa, é necessário que a função seja bijetora.

1. Na expressão y = f(x), troca-se **x** por **y**, obtendo x = f(y).
2. Isola-se **y**, obtendo-se a inversa da função dada.



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

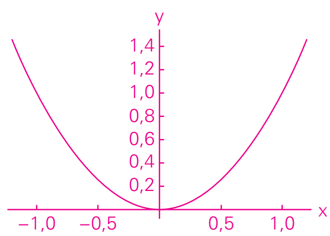
1. Sistema Dom Bosco – Verifique se as seguintes funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, com $f(x) = x^2$

b) $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$, com $f(x) = 3x$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x + 4$

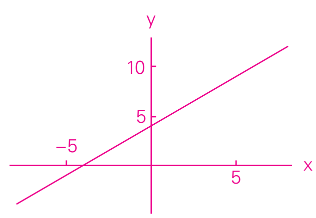
a) Analisando o gráfico de $f(x) = x^2$, temos:



Ao traçarmos retas horizontais, podemos ver que cada reta intercepta o gráfico mais de uma vez. Assim, **f** não é injetora. Como todas as retas horizontais, em $\mathbb{R}^+$, interceptam o gráfico, f é sobrejetora.

b) Temos que $f(x) = \{3, 6, 9, 12\}$.
Como cada elemento do domínio tem um único elemento correspondente no contradomínio de f, a função é injetora.
Como cada elemento do contradomínio de f não tem pelo menos um elemento correspondente em seu domínio, f não é sobrejetora.

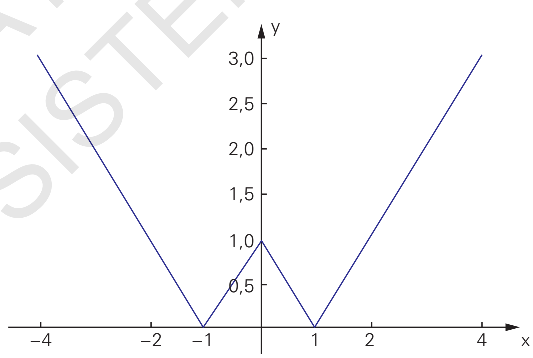
c) Analisando o gráfico de $f(x) = x + 4$, temos:



Assim, traçando diversas retas horizontais, as retas interceptam o gráfico uma única vez, e não existe nenhuma reta que não intercepta o gráfico. Dessa forma, f é injetora e sobrejetora. Portanto, é bijetora.

2. PUC-PR – Considere os seguintes dados.

Pode-se dizer que quando duas variáveis x e y são tais que a cada valor de x corresponde um único valor de y, segundo uma lei matemática, diz-se que y é função de x. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que é representada pelo gráfico ao lado.



Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir.

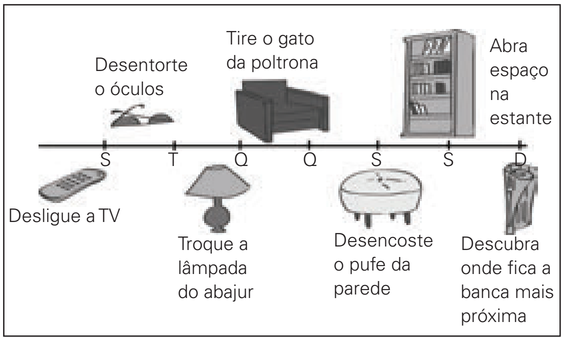
I. f é ímpar.
II. f é injetora.
III. A lei matemática de f é $f(x) = \left||x| - 1\right|$.
IV. f é crescente se, e só se, $x > 1$.
V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

a) Somente II é correta.
b) Somente I é correta.
c) Somente III e V são corretas.
d) Todas as proposições são corretas.
e) Todas as proposições são falsas.

I. f é ímpar.
Falso. – Como $f(x) = f(-x)$, f é par.
II. f é injetora.
Falso. Se traçarmos uma reta horizontal no gráfico, ela o intercepta em mais de um ponto. Logo, f não é injetora.
III. A lei matemática de f é $f(x) = \left||x| - 1\right|$.
Verdadeiro. Para $x > 0$, temos $f(x) = |x - 1|$.
Se $x \geq 1$, temos que $f(x) = x - 1$.
Se $x < 1$, temos que $f(x) = 1 - x$.
Para $x < 0$, temos $f(x) = |-x - 1|$.
Se $x \leq -1$, temos que $f(x) = -x - 1$.
Se $x > -1$, temos que $f(x) = x + 1$
Portanto, o gráfico de f é igual ao da questão.
IV. f é crescente se, e só se, $x > 1$.
Falso. A função é crescente no intervalo $-1 < x < 0$.
V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.
Verdadeiro, pois $f(f(-1)) = f(0) = 1$ $f(f(1)) = f(0) = 1$.
Logo, $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

3. UEL-PR (adaptado) C5-H23

Observe a imagem a seguir, utilizada como peça publicitária em uma campanha para venda associada de jornais e livros de literatura, e responda à questão.



Peça publicitária veiculada pelo jornal *Folha de S.Paulo*, em 18 maio de 2003, p. A 21.

Na disposição dos elementos que integram a peça publicitária, considere: A = conjunto formado pelos dias da semana. B = conjunto formado pelas ações associadas aos dias da semana. Sobre esses conjuntos, é correto afirmar:

a) Existe uma função f: A → B bijetora.
b) Existe uma função f: A → B injetora e não sobrejetora.
c) Existe uma função f: B → A sobrejetora e não injetora.
d) Existe uma função f: B → A injetora e não sobrejetora.
e) Existe uma relação $\mathbb{R}$: A → B que não é uma função.

Segundo a peça publicitária, existe uma única ação associada a cada dia da semana. Podemos dizer que há uma função que associa cada dia da semana a uma ação. Logo, **f** é injetora. Como todas as ações de **B** têm um elemento no conjunto **A**, **f** é sobrejetora. Como **f** é injetora e sobrejetora, **f** é bijetora.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

4. UECE (adaptado) – A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ é invertível. Se f^{-1} é sua inversa, então, calcule o valor de $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2$.

Temos então que:

$y = \frac{x+2}{x-2}$

Invertendo **x** e **y**:

$x = \frac{y+2}{y-2}$

$(y - 2)x = y + 2$

$xy - 2x = y + 2$

$xy - y = 2x + 2$

$y(x - 1) = 2x + 2$

$y = \frac{2x+2}{x-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

Assim, temos que:

$f(0) = \frac{2}{-2} = -1$

$f^{-1}(0) = \frac{2}{-1} = -2$

$f^{-1}(-1) = \frac{-2+2}{-2} = 0$

Portanto, $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2 = (-1 - 2 + 0)^2 = (-3)^2 = 9$.

5. Cefet-MG – Sejam f e g duas funções reais, tais que $g = f^{-1}$. Nessas condições,

a) o domínio de f e de g são iguais.
b) se f é injetora, então g é sobrejetora.
c) $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, $\forall x \in Df$, $\forall x \in Dg$.
d) o contradomínio de f será o conjunto imagem de g.

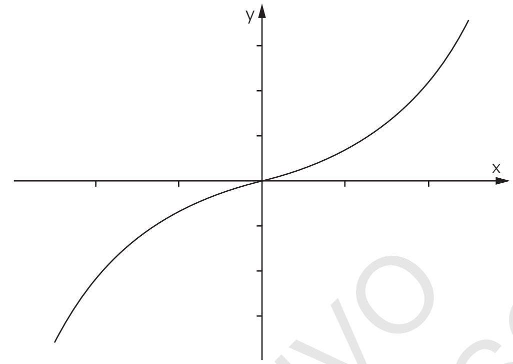
a) O domínio de **f** e de **g** são iguais. Falso.
O domínio de **f** é igual ao contradomínio de **g**.

b) Se **f** é injetora, então **g** é sobrejetora. Falso.
Para que exista a inversa de **f**, **f** deve ser bijetora. Porém, **f** injetora não implica **g** sobrejetora.

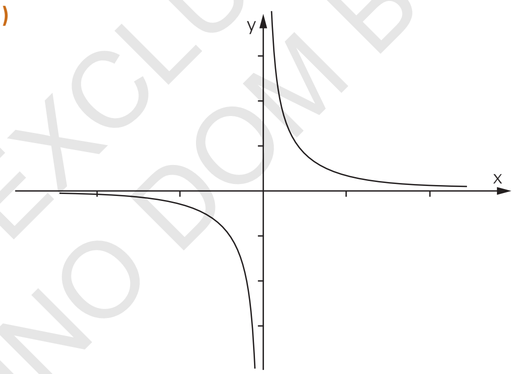
c) $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, v; $x \in Df$, $\forall x \in Dg$. Verdadeiro.
$f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

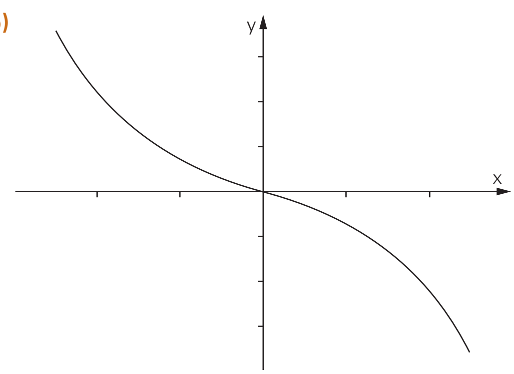
d) O contradomínio de **f** será o conjunto imagem de **g**. Falso.
O contradomínio de **f** é o domínio de **g**.

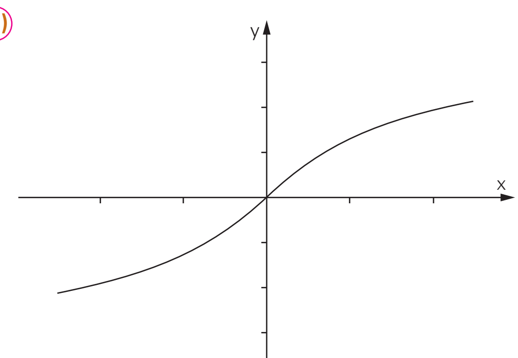
6. Unicamp-SP – Considere o gráfico da função $y = f(x)$ exibido na figura a seguir.



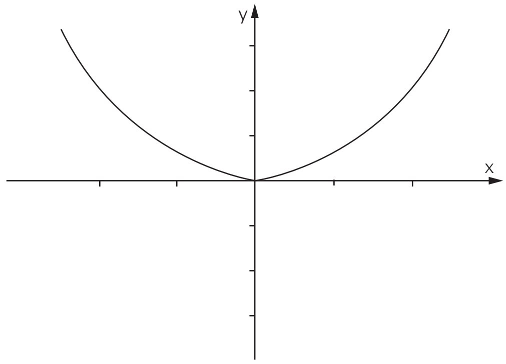
O gráfico da função inversa $y = f^{-1}(x)$ é dado por

a)


b)


c)


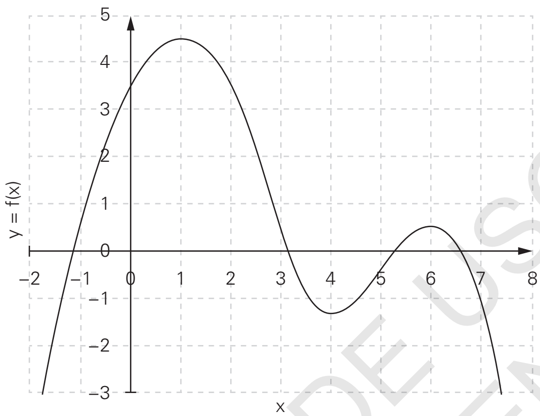
d)



Traçamos no gráfico a reta y = x. Como as funções f e f^{-1} são simétricas entre si em relação a y = x, a função f^{-1} é dada por:

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UFPR – A respeito da função representada no gráfico ao lado, considere as seguintes afirmativas:



1) A função é crescente no intervalo aberto (4, 6).

2) A função tem um ponto de máximo em x = 1.

3) Esse gráfico representa uma função injetora.

4) Esse gráfico representa uma função polinomial de terceiro grau.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

b) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.

e) Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.

8. Urca-CE – Assinale a alternativa que contém uma função que é sempre injetora.

a) A função que associa a cada morador de uma cidade, a sua idade.

b) A função que associa a cada país que possui um presidente, seu presidente.

c) A função que associa a cada aluno de uma escola, sua mãe.

d) A função que associa a cada música que possui um único compositor, seu compositor.

e) A função que associa a cada time que possua um único patrocinador, seu patrocinador.

9. Unitau-SP – Considere A um conjunto com 3n − 3 elementos; B um conjunto com 2n + 1 elementos; f: A → B uma função.

Se f é injetora, é CORRETO afirmar:

a) $1 < n \leq 4$

b) $5 < n \leq 7$

c) $7 < n \leq 10$

d) $10 < n \leq 11$

e) $11 < n \leq 12$

10. IFSC – Analise as afirmações a seguir e assinale no cartão-resposta a soma da(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01) A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 10 - 2^x$, é decrescente e sobrejetiva.

02) A área da região plana fechada, pertencente ao 1º quadrante e limitada pela função $f(x) = 12 - 2x$, é igual a 72 u.a.

04) A imagem da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 20$, é dada pelo conjunto $Im = [16, +\infty[$.

08) Se g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = 2x - 11$, então $g(2x + 3) = 4x - 5$.

16) Se a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + bx + 10$ e com $b \in \mathbb{R}$, tem valor mínimo igual a 1, então o único valor possível para b é 6.

32) A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ||x - 2| - 1|$, possui três raízes reais distintas.

11. ITA-SP (adaptado) – Considere funções f, g, f + g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se f e g são injetoras, f + g é injetora;

II. Se f e g são injetoras, f + g é injetora;

é (são) verdadeira(s)

a) nenhuma.

b) apenas I.

c) apenas II.

d) todas.

12. Unit-AL (adaptado) – Se o gráfico da função inversa $f(x) = 2^{c-4x}$ de intercepta o eixo das abscissas no valor $\sqrt{2}$, então calcule o valor da constante c.

13. UEM-PR – Considerando as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -x^2 + 20x - 16$ e $g(x) = -5x + 10$, para todo x real, assinale o que for **correto**.

01) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 84$.

02) $(f + g)(1) = 8$.

04) Os gráficos de f e g não se interceptam.

08) O gráfico da função g é uma parábola com concavidade voltada para cima.

16) A função f não possui inversa e $g^{-1}(x) = -\dfrac{x}{5} + 2$, para todo x real.

14. Unit-SE – Se f(x) é uma função do 1º grau que intercepta os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, em $x = 4$ e $y = 2$, é correto afirmar sobre sua função inversa $f^{-1}(x)$ que

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{4 - x}$.

b) ela é crescente.

c) seu coeficiente linear é $\dfrac{1}{2}$.

d) seu coeficiente angular é -2.

e) ela não intercepta o eixo das abscissas.

15. AFA-SP – Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x)\begin{cases} x - 3 \text{ se } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{2} - x \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) A função f é injetora.

( ) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, a função f é crescente.

( ) A função f^{-1}, inversa de f, é dada por f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

tal que $f(x)^{-1}\begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leq -1 \\ \sqrt{4x + 4}, \text{ se } x > -1 \end{cases}$

A sequência correta é

a) F – V – V

b) V – V – V

c) F – V – F

d) V – F – V

16. Espcex-SP (adaptado) – Considere a função bijetora $f: [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a,b) o ponto de intersecção de f com sua inversa. Calcule o valor numérico da expressão $a + b$.

17. ITA-SP – Considere as funções $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

a) $b + ad = d + bc$
b) $d + ba = c + db$
c) $a + db = b + cd$
d) $b + ac = d + ba$
e) $c + da = b + cd$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H22

No primeiro ano do ensino médio de uma escola, é hábito os alunos dançarem quadrilha na festa junina. Neste ano, há 12 meninas e 13 meninos na turma, e para a quadrilha foram formados 12 pares distintos, compostos por uma menina e um menino. Considere que as meninas sejam os elementos que compõem o conjunto A e os meninos, o conjunto B, de modo que os pares formados representem uma função f de A em B. Com base nessas informações, a classificação do tipo de função que está presente nessa relação é

a) f é injetora, pois para cada menina pertencente ao conjunto A está associado um menino diferente pertencente ao conjunto B.
b) f é sobrejetora, pois cada par é formado por uma menina pertencente ao conjunto A e um menino pertencente ao conjunto B, sobrando um menino sem formar par.
c) f é injetora, pois duas meninas quaisquer pertencentes ao conjunto A formam par com um mesmo menino pertencente ao conjunto B, para envolver a totalidade de alunos da turma.
d) f é bijetora, pois dois meninos quaisquer pertencentes ao conjunto B formam par com uma mesma menina pertencente ao conjunto A.
e) f é sobrejetora, pois basta que uma menina do conjunto A forme par com dois meninos pertencentes ao conjunto B, assim nenhum menino ficará sem par.

19. Uenp-PR C6-H25

A criptografia, conhecida como a arte de esconder mensagens, está associada ao uso da matemática para o envio de informações, geralmente, confidenciais. Um método simples de criptografar mensagens consiste na substituição das letras do alfabeto por números; outro mais conhecido é chamado de Código de César, em que se substitui cada letra da mensagem original pela terceira letra que a precedia no alfabeto. Considere a relação de letras e números a seguir.

A – 1	B – 2	C – 3	D – 4	E – 5	F – 6	G – 7
H – 8	I – 9	J – 10	K – 11	L – 12	M – 13	N – 14
O – 15	P – 16	Q – 17	R – 18	S – 19	T – 20	U – 21
V – 22	W – 23	X – 24	Y – 25	Z – 26		

Considere a função G(x) = 2x + 1 que recebe o valor da letra que se quer e gere um valor por meio de G(x), resultando na mensagem 27 3 41 11 27 3 41 19 7 3. A seguir, desvende a mensagem contida e encontre a função inversa de G(x) que traduz a mensagem para o leitor.

a) Comunidade; $G^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

b) Comunidade; $G^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

c) Informação; $G^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

d) Matemática; $G^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

e) Matemática; $G^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

20. Insper-SP (adaptado) C5-H21

No período de vendas simultâneas nas bilheterias e pela internet, a função v(t) é dada por: $v(t) = -0{,}1t^2 + 4t - 10$. O tempo necessário (em dias) para que a quantidade de ingressos vendidos (em milhões) seja de 10 milhões é de

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20
e) 25

14 LOGARITMOS

- Introdução
- Definição
- Condição de existência
- Consequências importantes da definição

HABILIDADES

- Compreender a definição de logaritmo.
- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.
- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações de operações e números (naturais, inteiros, racionais ou reais).
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Definição

A linguagem do logaritmo é apresentada de forma reduzida pelo símbolo $\log_b a$, que pode ser lido como logaritmo de a na base b.

Define-se $\log_b a$ como o valor real x que satisfaz $\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$.

$$\log_{b} a = \boxed{x} \leftrightarrow b^x = a$$

Notação:

- **b** é a base;
- **a** é o logaritmando ou antilogaritmo;
- **x** é o logaritmo.

Exemplos:

- $\log_{10} 10\,000 = 4$ pois $10^4 = 10\,000$
- $\log_7 49 = 2$, pois $7^2 = 49$
- $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 3$
- $\log_5 1 = 0$, pois $(5)^0 = 1$
- $\log_2(-4)$ não existe, pois 2^α é positivo para qualquer valor de α
- $\log_{(-2)} 4$ não existe, pois não existe α tal que $(-2)^\alpha = 4$
- $\log_1 4$ não existe, pois $1^\alpha = 4$ para qualquer valor de α

Condição de existência

O logaritmo descreve uma potência na igualdade $b^x = a$. De acordo com o estudo das equações exponenciais, $b > 0$ e $b \neq 1$. Assim, o resultado b^x é sempre positivo, pois a base é um número positivo. Com base nisso, chega-se à condição de existência do logaritmo $\log_b a$: $0 < b \neq 1$ e $a > 0$.

Exemplo:

A sentença $\log_b a = x$ é definida para $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Para quais valores de x existe $\log_{10}(100 - x)$?

$100 - x > 0$ $\qquad$ $100 > x$ $\qquad$ $x < 100$

LOGARITMO DO PRODUTO

O logaritmo do produto de dois números é igual à soma dos logaritmos desses números, conservando-se a base:

$\log_b(p \cdot q) = \log_b p + \log_b q$

LOGARITMO DO QUOCIENTE

O logaritmo do quociente de dois números é igual à diferença dos logaritmos desses números, conservando-se a base.

$$\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q$$

LOGARITMO DA POTÊNCIA

O logaritmo de potência de base positiva é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência, conservando-se a base do logaritmo:

$\log_b(p^k) = k \cdot \log_b p$

MUDANÇA DE BASE

A base de um logaritmo qualquer pode ser alterada para facilitar os cálculos. Para transformar um logaritmo de base **b** para base **c**, usamos a relação $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$, em que **c** é real, positivo e diferente de 1.

Consequências importantes da definição

Das definições de logaritmo, podemos apontar algumas consequências importantes quanto às suas propriedades.

Seja **b** um número real positivo e diferente de 1; **a**, um número real positivo; e **k**, um número real qualquer, temos as seguintes consequências:

1º O logaritmo de 1 em qualquer base **b** é igual a zero: $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$.

2º O logaritmo da base **b**, qualquer que seja ela, é igual a 1: $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$.

3º O logaritmo de uma potência, em qualquer base real e positiva, é igual ao produto de seu expoente pelo logaritmo da base da potência: $\log_b b^k = k$, pois $\log_b b = 1$ e $\log_b b^k = k \cdot \log_b b = k$.

A potência de base **b** e expoente $\log_b a$ é igual a **a**.

Consequências das propriedades do logaritmo

Das propriedades do logaritmo, podemos ressaltar algumas consequências de suas propriedades operatórias.

Logo:

1º $\log_b\left(\dfrac{1}{p}\right) = -\log_b(p)$

3º $\log_{b^n} p = \dfrac{1}{n} \cdot \log_b p$

4º $\log_b p = \dfrac{1}{\log_p b}$, com $p \neq 1$

Consequências importantes da definição

Das definições de logaritmo, podemos apontar algumas consequências importantes quanto às suas propriedades.

Seja **b** um número real positivo e diferente de 1; **a**, um número real positivo; e **k**, um número real qualquer, temos as seguintes consequências:

1º O logaritmo de 1 em qualquer base **b** é igual a zero: $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$.

2º O logaritmo da base **b**, qualquer que seja ela, é igual a 1: $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$.

3º O logaritmo de uma potência, em qualquer base real e positiva, é igual ao produto de seu expoente pelo logaritmo da base da potência: $\log_b b^k = k$, pois $\log_b b = 1$ e $\log_b b^k = k \cdot \log_b b = k$.

A potência de base **b** e expoente $\log_b a$ é igual a **a**.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. FGV – Entre as sentenças, assinale a verdadeira.

a) $2^{\log_2 3} = 3$

b) $\log\left(\dfrac{125}{3}\right) = \dfrac{\log 125}{\log 3}$

c) o logaritmo decimal de 1 trilhão é 15.

d) log 200 = 2 log 2

e) $\log \dfrac{1}{\sqrt{100000}} = -3$

Resolução:

A alternativa a representa um consequência direta da definição.

$a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b$, com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

De fato, aplicando a definição na sentença obtém-se a igualdade verdadeira.

$$2^{\log_2 3} = 3 \leftrightarrow \log_2 3 = \log_2 3$$

2. IFSC – O valor **correto** da expressão

$E = \log_2 8 + \dfrac{0{,}001}{10000} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ é

a) 10 000

b) 11,0000001

c) $11 \cdot 10^{-7}$

d) 11

e) –1

Resolução:

Resolvendo a expressão, temos:

$E = \log_2 8 + \dfrac{0{,}001}{10000} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

$E = 3 + \dfrac{10^{-3}}{10^4} + 2^3$

$E = 11 + 10^{-7}$

$E = 11 + 0{,}0000001$

$E = 11{,}0000001$

ROTEIRO DE AULA

LOGARITMO

Definição

$\log_b a = x \rightarrow \begin{cases} a \rightarrow \text{logaritimando} \\ b \rightarrow \text{base} \\ x \rightarrow \text{logaritmo} \end{cases}$

Condição de existência

$\begin{cases} \log_b 1 = 0 \\ \log_b b = 1 \\ \log_b (b^n) = n \\ b^{\log_b a} = a \end{cases}$

Propriedades

$\begin{cases} \log_b (p \cdot q) = \log_b p + \log_b p \\ \log_b (p^k) = k \cdot \log_b p \\ \log_b \left(\dfrac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q \\ \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \end{cases}$

LOGARITMO

Representações especiais

Logaritmo decimal:

$\text{Log}_{10}\ 10 =$ log a

Logaritmo neperiano:

$\log_e a =$ ln a com e = 2,7...

Condição de existência

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b (b^n) = n$

$b^{\log_b a} = a$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RJ – Seja $x = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27$.

Então, é correto afirmar que:

a) $6 \leqslant x < 7$
b) $7 \leqslant x < 8$
c) $8 \leqslant x < 9$
d) $9 \leqslant x < 10$
e) $x \geqslant 10$

Temos que:
$X = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27 = \log_2 3^6 = \log_2 729$
$2^9 < 729 < 2^{10}$
$9 < x < 10$
Portanto,
$9 \leqslant x < 10$.

2. UDESC – Se $\log_3(x-y) = 5$ e $\log_5(x+y) = 3$, então $\log_2(3x-8y)$ é igual a:

a) 9
b) $4+\log_2 5$
c) 8
d) $2+\log_2 10$
e) 10

Temos que, se $\log_3(x-y)=5$:

$x - y = 3^5 = 243$

$\log_5(x + y) = 3$

$x + y = 5^3 = 125$

Somando as equações temos:
$x = \frac{368}{2} = 184$.

Se $x = 184$:

$x + y = 125$

$y = -59$

Logo,

$\log_2(3x - 8y) = \log_2(552 + 472) =$
$= \log_2(1024) = \log_2 2^{10} = 10 \cdot \log_2 2 = 10$

3. Unit-SE C5-H21

Para uma campanha de vacinação em um determinado município, são disponibilizadas x doses de vacina. Se o planejado é que o número de doses a serem disponibilizadas dobre a cada ano, então, considerando-se $\log 2 = 0{,}3$, esse número passará a ser 10 vezes o número inicial, após

a) 3 anos.
b) 3 anos e 4 meses.
c) 3 anos e 6 meses.
d) 3 anos e 8 meses.
e) 3 anos e 10 meses.

O número de doses disponibilizadas no mês **n** é de $N = 2^n N_0$, em que N_0 é o número de doses iniciais.
Assim, quando $N = 10N_0$, temos:
$10 = 2^n$
$\log 10 = \log 2^n$
$n \cdot \log 2 = 1$
$n = \frac{1}{0{,}3} = 3{,}333\ldots = 3$ anos e $\frac{1}{3}$ ano $= 3$ anos e 4 meses

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. FGV-RJ – Em uma experiência de Física, para cada valor da variável contínua x, obteve-se, no laboratório, um resultado y. A tabela a seguir mostra os resultados de cinco medidas realizadas para valores inteiros de x:

x	y
1	2,97
2	9,05
3	26,8
4	81,6
5	241

Os resultados sugeriram que, para os valores de x do intervalo [1, 5], uma função adequada para modelar essa experiência é exponencial, ou seja, da forma $y = a^x$. De fato, para certo valor inteiro de a, os valores encontrados na experiência e os valores dados por essa função diferem muito pouco. Usando essa função, determine, aproximadamente, para que valor de x encontra-se $y = 100$.

Utilize o que for necessário:

$\log_2 = 0{,}301$

$\log_3 = 0{,}477$

$\log_5 = 0{,}699$

Para $a = 3$, os valores de y são próximos a 3^x.
Assim, devemos encontrar o valor de x tal que $3^x = 100$.
Calculando os logaritmos decimais: $x \cdot \log 3 = \log 100 = 2$
Portanto, $x = \frac{2}{0{,}477} \simeq 4{,}2$.

5. UFSCar-SP – Uma garota recebeu de presente de aniversário R$ 400,00 e decidiu gastá-lo da seguinte forma: no 1º dia, gastou R$ 200,00; no 2º dia, gastou R$ 100,00; e, assim, a cada dia gastava apenas a metade do que havia gasto no dia anterior. Procedendo dessa forma, e sabendo que log 2 = 0,30, pode-se concluir que o número de dias necessários para que ela tenha menos de R$ 1,00 para gastar será

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

Como a garota sempre gasta metade de seu dinheiro, em **n** dias, ela gasta $200\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 200 \cdot 2^{1-n}$.

Para que ela tenha menos de R$ 1,00, temos que $1 = 200 \cdot 2^{1-n}$.

$\log 1 = \log(200 \cdot 2^{1-n}) \to 0 = \log 200 + \log 2^{1-n} =$

$= \log 2 + \log 100 + (1-n)\log 2 = 0{,}3 + 2 + 0{,}3 - n \cdot 0{,}3$

$n = \frac{2{,}6}{0{,}3} = 8{,}666...$

Ou seja, serão necessários pelo menos 9 dias para que ela tenha menos de R$ 1,00.

6. Unitau-SP – O produto $(\log_2 7) \cdot (\log_7 5) \cdot (\log_5 4)$ é igual a

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Calculando, temos:

$(\log_2 7)\cdot(\log_7 5)\cdot(\log_5 4) = \frac{\log 7}{\log 2}\cdot\frac{\log 5}{\log 7}\cdot\frac{2\cdot\log 2}{\log 5} = 2$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Cefet-MG – O conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para que $\log_{(1-2x)}(2-x-x^2)$ exista como número real é

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x < \frac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R}^* \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

8. Facisa-MG – Ao simplificarmos a expressão $\frac{2}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_4 x}$ considerando válidas as condições de existência dos logaritmos, obtemos por resultado:

a) $\log_x 900$
b) $\log_x 576$
c) $\log_x 144$
d) $\log_x 225$
e) $\log_x 120$

9. Fuvest-SP (adaptado) – Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão e calcular o valor de S.

$$S = \frac{1}{2\cdot\log_2 2016} + \frac{1}{5\cdot\log_3 2016} + \frac{1}{10\cdot\log_7 2016}$$

10. UEM-PR – Se log 2 = a e log 3 = b, então é correto afirmar que

01) $\log 360 = 6(a + b) + 1$.

02) $\log_{0,04} 18 = \dfrac{a+2b}{a-1}$.

04) $\log_x 40 = 2$ tem solução $x = \sqrt{10^{2a+1}}$.

08) $\log 8^x - \log 6^{2x} - x^2$ tem duas soluções, sendo uma delas $x = a - 2b$.

16) $\log\sqrt{250} = \dfrac{3}{2} - a$.

11. AFA-SP – Considere os números A, B e C a seguir.

$A = \log_{25} 27 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$

$B = \log_n\left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right)$ (n é natural maior que 2)

$C = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\dfrac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\log b}, \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}_+^*$

A correta relação de ordem entre os números A, B e C é

a) $A < B < C$
b) $B < A < C$
c) $B < C < A$
d) $C < A < B$

12. ITA-SP – Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}$;

II. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\dfrac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$.

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$.

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas II e III.
e) todas.

13. Fameaço-MG – Calcule $\log\left(10^3 \cdot 100^{\frac{1}{3}}\right)$ e assinale a alternativa **CORRETA**.

a) 1 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{11}{3}$

14. Unicamp-SP – Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x.

a) Mostre que $f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ é um número inteiro.

b) Sabendo que $\log_2 \approx 0{,}3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

15. UDESC – Sabendo que os números reais x, y e z são tais que $\log_y x = 5$ e $\log_y z = 7$, então $\log_x\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right)$ é igual a:

a) -5 **b)** -3 **c)** -2 **d)** $\frac{57}{5}$ **e)** $\frac{41}{5}$

16. AFA-SP – Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de 2013, a população de pássaros da espécie A era 12 vezes a população de pássaros da espécie B. Sabe-se que a população de pássaros da espécie A cresce a uma taxa de 5% ao ano, enquanto a população de pássaros da espécie B cresce a uma taxa de 20% ao ano. Com base nesses dados, é correto afirmar que essas duas populações de pássaros serão iguais (Considere: $\log_7 = 0{,}85$; $\log 6 = 0{,}78$; $\log 2 = 0{,}3$)

a) no 1º semestre do ano de 2034.
b) no 2º semestre do ano de 2034.
c) no 1º semestre do ano de 2035.
d) no 2º semestre do ano de 2035.

17. Unitau-SP – Sabendo-se que

$$B=\log\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}}},\ \log_b a=\frac{k}{m},\ \log b=m\ \text{ e a, b, k e m}$$

são constantes reais maiores que zero e diferentes de um, é CORRETO afirmar que

a) $B = -60k$

b) $B = 60m$

c) $B=-\frac{k}{60}$

d) $B=\frac{m}{60}$

e) $B=\frac{k}{60m}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Unifor-CE C5-H19

Desde tempos imemoriais, o ser humano vem buscando formas de medir e quantificar fenômenos naturais. Nesse processo, desenvolveu ferramentas físicas e abstratas para auxiliá-lo. Uma dessas ferramentas desenvolvidas foi o logaritmo na base 10, representado aqui por log. A medida da magnitude R de um terremoto, medido pela escala Richter, é $R=\log\frac{a}{T}+B$, em que a é a amplitude (em micrômetros) do movimento vertical do solo, que é informado em um sismógrafo; T é o período do abalo sísmico em segundos; e B é a amplitude do abalo sísmico, com distância crescente partindo do centro do terremoto. Em 16 de setembro de 2015, um terremoto de magnitude 8,3 atingiu o Chile, próximo à região de Valparaíso, deixando várias vítimas. Em 8 de setembro de 2017, um terremoto de magnitude 5,3 atingiu a região norte do Japão. Sabendo que os dois terremotos acima tiveram a mesma amplitude B e período T, podemos afirmar que o terremoto no Chile foi

a) 2 vezes mais forte que o do Japão.
b) 3 vezes mais forte que o do Japão.
c) 10 vezes mais forte que o do Japão.
d) 100 vezes mais forte que o do Japão.
e) 1 000 vezes mais forte que o do Japão.

19. Enem C5-H22

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$. O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

a) 22 **b)** 50 **c)** 100 **d)** 200 **e)** 400

20. IFPE C5-H21

Os alunos do curso de Meio Ambiente do campus de Santo Agostinho observaram que o número de flores em uma árvore X segue o modelo matemático $F(h) = 16 - \log_2(3h+1)$, onde F(h) é a quantidade de flores após h horas de observação. Após quanto tempo de observação esta árvore estará com apenas 10 flores:

a) 6 horas
b) 25 horas
c) 20 horas
d) 21horas
e) 64 horas

15

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

- Introdução
- Definição de equação logarítmica
- Propriedades operatórias
- Resolução de equação logarítmica
- Propriedade Operatória
- Aplicação

HABILIDADES

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para construir argumentos.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Introdução

Agora abordaremos o conceito, as propriedades e as formas de resolução de equações logarítmicas.

Resolução de equação logarítmica

Podemos dividir as equações logarítmicas em alguns casos específicos, a fim de facilitar sua compreensão.

EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A UMA IGUALDADE ENTRE DOIS LOGARITMOS

Vamos considerar que o logaritmo de base 2, do número $(x^2 - x)$, é igual a 1. Ou seja, $\log_2 (x^2 - x) = 1$. Assim, pela condição de existência dos logaritmos, temos $x^2 - x > 0$.

Então:

$\log_2 (x^2 - x) = 1 \rightarrow x^2 - x = 2^1$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1$ ou $x = 2$

Como $(-1)^2 - (-1) = 2 > 0$ e $(2)^2 - 2 = 2 > 0$, ambos os valores de **x** satisfazem à equação logarítmica. Portanto, $S = \{-1, 2\}$.

EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM USO DE PROPRIEDADES

Muitas vezes precisamos aplicar as propriedades operatórias, a fim de reduzir a equação a um dos dois casos anteriores.

Para resolvermos uma equação logarítmica em $\mathbb{R}$ como $\log_3 (3x + 6) - \log_3 (x + 2) = 1$, as condições de existência são dadas por:

$3x + 6 > 0$ e $x + 2 > 0$

$x > -2$

Assim:

$\log_3 (3x + 6) - \log_3 (x + 2) = 1$

$\log_3 \left(\dfrac{3x + 6}{x + 2}\right) = 1$

$3^1 = \dfrac{3x + 6}{x + 2}$

$3(x + 2) = 3x + 6$

$3x + 6 = 3x + 6$

Portanto, a igualdade é válida para qualquer valor de **x** em $\mathbb{R}$ que satisfaça à condição de existência.

Então, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM MUDANÇA DE VARIÁVEL

Para determinarmos o conjunto solução da equação $(\log x)^2 + \log x = 2$, em $\mathbb{R}$, a condição de existência é dada por $x > 0$.

Chamamos $\log x = y$. Então:

$y^2 + y = 2$

$y^2 + y - 2 = 0$

$y = -2$ ou $y = 1$

Assim, para $y = -2$:

$$\log x = -2 \rightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

Para $x = 1$:

$\log x = 1 \rightarrow x = 10^1 = 10$

Ao verificarmos, temos:

$$x = \frac{1}{100} > 0$$

$x = 10 > 0$

Portanto, $x = \frac{1}{100}$ ou $x = 10$, $S = \left\{\frac{1}{100}, 10\right\}$.

EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM MUDANÇA DE BASE

Às vezes, os logaritmos envolvidos na equação são expressos em bases diferentes. A mudança de base é essencial para facilitar a resolução.

Como na equação $\log_4 x + \log_x 4 = 2$, pelas condições de existência, $x > 0$ e $x \neq 1$.

Ao mudarmos de base, temos $\log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}$.

Substituindo na equação $\log_4 x + \frac{1}{\log_4 x} = 2$.

Chamamos $\log_4 x = y$.

Logo:

$$y + \frac{1}{y} = 2$$

$y^2 + 1 = 2y$

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y - 1)^2 = 0$

$y = 1$

Assim, $\log_4 x = 1 \Rightarrow x = 4$.

Portanto, a solução da equação logarítmica é $S = \{4\}$.

Propriedade operatória

Considerando **b**, **a** e **β** números reais positivos, com **b** ≠ **1**, temos equivalência entre os termos.

$$\log_b \alpha = \log_a \beta \leftrightarrow \alpha = \beta$$

Com essa propriedade e sempre obedecendo às condições de existência dos logaritmos, se ocorre uma igualdade de dois logaritmos na mesma base, imediatamente podemos (⇒) igualar os logaritmandos e resolver a nova equação.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São resolvidas usando-se: a definição de logaritmo, suas consequências e propriedades operatórias, a mudança de base e as condições de existência dos logaritmos.

Propriedade operatória

$\log_b \alpha = \log_b \beta \leftrightarrow \alpha = \beta$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Insper-SP (adaptado) – Calcule o número de soluções reais distintas da equação $x^4 \log_7 x - 16\log_7 x = 0$.

Temos $x^4 \log_7 x - 16\log_7 x = \log_7 x \cdot (x^4 - 16) = 0$.
Logo, $\log_7 x = 0 \rightarrow x = 1$.
Ou $x^4 - 16 = 0 \rightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
Pela condição de existência do logaritmo, $x > 0$.
As soluções possíveis são $x = 1$ ou $x = 2$.
Portanto, há 2 soluções.

2. FGV-SP – Obtenha os valores de x e y que satisfazem o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \log_4 x + \log_4 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Temos que:

$\log_4 x - \log_4 y = \log_4 \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{x}{y} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$x = 2y$
Como $x + y = 15$:
$2y + y = 15$
$3y = 15$
$y = 5$
Então, $x = 10$.
Portanto, $S = \{(10, 5)\}$.

3. Insper-SP C5-H21

Psicólogos educacionais podem utilizar modelos matemáticos para investigar questões relacionadas à memória e retenção da informação. Suponha que um indivíduo tenha feito um teste e que, depois de t meses e sem rever o assunto do teste, ele tenha feito um novo teste, equivalente ao que havia feito anteriormente. O modelo matemático que descreve situação de normalidade na memória do indivíduo é dado por $y = 82 - 12 \log (t + 1)$, sendo y a quantidade de pontos feitos por ele no instante t.

Após t meses da aplicação do teste inicial, a pontuação de um indivíduo no novo teste caiu para 70 pontos. Assim, é correto concluir que esse novo texto ocorreu t meses após o primeiro teste, com t igual a

a) 11 **b)** 8 **c)** 15 **d)** 12 **e)** 9

Temos:
$70 = 82 - 12 \cdot \log(t + 1)$
$12 \cdot \log(t + 1) = 12$
$\log(t + 1) = 1$
$t + 1 = 10^1$
$t = 9$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Insper-SP (adaptado) – Calcule o número de soluções reais da equação $\log_x (x + 3) + \log_x (x - 2) = 2$.

Temos que:
$\log_x (x+3) + \log_x (x-2) = \log_x (x+3)(x-2) = 2$
$x^2 = (x+3)(x-2)$
$x^2 = x^2 + 3x - 2x - 6$
$x = 6$.
Logo, a equação tem uma única solução.

5. Unitau-SP – Um biólogo está realizando um experimento com duas culturas de bactérias. Ele constatou que a primeira, denominada B1, cresce à taxa de 20% por hora, e a segunda, denominada B2, cresce à taxa de 8% por hora. Considere que as quantidades iniciais de bactérias são 1 230 e 2 460, respectivamente, e adote $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$. Dentre as alternativas abaixo, qual apresenta a melhor aproximação referente ao tempo necessário para que as duas culturas tenham o mesmo número de bactérias?

a) 3 horas e 15 minutos.
b) 2 horas e 30 minutos.
c) 7 horas e 30 minutos.
d) 1 hora e 30 minutos.
e) 9 horas e 45 minutos.

Temos que:
$1\,230 \cdot (1 + 20\%)^n = 2\,460 \cdot (1 + 8\%)^n$
$(1,2)^n = 2 \cdot (1,08)^n$
Logo, $\log (1,2)^n = \log 2 \cdot (1,08)^n$.
Então:
$n \cdot \log 1,2 = \log 2 + n \cdot \log 1,08$
$n \cdot (\log 1,2 - \log 1,08) = \log 2$
$n \cdot \log \dfrac{1,2}{1,08} = n \cdot \log \dfrac{10}{9} = n \cdot (\log 10 - \log 3^2) = n \cdot (1 - 2 \cdot 0,48) = 0,3$
$n = \dfrac{0,3}{0,04} = 7,5 \text{ h} = 7$ horas e 30 minutos

6. Fatec-PR (adaptado) – Um consumidor deseja adquirir um apartamento e recorre a um banco para financiar esse imóvel. Após a análise das formas de crédito e a realização dos cálculos, o comprador opta por um financiamento no qual, ao término do prazo, o valor total pago será igual ao dobro do valor inicial financiado.

Sabendo-se que o banco aplicou uma taxa de juros de 8% ao ano, a juros compostos, calcule o prazo (em anos) em que esse comprador pagará seu apartamento.

$\log 1{,}08 = 0{,}03$
$\log 2 = 0{,}3$
$M = C \cdot (1+i)^n$

Temos que $M = 2C$.
Logo:
$2C = C \cdot (1+8\%)^n$
$2 = (1{,}08)^n$
$\log(1{,}08)^n = \log 2$
$n \cdot \log 1{,}08 = \log 2$
$n = \dfrac{0{,}3}{0{,}03} = 10$
Ele pagará seu apartamento em 10 anos.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Unit-AL – A concentração de um vírus no sangue de um paciente está aumentando em função do tempo t (em horas), de acordo com $C(t) = C_0 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$, em que C_0 é a concentração inicial.

Usando, se preciso, $\log_2 3 \cong 1{,}6$, é correto concluir que a concentração deve aumentar, aproximadamente, 50% a cada

a) 1h
b) 2h
c) 3h
d) 4h
e) 5h

8. Unit-SE – Considere-se que o nível de álcool no sangue de uma pessoa decresce de acordo com a lei $N(t) = 2(0{,}5)^t$, em que N é dado em gramas por litro e t é o tempo medido em horas a partir do momento em que o nível de álcool foi constatado. Sabe-se que o limite permitido de álcool no sangue, para dirigir com segurança, é de 0,8 gramas por litro. Considerando-se que $\log 2 = 0{,}3$ e que t minutos é o tempo necessário para que um motorista espere até alcançar o nível permitido para dirigir com segurança, pode-se afirmar que o valor de t é

a) 80
b) 75
c) 70
d) 65
e) 60

9. UDESC – O valor de $x \cdot y$ com $x, y \in \mathbb{R}$, sabendo que $\log_2 (x) + \log_4 (y) = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:

a) 4
b) 8
c) 2
d) 6
e) 10

10. Espcex-SP – Resolvendo a equação $\log_3 (x^2 - 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 1) = \log_3 (x + 1)$, obtém-se

a) $S = \{-1\}$
b) $S = \{4{,}5\}$
c) $S = \{6\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \{4\}$

11. Espcex-SP – Uma epidemia ocorre, quando uma doença se desenvolve num local, de forma rápida, fazendo várias vítimas, num curto intervalo de tempo. Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é $N(t) = \dfrac{20\,000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}}$. Considerando que o mês tenha 30 dias, $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, 2000 pessoas serão atingidas por essa epidemia, aproximadamente, em

a) 7 dias
b) 19 dias
c) 3 meses
d) 7 meses
e) 1 ano

12. UECE – Pode-se afirmar corretamente que a equação $\log_2 (1 + x^4 + x^2) + \log_2 (1 + 2x^2) = 0$

a) não admite raízes reais.
b) admite exatamente uma raiz real.
c) admite exatamente duas raízes reais, as quais são iguais.
d) admite exatamente quatro raízes reais.

13. FGV-SP – A, B e C são inteiros positivos, tais que $A \cdot \log_{200} 5 + B \cdot \log_{200} 2 = C$

Em tais condições, A + B + C é igual a:

a) 0
b) C
c) 2C
d) 4C
e) 6C

14. UDESC – Sejam a, b e c valores que satisfazem simultaneamente as equações

$$\begin{cases} \log_2(a+b+c) = 0 \\ \log(a+2b) = 1 \\ \dfrac{2^a \cdot 4^b}{8^c} = 2 \end{cases}$$

Analise as proposições em relação a a, b e c.

I. Um dos valores é um número primo.
II. Todos os valores são números reais não negativos.
III. Dois dos valores são números naturais.
IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.

e) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

15. Unicamp-SP – Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740 °C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40 °C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função $T(t) = (T_0 - T_{AR})10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$, sendo t o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140° C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

a) 12[log (7) – 1] minutos.

b) 12[1 – log (7)] minutos.

c) 12 log (7) minutos.

d) $\frac{[1-\log(7)]}{12}$ minutos.

16. IME-RJ – O valor de y real positivo na equação $(5y)^{\log_x 5} - (7y)^{\log_x 7} = 0$, em que x é um número real maior do que 1, é:

a) 70

b) 35

c) 1

d) $\frac{1}{35}$

e) $\frac{1}{70}$

17. PUC-PR (adaptado) – Luiz pretende descobrir quanto tempo deve esperar até que seu capital triplique se aplicado a uma taxa de juros de 10% ao ano. Para estimar o tempo de espera desconsiderou, em seus cálculos, qualquer tipo de taxa ou imposto, consultou uma tábua de logaritmos decimais e usou os seguintes valores aproximados:

log (11) = 1,04 e log (3) = 0,48

Calcule o tempo encontrado por Luiz.

ESTUDO PARA O ENEM

18. PUC-PR C5-H21

O número de organismos de uma colônia pode ser calculado e é aproximadamente dado pela função $N(t) = N_0 \cdot 3^t$, em que N_0 é o número inicial de organismos e t é o tempo, em dias. Após quantos dias o número de indivíduos é 3 000 vezes maior que o número inicial de organismos? (log 3 = 0,48)

a) 7,90 dias.
b) 7,25 dias.
c) 6,35 dias.
d) 8,15 dias.
e) 6,15 dias

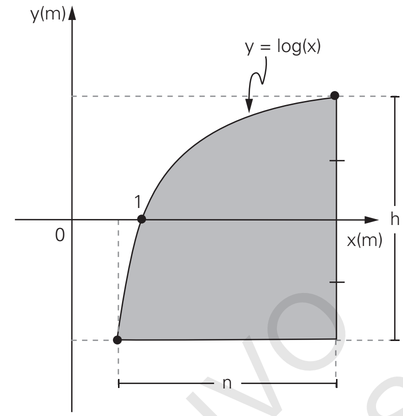
19. PUC-PR C5-H21

Suponha que a vazão de água de um caminhão de bombeiros se dá pela expressão $V(t) = V_0 \cdot 2^{-t}$, em que V_0 é o volume inicial de água contido no caminhão e t é o tempo de escoamento em horas. Qual é, aproximadamente, utilizando uma casa decimal, o tempo de escoamento necessário para que o volume de água escoado seja 10% do volume inicial contido no caminhão? (utilize: $\log 2 \cong 0{,}3$)

a) 3h e 30 min.
b) 3h e 12 min.
c) 3h e 18 min.
d) 2h e 15 min.
e) 2h e 12 min.

20. Enem C6-H25

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) - \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) + \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

d) $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

e) $2\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

16 FUNÇÃO LOGARÍTMICA E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

- Introdução
- Função logarítmica
- Inequação logarítmica

HABILIDADES

- Encontrar domínio, imagem e zeros das funções logarítmicas.
- Resolver equações e problemas que envolvam funções logarítmicas.
- Analisar gráficos de funções logarítmicas.
- Identificar representações algébricas que expressem relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Resolver inequações e
- problemas que envolvam
- funções logarítmicas.
- Identificar representações
- algébricas que expressem
- relação entre grandezas.
- Interpretar gráficos cartesianos que representem
- relações entre grandezas.
- Resolver situações-problema cuja modelagem
- envolva conhecimentos
- algébricos.

Função logarítmica

DEFINIÇÃO

Considerando um número real **b** ($b > 0$ e $b \neq 1$), chamamos **função logarítmica** de base **b** a função **f** de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_b x$.

A função logarítmica tem domínio no conjunto dos reais positivos, e contradomínio e imagem em $\mathbb{R}$. Ela associa cada número real positivo a seu logaritmo de base **b**.

GRÁFICO

Para a função $f(x) = \log_2 x$, podemos construir uma tabela com os valores do par ordenado $(x, f(x))$.

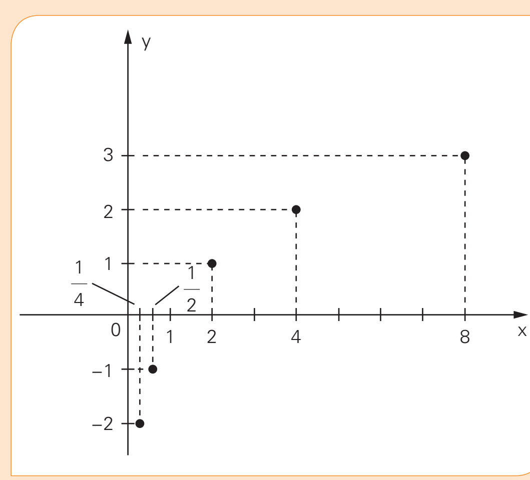
Organizando os dados da tabela em pares ordenados, é possível apresentarmos cada informação na forma de par ordenado, genericamente representado por $(x; \log_b x)$, em que **b** é um número real maior que zero e diferente de 1.

A seguir, podemos analisar duas tabelas para dois casos diferentes com a representação dos pares ordenados $(x; \log_2 x)$ e $\left(x; \log_{\frac{1}{2}} x\right)$ no plano cartesiano, incluindo os respectivos gráficos.

1º caso: $b > 1$:

Tabela 1

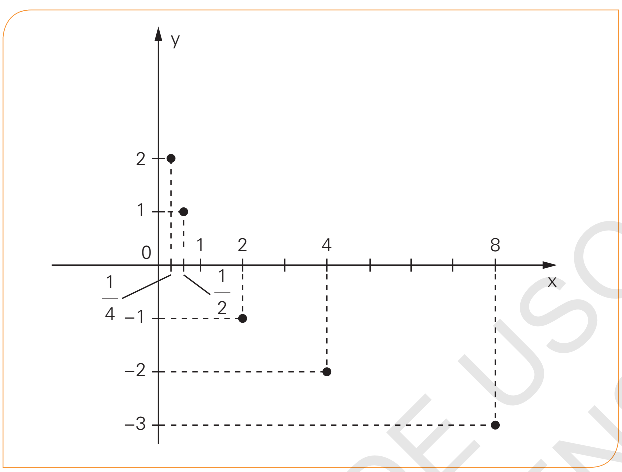
x	$\log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



2º caso: $0 < b < 1$:

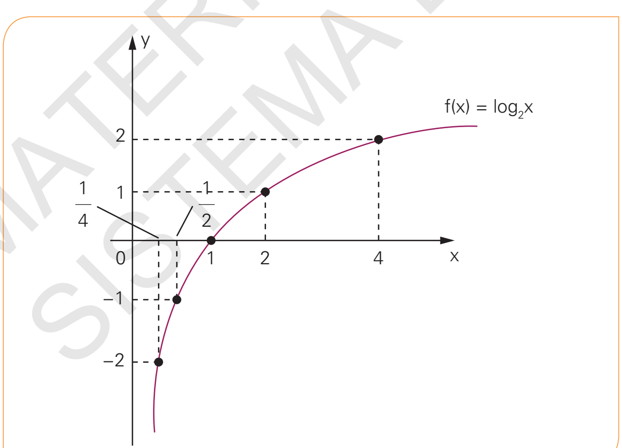
Tabela 2

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

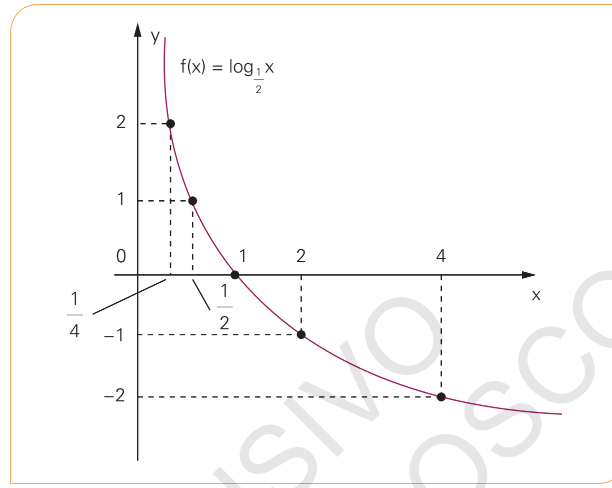


Se pensarmos na possibilidade de usar todo o conjunto dos números reais, podemos representar esses pares ordenados no plano cartesiano, formando o gráfico da **função logarítmica.**

No gráfico da função $f(x) = \log_2 x$:



No gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$:



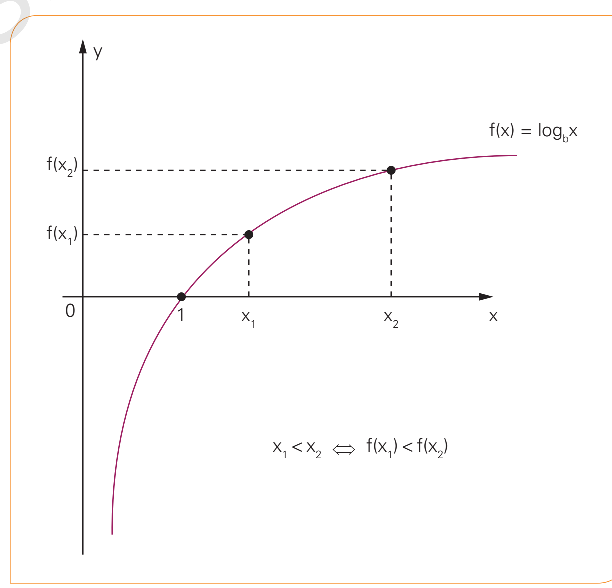
Observações:

- Domínio: $D = \mathbb{R}_+^*$
- Contradomínio: $CD = \mathbb{R}$
- Conjunto imagem: $Im = \mathbb{R}$

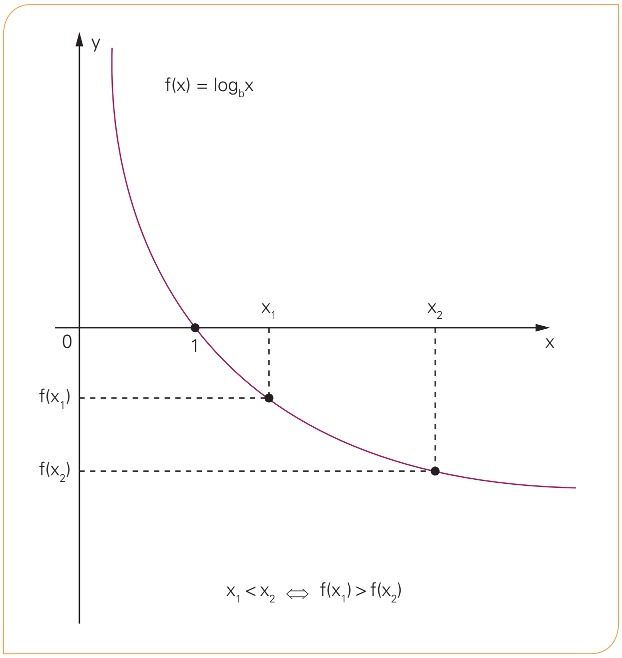
ANÁLISE DO GRÁFICO

A função logarítmica é crescente quando tem como base do logaritmo um número real maior que 1. A função é decrescente quando a base do logaritmo apresenta valor real entre 0 e 1.

- Se $b > 1$, a função é crescente.



- Se $0 < b < 1$, a função é decrescente.



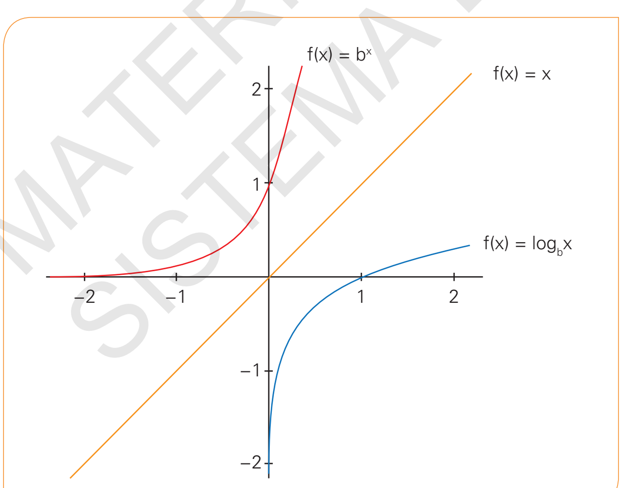
Podemos observar que a função logarítmica é uma função injetora, mas não sobrejetora.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Ao analisar as funções logarítmica e exponencial, podemos notar que o gráfico da primeira é simétrico ao gráfico da segunda em relação à reta de equação $y = x$. Isso ocorre porque a função logarítmica é a inversa da exponencial, para domínio e contradomínio convenientemente definidos e vice-versa, como vimos em módulos anteriores.

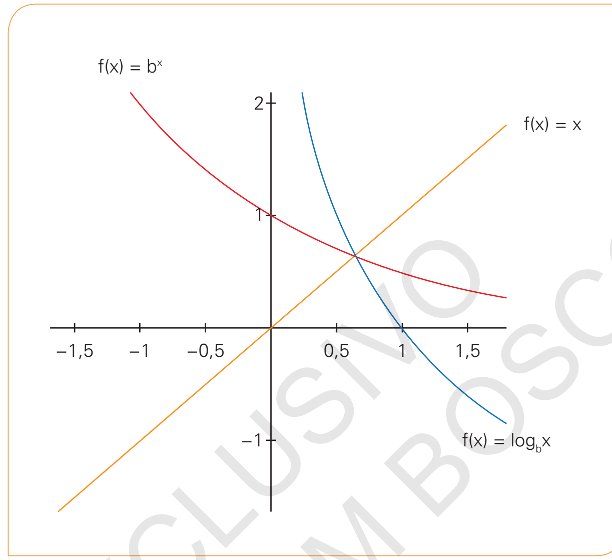
1º caso: $b > 1$

Considerando as funções **f** e **g** dadas por $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, temos os seguintes gráficos:



2º caso: $0 < b < 1$

Considerando as funções **f** e **g** dadas por $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, temos os seguintes gráficos.



INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

Inequações são sentenças matemáticas, com uma ou mais incógnitas, expressas por uma desigualdade. **Inequações logarítmicas** são as inequações que apresentam variáveis, em geral nos logaritmandos dos logaritmos. São as inequações que podem ser reduzidas a uma das seguintes formas:

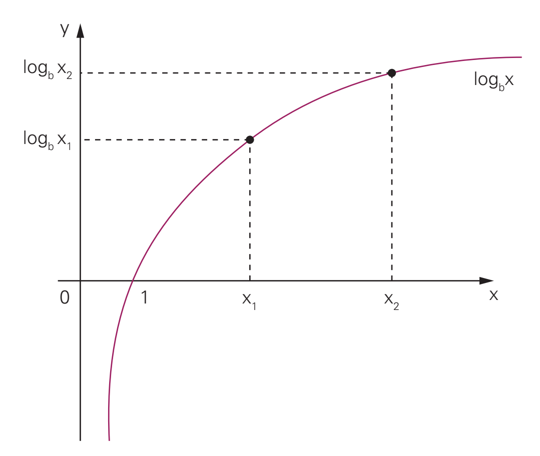
- $\log_b f(x) > \log_b g(x)$, $\log_b f(x) \leqslant \log_b g(x)$
- $\log_b f(x) < \log_b g(x)$, $\log_b f(x) \geq \log_b g(x)$
- $\log_b f(x) \neq \log_b g(x)$

É importante nos lembrarmos das condições de existência: $b \neq 1$, $b > 0$ e com logaritmando positivo.

RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

A resolução da inequação logarítmica é semelhante à da inequação exponencial. Precisamos verificar se a função logarítmica envolvida é crescente ou decrescente. E a verificação fica também diretamente associada ao valor da base.

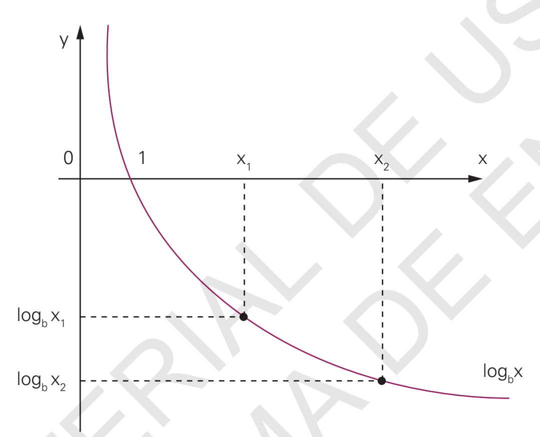
Assim, o sentido da desigualdade entre os logaritmos é o mesmo da desigualdade entre os respectivos logaritmandos.



Portanto, para $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$:

- $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$ e
- $x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$

Por outro lado, quando a base é um número real entre 0 e 1, a função é decrescente. Ou seja, quanto maior o logaritmo, menor o logaritmando. Então o sentido da desigualdade entre os logaritmos deve ser invertido para a desigualdade entre os respectivos logaritmandos.



Portanto, para $b \in \mathbb{R}$ e $0 < b < 1$:

- $x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$
- $x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$

Vamos analisar os seguintes exemplos:

1. Comparação de logaritmo com número real

Determine o conjunto solução da inequação $\log_2 (x - 3) < 3$.

Condição de existência: $x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$.

$\log_2 (x - 2) < \log_2 2^3 \rightarrow x - 2 < 8 \rightarrow x < 10$

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 10\}$

2. Comparação de logaritmos de mesma base

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação logarítmica $\log (2x - 4) < \log (x + 7)$.

Condição de existência:

$(2x - 4 > 0 \text{ e } x + 7 > 0) \rightarrow x > 2.$

$2x - 4 < x + 7 \rightarrow x < 11$

$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 11\}$

3. Uso das propriedades de logaritmos

Determine as soluções reais da inequação

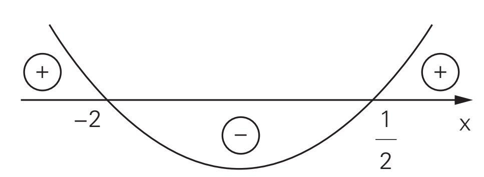
$3 \cdot \log x + \log (2x +)^3 \leqslant 3 \cdot \log 2.$

Condições de existência:

$x > 0 \text{ e } 2x + 3 > 0 \rightarrow x > 0.$

$\log x + \log (2x + 3) \leqslant \log 2$

$\log [x \cdot (2x + 3)] \leqslant \log 2 \rightarrow x \cdot (2x + 3) \leqslant 2 \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$



$$-2 < x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Insper-SP – Se N é o menor número natural para o qual $(2^N)^N$ tem pelo menos 30 dígitos, então N é (utilize a aproximação: lof 2 = 0,30)

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Resolução:

Se $(2^N)^N$ tem pelo menos 30 dígitos, então:

$(2^N)^N > +10^{29} \to \log 2^{N^2} > \log 10^{29}$

$\to N^2 \cdot \log 2 > 29 \cdot \log 10$

$\to 0{,}3 \cdot N^2 > 29$

$\to N^2 > 96{,}\overline{7}$

$\to N \geqslant 10$

Portanto, o menor valor de N é 10.

2. Sistema Dom Bosco – O conjunto solução da inequação $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0$ é

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > o\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R}\ 0 < x < 1|\}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

Resolução:

Temos:

$\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0$

Condição de existência: $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$, com $x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \to \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \to x < 1$

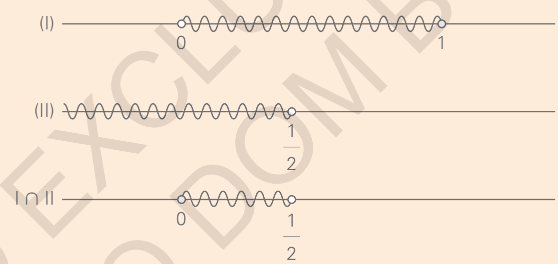
$x > 0$ e $x < 1$

Portanto, condição de existência: $0 < x < 1$ (I)

$0 = \log\frac{1}{2}$

$\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > \log\frac{1}{2} \to \log\frac{1}{2} \to \log_{\frac{1}{2}} x > 1$

$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ (II)



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$

ROTEIRO DE AULA

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

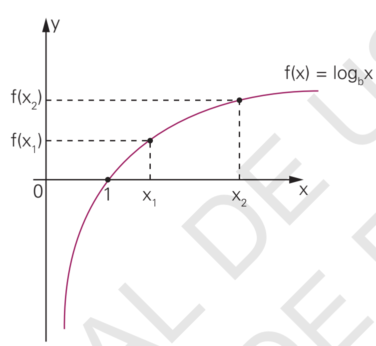
Gráfico

Sentença: $f(x) = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$

Domínio: $\mathbb{R}_+^*$ (reais positivos)

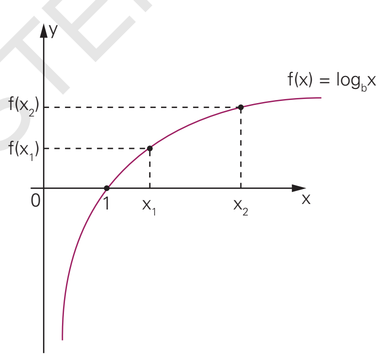
Contradomínio e conjunto imagem: $\mathbb{R}$

Se $b > 1$, a função é decrescente.



$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1)$ > (fx_2)

Se $b > 1$, a função é crescente



$x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1)$ < (fx_2)

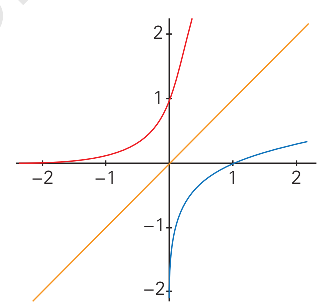
Simetria

Ao analisar as funções logarítmica e exponencial, notamos que o gráfico da primeira é simétrico ao da segunda em relação à função identidade.

Considerando as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, com $b > 1$, temos:

$f(x) = b^x$

$f(x) = \log_b x$

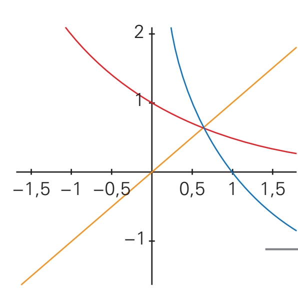


$f(x) = x$

Considerando as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$, com $0 < b < 1$, temos:

$f(x) = b^x$

$f(x) = x$



$f(x) = \log_b x$

ROTEIRO DE AULA

INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Garantias e condições de existência dos logaritmos: $b \in$ ___ $\mathbb{R}$ ___, b ___ > ___ 0 e b ___ ≠ ___ 1.

1º caso: $b > 1$: $\begin{cases} x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ <\ } \log_b x_2 \\ x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ >\ } \log_b x_2 \end{cases}$

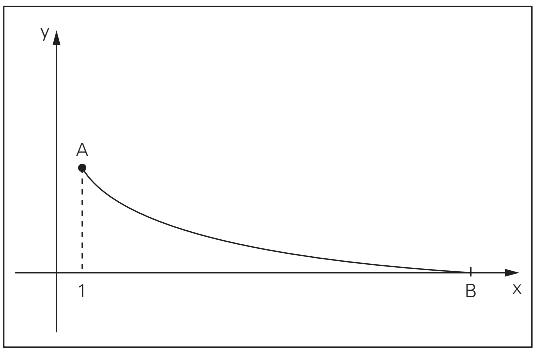
2º caso: $0 < b < 1$: $\begin{cases} x_1 < x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ >\ } \log_b x_2 \\ x_1 > x_2 \leftrightarrow \log_b x_1 \underline{\ <\ } \log_b x_2 \end{cases}$

O sentido da desigualdade é ___ mantido ___.

O sentido da desigualdade é ___ invertido ___.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Fuvest-SP (adaptado) – Um corpo de massa M desliza sem atrito, sujeito a uma força gravitacional vertical uniforme, sobre um "escorregador logarítmico": suas coordenadas (x, y) no plano cartesiano, que representam distâncias medidas em metros, pertencem ao gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4$



O corpo começa sua trajetória, em repouso, no ponto A, de abcissa x = 1, e atinge o chão no ponto B, de ordenada y = 0, conforme a figura ao lado.

Qual é o valor da abscissa no ponto B.

a) 13
b) 14
c) 15
d) 16
e) 17

O ponto B, de ordenada y = 0, é dado quando:
$y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4 = 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = -4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = x$

$x = 2^4$

$x = 16.$

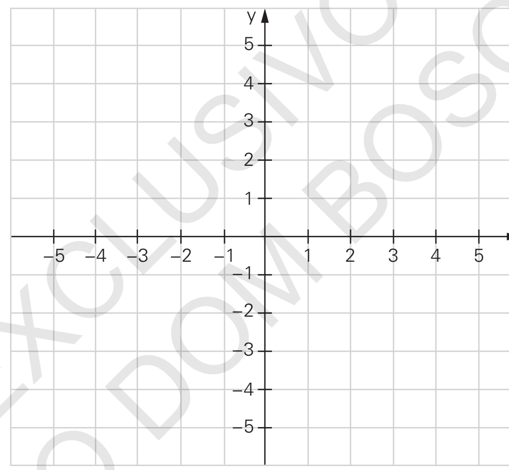
2. Fuvest-SP – Considere as funções f e g definidas por

$f(x) = 2 \cdot \log_2 (x - 1)$, se $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, $g(x) = \log_2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)$, se $x \in \mathbb{R}$, $x < 4$

a) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$, f(2), f(3), g(−4), g(0) e g(2).

b) Encontre x, $1 < x < 4$, tal que f(x) = g(x).

c) Levando em conta os resultados dos itens a e b, esboce os gráficos de f e de g no sistema cartesiano a seguir.



a) Calculando, temos:

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \log_2 \left(\frac{3}{2} - 1\right) = 2 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (-1) = -2$

$f(2) = 2 \cdot \log_2 (2 - 1) = 2 \cdot \log_2 1 = 0$

$f(3) = 2 \cdot \log_2 (3 - 1) = 2 \cdot \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$

$g(-4) = \log_2 \left(1 - \frac{-4}{4}\right) = \log_2 1 = 0$

$g(0) = \log_2 \left(1 - \frac{0}{4}\right) = \log_2 1 = 0$

$g(2) = \log_2 \left(1 - \frac{2}{4}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1.$

b) Para $1 < x < 4$, temos:

$f(x) = g(x) \rightarrow 2 \cdot \log_2 (x - 1) = \log_2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)$

$\log_2 (x - 1)^2 = \log_2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)$

$(x - 1)^2 = 1 - \frac{x}{4}$

$x^2 - 2x + 1 = 1 - \frac{x}{4}$

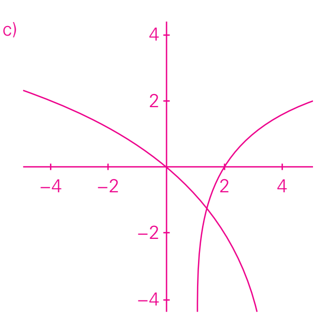
$x^2 - \frac{7}{4} x = 0$

$x \left(x - \frac{7}{4}\right) = 0$

$x = 0$ ou $x = \frac{7}{4}$

Logo, $x = \frac{7}{4}$, pois $1 < x < 4$.

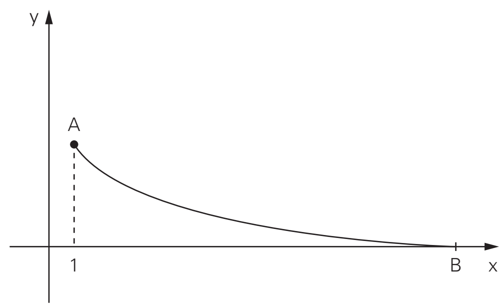
c)



3. Fuvest-SP (adaptado) C5-H21

Um corpo de massa M desliza sem atrito, sujeito a uma força gravitacional vertical uniforme, sobre um "escorregador logarítmico": suas coordenadas (x, y) no plano cartesiano, que representam distâncias medidas em metros, pertencem ao gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4$.

O corpo começa sua trajetória, em repouso, no ponto A, de abscissa x = 1, e atinge o chão no ponto B, de ordenada y = 0, conforme figura abaixo.



Qual é o valor da abscissa no ponto B?

a) 14
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18

Quando $x = x_B \to y_B = 0$.

Assim, $f(x) = 0 \to \log_{\frac{1}{2}} x + 4 = 0 \to \log_{\frac{1}{2}} x = -4 \to \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = x \to x^4 = 16$.

Logo, o valor da abscissa no ponto B é 16.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. UDESC – Sendo $|x - 2| \leq 1$, analise as proposições, e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

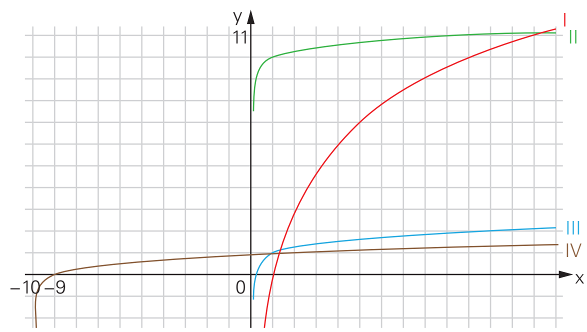
( ) $|\log_3 x| \leq 1$
( ) $2 \leq 2^x \leq 8$
( ) $1 \leq x^2 - 2x + 2 \leq 5$

Analise a alternativa correta, de cima para baixo.

a) F – V – V
b) F – F – F
c) V – V – F
d) V – F – V
e) V – V – V

(V) $|\log_3 x| \leq 1$
Temos que:
$-1 \leq x - 2 \leq 1$
$1 \leq x \leq 3$
$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 3$
$0 \leq \log_3 x \leq 1$
$|\log_3 x| \leq 1$.
(V) $2 \leq 2^x \leq 8$
$\log_2 2 \leq \log_2 2^x \leq \log_2 2^3$
$1 \leq x \leq 3$
$-1 \leq x - 2 \leq 1$
$|x - 2| \leq 1$
(V) $1 \leq x^2 - 2x + 2 \leq 5$
$1 - 1 \leq x^2 - 2x + 2 - 1 \leq 5 - 1$
$0 \leq x^2 - 2x + 4 \leq 4$
$0 \leq (x - 1)^2 \leq 4$
$0 \leq x - 1 \leq 2$
$-1 \leq x - 2 \leq 1$
$|x - 2| \leq 1$.

5. FGV-SP – As funções logarítmicas f, g, h, p são dadas por $f(x) = 10 + \log x$, $g(x) = 10 \cdot \log x$, $h(x) = \log (10x)$ e $p(x) = \log (x + 10)$. Observe os gráficos a seguir:



Os gráficos I, II, III e IV correspondem, respectivamente, às funções

a) h, f, g, p.
b) g, h, f, p.
c) g, f, h, p.
d) g, f, p, h.
e) p, f, h, g.

O gráfico de **f** é o gráfico da função logarítmica deslocado em 10 unidades para cima. Logo, é a curva II.

O gráfico de **g** é o gráfico da função logarítmica com a amplitude aumentada em 10 vezes. Logo, é a curva I.

O gráfico de **h** é o gráfico da função logarítmica com a abscissa distorcida. Logo, é a curva III.

O gráfico de **p** é o gráfico da função logarítmica com a abscissa deslocada em 10 unidades. Logo, é a curva IV.

6. FGV-SP – As bases de um contrato de trabalho estabelecem que Rafael, funcionário recém-contratado de uma empresa, irá receber salário anual de R$ 100.000,00, com reajustes anuais de 4% sobre o salário total recebido no ano anterior.

Adote: log 104 = 2,017 nos cálculos dos dois itens a seguir.

a) No 11º ano de trabalho de Rafael nessa empresa, seu salário anual será igual a 10^x reais. Calcule x.

b) A tabela a seguir indica aproximações de 10^x para alguns valores de x. Usando essa tabela, calcule o montante total de dinheiro recebido por Rafael em 11 anos de trabalho nessa empresa, considerando que o salário anual do 1º ano é de R$ 100.000,00.

x	0,02	0,08	0,15	0,17	1,02	1,08	1,15	1,17	1,20
10^x	1,05	1,20	1,41	1,48	10,47	12,02	14,13	14,79	15,85

a) Calculando, temos:
$\log 104 = \log 100 \cdot 1{,}04 = 2 + \log 1{,}04$
$\log 1{,}04 = 2{,}017 - 2 = 0{,}017$
$m = 100\,000 \cdot 1{,}04^{10}$
$\log m = \log 10^5 + 10 \cdot \log 1{,}04$
$\log m = 5 + 0{,}17$
$m = 10^{5{,}17} \rightarrow x = 5{,}17$

b) Calculando, temos:
$M = 100\,000 \cdot \left(\dfrac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}\right) \log 1{,}04 = 0{,}017 \rightarrow 10^{0{,}017} = 1{,}04$
$1{,}04^{10} = (10^{0{,}017})^{10} = 10^{0{,}17}$
$M = 100\,000 \cdot \left(\dfrac{1{,}48 - 1}{1{,}04 - 1}\right) = 1\,200\,000.$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. PUC-SP – As funções $f(x) = \frac{3}{2} + \log_{10}(x - 1)$ e $g(x) = k \cdot 2^{(-x+1)}$, com k um número real, se intersectam no ponto $P = \left(2, \frac{3}{2}\right)$. O valor de g(f(11)) é

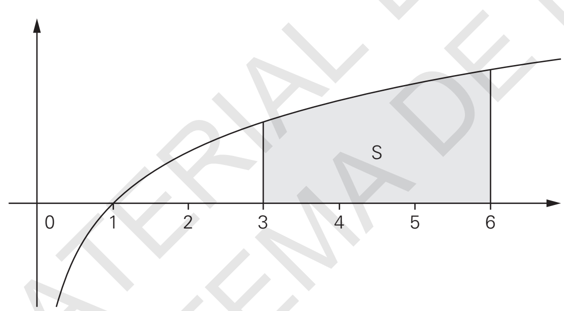
a) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

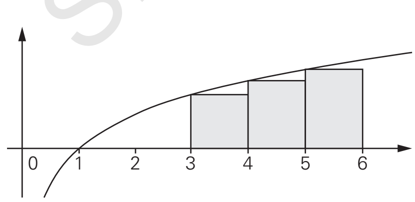
c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

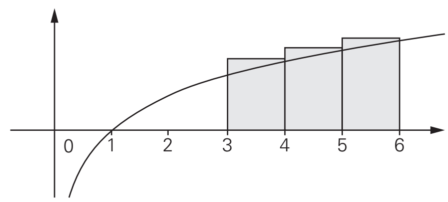
d) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

8. FGV-RJ – Um aluno precisava estimar a área S da região sob o gráfico da função y = log x (logaritmo decimal de x) entre as abscissas x = 3 e x = 6 que se vê na figura a seguir.



Para obter um valor aproximado de S, o aluno pensou na estratégia que as figuras abaixo mostram. Ele calculou a área S_1 dos três retângulos da figura da esquerda, e calculou a área S_2 dos três retângulos da figura da direita.

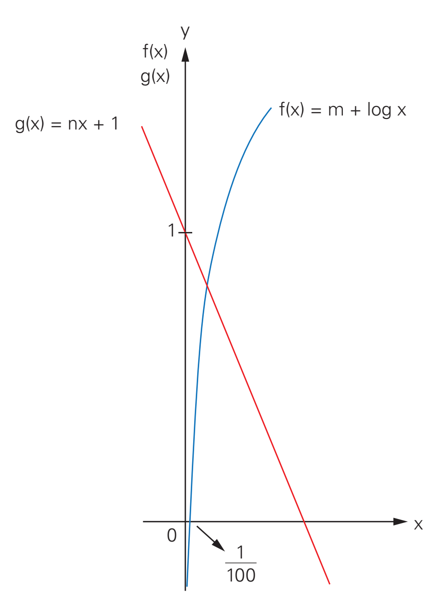




Ele imaginou que uma boa aproximação para a área que deseja obter é $S = \frac{S_1 + S_2}{2}$.

Dados log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, obtenha um valor para S, usando a estratégia descrita acima.

9. FGV-SP – Com m e n reais, os gráficos representam uma função logarítmica, e seu intersecto com o eixo x, e uma função afim, e seu intersecto com o eixo y.



Se $f\left(g\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\right)=\frac{5}{2}$, então m^n é igual a

a) $\frac{1}{8}$

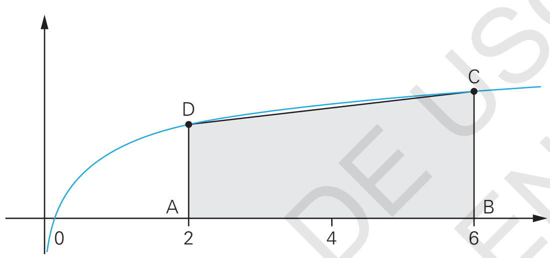
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 4

e) 8

10. FGV-RJ – No trapézio ABCD da figura abaixo, os ângulos em A e B são retos e os vértices C e D estão sobre o gráfico da função $y = 1 + \log x$.



Utilizando $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, a área do trapézio ABCD é

a) 5,857

b) 5,556

c) 5,732

d) 4,823

e) 6,158

11. ITA-SP – Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f.

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

12. Fuvest-SP – O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$ é o intervalo:

a) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

b) $\left]-\frac{7}{4}, \infty\right[$

c) $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$

d) $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$

e) $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

13. FGV-RJ – Dois municípios A e B são vizinhos e ambos produzem soja. No ano de 2013, o município A produziu 120 mil toneladas de soja, enquanto o município B produziu 60 mil toneladas. Entretanto, a produção de A cresce 4% ao ano enquanto que a de B cresce 12% ao ano. Se essas taxas permanecerem as mesmas por longo tempo, em que ano a produção de soja do município B será, pela primeira vez, maior que a produção do município A?

Use o que for necessário das informações a seguir.

I. log 2 = 0,301
II. log 3 = 0,477
III. log 7 = 0,845
IV. log 13 = 1,114

14. UDESC – Analise as proposições acerca de funções reais, e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) A função quadrática $f(x) = 2(x - 2)^2$ apresenta valor mínimo no ponto $(-2,5)$.

( ) Se $f(x) = |x + 5| \cdot \sqrt{x+5} \cdot (-x^2 + 2x - 2)$, então para todo $x \geq -5$ tem-se $f(x) \leq 0$.

( ) O domínio da função $f(x) = \log_{\sqrt{x}} \sqrt{x+1}$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

A alternativa correta, de cima para baixo, é:

a) V – F – V
b) F – V – V
c) F – V – F
d) V – V – F
e) F – F – F

15. UFPR – Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificam-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual S de palavras lembradas, em função do tempo t, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão $S = -18 \cdot \log(t + 1) + 86$.

a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

b) Depois de quanto tempo o percentual S alcançou 50%?

16. Cefet-MG – O conjunto solução da inequação $2^{2\log x} - 11 \cdot e^{\log x} + 28 < 0$ é o intervalo

a)]4, 7[
b) $]10^4, 10^7[$
c)]log 4, log 7[
d) $]10^{\ln 4}, 10^{\ln 7}[$
e) $]e^{\log 4}, e^{\log 7}[$

17. ITA-SP – Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}(4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x - 1)$.

18. Insper-SP C5-H21

Um vendedor de carros usados estima que o preço de um automóvel de determinada marca desvalorizasse 19% ao ano. De acordo com essa estimativa, o preço desse carro será igual a um terço do preço que ele tinha na época em que foi fabricado depois de

> Observação: considere a aproximação $\log_3 10 \approx 2{,}1$.

a) 3 anos e meio
b) 4 anos e meio
c) 5 anos
d) 6 anos
e) 7 anos e meio

19. UERJ C5-H22

Admita que a ordem de grandeza de uma medida x é uma potência de base 10, com expoente n inteiro, para $10^{n-\frac{1}{2}} \leqslant x < 10^{n+\frac{1}{2}}$. Considere que um terremoto tenha liberado uma energia E, em joules, cujo valor numérico é tal que $\log_{10} E = 15{,}3$. A ordem de grandeza de E, em joules, equivale a:

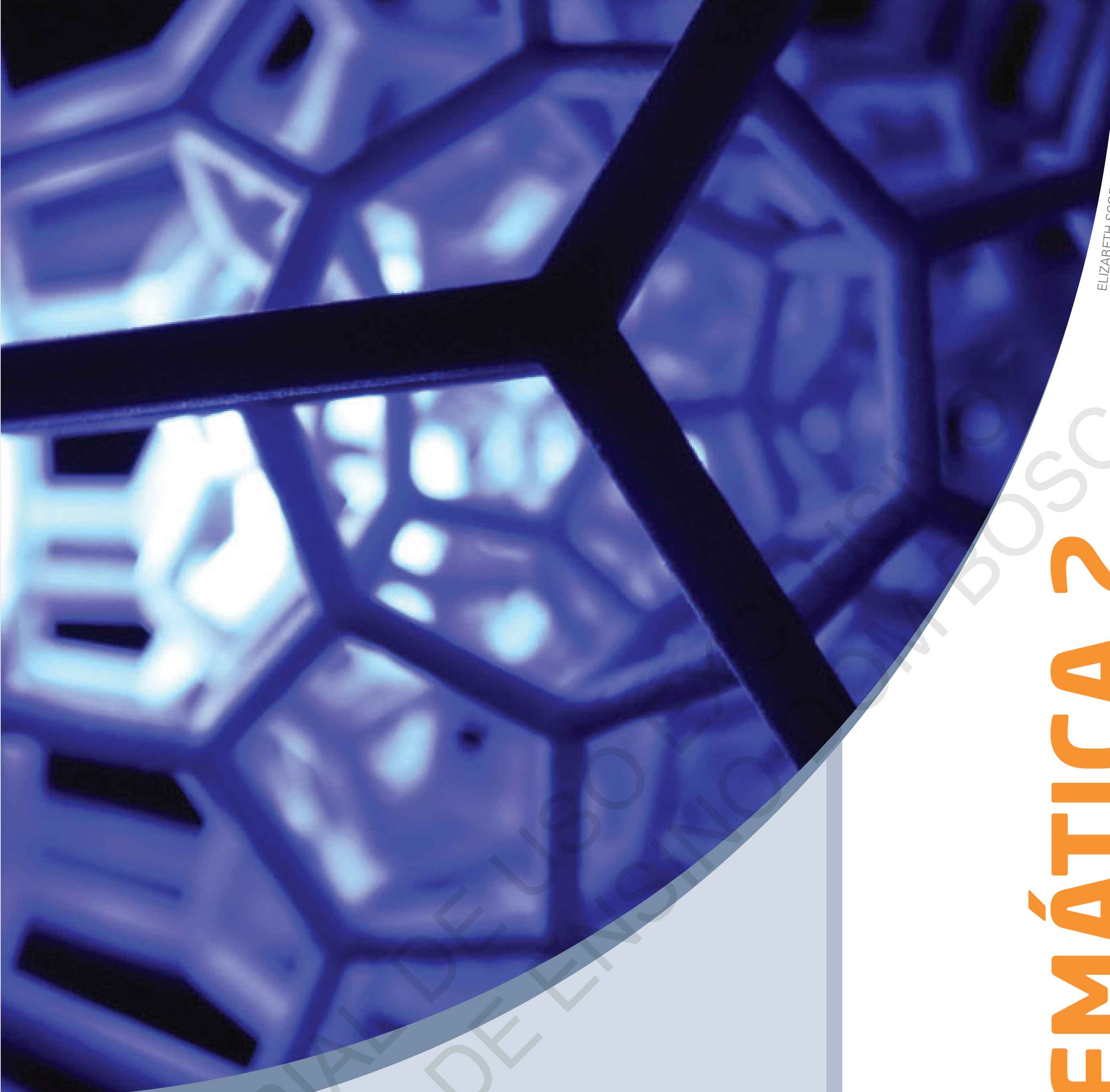
a) 10^{14}
b) 10^{15}
c) 10^{16}
d) 10^{17}

20. Fatec-PR C5-H21

Suponha um aumento exato de 10% no número de pessoas deslocadas no ano de 2015 em relação a 2014, e que esse crescimento ocorrerá a essa mesma taxa anualmente.O número de pessoas deslocadas, em relação a 2014, dobrará no ano

> Adote:
> $\log 2 = 0{,}30$
> $\log 1{,}1 = 0{,}04$

a) 2018
b) 2020
c) 2022
d) 2024
e) 2026


ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 2

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

1

PORCENTAGEM, AUMENTOS E DESCONTOS: FATOR DE CORREÇÃO

- Definição
- Formas percentual, decimal e fracionária
- Porcentagem de quantias
- Fator de correção
- Aumentos ou descontos sucessivos
- Lucro percentual
- Regra de três

HABILIDADES

- Identificar taxas percentuais.
- Transformar taxas percentuais em frações centesimais.
- Utilizar o conceito de taxas percentuais na resolução de problemas.
- Realizar operações envolvendo razão, proporção e porcentagem.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Identifi car taxas percentuais.
- Transformar taxas percentuais em frações centesimais.
- Utilizar o conceito de taxas percentuais na resolução de problemas.
- Realizar operações envolvendo razão, proporção e
- porcentagem.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

Definição de porcentagem

Toda vez que expressamos um número racional como uma fração de denominador 100, dizemos que estamos apresentando esse valor em **porcentagem**. O número 0,67, por exemplo, pode ser escrito da seguinte forma:

$$0{,}67 = \frac{67}{100} = 67\%$$

O símbolo % significa **por cento**.

Para calcularmos quanto um número **a** representa percentualmente em relação a um número **b**, devemos calcular a razão $\frac{a}{b}$.

Multiplicando o número $\frac{a}{b}$ por 100, teremos a forma percentual dessa razão. Vejamos um exemplo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Em uma sala de aula há 48 alunos. Qual o percentual de meninos se na turma existem 18 meninas?

Se quisermos calcular o percentual de meninos, devemos dividir a quantidade de garotos pelo total de alunos. Na sala há 48 − 18 = 30 meninos. Então:

$$\frac{30}{48} = \frac{5}{8} = 0{,}625 \xrightarrow{\times 100} 62{,}5\%$$

FORMAS PERCENTUAL, DECIMAL E FRACIONÁRIA

Considerando o exemplo anterior, dizemos que 62,5% estão na **forma percentual**, 0,625 está na **forma decimal** e $\frac{30}{48} = \frac{5}{8}$ estão na **forma fracionária**.

A mudança da forma percentual para a decimal e vice-versa deve ser o mais automática possível, já que se trata de uma divisão/multiplicação por 100, o que se resume a deslocarmos a vírgula duas casas. Por exemplo:

- 32% são o mesmo que 0,32;
- 45,7% são o mesmo que 0,457;
- 1,235 é o mesmo que 123,5%.

PORCENTAGEM DE QUANTIAS

O cálculo de i% de um valor V é efetuado da seguinte maneira:

$$i\% \text{ de } V = \frac{i}{100} \cdot V$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Uma mercadoria que custava R$ 140,00 teve um aumento de 8%. Qual foi o aumento em reais no preço desse produto?

Para calcularmos o aumento **A** em reais, fazemos:

A = 8% de R$ 140,00

A = 0,08 · 140 = R$ 11,20

AUMENTOS E DESCONTOS: FATOR DE CORREÇÃO

Vamos supor que uma mercadoria custava R$ 230,00 e teve um aumento de 25%. Como calculamos o novo preço desse produto?

Chamemos de P, A e P', respectivamente, o preço original, o aumento em reais e o novo valor da mercadoria. Portanto:

$$P' = P + A$$

Como vimos na seção anterior, calculamos o aumento A da seguinte maneira:

A = 25% de R$ 230,00
A = 0,25 · 230 = R$ 57,50
Portanto, temos
P' = 230,00 + 57,50 = R$ 287,50
Ou seja, a mercadoria passou a custar R$ 287,50.

Entretanto, poderíamos ter calculado diretamente o valor de P' da seguinte forma:

P' = P + A
P' = R$ 230,00 + 25% de R$ 230,00
P' = 230 + 0,25 · 230
P' = (1 + 0,25) · 230
P' = 1,25 · 230
P' = 287,50 = R$ 287,50

Generalizando essa ideia, temos que, sendo **P** o preço original de uma mercadoria, **i** a taxa percentual de aumento (na forma decimal) e **P'** o novo valor do aumento, temos:

$$P' = P + iP$$

Ou seja:

$$\boxed{P' = (1 + i) \cdot P}$$

O número (1 + i) é chamado **fator de correção**. Ele é o número pelo qual devemos multiplicar um valor **P** para o aumentarmos em uma taxa percentual **i** (sempre em forma decimal).

O mesmo raciocínio se aplica para redução percentual: sendo **P** o preço original de uma mercadoria, **i** a taxa percentual de redução (na forma decimal) e **P'** o novo valor do produto, então temos:

$$P' = P - iP$$

Ou seja:

$$\boxed{P' = (1 - i) \cdot P}$$

O número (1 – i) é chamado **fator de correção**. Ele é o número pelo qual devemos multiplicar um valor **P** para o reduzirmos em uma taxa percentual **i** (sempre em forma decimal).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Sistema Dom Bosco** – Uma mercadoria sofreu um desconto de 12%. Sabendo que o preço inicial era R$ 180,00, calcule o novo valor do produto.

Resolução

Sendo P e P', respectivamente, o preço original e o novo valor da mercadoria, temos:

$P' = P - 0{,}12P = (1 - 0{,}12) \cdot P = 0{,}88P$
$\therefore P' = 0{,}88 \cdot 180 =$ R$ 158,40

2. **Fuvest-SP** – Certa mercadoria, que custava R$ 12,50, teve um aumento, passando a custar R$ 13,50. O percentual de aumento que essa mercadoria sofreu sobre o preço antigo é de:

a) 1,0%
b) 10,0%
c) 12,5%
d) 8,0%
e) 10,8%

Resolução

$P' = (1 + i) \cdot P \rightarrow 13{,}5 = (1 + i) \cdot 12{,}5 \rightarrow 1 + i = 1{,}08 \therefore i = 0{,}08 = 8\%$

Eventos

Um tipo de problema recorrente é quando ocorre mais de um evento sobre o valor de uma mercadoria: dois ou mais aumentos/descontos. Nesse tipo de situação, o uso do **fator de correção** facilita muito a resolução.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. **Sistema Dom Bosco** – Uma mercadoria sofreu dois aumentos sucessivos: um de 20% no primeiro mês e outro de 25% no mês seguinte. De quanto foi o aumento percentual no bimestre?

Resolução

Uma primeira observação importante é que não podemos somar as porcentagens: um aumento de 20% seguido de outro de 25% não é igual a um único aumento de 45%. Isso ocorre porque os dois aumentos incidem sobre valores referenciais distintos. Dito isso, vamos ao cálculo da resolução. Pelo que vimos anteriormente, o preço P' após o primeiro aumento será:

P' = 1,2 · P, em que P é o preço original.

Além disso, o preço P'' após o segundo aumento será:

P'' = 1,25 · P'

Isso nos leva a:

P'' = 1,25 · 1,2 · P = 1,5 · P

Portanto, os dois aumentos equivalem a um único aumento de 50%.

O que fizemos no exercício anterior foi "empilhar" os fatores de correção. Ao multiplicá-los, obtivemos um único novo fator de correção. Então basta interpretarmos o que este último significa: no caso, um fator de correção igual a 1,5 representa um aumento de 50%, pois:

1 + i = 1,5 ∴ i = 0,5 = 50%

Lucro percentual

O que estamos fazendo ao expressar alguma informação na forma de porcentagem é comparar dois números. Há duas formas de compararmos dois valores: a comparação absoluta, que se dá por meio da diferença (subtração) entre os dois valores, e a comparação relativa, que se dá por meio do quociente ou razão (divisão) entre os dois valores. A porcentagem nada mais é do que essa comparação relativa.

Por exemplo, se em um grupo de 45 pessoas há 36 brasileiros, e os demais indivíduos são estrangeiros, qual a porcentagem de estrangeiros no grupo? O que vamos fazer é comparar, relativamente, o grupo de estrangeiros (45 – 36 = 9 pessoas) com o total. Observe:

$$\frac{\text{estrangeiros}}{\text{total de indivíduos}} = \frac{9}{45} = 0{,}2 = 20\%$$

Portanto, os estrangeiros representam 20% do grupo.

O lucro percentual pode ser referenciado ao preço de custo ou ao preço de venda. A relação absoluta entre esses três valores acontece da seguinte forma:

Preço de venda = Preço de custo + Lucro

LUCRO SOBRE CUSTO

Esse cálculo é o mais natural, pois usa como referência o preço de custo, isto é, um valor independente do lucro. Por exemplo: Qual o lucro sobre o custo na negociação de um produto vendido por R$ 80,00 e que custou ao vendedor R$ 50,00?

Ora, o lucro **absoluto** foi de R$ 80,00 – R$ 50,00 = = R$ 30,00. Portanto, o lucro percentual **sobre o custo** foi de:

$$\frac{\text{Lucro}}{\text{Custo}} = \frac{30}{50} = 0{,}6 = 60\%$$

LUCRO SOBRE VENDA

Esse cálculo já não é tão natural quanto o anterior, pois adota como referência o preço de venda, que é um valor dependente do lucro. Ainda usando o exemplo dado anteriormente, qual o lucro sobre a venda na negociação?

$$\frac{\text{Lucro}}{\text{Venda}} = \frac{30}{80} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Portanto, o lucro percentual sobre o preço de venda foi de 37,5%.

Como o mesmo lucro, R$ 30,00, pode representar duas porcentagens diferentes: 60% e 37,5%? Isso acontece porque o referencial adotado para a comparação foi diferente em cada situação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Um negócio foi realizado com um lucro de 25% sobre o valor de compra. De quanto foi o lucro sobre o valor de venda?

Resolução

Chamando de C, L e V, respectivamente, o valor da compra, o lucro e o valor de venda, temos V – C = L e L = 0,25 C. Isso nos leva a:

V – C = 0,25C → V = 1,25 C

Finalmente,

$$\frac{L}{V} = \frac{0{,}25C}{1{,}25C} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

Logo, o lucro foi de 20% sobre o valor de venda.

RESOLUÇÃO POR REGRA DE TRÊS

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Sistema Dom Bosco** – Por quanto se deve vender cada mercadoria que custou R$ 4.126,75 para obter rentabilidade (lucro) de 6%?

Resolução

1ª solução (usando regra de três):

R$ 4 126,75 — 100%

x — 6%

Assim, 100 · x = 6 · 4 126,75

x = R$ 247,60

Logo, o preço de venda é R$ 4 126,75 + R$ 247,60, ou seja, R$ 4.374,35.

2ª solução (usando fator de correção):

Como se deseja obter um lucro de 6%, devemos aplicar um aumento de 6% sobre o preço de custo:

preço de venda = 1,06 · 4.126,75 = R$ 4.374,35

2. **Sistema Dom Bosco** – Um comerciante vendeu certa mercadoria comdesconto de 8% e recebeu o valor líquido de R$ 2.448,13. Qual era o preço desse produto antes de ser concedido o desconto?

Resolução

1ª solução (usando regra de três):

2 448,13 – 92%

x – 100%

Assim, 92 · x = 100 · 2 448,13

Logo, x = R$ 2 661,01

2ª solução (usando fator de correção):

O valor recebido foi resultado de um desconto de 8%. Logo, foi necessário aplicar um desconto de 8% sobre o valor de venda original:

$$0{,}92 \cdot x = 2448{,}13 \rightarrow x = \frac{2448{,}13}{0{,}92} = \text{R\$ } 2610{,}01$$

ROTEIRO DE AULA

PORCENTAGEM

Definição

Comparar dois valores por meio da razão entre eles

Qual percentual a representa de b?

Basta calcular o quociente $\frac{a}{b}$

Formatos

Decimal

Esse formato é muito usado nos cálculos

Percentual

Esse formato é bastante aplicado na divulgação de percentuais

Manchetes, notícias, cartazes promocionais etc.

Fracionário

ROTEIRO DE AULA

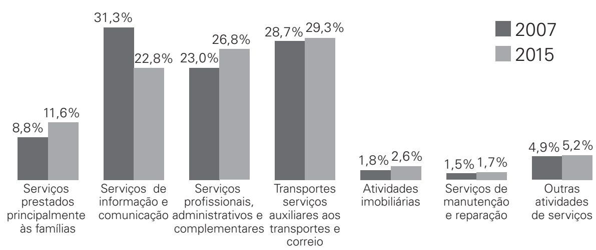
- **PORCENTAGEM**
  - **Fator de correção**
    - **Aumento: 1 + i**
    - Desconto: 1 − i
    - **Útil também em aumentos/descontos sucessivos**
  - **Lucro percentual**
    - **Lucro sobre custo**
      - Divida o lucro L pelo custo C
    - Lucro sobre venda
      - **Divida o lucro L pelo valor de venda V**

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. CFTMG – A Pesquisa Anual de Serviços (PAS 2015), publicada em 2017 pelo IBGE, apresentou o gráfico a seguir para divulgar os resultados gerais dos segmentos de serviços não financeiros no Brasil, referentes aos anos de 2007 e 2015.

Distribuição percentual das empresas de serviços empresariais não financeiros

RECEITA OPERACIONAL LÍQUIDA %



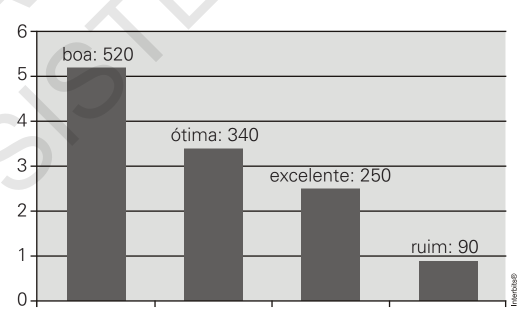
Fonte Pesq. anual Serv. Rio de Janeiro, v. 17, p. 1-4 2015

De acordo com o gráfico acima, a diferença percentual da receita operacional líquida, entre o segmento que cresceu mais e o segmento que cresceu menos, em 2015, foi de

a) 3,8.
b) 3,6.
c) 2,5.
d) 2,3.

Se somarmos os percentuais referentes às regiões indicadas em cinza, obteremos:
9,1% + 13,5% + 18,5% + 5,5% = 46,6%
Dessa forma, a parcela oriunda de fontes renováveis será:
46,6% de 557 milhões = 0,466 · 557 = 259,562 milhões

2. UEMG – Numa pesquisa de opinião feita para verificar o nível de satisfação com a administração de um certo prefeito, foram entrevistadas 1 200 pessoas, que escolheram uma, e apenas uma, entre as possíveis respostas: excelente, ótima, boa e ruim. O gráfico a seguir mostra o resultado da pesquisa.



De acordo com o gráfico, é CORRETO afirmar que o percentual de entrevistados que consideram a administração do prefeito ótima ou boa é de, aproximadamente,

a) 62,6%.
b) 69,3%.
c) 71,6%.
d) 82,4%.

O total de entrevistados é 520 + 340 + 250 + 90 = 1 200.

Opiniões ótima ou boa totalizam 520 + 340 = 860.

Logo, o percentual é de $\frac{860}{1200} = 0{,}716666\ldots \approx 71{,}6\%$.

3. Enem C5-H21

Em certa loja de roupas, o lucro na venda de uma camiseta é de 25% do preço de custo da camiseta pago pela loja. Já o lucro na venda de uma bermuda é de 30% do preço de custo da bermuda, e na venda de uma calça o lucro é de 20% sobre o preço de custo da calça. Um cliente comprou nessa loja duas camisetas, cujo preço de custo foi R$ 40,00 cada uma, uma bermuda que teve preço de custo de R$ 60,00 e duas calças, ambas com mesmo preço de custo. Sabe-se que, com essa compra, o cliente proporcionou um lucro de R$ 78,00 para a loja. Considerando essas informações, qual foi o preço de custo, em real, pago por uma calça?

a) 90
b) 100
c) 125
d) 195
e) 200

Seja p o preço de custo de uma calça, temos:
$2 \cdot 0{,}25 \cdot 40 + 0{,}3 \cdot 60 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot p = 78 \therefore p = 100$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Unicamp-SP – A tabela abaixo exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018.

Ano	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R$ 1.000,00	R$ 1.200,00	R$ 1.500,00
2018	R$ 1.150,00	R$ 1.320,00	R$ 1.680,00

a) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.

b) Uma família tem três filhos matriculados na Escola B. Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

a) Vamos calcular cada aumento percentual. Para isso, calcularemos os fatores de correção associados a cada aumento:

Escola A: $\frac{1150}{1\,000} = 1{,}15 \rightarrow$ aumento de 15%

Escola B: $\frac{1320}{1200} = 1{,}10 \rightarrow$ aumento de 10%

Escola C: $\frac{1680}{1500} = 1{,}12 \rightarrow$ aumento de 12%

Portanto, concluímos que a Escola A teve o maior aumento.

b) O valor gasto é dado por:

$1\,320 + 0{,}9 \cdot 1320 + 0{,}8 \cdot 1320 = 1\,320\,(1 + 0{,}9 + 0{,}8) =$
$= 1\,320 \cdot 2{,}7 =$ R$ 3.564,00

5. FGV-RJ – Uma empresa fabrica um único produto a um custo variável por unidade igual a R$ 60,00 e um custo fixo mensal de R$ 12.000,00. Em períodos normais, a capacidade máxima de produção é de 500 unidades por mês, e a produção é totalmente vendida; nessas condições, o preço de venda é fixado em 40% acima do custo médio de produção. Em períodos de recessão, as vendas caem, atingindo apenas 80% da capacidade máxima de produção. Mantendo-se na recessão o mesmo preço vigente em períodos normais, ele será x% superior ao novo custo médio por unidade. O valor de x é aproximadamente igual a (o custo médio de produção é igual ao custo total dividido pela quantidade produzida):

a) 39%
b) 37%
c) 35%
d) 33%
e) 31%

Calculando:

Custo médio em períodos normais: $C_N = \frac{12000 + 60 \cdot 500}{500} = 84$

Preço de venda em períodos normais: $V_N = 1{,}4 \cdot 84 = 117{,}6$

Custo médio em períodos de recessão: $C_R = \frac{12\,000 + 60 \cdot 500 \cdot 0{,}8}{500 \cdot 0{,}8} = 90$

Preço de venda em períodos de recessão: $V_R = V_N = 117{,}6$

Comparando o preço de venda com o custo, ambos no período de recessão, temos:

$\frac{117{,}6}{90} = 1{,}3067 \cong 31\%$

6. Fac. Albert Einstein-SP – Suponha que, em certo país, observou-se que o número de exames por imagem, em milhões por ano, havia crescido segundo os termos de uma progressão aritmética de razão 6, chegando a 94 milhões/ano ao final de 10 anos. Nessas condições, o aumento percentual do número de tais exames, desde o ano da observação até o final do período considerado, foi de

a) 130%.
b) 135%.
c) 136%.
d) 138%.

Se foram 10 anos com crescimento de 6 milhões por ano (o que significa 9 aumentos de 6 milhões), no primeiro ano o número de casos era de $94 - 9 \cdot 6 = 94 - 54 = 40$.

Ao final de 10 anos, o número de exames por imagem aumentou de 40 milhões por ano para 94 milhões por ano. Isso representa um aumento de:

$\frac{94 - 40}{40} = \frac{54}{40} = 1{,}35 = 135\%$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Famerp-SP – Em 2016, um determinado país teve T casos de cânceres em homens, dos quais 64% correspondiam aos dez tipos mais frequentes. Sabe-se que 30% dos dez tipos mais frequentes correspondiam ao câncer de próstata, que totalizaram, naquele ano, 60 000 casos. Nessas condições, T é igual a

a) 312 500.
b) 292 500.
c) 296 500.
d) 298 000.
e) 305 000.

8. IFAL – No exame de seleção para o ano de 2017, o Ifal ofereceu 504 vagas para seus cursos integrados e, no exame de seleção para o ano de 2018, está oferecendo 630 vagas. Qual é o percentual de aumento do número de vagas para o ano de 2018?

a) 12,6%
b) 20%
c) 25%
d) 30%
e) 33%

9. CFTMG – Sabe-se que, para preparar uma determinada suplementação alimentar, a quantidade de suplemento a ser diluída deve ser de 3% do volume de leite. Se for utilizado meio litro de leite e se a medida usada para o suplemento for uma colher que tem 3 cm^3, então o número de colheres do suplemento que será necessário, nessa preparação, é igual a

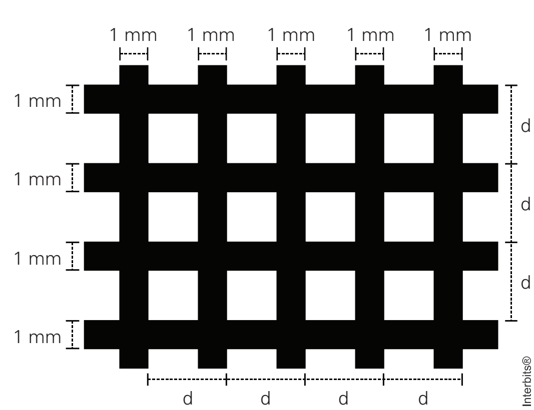
a) 5.
b) 6.
c) 7.
d) 8.

10. Espcex-SP/Aman-RJ (adaptado) – Em uma população de homens e mulheres, 60% são mulheres, sendo 10% delas vegetarianas. Sabe-se, ainda, que 5% dos homens dessa população também são vegetarianos. Qual porcentagem das pessoas vegetarianas são mulheres?

a) 50%
b) 70%
c) 75%
d) 80%
e) 85%

11. Enem – Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de d − 1 milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente os raios de luz que atingirem as lacunas deixadas pelo entrelaçamento conseguem transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é:

a) 2
b) 1
c) 11/3
d) 4/3
e) 2/3

12. Fac. Albert Einstein-SP – Para um concurso militar, o número de vagas para homens correspondia a 80% do número de vagas para mulheres. Dada a grande procura de candidatos, decidiu-se ampliar o número de vagas, sendo 30 novas vagas para homens e 15 para mulheres. Após a mudança, o número total de vagas para homens passou a ser 84% do número total de vagas para mulheres. Com isso, o total de vagas para ambos os sexos passou a ser

a) 276
b) 552
c) 828
d) 1104

13. Sistema Dom Bosco – Uma revendedora de automóveis usados apresenta um modelo e o anuncia por x reais. Para atrair clientes, a empresa oferece duas formas de pagamento. Observe:

Forma de pagamento	Valor
À vista	10% de desconto sobre o preço anunciado
Cartão de crédito	Com acréscimo de 20% sobre o preço anunciado, sendo o total dividido em 10 parcelas iguais

Um cliente comprou um automóvel e optou pelo pagamento no cartão de crédito em 10 parcelas iguais de R$ 3.240,00.

Considerando as informações anteriores, é correto afirmar que

a) o valor x anunciado pela revendedora é menor que R$ 25.000,00.
b) se esse cliente tivesse optado pelo pagamento à vista, então ele gastaria mais de R$ 24.500,00 com essa compra.
c) a opção que esse comprador fez usando o cartão de crédito representou um acréscimo de 30% sobre o valor que seria pago à vista.
d) se o cliente tivesse pagado à vista, em vez de utilizar o cartão de crédito, então teria economizado mais de R$ 8.000,00.

14. FGV-RJ – As grandezas P, T e V são tais que P é diretamente proporcional a T e inversamente proporcional a V.

Se T aumentar 20% e V diminuir 20%, determine a variação percentual de P.

15. UERJ – As farmácias W e Y adquirem determinado produto com igual preço de custo. A farmácia W vende esse produto com 50% de lucro sobre o preço de custo. Na farmácia Y o preço de venda do produto é 80% mais caro do que na farmácia W.

O lucro da farmácia Y em relação ao preço de custo é de:

a) 170%
b) 150%
c) 130%
d) 110%

16. FGV-RJ (adaptado) – No início de certo ano, Fábio aplicou sua poupança em dois fundos de investimentos, A e B, sendo A o de ações e B o de renda fixa. O valor aplicado em B foi o quádruplo do aplicado em A. Um ano depois, Fábio observou que o fundo A rendeu –2% (perda de 2%) e o B rendeu 15%. Considerando o total aplicado, qual a taxa anual de rentabilidade de Fábio?

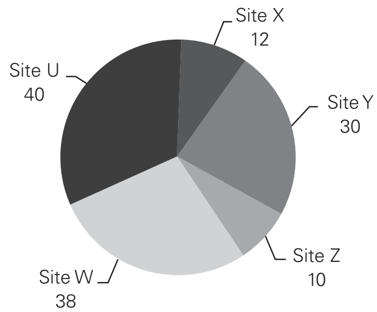
17. Enem – Uma distribuidora possui 40 mil litros de combustível em estoque. Tal combustível é resultante da mistura de etanol e gasolina pura, de acordo com os percentuais de 25% de etanol e 75% de gasolina pura. Para atender aos novos parâmetros nacionais na mistura dos combustíveis, o dono da distribuidora precisará alterar os percentuais de composição do combustível presente no tanque para 20% de etanol e 80% de gasolina pura. Se o dono da distribuidora irá adequar o combustível em estoque ao novo padrão adicionando gasolina pura aos 40 mil litros existentes, a quantidade de gasolina, em litros, a ser adicionada será

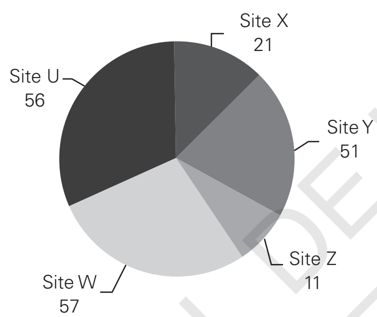
a) 32 000.
b) 10 000.
c) 8 000.
d) 2 500.
e) 2 000.

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C6-H25

Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.





Interbits®

Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso da sexta-feira para o sábado foi no *site*

a) X.
b) Y.
c) Z.
d) W.
e) U.

19. Enem C6-H25

O técnico de um time de voleibol registra o número de jogadas e de acertos, por atleta, em cada fundamento, para verificar os desempenhos dos jogadores. Para que o time tenha um melhor aproveitamento no fundamento bloqueio, ele decide substituir um dos jogadores em quadra por um dos que estão no banco de reservas. O critério a ser adotado é o de escolher o atleta que, no fundamento bloqueio, tenha apresentado o maior número de acertos em relação ao número de jogadas de que tenha participado. Os registros dos cinco atletas que se encontram no banco de reservas, nesse fundamento, estão apresentados no quadro.

Atleta	Participação em bloqueios	
	Número de acertos	Número de jogadas
I	20	30
II	10	34
III	19	32
IV	3	4
V	8	10

Qual dos atletas do banco de reservas o treinador deve colocar em quadra?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

20. Enem C5-H21

Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

a) R$ 0,96.
b) R$ 1,00.
c) R$ 1,40.
d) R$ 1,50.
e) R$ 1,56.

2

MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS SIMPLES E COMPOSTO

- Conceitos iniciais
- Juros simples
- Juros compostos
- Juros e funções
- Equivalência de taxas

HABILIDADES

- Identificar conceitos de juros.
- Aplicar corretamente fórmulas de juros.
- Resolver situações-problema envolvendo juros.
- Interpretar gráficos que representam juros simples.
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

MATEMÁTICA FINANCEIRA

CAPITAL (C)

O capital C (muitas vezes também chamado de capital inicial, representado por C_0) é o recurso financeiro que será investido ou financiado no tempo inicial da operação financeira. Ele é a base para o cálculo de juros e também é conhecido como valor principal, valor presente ou valor aplicado.

Na propaganda a seguir, o valor a ser considerado como capital é descrito como valor à vista, ou seja, valor presente, no caso, R$ 499,00.

Qual será a taxa de juros cobrada, segundo esse anúncio, no caso da compra a prazo?

TAXA (I)

É o coeficiente obtido da relação entre os juros (j) e o capital (C), que pode ser expresso em forma percentual ou decimal. Utiliza-se a letra i para representá-la, pois, no inglês, para se referir a juros, usa-se a palavra *interest*. A taxa i fará o papel de taxa de aumento ou desconto, como estudado no módulo anterior.

JUROS (J)

Os juros são a remuneração obtida por meio do capital de terceiros. Ela pode ser entendida de duas formas:

- quem paga: nesse caso, os juros podem ser chamados de prejuízo;
- quem recebe: pode ser entendido como rendimento, ou seja, lucro.

De forma mais geral, pode-se afirmar que juros são a forma de remuneração pelo empréstimo de dinheiro. Note que juros só existem se houver valor (capital) empregado, seja ele próprio ou de terceiros.

Esse conceito também é reconhecido por juros de mora. Mora representa atraso ou prorrogação no prazo de pagamento de um título financeiro, conforme destacado no boleto de cobrança.

É importante destacar que juros é **dinheiro**. Muitas pessoas confundem juros com a taxa de juros. A **taxa de juros** é o percentual que será usado para o cálculo de juros, que por sua vez é o valor monetário a ser recebido ou cobrado.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Um investidor aplicou um capital de R$ 1.200,00 em um fundo de investimento que lhe rendeu 3%. Qual foi o ganho do investidor?

Resolução

O ganho do investidor se refere a juros de 3%, o que corresponde a:

3% de $1200 = 0{,}03 \cdot 1200 = \text{R\$ } 36$

PRAZO, TEMPO OU PERÍODO (N)

É o tempo que o capital (C_C), aplicado a uma taxa (i_i), ficará investido ou emprestado. Ele pode ser inteiro ou fracionário.

- **período inteiro**: 1 dia; 1 mês comercial (30 dias); 1 ano comercial (360 dias) etc.
- **período fracionário:** 3,5 meses; 15,8 dias; 5 anos e 2 meses etc.

Entre todos os períodos, existem aqueles que são mais usuais. Os principais são:

- Dia: usualmente adotado para pagamento de mora em títulos ou boletos de cobrança (escrevemos **a.d.,** que significa **ao dia**).
- Mês: normalmente adotado em financiamentos de automóveis e eletrodomésticos (escrevemos **a.m.,** que significa **ao mês**).
- Ano: usualmente adotado no financiamento de imóveis (escrevemos **a.a.**, que significa **ao ano**).

É importante destacar que a taxa e o prazo devem fazer referência a uma mesma unidade de tempo. Por exemplo, considere um período de um ano e meio. Se a taxa informada for **ao mês**, trataremos o prazo como **18 meses**. Se a taxa informada for **ao ano**, trataremos o prazo como **1,5 ano.**

MONTANTE (M OU CN)

O montante (ou capital acumulado) é o valor acumulado após um capital C ficar aplicado durante um período n a uma taxa i. É a soma do capital investido com os juros obtidos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Aplicando-se, durante 1 mês, um capital de R$ 500,00 na caderneta de poupança com rendimento de 0,53% a.m., qual será o montante?

Resolução

O capital inicial é $C_0 = 500$. Como esse capital ficará aplicado durante 1 mês (período), representamos o montante por C_1, e o cálculo se dá por meio do aumento percentual de C_0, segundo uma taxa de 0,53%.

$C_1 = C_0 \cdot (1 + 0{,}0053) = 500 \cdot 1{,}0053 =$

$= \text{R\$ } 502{,}65$

Juros simples

No regime de juros simples, o cálculo dos juros a cada período se dá sempre sobre o capital inicial. Vejamos um exemplo:

José pegou emprestado R$ 400,00 de João. Eles combinaram que José quitaria o empréstimo em uma única parcela assim que possível. O acordo também previu cobrança de juros de 1% a.m. Veja qual a quantia necessária para a quitação da dívida ao longo dos meses:

- Após um mês: 1% de 400 = $0{,}01 \cdot 400 = 4$;
- Valor devido: $C_1 = 400 + 4 =$ R$ 404,00.

Após o segundo mês, serão cobrados novos juros, mas eles serão calculados sobre a mesma referência, ou seja, o capital inicial $C_0 = 400$. Isso acontecerá em todos os meses seguintes:

- Após 2 meses: 1% de 400 = $0{,}01 \cdot 400 = 4$;
- Valor devido: $C_2 = 404 + 4 =$ R$ 408,00;
- Após 3 meses: 1% de 400 = $0{,}01 \cdot 400 = 4$;
- Valor devido: $C_3 = 408 + 4 =$ R$ 412,00.

Perceba que, a cada período, a dívida cresce o mesmo valor, 1% de C_0. Isso é o que caracteriza o regime de juros simples: crescimento linear.

Em resumo:

$$C_n = C_0(1 + i \cdot n)$$

Observe que, na expressão acima, temos quatro elementos: C_n, C_0, i e n. Em qualquer exercício que nos informar três desses quatro elementos, descobriremos o que falta. Vejamos um exemplo de cada situação.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Qual o montante gerado por um capital de R$ 220,00 aplicado por dois anos, à taxa de 4% a.m., sob regime de juros simples? Quais os juros dessa operação financeira?

Resolução

Temos $C_0 = 220$, $i = 0{,}04$ e $n = 24$ (2 anos correspondem a 24 meses).

$C_{24} = 220 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 24) \therefore C_{24} = \text{R\$ } 431{,}20$

Logo, o montante é de R$ 431,20, e os juros foram de 431,20 − 220 = R$ 211,20.

2. Sistema Dom Bosco – João pagou a um banco a importância de R$ 2,10 de juros por um dia de atraso sobre uma prestação de R$ 420,00. Qual a taxa mensal de juros simples aplicada pelo banco?

Resolução

Por se tratar de juros simples, os juros diários serão sempre calculados sobre a mesma base. Portanto, sempre será de R$ 2,10. Os juros correspondentes a 1 mês serão de $30 \cdot 2{,}1 =$ R$ 63,00. Aplicando a fórmula dos juros simples, temos:

$$483 = 420(1 + i \cdot 1) \rightarrow 1 + i = \frac{483}{420} = 1{,}15$$

$$\therefore i = 0{,}15 = 15\%$$

Logo, a taxa de juros mensal é de 15%.

3. Sistema Dom Bosco – Qual foi o capital que gerou rendimentos de R$ 187,50 durante 10 meses, a uma taxa de 1,5% ao mês?

Resolução

Queremos calcular o capital inicial C_0. Sabemos que: $i = 0{,}015$, $n = 10$ e $C_{10} = C_0 + 187{,}5$. Usando a fórmula de juros simples, temos:

$$C_0 + 187{,}5 = C_0(1 + 0{,}015 \cdot 10)$$

$$C_0 + 187{,}5 = 1{,}15\, C_0$$

$$187{,}5 = 0{,}15C_0 \therefore C_0 = \frac{187{,}5}{0{,}15} = \text{R\$ } 1.250{,}00$$

Portanto, o capital investido foi de R$ 1 250,00.

Juros compostos

Na maioria das transações financeiras do nosso cotidiano, como financiamento de automóveis e imóveis e aplicações como a caderneta de poupança, o regime de juros não é o simples, o qual estudamos anteriormente. Nas operações aqui citadas, o regime de juros usado é o de **juros compostos**. Mais adiante vamos entender o motivo.

Nesse regime de cobrança, ao final de cada período, os juros que foram gerados são agregados ao capital, o que faz que a base de cálculo de juros no próximo período seja maior. Isso altera fortemente o comportamento do montante. Vejamos isso por meio de um exemplo.

Imagine que uma aplicação renda 1% ao mês. Vejamos o que acontece com um capital inicial aplicado de R$ 500.

O capital irá crescer a uma taxa de 1% ao mês. Portanto, devemos multiplicá-lo por 1,01 (fator de correção estudado no capítulo anterior). Então, após o primeiro mês, teremos:

$$C_1 = C_0 \cdot 1{,}01 = 500 \cdot 1{,}01 = 505$$

Agora, no segundo mês, os juros serão calculados sobre o montante atual (R$ 505), e não sobre o capital inicial. Isso nos leva a:

$$C_2 = C_1 \cdot 1{,}01 = 505 \cdot 1{,}01 = 510{,}05$$

Da mesma forma, no terceiro mês os juros serão calculados sobre o montante acumulado, e assim por diante:

$$C_3 = C_2 \cdot 1{,}01 = 510{,}05 \cdot 1{,}01 = 515{,}15$$

Observe a tabela, na qual replicamos o exemplo acima nos dois regimes.

Períodos (n)	Montante (juros compostos)	Montante (juros simples)
0	R$ 500,00	R$ 500,00
1	R$ 505,00	R$ 505,00
2	R$ 510,05	R$ 510,00
3	R$ 515,15	R$ 515,00
4	R$ 520,30	R$ 520,00
300	R$ 9.894,23	R$ 2.000,00

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Qual o montante de um capital de R$ 5.000,00, aplicado à taxa de 4% ao mês, pelo regime de juros compostos, durante 5 meses?

Resolução

$$C_5 = C_0 \cdot (1 + i)^5 = 5000 \cdot 1{,}04^5 =$$
$$= 5000 \cdot 1{,}21665 = \text{R\$ } 6083{,}25$$

Equivalência de taxas

- Dizemos que duas taxas são equivalentes se elas produzem, sobre um mesmo capital e no mesmo regime de juros, igual montante em períodos equivalentes.

Consideremos primeiramente o caso dos juros simples. Vamos ver a relação entre taxas mensal e anual. Precisamos tomar períodos equivalentes, por exemplo: 1 ano no caso da taxa anual e 12 meses para taxa mensal.

Se um capital C_0 for aplicado durante 1 ano a uma taxa de 1% a.m., o montante será de:

$$C_{12} = C_0 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot 12)$$

Seja i a taxa anual que gera o mesmo montante em período equivalente, em 1 ano:

$$C_1' = C_0 \cdot (1 + i \cdot 1)$$

Portanto, para que as taxas sejam equivalentes, devemos ter $C_{12} = C'_1$:

$$C_0 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot 12) = C_0 \cdot (1 + i \cdot 1)$$
$$1{,}12 = 1 + i \therefore i = 0{,}12 = 12\% \text{ a.a.}$$

Então, se o regime for de juros simples, a resposta é sim: 1% ao mês equivale a 12% ao ano. No caso dos juros simples, percebemos que basta multiplicarmos a primeira taxa pelo número de períodos que equivalem a um único período relativo à outra taxa. No exemplo tivemos:

$$1\% \text{ ao mês} \times 12 \text{ meses} = 12\% \text{ ao ano}$$

Vejamos o que acontece no caso de juros compostos:

$$C_1' = C_{12}$$
$$C_0 \cdot (1 + 0{,}01)^{12} = C_0 \cdot (1 + i)^1$$
$$(1{,}01)^{12} = (1 + i)^1$$
$$1{,}1268 = 1 + i$$
$$i = 0{,}1268 = 12{,}68\%$$

Ou seja, 1% ao mês equivale, no regime de juros compostos, a 12,68% ao ano.

De modo geral, no regime de juros compostos, duas taxas são equivalentes se:

$$(1+i_1)^{n_1} = (1+i_2)^{n_2}$$

em que n_1 e n_2 são períodos equivalentes (1 ano = = 12 meses, 1 mês = 30 dias etc.).

ROTEIRO DE AULA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

- **Conceitos básicos**
  - **Capital (C)**
  - Taxa de juros (i)
  - **Período ou tempo (n)**
  - Montante (M)
- **Juros simples (J)**
  - **Juros calculados sempre sobre o** valor inicial
  - $J = C \cdot i \cdot n$
  - $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$
- **Regime de cálculo**
  - **Composto**
    - **Juros calculados a cada período sobre o** último montante
    - **M =** $C \cdot (1 + i)^t$

EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. UECE – Bruno fez um empréstimo de R$ 1.000,00 a juros simples mensais de 10%. Dois meses após, pagou R$ 700,00 e, um mês depois desse pagamento, liquidou o débito. Este último pagamento, para liquidação do débito, foi de

a) R$ 550,00.
b) R$ 460,00.
c) R$ 490,00.
d) R$ 540,00.

O saldo devedor de Bruno após dois meses era de $1\,000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 2) =$ = R$ 1.200,00. Efetuado o pagamento de R$ 700,00, seu saldo devedor passou a ser de $1\,200 - 700 =$ R$ 500,00. Logo, no mês seguinte, seu saldo devedor passou a ser de $500(1 + 0,1) =$ R$ 550,00, que é o resultado procurado.

2. IFSC – Analise as seguintes situações:

I. Seu João fez um empréstimo de R$ 1 000,00 no Banco A, a uma taxa de juros simples; após 4 meses, pagou um montante de R$ 1 320,00 e quitou sua dívida.

II. Dona Maria fez um empréstimo de R$ 1 200,00 no Banco B, a uma taxa de juros simples; após 5 meses, pagou um montante de R$ 1 800,00 e quitou a dívida.

Assinale a alternativa CORRETA.

As taxas mensais de juros simples cobradas pelo Banco A e pelo Banco B, respectivamente, são:

a) 8% a.m. e 10% a.m.
b) 18% a.m. e 13% a.m.
c) 6,4% a.m. e 12,5% a.m.
d) 13% a.m. e 18% a.m.
e) 10% a.m. e 8% a.m.

Como ambas as situações estão sob juros simples, temos juros de 320 reais em quatro meses na primeira situação. Aplicando a fórmula de juros simples, temos:

$J = c \times i \times t \rightarrow 320 = 1\,000 \times i \times 4 \rightarrow i = 0,08 = 8\%$

Na segunda situação, temos:

$J = c \times i \times t \rightarrow 600 = 1\,200 \times i \times 5 \rightarrow i = 0,1 = 10\%$

3. Enem (adaptado) C4-H17

Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de x meses. A alternativa correta é:

a) $M(x) = 5\,000 + 150x$
b) $M(x) = 5\,000 \cdot 1{,}03x$
c) $M(x) = 5\,000 \cdot 0{,}03x$
d) $M(x) = 5\,000 \cdot 130x$
e) $M(x) = 5\,000 + 1{,}03x$

Considerando juros simples, o montante M pode ser escrito com base no número de meses x. Daí vem: $M(x) = 5\,000(1 + 0{,}03x) = 150x + 5\,000$.

Competência: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Habilidade: Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

4. UFJF-MG (adaptado) – Um capital de R$ 1.000,00 aplicado no sistema de juros compostos a uma taxa de 10% ao mês gera, após n meses, o montante (que é mais o capital inicial) dado pela fórmula abaixo:

$$M(n) = 1000\left(1 + \frac{1}{10}\right)^n$$

a) Qual o valor do montante após 2 meses?

b) Qual o número mínimo de meses necessários para que o valor do montante seja igual a R$ 10.000,00? Use $10^{1,04} = 11$.

a)

$$M(2) = 1\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2$$

$$M = 1\,000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$M(2) = 1\,0\cancel{00} \cdot \left(\frac{121}{1\cancel{00}}\right)$$

$M(2) = 10 \cdot 121$

$M(2) = 1\,210 \leftrightarrow M(2) =$ R$ 1.210,00 b)

$10\,000 = 1000 \cdot (1,1)^n$

$(1,1)^n = \dfrac{10\,\cancel{000}}{1\,\cancel{000}}$

$\left(\dfrac{11}{10}\right)^n = 10$

$\left(\dfrac{10^{1,04}}{10}\right)^n = 10$

$(10^{0,04})^n = 10$

$0,04n = 10$

$n = \dfrac{10}{0,04} = 250$

A quantidade mínima é de 250 meses.

5. CFTM (adaptado) – O gerente de um banco apresentou a um cliente, interessado em investir determinada quantia de dinheiro, quatro opções, conforme descritas no quadro abaixo.

Opção de investimento	Regime de capitalização	Prazo (meses)	Taxa (a.m.)
1	composto	2	2,0%
2	composto	3	1,5%
3	simples	4	2,0%
4	simples	5	1,5%

A opção que proporcionará um maior rendimento ao cliente, considerando-se os prazos e taxas fixados pelo banco, será a

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4.

Nota-se que os dois primeiros investimentos são da forma de juros compostos, seguindo a fórmula:

$$\text{Montante} = \text{Capital} \times (1 + \text{taxa})^{\text{tempo}}$$

Os dois últimos investimentos são de juros simples, isto é:

$$\text{Montante} = \text{Capital} \times (1 + \text{taxa} \times \text{tempo})$$

Aplicando ambos os tipos de juros nas opções de investimento e calculando o melhor rendimento sobre um capital C, temos:

$\text{Inv1} = [C \times (1 + \text{taxa})^{\text{tempo}}] = (1 + 0,02)^2$

$C = (1,02)^2$

$C = 1,0404C$

$\text{Inv2} = [C \times (1 + \text{taxa})^{\text{tempo}}] = (1 + 0,015)^3$

$C = (1,015)^2$

$C = 1,04567C$

$\text{Inv3} = c + (C \times \text{taxa} \times \text{tempo}) = C + (0,02 \times 4)$

$C = C + 0,08$

$C = 1,08C$

$\text{Inv4} = c + (C \times \text{taxa} \times \text{tempo}) = C + (0,015 \times 5)$

$C = C + 0,075$

$C = 1,075C$

Logo, o melhor investimento é a terceira opção.

6. FGV-RJ – Como resultado de um processo ganho na justiça, Hélio deveria ter recebido, no início de 2006, a quantia de R$ 4.000,00 da empresa Alfa. No mesmo período (início de 2006), Hélio devia R$ 1 000,00 em sua fatura de cartão de crédito. Nenhuma dessas quantias foi quitada à época. Para atualizar (corrigir) valores monetários ao longo do tempo, pode-se utilizar o regime de capitalização de juros compostos. É válida a seguinte relação matemática:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

em que **M** é o montante; **C** é o capital; **i** é a taxa de juros e **n** é o número de períodos de capitalização. Por exemplo, aplicando-se o capital de R$ 1.000,00 à taxa de 5,00% ao mês, por um mês, obtém-se o montante de R$ 1.050,00.

A tabela abaixo contém valores para o termo (1 + i)n para **i** e **n** selecionados.

	n (meses)				
i (% mensal)	1	12	108	120	132
1,00	1,0100	1,1268	2,9289	3,3004	3,7190
2,00	1,0200	1,2682	8,4883	10,7652	13,6528
3,00	1,0300	14,4258	24,3456	34,7110	49,4886
4,00	1,0400	1,6010	69,1195	110,6626	177,1743
5,00	1,0500	1,7959	194,2872	348,9120	626,5958

Utilize as informações do enunciado para responder às seguintes questões:

a) Suponha que a taxa de juros utilizada para atualizar o valor que Hélio tem a receber da empresa Alfa seja igual a 1,00% ao mês. Qual será o valor que a empresa Alfa deverá pagar a Hélio no início de 2016, ou seja, após exatos 10 anos?

b) Suponha que a taxa de juros utilizada para atualizar a dívida da fatura de cartão de crédito seja igual a 4,00% ao mês. No início de 2016, ou seja, após exatos 10 anos, qual é o valor atualizado dessa dívida de Hélio?

c) Suponha que Hélio receba da empresa Alfa, no início de 2016, o valor devido. Quanto, no máximo, poderia ter sido a dívida de Hélio em sua fatura de cartão de crédito, em valores do início de 2006, de forma que ele pudesse quitá-la, no início de 2016, com o valor recebido da empresa Alfa?

Nota: taxa de juros utilizada para atualizar:

- o valor recebido por Hélio da empresa Alfa: 1,00% ao mês.
- a dívida da fatura de cartão de crédito: 4,00% ao mês.

a)

$4\,000 \cdot \left(1+\frac{1}{100}\right)^{120} = 4\,000 \cdot 3{,}3004 = 13\,201{,}60$, ou seja,

R$ 13.201,60

b)

$1\,000 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^{120} = 4\,000 \cdot 110{,}6626 = 110{,}662$, ou seja,

R$ 110 662,60

c) Considerando que x seja o valor pedido, temos:

$x \cdot \left(1+\frac{1}{100}\right)^{120} = 13\,201{,}60$

$x \cdot 110{,}6626 = 13\,201{,}60$

$x \cong 119{,}30$, ou seja, R$ 119,30

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Unisc-RS – A função **f** que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor x de um produto é

a) $f(x) = x - 21$
b) $f(x) = 0{,}79x$
c) $f(x) = 1{,}21x$
d) $f(x) = -21x$
e) $f(x) = 1{,}021x$

8. CFTMG – O pagamento de uma televisão foi feito, sem entrada, em 5 parcelas mensais iguais, corrigidas a juros simples pela taxa de 0,7% ao mês. Dessa forma, no final do período, o valor total pago, em percentual, será maior do que o inicial em

a) 2,1
b) 3,5
c) 4,2
d) 7,3

9. UFSM-RS (adaptado) – A chegada da televisão no Brasil facilitou o acesso à informação. Com o avanço da tecnologia, os aparelhos estão cada dia mais modernos e, consequentemente, mais caros.

Um consumidor deseja adquirir uma televisão com tecnologia de última geração. Enquanto aguarda o preço da televisão baixar, ele aplica o capital disponível de R$ 3 000,00 a juros simples de 0,8% ao mês em uma instituição financeira, por um período de 18 meses. Qual o montante ao final desse período?

10. UEPG-PR – Os capitais C_1 = R$ 2.000,00 e C_2 = R$ 1.500,00 são aplicados a juros simples de 1% ao mês e 18% ao ano, respectivamente, durante t meses. Após esse tempo, a soma dos montantes produzidos pelas duas aplicações é de R$ 3.840,00. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01) O tempo t de aplicação é superior a 6 meses.
02) O montante produzido por C_2 é R$ 1.980,00.
04) C_1 rendeu R$ 160,00 de juros.
08) O tempo t de aplicação é de 270 dias.

11. CFTMG (adaptado) – Uma cliente fez um empréstimo, a juros simples, de R$ 600,00 em um banco, a uma taxa de 4% ao mês, por dois meses. Quando ela foi pagar, o gerente do banco informou-lhe que poderia sortear uma taxa **i** para ter um desconto sobre o valor de sua dívida. Fez-se o sorteio e foi lhe concedido o desconto, resultando no pagamento de R$ 602,64. Dessa forma, qual o valor da taxa i sorteada?

12. IFAL – Em 2000, certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares ao FMI (Fundo Monetário Internacional) para pagar em 100 anos. Porém, por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje e a dívida foi sendo "rolada" com a taxação de juros compostos de 8,5% ao ano. Determine o valor da dívida no corrente ano de 2015, em dólar. Considere $(1{,}085)^5$.

a) 1,2 milhões.
b) 2,2 milhões.
c) 3,375 milhões.
d) 1,47 milhões.
e) 2 milhões.

13. ESPM-SP – Em todos os dias 10 dos meses de janeiro, fevereiro e março de um certo ano, o sr. João aplicou a mesma quantia de R$ 1.000,00 à taxa de juros compostos de 10% ao mês. Podemos concluir que o montante dessa aplicação no dia 10 de abril desse mesmo ano foi de:

a) R$ 4.203,00
b) R$ 3.641,00
c) R$ 4.015,00
d) R$ 3.135,00
e) R$ 3.968,00

14. CFTRJ – Marcelo comprou um móvel de R$ 1.000,00 de forma parcelada, com juros de 5% ao mês. Sabendo que Marcelo pagou R$ 400,00 no ato da compra e o restante um mês depois, qual foi o valor dessa segunda parcela, 30 dias após a compra?

15. UPE – Patrícia aplicou, num investimento bancário, determinado capital que, no regime de juro composto, durante um ano e seis meses, à taxa de 8% ao mês, gerou um juro de R$ 11.960,00. Qual é o capital aplicado por ela nesse investimento? Utilize $(1,08)^{18} = 3,99$.

a) R$ 3.800,00
b) R$ 4.000,00
c) R$ 4.600,00
d) R$ 5.000,00
e) R$ 5.200,00

16. USF-SP (adaptado) – Pensando em montar seu próprio consultório, Nathália começou a economizar desde que entrou no curso de Medicina. Ao passar no vestibular, ela ganhou R$ 5.000,00 de seus pais e os aplicou a uma taxa de 0,5% ao mês a juros compostos. Hoje, passados 5 anos, ou seja, 60 meses, qual o montante do rendimento dos R$ 5.000,00? (Considere $1,005^{60} = 1,35$).

a) R$ 6.750,00.
b) R$ 6.650,00.
c) R$ 6.550,00.
d) R$ 6.450,00.
e) R$ 6.350,00.

17. FGV-RJ (adaptado) – Um investidor aplicou certa quantia, em reais, à taxa de juro composto de 1% ao mês. Neste problema, desprezando qualquer tipo de correção monetária devido à inflação. Neste investimento, após 2 meses, seria possível resgatar o valor aplicado com lucro de R$ 4.020,00. Calcule o valor inicialmente aplicado.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C4-H17

João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e 5 parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse essa dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria

a) renegociar suas dívidas com o banco.
b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
d) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
e) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

19. Enem C5-H21

Um empréstimo foi feito a taxa mensal de $i\%$ usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

a) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

b) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}\right]$$

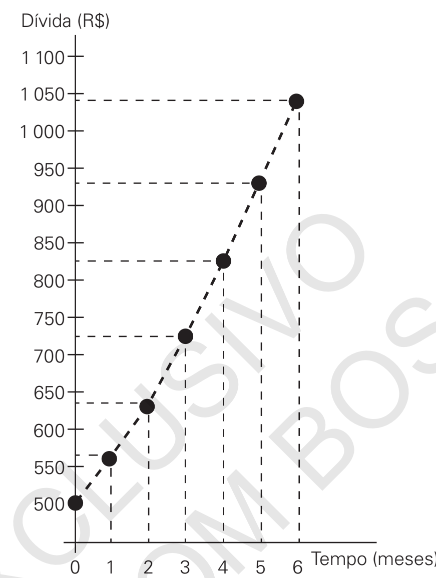
c) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

d) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{3i}{100}\right)}\right]$$

e) $$P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^3}\right]$$

20. Enem C6-H26

Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

a) R$ 500,00, constante e inferior a 10% ao mês.
b) R$ 560,00, variável e inferior a 10% ao mês.
c) R$ 500,00, variável e superior a 10% ao mês.
d) R$ 560,00, constante e superior a 10% ao mês.
e) R$ 500,00, variável e inferior a 10% ao mês.

3 ÂNGULOS E PARALELISMO

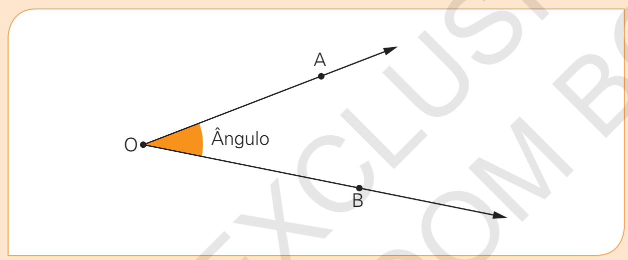
- Ângulos adjacentes
- Ângulos reto, agudo, obtuso e raso
- Ângulos complementares e suplementares
- Introdução
- Retas paralelas
- Retas paralelas cortadas
- por uma transversal

HABILIDADES

- Reconhecer ângulo geométrico.
- Identificar ângulos adjacentes, reto e raso.
- Utilizar os conceitos de ângulos complementares e suplementares na resolução de exercícios.
- Compreender o conceito de
- paralelismo.
- Compreender o postulado e a importância das
- paralelas.
- dentificar ângulos alternos
- internos e externos, colaterais e correspondentes.
- Usar a construção de retas
- paralelas na resolução de
- exercícios.

Ângulo

Ângulo é a região de um plano determinada pelo encontro de duas semirretas com origem comum, chamada **vértice do ângulo.**

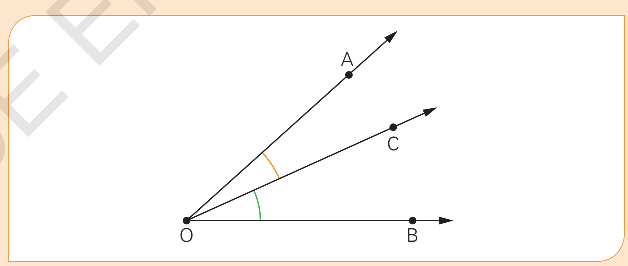


Nessa figura, o ponto O é o vértice do ângulo, e as semirretas $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamadas de lados do ângulo.

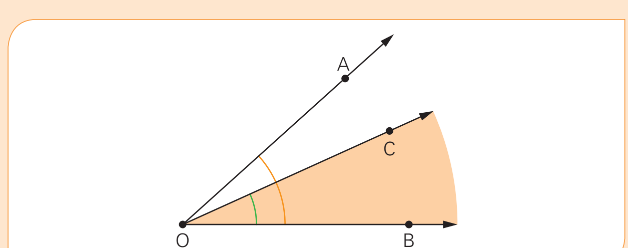
ÂNGULOS ADJACENTES

São pares de ângulos que têm um lado comum. As regiões determinadas por eles não têm mais pontos comuns.

Na figura a seguir, os ângulos BÔC e AÔC são adjacentes, pois têm um lado comum (a semirreta $\overrightarrow{OC}$), e apenas os pontos da semirreta $\overrightarrow{OC}$ são comuns a esses dois ângulos.

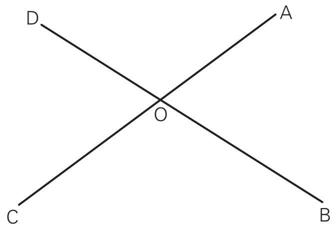


Na figura a seguir, os ângulos AÔB e BÔC não são adjacentes, pois, apesar de terem um lado comum (a semirreta $\overrightarrow{OB}$), todos os pontos da região determinada por BÔC (em amarelo) são comuns aos dois ângulos.



ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

São pares de ângulos em que os lados de um dos ângulos são os prolongamentos dos lados do outro. Exemplo:



- AÔB e CÔD são opostos pelo vértice (opv);
- AÔD e CÔB são opv.

Ângulos opv são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Justificativa:

Seja α a medida do ângulo AÔB e β a do ângulo AÔD, então:

$\alpha + \beta = 180° \rightarrow \beta - \alpha$ (I)

Ocorre também que:

AÔD + CÔD = β + CÔD = 180° $\rightarrow$

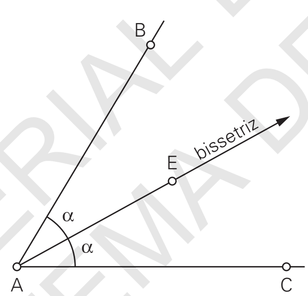
$\rightarrow$ CÔD = 180°– α (II).

De (I) e (II) temos CÔD = β.

Portanto, os ângulos opv AÔD e CÔD são congruentes, pois AÔD = CÔD = β.

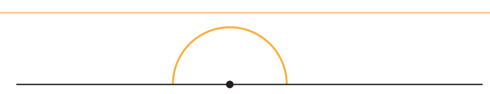
BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

É a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos de mesma medida.

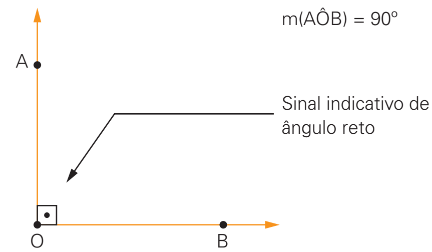


ÂNGULOS AGUDO E OBTUSO

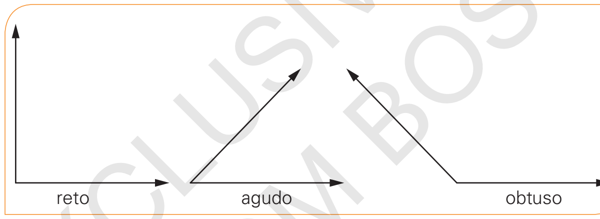
Dizemos que duas semirretas $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas se os pontos A, O e B estão alinhados (isto é, se estão em uma mesma reta) e se o ponto O está entre A e B. Nesse caso, dizemos que o ângulo AÔB é raso; sua medida em graus é 180°.



Ao dividirmos o ângulo raso em dois de mesma medida, obtemos dois ângulos retos, cuja medida é 90°.



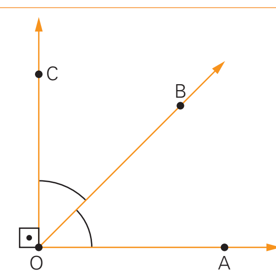
Se a medida de um ângulo é maior que 0° e menor que 90°, ele é agudo. Se é maior que 90° e menor que 180°, é obtuso.



ÂNGULOS COMPLEMENTARES E SUPLEMENTARES

Dois ângulos de medidas α e β são **complementares** se a soma de suas medidas corresponde à medida de um ângulo reto, ou seja:

$$\alpha + \beta = 90°$$

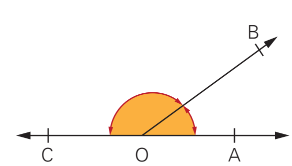


AÔB e BÔC são ângulos complementares.

Observação: Se a medida de um ângulo for x, seu complemento medirá 90°– x.

Dois ângulos de medidas α e β são suplementares se a soma de suas medidas corresponde à medida de um ângulo raso, ou seja:

$\alpha + \beta = 180°$



AÔB e BÔC são ângulos suplementares.

Observação: Se a medida de um ângulo for x, então seu suplemento medirá 180° − x.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – A medida em graus do ângulo Â é o triplo da medida de seu complemento. Qual a medida de Â?

Resolução

Com as informações do enunciado, podemos escrever a equação:

$\hat{A} = 3 \cdot (90° - \hat{A})$

Resolvendo a equação, obtemos $\hat{A} = 67,5°$.

2. Sistema Dom Bosco – O dobro da medida do complemento de um ângulo aumentado de 40° é igual à medida do seu complemento. Qual a medida do ângulo?

Resolução

Seja x a medida do ângulo procurado, temos:

$2 \cdot (90° - x) + 40° = 90° - x$

$180° - 2x + 40° = 90° - x$

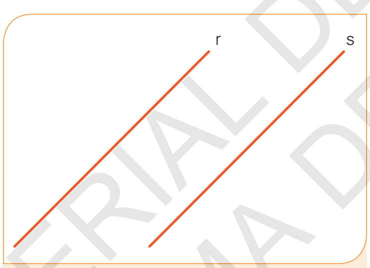
$220° - 2x = 90° - x$

$220° - 90° = -x + 2x \quad \therefore \quad x = 130°$

PARALELISMO

Retas paralelas

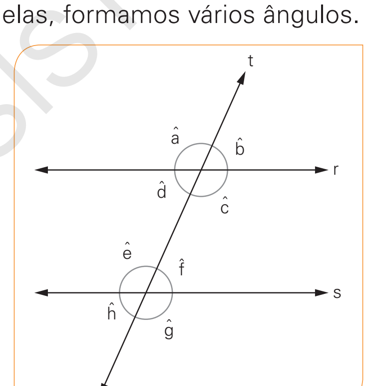
Dizemos que duas retas são paralelas se a distância entre elas for constante ou, de modo equivalente, se elas não tiverem nenhum ponto em comum.



Retas paralelas.

RETA TRANSVERSAL

Quando traçamos outra reta que cruze duas ou mais retas paralelas, formamos vários ângulos.

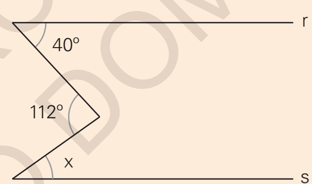


Dos oito ângulos formados, alguns são congruentes entre si, outros são complementares. Na sequência constam os nomes que esses ângulos recebem e alguns exemplos com base na figura anterior:

- Ângulos colaterais internos são suplementares: ĉ e f̂;
- Ângulos colaterais externos são suplementares: â e ĥ;
- Ângulos correspondentes são congruentes: b̂ e f̂;
- Ângulos opostos pelo vértice são congruentes: b̂ e d̂;
- Ângulos alternos externos são congruentes: â e ĝ;
- Ângulos alternos internos são congruentes: d̂ e f̂.

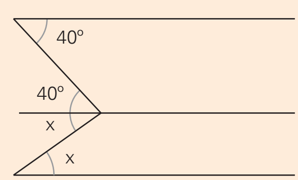
EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Se r//s, então qual o valor de x nesta figura?



Resolução

Basta traçarmos uma paralela a r e s que passe pelo vértice do ângulo 112°.



Com os ângulos alternos internos que surgem com a nova paralela, podemos escrever:

$40° + x = 112° \rightarrow x = 112° - 40° \rightarrow x = 72°$

2. Sistema Dom Bosco – Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam quatro ângulos obtusos, cujas medidas somam 600°. Calcule a medida de um dos ângulos agudos.

Resolução

Os ângulos obtusos são todos congruentes entre si, pois são opostos pelo vértice (opv) ou alternos internos ou externos. Chamando a medida de cada um de x, temos:

$$4x = 600° \rightarrow x = \frac{600°}{4} \rightarrow x = 150°$$

Portanto, qualquer um dos ângulos medirá 30°, pois qualquer um deles será colateral interno ou externo, ou seja, suplementar aos ângulos obtusos de 150°.

ROTEIRO DE AULA

ÂNGULOS

Quanto à medida

- Ângulo agudo
- Ângulo reto
- Ângulo obtuso
- Ângulo raso

Par de ângulos

- Ângulos complementares — $\alpha + \beta =$ 90°
- Ângulos suplementares — $\alpha + \beta =$ 180°
- Ângulo oposto pelo vértice (opv)
- Ângulos adjacentes

ROTEIRO DE AULA

PARALELAS CORTADAS POR TRANSVERSAL

Ângulos congruentes

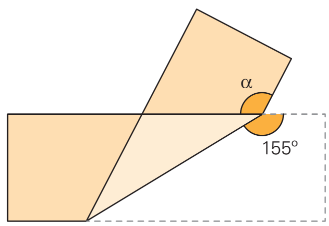
- Ângulos alternos internos
- Ângulos alternos externos
- Ângulos opostos pelo vértice
- Ângulos correspondentes

Ângulos suplementares

- Ângulos colaterais internos
- Ângulos colaterais externos

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

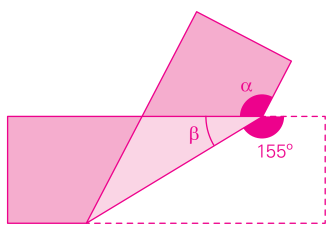
1. CFTRJ – Uma fita de papel retangular é dobrada conforme a figura a seguir.



O valor do ângulo α marcado na figura é

a) 155°
b) 150°
c) 140°
d) 130°

Considere a figura a seguir.



Ao desdobrá-la, é possível observar que $\alpha + \beta = 155°$.
Desse modo, podemos escrever:
$\alpha + \beta = 155°$ e $\beta = 180° - 155°$
$\alpha + 180° - 155° = 155°$
$\alpha + 25° = 155°$
$\alpha = 130°$

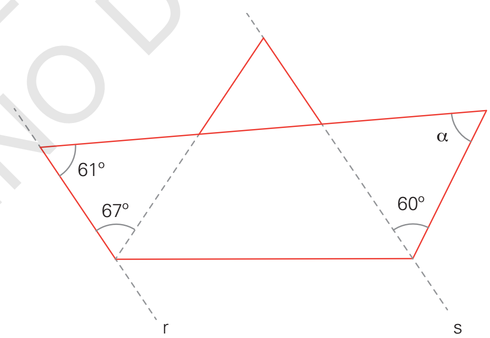
2. EEAR-SP – Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes. Sendo $\hat{A} = 2x + 15°$ e $\hat{B} = 5x - 9$, assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de x.

a) 2°
b) 8°
c) 12°
d) 24°

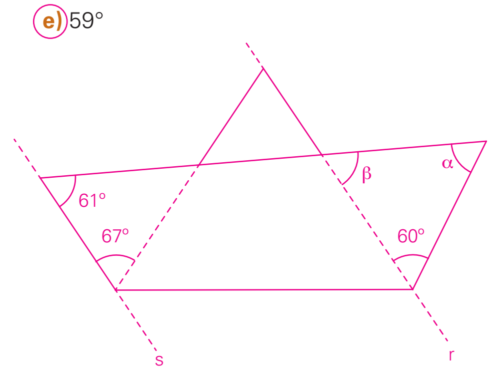
Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes, podemos escrever:
$2x + 15° = 5x - 9° \rightarrow 24° = 3x \rightarrow x = 8°$

3. IFPE C2-H7

Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suportes, r e s, são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?



a) 52°
b) 60°
c) 61°
d) 67°
e) 59°



$r // s \rightarrow \beta = 61°$
Logo,
$\alpha + 61° + 60° = 180° \rightarrow \alpha = 59°$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. IFSul-RS – Duas retas paralelas "r" e "s", cortadas por uma tranversal "t", formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em 20°.

O ângulo colateral interno agudo mede

a) 20°
b) 35°
c) 55°
d) 80°

Sabemos que a soma dos ângulos colaterais de uma reta que atravessa retas paralelas é 180° e que ângulos agudos são aqueles menores que 90°. Então, chamando os ângulos de x e y, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - y = 20 \end{cases} \rightarrow 2x = 200 \rightarrow x = \frac{200}{2} \rightarrow x = 100$$

Substituindo x = 100 em y, obtemos:

$x + y = 180 \rightarrow 100 + y = 180 \rightarrow y = 180 - 100 \rightarrow y = 80$

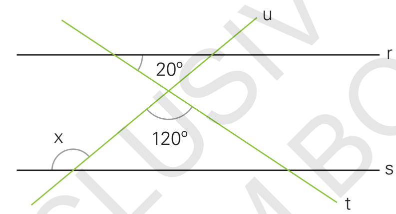
Logo, o ângulo colateral interno agudo mede 80°.

5. UEM-PR – Sobre geometria, assinale o que for **correto**.

01) Dois planos sempre se interceptam.
02) Duas retas perpendiculares determinam um único plano.
04) Dado um ponto qualquer P em um plano π existe uma única reta passando por P perpendicular ao plano.
08) Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas.
16) Se uma reta não intercepta um determinado plano, então necessariamente ela é paralela a ele.

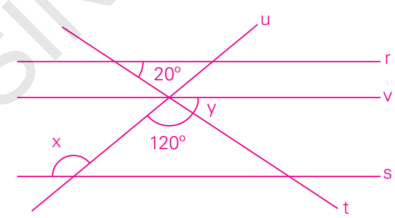
01) Incorreta. Dois planos podem ser paralelos.
02) Correta. Duas retas concorrentes determinam um único plano.
04) Correta. Uma reta perpendicular a um plano o cortará em um único ponto.
08) Incorreta. Se elas não são paralelas, podem ser reversas ou concorrentes.
16) Correta. Retas e planos que não se interceptam são ditos paralelos.
Logo, a soma é 02 + 04 + 16 = 22.

6. IFPE – Júlia começou a estudar Geometria na sua escola. Com dúvida em um exercício passado pelo professor de Matemática, ela pediu ajuda ao seu tio. O enunciado era: "As retas r e s são paralelas; as retas u e t, duas transversais. Encontre o valor do ângulo x na figura abaixo". Portanto, o valor de x é:



a) 120°
b) 125°
c) 130°
d) 135°
e) 140°

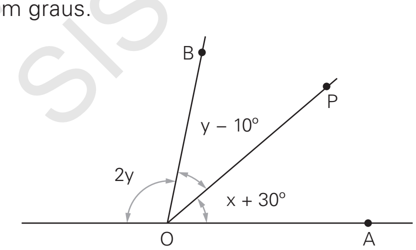
Traçando as retas:
v // r // s



y = 20° (correspondentes)
x = 120° + y (alternos internos)
x = 120° + 20°
x = 140°
Portanto, o valor de é x = 40°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. CFTSC (adaptado) – Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Determine o valor da diferença entre o suplemento de x e o complemento de y, nessa ordem, em graus.



a) 90
b) 100
c) 110
d) 120
e) 130

8. Sistema Dom Bosco – Com base nos estudos de geometria, julgue as afirmações abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

( ) Se a razão entre dois ângulos suplementares é igual a $\frac{2}{7}$, então o complemento do menor é 140°.

( ) A diferença entre as maiores medidas inteiras, em graus, de dois ângulos, sendo um obtuso e o outro agudo, nessa ordem, é igual à medida do ângulo reto.

Quantas são as afirmações falsas?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

9. Sistema Dom Bosco – Dois ângulos são complementares. Mostre que as bissetrizes desses ângulos formam um ângulo de 45°.

10. PUC-PR – Dois ângulos complementares $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sendo A < B, têm medidas na razão 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo $\hat{A}$ para o suplemento do ângulo $\hat{B}$ vale:

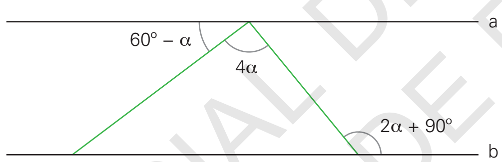
a) $\frac{43}{47}$
b) $\frac{17}{13}$
c) $\frac{13}{17}$
d) $\frac{19}{48}$
e) $\frac{47}{43}$

11. IFSP (adaptado) – As medidas dos ângulos de um triângulo são, respectivamente, x, 8x e 9x. Diante do exposto, encontre o valor de x.

12. Sistema Dom Bosco – O ângulo formado pelas bissetrizes dos dois ângulos adjacentes mede 48°. Sabendo que a medida de um dos ângulos é o triplo da medida do outro, a soma das medidas desses ângulos é:

a) 72°
b) 84°
c) 96°
d) 108°
e) 120°

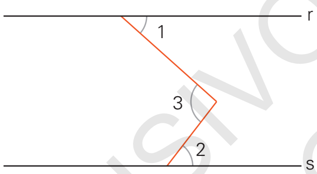
13. Mackenzie-SP – Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

a) um número primo maior que 23.
b) um número ímpar.
c) um múltiplo de 4.
d) um divisor de 60.
e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

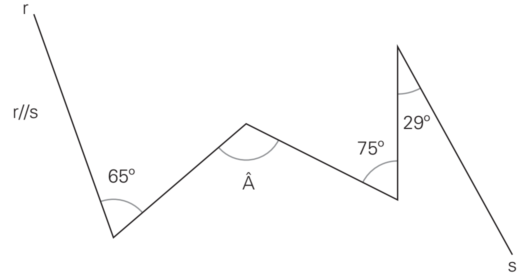
14. Fuvest-SP – Na figura adiante, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. Calcule a medida do ângulo 3.



a) 50°
b) 55°
c) 60°
d) 80°
e) 100°

15. CFTPR – Numa gincana, a equipe "Já Ganhou" recebeu o seguinte desafio:

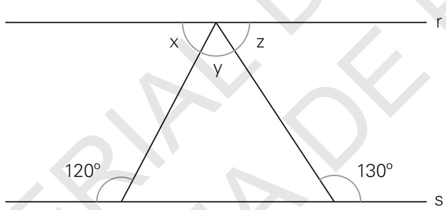
Na cidade de Curitiba, fotografar a construção localizada na rua Marechal Hermes no número igual a nove vezes o valor do ângulo Â da figura a seguir:



Se a equipe resolver corretamente o problema, irá fotografar a construção localizada no número:

a) 990.
b) 261.
c) 999.
d) 1026.
e) 1260.

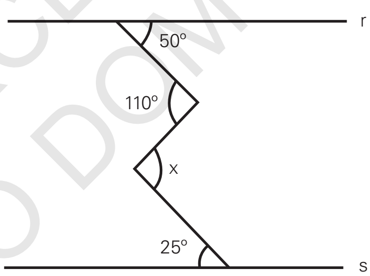
16. Fazu-MG (adaptado) – Sendo r // s na figura abaixo:



A razão $\frac{y}{z}$ é:

a) 1,1
b) 1,2
c) 1,3
d) 1,4
e) 1,5

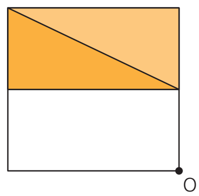
17. UFSC – Na figura, r e s são paralelas. O valor, em graus, do arco x é:



ESTUDO PARA O ENEM

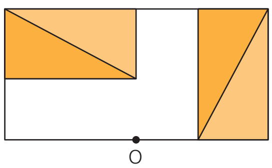
18. Enem C2-H7

Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

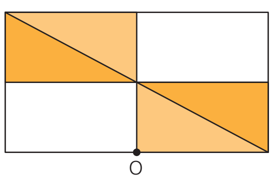


A imagem que representa a nova figura é:

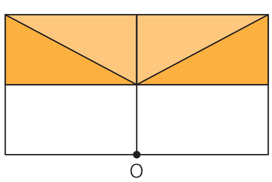
a)



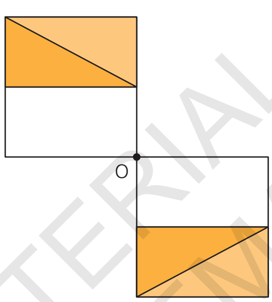
b)



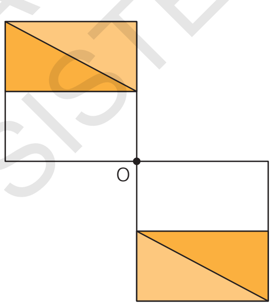
c)



d)

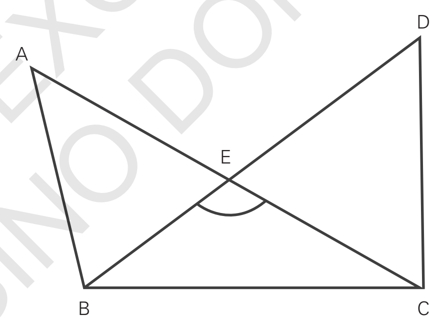


e)



19. IFSC (adaptado) C2-H8

Durante uma queda de luz, Carla e Sabrina resolveram brincar fazendo desenhos com as sombras das mãos. Para isso, pegaram duas lanternas diferentes, apontando os feixes de luz para a parede BC. Márcio, que estava no andar superior, observou tudo. A figura a seguir mostra a visão que Márcio tinha da situação. Dados: o ângulo entre as duas paredes CD e BC é 90° e DC = BC, sendo D o ponto onde Carla está e A o ponto onde se encontra Sabrina. Também sabemos que BEC vale 75°.



Com base nas informações, quanto valem os ângulos BDC, BCE, CED e ECD, respectivamente?

a) 105°, 45°, 60°, 30°

b) 105°, 80°, 45°, 60°

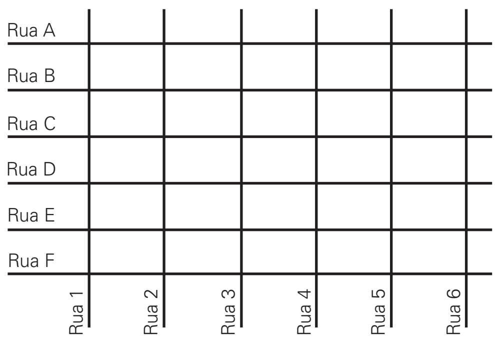
c) 60°, 90°, 25°, 45°

d) 45°, 60°, 105°, 30°

e) 30°, 75°, 125°, 90°

20. Enem C3-H14

Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende às pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C
b) 4 e C
c) 4 e D
d) 4 e E
e) 5 e C

4

ÂNGULOS NO TRIÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA

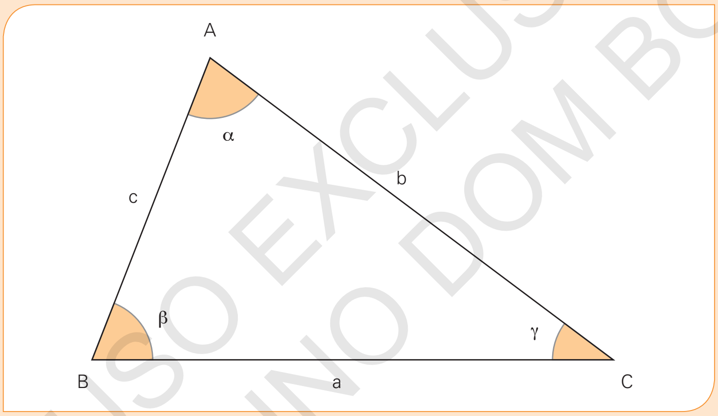
- Elementos do triângulo
- Soma dos ângulos internos
- Soma dos ângulos externos
- Bissetrizes internas e externas
- Circunferência
- Posições de um ponto em
- relação à circunferência
- Posições de uma reta em
- relação à circunferência
- Ângulos na circunferência
- Ângulo central
- Ângulo inscrito
- Ângulo de segmento
- Ângulo de vértice interno
- Ângulo de vértice externo

HABILIDADES

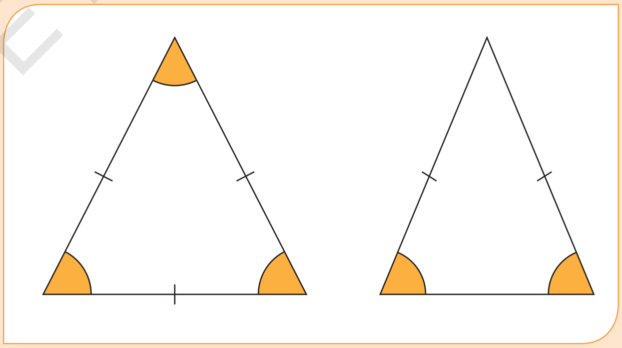
- Diferenciar ângulos internos e externos de um triângulo e suas bissetrizes.
- Usar a soma dos ângulos internos e externos na resolução de problemas.
- Compreender e aplicar o teorema do ângulo externo.
- Identificar elementos da circunferência.
- Aplicar conhecimentos de ângulos na circunferência e na resolução de problemas.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

Elementos do triângulo

Um triângulo é uma figura plana com três lados, três vértices e três ângulos. Normalmente nomeamos os vértices com letras maiúsculas, as medidas dos lados com letras minúsculas e os ângulos com letras gregas minúsculas. Observe a figura:



Os ângulos α, β e γ são chamados de ângulos internos. Se os três tiverem a mesma medida, dizemos que o triângulo é **equilátero**; se tiver somente dois ângulos iguais, ele é **isósceles**. Tanto no triângulo equilátero quanto no isósceles, a quantidade de ângulos iguais será o número de lados iguais.



SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

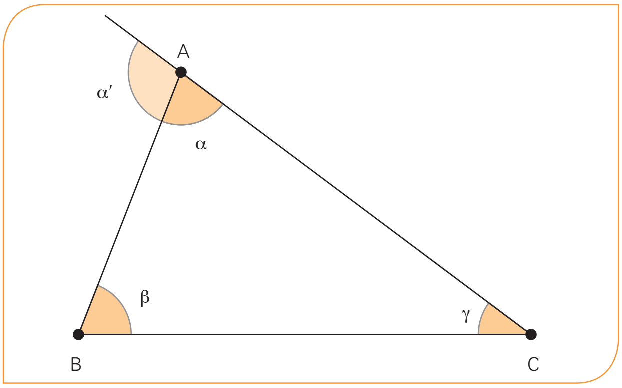
A soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

A soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360°.

TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

Vejamos rapidamente uma relação entre ângulos internos e externos.

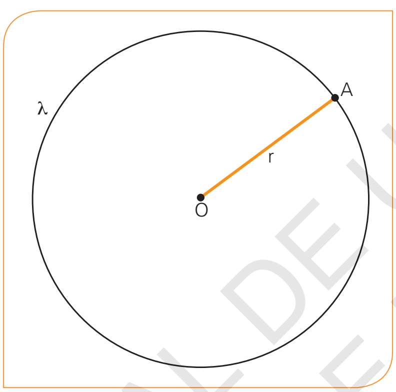


Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

Circunferência – introdução

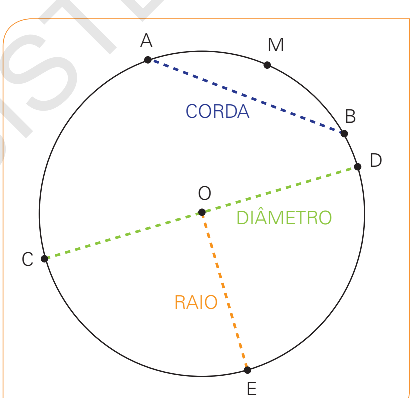
A figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é denominada **circunferência**.



A figura representa uma circunferência **λ**, em que **O** é o centro (ponto fixo) e **r** é o raio com medida igual ao segmento **AO** (constante positiva).

ELEMENTOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência de centro **C** e raio **r** tem os seguintes elementos:



$\overline{EO}$: raio

$\overline{CD}$: diâmetro

$\overline{AB}$: corda

$\overset{\frown}{AMB}$: arco

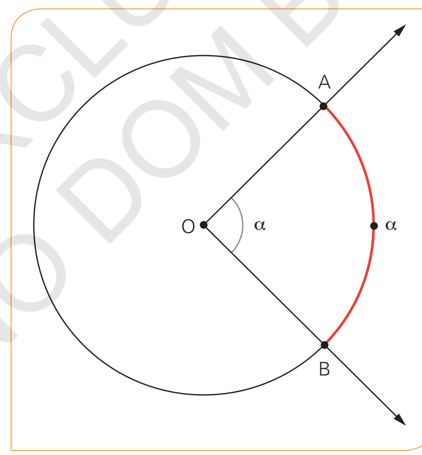
$\overset{\frown}{CED}$: semicircunferência

$\overline{CO} = r$ e $\overline{CD} = 2r$

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo central

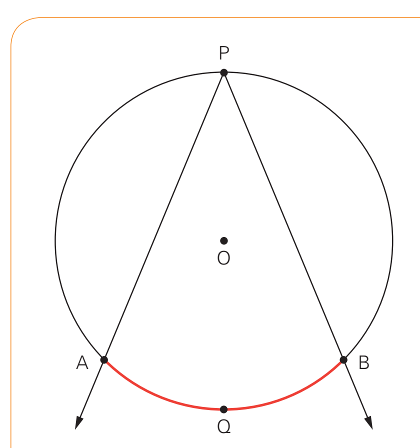
O ângulo que tem vértice no centro da circunferência é denominado **ângulo central**. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é seu arco correspondente.



A medida do ângulo central é igual à medida do arco correspondente: $A\hat{O}B = \text{med}(\overset{\frown}{APB}) = \alpha$

Ângulo inscrito

Propriedades do ângulo inscrito: O ângulo inscrito é aquele que tem vértice na circunferência e lados secantes a ela. O arco da circunferência com pontos internos ao ângulo é seu arco correspondente.

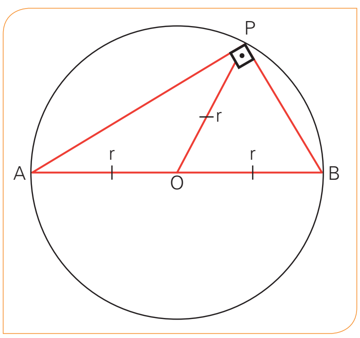


$A\hat{P}B$ é o ângulo inscrito e $\overset{\frown}{AQB}$ é o arco correspondente $A\hat{P}B$.

Um ângulo inscrito tem medida igual à metade da medida de seu arco correspondente.

$$A\hat{P}B = \frac{med(\overset{\frown}{AQB})}{2}$$

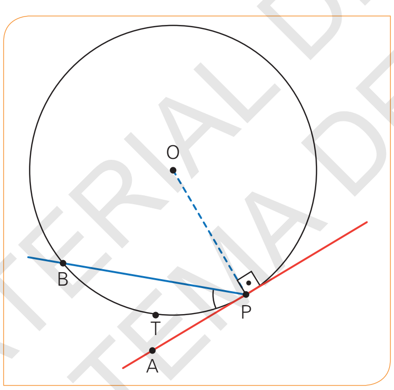
Consequência da propriedade do ângulo inscrito (triângulo retângulo): O triângulo inscrito em uma semicircunferência é necessariamente um triângulo retângulo, pois a medida do ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente, que, nesse caso, é o arco de 180°. Logo, o ângulo inscrito é de 90°.



$$A\hat{P}B = \frac{med(\overset{\frown}{AB})}{2} = 90°$$

Ângulo de segmento

O ângulo que tem vértice na circunferência, sendo um de seus lados secante e o outro tangente à circunferência, é denominado **ângulo de segmento**.

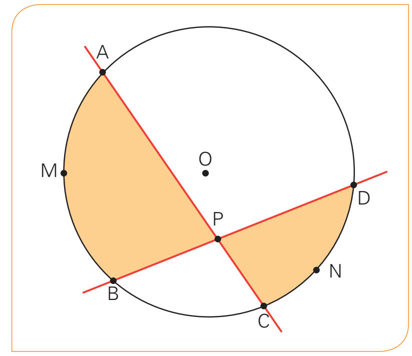


A medida de um arco de segmento é igual à metade da medida do arco correspondente.

$$A\hat{P}B = \frac{med(\overset{\frown}{BTP})}{2}$$

Ângulo de vértice interno (ou excêntrico interno)

O ângulo que tem vértice interno no interior da circunferência e cujas retas suportes de seus lados são secantes a ela é denominado **ângulo de vértice interno**.



$A\hat{P}B$, $B\hat{P}C$, $C\hat{P}D$ e $A\hat{P}D$ são ângulos de vértice interno.

Para o cálculo do ângulo interno, temos:

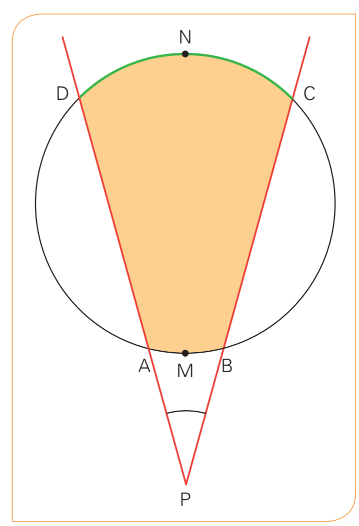
$\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{CND}$ são os arcos correspondentes aos ângulos $A\hat{P}B$ e $C\hat{P}D$.

A medida de um ângulo de vértice interno é igual à metade da soma das medidas de seus arcos correspondentes.

$$A\hat{P}B = C\hat{P}D = \frac{\overset{\frown}{AMB} + \overset{\frown}{CND}}{2}$$

Ângulo de vértice externo (ou excêntrico externo)

O ângulo que tem vértice no exterior da circunferência e cujos lados são secantes a ela é denominado **ângulo de vértice externo**.



$A\hat{P}B$ é o vértice externo.

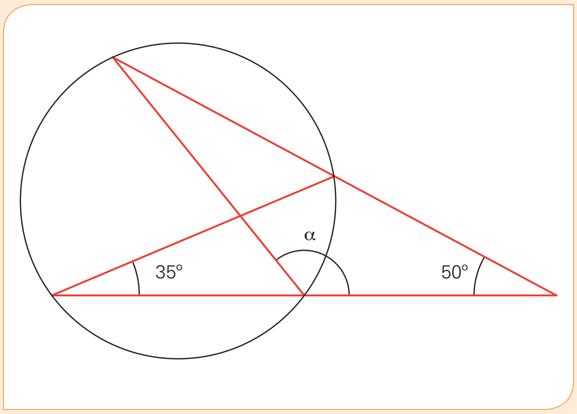
$\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{CND}$ são os arcos correspondentes ao ângulo $A\hat{P}B$.

A medida de um ângulo de vértice externo é igual à metade da diferença das medidas dos arcos correspondentes

$$A\hat{P}B = \frac{\overset{\frown}{CND} - \overset{\frown}{AMB}}{2}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

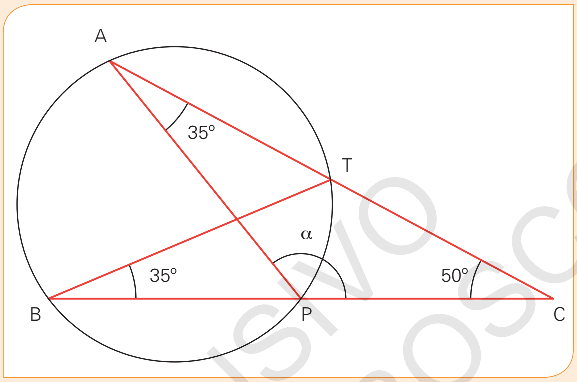
Unimep-SP – Na figura, o ângulo α é igual a:



a) 95°
b) 120°
c) 115°
d) 85°
e) 105°

Resolução

A figura apresenta dois ângulos inscritos na mesma circunferência e com o mesmo arco. Logo, são ângulos congruentes.



Analisando o triângulo ABC da figura, obtemos:

$\alpha + 35° + 50° = 180°$

$\alpha = 180° - 85°$

$\alpha = 95°$

ROTEIRO DE AULA

Ângulos no triângulo

Elementos de um triângulo

- Lados
  - 3 lados congruentes: Triângulo equilátero
  - 2 lados congruentes: Triângulo isósceles
- Vértices
- Ângulos
  - Internos
    - 3 ângulos congruentes: Triângulo equilátero
    - 2 ângulos congruentes: Triângulo isósceles
    - Soma dos ângulos: 180°
  - Externos
    - Teorema do ângulo externo: Qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

ROTEIRO DE AULA

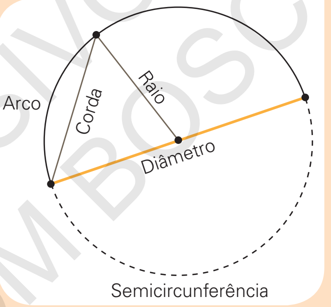
ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência

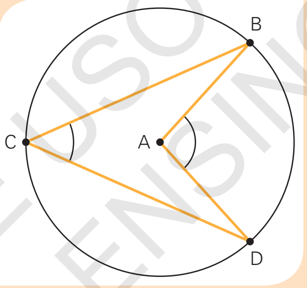
A figura formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é denominada circunferência.

Elementos

- Raio
- Diâmetro
- Corda
- Arco
- Semicircunferência



Ângulos na circunferência



B$\hat{C}$D é o ângulo inscrito
B$\hat{A}$D é o ângulo central

Ângulos de vértice

Interno

A medida de um ângulo de vértice interno é igual à metade das medidas de seus arcos correspondentes.

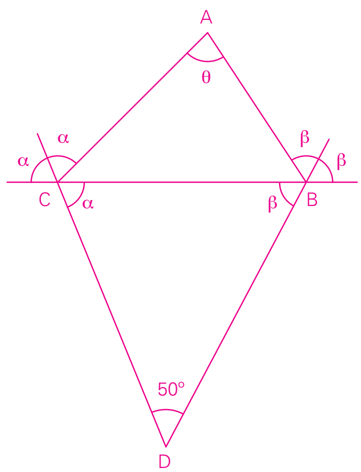
Externo

A medida de um ângulo de vértice externo é igual à metade da diferença das medidas de seus arcos correspondentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Efomm-RJ – Num triângulo ABC as bissetrizes dos ângulos externos do vértice B e C formam um ângulo de medida 50°. Calcule o ângulo interno do vértice A.

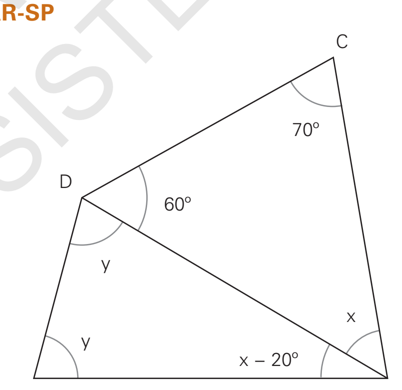
a) 110°
b) 90°
c) 80°
d) 50°
e) 20°



No triângulo BCD, temos:
$\alpha + \beta + 50° = 180°$
$\alpha + \beta = 130°$

No triângulo ABC, temos:
$\theta + 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$
$\theta - 2(\alpha + \beta) = -180°$
$\theta - 2 \cdot 130° = -180°$
$\theta = -180° + 260°$
$\theta = 80°$
Logo, a medida do ângulo interno do vértice A mede 80°.

2. EEAR-SP



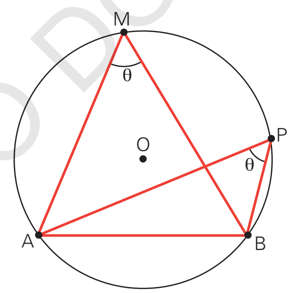
No quadrilátero ABCD o valor de y − x é igual a

a) 2x **b)** 2y **c)** $\frac{x}{2}$ **d)** $\frac{y}{2}$

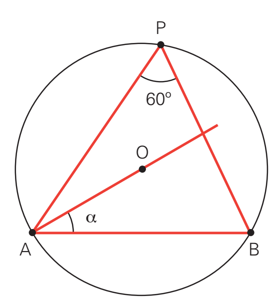
Do triângulo BCD, temos:
$x + 70° + 60° = 180° \rightarrow x = 180° - 130° \rightarrow x = 50°$
Logo, $D\hat{B}A = 50° - 20° \rightarrow D\hat{B}A = 30°$.
Portanto: $2y = 180° - 30° \rightarrow y = \frac{150°}{2} \rightarrow y = 75°$
Consequentemente, a resposta é $y - x = 75° - 50° = 25° = \frac{x}{2}$.

3. IFPE **C2-H8**

Para encontrar quais assentos em um teatro possibilitam que um espectador veja todo o palco sob um ângulo de visão determinado, utilizamos o conceito de "arco capaz". A esse respeito, analise a figura abaixo:



O "arco capaz do ângulo θ (θ < 90°) sobre o segmento **AB**" corresponde ao arco maior da circunferência representada na figura anterior, que possui centro em O e tem AB como corda. Como os ângulos $\widehat{APB}$ e $\widehat{AMB}$ são ângulos inscritos nessa circunferência e determinam o mesmo arco, eles têm a mesma medida. Esses ângulos são conhecidos como "inscritos". Considere o arco capaz de 60° sobre o segmento AB representado a seguir.

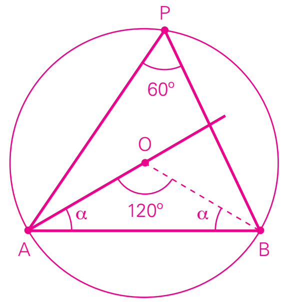


Qual é o valor do ângulo $\alpha = \widehat{OAB}$, sabendo que O é o centro da circunferência?

a) 30°
b) 36°
c) 20°

d) 60°
e) 45°

De acordo com o enunciado, temos:

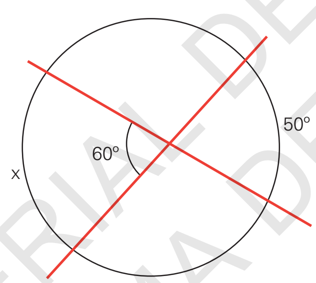


Assim, podemos calcular:
$A\hat{O}B = 2 \cdot 60°$
$A\hat{O}B = 120°$
$AO = BO$ (raios)
Sendo assim,
$O\hat{A}B = O\hat{B}A = \alpha$
No triângulo AOB, temos:
$2 \cdot \alpha + 120° = 180°$
$2 \cdot \alpha = 180° - 120°$
$\alpha = \dfrac{60°}{2}$
$\alpha = 30°$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. EEAR-SP – Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.



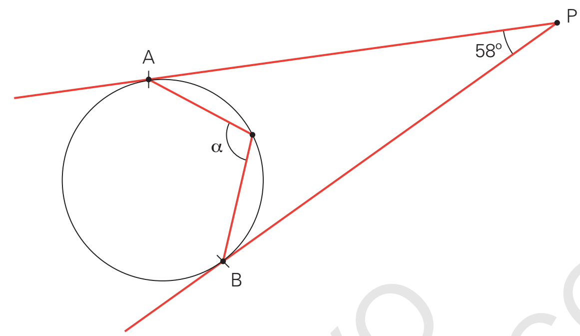
A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

a) 40°
b) 70°
c) 110°
d) 120°

Pela propriedade do ângulo interior à circunferência como a média aritmética dos arcos que ele determina numa circunferência, podemos escrever:

$\dfrac{x + 50°}{2} = 60°$
$x + 50° = 60° \cdot 2$
$x + 50° = 120°$
$x = 120° - 50°$
$x = 70°$

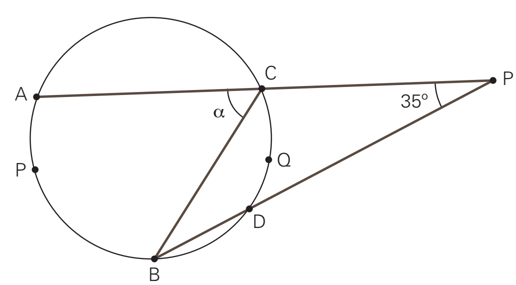
5. Sistema Dom Bosco – Na figura seguinte, o valor de α é:



a) 113°
b) 119°
c) 123°
d) 127°
e) 129°

O ângulo de vértice P é excêntrico externo. Portanto, a medida desse ângulo é a metade da diferença entre as medidas do maior e do menor arco AB. Como o ângulo de medida α é inscrito, o maior arco AB mede 2α. Então, o menor arco é 360° – 2α. Logo:
$\hat{P} = \dfrac{2\alpha - (360° - 2\alpha)}{2} \rightarrow 58° = 2\alpha - 180° \rightarrow 2\alpha = 238° \rightarrow \alpha = 119°$.

6. Sistema Dom Bosco – Se a soma das medidas dos arcos APB e CQD é 160°, então o valor de α é:

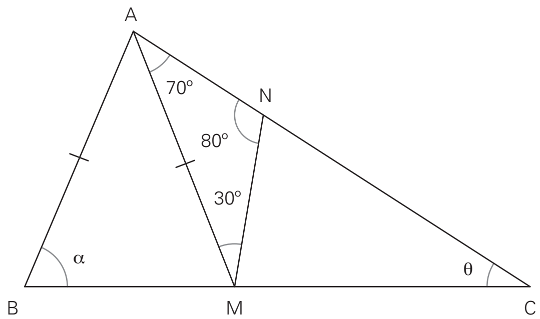


a) 57,5°
b) 60°
c) 62,5°
d) 65°
e) 70°

O ângulo de vértice P é excêntrico externo. Portanto, a medida desse ângulo é a metade da diferença entre as medidas dos arcos APB e CQD. Como o ângulo de vértice C é inscrito, o maior arco APB mede 2α. Sendo 2β a medida do arco CQD, do enunciado e da figura, temos:
$2\alpha + 2\beta = 360°$ (I) e $35° = \dfrac{2\alpha - 2\beta}{2} \rightarrow 2\alpha - 2\beta = 70°$ (II).
Fazendo (I) + (II): $\alpha = 57{,}5°$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

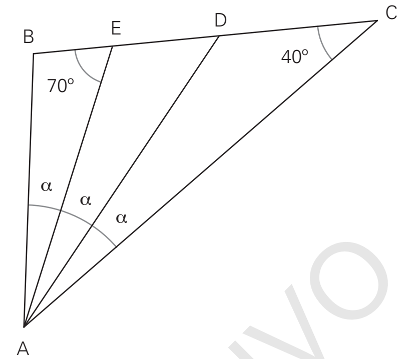
7. CFTMG – Neste triângulo, tem-se $\overline{AB} = \overline{AM}$, $M\hat{A}N = 70°$, $A\hat{M}N = 30°$ e $A\hat{N}M = 80°$.



O valor de $\alpha - \theta$ é

a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°

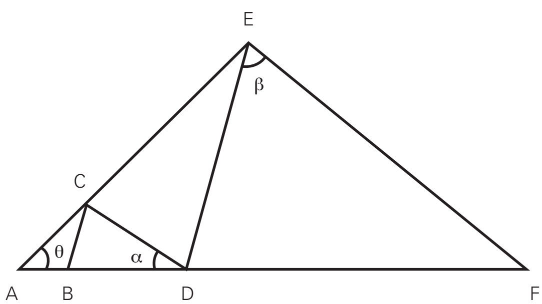
8. EEAR-SP



Se ABC é um triângulo, o valor de α é

a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°

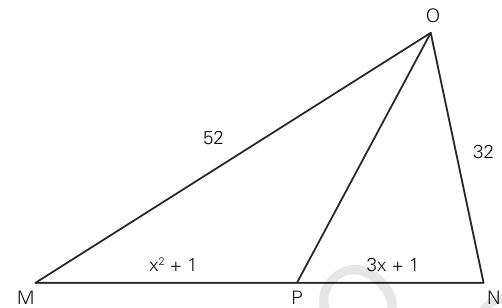
9. CFTMG – No triângulo AEF da figura abaixo, temos que med($\overline{AB}$) = med($\overline{BC}$), $\overline{BC} // \overline{DE}$ e $\overline{CD} // \overline{EF}$.



O valor de θ escrito em função de α e β é

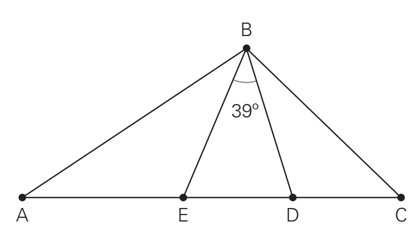
a) $\theta = \alpha + \beta$
b) $\theta = \beta - \alpha$
c) $\theta = \dfrac{180° + \alpha + \beta}{2}$
d) $\theta = \dfrac{180° - \alpha - \beta}{2}$

10. Acafe-SC (adaptado) – No triângulo MON as medidas são indicadas em centímetros.



Se é bissetriz do ângulo MÔN, então a medida do lado MN é:

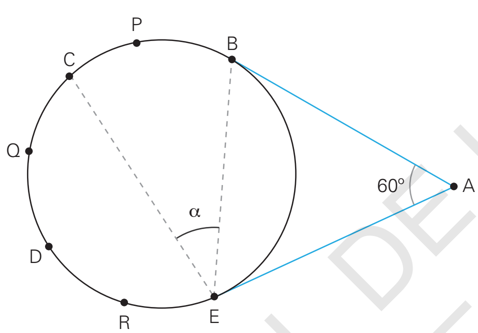
11. FGV-RJ – A figura representa um triângulo ABC, com E e D sendo pontos sobre $\overline{AC}$. Sabe-se ainda que AB = AD, CB = CE e que EB̂D mede 39°.



Nas condições dadas, a medida de AB̂C é

a) 102°
b) 108°
c) 111°
d) 115°
e) 117°

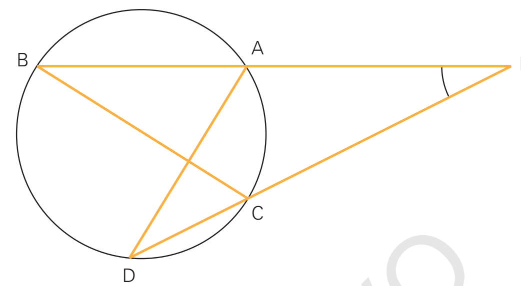
12. FGV-RJ – Na figura, AB e AE são tangentes à circunferência nos pontos B e E, respectivamente, e BÂE = 60°.



Se os arcos $\widehat{BPC}$, $\widehat{CQD}$ e $\widehat{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo BÊC, indicada na figura por α, é igual a:

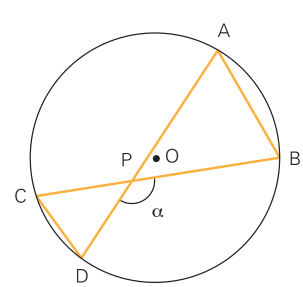
a) 20°
b) 40°
c) 45°
d) 60°
e) 80°

13. CFTMG – Na figura, os segmentos PB e PD são secantes à circunferência, as cordas AD e BC são perpendiculares e AP = AD. A medida x do ângulo BPD é



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°

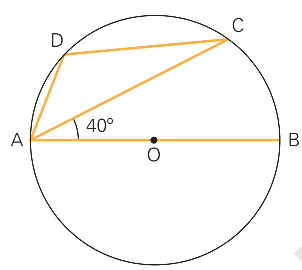
14. FGV-RJ – As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo indicado na figura por α é igual a

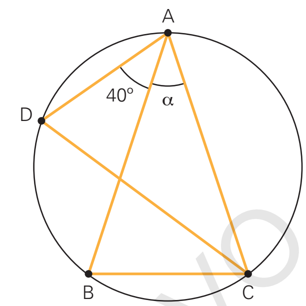
a) 120°
b) 124°
c) 128°
d) 130°
e) 132°

15. Fuvest-SP (adaptado) – A medida do ângulo ADC inscrito na circunferência de centro O é:



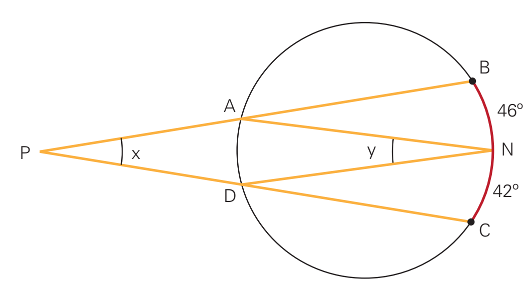
a) 100°
b) 110°
c) 120°
d) 130°
e) 135°

16. UFES – Na figura, A, B, C e D são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas AB e AC têm o mesmo comprimento. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40°, a medida α do ângulo $B\hat{A}C$ é



a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°
e) 30°

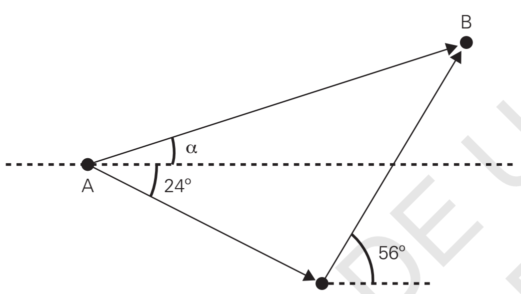
17. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor de x + y, dadas as medidas dos arcos BN e CN.



ESTUDO PARA O ENEM

18. IFPE C2-H7

Luna e Bebel estão participando de uma olimpíada de robótica no campus Afogados da Ingazeira. Em uma das provas, elas precisavam levar o robô do ponto A para o ponto B no plano cartesiano, conforme a figura abaixo. Mas, por um descuido, o robô andou 30 cm sob um ângulo de 24° com o eixo horizontal e, para corrigir o trajeto, outros 30 cm sob um ângulo de 56° com a horizontal.

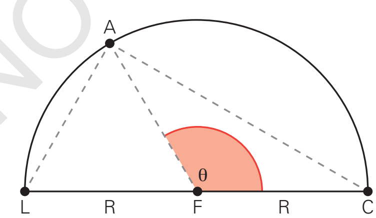


Para realizar a prova com o menor percurso, elas deveriam ter iniciado o trajeto sob qual medida, em graus, do ângulo α em relação ao eixo horizontal?

a) 24°
b) 16°
c) 4°
d) 8°
e) 40°

19. Enem C2-H6

Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio R, conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra L, a chegada está representada pela letra C e a letra A representa o atleta. O segmento LC é o diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra F. Sabemos que, em qualquer posição na qual atleta esteja na pista, os segmentos LA e AC são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento AF faz com o segmento FC.



Quantos graus mede o ângulo θ quando o segmento AC medir R durante a corrida?

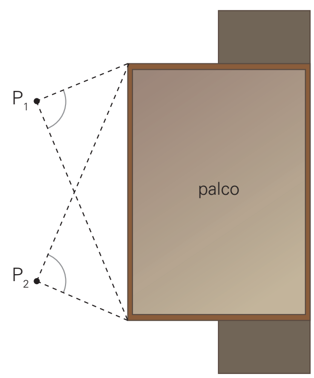
a) 15 graus
b) 30 graus
c) 60 graus
d) 90 graus
e) 120 graus

20. Insper-SP C2-H8

Ao projetar um teatro, um arquiteto recebeu o seguinte pedido da equipe que seria responsável pela filmagem dos eventos que lá aconteceriam:

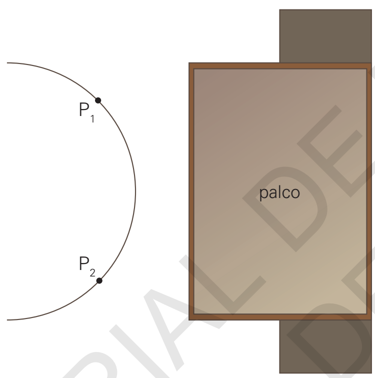
É necessário que seja construído um trilho no teto, ao qual acoplaremos uma câmera de controle remoto. Para que a câmera não precise ficar mudando a calibragem do foco a cada movimentação, o ângulo de abertura com que a câmera captura as imagens do palco deve ser sempre o mesmo, conforme ilustração abaixo.

Por exemplo, dos pontos P1 e P2 a câmera deve ter o mesmo ângulo de abertura α para o palco.

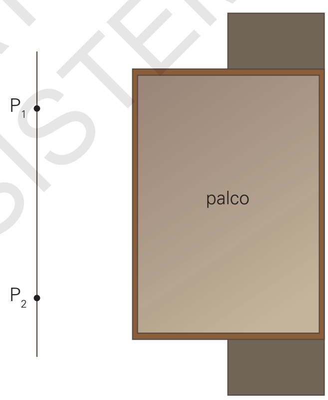


Das propostas de trilho a seguir, aquela que atende a essa necessidade é

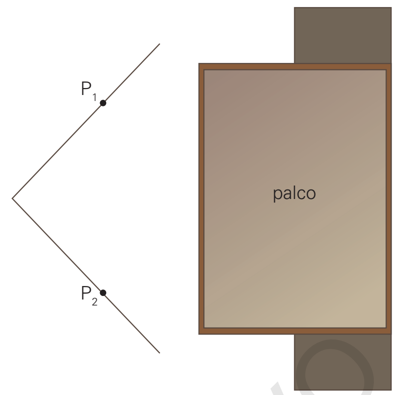
a)



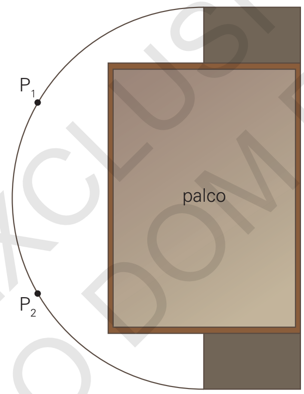
b)



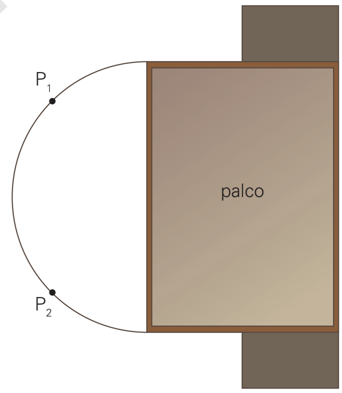
c)



d)



e)



5 COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA E POLÍGONOS REGULARES

- Número π (pi) e comprimento da circunferência
- Comprimento de um arco de circunferência
- Comprimento de uma circunferência por meio de polígonos inscritos e circunscritos
- Posições relativas de duas circunferências
- Polígonos
- Soma dos ângulos internos e externos
- Número de diagonais
- Definição de polígono regular

HABILIDADES

- Aplicar conhecimentos de ângulos na circunferência e na resolução de problemas.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Compreender as características de um polígono regular.
- Usar a soma dos ângulos internos e externos de um polígono regular na resolução de problemas.
- Compreender a relação entre o número de lados do polígono e suas diagonais.

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

NÚMERO π (PI) E COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

O número π (pi) é um número irracional. Tem infinitas casas decimais (3,1415926535897932...), mas costuma ser aproximado para um número finito (3; 3,1; 3,14), dependendo da condição e da precisão que cada situação analisada exige.

O número π resulta da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

$$\pi = \frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}}$$

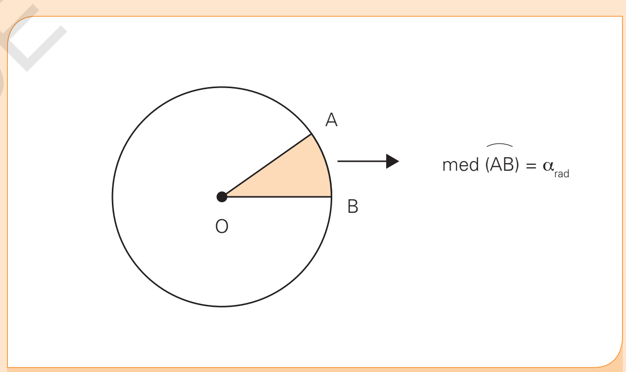
c = comprimento
d = 2r = diâmetro = dobro do raio

$$c = 2\,\pi \cdot r$$

COMPRIMENTO DE ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

A medida do arco, em radianos, possibilita determinar seu comprimento, por meio de regra de três simples.

$$360° = 2\,\pi \text{ rad}$$



Arco de circunferência.

Sendo ℓ o comprimento do arco, temos:

2π rad ——— 2π R
α rad ——— ℓ

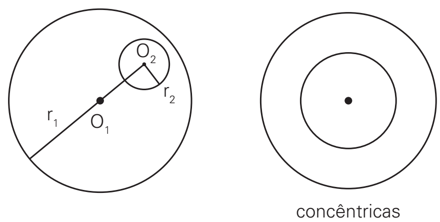
$$\ell = \alpha \cdot R$$

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$$

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Internas

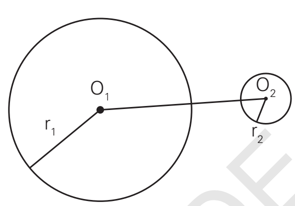
Duas circunferências são internas quando todos os pontos de uma forem internos à outra, sendo **concêntricas** quando os centros coincidem.



$$O_1O_2 < r_1 - r_2$$

Externas

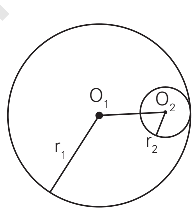
Duas circunferências são externas quando todos os pontos de uma forem externos à outra.



$$O_1O_2 > r_1 + r_2$$

Tangentes internamente

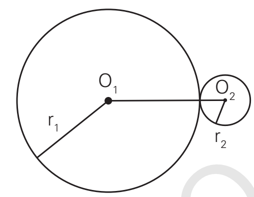
Duas circunferências são tangentes internamente quando tiverem um único ponto em comum e os demais pontos de uma forem interiores à outra.



$$O_1O_2 = r_1 - r_2$$

Tangentes externamente

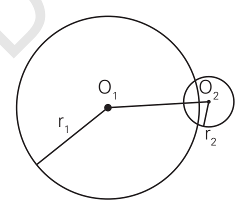
Duas circunferências são tangentes externamente quando tiverem um único ponto em comum e os demais pontos de uma delas forem externos à outra.



$$O_1O_2 = r_1 + r_2$$

Secantes

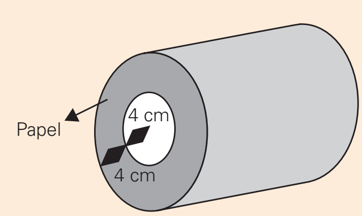
Duas circunferências são secantes quando tiverem dois pontos em comum.



$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. FGV-RJ – Uma bobina cilíndrica de papel possui raio interno igual a 4 cm e raio externo igual a 8 cm. A espessura do papel é igual a 0,2 mm.



Adotando para os cálculos $\pi = 3$, o papel da bobina, quando completamente desenrolado, corresponde a um retângulo cuja maior dimensão, em metros, é aproximadamente igual a:

a) 20
b) 30
c) 50
d) 70
e) 90

Resolução

$c = 2\pi \cdot r$

0,2 mm = 0,02 cm, logo esse será o acréscimo do raio em cada volta.

A primeira volta terá um comprimento de: $c_1 = 2\pi \cdot 4{,}00$

A segunda volta terá um comprimento de: $c_2 = 2\pi \cdot 4{,}02$

A terceira volta terá um comprimento de: $c_3 = 2\pi \cdot 4{,}04$

A enésima (última) volta terá um comprimento de: $c_n = 2\pi \cdot 7{,}98$

Logo, o comprimento total de papel será:

$c = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$

$c = 2\pi \cdot 4{,}00 + 2\pi \cdot 4{,}02 + 2\pi \cdot 4{,}04 + \dots + 2\pi \cdot 7{,}98$

$c = 2\pi \cdot (4{,}00 + 4{,}02 + 4{,}04 + \dots + 7{,}98)$

Resolvendo a PA, obtemos: Soma da PA = 1 198 cm = 11,98 m

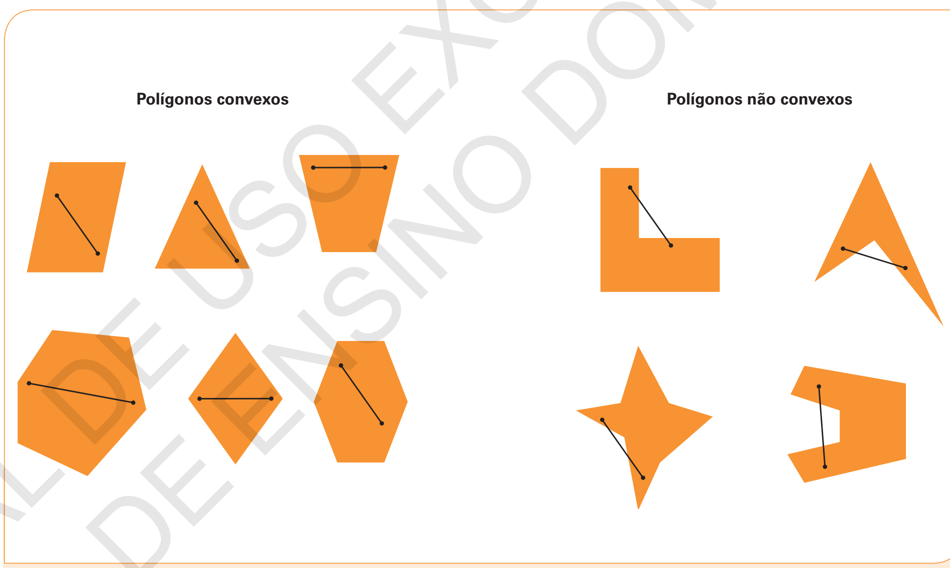
Assim, temos:

$c = 2\pi \cdot 11{,}98 = 2 \cdot 3 \cdot 11{,}98 = 71{,}88$ m

$c \cong 70$ m

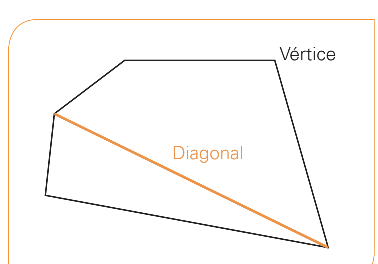
POLÍGONOS REGULARES

Dentre as figuras que se classificam como polígonos, vamos estudar os chamados *polígonos convexos*, cujos ângulos internos são todos menores que 180°.



Um polígono é convexo se todo segmento, cuja as extremidades sejam internas ao polígono, também esteja totalmente contida dentro do polígono.

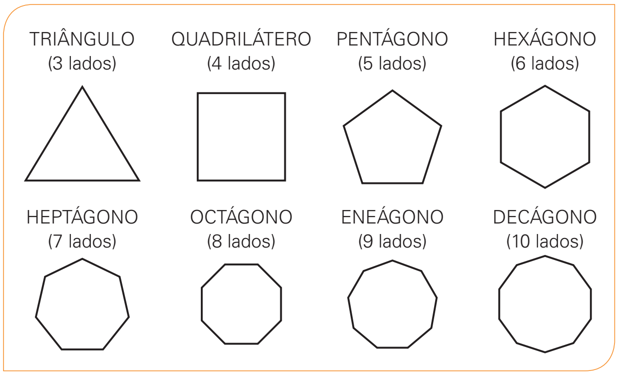
Assim como fizemos no estudo sobre triângulos, na maioria das vezes os vértices serão nomeados por letras maiúsculas; os lados, por minúsculas, e os ângulos, por letras minúsculas gregas. O segmento de reta que liga os vértices não consecutivos é chamado *diagonal do polígono.*



DEFINIÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES

1. Todos os lados têm a mesma medida.
2. Todos os ângulos internos apresentam a mesma medida.

Exemplos:



SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

Sendo S_i a soma dos ângulos internos do polígono, se este apresentar n lados, teremos n – 2 triângulos, cada um com soma dos ângulos internos igual a 180°. Então:

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

É sempre igual a 360°.

Sendo *d* o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, temos:

NÚMERO DE DIAGONAIS

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Calcule a soma dos ângulos internos de um decágono.

Resolução

Um decágono tem 10 lados. Sendo assim:

$S_{10} = (10 - 2) \cdot 180° = 1\,440°$

2. Sistema Dom Bosco – Qual polígono tem a soma dos ângulos internos igual a 1 800°?

Resolução

Neste caso, sabemos a soma dos ângulos internos e queremos descobrir o número de lados do polígono:

$S_n = (n - 2) \cdot 180°$

$1\,800° = (n - 2) \cdot 180°$

$n - 2 = 10 \quad \therefore \quad n = 12$

Ou seja, o polígono tem 12 lados (dodecágono).

3. Sistema Dom Bosco – Calcule o número de diagonais de um icoságono.

Resolução

Um icoságono tem 20 lados. Portanto:

$d = \frac{20 \cdot (20 - 3)}{2} = 10 \cdot 17 = 170$ diagonais.

4. Sistema Dom Bosco – Quantos lados tem um polígono regular com exatamente 35 diagonais?

Resolução

Sendo d = 35, temos:

$\frac{n(n-3)}{2} = 35$

$n\,(n - 3) = 70$

No entanto, $70 = 10 \cdot 7 = 10 \cdot (10 - 3)$. Portanto, n = 10 lados (decágono).

ROTEIRO DE AULA

CIRCUNFERÊNCIA

O número π

Irracional: 3,14...

Comprimento da circunferência

$C = 2 \cdot \pi \cdot R$

Comprimento do arco de uma circunferência

$\ell = \alpha \cdot R$

Comprimento do arco de uma circunferência

- Internas: $O_1O_2 < r_1 - r_2$
- Externas: $O_1O_2 > r_1 + r_2$
- Secantes: $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$
- Tangentes internamente: $O_1O_2 = r_1 - r_2$
- Tangentes externamente: $O_1O_2 = r_1 + r_2$

ROTEIRO DE AULA

POLÍGONOS

- **Convexo**
  - Número de diagonais (d)
    - $d = \frac{n(n-3)}{2}$; *n* número de lados.
  - Soma dos ângulos externos S_e
    - $S_i = 180° \cdot (n - 2)$
      n número de lados.
  - Soma dos ângulos internos S_i
    - $S_e = 360°$
  - Polígonos regulares
    - Ângulo externo (e)
      - $e = \frac{360°}{n}$;
        n número de lados.
    - Ângulo interno (i)
      - $i = 180° - e$
- **Não convexo**

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RJ (adaptado) – A roda de um carro tem 30 cm de raio. Depois de a roda completar uma volta, qual será o deslocamento aproximado do carro?

Usando $\pi = 3,14$

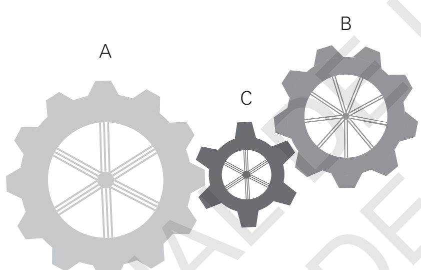
O deslocamento do veículo está relacionado ao comprimento da circunferência que delimita a roda. Assim, temos:

$c = 2\pi \cdot R$

$c \cong 2 \cdot 3,14 \cdot 30 \cong 188$ cm

$c \cong 188$ cm

2. UPE – Num sistema de engrenagens, cada uma tem seu raio, de forma que a engrenagem "A" tem raio com medida R, a "B" tem raio com medida igual à metade do raio da engrenagem "A" e a "C" tem raio com medida igual a um quarto do raio da engrenagem "A". Sendo a medida do raio de "A" igual a 4 cm, quantas voltas "A" dará quando "C" percorrer o equivalente a 3 600 cm?



a) 2 400
b) 1 200
c) 600
d) 300
e) 150

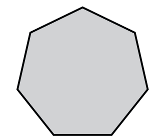
Considerando n o número de voltas da engrenagem A e $2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$ a distância percorrida por um de seus pontos quando essa engrenagem executa uma volta, temos:

$n \cdot 8\pi = 3\,600 \rightarrow n = \dfrac{3600}{8\pi}$

$\therefore n = 150$

3. IFSP C2-H8

Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era: "Quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?":



Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

a) 720°
b) 900°
c) 540°
d) 1 080°
e) 630°

A figura apresentada é um polígono regular, um heptágono. Então, a medida dos ângulos é dada por:
$180° \cdot (7 - 2) = 900°$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

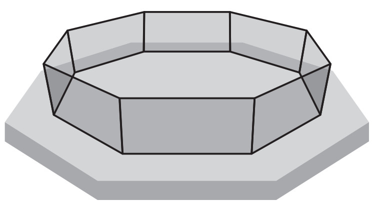
4. FGV-RJ – Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da Linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela Linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente,

a) 63 cm
b) 12,6 m
c) 6,3 km
d) 12,6 km
e) 63 km

Seja r a medida do raio da Terra na Linha do Equador, em metros, sabe-se que a distância percorrida pelo topo da cabeça da pessoa é igual a $2\pi \cdot (r + 2) \cong (2\pi \cdot r + 12,6)$ m.

Consequentemente, sendo $2\pi \cdot r$ a distância percorrida pela sola dos pés da pessoa, podemos concluir que o resultado é 12,6 m.

5. Sistema Dom Bosco – Um dos esportes que mais têm atraído o público nos últimos anos é o MMA, em que as lutas são disputadas dentro de um ringue com a forma de um octógono regular. Segundo seu criador, Rorion Gracie, um dos fatores que levou à escolha deste formato de ringue foi o fato de seus ângulos internos evitarem que os lutadores fiquem presos nos cantos.



Quanto mede cada um dos ângulos internos de um octógono regular?

Como o octógono é regular, seu ângulo externo vale:

$\hat{e} = \frac{360°}{8} = 45°$

Assim, seu ângulo interno será:

$\hat{i} = 180° - \hat{e} \rightarrow \hat{i} = 135°$

6. Imed-RS – O total de anagramas da palavra LÓGICA é exatamente igual à medida, em graus, da soma dos ângulos internos de um polígono regular. Considerando que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada pela expressão $S = (n - 2) \cdot 180°$, onde n corresponde ao número de lados, pode-se afirmar que esse polígono é um:

a) Triângulo.
b) Quadrado.
c) Pentágono.
d) Hexágono.
e) Heptágono.

O número de anagramas possíveis da palavra LÓGICA é igual à permutação de 6:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

A soma dos ângulos internos de um polígono regular se dá pela fórmula $S = (n - 2) \cdot 180$, em que n é o número de lado do polígono. Logo, se $S = 720$, tem-se:

$S = 720 = (n - 2) \cdot 180 \rightarrow n = 6$

O polígono regular de 6 lados chama-se hexágono.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

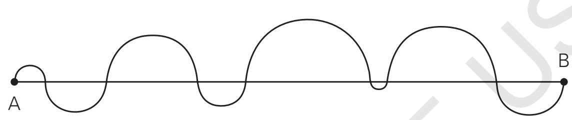
7. IFBA – Foi inaugurada uma praça municipal, de formato circular, com 30 m de raio, toda permeada por 21 refletores à sua volta. Foi projetada para que a distância entre dois refletores vizinhos fosse igual. Adotando o valor de $\pi = 3{,}15$, então a distância, em metros, entre cada dois dos refletores vizinhos foi de:

a) 7 m
b) 8 m
c) 9 m
d) 10 m
e) 11 m

8. Sistema Dom Bosco – A distância entre os centros de duas circunferências de raios respectivamente iguais a 15 cm e 8 cm é de 20 cm. Quanto à posição relativa das duas circunferências, conclui-se que:

a) são tangentes internamente
b) são tangentes externamente
c) são secantes
d) são internas
e) são externas

9. Insper-SP – A linha curva indicada na figura tem extremidades em A e B e é formada apenas por semicircunferências.



Se o comprimento de $\overline{AB}$ é igual a x, então o comprimento da linha curva será igual a

a) $\frac{8x}{\pi}$

b) $\frac{16\pi}{x}$

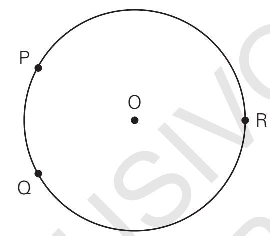
c) $\frac{x\pi}{2}$

d) $\frac{x\pi}{4}$

e) $\frac{4x}{\pi}$

10. CFTRJ – Na figura abaixo temos uma circunferência com centro em O. Os pontos P, Q e R são pontos sobre a circunferência, sendo PQ um lado de um hexágono regular inscrito nessa circunferência. Uma formiga estava sobre o ponto P e se deslocou sobre a circunferência no sentido horário, até o ponto Q, passando pelo ponto R uma única vez. Calcule a distância percorrida pela formiga, sabendo que PQ = 3 cm

Observação: A relação entre o comprimento da circunferência "C" com seu raio "r" é dada por: $C = 2\pi r$.



a) 6π cm
b) 5π cm
c) 3π cm
d) 2π cm

11. Unioeste-PR – Sabe-se que uma das raízes da equação $x^2 - 7x - 44 = 0$ corresponde, em cm, ao comprimento do raio de uma circunferência. Qual o comprimento desta circunferência, considerando $\pi = 3,14$?

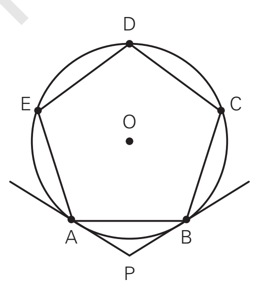
a) 69,08 cm.
b) 69,01 cm.
c) 69,80 cm.
d) 59,08 cm.
e) 58,09 cm.

12. Sistema Dom Bosco – Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 125° cada um e os demais ângulos internos medem 165°. O número de lados do polígono é:

a) 6 **b)** 7 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 16

13. Sistema Dom Bosco – Um polígono regular tem 4 lados a mais que outro, e o seu ângulo interno excede em 15° o outro. Quais são esses polígonos?

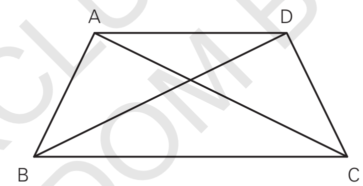
14. CFTMG – Na figura a seguir, o pentágono regular está inscrito numa circunferência de centro O e as semirretas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos A e B, respectivamente.



A medida do ângulo $A\hat{P}B$ em graus, é igual a

a) 36 **b)** 72 **c)** 108 **d)** 154

15. Sistema Dom Bosco – A figura mostra um quadrilátero ABCD com suas diagonais AC e BD. Sabendo que $B\hat{A}C = B\hat{D}C = 90°$ e que $A\hat{C}B = 33°$, a medida do ângulo ADB é:

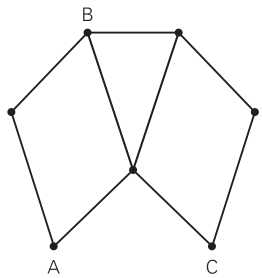


a) 22°
b) 33°
c) 44°
d) 55°
e) 66°

16. UTFPR – Os ângulos externos de um polígono regular medem 15°. O número de diagonais desse polígono é:

a) 56
b) 24
c) 252
d) 128
e) 168

17. FGV-RJ – A figura abaixo mostra dois quadrados e um triângulo equilátero entre eles.

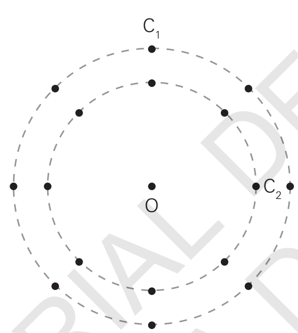


Determine os ângulos internos do triângulo ABC.

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. Enem C2-H7

A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

a) 55,5
b) 60,0
c) 175,5
d) 235,5
e) 240,0

19. Enem C2-H8

Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio.

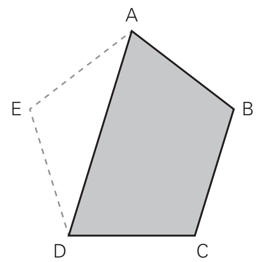
Use 3 como aproximação para π.

Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

a) 0,30 km
b) 0,75 km
c) 1,50 km
d) 2,25 km
e) 4,50 km

20. Enem C2-H8

Um gesseiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.



Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos $x = E\hat{A}D$, $y = E\hat{D}A$ e $z = A\hat{E}D$ do triângulo ADE.

As medidas x, y e z, em graus, desses ângulos são, respectivamente,

a) 18, 18 e 108
b) 24, 48 e 108
c) 36, 36 e 108
d) 54, 54 e 72
e) 60, 60 e 60

6 PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO E QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

- Cevianas notáveis: mediana, bissetriz e altura
- Mediatriz
- Pontos notáveis: baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro
- Caso particular: triângulo equilátero
- Definição e elementos
- Classificação dos quadriláteros convexos
- Propriedades dos paralelogramos

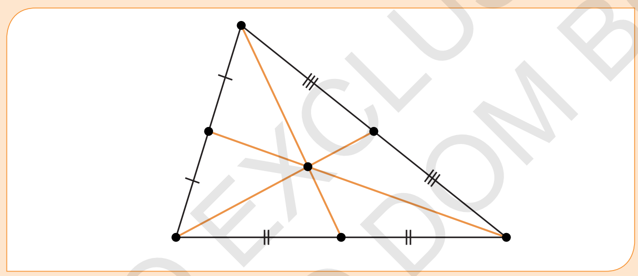
HABILIDADES

- Compreender e aplicar as definições de mediana, bissetriz, altura e mediatriz.
- Diferenciar os pontos notáveis do triângulo.
- Usar a propriedade do baricentro e as características do incentro e do circuncentro.
- Aplicar propriedades dos pontos notáveis na resolução de problemas.
- Identificar diferentes tipos de quadriláteros.
- Analisar propriedades dos quadriláteros na construçãode argumentos.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

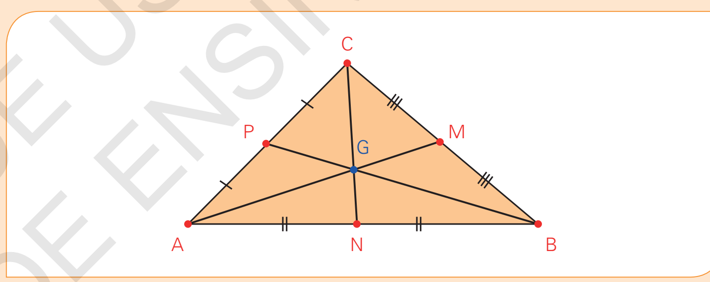
PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

MEDIANAS E BARICENTRO

A mediana de um triângulo é o segmento que sai de seu vértice e vai até o ponto médio do lado oposto. Um triângulo, portanto, tem três medianas.



O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é chamado **baricentro**, normalmente representado pela letra G.

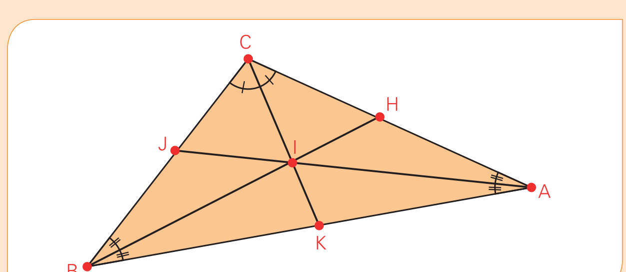


O baricentro apresenta a seguinte propriedade: ele divide as medianas na razão 2:1, ou seja,

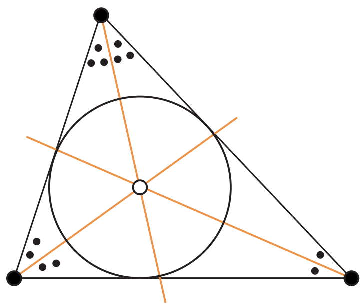
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GP}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GN}} = 2$$

BISSETRIZES E INCENTRO

Como já vimos em módulos anteriores, a bissetriz é a semirreta que divide um ângulo na metade. Agora vamos considerar apenas um segmento da bissetriz, que vai do vértice de cada ângulo até o lado oposto. Um triângulo tem três bissetrizes internas.

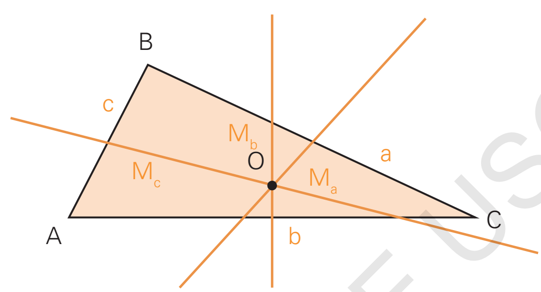


O ponto de encontro das três bissetrizes de um triângulo é chamado **incentro**, normalmente representado pela letra I.

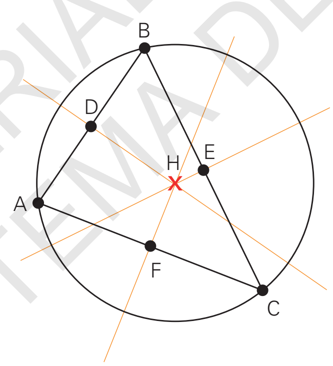


MEDIATRIZES E CIRCUNCENTRO

A mediatriz não é uma ceviana. A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a esse segmento AB que passa pelo seu ponto médio. Como um triângulo é formado por três segmentos, podemos traçar três mediatrizes em qualquer triângulo.



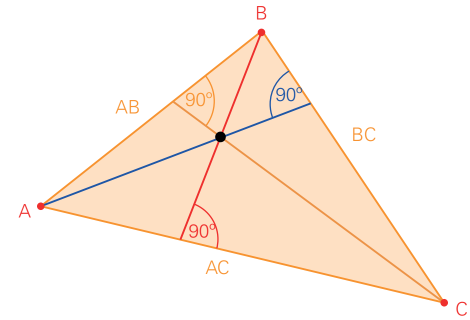
O ponto de encontro das três mediatrizes de um triângulo é chamado **circuncentro**.



O circuncentro tem a seguinte propriedade: é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

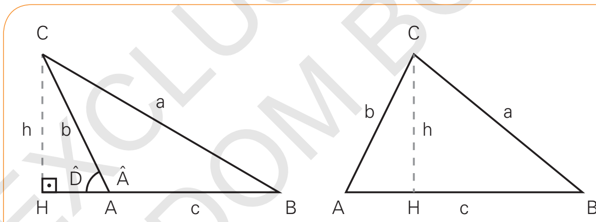
ALTURAS E ORTOCENTRO

A altura de um triângulo é o segmento que sai de um de seus vértices e vai perpendicularmente até a reta suporte do lado oposto. Um triângulo, portanto, tem três alturas.



O ponto de encontro das três alturas de um triângulo é chamado **ortocentro**.

Diferentemente de medianas, bissetrizes e mediatrizes, a altura de um triângulo pode ser externa ao triângulo quando ele for obtusângulo.

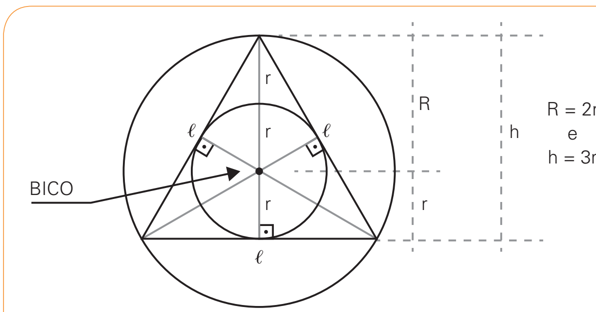


No triângulo acutângulo, todas as alturas são internas ao triângulo. No caso dos obtusângulos, duas delas são externas. E nos triângulos retângulos?

Tal fato tem consequências para o ortocentro: nos triângulos acutângulos, o ortocentro é interno ao triângulo; nos triângulos obtusângulos, ele é externo ao triângulo; nos triângulos retângulos, o ortocentro está exatamente sobre o vértice do ângulo reto.

Caso do triângulo equilátero

No triângulo equilátero, medianas, bissetrizes, mediatrizes e alturas relativas a cada vértice coincidem. Isso faz que os pontos que estamos estudando também coincidam: **b**aricentro, **i**ncentro, **c**ircuncentro e **o**rtocentro são um único ponto. Juntando essas iniciais, formamos o **bico**, um acrônimo que ajuda na memorização.



Triângulo equilátero.

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

DEFINIÇÃO

Um quadrilátero pode ser classificado de maneira objetiva como um polígono de quatro lados. Assim, por definição, temos:

Sendo A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos, sem que existam três colineares, se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ interceptam apenas nas extremidades, a reunião desses quatro elementos é um quadrilátero.

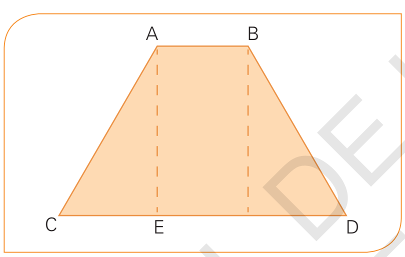
São elementos de um quadrilátero convexo **ABCD**:

- Vértice: pontos, A, B, C e D;
- Lados: segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$;
- Ângulos internos: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}A$, $D\hat{A}B$;
- Ângulos externos: são os ângulos adjacentes suplementares dos ângulos internos.

CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS CONVEXOS

TRAPÉZIO

É um quadrilátero que tem apenas um par de lados opostos paralelos.



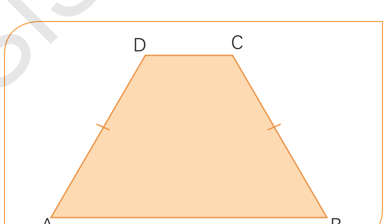
AB e CD são segmentos paralelos, sendo:

- $\overline{AB}$: base menor;
- $\overline{CD}$: base maior;
- $\overline{AE}$: altura.

Os trapézios podem ser classificados em: **isósceles**, **escaleno** ou **retângulo**.

Trapézio isósceles

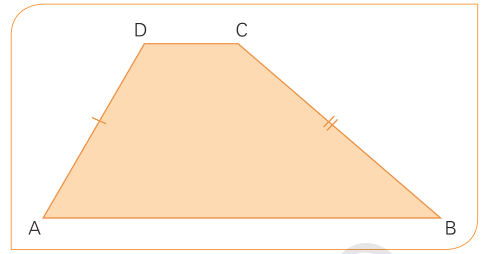
Trata-se do trapézio que tem os lados não paralelos congruentes.



$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$
$\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{D} \equiv \hat{C}$

Trapézio escaleno

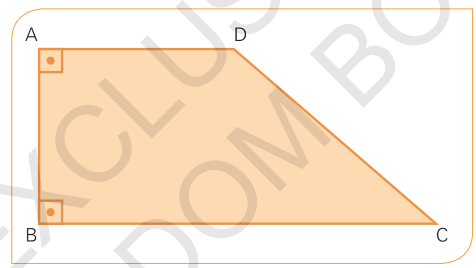
É o trapézio que tem os lados não paralelos com medidas diferentes.



$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} \neq \overline{BC}$

Trapézio retângulo

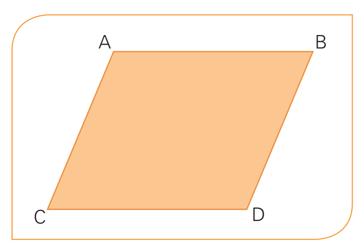
Trata-se do trapézio que tem dois ângulos retos.



$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\hat{A} = \hat{B} = 90°$

PARALELOGRAMO

É o quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos.



AB // CD e AC // BD

Os paralelogramos podem ser subdivididos em: retângulo, losango e quadrado.

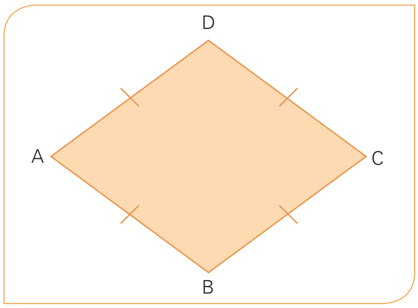
Retângulo

Trata-se do paralelogramo que tem os quatro ângulos internos congruentes. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, o retângulo apresenta quatro ângulos de 90° cada um.

$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong 90°$

Losango

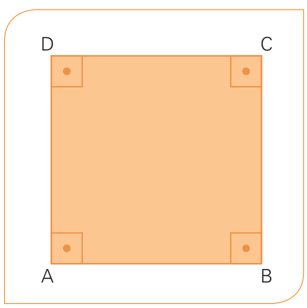
É o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

Quadrado

Trata-se do paralelogramo que tem os quatro ângulos internos e os quatro lados congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ e $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong 90°$

Observação:

- Se o quadrado tem os quatro ângulos iguais, então todo quadrado é um retângulo.
- Se todo quadrado tem os quatro lados iguais, então todo quadrado é um losango.

Atenção:

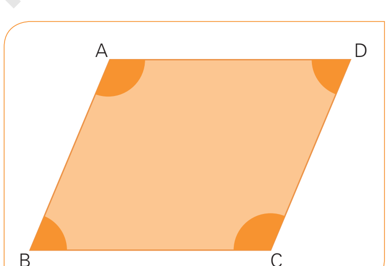
Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado. E todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado.

PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS

Ângulos congruentes

Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.

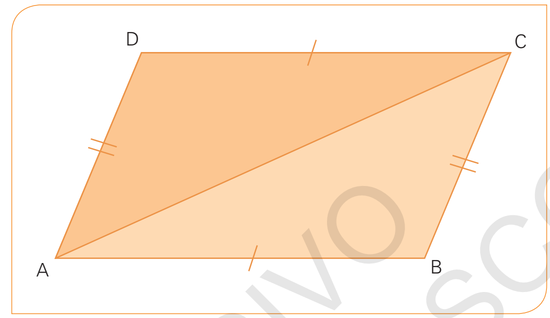
Sendo **ABCD** um paralelogramo, temos $A \cong C$ e $B \cong D$.



Lados opostos congruentes

Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

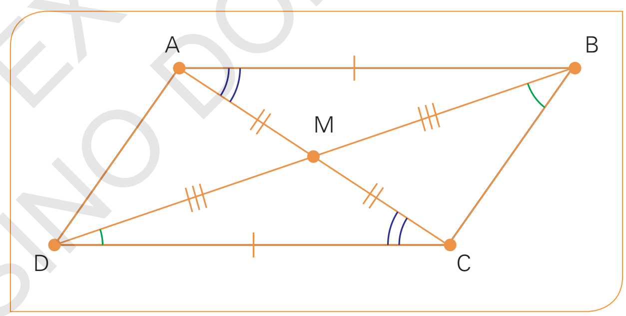
Sendo **ABCD** um paralelogramo, temos que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.



Diagonais que se interceptam no ponto médio

Em todo paralelogramo, as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

Sendo **ABCD** um paralelogramo, temos que $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.

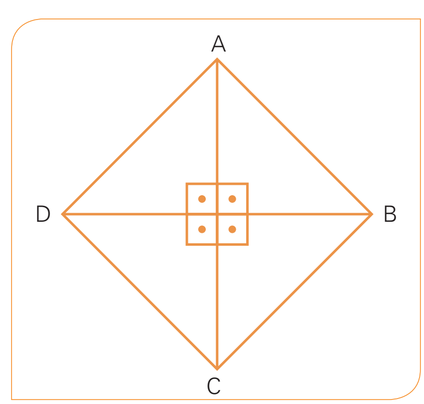


PROPRIEDADES DOS LOSANGOS

Diagonais perpendiculares

Todo losango tem diagonais perpendiculares.

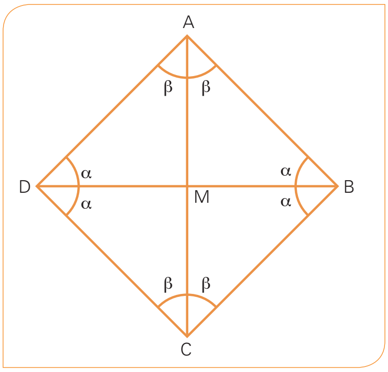
Sendo ABCD um losango, temos que $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{BD}$.



Diagonais nas bissetrizes dos ângulos internos

As diagonais de um losango são as bissetrizes dos ângulos internos.

Se ABCD é losango, as diagonais AC e BD são bissetrizes, respectivamente, de $\hat{A}$ e $\hat{C}$ e de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

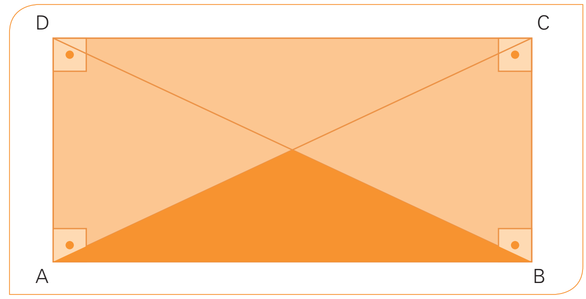


PROPRIEDADE DO RETÂNGULO

Diagonais congruentes

Todo retângulo tem diagonais congruentes.

- Se ABCD é retângulo, as diagonais são congruentes.



QUADRADOS

Como os quadrados são paralelogramos (losangos e retângulos), eles têm as mesmas propriedades até aqui estudadas. Logo, quadrados apresentam:

- ângulos opostos congruentes;
- lados opostos congruentes;
- diagonais que se cortam ao meio;
- diagonais na bissetriz dos ângulos internos;
- diagonais congruentes.

ROTEIRO DE AULA

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Baricentro

Encontro das medianas.

Propriedade: O baricentro divide as medianas na razão 2:1.

Incentro

Encontro das bissetrizes.

Propriedade: O incentro é o centro da circunferência ao triângulo.

Circuncentro

Encontro das mediatrizes.

Propriedade: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Ortocentro

Encontro das alturas.

ROTEIRO DE AULA

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Trapézio
- Escaleno
- Retângulo
- Isósceles

Paralelogramo
- Paralelogramo
- Losango — Diagonais são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos opostos.
- Retângulo — Diagonais congruentes.
- Quadrado
- Propriedades: Lados e ângulos opostos congruentes e diagonais que se cortam ao meio.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Col. Naval-RJ – Analise as afirmativas a seguir.

I. Sejam a, b e c os lados de um triângulo, com $c > b \geqslant a$. Pode-se afirmar que $c^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se, o triângulo for retângulo.

II. Se um triângulo é retângulo, então as bissetrizes internas dos ângulos agudos formam entre si um ângulo de 45° ou 135°.

III. O centro de um círculo circunscrito a um triângulo retângulo está sobre um dos catetos.

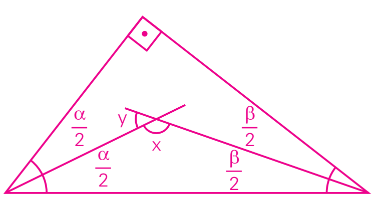
IV. O baricentro de um triângulo retângulo é equidistante dos lados do triângulo.

Assinale a opção correta.

a) Somente I e II são verdadeiras.
b) Somente II e III são verdadeiras.
c) Somente I e IV são verdadeiras.
d) Somente I, II e IV são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.

[I] Verdadeira, pois todo triângulo em que se aplica o teorema de Pitágoras é retângulo.

[II] Verdadeira. Sejam α e β as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo e x e y as medidas dos ângulos formados por suas bissetrizes, a figura que representa a situação é esta:



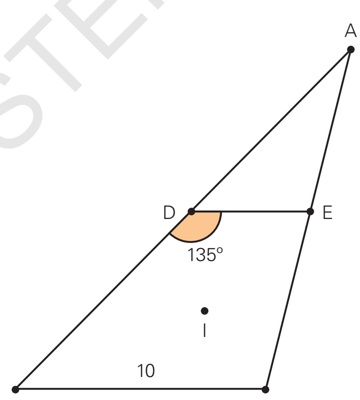
$$x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° \to 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} \to$$

$$\to x = 180° - 45° \to x = 135° \text{ e } y = 45°$$

[III] Falsa. O centro do círculo circunscrito em um triângulo retângulo é o circuncentro, que é o ponto médio da hipotenusa desse triângulo.

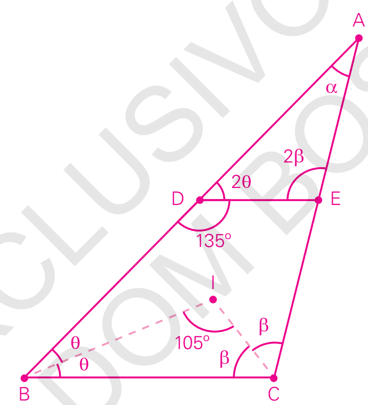
[IV] Falsa. O ponto que equidista dos lados é o incentro.

2. UDESC (adaptado) – Observe a figura.



Sabendo que os segmentos BC e DE são paralelos, que o ponto I é incentro do triângulo ABC e que o ângulo $B\hat{I}C$ é igual a 105°, então o segmento qual a medida do ângulo $D\hat{E}C$?

a) 45°
b) 75°
c) 80°
d) 100°
e) 105°



A medida do ângulo $D\hat{E}C$ é x. Observando a figura, como o ponto I é o incentro, temos que BI e CI são bissetrizes. Então, temos que $\theta + \beta = 75°$, pois a soma dos ângulos internos do triângulo BIC é 180°. Além disso, em virtude do paralelismo, $2\theta = 45°$ (I) e $2\beta = 180° - x$ (II). Fazendo (I) + (II):

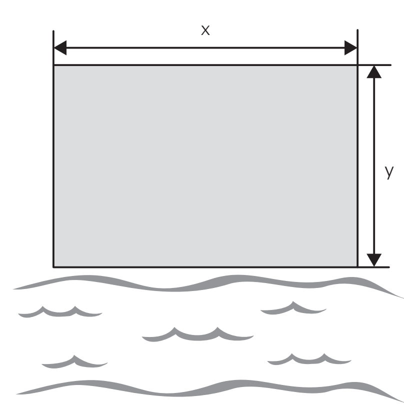
$2\theta + 2\beta = 45° + 180° - x$

$2(\theta + \beta) = 225° - x$

$2 \cdot 75° = 225° - x \quad \therefore \quad x = 75°$

3. Enem C2-H7

Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metros, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R$ 7.500,00. O material da cerca custa R$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R$ 2,00 por metro para os demais lados.

Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

a) $4(2x + y) = 7\,500$
b) $4(x + 2y) = 7\,500$
c) $2(x + y) = 7\,500$
d) $2(4x + y) = 7\,500$
e) $2(2x + y) = 7\,500$

O custo para cercar os lados paralelos ao terreno é igual a $2x \cdot 4 = 8x$, enquanto para cercar os outros lados é $2y \cdot 2 = 4y$.

Logo:

$8x + 4y = 7\,500$

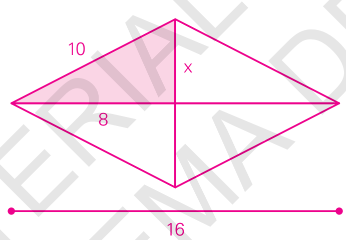
Portanto, $4(2x + y) = 7\,500$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. IFSC (adaptado) – O perímetro de um losango é 40 cm e uma diagonal mede 16 cm. Qual a medida da outra diagonal?

O losango é equilátero, e suas diagonais são perpendiculares. As diagonais cortam-se ao meio pelo fato de o losango ser paralelogramo. Temos, então, a figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:

$x^2 = 10^2 - 8^2$

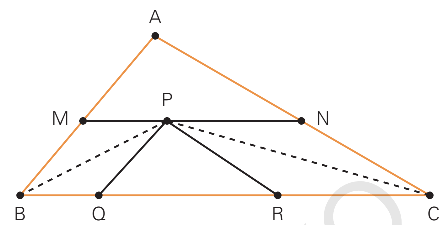
$x^2 = 100 - 64$

$x^2 = \sqrt{36}$

$x = 6$ cm

Portanto, a outra diagonal mede 12 cm.

5. UFPI – No triângulo ABC (figura abaixo), os lados AB, AC e BC medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 9 cm. Se P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos B e C e PQ//MB, PR//NC e MN//BC, a razão entre os perímetros dos triângulos AMN e PQR é:



a) $\frac{10}{9}$

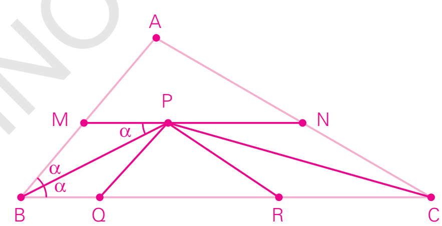
b) $\frac{9}{8}$

c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{7}{5}$

Com as informações do enunciado (bissetrizes e paralelismos), concluímos que os triângulos BMP e BQP são isósceles e congruentes (veja a figura abaixo). O mesmo vale para os triângulos PNC e PCR.



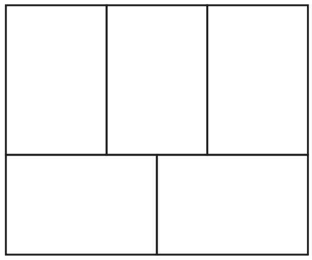
Chamando as medidas do segmento MP = a e PN = b, teremos:

I) AM = 5 – a, AN = 7 – b e MN = a + b. Portanto, o perímetro do triângulo AMN vale 12.

II) PQ = a, PR = b e QR = 9 – (a + b). Assim, o perímetro do triângulo PQR vale 9.

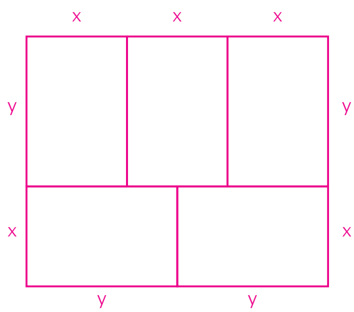
Portanto, a razão pedida vale $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

6. IFCE – Um terreno com perímetro de 176 m é subdividido em 5 retângulos congruentes, como mostrado na figura a seguir.



O perímetro de qualquer um dos 5 retângulos congruentes vale, em m:

a) 80
b) 76
c) 35,2
d) 84
e) 86



De acordo com a figura, podemos escrever:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 176 \\ 2y = 3x \rightarrow y = \dfrac{3x}{2} \end{cases}$$

$5x + 4 \cdot \left(\dfrac{3x}{2}\right) = 176 \rightarrow 5x + \dfrac{12x}{6} = 176 \rightarrow$

$\rightarrow 5x + 6x = 176 \rightarrow 11x = 176 \rightarrow x = 16$

Substituindo o valor de x = 16, temos:

$5x + 4y = 176 \rightarrow 5 \cdot (16) + 4y = 176 \rightarrow$

$\rightarrow 4y = 176 - 80 \rightarrow y = \dfrac{96}{4} \rightarrow y = 24$

Dessa forma, o perímetro de cada retângulo será dado por:

$P = 2 \cdot (x + y) \rightarrow P = 2 \cdot (16 + 24) \rightarrow P = 80$

Portanto, P = 80 m.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

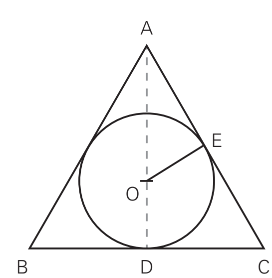
7. Sistema Dom Bosco – A distância do baricentro ao ortocentro de um triângulo cuja hipotenusa mede 42 cm é:

a) 7 cm
b) 10 cm
c) 14 cm
d) 17 cm
e) 20 cm

8. IFAL – Considere um triângulo ABC cuja base $\overline{AB}$ mede 27 dm. Traçando-se uma reta "t", paralela à base, ela determina sobre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, os pontos D e E. Sabe-se que $\overline{DC}$ mede 14 dm, $\overline{BE}$ mede 8 dm e $\overline{DE}$ mede 18 dm. Assinale a alternativa verdadeira.

a) O triângulo ABC é equilátero; logo, ele pode ser inscrito em uma circunferência.
b) O triângulo ABC é um polígono regular; logo, ele pode ser inscrito em uma circunferência.
c) O triângulo ABC é escaleno, mesmo assim ele pode ser inscrito em uma circunferência.
d) O raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede $9\sqrt{3}$ dm.
e) O apótema da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede $4{,}5\sqrt{3}$ dm.

9. PUC-MG – Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro 0 e raio 2 cm. AD é altura do triângulo. Sendo E ponto de tangência, a medida de AE, em centímetros, é:



a) $2\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{5}$
c) 3
d) 5
e) $\sqrt{26}$

10. Unitau-SP – O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado:

a) mediana.

b) mediatriz.

c) bissetriz.

d) altura.

e) base.

11. UniRV-GO – Com relação aos pontos notáveis de um triângulo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso) para as alternativas.

( ) O incentro é o ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo, representando o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

( ) O baricentro é o ponto de encontro das medianas de um triângulo.

( ) O circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo, representando o centro da circunferência inscrita nesse triângulo.

( ) O ortocentro é o ponto de encontro das alturas de um triângulo.

12. Sistema Dom Bosco – Num triângulo ABC, $\hat{A} = 20°$, sendo O o incentro. Então, $B\hat{O}C$ é:

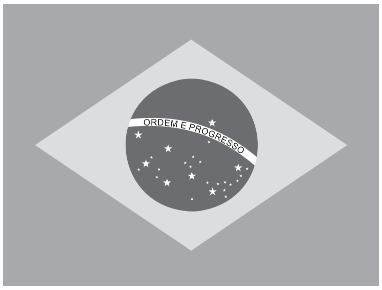
a) 80°

b) 100°

c) 90°

d) 110°

13. IFSC



Todos os anos, no mês de setembro, comemora-se a Independência do Brasil. Durante uma semana, muitas instituições exibem a Bandeira do Brasil como forma de homenagear a Pátria.

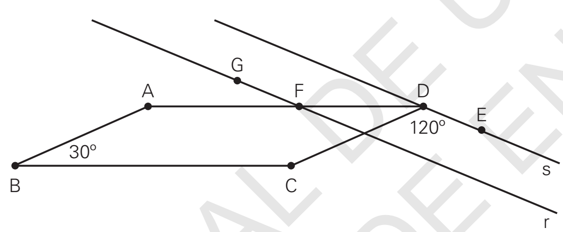
A maioria dos brasileiros desconhece que a fabricação da Bandeira Nacional obedece a rígidos critérios em relação às dimensões das figuras geométricas (retângulo, losango e círculo), das letras e das estrelas.

Considere que as diagonais maior e menor do losango amarelo da Bandeira do Brasil medem 16 dm e 12 dm, respectivamente.

Então, é CORRETO afirmar que a linha que delimita a parte amarela mede:

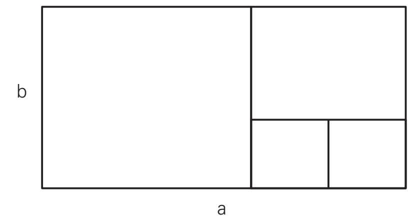
a) 40 dm
b) 28 dm
c) 20 dm
d) 48 dm
e) 96 dm

14. CFTRJ – Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo, as retas r e s são paralelas, D e E são pontos de s, F e G são pontos de r, F é um ponto de AD, $A\hat{B}C = 30°$ e $C\hat{D}E = 120°$. Quanto mede, em graus, o ângulo $D\hat{F}G$?



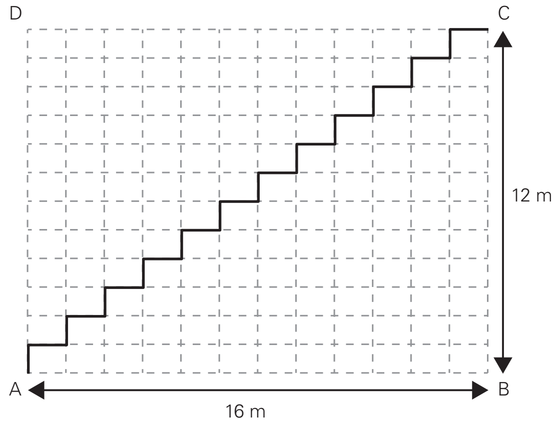
a) 120°
b) 130°
c) 140°
d) 150°

15. UFRJ – Um retângulo a seguir de dimensões a e b está decomposto em quatro quadrados, como mostra a figura.



Calcule o valor da razão $\frac{b}{a}$.

16. UDESC – Numa praça de alimentação retangular, com dimensões 12 m por 16 m, as mesas estão dispostas em fileiras paralelas às laterais do ambiente, conforme o esquema da figura, sendo as linhas pontilhadas os corredores entre as mesas.

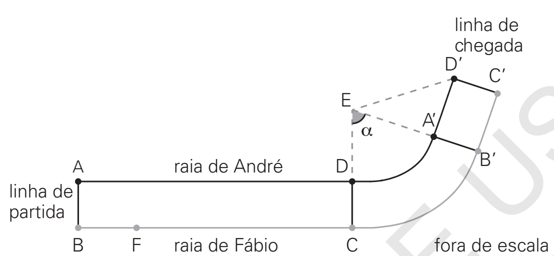


Praça de alimentação

Pela disposição das mesas, existem várias maneiras de se chegar do ponto A ao ponto C, movendo-se apenas pelos corredores. Seguindo-se o caminho destacado e desprezando-se a largura dos corredores, a distância percorrida é:

a) 12 m
b) 20 m
c) 24 m
d) 28 m
e) 16 m

17. UNESP – A figura representa duas raias de uma pista de atletismo plana. Fábio (F) e André (A) vão apostar uma corrida nessa pista, cada um correndo em uma das raias. Fábio largará à distância $\overline{FB}$ da linha de partida para que seu percurso total, de F até a chegada em C', tenha o mesmo comprimento do que o percurso total de André, que irá de A até D'.



Considere os dados:

- ABCD e A'B'C'D' são retângulos.
- B', A' e E estão alinhados.
- C, D e E estão alinhados.
- $\overset{\frown}{A'D}$ e $\overset{\frown}{B'C}$ são arcos de circunferência de centro E.

Sabendo que $\overline{AB} = 10$ m, $\overline{BC} = 98$ m, $\overline{ED} = 30$ m, $\overline{ED'} = 34$ m e $\alpha = 72°$, calcule o comprimento da pista de A até D' e, em seguida, calcule a distância $\overline{FB}$. Adote nos cálculos finais $\pi = 3$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UNESP C2-H6

Um aluno precisa localizar o centro de uma moeda circular e, para tanto, dispõe apenas de um lápis, de uma folha de papel, de uma régua não graduada, de um compasso e da moeda.

Nessas condições, o número mínimo de pontos distintos necessários de serem marcados na circunferência descrita pela moeda para localizar seu centro é

a) 3.
b) 2.
c) 4.
d) 1.
e) 5.

19. Enem C2-H7

Em uma das paredes de um depósito existem compartimentos de mesmo tamanho para armazenamento de caixas de dimensões frontais a e b. A terceira dimensão da caixa coincide com a profundidade de cada um dos compartimentos. Inicialmente as caixas são arrumadas, em cada um deles, como representado na Figura 1. A fim de aproveitar melhor o espaço, uma nova proposta de disposição das caixas foi idealizada e está indicada na Figura 2. Essa nova proposta possibilitaria o aumento do número de caixas armazenadas de 10 para 12 e a eliminação de folgas.

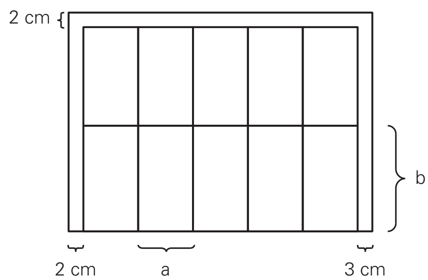


Figura 1

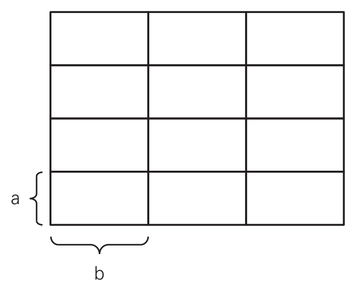


Figura 2

É possível ocorrer a troca de arrumação segundo a nova proposta?

a) Não, porque a segunda proposta deixa uma folga de 4 cm na altura do compartimento, que é de 12 cm, o que permitiria colocar um número maior de caixas.

b) Não, porque, para aceitar a segunda proposta, seria necessário praticamente dobrar a altura e reduzir à metade a largura do compartimento.

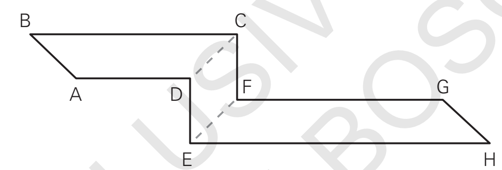
c) Sim, porque a nova disposição das caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 20 cm de altura por 27 cm de largura.

d) Sim, pois efetivamente aumentaria o número de caixas e reduziria o número de folgas para apenas uma de 2 cm na largura do compartimento.

e) Sim, porque a nova disposição de caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 32 cm de altura por 45 cm de largura.

20. CFTMG (adaptado) C2-H7

A figura abaixo é plana e composta por dois trapézios isósceles e um losango.



O comprimento da base maior do trapézio ABCD é igual ao da base menor do trapézio EFGH, que vale 2x, a base maior de cada trapézio é o dobro da base menor e o lado EF do losango vale y. O perímetro da figura dada, expresso em função de x e y, é

a) $6x + 4y$

b) $9x + 4y$

c) $12x + 2y$

d) $15x + 2y$

e) $17x + 4y$

7 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS E TEOREMA DE TALES

- Quadriláteros notáveis – revisão
- Teorema de Tales
- Proporcionalidade

HABILIDADES

- Identificar pontos notáveis do triângulo.
- Aplicar propriedades de dois pontos notáveis na resolução de problemas.
- Identificar diferentes tipos de quadriláteros.
- Analisar propriedades dos quadriláteros na construção de argumentos.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos como solução de problemas cotidianos.
- Compreender o enunciado do teorema de Tales.
- Identificar proporcionalidade gerada por um feixe de paralelas.
- Aplicar o teorema de Tales na resolução de situações-problema.

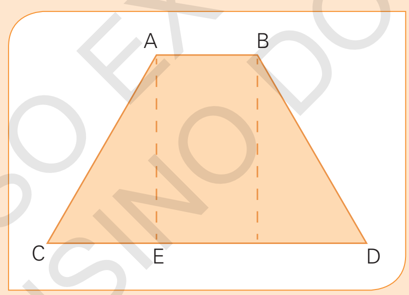
QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS – REVISÃO

Fique atento às seguintes características dos quadriláteros:

1. Quadriláteros se dividem em trapézios e paralelogramos.
2. Trapézios são classificados em isósceles, escaleno e retângulo.
3. Retângulos e losangos são paralelogramos.
4. O quadrado é simultaneamente losango e retângulo.

TRAPÉZIO

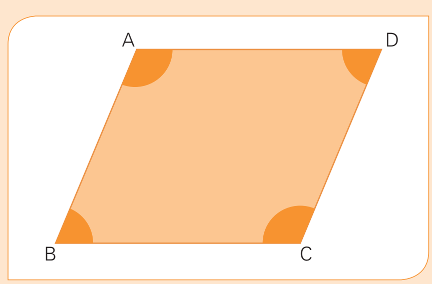
um único par de lados opostos paralelos.



PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS:

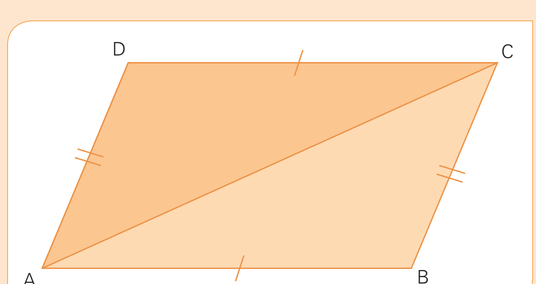
- Ângulos opostos congruentes:

Sendo ABCD um paralelogramo, temos $A \cong C$ e $B \cong D$



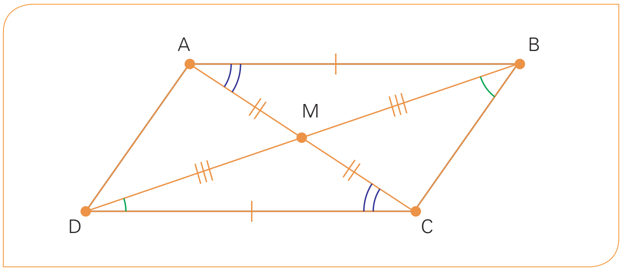
- Lados opostos congruentes:

Sendo ABCD um paralelogramo, temos que AB = CD e AD = BC.



- Diagonais se interceptam no ponto médio:

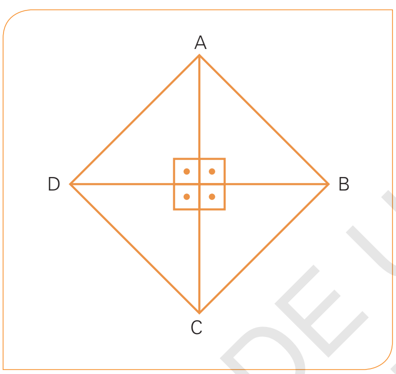
Sendo ABCD um paralelogramo, temos que AM = CM e BM = DM.



PROPRIEDADES DOS LOSANGOS

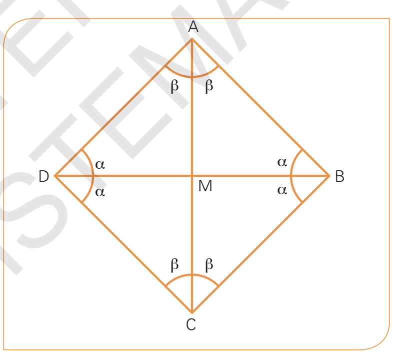
- Diagonais são perpendiculares:

Sendo ABCD um losango, temos que AC é perpendicular a BD.



- Diagonais são bissetrizes dos ângulos internos:

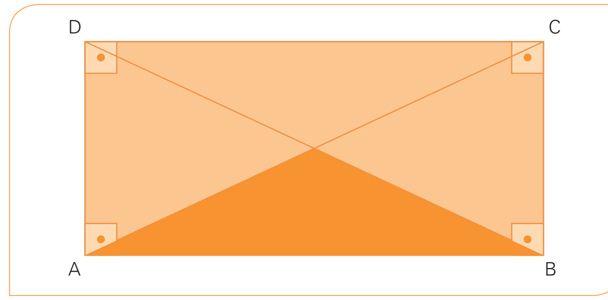
Se ABCD é losango, as diagonais AC e BD são bissetrizes, respectivamente, de Â e Ĉ e de B̂ e D̂.



PROPRIEDADE DO RETÂNGULO

- Diagonais congruentes:

Se ABCD é retângulo, as diagonais são congruentes.



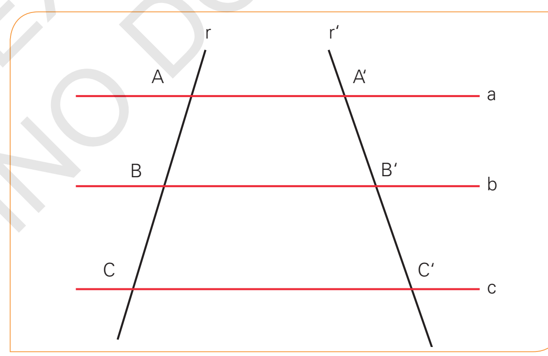
Teorema de Tales

O enunciado do teorema é o seguinte:

Se três (ou mais) retas paralelas são interceptadas por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Uma demonstração completa desse teorema foge aos propósitos de nossa aula, então vamos apenas compreendê-lo e usá-lo.

Considere **a**, **b** e **c** retas paralelas e **r** e **r'** transversais, conforme a figura:



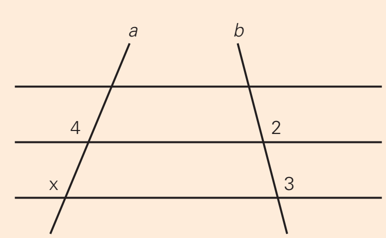
O teorema de Tales nos possibilita escrever:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Vejamos uma primeira aplicação bem simples do teorema.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Sabendo que na figura abaixo as retas r, s e t são paralelas, determine o valor de x.



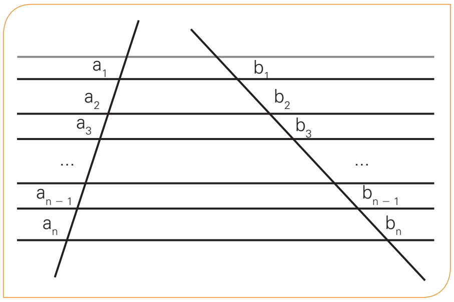
Solução:

Pelo teorema de Tales, podemos escrever:

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$$

PROPORCIONALIDADE

Observe que o teorema de Tales estabelece uma proporcionalidade entre segmentos correspondentes das retas transversais cortadas por um feixe de paralelas.

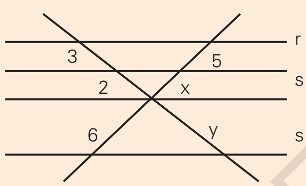


Sendo a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n as medidas dos segmentos determinados pelo feixe de paralelas de modo que cada a_i esteja entre as mesmas paralelas que b_i, podemos escrever:

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_4} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ = k (em que k é uma constante de proporcionalidade)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Na figura abaixo, determine o valor de x e y, sendo as retas horizontais paralelas.



Resolução

Aplicaremos o teorema de Tales duas vezes. Primeiro:

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{10}{3}$$

Para calcular o valor de y, vamos aplicar o teorema de Tales de novo, mas é nesse momento em que um erro pode ser cometido em virtude do cruzamento das transversais. Alguém pode achar que os segmentos x e y são proporcionais, pois estão "do mesmo lado" na figura, e escrever:

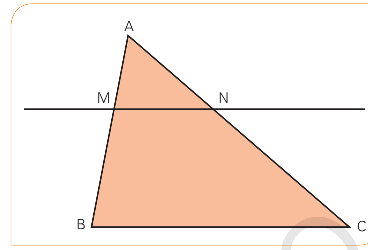
$$\frac{2}{6} = \frac{x}{y}$$

No entanto, isso não está correto. Para dois segmentos serem proporcionais segundo o teorema de Tales, eles devem ser correspondentes (estarem entre o mesmo par de paralelas) ou pertencerem à mesma transversal. Portanto, o correto seria:

$$\frac{2}{y} = \frac{x}{6} \rightarrow yx = 12 \rightarrow y \cdot \frac{10}{3} = 12 \rightarrow y = 3{,}6$$

TEOREMA DE TALES NOS TRIÂNGULOS

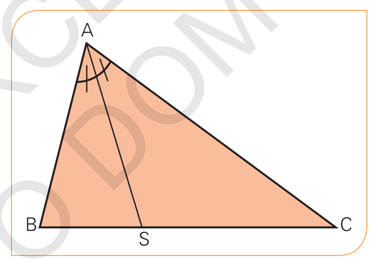
Uma reta paralela a um lado de um triângulo que encontra os outros dois lados em pontos distintos determina sobre esses dois lados segmentos proporcionais.



$$\overline{MN} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Teorema da bissetriz interna

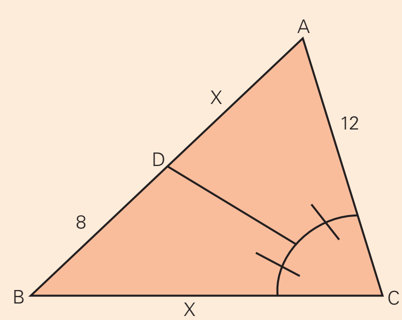
Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta\,(\overline{AD}\text{ é bissetriz}) \\ \alpha = \theta\,(\text{correspondente}) \\ \beta = \gamma\,(\text{alterno internos}) \end{array}\right\} \rightarrow \theta = \gamma$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Na figura, BD é bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$. Determine o valor de x:



Resolução

$$\frac{x}{12} = \frac{10}{x} \rightarrow x^2 = 96 \rightarrow x = \sqrt{96} \rightarrow x = 4\sqrt{6}$$

ROTEIRO DE AULA

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS II

Definição

Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos, sem que existam três colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ se interceptam apenas nas extremidades, a reunião desses quatros segmentos é um quadrilátero.

Ângulos externos: ângulos adjacentes suplementares aos ângulos internos.

Classificação

Trapézio, se, e somente se, tiver um único par de lados paralelos.

Paralelogramo se, e somente se, tiver os lados opostos paralelos.

Losango se, e somente se, for paralelogramo e tiver os quatro lados congruentes.

Retângulo se, e somente se, for paralelogramo e tiver os quatro ângulos internos congruentes.

Quadrado se, e somente se, for paralelogramo e tiver os quatro ângulos internos e os quatro lados congruentes.

ROTEIRO DE AULA

TEOREMA DE TALES

Conceitos iniciais

Retas paralelas cortadas por transversais.

Os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais.

Proporcionalidade entre segmentos correspondentes ou que pertençam à mesma transversal.

Toda proporção tem uma constante de proporcionalidade.

Teorema

Se três (ou mais) retas paralelas são interceptadas por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Teorema de Tales nos triângulos

Uma reta paralelas a um lado de um triângulo, que encontra os outros dois lados em pontos distintos., determina sobre esses dois lados segmentos proporcionais. .

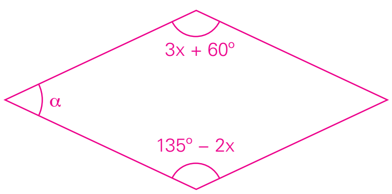
Teorema da bissetriz interna

Em qualquer triângulo, uma bissetriz, interna divide o lado oposto. em segmentos proporcionais. aos lados adjacentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFSP – Considerando que as medidas de dois ângulos opostos de um losango são dadas, em graus, por 3x + 60° e 135° – 2x, a medida do menor ângulo desse losango é:

a) 75°
b) 70°
c) 65°
d) 60°
e) 55°

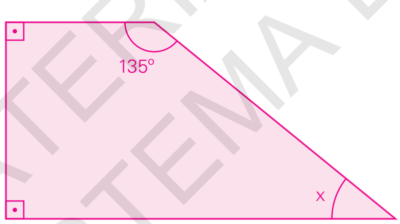


$3x + 60° = 135° - 2x$
$3x + 2x = 135° - 60°$
$5x = 75°$
$x = 15°$

$\alpha + 3 \cdot 15° + 60 = 180°$
$\alpha = 75°$.

2. Sistema Dom Bosco – Em um trapézio retângulo, o maior ângulo mede 135°. O menor ângulo desse polígono mede:

a) 25°
b) 35°
c) 45°
d) 55°
e) 65°



$x + 135° + 90° + 90° = 360°$
$x = 360° - 315°$
$x = 45°$

3. Sistema Dom Bosco C2-H7

Em um exame psicotécnico o candidato devia assinalar qual palavra não possuía relação com as demais. Observando atentamente, qual palavra deve ser assinalada pelo candidato?

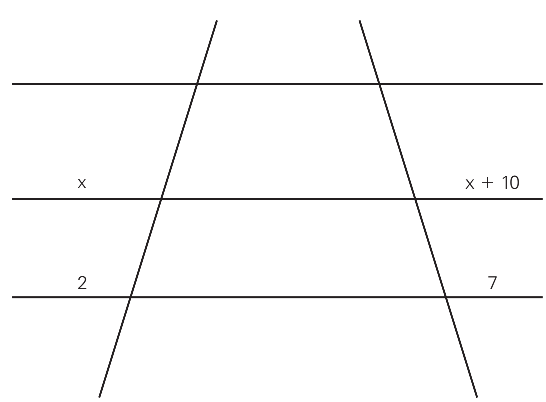
a) losango
b) paralelogramo
c) retângulo
d) trapézio
e) pentágono

Todas as palavras se referem a quadriláteros, exceto o pentágono, que é um polígono de cinco lados.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. IFBA (adaptado) – Abaixo estão duas retas paralelas cortadas por duas transversais. Então, o valor de x na figura, é

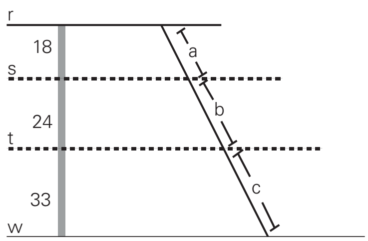


Aplicando o teorema de Tales na primeira situação, temos:

$\frac{x}{2} = \frac{x+10}{7} \rightarrow 7x = 2x + 20 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$

Portanto, o valor de x = 4.

5. CFTMG – Na figura a seguir, as retas r, s, t e w são paralelas, e a, b e c representam medidas dos segmentos, tais que a + b + c = 100.



Conforme esses dados, os valores de a, b e c são, respectivamente, iguais a

a) 24, 32 e 44
b) 24, 36 e 40
c) 26, 30 e 44
d) 26, 34 e 40

Utilizando o teorema de Tales, temos:

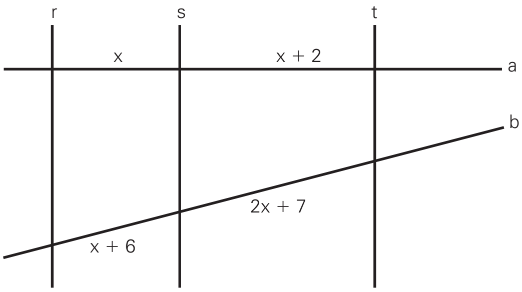
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{24} = \frac{c}{33} = \frac{a+b+c}{18+24+33} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{24} = \frac{c}{33} = \frac{100}{75} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{18} = \dfrac{100}{75} \rightarrow a = 24 \\ \dfrac{b}{24} = \dfrac{100}{75} \\ \dfrac{c}{33} = \dfrac{100}{75} \rightarrow c = 44 \end{cases}$$

Portanto, a = 24, b = 32 e c = 44.

6. CFTMG – Considere a figura em que r // s // t.



O valor de x é

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.

Aplicando o teorema de Tales na figura, temos:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+6}{2x+7} \rightarrow 2x^2 + 7x = x^2 + 8x + 12 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

Resolvendo a equação do 2° grau, temos:

$x = 4$ ou $x = -3$

Como $x > 0$, tem-se $x = 4$.

Portanto, $x = 4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UFJF-MG – Dadas as seguintes afirmações:

I. Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é um retângulo.

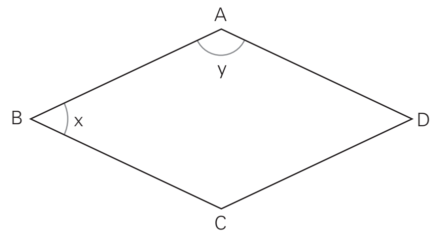
II. A altura de um trapézio retângulo que tem o ângulo agudo medindo 30° é igual à metade do lado não perpendicular às bases.

III. Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos desse quadrilátero.

É **CORRETO** afirmar que:

a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é verdadeira.
c) Todas as afirmações são verdadeiras.
d) Apenas I e II são verdadeiras.
e) Apenas II e III são verdadeiras.

8. Sistema Dom Bosco – O losango é um paralelogramo que possui todos os lados congruentes. A respeito do losango ABCD, afirma-se que:



I. A soma dos ângulos internos é igual a 180°.
II. As diagonais AC e BC são perpendiculares entre si.
III. A medida do ângulo y é o dobro da medida o ângulo x.

Está correto o que se afirma:

a) Apenas em I
b) Apenas em II
c) Apenas em III
d) Apenas em I e II
e) Apenas em II e III

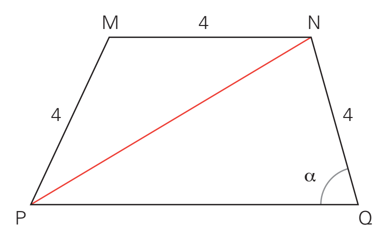
9. Sistema Dom Bosco – Paralelogramos são quadriláteros que possuem dois pares de lados paralelos. Caso, um paralelogramo possua a medida de dois ângulos internos consecutivos na razão 1:4, qual a medida do maior ângulo desse paralelogramo?

Considere um losango ABCD em que M, N, P e Q são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Um dos ângulos internos desse losango mede α, sendo 0° < a < 90°.

10. Insper-SP – Nessas condições, o quadrilátero convexo MNPQ da questão anterior:

a) é um quadrado.
b) é um retângulo que não é losango.
c) é um losango que não é retângulo.
d) é um paralelogramo que não é retângulo nem losango.
e) não possui lados paralelos.

11. Mackenzie-SP – No trapézio da figura, PN = PQ. Então o ângulo α mede:

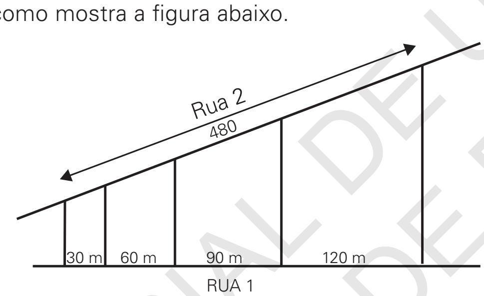


a) 64°
b) 68°
c) 72°
d) 76°
e) 80°

12. IFCE – As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são inversamente proporcionais a 5, 8, 10 e 40, então as medidas, em graus, dos ângulos são, respectivamente, iguais a:

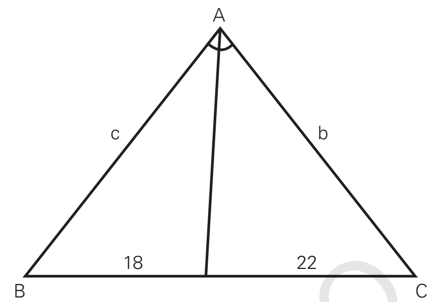
a) 160°; 100°; 80°; e 20°.
b) 100°; 80°; 20°; e 160°.
c) 80°; 50°; 40°; e 10°.
d) 50°; 40°; 10°; e 80°.
e) 75°; 45°; 40°; e 20°.

13. UFMA (adaptado) – Uma determinada firma imobiliária resolveu lotear um terreno em 4 outros menores com duas frentes: uma para a rua 1 e outra para a rua 2, como mostra a figura abaixo.



Sabendo-se que as divisões laterais são perpendiculares à rua 1 e que a frente total para a rua 2 é de 480 m, qual a medida da frente de cada lote, para a rua 2, respectivamente?

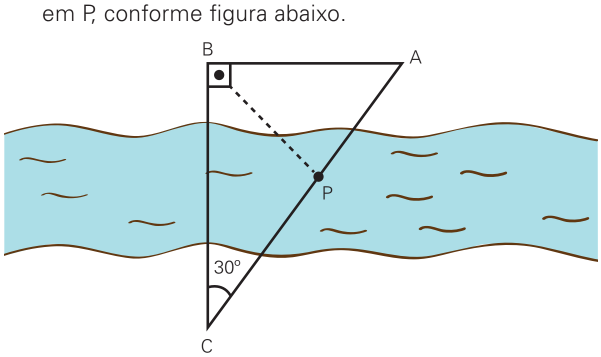
14. CFTMG – O perímetro do triângulo ABC vale 120 cm e a bissetriz do ângulo A divide o lado oposto em dois segmentos de 18 e 22 cm, conforme a figura.



A medida do maior lado desse triângulo, em cm, é

a) 22 **b)** 36 **c)** 44 **d)** 52

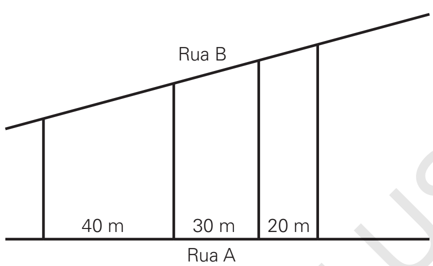
15. CPCAR-SP – As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura abaixo.



Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ km, então $\overline{CP}$ é, em km, igual a

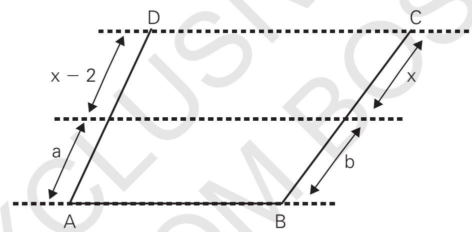
a) $6 + \sqrt{3}$
b) $6(3 - \sqrt{3})$
c) $9\sqrt{3} - \sqrt{2}$
d) $9\left(\sqrt{2} - 1\right)$

16. Fuvest-SP – Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A.



Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?

17. CFTMG – A figura representa um perfil de um reservatório d'água com lado **AB** paralelo a **CD**.



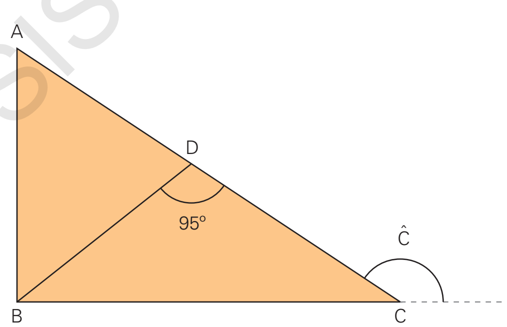
Se **a** é o menor primo e b é 50% maior que **a**, então, o valor de **x** é

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 10

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFAM (adaptado) C2-H7

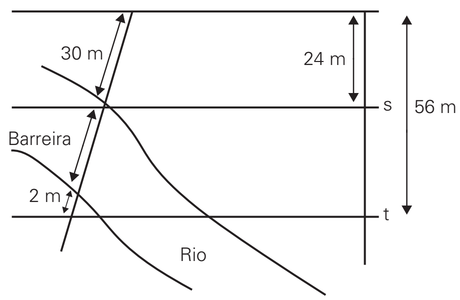
Observe a figura abaixo e indique qual a medida do ângulo externo $\hat{C}$, sabendo que o segmento $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ e sabendo que o triângulo ABC é retângulo em B.



a) 45°
b) 40°
c) 165°
d) 120°
e) 140°

19. UFSM-RS C2-H8

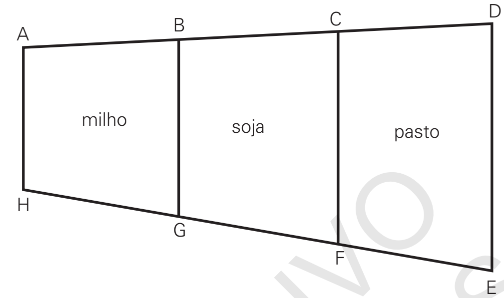
A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a figura e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede



a) 33 m
b) 38 m
c) 43 m
d) 48 m
e) 53 m

20. CPS-SP C2-H8

Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes, conforme a figura.



Considere que

- os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- os pontos H, G, F e E estão alinhados;
- os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500 m, BC = 600 m, CD = 700 m e HE = 1 980 m.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros,

a) 665.
b) 660.
c) 655.
d) 650.
e) 645.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

8

- Introdução
- Semelhança de figuras
- Triângulos semelhantes
- Polígonos semelhantes
- Relação entre perímetros
- Relação entre áreas

HABILIDADES

- Aplicar os casos de semelhança de triângulos na resolução de problemas.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Aplicar os casos de semelhança de triângulos na resolução de problemas.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

FIGURAS SEMELHANTES

Duas figuras são classificadas como semelhantes quando seus lados correspondentes são proporcionais e seus ângulos correspondentes são congruentes.

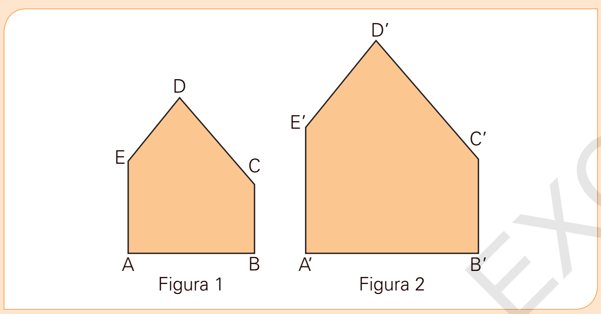


Figura 1 Figura 2

Lados correspondentes:
AB e A′B′, BC e B′C′, CD e C′D′ e C′D′, DE e D′E′, EA e E′A′
Ângulos correspondentes:

$A\hat{B}C = A'\hat{B}'C$, $B\hat{C}D \equiv B'\hat{C}'D$, $C\hat{D}E \equiv C'\hat{D}'E$, $D\hat{E}A \equiv D'\hat{E}'A$, $E\hat{A}B \equiv E'\hat{A}'B'$

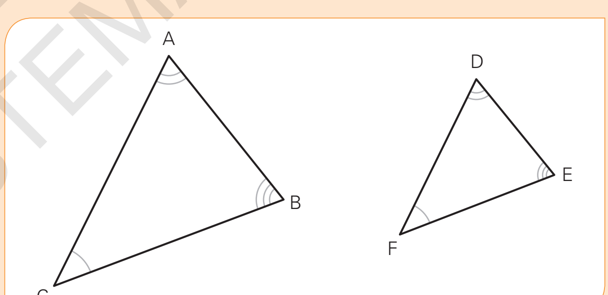
Comparando as medidas dos lados, temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$

O valor de k é constante e é denominado **razão de semelhança** entre as figuras 1 e 2.

TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, seus lados correspondentes são proporcionais e seus ângulos correspondentes são congruentes.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{F} \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD} = k \\ k = \text{razão de semelhança} \end{array}\right\} \leftrightarrow \Delta ABC : \Delta DEF$$

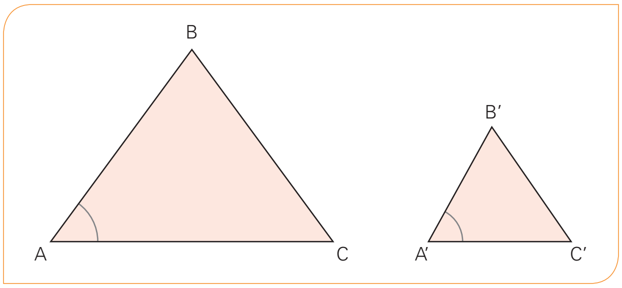
TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Se uma reta é paralela a um dos lados do triângulo e intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

CASOS DE SEMELHANÇAS DE TRIÂNGULOS

Caso LAL

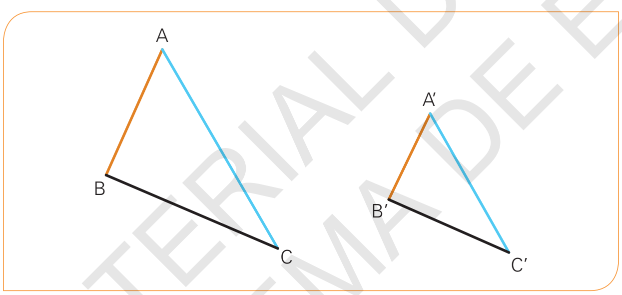
Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}\\ \hat{A}=\hat{A}'\end{array}\right\}\rightarrow \Delta ABC : \Delta A'B'C'$$

Caso LLL

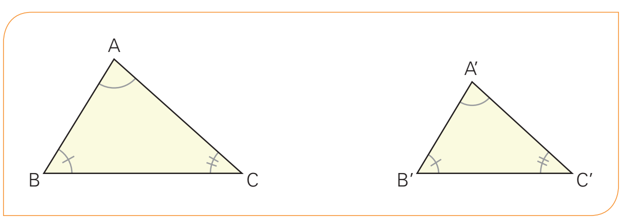
Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses dois triângulos são semelhantes.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Caso AA

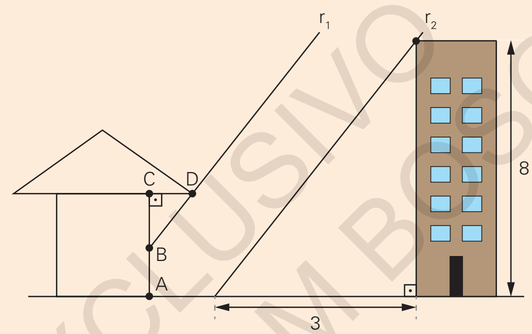
Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{array}\right\}\rightarrow \Delta ABC : \Delta A'B'C'$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

CFTMG – Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é 2,9 m. A medida do segmento $\overline{AB}$ é 1,3 m e o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



Se r_1 é paralelo com r_2, então o comprimento do beiral, em metros, é

a) 0,60 **b)** 0,65 **c)** 0,70 **d)** 0,75

Resolução

Sendo os triângulos retângulos semelhantes por AA e $\overline{BC}$ = 1,6 m, temos

$$\frac{\overline{CD}}{3}=\frac{1,6}{8}\rightarrow 8\cdot\overline{CD}=1,6\cdot 3\rightarrow 8\cdot\overline{CD}=14,8\rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{CD}=\frac{14,8}{8}\rightarrow \overline{CD}=0,6$$

Portanto, $\overline{CD}$ = 0,6 m.

POLÍGONOS SEMELHANTES

Polígonos com dois lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes são denominados **polígonos semelhantes**.

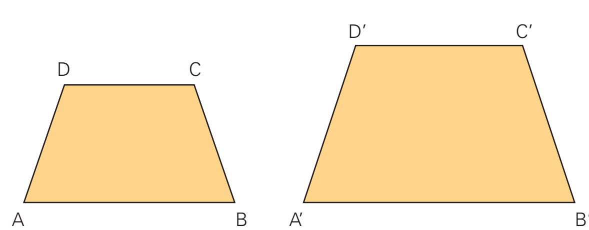


Figura 1 Figura 2

Lados correspondentes:
AB e A′B′, BC e B′C′, CD e C′D′, DA e D′A′

Ângulos correspondentes: $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B'}C'$, $B\hat{C}D \equiv B'\hat{C'}D'$, $C\hat{D}A \equiv C'\hat{D'}A'$, $D\hat{A}B \equiv D'\hat{A'}B'$

Comparando os segmentos, encontramos:

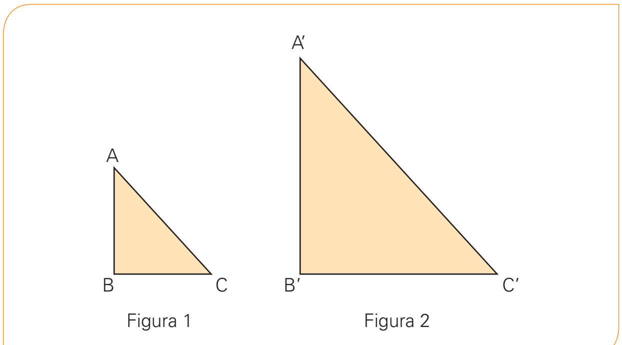
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=r\ (\text{r: razão de semelhança})$$

PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS SEMELHANTES

Relação entre os perímetros

Se dois polígonos semelhantes têm razão de semelhança para seus lados igual a **r**, a razão de semelhança entre seus perímetros também será igual a **r**.

Dados dois triângulos semelhantes, obtemos:



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Temos:

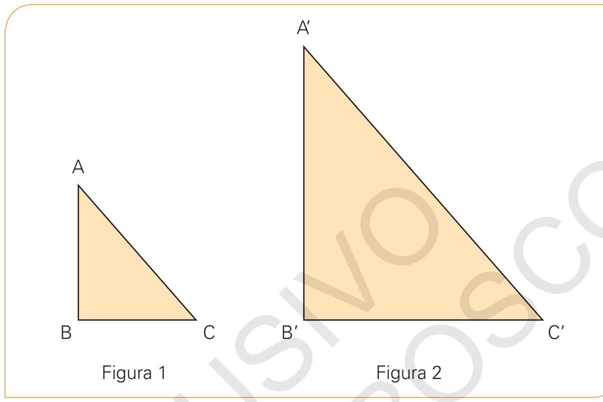
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=r\rightarrow\frac{ABC}{A'B'C'}=r$$

$$\therefore\ \frac{\text{Perímetro }\triangle ABC}{\text{Perímetro }\triangle A'B'C'}=r$$

Relação entre as áreas

Se dois polígonos semelhantes têm razão de semelhança para seus lados igual a **r**, a razão de semelhança entre suas áreas será **r²**.

Dados dois triângulos semelhantes, obtemos:



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Temos:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=r$$

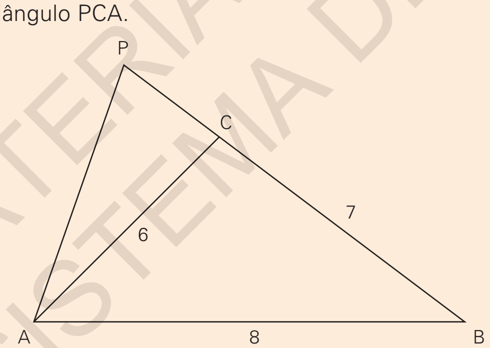
$$\frac{\text{Área}_1}{\text{Área}_2}=\frac{\frac{AB\cdot BC}{2}}{\frac{A'B'\cdot B'C'}{2}}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$$

$$\frac{\text{Área}_1}{\text{Área}_2}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{BC}{B'C'}=r\cdot r=r^2$$

$$\frac{\text{Área}_1}{\text{Área}_2}=r^2$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

FGV – No triângulo ABC, AB = 8, BC = 7, AC = 6 e o lado $\overline{BC}$ foi prolongado, como mostra a figura, até o ponto P, formando-se um triângulo PAB, semelhante ao triângulo PCA.



O comprimento do segmento PC é:

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Resolução

AB = 8, BC = 7, AC = 6

$A\hat{P}C$ é comum para os dois triângulos

$$\frac{AB}{AC}=\frac{PA}{PC}\rightarrow\frac{8}{6}=\frac{PA}{PC}\rightarrow 6PA=8PC\rightarrow PA=\frac{8PC}{6}=\frac{4PC}{3}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{PB}{PA}\rightarrow\frac{8}{6}=\frac{7+PC}{PA}\rightarrow\frac{4}{3}=\frac{7+PC}{\frac{4}{3}PC}\rightarrow\frac{16}{9}PC=7+PC\rightarrow$$

$$\rightarrow 16PC=63+9PC\rightarrow 16PC-9PC=63\rightarrow$$

$$\rightarrow 7PC=63\rightarrow PC=\frac{63}{7}=9$$

Portanto, PC = 9.

ROTEIRO DE AULA

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Semelhança de figuras

Duas figuras são classificadas como semelhantes, quando seus lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os seus lados correspondentes são proporcionais e os seus ângulos, correspondentes.

Casos de semelhanças

LAL – Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

LLL – Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então esses dois triângulos são semelhantes.

AA – Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS II

Polígonos semelhantes

Polígonos que possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes são denominados polígonos semelhantes.

Relação entre os perímetros

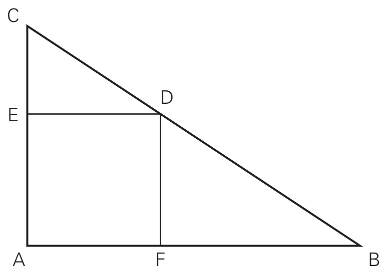
Se dois polígonos semelhantes possuem razão de semelhança para os seus lados igual a r, a razão de semelhança entre os seus perímetros também será igual a r.

Relação entre as áreas

Se dois polígonos semelhantes possuem razão de semelhança para os seus lados igual a r, a razão de semelhança entre suas áreas será r^2.

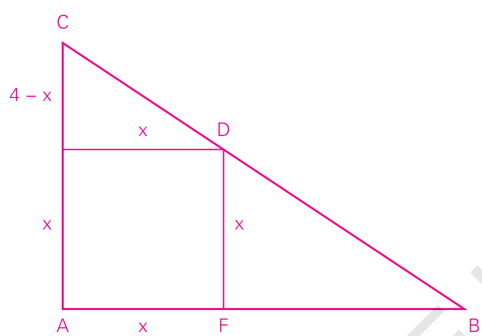
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RJ – Na figura abaixo, temos um quadrado AEDF e $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AB} = 6$.



Qual é o valor do lado do quadrado?

a) 2
b) 2,4
c) 2,5
d) 3
e) 4



Considerando x a medida do lado do quadrado, temos:

$\Delta CED \sim \Delta CAB$

$\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6}$

$4x = 24 - 6x$

$4x + 6x = 24$

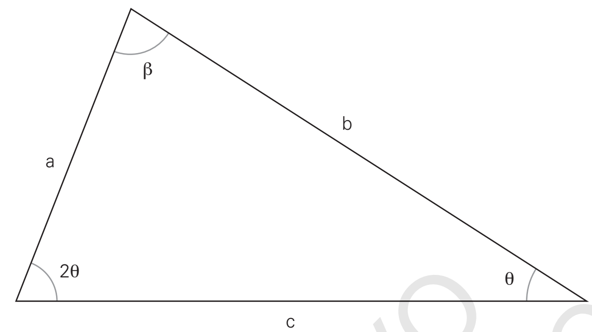
$10x = 24$

$x = \frac{24}{10}$

$x = 2{,}4$

Portanto, o valor do lado do quadrado é 2,4.

2. Unicamp-SP – A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos a, b, e c e ângulos internos θ, 2θ e β.



a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo θ.

b) Prove que, se $c = 2a$, então $\beta = 90°$.

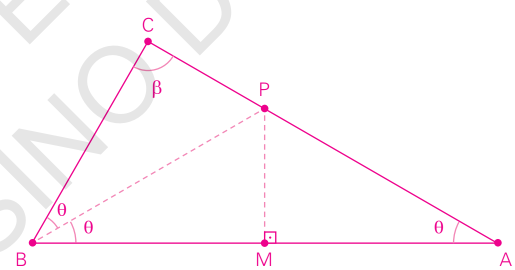
a) Podemos concluir que o triângulo é isósceles se $\beta = \theta$ ou $\beta = 2\theta$.

Portanto, no primeiro caso, temos $4\theta = 180° \rightarrow \theta = \frac{180°}{4} \rightarrow \theta = 45°$.

No segundo caso, temos $5\theta = 180° \rightarrow \theta = \frac{180°}{5} \rightarrow \theta = 36°$.

Logo, os valores possíveis para θ, são: $\theta = 36°$ e $\theta = 45°$.

b) Considere a figura, em que P é o pé da bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$.



Sendo os ângulos $M\hat{B}P$ e $M\hat{A}P$ congruentes, podemos concluir que o triângulo ABP é isósceles de base AB.

Logo, se M é o ponto médio de AB, então $\overline{BM} = \frac{2a}{2} = a$ e $MP \perp AB$.

Portanto, como $BC = a$, $\overline{BP}$ é lado comum e $M\hat{B}P \equiv C\hat{B}P$, os triângulos MBP e CBP são congruentes por LAL.

Então, temos $\beta = 90°$.

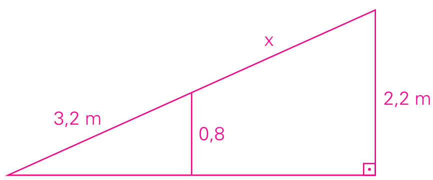
3. Enem C2-H8

A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 m. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 m e alcançou uma altura de 0,8 m.

A distância, em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

a) 1,16 metro
b) 3,0 metros
c) 5,4 metros
d) 5,6 metros
e) 7,04 metros

Primeiro, deve-se desenhar a rampa para visualizar melhor o problema.



$\frac{2,2}{0,8} = \frac{3,2 + x}{3,2} \to 0,8\,(3,2 + x) = 3,2 \cdot 2,2 \to$

$\to 2,56 + 0,8x = 7,04 \to 0,8x = 7,04 - 2,56 = 4,48 \to$

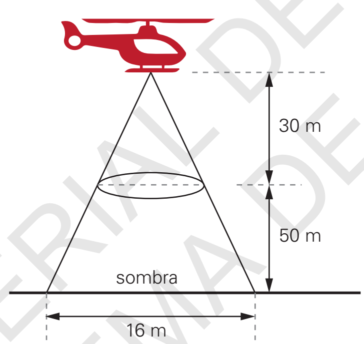
$\to x = \frac{4,48}{0,8} \to x = 5,6$

Portanto, a distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é 5,6 metros.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. Unirio-RJ – Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura anterior. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco mede, em m, aproximadamente:



a) 3,0
b) 3,5
c) 4,0
d) 4,5
e) 5,0

Observe, na imagem, que os triângulos formados são semelhantes. Para calcular a base do triângulo pequeno, podemos usar regra de três da seguinte maneira:

$\frac{x}{30} = \frac{16}{30 + 50}$

Repare que a altura do triângulo grande é a distância entre o helicóptero e o chão, que, na imagem, está dividida em duas partes pela presença do disco voador. Utilizando a propriedade fundamental das proporções, teremos:

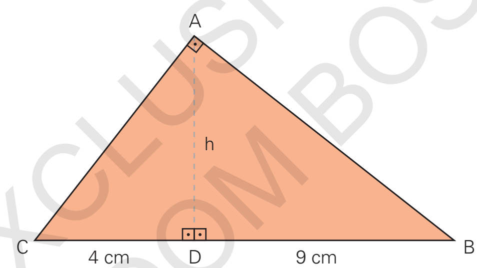
$\frac{x}{30} = \frac{16}{30 + 50} \to (30 + 50)x = 30 \cdot 16 \to 80x = 480 \to$

$\to x = \frac{480}{80}$

$\therefore x = 6$

Logo, o diâmetro do disco voador é 6 m. Como o raio é metade do diâmetro, então o raio do disco voador é 3 m.

5. Funcab-RJ – A figura abaixo (meramente ilustrativa e fora de escala) representa um triângulo ABC retângulo em A, dividido em dois triângulos, ACD e ABD, ambos retângulo sem D.



O valor, em cm, de AD = h, é?

Os triângulos CDA e ADB são semelhantes. Logo:

$\frac{4}{h} = \frac{h}{9} \to h \cdot h = 4 \cdot 9 \Rightarrow h^2 = \sqrt{36}$

$\therefore h = 6$ cm

6. FMP-RS (adaptado) – Os lados de um triângulo medem 13 cm, 14 cm e 15 cm, e sua área mede 84 cm². Considere um segundo triângulo semelhante ao primeiro, cuja área mede 336 cm². A medida do semiperímetro do segundo triângulo, em centímetros, é?

Seja 2p o perímetro desejado; como os triângulos são semelhantes e o perímetro do primeiro triângulo é igual a 13 + 14 + 15 = 42 cm, temos:

$\left(\frac{2p}{42}\right)^2 = \frac{336}{84} \to \left(\frac{2p}{42}\right)^2 = 4 \to \frac{2p}{42} = \sqrt{4} \to \frac{2p}{42} = 2 \to 2p = 84$

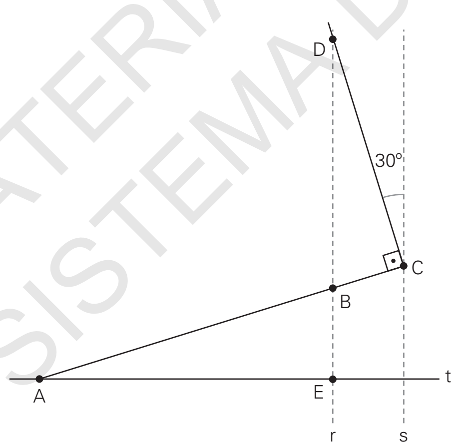
Portanto, 2 p = 84 cm.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. FGV-RJ – Em 2013, uma empresa exportou 600 mil dólares e, em 2014, exportou 650 mil dólares de um certo produto. Suponha que o gráfico das exportações y (em milhares de dólares) em função do ano x seja formado por pontos colineares. Desta forma, a exportação triplicará em relação à de 2013 no ano de:

a) 2036
b) 2038
c) 2035
d) 2037
e) 2034

8. FGV-RJ (adaptado) – Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas entre si, e perpendiculares à reta t. Sabe-se, ainda, que AB = 6 cm, CD = 3 cm, $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{CD}$ e à medida do ângulo entre $\overline{CD}$, e a reta s é 30°.



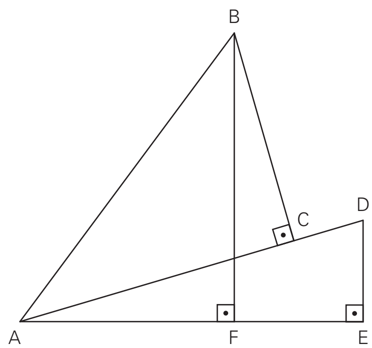
Fora de escala.

Nas condições descritas, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a?

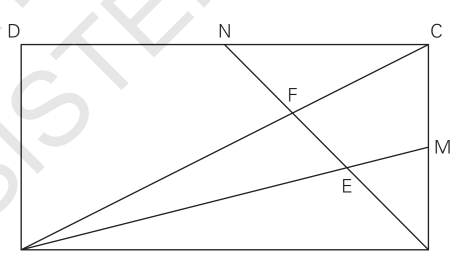
9. UNESP – Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm.

Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância dessa rede, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

10. UFPE – Na figura abaixo $\overline{AB} = \overline{AD} = 25$, $\overline{BC} = 15$ e $\overline{DE} = 7$. Os ângulos $D\hat{E}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{F}A$ são retos. Determine $\overline{AF}$.



11. Fuvest-SP – Na figura, o retângulo ABCD tem lados de comprimento $AB = 4$ e $BC = 2$. Sejam M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e N o ponto médio do lado $\overline{CD}$. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{AC}$ interceptam o segmento $\overline{BN}$ nos pontos E e F, respectivamente.



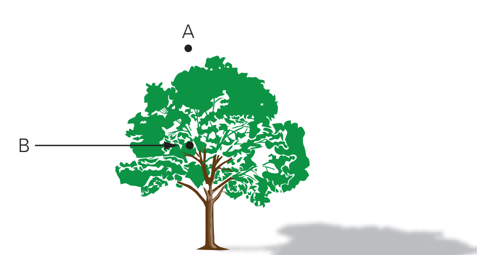
A área do triângulo AEF é igual a

a) $\dfrac{24}{25}$ **b)** $\dfrac{29}{30}$ **c)** $\dfrac{61}{60}$ **d)** $\dfrac{16}{15}$ **e)** $\dfrac{23}{20}$

12. FGV-RJ – Bem no topo de uma árvore de 10,2 metros de altura, um gavião casaca-de-couro, no ponto A da figura, observa atentamente um pequeno roedor que subiu na mesma árvore e parou preocupado no ponto B, bem abaixo do gavião, na mesma reta vertical em relação ao chão. Junto à árvore, um garoto fixa verticalmente no chão uma vareta de 14,4 centímetros de comprimento e, usando uma régua, descobre que a sombra da vareta mede 36 centímetros de comprimento.

Exatamente nesse instante ele vê, no chão, a sombra do gavião percorrer 16 metros em linha reta e ficar sobre a sombra do roedor, que não se havia movido de susto.

Calcule e responda: Quantos metros o gavião teve de voar para capturar o roedor, se ele voa verticalmente de A para B?

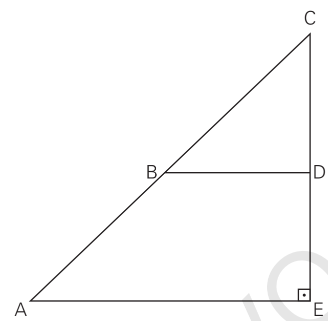


13. **IFSul-RS** – A sombra de uma torre mede 4,2 m de comprimento. Na mesma hora a sombra de um poste mede 3 m de altura e 12 cm de comprimento. Qual a altura da torre?

a) 95 m
b) 100 m
c) 105 m
d) 110 m

14. **Cefet-MG** – A figura abaixo tem as seguintes características:

- O ângulo $\hat{E}$ é reto;
- O segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento $\overline{BD}$;
- Os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DE}$ medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



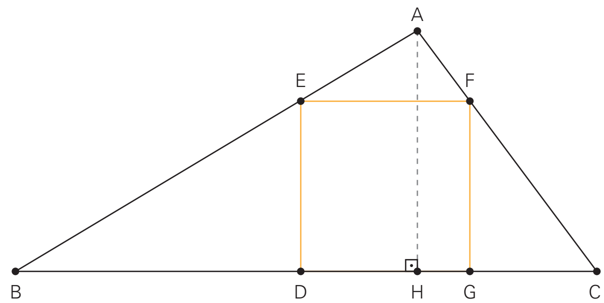
O segmento $\overline{AC}$, em unidades de comprimento, mede:

a) 8
b) 12
c) 13
d) $\sqrt{61}$
e) $5\sqrt{10}$

15. **UFRN** – Numa projeção de filme, o projetor foi colocado a 12 m de distância da tela. Isto fez com que aparecesse a imagem de um homem com 3 m de altura. Numa sala menor, a projeção resultou na imagem de um homem com apenas 2 m de altura. Nessa nova sala, a distância do projetor em relação à tela era de:

a) 18 m
b) 8 m
c) 36 m
d) 9 m

16. CFTMG – A figura a seguir apresenta um quadrado DEFG e um triângulo ABC cujo lado BC mede 40 cm e a altura AH, 24 cm.



A medida do lado desse quadrado é um número

a) par.

b) primo.

c) divisível por 4.

d) múltiplo de 5.

17. IFSul-RS – A sombra de uma torre mede 4,2 m de comprimento. Na mesma hora há a sombra de um poste de 3 m de altura e 12 cm de comprimento. Qual a altura da torre?

a) 95 m

b) 100 m

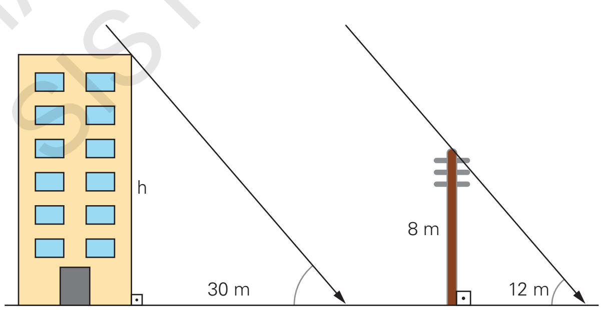
c) 105 m

d) 110 m

ESTUDO PARA O ENEM

18. IFPE C2-H8

Às 10 h 45 min de uma manhã ensolarada, as sombras de um edifício e de um poste de 8 metros de altura foram medidas ao mesmo tempo. Foram encontrados 30 metros e 12 metros, respectivamente, conforme a figura abaixo.



De acordo com as informações acima, a altura h do prédio é de

a) 12 metros.

b) 18 metros.

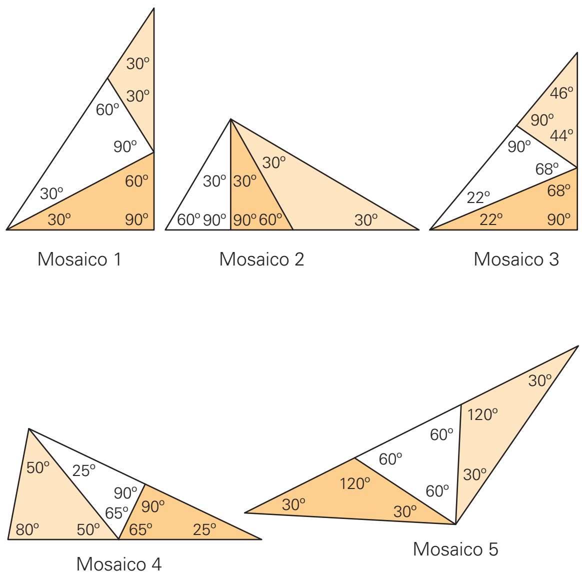
c) 16 metros.

d) 14 metros.

e) 20 metros.

19. Enem C2-H6

Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

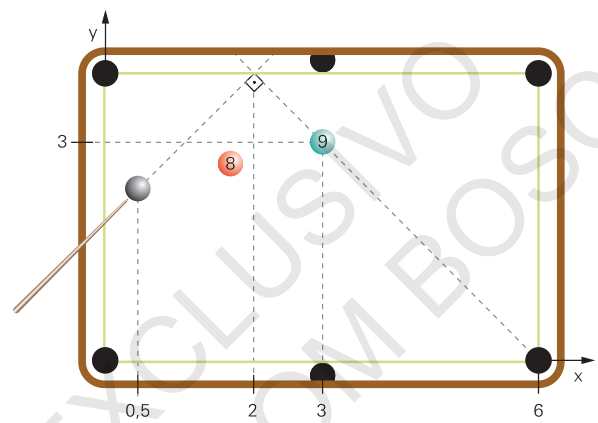


Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

20. Enem C2-H6

Em sua vez de jogar, um jogador precisa dar uma tacada na bola branca, de forma a acertar a bola 9 e fazê-la cair em uma das caçapas de uma mesa de bilhar. Como a bola 8 encontra-se entre a bola branca e a bola 9, esse jogador adota a estratégia de dar uma tacada na bola branca em direção a uma das laterais da mesa, de forma que, ao rebater, ela saia em uma trajetória retilínea, formando um ângulo de 90° com a trajetória da tacada, conforme ilustrado na figura.



Com essa estratégia, o jogador conseguiu encaçapar a bola 9. Considere um sistema cartesiano de eixos sobre o plano da mesa, no qual o ponto de contato da bola com a mesa define sua posição nesse sistema. As coordenadas do ponto que representa a bola 9 são (3; 3), o centro da caçapa de destino tem coordenadas (6; 0) e a abscissa da bola branca é 0,5, como representados na figura.

Se a estratégia deu certo, a ordenada da posição original da bola branca era

a) 1,3
b) 1,5
c) 2,1
d) 2,2
e) 2,5

9

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

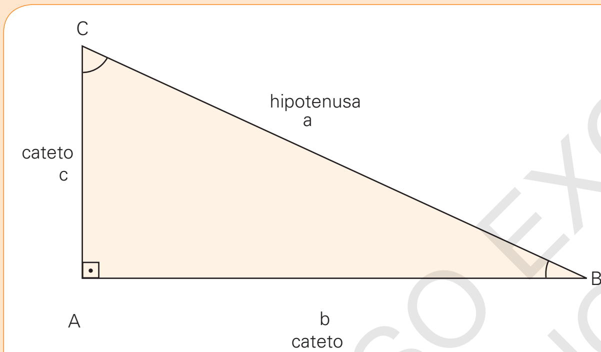
- Teorema de Pitágoras
- Diagonal de um quadrado
- Altura de um triângulo equilátero
- Triângulos retângulos semelhantes
- Relações métricas

HABILIDADES

- Reconhecer triângulos retângulos semelhantes.
- Resolver problemas aplicando as relações métricas e o teorema de Pitágoras.
- Resolver situação--problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

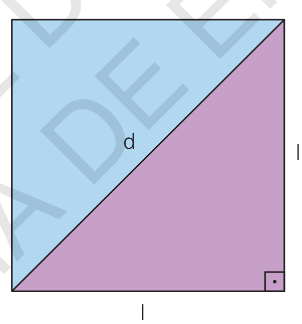
TEOREMA DE PITÁGORAS

O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

DIAGONAL DE UM QUADRADO



Como a = d; b = l; e c = l, temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

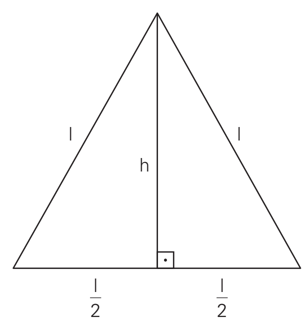
$d^2 = l^2 + l^2$

$d^2 = 2l^2$

$d = l\sqrt{2}$

$$d = l\sqrt{2}$$

ALTURA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

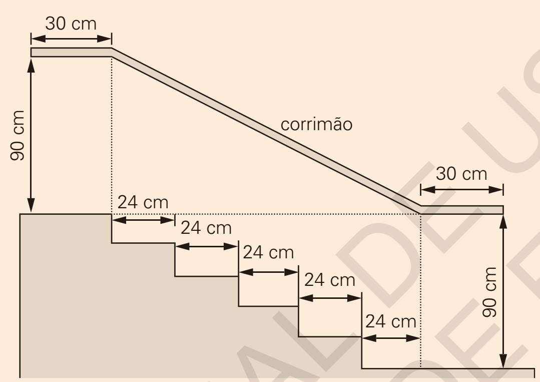


$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

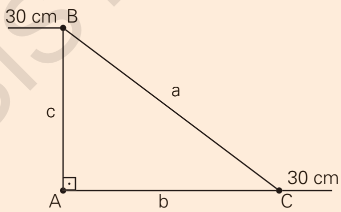
1. Enem C1-H2

Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a



a) 1,8 m.
b) 1,9m.
c) 2,0 m.
d) 2,1 m.
e) 2,2 m.

Resolução



L = comprimento total do corrimão

O segmento BC = a.

O segmento AB = c = 90 cm

O segmento AC = b = 5 · 24 = 120 cm

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 120^2 + 90^2 \rightarrow a^2 = 14\,400 + 8\,100 \rightarrow a^2 = 22\,500 \rightarrow a = \sqrt{22500} \rightarrow a = 150$

Logo, a = 150 cm. Então, L = 30 + 150 + 30 = 210.

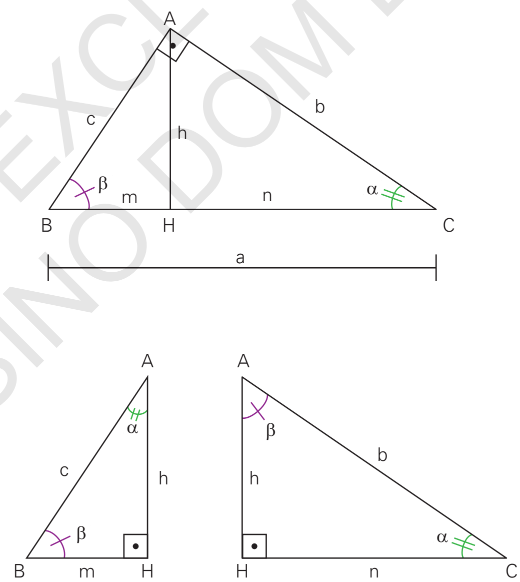
Portanto, L = 210 cm, ou seja, L = 2,1 m.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC}$ e altura $\overline{AH}$.



Dados:

$\overline{BC}$ = a (hipotenusa)
$\overline{AB}$ = c (cateto)
$\overline{AC}$ = b (cateto)
$\overline{AH}$ = h (altura)
$\overline{BH}$ = m (projeção do cateto c sobre a hipotenusa)
$\overline{CH}$ = n (projeção do cateto b sobre a hipotenusa)

Por meio das projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, é possível obter as seguintes relações métricas:

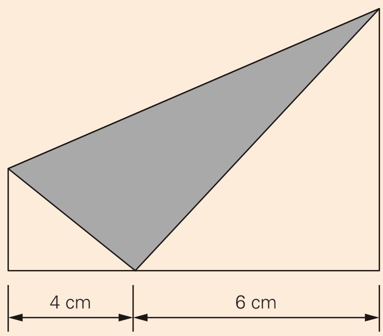
I. $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$

II. $h^2 = m \cdot n$

III. $a \cdot h = b \cdot c$

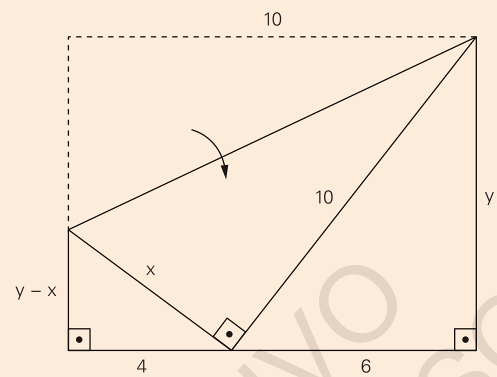
EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

ESPM-SP – Uma folha de papel retangular foi dobrada como mostra a figura abaixo. De acordo com as medidas fornecidas, a região sombreada, que é a parte visível do verso da folha, tem área igual a:



a) 24 cm^2
b) 25 cm^2
c) 28 cm^2
d) 35 cm^2
e) 36 cm^2

Resolução



$y^2 + 6^2 = 10^2 \leftrightarrow y = 8$

$x^2 = (8 - x)^2 + 4^2 \leftrightarrow x = 5$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} \rightarrow A = \dfrac{5 \cdot 10}{2} = 25$

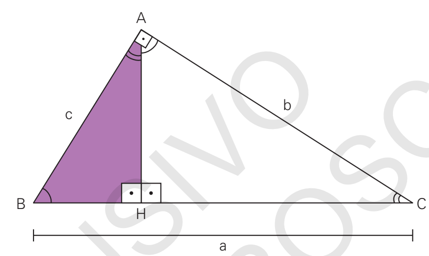
Portanto, $A = 25\ cm^2$.

ROTEIRO DE AULA

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

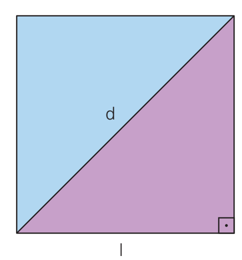
TEOREMA DE PITÁGORAS

$a^2 = \underline{b^2 + c^2}$



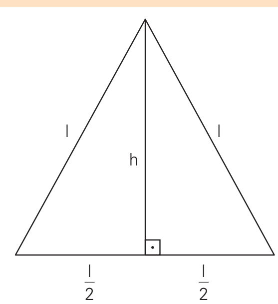
DIAGONAL DE UM QUADRADO

$d = \underline{l\sqrt{2}}$



ALTURA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

$h = \underline{\dfrac{l\sqrt{3}}{2}}$



RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO II

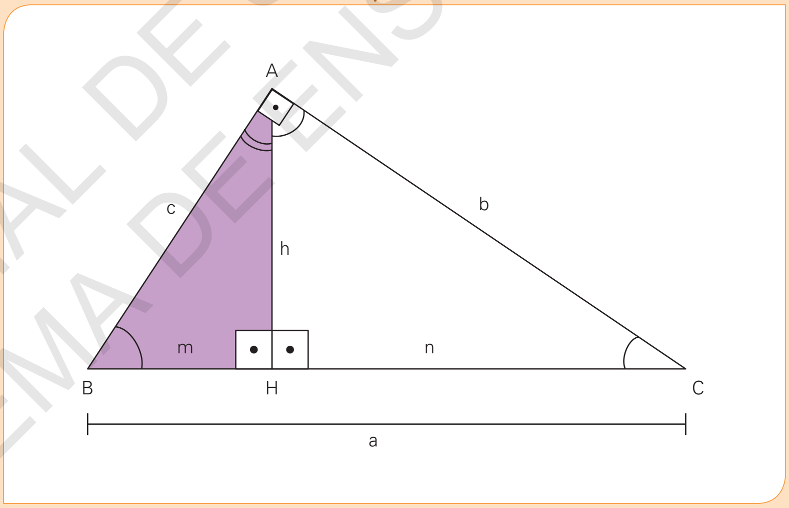
Relações métricas

$b^2 =$ a · n

$c^2 =$ a · m

$h^2 =$ m · n

$a \cdot h =$ b · c

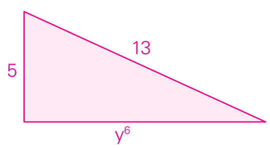


EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFAL – A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 13 cm. Determine o valor da medida do cateto maior sabendo que o cateto menor mede 5 cm.

a) 6 cm.
b) 8 cm.
c) 10 cm.
d) 11 cm.
e) 12 cm.

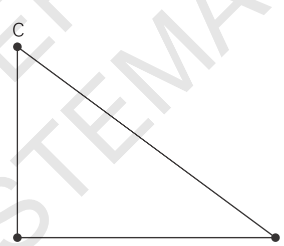
Dado:



Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, temos:
$a = 13$, $b = 5$ e $c = y$
$a^2 = b^2 + c^2$
$13^2 = 5^2 + y^2$
$y^2 = 169 - 25 = 144$
$y = \sqrt{144} = 12$
Logo, y = 12 cm.

2. Col. Pedro II - Observe o esquema a seguir, que representa certo trecho do oceano Atlântico na costa brasileira. Um navio de pesquisas, situado inicialmente no ponto B, deve seguir rumo ao ponto C, em linha reta. Sabe-se que a distância BC é igual a 10 km. No ponto A encontra-se uma ilha, e o navio deve parar, na sua trajetória, em um ponto o mais próximo possível dessa ilha, para que uma equipe de biólogos siga em um barco auxiliar a fim de coletar algumas espécies de plantas nativas para análise.

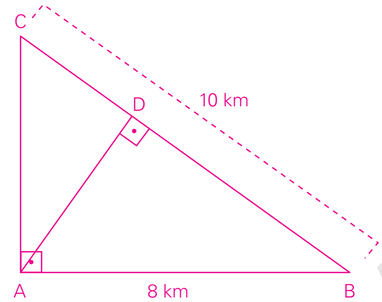
Considere que a região limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ seja plana e que o ângulo $B\hat{A}C$ meça 90°.



Se a distância do navio à ilha, ao iniciar sua trajetória em B, era de 8 km, podemos afirmar que, nesse percurso, a menor distância do navio à ilha será igual a

a) 5,2 km.
b) 5,0 km.
c) 4,8 km.
d) 3,6 km.

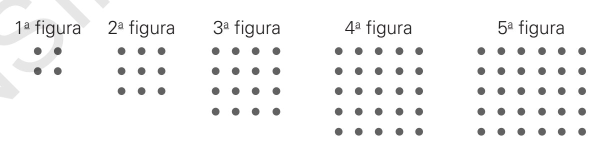
Admitindo que o ponto D, pertencente à hipotenusa, é o ponto mais próximo da ilha, situada no ponto A, temos a seguinte situação:



$\overline{AC}^2 + 8^2 = 10^2$
$\overline{AC}^2 = 10^2 - 8^2$
$AC = \sqrt{100 - 64}$
$AC = \sqrt{36}$
$AC = 6$
Calculando agora a medida AD, temos:
$10 \cdot AD = 6 \cdot 8$
$AD = 4{,}8$
Logo, a menor distância do navio até a ilha, no lado dos extremos B e C, será dada por AD = 4,8 km.

3. UERJ C2-H6

Segundo historiadores da matemática, a análise de padrões como os ilustrados a seguir possibilitou a descoberta das triplas pitagóricas.



Observe que os números inteiros 3^2, 4^2 e 5^2, representados respectivamente pelas 2ª, 3ª e 4ª figuras, satisfazem ao teorema de Pitágoras. Dessa forma, (3, 4, 5) é uma tripla pitagórica.

Os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e nª figuras determinam outra tripla pitagórica, sendo o valor de n igual a:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 17

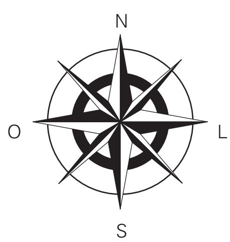
Desde que o número representado pela 4ª figura seja 52 e o representado pela 11ª figura seja 122, podemos concluir pelo teorema de Pitágoras que o valor de n para a próxima tripla ordenada será:
$(n + 1)^2 = 5^2 + 12^2$
$(n + 1)^2 = 25 + 144$
$(n + 1)^2 = 169$
$n = 12$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

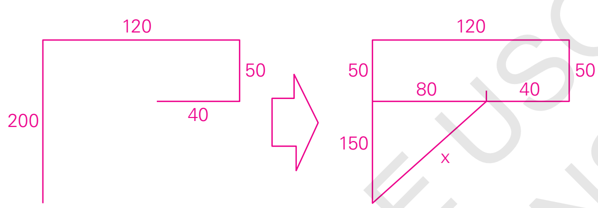
4. IFPE (adaptado) – Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram:

1. ande 200 metros na direção NORTE;
2. ande 120 metros na direção LESTE;
3. ande 50 metros na direção SUL;
4. ande 40 metros na direção OESTE.



Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa. Assim sendo, qual a distância calculada por Luiz?

Considere o esquema a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 150^2 + 80^2$

$x^2 = 22\,500 + 6\,400$

$x = \sqrt{28900}$

$x = 170$ m

5. ITA-SP – Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $(\sqrt{2} - 1)$ cm e a medida de $\overline{AD}$ é 1 cm, então $\overline{AC}$ mede, em cm,

a) $4\sqrt{2} - 5$ cm.

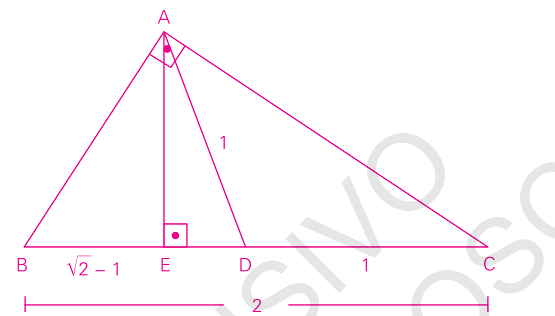
b) $3 - \sqrt{2}$ cm.

c) $\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}$ cm.

d) $3(\sqrt{2} - 1)$ cm.

e) $3\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$ cm.

Considere a figura a seguir.



No triângulo ABC, temos a seguinte relação entre os segmentos:

$AD = BD = CD = 1$

$AB^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

e

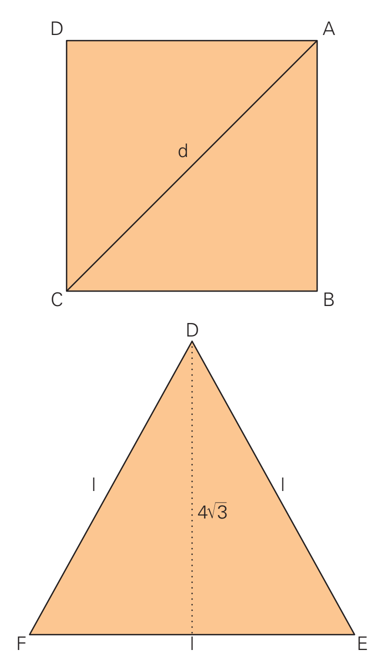
$AC^2 + AB^2 = 2^2$

$AC = \sqrt{4 - 2\cdot(\sqrt{2} - 1)}$

$AC = \sqrt{6 - 2\cdot\sqrt{2}}$

Portanto, $AC = \sqrt{6 - 2\cdot\sqrt{2}}$ cm.

6. Sistema Dom Bosco – Sabendo que o perímetro do quadrado ABCD é metade do perímetro do triângulo equilátero EFG, determine a medida da diagonal do quadrado.



Sendo a fórmula da altura do triângulo $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, podemos então descobrir o valor de seu lado. Logo: $4\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow l = 8$.

Portanto, o perímetro do triângulo será: $P_\Delta = 8 + 8 + 8 = 24$.

Como o perímetro do quadrado é metade do perímetro do triângulo, temos: $P_\Delta = \frac{P_\Delta}{2} = \frac{24}{2} = 12 \rightarrow P_\Delta = 12$

Tomando x como o valor do lado do quadrado, podemos calcular sua medida por $\frac{12}{4} = 3 \rightarrow x = 3$

Assim, a medida de sua diagonal será:

$d = x\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \rightarrow d = 3 \cdot \sqrt{2}$

$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow l = 8$

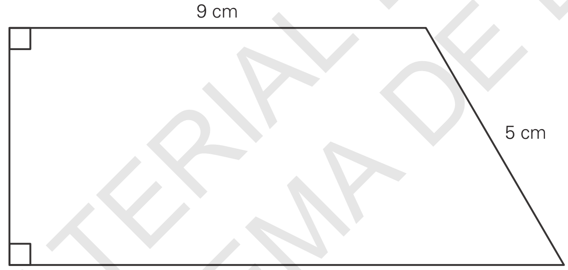
Logo, o perímetro do triângulo será: $P_\Delta = 8 + 8 + 8 = 24$.
Como o perímetro do quadrado é metade do perímetro do triângulo, temos: $P_\Delta = \frac{P_\Delta}{2} = \frac{24}{2} = 12 \rightarrow P_\Delta = 12$

Assim, o lado do quadrado mede $\frac{12}{4} = 3 \rightarrow x = 3$ e com isso calculamos a medida da diagonal do quadrado.
$d = x\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \rightarrow d = 3 \cdot \sqrt{2}$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Sistema Dom Bosco – A altura de um triângulo equilátero de lado de medida igual a 6 cm é equivalente à medida da diagonal de um quadrado. Qual a medida da diagonal do quadrado?

8. Unisinos-SP – Na figura abaixo, temos um trapézio retângulo cujas bases medem 9 cm e 12 cm e cujo lado não perpendicular às bases mede 5 cm.

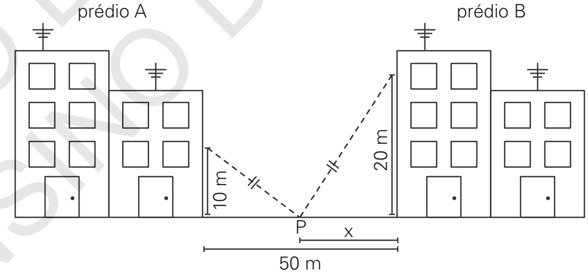


Qual o perímetro, em cm, desse trapézio?

a) 26.
b) 29.
c) 30.
d) 31.
e) 48.

9. CFTMG (adaptado) – Duas crianças, cada uma em um prédio diferente, brincam com canetas lasers nas janelas de seus apartamentos, apontando para um ponto na quadra situada entre os prédios. A criança do prédio A está a uma altura de 10 m, e a do prédio B, a uma altura de 20 m do chão. A distância entre os prédios é de 50 m.

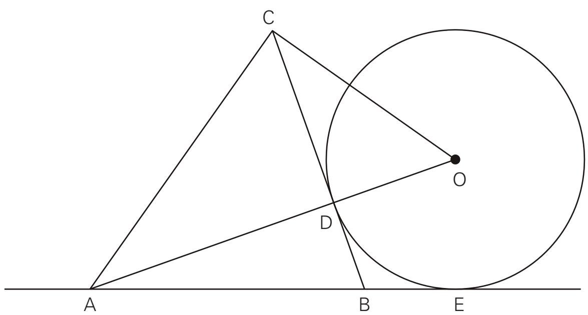
Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto P do pátio equidistante das crianças, tal como na ilustração abaixo:



A distância X, em metros, desse ponto até o prédio B é

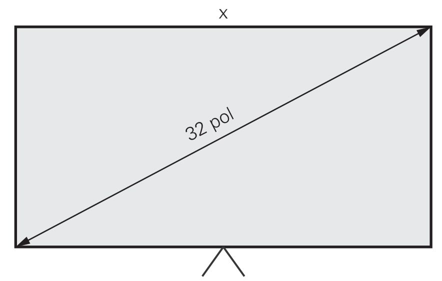
a) 22.
b) 23.
c) 25.
d) 28.

10. Fuvest-SP – Na figura abaixo, a circunferência de centro em O e raio r tangencia o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC no ponto D e tangencia a reta $\overline{AB}$ no ponto E. Os pontos A, D e O são colineares, AD = 2r e o ângulo ACO é reto. Determine, em função de r,



a) a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC;
b) a medida do segmento $\overline{CO}$.

11. PUC-RS – Considere a figura e o texto abaixo.



As medidas de comprimento e largura da tela de uma televisão, em geral, obedecem à proporção 16 : 9, sendo que o número de polegadas (1 pol = 2,5 cm) desse aparelho indica a medida da diagonal de sua tela.

Considerando essas informações, as medidas do comprimento e da largura, em centímetros, de uma TV de 32 polegadas, como mostra a figura, podem ser obtidas com a resolução do sistema:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

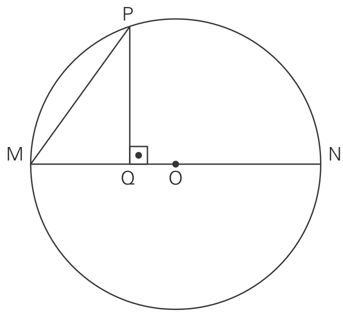
b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 1\,024 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 6\,400 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6\,400 \end{cases}$

12. Espcex-SP – Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm.



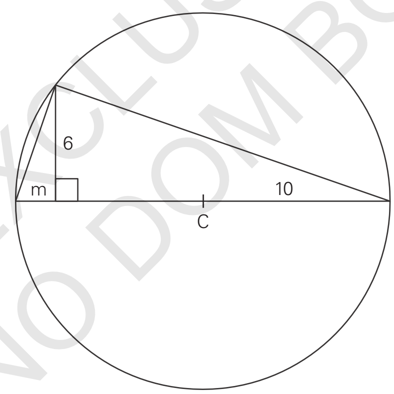
desenho ilustrativo – fora de escala

Qual é a medida, em centímetros, do segmento PQ?

13. IFAL – Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 6 cm e 8 cm.

a) 3,6 cm.
b) 4,8 cm.
c) 6,0 cm.
d) 6,4 cm.
e) 8,0 cm.

14. IFAL (adaptado) – Calcule o valor de m na figura:



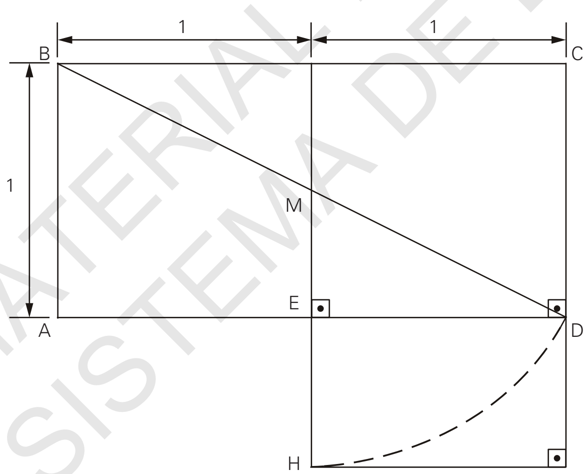
Onde C é o centro do círculo de raio 10.

15. Col. Pedro II (adaptado) – No famoso jogo para celular Pokémon Go, três pokémons, P_1, P_2 e P_3, estão posicionados, respectivamente, nos vértices de um triângulo, retângulo em P_1.

Sabe-se que $\overline{P_1P_2} = 12\sqrt{3}$ m e que a distância $\overline{P_2P_3}$ mede o dobro desse valor. Nesse momento do jogo, o treinador T está posicionado em um ponto do lado $\overline{P_1P_3}$, de forma que ele equidista de P_2 e P_3.

Considerando que o Pokémon P_3 permanecerá imóvel, qual a menor distância que o treinador deverá percorrer para alcançá-lo?

16. Cefet-MG – Nesta figura, ABCD é um retângulo e DH é um arco de circunferência cujo centro é o ponto M.



O segmento EH, em unidades de comprimento, mede

a) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$.

c) $\dfrac{1}{3}$.

d) $\dfrac{1}{2}$.

e) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

17. PUCCamp-SP – Quando a dimensão da tela de uma TV é indicada em polegadas, tal valor se refere à medida da diagonal do retângulo que representa a tela. Considere uma TV retangular de 16 polegadas e outra de 21 polegadas. Se as telas das duas TVs são retângulos semelhantes, então, a área da maior tela supera a da menor em, aproximadamente,

a) 36%.

b) 31%.

c) 72%.

d) 76%.

e) 24%.

ESTUDO PARA O ENEM

18. PUC-RJ C2-H6

Ao meio-dia, a formiga A está 3 km a oeste da formiga B. A formiga A está se movendo para o oeste a 3 km/h e a formiga B está se movendo para o norte com a mesma velocidade.

Qual a distância entre as duas formigas às 14 h?

a) $\sqrt{17}$ km

b) 17 km

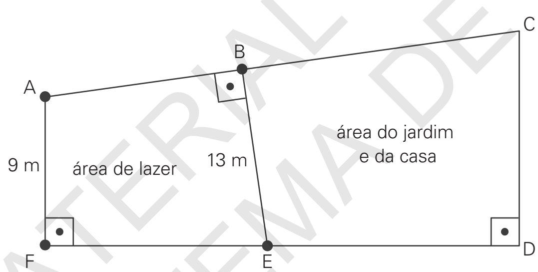
c) $\sqrt{51}$ km

d) $\sqrt{117}$ km

e) 117 km

19. UNESP (adaptado) C5-H21

A figura, fora de escala, representa o terreno plano onde foi construída uma casa.



Sabe-se do quadrilátero ABEF que:

- seus ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{F}E$ são retos.
- $\overline{AF}$ mede 9 m e $\overline{BE}$ mede 13 m.
- o lado $\overline{EF}$ é 2 m maior que o lado $\overline{AB}$.

Nessas condições, quais são as medidas, em metros, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$?

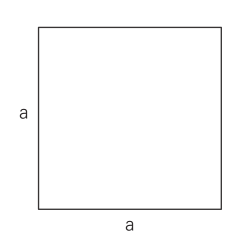
a) $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 23$ m
b) $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 21$ m
c) $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 24$ m
d) $\overline{AB} = 23$ m e $\overline{EF} = 23$ m
e) $\overline{AB} = 23$ m e $\overline{EF} = 21$ m

20. UPF-RS C2-H8

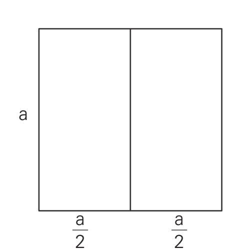
Um quadrilátero áureo apresenta um valor especial para a razão entre as suas medidas da base (lado maior) e da altura (lado menor).

Os passos para a construção de um quadrilátero áureo são:

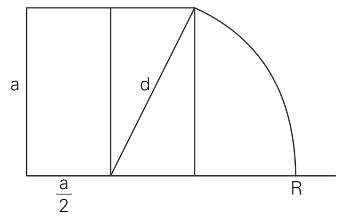
1. Construir um quadrado de lado a.



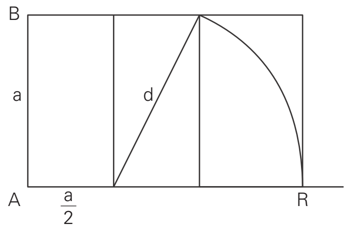
2. Dividir esse quadrado em dois retângulos iguais.



3. Traçar a diagonal do segundo retângulo e, com o compasso, marcar o ponto R sobre a horizontal.



4. Dessa forma, ficam definidas as medidas da base, $\overline{AR} = \frac{a}{2} + d$, e da altura, $\overline{AB} = a$, desse retângulo.



Sendo assim, a razão entre a medida da base e da altura do quadrilátero áureo é:

a) $1 + \sqrt{5}$

b) $1 + \sqrt{2}$

c) $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{a\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}$

10 ÁREA DE FIGURAS PLANAS - PARALELOGRAMO

- Retângulo
- Quadrado
- Área do paralelogramo
- Relações entre unidades de medida

HABILIDADES

- Identificar os elementos do paralelogramo, do retângulo e do quadrado.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

ÁREA DE FIGURAS PLANAS

A área de um retângulo é igual ao produto da medida de seu comprimento (base) pela medida de sua largura (altura).

$$A = b \cdot h$$

ÁREA DE QUADRADOS

A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado, já que ele tem lados com medidas iguais.

Ou seja, a fórmula geral para calcular a área de um quadrado é $A = l^2$. Perceba que aqui a letra l (referente a lado) não confere com o símbolo usado nas figuras abaixo.

Podemos afirmar que esse quadrado tem lado medindo 3 u.c. Logo:

$$A = (3\text{ u.c.}) \cdot (3\text{ u.c.}) = (3\text{ u.c.})^2 = 9\text{ u.a.}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Udesc – Para divulgar seus cursos de graduação, uma universidade deseja confeccionar alguns panfletos. Sabe-se que as dimensões de cada panfleto são 12 cm × 18 cm e que as margens superior, inferior, direita e esquerda devem ser iguais a x cm. Se a maior área de impressão em cada panfleto é 187 cm², então x é igual a:

a) 0,5 cm
b) 1 cm
c) 14,5 cm
d) 0,25 cm
e) 2 cm

Resolução

Analisando as informações, a área de impressão será (12 – 2x) cm e (18 – 2x) cm.

Como a maior área de impressão em cada panfleto é 187 cm², temos:

$(12 - 2x) \cdot (18 - 2x) = 187$

$4x^2 - 60x + 29 = 0$

$a = 4$

$b = -60$

$c = 29$

$\Delta = (-60)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 29 = 3\,136$

$$x = \frac{-(-60) \pm \sqrt{3\,136}}{2 \cdot 4}$$

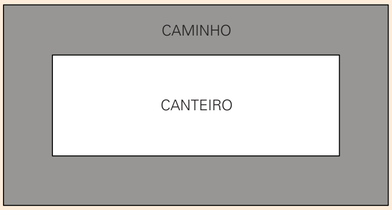
$$x = \frac{60 \pm 56}{8}$$

$$x_I = \frac{60 + 56}{8} = \frac{116}{8} = 14{,}5$$

$$x_{II} = \frac{60 - 56}{8} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Logo, x = 0,5 cm

2. UFSJ-MG – Deseja-se construir um caminho cimentado de largura constante em torno de um canteiro retangular de 20 metros de comprimento por 12 metros de largura, como se pode ver na figura a seguir.



O material disponível para o serviço só é suficiente para cimentar uma área de 68 metros quadrados. A respeito da medida da largura máxima desse caminho, utilizando-se todo o material disponível para isso, é CORRETO afirmar que ela é

a) maior que 1 metro e menor que 2 metros.
b) menor que 1 metro.
c) exatamente igual a 1 metro.
d) exatamente igual a 2 metros.

Resolução

Sendo x a largura do caminho, a área a ser cimentada será de:

$(20 + 2x) \cdot (12 + 2x) - 20 \cdot 12 = 68$

$x^2 = 16x - 17 = 0$

$\Delta = (16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17) = 324$

$$x = \frac{-(16) \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-16 \pm 18}{2}$$

$$x_I = \frac{-16 + 18}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_{II} = \frac{-16 - 18}{2} = \frac{-34}{2} = -17$$

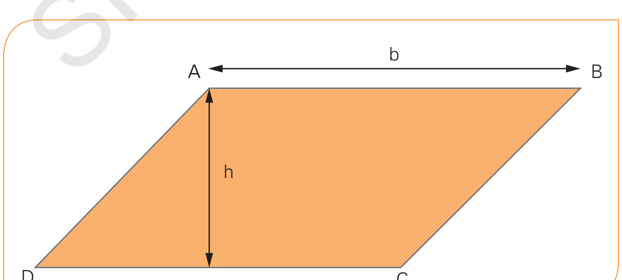
Logo, a medida máxima da largura do caminho será de 1 metro.

PARALELOGRAMOS

ÁREA DO PARALELOGRAMO

A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela medida da altura relativa.

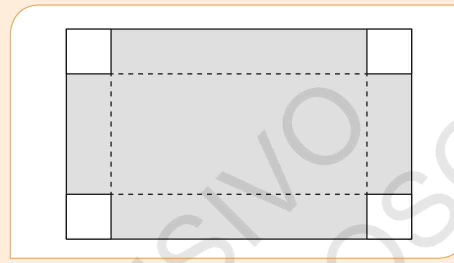
Considere o paralelogramo **ABCD** de base **b** e altura relativa **h**, conforme a figura.



$$A_{ABCD} = A_{ABEF} = b \cdot h$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. PUC-RJ – De uma folha de papelão de lados de medidas 23 e 14 foram retirados, dos quatro cantos, quadrados de lado de medida 3 para construir uma caixa (sem tampa) dobrando o papelão nas linhas pontilhadas.



a) Determine o perímetro da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.
b) Determine a área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.
c) Determine o volume da caixa formada.

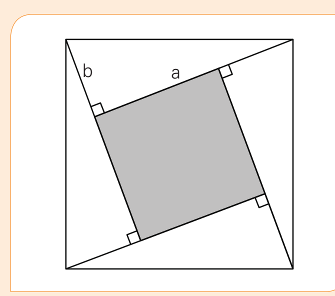
Resolução

a) O perímetro da folha após a retirada dos quatro cantos é $2 \cdot [(23 - 6) = (14 - 6)] + 8 \cdot 3 = 74$ u.c.

b) A área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos é dada por $23 \cdot 14 - 4 \cdot 3^2 = 322 - 36 = 286$ u.a.

c) A caixa formada tem dimensões $17 \cdot 8 \cdot 3$. Logo, seu volume é igual a $17 \cdot 8 \cdot 3 = 408$ u.v.

2. UFRGS-RS – Na figura abaixo, os triângulos retângulos são congruentes e possuem catetos com medidas a e b.



A área da região sombreada é

a) 2ab.
b) $a^2 + b^2$.
c) $a^2 + 2ab + b^2$.
d) $a^2 - 2ab + b^2$.
e) $a^2 - b^2$.

Resolução

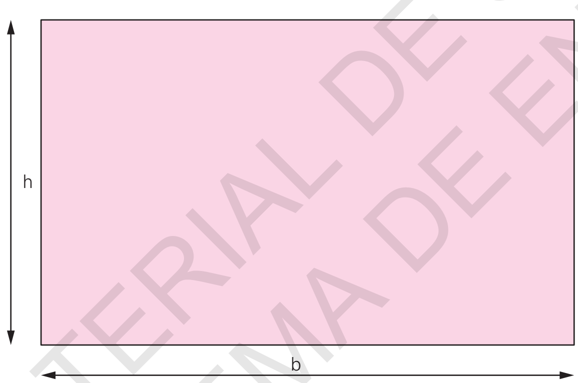
A área da região sombreada corresponde à área do quadrado de lado a – b. Ou seja: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS I

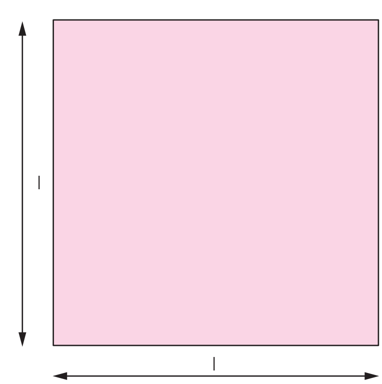
Retângulo

$A = b \cdot h$



Quadrado

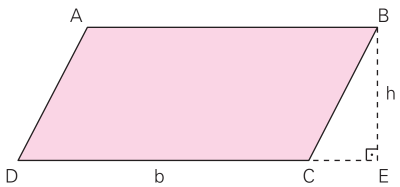
$A = l^2$



ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - PARALELOGRAMOS

$A =$ $b \cdot h$



$1\ m^2 =$ 10^4 cm^2

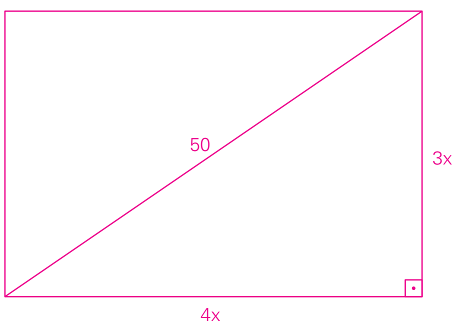
$1\ m^2 =$ 10^2 dm^2

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUCCamp-SP (adaptado) – A medida anunciada da tela de monitor retangular é a medida de sua diagonal, normalmente expressa em polegadas. A proporção entre a largura e a altura de uma dessas telas de 50 polegadas é 4:3. Qual a área dessa tela, em unidade polegadas quadradas?

As dimensões da tela são 4x e 3x, sabendo-se que a razão entre elas é de 4 : 3.

A figura abaixo representa a tela:



Utilizando o teorema de Pitágoras: $(3x)^2 + (4x)^2 = 50^2 \rightarrow 25x^2 = 2\,500 \rightarrow$ $\rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$.

$(3x)^2 + (4x)^2 = 50^2$

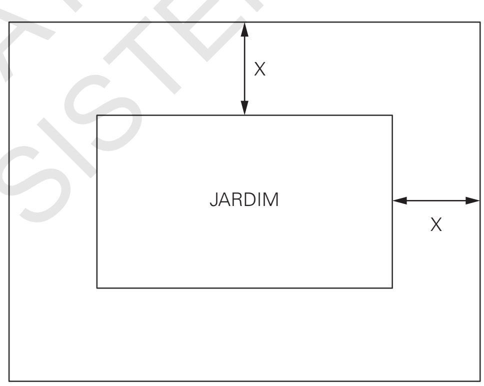
$9x^2 + 16x^2 = 2\,500$

$25x^2 - 2\,500 = 0$

$x = 10$

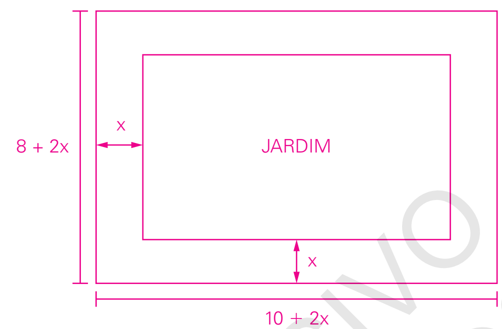
Logo, as dimensões do retângulo são 40 e 30 polegadas. A área, em polegadas quadradas, será dada por: $A = 30 \cdot 40 = 1\,200$.

2. PUC-RJ (adaptado) – Um terreno de 120 m² contém um jardim central de 8 m × 10 m. Em volta do jardim, existe uma calçada de largura X, conforme a figura abaixo:



Qual é o valor de X, em metros?

Dimensões do terreno: 8 + 2x e 10 + 2x. Sendo assim, a área será dada por:



$(8 + 2x) \cdot (10 + 2x) = 120$

$80 + 16x + 20x + 4x^2 - 120 = 0$

$4x^2 + 36x - 40 = 0$

$a = 4;\ b = 36;\ c = -40$

$\Delta = (36)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-40) = 1\,936$

$x = \dfrac{-36 \pm \sqrt{1936}}{2 \cdot 4}$

$x = \dfrac{-36 \pm 44}{8}$

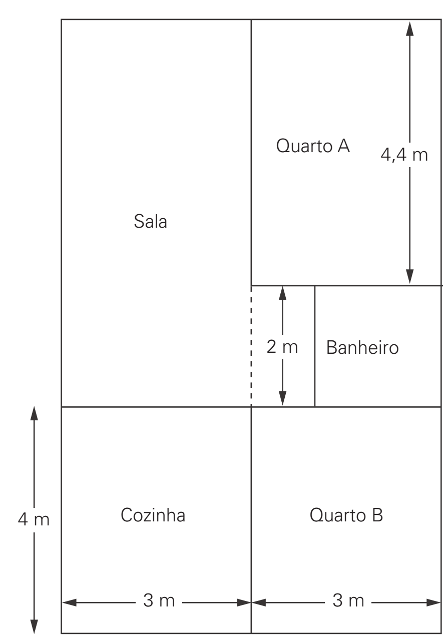
$x_I = \dfrac{-36 + 44}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

$x_{II} = \dfrac{-36 - 44}{8} = \dfrac{-80}{8} = -10$

Como não é possível ter medida negativa, x = 1 metro.

3. Enem **C2-H8**

A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 m, e a das paredes internas, 0,10 m.



Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída.

O valor do IPTU desse imóvel, em real, é

a) 250,00.
b) 250,80.
c) 258,64.
d) 276,48.
e) 286,00.

As dimensões da casa são:
$6 + (2 \cdot 0{,}2) + 0{,}1 = 6{,}5$ m
$10{,}4 + (2 \cdot 0{,}2) + 0{,}1 = 11$ m
Logo, concluímos que encontramos o valor de $4 \cdot 6{,}5 \cdot 11 = 286$.
Portanto, o preço a ser pago será de R$ 286,00.
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. Enem – O prefeito de uma cidade deseja promover uma festa popular no parque municipal para comemorar o aniversário de fundação do município. Sabe-se que esse parque possui formato retangular, com 120 m de comprimento por 150 m de largura. Além disso, para segurança das pessoas presentes no local, a polícia recomenda que a densidade média, num evento dessa natureza, não supere quatro pessoas por metro quadrado.

Seguindo as recomendações de segurança estabelecidas pela polícia, qual é o número máximo de pessoas que poderão estar presentes na festa?

a) 1 000
b) 4 500
c) 18 000
d) 72 000
e) 120 000

Com os dados, temos: $\text{Área}_{\text{parque}} = 120 \cdot 150 = 18\,000$ m².
Quantidade de pessoas por m² = 4 pessoas.
Sendo assim, o público total é igual a $18\,000 \cdot 4 = 72\,000$ pessoas.

5. Unisc-RS – O Principado de Mônaco é um microestado situado no sul da França. Possui, aproximadamente, uma área de 2 km², sendo o segundo menor Estado do mundo, atrás apenas do Vaticano. Se o território do Principado de Mônaco tivesse a forma de um quadrado, então a medida de seus lados estaria entre

a) 440 m e 450 m.
b) 1 140 m e 1 150 m.
c) 1 410 m e 1 420 m.
d) 4 470 m e 4 480 m.
e) 14 140 m e 14 150 m.

L é o lado do quadrado cuja área equivale à área do Principado de Mônaco. Sendo assim: $2 \text{ km}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.
Utilizando $\sqrt{2} \cong 1{,}414$, temos:
$L^2 = 2 \cdot 10^6$
$L = \sqrt{2} \cdot 10^3$
$L = 1\,414$ m
Logo: $1\,410 \text{ m} < L < 1\,420$ m.

6. Col. Pedro II (adaptado) – O tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças com as quais podemos formar várias figuras, utilizando todas as peças e sem sobrepô-las.

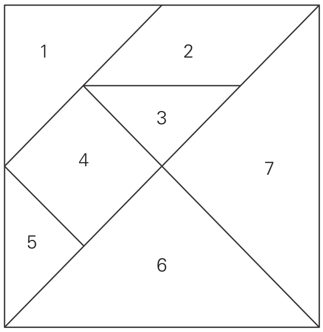
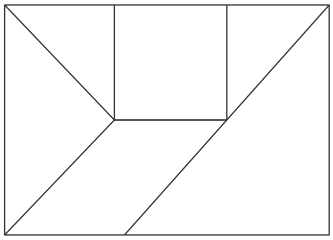


Fig. 1 – Triângulo retângulo isósceles médio
Fig. 2 – Paralelogramo
Fig. 3 e 5 – Triângulos retângulos isósceles congruentes
Fig. 4 – Quadrado
Fig. 6 e 7 – Triângulos retângulos isósceles congruentes

O retângulo a seguir foi formado por seis dessas sete peças.



Qual a razão entre a área desse retângulo e a área do quadrado inicial?

Podemos notar que, para formar o retângulo, não precisamos utilizar o triângulo 7, que está representando $\frac{1}{4}$ da área do quadrado.

É possível considerarmos a área do quadrado como A e encontrar a razão pedida da seguinte maneira:

Figura 1

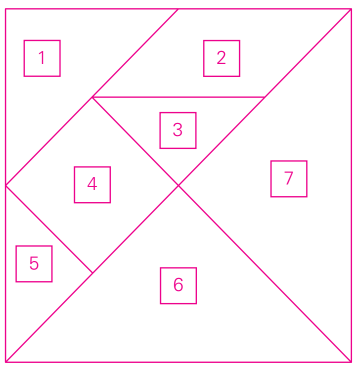
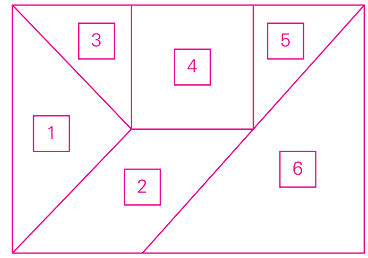


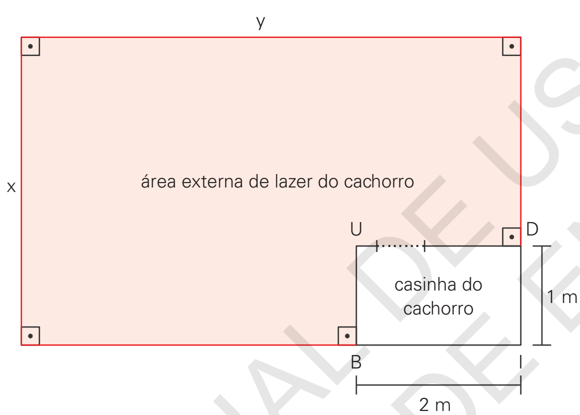
Figura 2



$$\frac{\text{área do retângulo}}{\text{área do quadrado}} = \frac{A - \frac{A}{4}}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UNESP – A figura representa, em vista superior, a casinha de um cachorro (retângulo BIDU) e a área externa de lazer do cachorro, cercada com 35 metros de tela vermelha totalmente esticada.



Calcule a área externa de lazer do cachorro quando x = 6 m. Determine, algebricamente, as medidas de x e y que maximizam essa área, mantidos os ângulos retos indicados na figura e as dimensões da casinha.

8. UEPG-PR – Um terreno tem a forma de um triângulo retângulo. Se seu perímetro mede 40 m e o menor lado mede 8 m, assinale o que for correto.

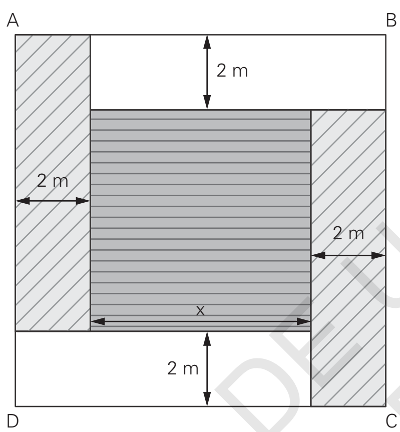
01) A área desse terreno é maior que 50 m^2.

02) O maior lado desse terreno mede 17 m.

04) Esse terreno tem a mesma área de um terreno retangular com 10 m de comprimento e 6 m de largura.

08) A soma dos dois menores lados desse terreno é menor que 30 m.

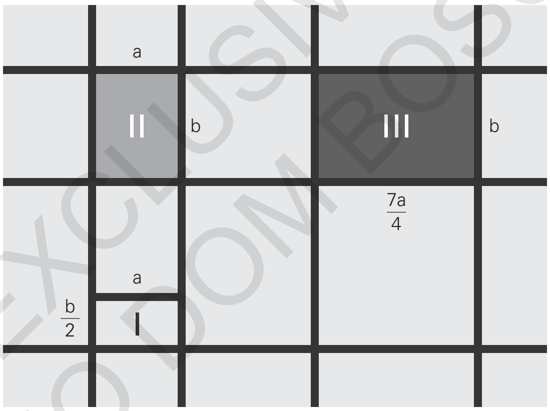
9. UNESP – Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada ABCD com dois tipos de papel, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais. O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado x, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.



Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então x, em metros, é igual a

a) $1 + 2\sqrt{3}$
b) $2 + 2\sqrt{3}$
c) $2 + \sqrt{3}$
d) $1 + \sqrt{3}$
e) $4 + \sqrt{3}$

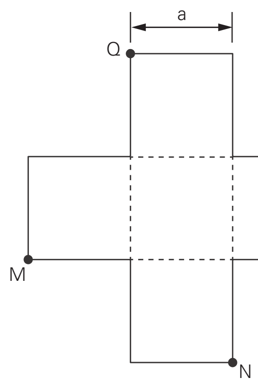
10. PUCCamp-SP – A figura abaixo é a reprodução de uma obra de Mondrian.



Junto a alguns lados dos retângulos estão marcadas referências às medidas de seus lados. A soma das áreas dos retângulos I e II corresponde, da área do retângulo III, aproximadamente, a

a) 78%.
b) 86%.
c) 81%.
d) 92%.
e) 74%.

11. Mackenzie-SP



A figura acima é formada por quadrados de lados a.

A área do quadrilátero convexo de vértices M, N, P e Q é

a) $6a^2$
b) $5a^2$
c) $4a^2$
d) $4\sqrt{3}a^2$
e) $4\sqrt{5}a^2$

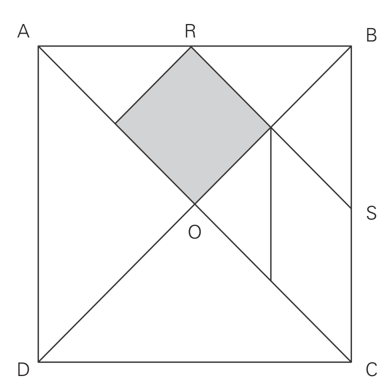
12. UPE (adaptado) – Em torno de um canteiro retangular de 12 m de comprimento por 8 m de largura, pretende-se construir uma calçada. Qual deve ser a largura máxima dessa calçada, se o material disponível só é suficiente para cimentar uma área de 69 m²?

13. PUC-RS (adaptado) – A área ocupada pela arena do Grêmio, no bairro Humaitá, em Porto Alegre, é de 200 000 m², e o gramado do campo de futebol propriamente dito tem dimensões de 105 m por 68 m. Qual a área aproximada do terreno que excede à do campo?

14. IFAL – A partir de um quadrado de lado x, obtém-se um retângulo aumentando 3 em uma dimensão e diminuindo 3 na outra dimensão. A expressão que melhor representa a área desse retângulo é:

a) 2^x.
b) $x^2 - 9$.
c) $x^2 + 6x + 9$.
d) $x^2 - 6x + 9$.
e) $x^2 + 9$.

15. UPF-RS – No quadrado ABCD de lado x, representado na figura a seguir, os pontos R e S são pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente, e O é o encontro das duas diagonais. A razão entre a área do quadrado pequeno (pintado) e a área do quadrado ABCD é:



a) $\frac{1}{16}$

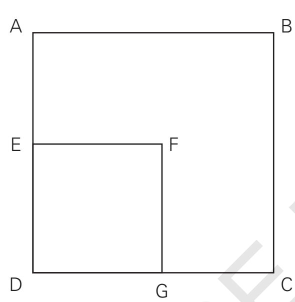
b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{4}$

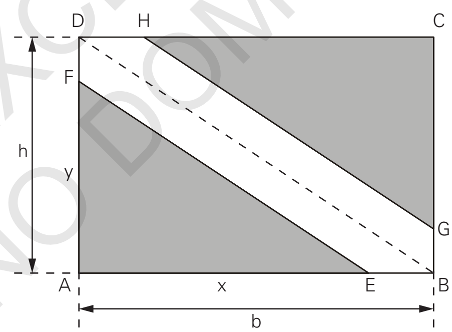
16. IFAL – Dados os quadrados abaixo, com lados x para o maior e y para o menor, conforme figura:



Qual das expressões abaixo representa a diferença entre as áreas dos quadrados?

a) $(x + y)(x - y)$.
b) $(x - y)^2$.
c) $(x + y)^2$.
d) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
e) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

17. Insper-SP (adaptado) – Considere o retângulo ABCD da figura, de dimensões $\overline{AB} = b$ e $\overline{AD} = h$, que foi dividido em três regiões de áreas iguais pelos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$.



As retas $\overline{EF}$, $\overline{BD}$ e $\overline{GH}$ são paralelas. Dessa forma, sendo $\overline{AE} = x$ e $\overline{AF} = y$, qual a razão $\frac{x}{b}$?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C2-H8

Uma empresa de manutenção de jardins foi contratada para plantar grama em um campo de futebol retangular cujas dimensões são 70 m × 100 m. A grama que será utilizada é vendida em tapetes retangulares de dimensões 40 cm × 125 cm.

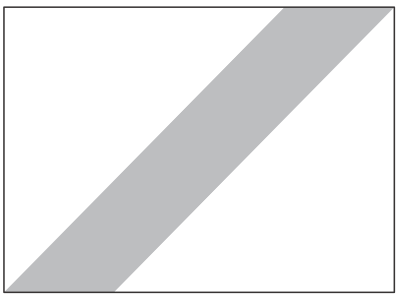
Quantos tapetes de grama, no mínimo, serão necessários para cobrir todo o campo de futebol?

a) 103
b) 140
c) 7 000
d) 10 303
e) 14 000

19. Enem C3-H12

Uma família possui um terreno retangular com 18 metros de largura e 24 metros de comprimento. Foi necessário demarcar nesse terreno dois outros iguais, na forma de triângulos isósceles, sendo que um deles será para o filho e o outro para os pais. Além disso, foi demarcada uma área de passeio entre os dois novos terrenos para o livre acesso das pessoas.

Os terrenos e a área de passeio são representados na figura.

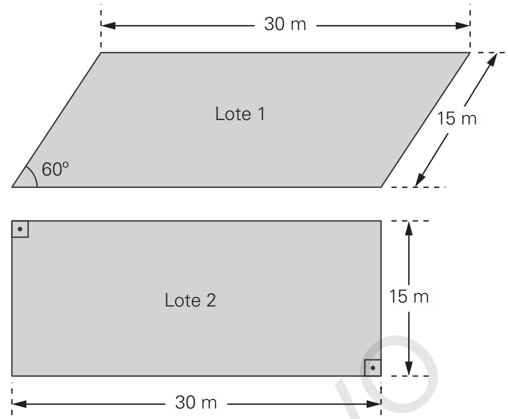


A área de passeio calculada pela família, em metros quadrados, é de

a) 108
b) 216
c) 270
d) 288
e) 324

20. Enem C2-H9

Um casal e seus dois filhos saíram, com um corretor de imóveis, com a intenção de comprar um lote onde futuramente construiriam sua residência. No projeto da casa que esta família tem em mente irão necessitar de uma área de pelo menos 400 m². Após algumas avaliações, ficaram de decidir entre os lotes 1 e 2 da figura, em forma de paralelogramos, cujos preços são R$ 100.000,00 e R$ 150.000,00, respectivamente.



Use $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 1,7 como aproximações, respectivamente, para sen 60°, cos 60° e $\sqrt{3}$.

Para colaborarem na decisão, os envolvidos fizeram as seguintes argumentações:

Pai: Devemos comprar o Lote 1, pois, como uma de suas diagonais é maior do que as diagonais do Lote 2, o Lote 1 também terá maior área;

Mãe: Se desconsiderarmos os preços, poderemos comprar qualquer lote para executar nosso projeto, pois, tendo ambos o mesmo perímetro, terão também a mesma área;

Filho 1: Devemos comprar o Lote 2, pois é o único que tem área suficiente para a execução do projeto;

Filho 2: Devemos comprar o Lote 1, pois, como os dois lotes possuem lados de mesma medida, terão também a mesma área, porém o Lote 1 é mais barato;

Corretor: Vocês devem comprar o Lote 2, pois é o que tem menor custo por metro quadrado.

A pessoa que argumentou corretamente para a compra do terreno foi o(a)

a) pai.
b) mãe.
c) filho 1.
d) filho 2.
e) corretor.

11

ÁREA DE FIGURAS PLANAS I - TRIÂNGULOS

- Área do triângulo
- Área do triângulo em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido entre eles
- Casos particulares de áreas de triângulos
- Fórmula de Heron
- Área de um triângulo em função da circunferência inscrita
- Fórmula da área em função do raio da circunferência circunscrita

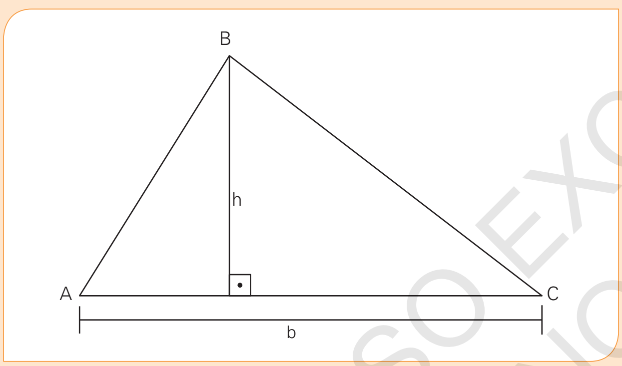
HABILIDADES

- Identificar os elementos do triângulo.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solução de problemas do cotidiano.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.

ÁREA DO TRIÂNGULO

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa.

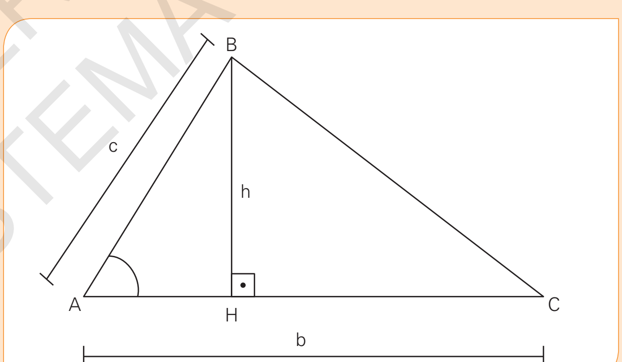
Considere um triângulo **ABC**, cuja base $\overline{AC} = b$; a altura relativa a essa base mede **h**, conforme a figura.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DA MEDIDA DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES

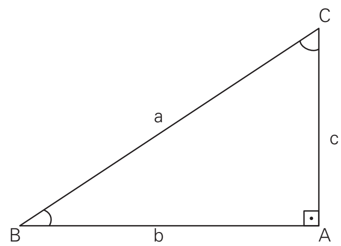
No triângulo **ABC**, o segmento $\overline{BH}$ corresponde à altura **h**. Como já estudamos em módulos anteriores, conhecendo a medida do ângulo Â, é possível calcularmos o valor de **h**.



$$\text{sen } \hat{A} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$

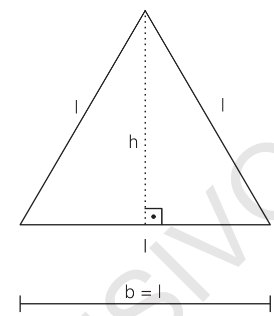
CASOS PARTICULARES DE ÁREAS DE TRIÂNGULOS



$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

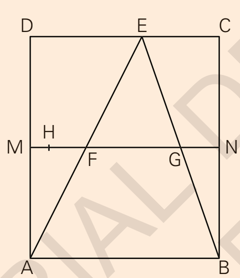
Vimos em módulos anteriores que a altura relativa à base de um triângulo equilátero corresponde a $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.



$$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UFJF-MG – No retângulo ABCD mostrado na figura abaixo, E pertence ao segmento $\overline{DC}$, M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC, respectivamente; F e G são os pontos de interseção do segmento $\overline{MN}$ com os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{EB}$, respectivamente.



Sabendo que a área do triângulo EFG mede 5 cm² e que H é um ponto do segmento $\overline{MN}$, qual é a medida da área do triângulo ABH?

a) 5 cm²
b) $\frac{15}{2}$ cm²
c) 10 cm²
d) $5\sqrt{5}$ cm²
e) 15 cm²

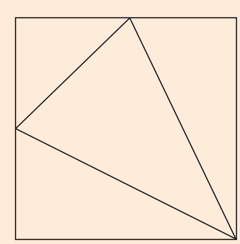
Resolução

Sabemos que AD II BC e M e N são os pontos médios dos segmentos AD e BC. Então, $\overline{FG}$ é a base média do triângulo AEB. Logo, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{FG}$ e $\overline{AM} = \overline{DM}$.

Sendo assim, a área do triângulo AHB é dada por:

$$(AHB) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AM}}{2} = \frac{2 \cdot \overline{FG}\,\overline{DM}}{2} = 2 \cdot (EFG) = 2 \cdot 5 =$$
$= 10$ cm².

2. PUC-MG – Para fazer um modelo de ladrilho, certo desenhista une um dos vértices de um quadrado aos pontos médios dos lados que não contêm esse vértice, obtendo um triângulo isósceles. A razão entre a medida da área desse triângulo e a medida da área desse quadrado é igual a:



a) 0,350
b) 0,375
c) 0,380
d) 0,385

Resolução

Área do triângulo:

$$L^2 - 2\,\frac{\left(\frac{L}{2} \cdot L\right)}{2} - \frac{\frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2}}{2} \rightarrow L^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{8L^2 - 4L^2 - L^2}{8} \rightarrow \frac{3L^2}{8}$$

Razão:

$$\frac{\frac{3L^2}{8}}{L^2} \rightarrow \frac{3}{8} = 0{,}375$$

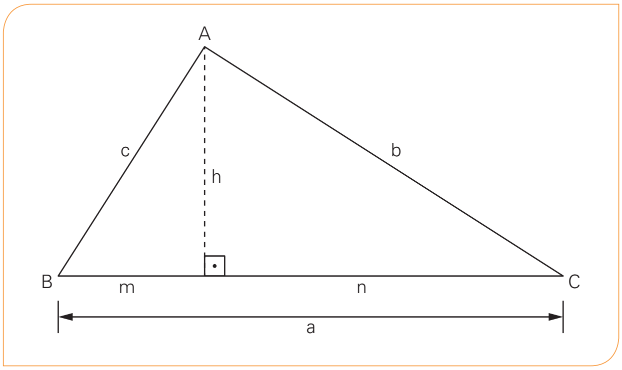
FÓRMULA DE HERON

O semiperímetro (p) de um triângulo corresponde à metade de seu perímetro.

Então: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$.

Heron de Alexandria demonstrou matematicamente que a área **A** de um triângulo de lados **a**, **b** e **c** e semiperímetro **p** equivale a:

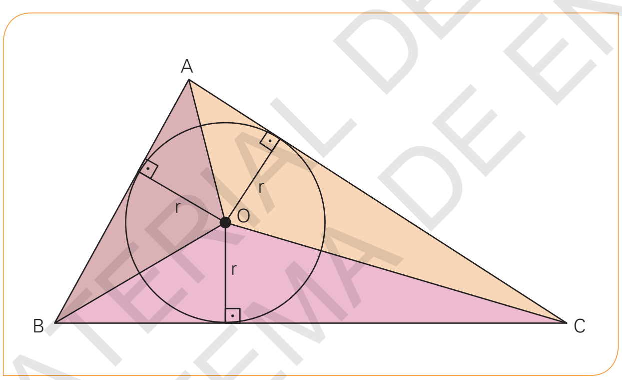
$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$



ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA

Pode-se demonstrar que a área de um triângulo **ABC** de semiperímetro **p** circunscrito em uma circunferência de raio **r** e centro **O** é dada por:

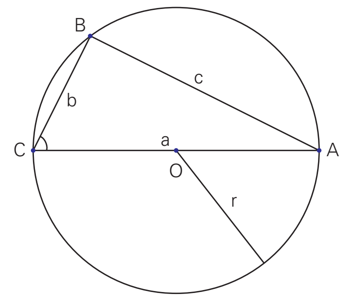
$$A = p \cdot r$$



ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DO RAIO DA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

A área de um triângulo **ABC** de lados **a**, **b** e **c**, inscrito em uma circunferência de raio **r**, é dada por:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$$



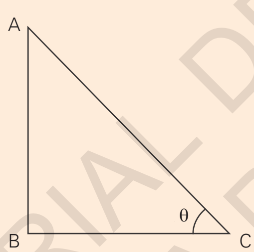
ÁREA DOS TRIÂNGULOS

Em módulos anteriores, vimos as seguintes formas de calcular a área do triângulo:

- $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ (triângulo qualquer)
- $A = \dfrac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$ (triângulo qualquer)
- $A = \dfrac{b \cdot c}{2}$ (triângulo retângulo)
- $A = \dfrac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (triângulo equilátero)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Acafe-SC – O triângulo ABC da figura abaixo é retângulo. As medidas, em metros, de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são $(x + 8)$ e $3x$, respectivamente. Se $\text{sen}\theta - 3\cos\theta = 0$, então a área do triângulo retângulo ABC, em metros quadrados, é um número compreendido entre:



a) 12 e 13.
b) 13 e 14.
c) 14 e 15.
d) 11 e 12.

Resolução

Desenvolvendo a equação trigonométrica dada, temos:

$\text{sen}\theta = 3\cos\theta$

$\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = 3$

$\text{tg}\theta = 3$

$\dfrac{x+8}{3x} = 3$

$x + 8 = 9x$

$x = 1$

Substituindo o valor de x na fórmula da área do triângulo, obtemos:

$S = \dfrac{3x \cdot (x+8)}{2} = \dfrac{3 \cdot 9}{2}$

$S = 13{,}5$

2. Sistema Dom Bosco – Calcule a área de um triângulo com lados medindo 12, 15 e 21. Nesses casos, a fórmula de Heron auxilia os cálculos de área do triângulo.

Resolução

$p = \dfrac{12 + 15 + 21}{2} = 24$

$A = \sqrt{24 \cdot (24-12) \cdot (24-15) \cdot (24-21)}$

$A = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 3}$

$A = \sqrt{7\,776}$

$A \cong 88{,}18$

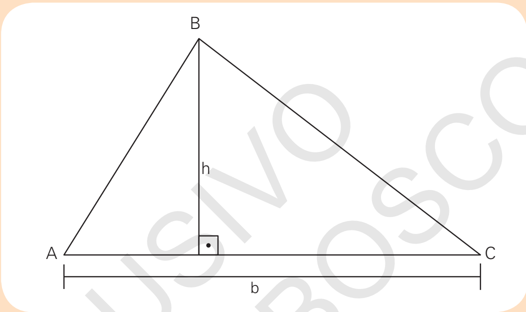
A área do triângulo é de aproximadamente 88,18 m².

ROTEIRO DE AULA

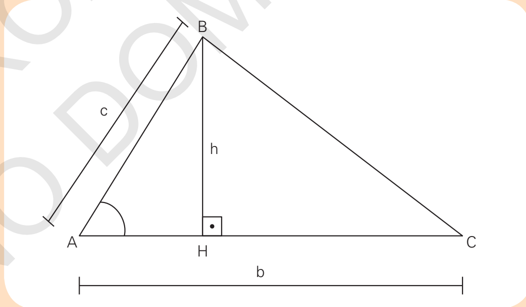
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRIÂNGULOS

TRIÂNGULOS

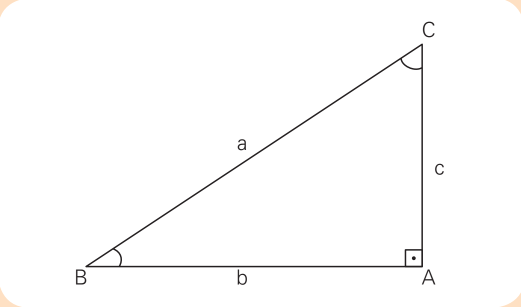
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



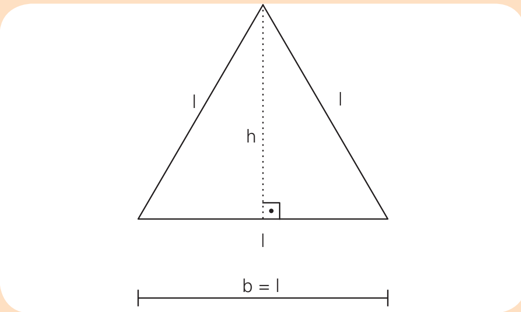
$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$



$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$



$$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$



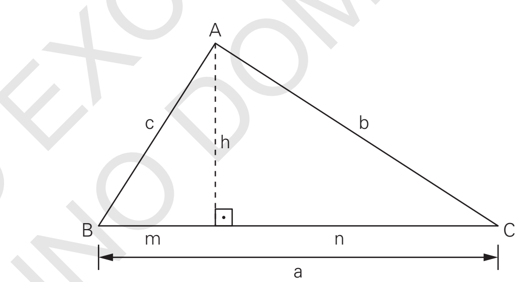
ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS - TRIÂNGULOS II

FÓRMULA DE HERON

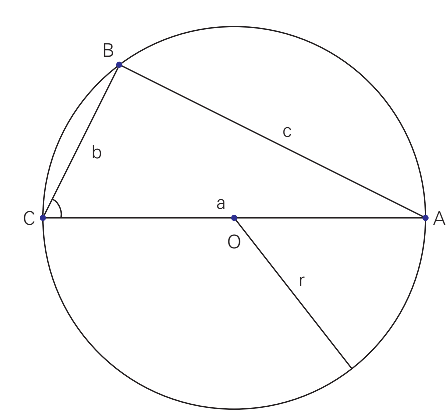
$p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$



$A = p \cdot r$

$A = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UFPR – Em um triângulo retângulo, o maior e o menor lado medem, respectivamente, 12 cm e 4 cm. Qual é a área desse triângulo?

a) $4\sqrt{2}$ cm².
b) 16 cm².
c) $8\sqrt{2}$ cm².
d) $16\sqrt{2}$ cm².
e) 24 cm².

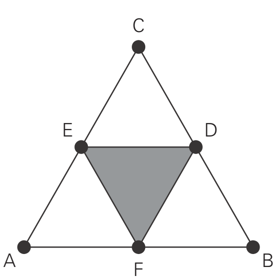
Seja b a medida do outro cateto; pelo teorema de Pitágoras, temos:
$b^2 = 12^2 - 4^2$
$b^2 = 144 - 16$
$b^2 = 128$
$b = 8\sqrt{2}$
Sendo assim: $\dfrac{4 \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$ cm²

2. FGV-RJ (adaptado) – Um triângulo ABC é retângulo em A. Sabendo que $\overline{BC} = 5$ e $A\hat{B}C = 30°$, qual é a área do triângulo ABC?

Temos que:
$\cos A\hat{B}C = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$
$\overline{AB} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$
Logo, podemos dizer que a área do triângulo ABC é:
$(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \text{sen } A\hat{B}C$
$(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2}$
$(ABC) = 3{,}125\sqrt{3}$ u.a.

3. Enem C2-H7

Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro. Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.



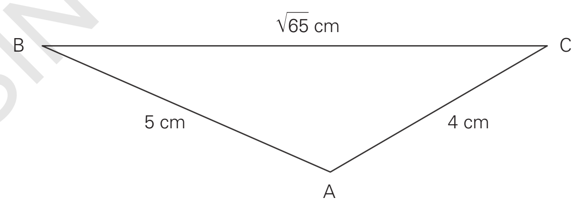
Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

a) $\dfrac{1}{16}$
b) $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$
c) $\dfrac{1}{8}$
d) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$
e) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Analisando a imagem acima, podemos perceber que os quatro triângulos menores são equiláteros de lado $\dfrac{1}{2}$ m. Logo, temos que:
$(DEF) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$ m²

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

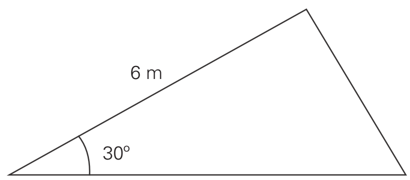
4. FGV-RJ (adaptado) – O triângulo ABC possui medidas conforme indica a figura a seguir.



Qual a área desse triângulo em cm²?

Podemos utilizar a fórmula de Heron:
$p = \dfrac{5 + 4 + \sqrt{65}}{2} = \dfrac{9 + \sqrt{65}}{2}$
$S = \sqrt{\dfrac{9+\sqrt{65}}{2} \cdot \left(\dfrac{9+\sqrt{65}}{2} - 5\right) \cdot \left(\dfrac{9+\sqrt{65}}{2} - 4\right) \cdot \left(\dfrac{9+\sqrt{65}}{2} - \sqrt{65}\right)}$
$S = \sqrt{\dfrac{9+\sqrt{65}}{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{65}}{2} - 1\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{65}}{2} + 1\right) \cdot \left(\dfrac{9-\sqrt{65}}{2}\right)}$
$S = \sqrt{\dfrac{81-65}{4} \cdot \left(\dfrac{65-1}{4}\right)}$
$S = \sqrt{\dfrac{16}{4} \cdot \left(\dfrac{64}{4}\right)}$
$S = \sqrt{4 \cdot 16}$
$S = \sqrt{64}$
$S = 8$ cm²

5. EEAR-SP – Assinale a alternativa que representa, corretamente, a área do triângulo esboçado na figura abaixo.



a) $15\ m^2$
b) $30\sqrt{2}\ m^2$
c) $15\sqrt{3}\ m^2$
d) $30\sqrt{3}\ m^2$

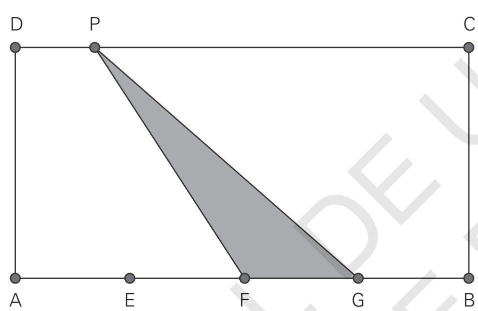
Podemos obter a área do triângulo **ABC** por:

$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \text{sen}30°$

$A = 30 \cdot \frac{1}{2}$

$A = 15\ m^2$

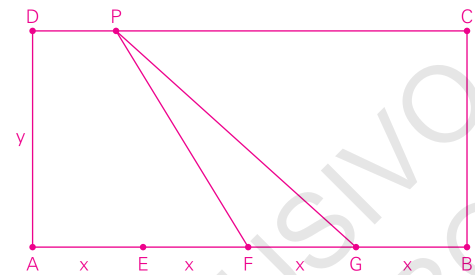
6. UFRGS - RS – No retângulo ABCD a seguir, estão marcados os pontos E, F e G, de forma que o lado AB está dividido em 4 partes iguais e P é um ponto qualquer sobre o lado DC.



A razão entre a área do triângulo PFG e a área do retângulo ABCD é

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

Considere a figura a seguir.



S_{PFG} = área do triângulo PFG

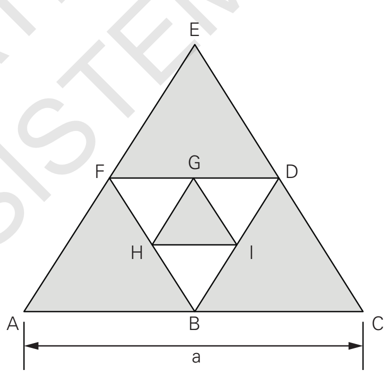
S_{ABCD} = área do triângulo ABCD

$$\frac{S_{PFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}xy}{4xy}$$

$$\frac{S_{PFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

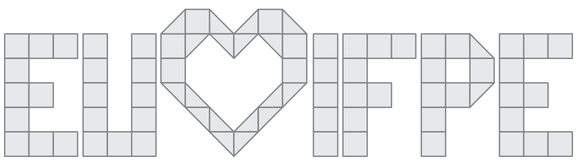
7. CFTMG – Na figura abaixo, todos os triângulos são equiláteros.



A soma das áreas sombreadas é

a) $\frac{7\sqrt{3}}{16}a^2$.
b) $\frac{13\sqrt{3}}{16}a^2$.
c) $\frac{7\sqrt{3}}{32}a^2$.
d) $\frac{13\sqrt{3}}{64}a^2$.

8. IFPE – Os estudantes do curso de Saneamento do campus Recife estão construindo um ladrilho em homenagem ao IFPE, baseado no esboço abaixo.



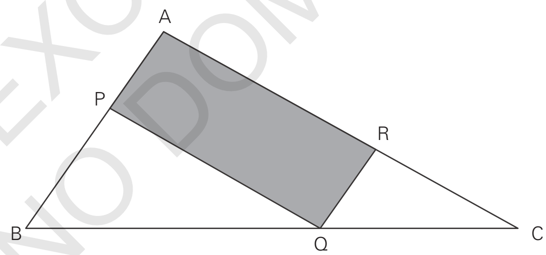
As cerâmicas escolhidas são quadradas, com 20 cm de lado, e, para formar os triângulos do esboço, realizaram um corte em uma das diagonais da cerâmica, sem perda de material. Se o preço da cerâmica escolhida é de R\$ 12,50 por metro quadrado, qual o custo com cerâmica dessa obra?

a) R\$ 34,00
b) R\$ 32,00
c) R\$ 33,00
d) R\$ 35,00
e) R\$ 36,50

9. UECE – Os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero cuja medida da área é $9\sqrt{3}$ m² são ligados dividindo-se o triângulo em quatro outros triângulos equiláteros congruentes. A medida da altura de cada um destes triângulos menores é

a) $\sqrt{6,75}$ m.
b) $\sqrt{6,25}$ m.
c) $\sqrt{6,95}$ m.
d) $\sqrt{6,45}$ m.

10. Epcar-RJ (adaptado) – Considere, no triângulo ABC abaixo, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$, e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



Sabendo que $\overline{BQ} = 3$ cm, $\overline{QC} = 1$ cm e que a área do triângulo ABC é 8 cm², então qual a área do paralelogramo hachurado, em cm²?

11. Fuvest - SP – O triângulo AOB é isósceles, com $\overline{OA} = \overline{OB}$, e ABCD é um quadrado. Sendo θ a medida do ângulo $A\hat{O}B$, pode-se garantir que a área do quadrado é maior do que a área do triângulo se

Dados os valores aproximados:

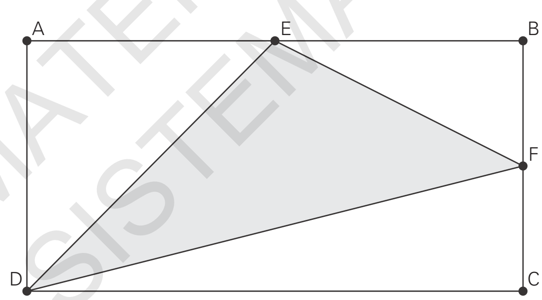
$tg14° \cong 0,2493$, $tg15° \cong 0,2679$

$tg20° \cong 0,3640$, $tg28° \cong 0,5317$

a) $14° < \theta < 28°$
b) $15° < \theta < 60°$
c) $20° < \theta < 90°$
d) $25° < \theta < 120°$
e) $30° < \theta < 150°$

12. UFPR (adaptado) – Um triângulo possui lados de comprimento 2 cm e 6 cm e área de 6 cm². Qual é a medida do terceiro lado desse triângulo?

13. UFJF-MG – No retângulo ABCD a seguir, tem-se que E e F são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.



A razão entre as áreas do triângulo DEF e do retângulo ABCD é

a) $\frac{2}{5}$

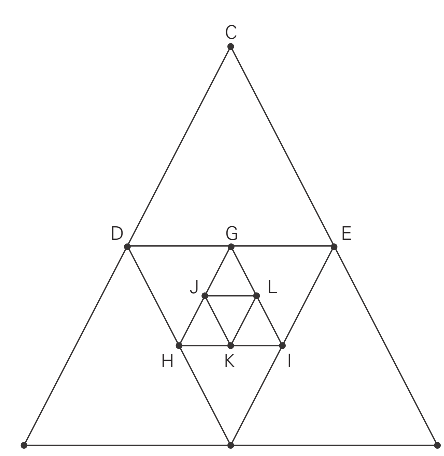
b) $\frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{3}{4}$

14. CFTMG – Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado igual a 1 cm. Os pontos D, E e F são os respectivos pontos médios dos lados AC, BC e AB; os pontos G, H e I são os respectivos pontos médios dos lados DE, DF e EF; e os pontos J, K e L são os respectivos pontos médios dos lados GH, HI e GI.



A área do triângulo JKL, em cm², é

a) $\frac{\sqrt{3}}{256}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{512}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{768}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{1024}$.

15. Col. Naval-RJ – Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12. Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desses triângulos. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é

a) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

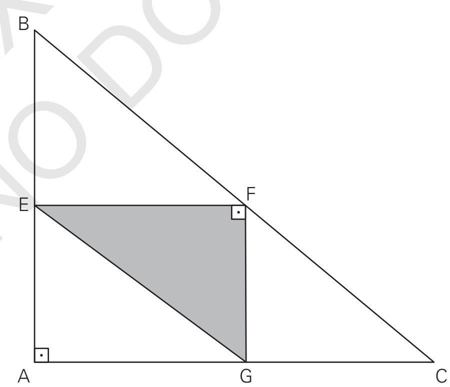
b) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$

c) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

d) $\frac{9\sqrt{7}}{7}$

e) $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

16. Vunesp – Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo retângulo ABC, obtém-se outro triângulo retângulo EFG, conforme mostra a figura.



Sabendo que AB = 12 cm e que BC = 20 cm, é correto afirmar que a área do triângulo EFG é, em cm², igual a

a) 40.

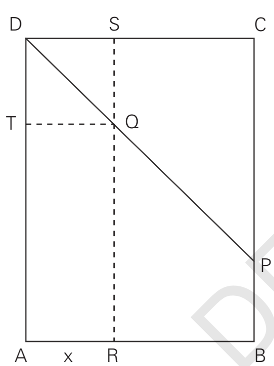
b) 36.

c) 30.

d) 28.

e) 24.

17. Fuvest-SP – O retângulo ABCD representado na figura tem lados de comprimento AB = 3 e BC = 4. O ponto P pertence ao lado $\overline{BC}$ e BP = 1. Os pontos R, S e T pertencem aos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. O segmento $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e intercepta $\overline{DP}$ no ponto Q. O segmento $\overline{TQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$.



Sendo x o comprimento de $\overline{AR}$, o maior valor da soma das áreas do retângulo ARQT, do triângulo CQP e do triângulo DQS, para x variando no intervalo aberto]0, 3[, é

a) $\frac{61}{8}$

b) $\frac{33}{4}$

c) $\frac{17}{2}$

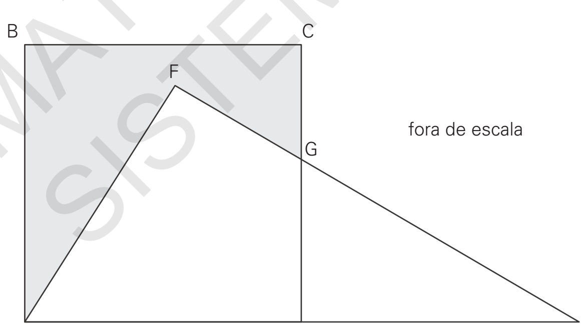
d) $\frac{35}{4}$

e) $\frac{73}{8}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Famema-SP C2-H7

Na figura, ABCD é um quadrado de lado 6 cm e AFE é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{AE}$. Considere que $\overline{AD} = \overline{AF}$ e $\overline{DE}$ = 4 cm.

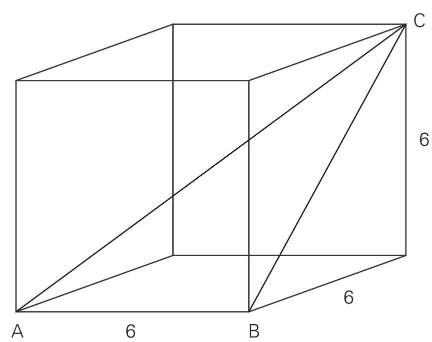


Sabendo que os pontos A, D e E estão alinhados, o valor da área destacada, em cm², é

a) 24.
b) 18.
c) 22.
d) 20.
e) 16.

19. Ulbra-SP C2-H7

A figura a seguir representa um cubo de lado medindo 6 cm e um triângulo ABC.

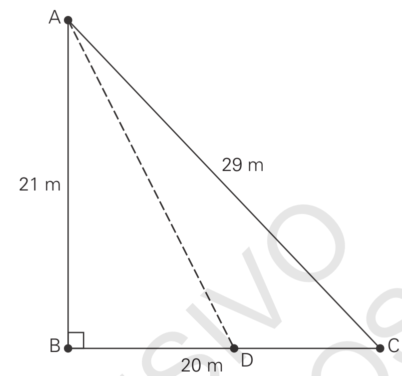


A área desse triângulo mede

a) $36\sqrt{2}$ cm².
b) $18\sqrt{2}$ cm².
c) $24\sqrt{2}$ cm².
d) $12\sqrt{2}$ cm².
e) $6\sqrt{2}$ cm².

20. UFU-MG C2-H7

Dois irmãos herdaram um terreno que, conforme consta no registro de imóvel, pode ser representado pelo triângulo retângulo ABC da figura a seguir.



Os irmãos pretendem murar esse terreno e, ao mesmo tempo, dividi-lo por um muro, representado pelo segmento AD, em dois terrenos triangulares de mesma área. O preço de construção do metro quadrado de muro foi orçado em R$ 90,00, e em toda extensão o muro terá 3 m de altura.

A parte inteira do custo da construção do muro, em milhares de reais, é

a) 25
b) 23
c) 24
d) 26
e) 22

12 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS II – TRAPÉZIOS, LOSANGOS E CÍRCULOS

- Área de um trapézio
- Área de um losango
- Círculo
- Área do círculo
- Área da coroa circular

HABILIDADES

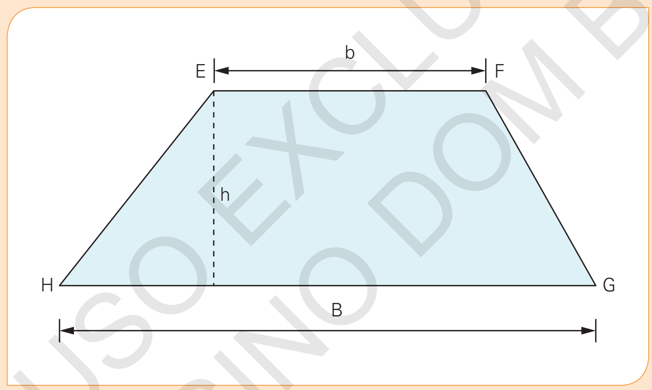
- Identificar os elementos do trapézio.
- Identificar os elementos do losango.
- Aplicar as expressões referentes ao cálculo de áreas na resolução de situações-problema.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solução de problemas do cotidiano.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos como solução de problemas do cotidiano.

ÁREA DE UM TRAPÉZIO

A área de um trapézio é igual ao produto da medida da altura pela média das medidas das bases.

Vamos analisar uma demonstração.

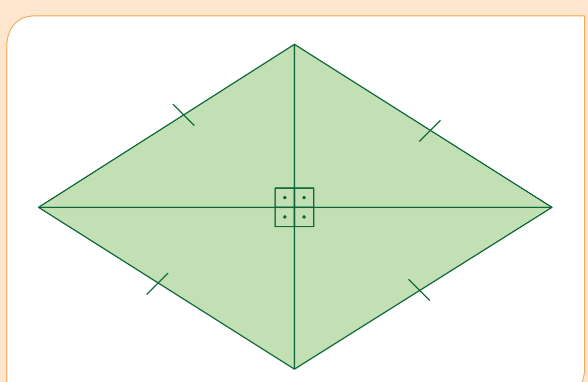
Dado o trapézio **EFGH** de altura que mede **h**, no qual as bases $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ medem **b** e **B**, respectivamente, sua área total mede **A**.



$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$

ÁREA DE UM LOSANGO

O losango é um paralelogramo que tem os lados de mesma medida. Além disso, suas duas diagonais são perpendiculares entre si.



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Col. Pedro II – A figura 1 a seguir tem dois trapézios e um triângulo retângulo que formam o quadrado ABCD, cujo lado mede 30 cm.

Prolongando os segmentos CD e BM, encontramos o ponto G, como mostra a figura 2.

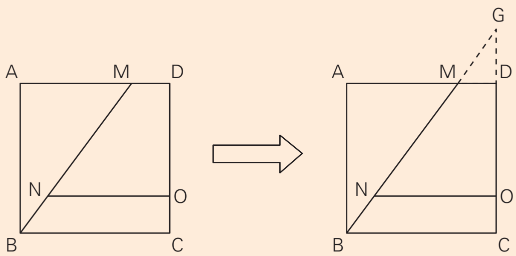


Figura 1 Figura 2

Sabendo-se que $\frac{\overline{DM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{1}{2}$, calcule:

a) A medida do segmento OC.
b) A medida do segmento GD.
c) A área do trapézio MNOD.

Resolução

a) DC = 30 cm

Logo, OD = DC – OC = 30 – OC

$\frac{OC}{OD} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{OC}{30 - OC} = \frac{1}{2} \rightarrow 2OC = 30 - OC$

$\therefore$ OC = 10 cm

b) MD = OC = 10 cm

$\frac{MD}{BC} = \frac{GD}{GC} \rightarrow \frac{10}{30} = \frac{GD}{30 + GD} \rightarrow 30 \cdot GD =$

$= 300 + GD \rightarrow 20 \cdot GD = 300$

$\therefore$ GD = 15 cm

c) MD = OC = 10 cm

$\frac{MD}{NO} = \frac{GD}{GO} \rightarrow \frac{10}{NO} = \frac{15}{20 + 15} \rightarrow 15 \cdot NO = 350 \rightarrow$

$\rightarrow NO = \frac{70}{3}$

Agora, podemos calcular a área do trapézio MNOD.

$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h = \frac{(NO + MD)}{2} \cdot OD =$

$= \frac{\left(\frac{70}{3} + 10\right)}{2} \cdot 20 = \frac{1000}{3}\ cm^2$

$A = \frac{1000}{3}\ cm^2$

2. Enem C5-H21

A vazão do rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos. Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso, a vazão da água é de 1 050 m³/s. O cálculo da vazão, Q em m³/s, envolve o produto da área A do setor transversal (por onde passa a água), em m², pela velocidade da água no local, v, em m/s, ou seja, Q = Av.

Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões especificadas na figura II, para evitar a ocorrência de enchentes.

Figura I

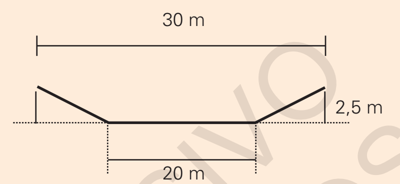
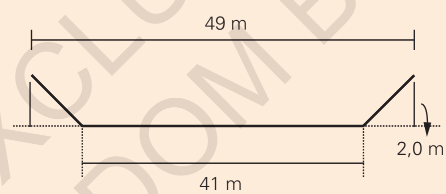


Figura II



Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

a) 90 m³/s.
b) 750 m³/s.
c) 1 050 m³/s.
d) 1 512 m³/s.
e) 2 009 m³/s.

Resolução

Área da figura I = $\frac{(30 + 20) \cdot 2{,}5}{2} = 62{,}5\ m^2$.

Sendo v a velocidade da água, 1 050 = v · 62,5 →

v = 16,8 m/s.

Área da figura II = $\frac{(49 + 41) \cdot 2}{2} = 90\ m^2$.

Logo, a nova vazão será igual a 90 · 16,8 = 1512 m³/s.

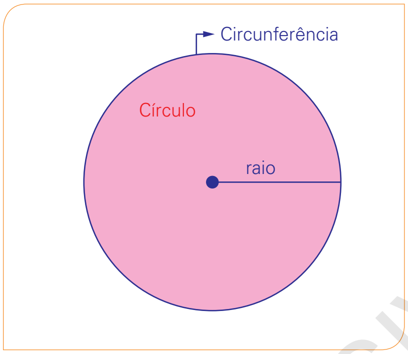
Então, v = 1512 m³/s.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

CÍRCULO

Como estudamos em módulos anteriores, a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é a circunferência. O **círculo** corresponde à região interna da **circunferência**.

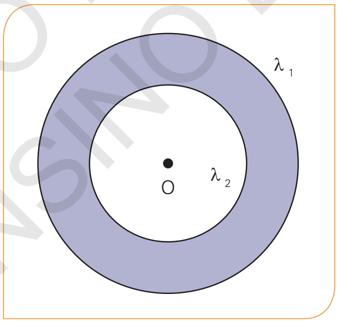


A circunferência e o círculo têm elementos comuns denominados diâmetro e raio, que servem para determinar o comprimento da circunferência e a área do círculo.

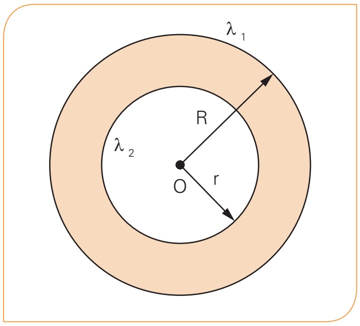
$$A = \pi r^2$$

ÁREA DA COROA CIRCULAR

O conjunto de pontos que pertencem à região limitada pelas circunferências concêntricas λ_1 e λ_2 é denominado **coroa circular**.



A área da coroa circular de raios **R** e **r** é calculada como a diferença entre as áreas delimitadas pelas circunferências maior e menor:



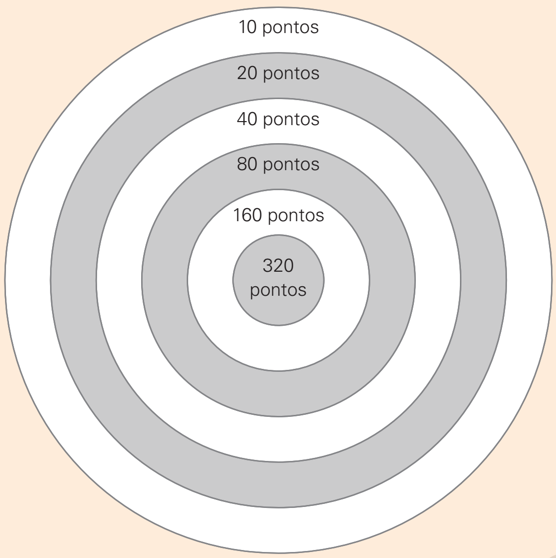
$$A = A_1 - A_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\,(R^2 - r^2)$$

Desse modo, temos:

$$A = \pi\,(R^2 - r^2)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Insper-SP – Esta figura mostra o alvo de uma academia de arco e flecha. A pontuação que um jogador recebe ao acertar uma flecha em cada uma das faixas circulares está indicada na respectiva faixa. O raio do círculo maior mede 60 cm, o do menor mede 10 cm e a diferença entre os raios de quaisquer dois círculos consecutivos é de 10 cm. Todos os círculos têm o mesmo centro.



A soma das áreas das faixas em cinza na figura é igual a

a) 900π cm²
b) $1\,100\pi$ cm²
c) $1\,300\pi$ cm²
d) $1\,500\pi$ cm²
e) $1\,700\pi$ cm²

Resolução

A área pedida é dada por:

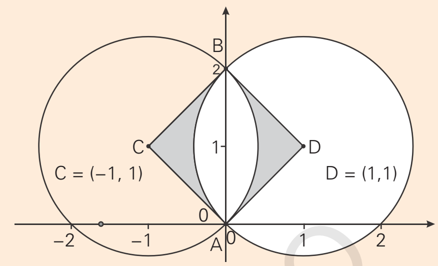
$\pi \cdot (50^2 - 40^2) + \pi\,(30^2 - 20^2) + \pi \cdot 10^2 =$

$= 900\pi + 500\pi + 100\pi$

$1\,500\pi$ cm²

$\therefore A = 1\,500\pi$ cm²

2. UEL-PR – Uma indústria de café desenvolveu uma logomarca inspirada na bandeira do Brasil, como ilustrado no esboço a seguir.



O idealizador fez seu esboço em um plano cartesiano com unidades de medida em centímetros.

A partir das informações presentes nesse esboço, determine a área sombreada da logomarca. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados.

Resolução

A medida do raio da circunferência de centro em D é dada por: $r = d\,(A, D) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm

Então, podemos concluir que ABCD é um losango. Além disso, como as diagonais de ABCD são congruentes e perpendiculares, ABCD é um quadrado.

A área pedida corresponde à diferença entre as áreas do quadrado ABCD e o dobro da área do segmento circular determinado pela corda AB. Isto é:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\right) = 2 - (\pi - 2)$$

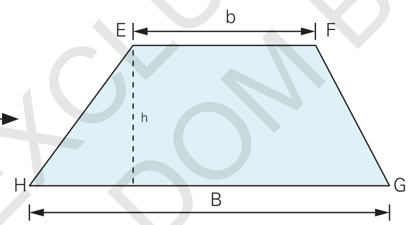
$(4 - \pi)$ cm²

ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – TRAPÉZIOS E LOSANGOS

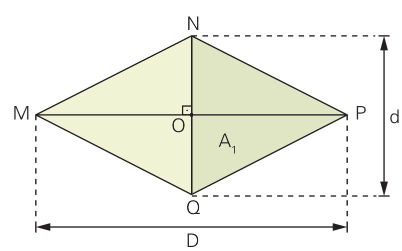
Trapézio

$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$



Losango

$$A = \frac{(D \cdot d)}{2}$$

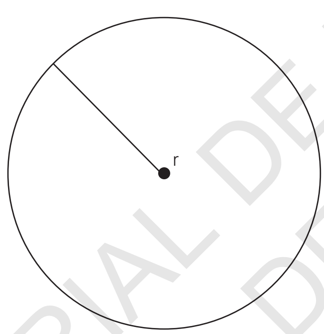


ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS CÍRCULOS I

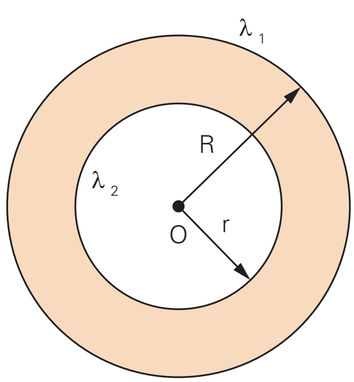
Círculo

A = πr^2



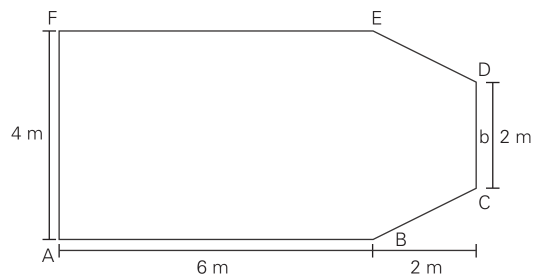
Coroa circular

A = $\pi \cdot (R^2 - r^2)$



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UFJF-MG – Marcos comprou a quantidade mínima de piso para colocar em toda a sua sala, que tem o formato abaixo, e pagou R$ 48,00 o metro quadrado.



Quanto ele gastou comprando o piso para essa sala?

a) R$ 288,00
b) R$ 672,00
c) R$ 1.152,00
d) R$ 1.440,00
e) R$ 2.304,00

Podemos calcular da seguinte maneira:

$S_{sala} = S_{AFEB} + S_{BEDC}$

$S_{sala} = 4 \cdot 6 + \dfrac{4 + 2}{2} \cdot 2$

$S_{sala} = 30\ m^2$

Custo = $30 \cdot 48 = 1.440$ reais.

2. PUCCamp-SP – Os lados de uma folha retangular ABCD de papel medem 10 cm e 6 cm, como indica a figura 1. Essa folha, que é branca de um dos lados e cinza do outro, será dobrada perfeitamente de tal forma que o vértice A irá coincidir com o vértice C, como mostra a Figura 2.

Figura 1

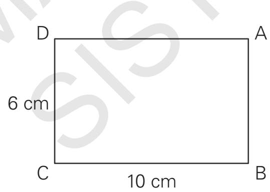
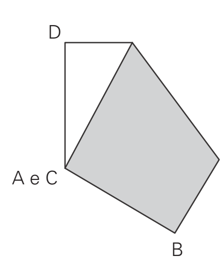


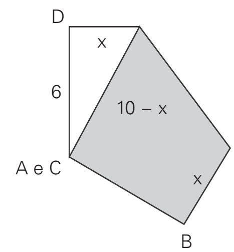
Figura 2

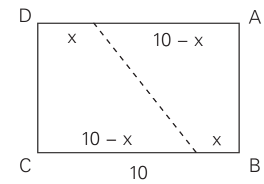


A área do trapézio cinza indicado na Figura 2, em mc², é igual a

a) 23. **b)** 30. **c)** 25. **d)** 40. **e)** 45.

Se abrirmos novamente a folha de papel, teremos:





Sendo assim, pode-se escrever:

$B_{maior} = 10 - x$

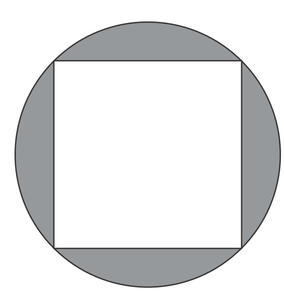
$B_{menor} = x$

$h = 6$

$S = \dfrac{(10 - x + x) \cdot 6}{2} = \dfrac{60}{2} = 30$

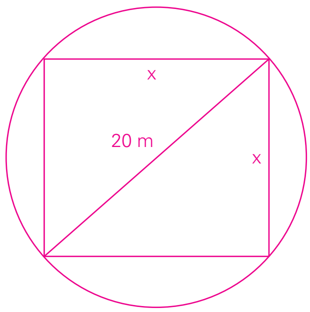
3. Enem C2-H9

Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá a forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada m². A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para π.



O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é

a) 100.
b) 140.
c) 200.
d) 800.
e) 1 000.



$S_{circunf} = \pi(10)^2 = 100\pi \approx 300\ m^2$

$x\sqrt{2} = 20 \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 10\sqrt{2}\ m$

$S_{quadrado} = x^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 = 200\ m^2$

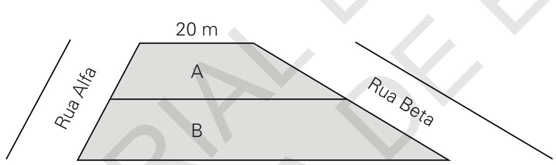
$S_{terra} = 300 - 200 = 100\ m^2$

Como sabemos, é preciso 1 saco (de 15 kg) de terra por metro quadrado. Logo, serão necessários 100 sacos de terra vegetal para cobrir a área.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

4. Uerj – Dois terrenos, A e B, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:



As áreas de A e B são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno A mede 20 m. Calcule o comprimento x, em metros, da lateral maior do terreno B.

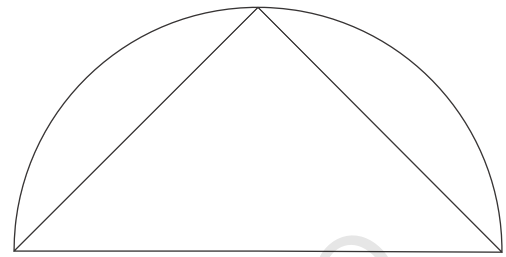
Sejam h_a e h_b, respectivamente, as alturas dos trapézios A e B.
Sabendo que **A** e **B** são trapézios e que as frentes dos terrenos têm o mesmo comprimento, a lateral maior do terreno A (ou lateral menor do terreno B) é a base média do trapézio maior formado por A e B. Então, $h_A = h_B = h$. Logo:

$$\frac{\frac{20 + \frac{x+20}{2}}{2} \cdot h}{\frac{\frac{x+20}{2} + x}{2} \cdot h} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x + 60}{3x + 20} = \frac{1}{2}$$

$x = 100\ m$

5. UCS-RS – A praça central de uma cidade tem forma de semicírculo. Parte da praça, em forma de triângulo isósceles, será pavimentada, como mostrado na figura abaixo.



Sendo a área da parte a ser pavimentada igual a $2k^2$, qual é área total da praça?

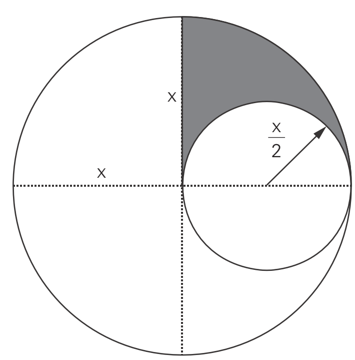
a) $2\pi k^2$
b) πk^2
c) $2\pi k$
d) πk
e) $(\pi + 2)k^2$

Sendo r o raio do semicírculo, podemos escrever:

$S_{\triangle} = \frac{2r \cdot r}{2} = r^2 = 2k^2 \rightarrow r^2 = 2k^2$

$S_{praça} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 2k^2}{2} \rightarrow S_{praça} = \pi k^2$

6. Mackenzie-SP



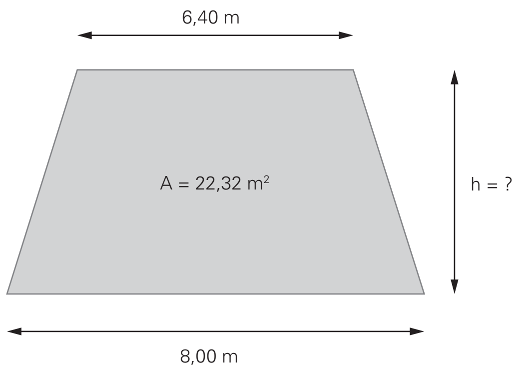
O valor da área sombreada na figura acima é

a) $\frac{\pi x^2}{4}$
b) $\frac{\pi x^2}{2}$
c) $\frac{\pi x^2}{8}$
d) $\frac{\pi x^2}{12}$
e) $\frac{\pi x^2}{6}$

A área pedida é dada por: $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. IFSP (adaptado) – Observe a figura abaixo.



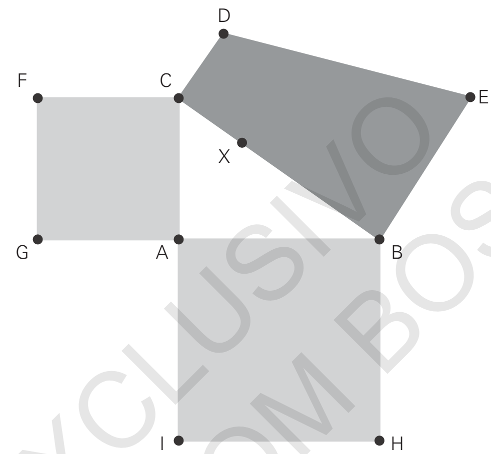
Ela representa um painel de propaganda que tem a forma de um trapézio. Sua área é de 22,32 m² e as medidas das bases são 8,00 m e 6,40 m. Logo, qual a altura (h) desse painel?

8. FGV-RJ – A área de um trapézio mede 1 800 cm². A altura desse trapézio mede 50 cm. Considere o problema de determinar as medidas das bases desse trapézio, sabendo que essas medidas, em centímetros, são números inteiros divisíveis por 8.
O número de soluções desse problema é:

a) 3.
b) 2.
c) 1.
d) 4.
e) 5.

9. UERJ – Considere na imagem abaixo:

- os quadrados ACFG e ABHI, cujas áreas medem, respectivamente, S_1 e S_2;
- o triângulo retângulo ABC;
- o trapézio retângulo BCDE, construído sobre a hipotenusa BC, que contém o ponto X.



Sabendo que CD = CX e BE = BX, a área do trapézio BCDE é igual a:

a) $\dfrac{S_1 + S_2}{2}$

b) $\dfrac{S_1 + S_2}{3}$

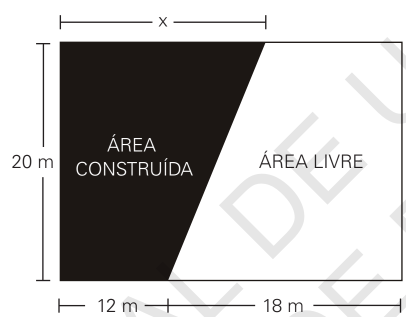
c) $\sqrt{S_1 S_2}$

d) $\sqrt{(S_1)^2 + (S_2)^2}$

10. UECE – Seja PQRS um trapézio isósceles cujas bases menor e maior são, respectivamente, os segmentos PQ e SR. Se M e N são, respectivamente, as projeções ortogonais de P e Q sobre SR e se a razão entre as medidas de SR e PQ é igual a três, então pode-se afirmar corretamente que a razão entre a área do trapézio e a área do quadrilátero PQNM é igual a

a) 3,0.
b) 1,5.
c) 2,0.
d) 2,5.

11. Espcex-SP – As regras que normatizam as construções em um condomínio definem que a área construída não deve ser inferior a 40% da área do lote nem superior a 60% desta. O proprietário de um lote retangular pretende construir um imóvel de formato trapezoidal, conforme indicado na figura.

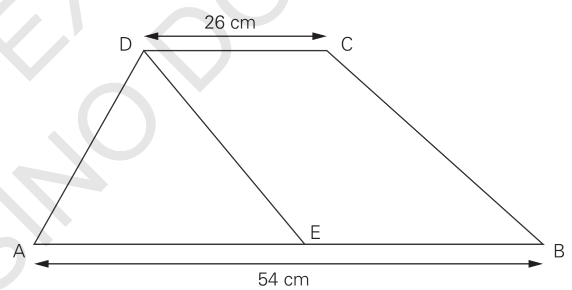


desenho ilustrativo – fora de escala

Para respeitar as normas acima definidas, assinale o intervalo que contém todos os possíveis valores de x.

a) [6, 10]
b) [8, 14]
c) [10, 18]
d) [16, 24]
e) [12, 24]

12. UPE – Na figura representada a seguir, o segmento DE divide o trapézio ABCD em duas figuras de mesma área.



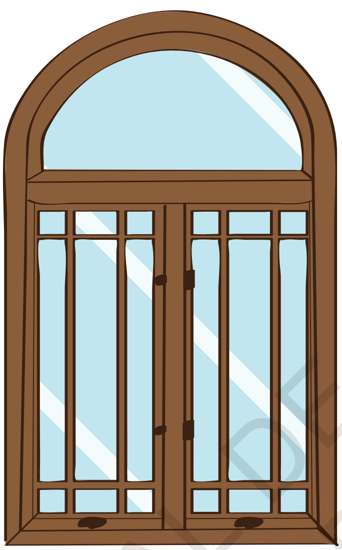
Nessas condições, quanto mede o segmento AE?

a) 13 cm
b) 20 cm
c) 27 cm
d) 27 cm
e) 40 cm

13. UECE – Ao aumentarmos em 20% a medida do raio de um círculo, sua área sofrerá um aumento de

a) 36%.
b) 40%.
c) 44%.
d) 52%.

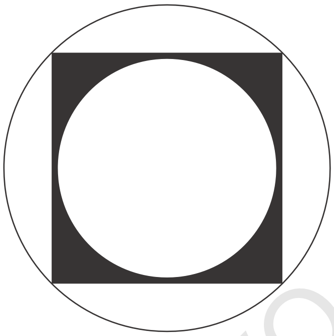
14. PUC-RS – Em muitas igrejas e casas antigas de Porto Alegre, podemos observar janelas de forma retangular encimadas por um semicírculo, como na figura.



Considerando que a parte retangular da figura possui x cm na base e altura correspondente a uma vez e meia essa medida, a função em que A = f(x) e que determina a área total da janela, em cm^2, é

a) $1,5x^2 + \pi r^2$
b) $(1,5 + \pi)\, x^2$
c) $1,5x^2 + \frac{\pi}{8}$
d) $\left(1,5 + \frac{\pi}{8}\right) x^2$
e) $1,5 + \frac{\pi}{8}\, x^2$

15. UEFS-BA



Na figura, tem-se uma circunferência inscrita em um quadrado, que, por sua vez, está inscrito em outra circunferência.

Considerando-se $\pi \cong 3,14$, a área escura compreendida entre o quadrado e a circunferência menor representa, em relação à área interna à circunferência maior, um percentual de, aproximadamente,

a) 11,8%
b) 13,7%
c) 16,4%
d) 18,3%
e) 21,5%

16. UECE – No plano, considere duas circunferências cuja medida do raio de cada uma delas é 10 m. Se o centro de uma delas está sobre a outra, a medida da área correspondente à interseção das regiões do plano, limitadas por cada uma dessas circunferências, é igual a:

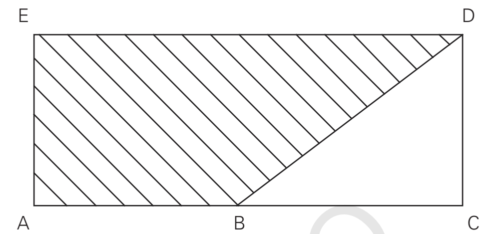
a) $\left(\dfrac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)$ m².

b) $\left(\dfrac{200\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)$ m².

c) $\left(\dfrac{100\pi}{3} - 50\sqrt{3}\right)$ m².

d) $\left(\dfrac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}\right)$ m².

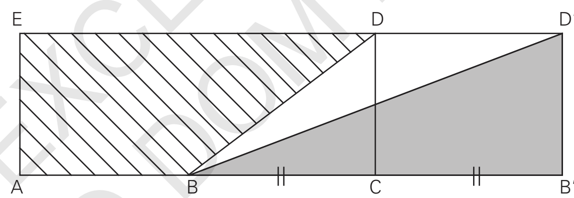
17. PUC-RJ – Fabio tem um jardim ACDE com o lado AC medindo 15 m e o lado AE medindo 6 m. A distância entre A e B é 7 m. Fabio quer construir uma cerca do ponto A ao ponto D passando por B. Veja a figura a seguir.



a) Se a cerca usada entre os pontos A e B custa 100 reais o metro e a cerca entre os pontos B e D custa 200 reais o metro, qual o custo total da cerca?

b) Calcule a área da região hachurada ABDE.

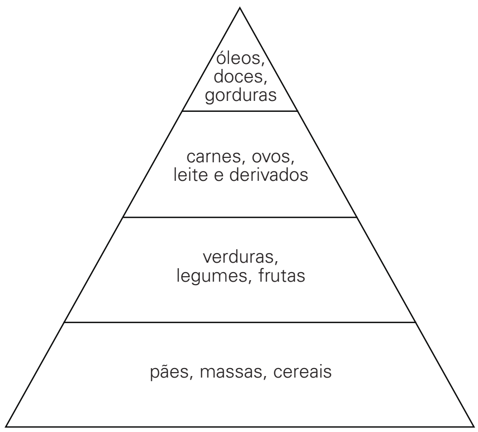
c) Considere o triângulo BCD apresentado na figura abaixo. Sabendo-se que o triângulo BB'D' possui cateto BB' = 2BC, calcule a área do triângulo BB'D'.



ESTUDO PARA O ENEM

18. UFG-GO C2-H9

Um recurso visual muito utilizado para apresentar as quantidades relativas dos diferentes grupos de alimentos na composição de uma dieta equilibrada é a chamada "pirâmide alimentar", que usualmente é representada por um triângulo dividido em regiões, como na figura a seguir.



Considere que as regiões da figura dividem a altura do triângulo em partes iguais. No que se refere às áreas das regiões ocupadas por cada grupo de alimentos, o grupo com predominância de carboidratos ocupa

a) sete terços da área do grupo com predominância de proteínas.

b) cinco sétimos da área do grupo com predominância de fibras.

c) um sétimo da área do grupo com predominância de lipídios.

d) o dobro da área do grupo com predominância de proteínas.

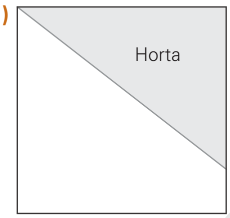
e) cinco sétimos da área do grupo com predominância de vitaminas e sais minerais.

19. IFPE C2-H8

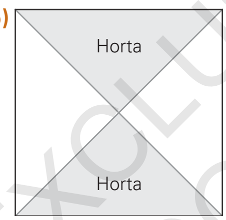
Os alunos do curso de Alimentos do campus Barreiros solicitaram ao diretor geral um terreno para produzir uma horta. O diretor autorizou o uso parcial de um terreno quadrangular à disposição no campus.

Para utilizar a maior área em sua horta, quais das opções abaixo é a melhor escolha?

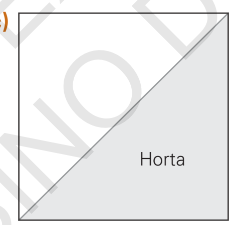
a)



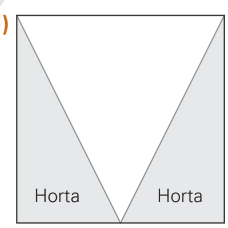
b)



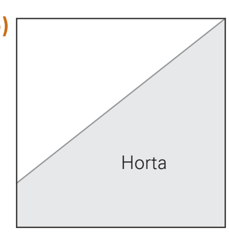
c)



d)

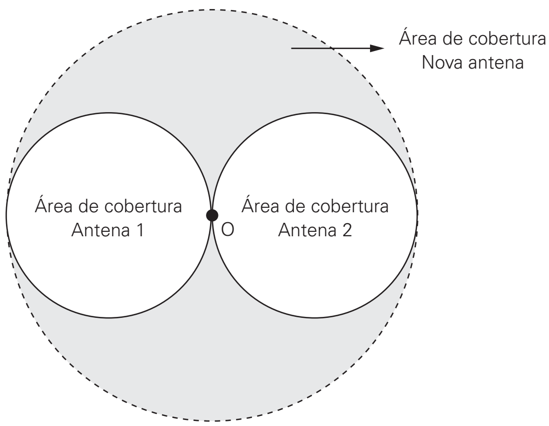


e)



20. Enem C2-H8

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio de 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a) 8π.
b) 12π.
c) 16π.
d) 32π.
e) 64π.

13 ÁREA DE FIGURAS PLANAS III - CÍRCULOS E POLÍGONOS

- Área do setor circular
- Área do segmento circular
- Polígonos regulares
- Recordando polígonos

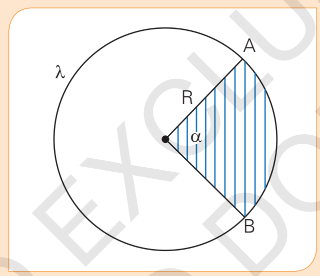
HABILIDADES

- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos como solução de problemas do cotidiano.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.

CÍRCULOS

ÁREA DO SETOR CIRCULAR

A região determinada pela intersecção da circunferência λ, de centro em **O**, raio **r**, com os lados do ângulo central α é denominada **setor circular**.



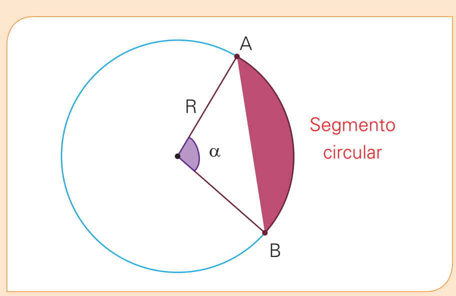
$$A = \frac{\alpha° \cdot R^2}{360°}$$

- Arco medido em radianos

$$A = \alpha R$$

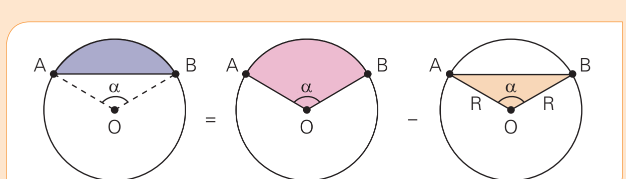
ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

A região do círculo limitada pelo arco da circunferência $\overset{\frown}{AB}$ e uma corda cujas extremidades estão localizadas no arco é denominada **segmento circular**.



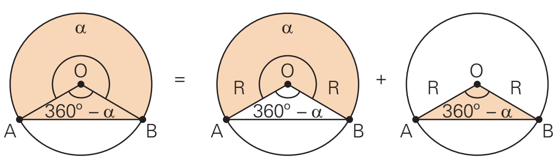
A área do segmento circular pode ser calculada nos seguintes casos:

Ângulo central α menor que 180°



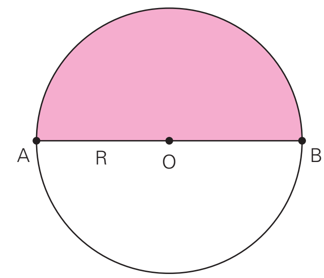
$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi\alpha}{360°} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)\text{, com medida em graus}$$

Ângulo central α maior que 180°



$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi\alpha}{360°} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)\text{, com medida em graus}$$

Ângulo central igual a 180°

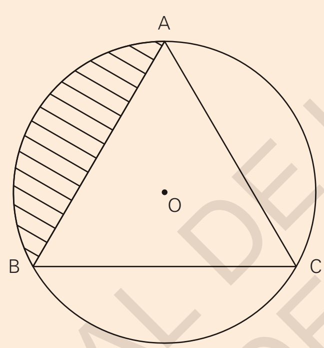


$$A = A_{semicírculo}$$

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. PUC-RJ – Considere o triângulo equilátero ABC inscrito no círculo de raio 1 e centro O, como apresentado na figura abaixo.



a) Calcule o ângulo AÔB.

b) Calcule a área da região hachurada.

c) Calcule a área do triângulo ABC.

Resolução

a) Sendo ΔABC equilátero, os vértices A, B e C dividem a circunferência em três arcos congruentes de medida igual a $\frac{360°}{3} = 120°$.

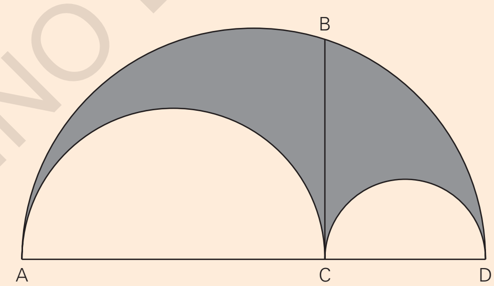
b) Sabendo que o lado l de um triângulo equilátero, inscrito em um círculo de raio r, é dado por $l = r\sqrt{3}$, segue-se que $AB = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ u.c.

Portanto, a área pedida é igual a:

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot 1^2 - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{12} \cdot (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ u.a.}$$

c) Do item b, temos: $A_{\triangle ABC} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ u.a.

2. UFSCar-SP – A figura representa três semicírculos, mutuamente tangentes dois a dois, de diâmetro AD, AC e CD.



Sendo CD perpendicular a AD, e sabendo-se que AB = 4 cm e DB = 3 cm, a medida da área da região sombreada na figura, em cm², é igual a

a) 1,21π

b) 1,25π

c) 1,36π

d) 1,44π

e) 1,69π

Resolução

Sendo λ_1 e λ_2 as circunferências inscritas na circunferência λ, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para descobrir as medidas dos triângulos ABD, ACB e CDB, respectivamente.

Do triângulo ABD, temos:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \text{ a}$$

$$\overline{AD}^2 = 25$$

$$\overline{AD} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BD} = 5\,\overline{BC}$$

$12 = 5\overline{BC}$

$\overline{BC} = \frac{12}{5}$ cm

Do triângulo ACB, temos:

$\overline{AC}^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2$

$\overline{AC}^2 = 16 - \left(\frac{144}{25}\right)$

$\overline{AC}^2 = \frac{256}{25}$

$\overline{AC} = \frac{16}{5}$ cm

Do triângulo CDB, temos:

$3^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \overline{CD}^2$

$\overline{CD}^2 = 9 - \left(\frac{144}{25}\right)$

$\overline{CD}^2 = \frac{81}{25}$

$\overline{CD} = \frac{9}{5}$ cm

Assim, teremos os raios das semicircunferências λ_1 e λ_2: $r_1 = \frac{16}{10}$ e $r_2 = \frac{9}{10}$

Logo, a área desejada será:

$$A = \frac{1}{2}A_\lambda - \frac{1}{2}A_{\lambda_1} - \frac{1}{2}A_{\lambda_2} = \frac{1}{2}(A_\lambda - A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2})$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) - \left(\pi \cdot \left(\frac{16}{10}\right)^2\right) - \pi \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{25\pi}{4} - \frac{256\pi}{100} - \frac{81\pi}{25}\right]$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{25\pi}{4} - \frac{337\pi}{100}\right]$$

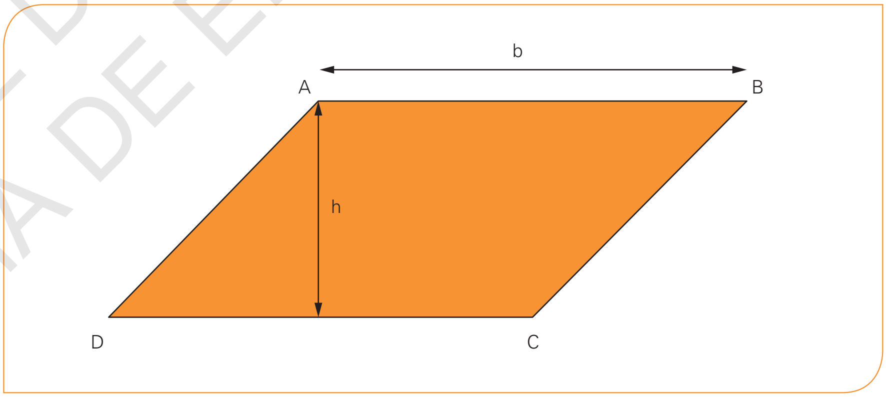
$$A = \left[\frac{(6{,}25 - 3{,}37)\,\pi}{2}\right]$$

$$A = 1{,}44\,\pi$$

RECORDANDO ÁREAS DE ALGUNS POLÍGONOS

ÁREA DE UM PARALELOGRAMO

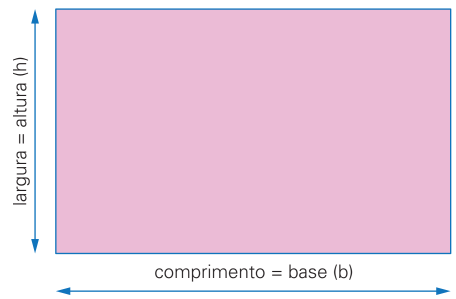
A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida de sua base pela medida da altura relativa.



$$A_{ABCD} = A_{ABEF} = b \cdot h$$

ÁREA DE UM RETÂNGULO

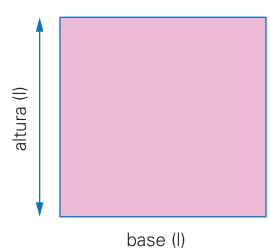
A área de um retângulo é igual ao produto da medida de seu comprimento (base) pela medida de sua largura (altura).



$$A = b \cdot h$$

ÁREA DE UM QUADRADO

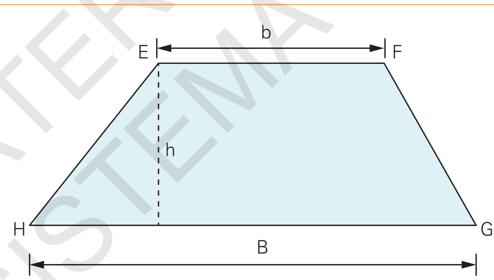
A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado, já que esse polígono tem lados com medidas iguais.



$$A = l^2$$

ÁREA DE UM TRAPÉZIO

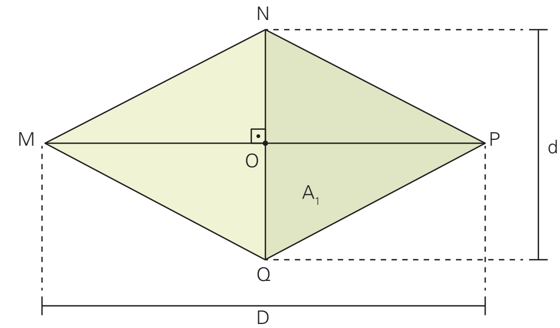
A área de um trapézio é igual à metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.



$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$

ÁREA DE UM LOSANGO

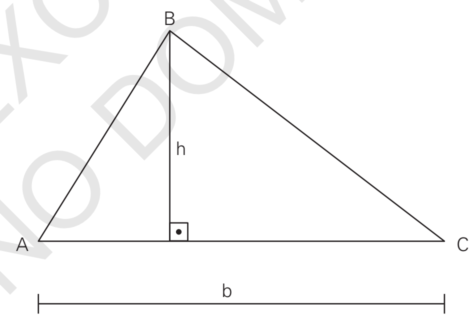
A área de um losango é igual à metade do produto de suas diagonais.



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

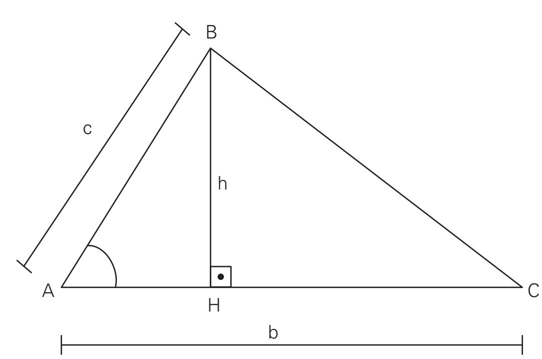
ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa.



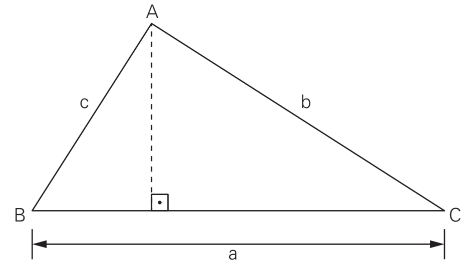
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Área de um triângulo em função da medida dos lados e do ângulo compreendido



$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2}$$

Área do triângulo por meio da fórmula de Heron



O semiperímetro (p) de um triângulo corresponde à metade de seu perímetro:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. UPE – Um triângulo UPE é retângulo; as medidas de seus lados são expressas, em centímetros, por números naturais e formam uma progressão aritmética de razão 5. Quanto mede a área do triângulo UPE?

a) 15 cm²　**c)** 125 cm²　**e)** 300 cm²
b) 25 cm²　**d)** 150 cm²

Resolução

Sejam l, l + 5 e l + 10 as medidas dos lados do triângulo UPE.

Logo, pelo teorema de Pitágoras:

$(l + 10)^2 = l^2 + (l + 5)^2$

$l^2 + 20l + 100 = l^2 + l^2 + 10l + 25$

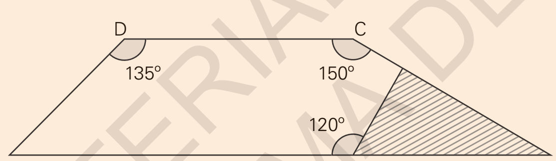
$l^2 - 10l - 75 = 0$

$l = 15$ cm

Sendo assim, o resultado pedido é $\frac{15 \cdot 20}{2} = 150$ cm².

$\therefore A = 150$ cm²

2. UDESC – No trapézio ABCD, representado na figura abaixo, temos que AE = 60 cm, DC = 40 cm, e que $\overline{CE}$ é igual à altura do trapézio ABCD.



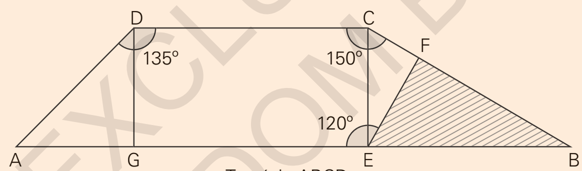
Trapézio ABCD

Com base nas informações, pode-se concluir que a área da região hachurada é igual a:

a) $100\sqrt{3}$　**c)** $\frac{200\sqrt{3}}{3}$　**e)** $50\sqrt{3}$
b) $300\sqrt{3}$　**d)** $150\sqrt{3}$

Resolução:

Para tornar mais fácil a análise, foram acrescentados na figura os pontos E, F e G e os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{CE}$, perpendiculares a $\overline{AB}$, conforme indicado na figura:



Trapézio ABCD

Nota-se por construção que:

GE = DC = 40 cm
AG = AE – GE = 60 – 40 = 20 cm

Então, $A\hat{D}G = 135° - 90° = 45°$. Como $A\hat{G}D = 90°$, $G\hat{A}D = 45°$. O triângulo AGD é isósceles, o que significa que h = DG = AG = 20 cm, sendo **h** a altura do trapézio.

Assim, $F\hat{C}E = 150° - 90° = 60°$ e $C\hat{E}F = 120° - 90° = 30°$, o que significa dizer que $C\hat{F}E = 180° - 30° - 60° = 90°$. Consequentemente, $B\hat{F}E = 90°$. Logo, a área do triângulo BFE desejada é igual a $\frac{EF \cdot FB}{2}$.

Do triângulo EFC, $EF = CE \cdot \cos 30° = h \cdot \cos 30° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ cm.

Então, $B\hat{E}F = 180° - 120° = 60°$, o que implica que $FB = EF \cdot \text{tg } 60° = 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 30$ cm.

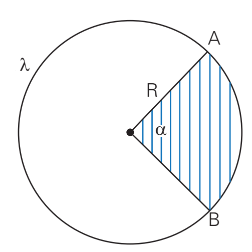
A área desejada é calculada da seguinte forma:

$$\text{Área} = \frac{EF \cdot FB}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot 30}{2} = 150\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$A = 150\sqrt{3}$ cm²

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – CÍRCULOS II

Setor circular



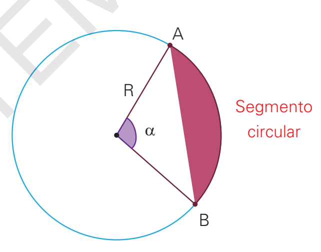
α em graus

$$A = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi R^2}{360^\circ}$$

α em radianos

$$A = \alpha \cdot R$$

Segmento circular



$\alpha < 180^\circ$

$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{360^\circ} - \frac{\text{sen}\alpha}{2}\right)$$

$\alpha = 180^\circ$

$$A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

$\alpha > 180^\circ$

$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{360^\circ} - \frac{\text{sen}\alpha}{2}\right)$$

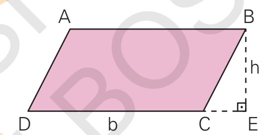
ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – OUTROS POLÍGONOS

QUADRILÁTEROS

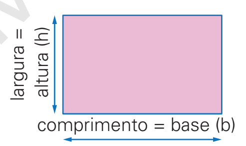
PARALELOGRAMO

$A = b \cdot h$



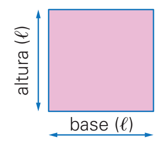
RETÂNGULO

$A = b \cdot h$



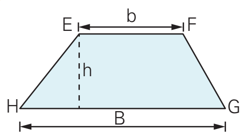
QUADRADO

$A = l^2$



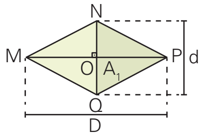
TRAPÉZIO

$A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$



LOSANGO

$A = \frac{D \cdot d}{2}$

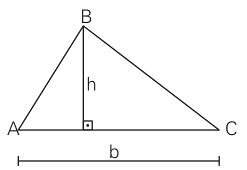


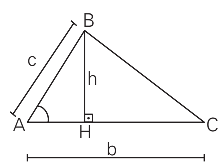
TRIÂNGULOS

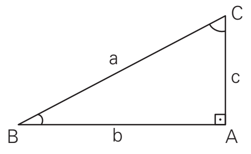
$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2}$

$A = \frac{b \cdot c}{2}$

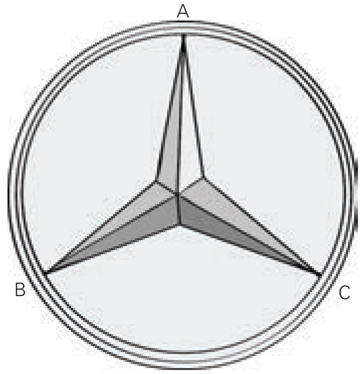






EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UFSC (adaptado) – No livro *A hora da estrela*, de Clarice Lispector, a personagem Macabéa é atropelada por um veículo cuja logomarca é uma estrela inscrita em uma circunferência, como mostra a figura.



Se os pontos A, B e C dividem a circunferência em arcos de mesmo comprimento e a área do triângulo ABC é igual a $27\sqrt{3}$ cm², determine a medida do raio dessa circunferência em centímetros.

Sabendo que os arcos determinados por A, B e C têm o mesmo comprimento, conclui-se que o triângulo ABC é equilátero.

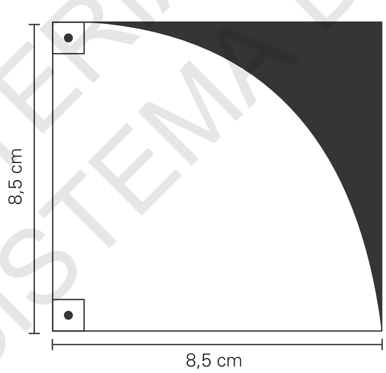
Sendo a área de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio r dada por $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ r², temos:

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 = 27\sqrt{3}$$

r = 6 cm

2. UPE – Brincando de construir circunferências e quadrados, Antônio construiu uma figura semelhante à que está representada abaixo. A área pintada dessa figura corresponde a quantos por cento da área total do quadrado?

Considere $\pi = 3,14$

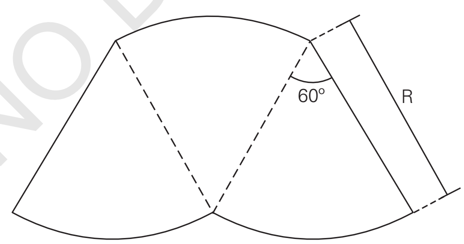


a) 15,53%
b) 17,00%
c) 21,50%
d) 33,40%
e) 34,00%

$$S_{quadrado} = 8,5 \cdot 8,5$$
$$S_{quadrado} = 72,25$$
$$S_{hachurada} = S_{quadrado} - S_{setor\ circular}$$
$$S_{hachurada} = 72,25 - \frac{\pi \cdot (8,5)^2}{4}$$
$$S_{hachurada} = 15,53375$$
$$\frac{S_{hachurada}}{S_{quadrado}} = \frac{15,53375}{72,25} = 0,215$$
$$\frac{S_{hachurada}}{S_{quadrado}} = 21,5\%$$

3. Enem C2-H6

O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

a) 16.
b) 28.
c) 29.
d) 31.
e) 49.

Sendo 3 · 60° = 180°, temos que:

$$\frac{1}{2}\pi R^2 < 50 \cdot 24$$

$R^2 < 800$

Logo, $0 < R < 28,2$ m.

Sendo assim, o maior valor natural de R, em metros, é 28.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

4. Enem – Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

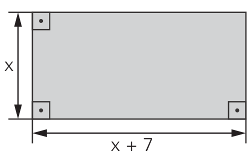


Figura A

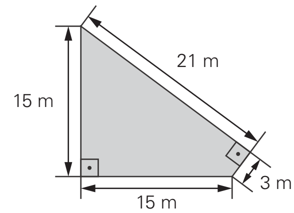


Figura B

Para satisfazer ao filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

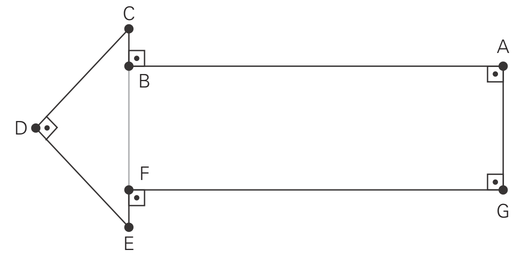
a) 7,5 e 14,5
b) 9,0 e 16,0
c) 9,3 e 16,3
d) 10,0 e 17,0
e) 13,5 e 20,5

As áreas são iguais. Então:

$$x \cdot (x + 7) = \frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2}$$

$x^2 + 7x - 144 = 0$
$x_I = 9$
$x_{II} = -16$ (não convém)
Sendo assim, o comprimento e a largura devem medir, respectivamente, 16 m e 9 m.

5. FGV-RJ – A seta indica um heptágono com AB = GF = = 2AG = 4BC = 4FE = 20 cm.



Sabe-se ainda que CD = ED e que o ângulo $C\hat{D}E$ é reto. Nas condições dadas, a área da região limitada por essa seta, em cm², é

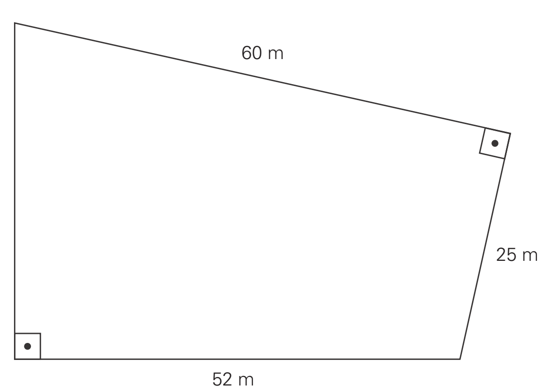
a) 250
b) 260
c) 280
d) 300
e) 320

A área pedida é dada por:

$\frac{1}{2}$ $CD^2 + AB \cdot AG$

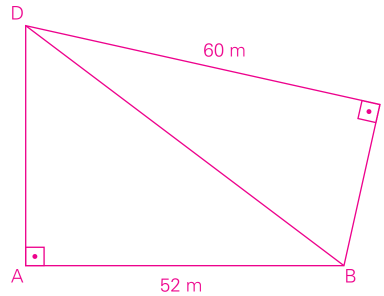
$\frac{1}{2} \cdot (10\sqrt{2})^2 + 20 \cdot 10 = 300$ cm²

6. ESPM-SP – A área do terreno representado na figura abaixo é igual a:



a) 1 896 m²
b) 1 764 m²
c) 2 016 m²
d) 1 592 m²
e) 1 948 m²

Considere a figura:



Do triângulo BCD, pelo teorema de Pitágoras:

$BD^2 = BC^2 + CD^2$

$BD^2 = 25^2 + 60^2$

$BD^2 = 5^2 \cdot (5^2 + 12^2)$

$BD^2 = 65^2\ m^2$

Logo, do triângulo ABD, utilizando novamente o teorema de Pitágoras:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$65^2 = 52^2 + AD^2$

$AD = \sqrt{(65-52)\cdot(65+52)}$

$AD = 39\ m$

A resposta é dada por:

$(ABCD) = (ABD) + (BCD)$

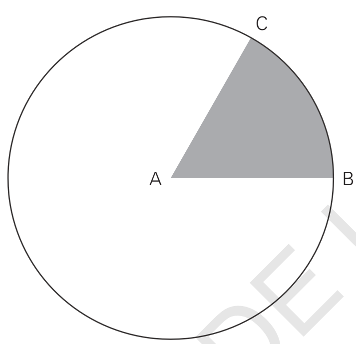
$(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD$

$(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (52 \cdot 39 + 25 \cdot 60)$

$(ABCD) = 1\,764\ m^2$

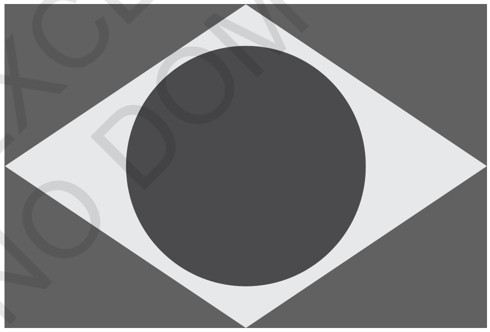
EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Unisinos-SP – Considerando o círculo de raio 4 cm, qual a área, em cm², do setor circular determinado pelos pontos A, B e C, sabendo-se que $C\hat{A}B = 60°$?



a) 4π
b) 2π
c) $\frac{8\pi}{3}$
d) $\frac{4\pi}{3}$
e) $\frac{2\pi}{3}$

8. IFSC – Em ano de Copa do Mundo, a bandeira brasileira se torna famosa. É possível construí-la com várias figuras geométricas. Suponha que você queira pintar a figura a seguir da seguinte maneira: a parte dos triângulos, da cor verde; a parte do losango, de amarelo; e a do círculo, de azul.



O retângulo possui 8 cm de altura e 12 cm de comprimento; já o círculo possui 3 cm de raio. Assinale a alternativa que apresenta a medida da área CORRETA a ser pintada de verde e de azul, respectivamente:

a) 24 cm² e 9π cm²
b) 96 cm² e 9π cm²
c) 48 cm² e 3π cm²
d) 24 cm² e 3π cm²
e) 48 cm² e 9π cm²

9. UECE – Considere a circunferência com centro no ponto O e cuja medida do raio é 2 m. Se AB é um diâmetro desta circunferência e C é um ponto sobre a circunferência tal que a medida do ângulo $C\hat{O}B$ é 60°, então a medida da área da região interior à circunferência, limitada pela corda AC e pelo menor arco determinado por A e C, é

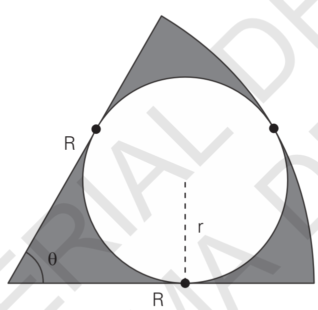
a) $\frac{4\pi}{6} - \sqrt{3}$

b) $\frac{4\pi}{6} + \sqrt{3}$

c) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

d) $\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$

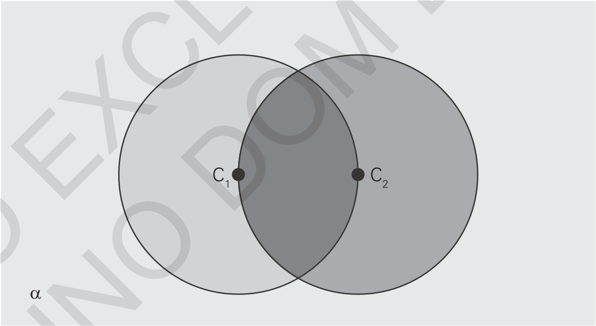
10. Unicamp-SP – A figura abaixo exibe um círculo de raio r que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ.



a) Para $\theta = 60°$, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.

b) Determine o valor de $\cos\theta$ no caso em que $R = 4r$.

11. UERJ – Na figura abaixo, estão representados dois círculos congruentes, de centros C_1 e C_2, pertencentes ao mesmo plano α. O segmento $\overline{C_1C_2}$ mede 6 m.



A área da região limitada pelos círculos, em cm^2, possui valor aproximado de:

a) 108

b) 162

c) 182

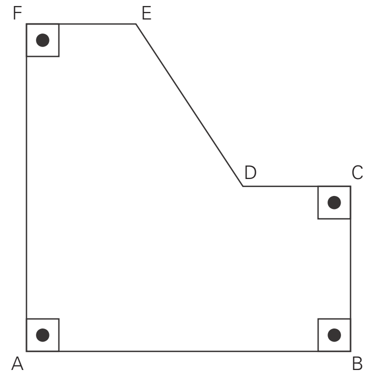
d) 216

12. PUC-RJ – Na figura abaixo, temos que:

$\overline{AB} = \overline{AF} = 6$ cm

$\overline{BC} = 3$ cm

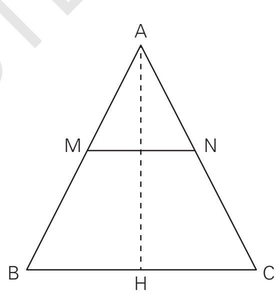
$CD = \overline{EF} = 2$ cm



a) Calcule o valor de $\overline{DE}$.

b) Calcule a área do polígono ABCDEF.

13. Acafe-SC – Na figura, AM = 8 cm, BM = 10 cm, BC = 54 cm, AH = $\frac{45}{2}$ cm e $\overline{MN} \mathbin{//} \overline{BC}$.



Em relação (aproximada) entre a área do trapézio BCMN e a área do triângulo AMN, é correto afirmar:

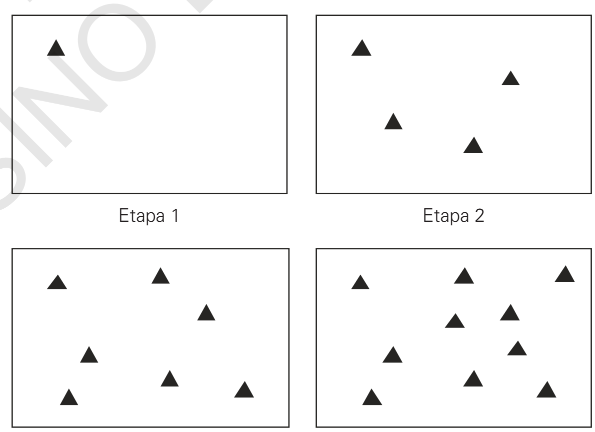
a) A área do trapézio é o quádruplo da área do triângulo.

b) Diferem entre si em 360 cm².

c) O trapézio é 200% maior que o triângulo.

d) A razão entre as áreas é $\frac{13}{5}$.

14. UFG-GO – Uma chapa retangular com 170 cm² de área é perfurada, por etapas, com furos triangulares, equiláteros, com 1 cm de lado, como indica a figura a seguir.



Etapa 1 Etapa 2

Etapa 3 Etapa 4

O número de furos acrescentados em cada etapa, a partir da segunda, é sempre o mesmo e não há interseção entre os furos. O porcentual da chapa original que restará na etapa 14 é, aproximadamente,

(Dado: $\sqrt{3} \approx 1,7$)

a) 10%

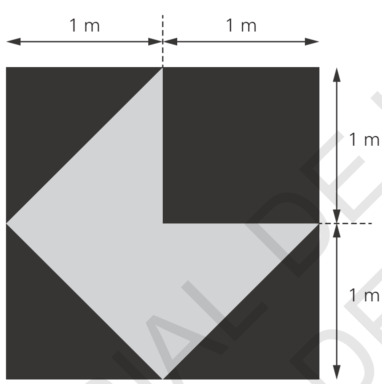
b) 30%

c) 70%

d) 80%

e) 90%

15. FGV-RJ – A figura a seguir representa a tela de um quadro pós-moderno, um quadrado cujos lados medem 2 metros. Deseja-se pintar o quadro nas cores cinza e preta, como descrito na figura.

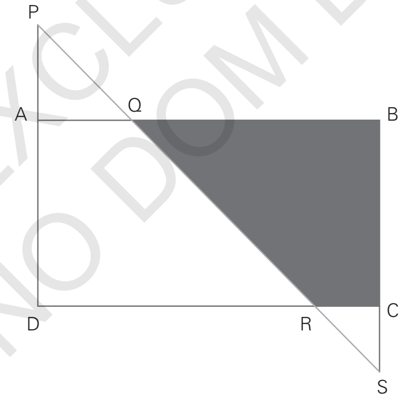


a) Qual a área que deverá ser pintada em preto? Expresse a resposta em metros quadrados. Qual é a proporção de cor preta para cor cinza?

b) Se a pintura na cor preta custa R$ 100,00 o metro quadrado, e a pintura na cor cinza, R$ 200,00 o metro quadrado, qual será o custo total de pintura do quadro?

c) Se as cores forem invertidas (sendo a área cinza pintada de preto e a área preta pintada de cinza), qual será a variação percentual do custo total de pintura do quadro, com relação ao custo total obtido no item B?

16. PUC-SP – Considere o retângulo ABCD, com AB = 8 cm, BC = 5 cm e o segmento $\overline{PS}$ que intersecta os prolongamentos dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ nos pontos P e S, respectivamente, conforme mostra a figura.

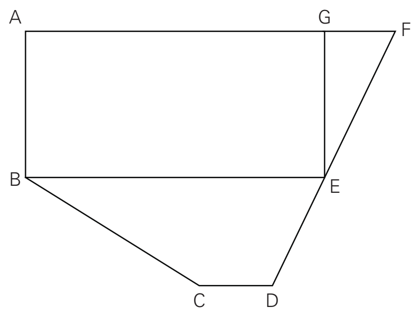


Fora de escala

Sabendo que AP = 3 cm e CS = 2 cm, a área do quadrilátero QBCR é

a) 18 cm².
b) 20 cm².
c) 22 cm².
d) 24 cm².

17. Fuvest - SP – O mapa de uma região utiliza a escala de 1:200 000. A porção desse mapa, contendo uma Área de Preservação Permanente (APP), está representada na figura, na qual $\overline{AF}$ e $\overline{DF}$ são segmentos de reta, o ponto G está no segmento $\overline{AF}$, o ponto E está no segmento $\overline{DF}$, ABEG é um retângulo e BCDE é um trapézio. Se AF = 15, AG = 12, AB = 6, CD = 3 e DF = $5\sqrt{5}$ indicam valores em centímetros no mapa real, então a área da APP é



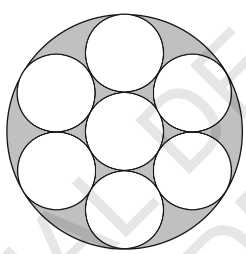
Obs.: Figura ilustrativa, sem escala.

a) 100 km²
b) 108 km²
c) 210 km²
d) 240 km²
e) 444 km²

ESTUDO PARA O ENEM

18. FGV-RJ C2-H7

Cada um dos 7 círculos menores da figura a seguir tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.



Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm², é igual a

a) π
b) $\frac{3\pi}{2}$
c) 2π
d) $\frac{5\pi}{2}$
e) 3π

19. Enem C2-H7

Um construtor precisa revestir o piso de uma sala retangular. Para essa tarefa, ele dispõe de dois tipos de cerâmicas:

I. cerâmica em forma de quadrado de lado **20 cm**, que custa **R$ 8,00** por unidade;
II. cerâmica em forma de triângulo retângulo isósceles de catetos com **20 cm**, que custa **R$ 6,00** por unidade.

A sala tem largura de **5 m** e comprimento de **6 m**.

O construtor deseja gastar a menor quantia possível com a compra de cerâmica. Sejam **x** o número de peças de cerâmica de forma quadrada e **y** o número de peças de cerâmica de forma triangular.

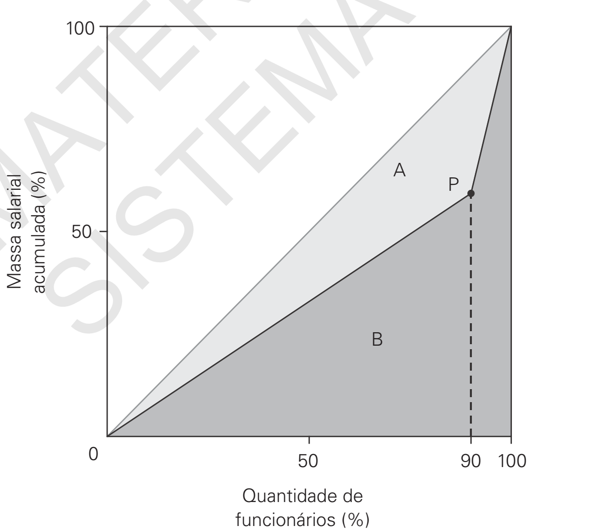
Isso significa, então, encontrar valores para **x** e **y** tais que $0{,}04x + 0{,}02y \geq 30$ e que tomem o menor possível valor de

a) $8x + 6y$.
b) $6x + 8y$.
c) $0{,}32x + 0{,}12y$.
d) $0{,}32x + 0{,}02y$.
e) $0{,}04x + 0{,}12y$.

20. Enem C2-H9

A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10% que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto P, cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura.

No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.



O Índice de Gini, que mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão $\frac{A}{A + B}$, em que A e B são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu Índice de Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.

Disponível em: <www.ipea.gov.br>. Acesso em: 4 maio 2016. (Adaptado)

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser

a) 40%
b) 20%
c) 60%
d) 30%
e) 70%

ÁREA DE FIGURAS PLANAS IV - POLÍGONOS REGULARES E FIGURAS CURVILÍNEAS

14

- Área do setor circular
- Área do segmento circular
- Apótema de um polígono regular inscrito em uma circunferência
- Área de figura curvilínea
- Área de círculo e coroa circular

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

POLÍGONOS REGULARES

Os polígonos com todos os lados congruentes e todos os ângulos com a mesma amplitude são denominados **polígonos regulares**. Todos eles podem ser inscritos em uma circunferência.

Vimos em módulos anteriores que o semiperímetro (p) de um polígono regular corresponde à metade do perímetro (2p).

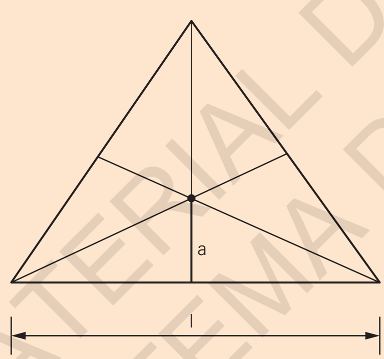
Para a área de um polígono regular de n lados, vamos considerar as seguintes relações:

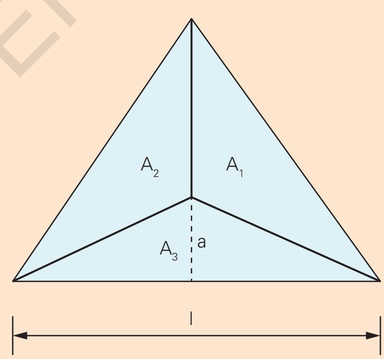
- Perímetro: 2p.
- Medida do lado do polígono: l.
- Medida do apótema: **a** (lembrando que o apótema corresponde ao segmento cujas extremidades são o centro do polígono e o ponto médio de um lado).

Agora, vamos calcular a área de dois polígonos distintos: o **triângulo equilátero** e o **hexágono**.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Este polígono regular tem os três lados congruentes (n = 3).





Temos:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

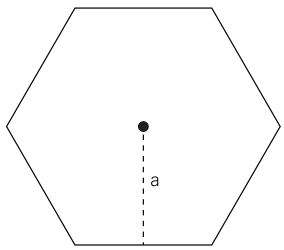
$$A = 3 \cdot \left(\frac{l \cdot a}{2}\right) \rightarrow A = 3l \cdot \frac{a}{2}$$

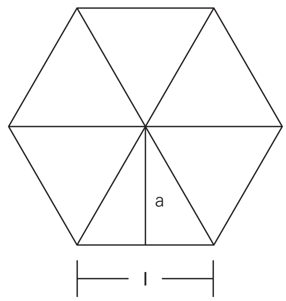
Como o perímetro do triângulo equilátero (2p) corresponde a (3l), obtemos:

$$A = 2p \cdot \frac{a}{2} \rightarrow A = p \cdot a$$

HEXÁGONO

Este polígono regular tem os seis lados congruentes (n = 6).





Temos:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

$$A = 6 \cdot \left(\frac{l \cdot a}{2}\right) \rightarrow A = 6l \cdot \frac{a}{2}$$

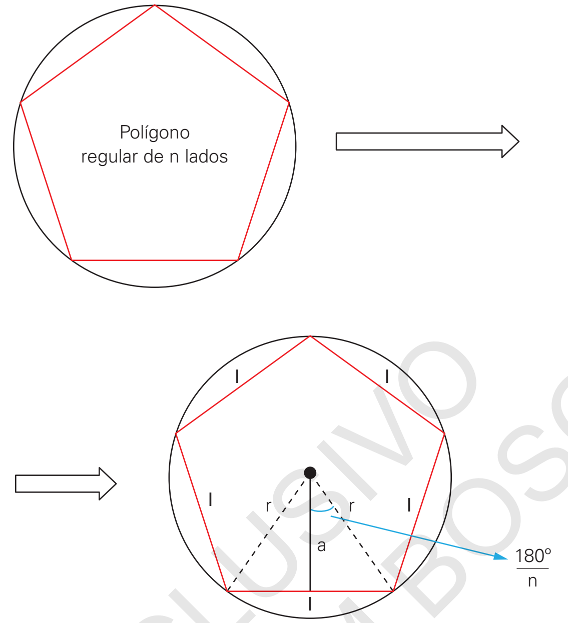
Como o perímetro do hexágono (2p) corresponde a 6l, obtemos:

$$A = 2p \cdot \frac{a}{2} \rightarrow A = p \cdot a$$

Em qualquer polígono regular, a área é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema. Ou seja, $A = p \cdot a$.

APÓTEMA DE UM POLÍGONO REGULAR INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA

Para calcular a área de qualquer polígono regular, basta sabermos o valor do apótema e de seu semiperímetro.



Como qualquer polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência, o cálculo de seu apótema é obtido por meio do número de lados **n** e da medida do raio **r** da circunferência.

$$\text{apótema: } a = r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$\text{lado: } l = 2 \cdot r \cdot \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Qual a área de um pentágono regular com apótema de 10 cm e 50 cm de perímetro?

Resolução

Primeiro calculamos o semiperímetro p.

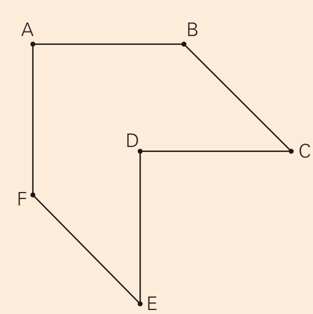
Como o perímetro (2p) = 50 cm: $p = \frac{50}{2} = 25$ cm.

Agora, calculamos a área do pentágono regular:

$A = p \cdot a = 25 \cdot 10$

$\therefore A = 250$ cm².

2. Unioeste-PR – Uma empresa de cerâmica desenvolveu uma nova peça (de cerâmica) para revestimento de pisos. A peça tem formato de hexágono não regular na forma do desenho da figura. Na figura, os segmentos AB e DC são paralelos entre si, bem como os segmentos AF e DE e os segmentos BC e EF. Também o ângulo BAF mede 90° e o ângulo DEF mede 45°. A empresa fabrica essa peça com todos os lados de mesma medida l. A área desta peça, em função do lado l, é



a) $2l^2$.

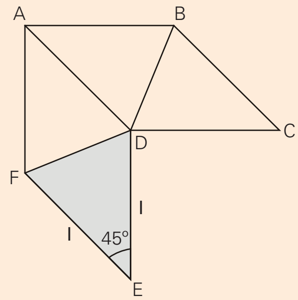
b) $l^2\sqrt{2}$.

c) $6l^2$.

d) $\frac{l^2\sqrt{2}}{2}$.

e) $\frac{l^2}{2}$.

Resolução

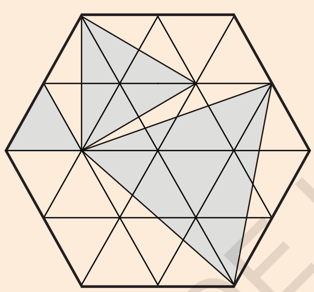


Para calcular a área do polígono, devemos calcular a área de um triângulo isósceles e multiplicá-la por 4.

$A = 4 \cdot A_{(\Delta DEF)} = 4\,\frac{1}{2}\,l^2 \cdot \text{sen}45° = l^2\sqrt{2}$

3. CFTRJ – A figura a seguir consta de um hexágono formado por 24 triângulos equiláteros de lado 1. A área sombreada é formada por três triângulos equiláteros de tamanhos distintos entre si.

Se S é a área sombreada e B é a área não sombreada do hexágono, o valor de $\frac{B}{S}$ é



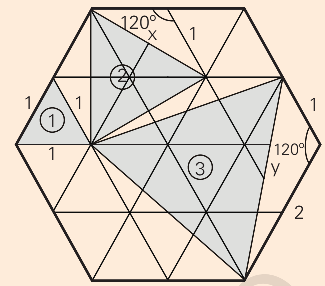
a) $\frac{11}{24}$

b) $\frac{15}{24}$

c) $\frac{9}{11}$

d) $\frac{13}{11}$

Resolução



Podemos utilizar o teorema dos cossenos. Assim:

$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 3$

$y^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120°$

$y^2 = 7$

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$S = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{4}$$

$$B = 24 \cdot \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{11 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{13 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

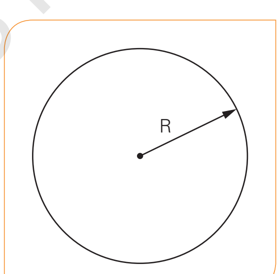
Sendo assim:

$$\frac{B}{S} = \frac{\frac{13 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{11 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{13}{11}$$

ÁREAS DE CÍRCULOS E COROA CIRCULAR

ÁREA DE UM CÍRCULO

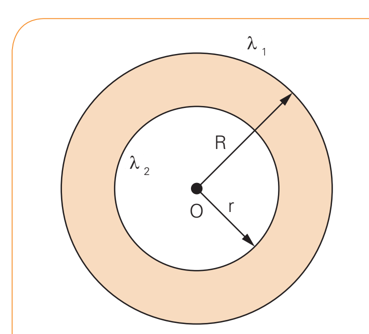
A área de um círculo é igual ao produto do quadrado do raio pelo número π.



$A = \pi r^2$

ÁREA DE UMA COROA CIRCULAR

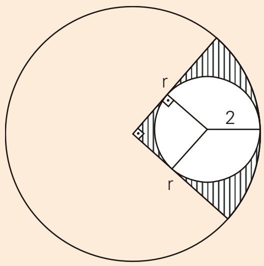
A área de uma coroa circular de raios **R** e **r** é calculada da seguinte maneira:



$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

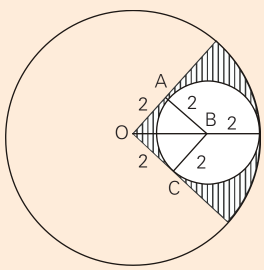
1. CFTMG – Uma circunferência de raio 2 tangencia outra circunferência e dois de seus raios, conforme a figura seguinte.



O valor da área hachurada é

a) $2\pi\sqrt{2}$
b) $3\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$
c) $2\pi\left(\sqrt{2}-3\right)$
d) $\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$

Resolução



$OB = 2\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado)

Logo, o raio do setor será $2\sqrt{2} + 2$.

Calculando a área assinalada:

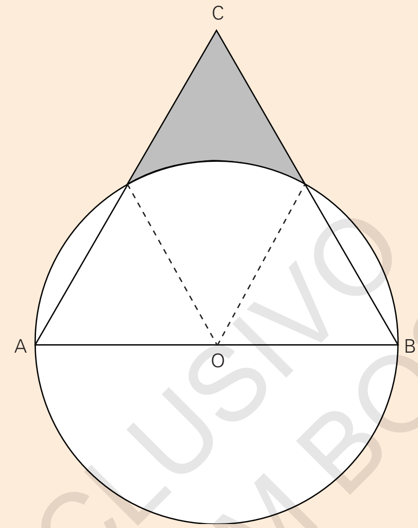
$$A = \pi \cdot \frac{\left(2\sqrt{2} + 2\right)}{4} - \pi \cdot 2^2$$

$$A = \pi \cdot ((\sqrt{2} + 1)^2 - 1)$$

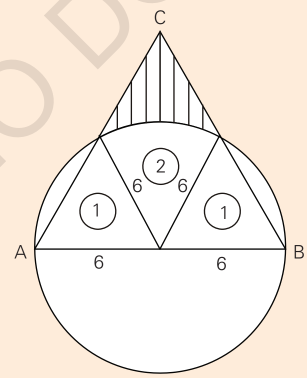
$$A = \pi \cdot (2 + 2\sqrt{2} - 1)$$

$$A = \pi \cdot (2 \cdot \sqrt{2} - 1)$$

2. UFPE – Na ilustração a seguir, ABC é um triângulo equilátero, e o lado AB contém o centro O da circunferência. Se a circunferência tem raio 6, qual o inteiro mais próximo da área da região sombreada (interior ao triângulo e exterior à circunferência)?



Resolução:



Lado do triângulo equilátero = 12 cm. Então:

$$A = A_{ABC} - 2 \cdot A_1 - A_2$$

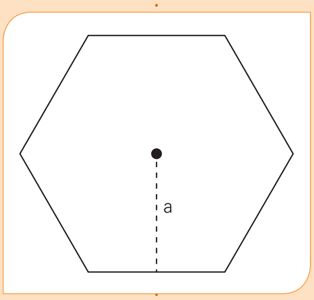
$$A = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot 6^2}{6}$$

$$A = 36 \cdot 1{,}7 - 2 \cdot 9 \cdot 1{,}7 - 18{,}84$$

$$A = 11{,}76$$

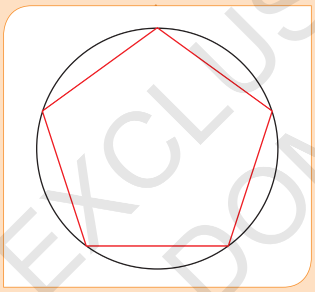
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS – POLÍGONOS REGULARES

Polígono regular



$A = \underline{\quad p \cdot a \quad}$

Polígono regular inscrito em uma circunferência



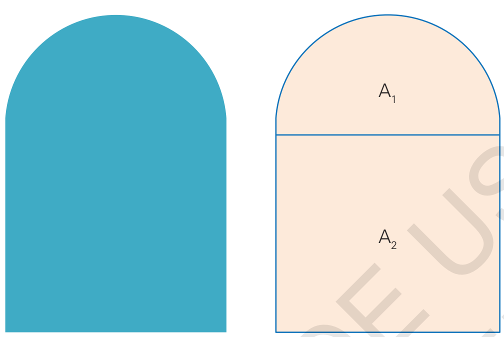
apótema: $a = r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$

lado: $l = \underline{\quad 2 \cdot r \quad} \cdot \text{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$

ROTEIRO DE AULA

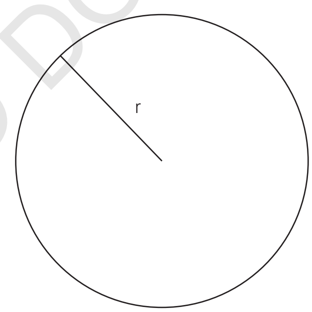
ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS I

Figura curvilínea



Segmentar a figura em áreas conhecidas.

Círculo



A = πr^2.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Mackenzie-SP – Um arame de 63 m de comprimento é cortado em duas partes, e com elas constroem-se um triângulo e um hexágono regulares. Se a área do hexágono é 6 vezes maior que a área do triângulo, podemos concluir que o lado desse triângulo mede

a) 5 m
b) 7 m
c) 9 m
d) 11 m
e) 13 m

Perímetro do triângulo: P = 3x, em que **x** é a medida do lado.

Perímetro do hexágono: 63 – 3x, em que $\left(\frac{21-x}{2}\right)$ é a medida do lado.

Sabendo que a área do hexágono é seis vezes a área do triângulo, temos a seguinte equação:

$$6 \cdot \left(\frac{21-x}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$441 - 42x + x^2 = 4x^2$

$3x^2 + 42x - 441 = 0$ (simplificar por 3)

$x^2 + 14x - 147 = 0$

$a = 1$, $b = 14$ e $c = -147$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-147)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-14 \pm 28}{2}$$

$$x_I = \frac{-14 + 28}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x_{II} = \frac{-14 - 28}{2} = \frac{-42}{2} = -21$$

Após solucionar a equação, obtemos x = 7 ou x = –21 (não convém).

Logo, concluímos que a área do triângulo é 7 m.

2. UEMA (adaptado) – Analise a situação a seguir: um arquiteto foi contratado para decorar a entrada de um templo religioso, no formato de um triângulo equilátero, com uma porta de madeira cujas dimensões medem 1,05 m por 2,5 m, inserida nesse triângulo. Sabe-se ainda que a altura do triângulo mede 4,25 m e que a área da porta não receberá decoração. Qual a área, em metros quadrados, a ser decorada? (use $\sqrt{3} = 1,7$)

Como sabemos, a área **S** de um triângulo equilátero de altura **h** é dada por:

$$S = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

Logo, o resultado pedido é igual a:

$$\frac{(4,25)^2 \cdot 1,7}{3} - 1,05 \cdot 2,5$$

$10,24 - 2,63$

$A = 7,61\ m^2$

3. UPE (adaptado) C2-H9

Rafael decidiu colocar cerâmicas com a forma de hexágonos regulares no piso da sala de seu escritório. Sabendo que a área do piso do escritório mede 25,5 m² que a cerâmica mede 10 cm de lado, e desconsiderando a área ocupada pelos rejuntes, quantas pedras de cerâmica serão necessárias para cobrir todo o piso dessa sala?

Considere $\sqrt{3} = 1,7$.

a) 225
b) 425
c) 765
d) 1 000
e) 1 250

10 cm = 0,1 m

Área de cada cerâmica em m²:

$$A = 6 \cdot \frac{(0,1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{(0,1)^2 \cdot 1,7}{4} = 0,0255\ m^2$$

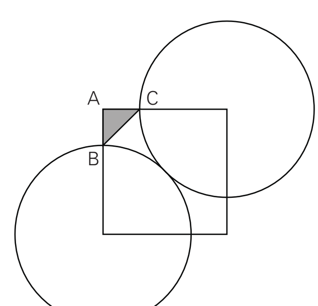
Número de cerâmicas:

$$\frac{25,5}{0,0255} = 1\,000$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

4. UFRGS-RS – Dois círculos tangentes e de mesmo raio têm seus respectivos centros em vértices opostos de um quadrado, como mostra a figura abaixo.



Se a medida do lado do quadrado é 2, então a área do triângulo ABC mede

a) $3 - 2\sqrt{2}$.
b) $6 - 4\sqrt{2}$.
c) $12 - 4\sqrt{2}$.
d) $\pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})$.
e) $\pi \cdot (6 - 4\sqrt{2})$.

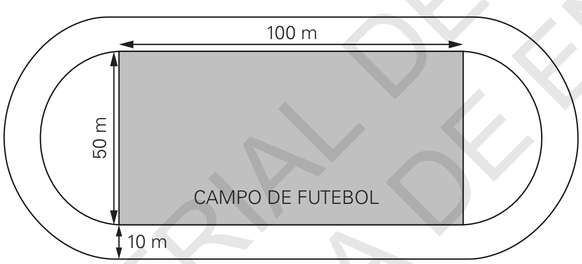
A diagonal do quadrado é igual ao diâmetro dos círculos. Sendo assim, se r é a medida do raio dos círculos, então $2r = 2\sqrt{2} \leftrightarrow r = \sqrt{2}$.
Dessa forma, $AB = AC = 2 - \sqrt{2}$. Portanto:

$$(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

$$(ABC) = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2}$$

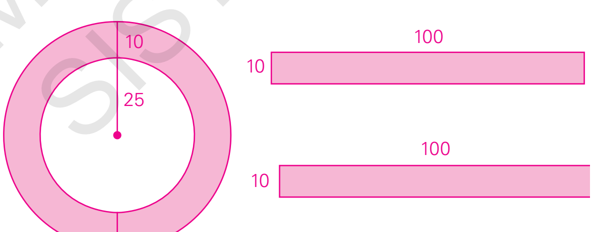
$$(ABC) = 3 - 2\sqrt{2}$$

5. UFPB (adaptado) – Para estimular a prática de atletismo entre os jovens, a prefeitura de uma cidade lançou um projeto de construção de ambientes destinados a esse fim. O projeto contempla a construção de uma pista de atletismo com 10 m de largura em torno de um campo de futebol retangular medindo 100 m x 50 m. A construção será feita da seguinte maneira: duas partes da pista serão paralelas às laterais do campo; as outras duas partes estarão, cada uma, entre duas semicircunferências, conforme a figura a seguir.



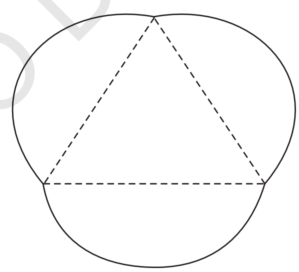
A partir desses dados, qual a área da pista de atletismo?

Segmentando a figura e calculando cada área individualmente, temos:



$A_{coroa} = \pi \cdot (35^2 - 25^2)$
$A_{coroa} = 3{,}14 \cdot (35^2 - 25^2)$
$A_{coroa} = 3{,}14 \cdot (600)$
$A_{coroa} = 1\,884\ m^2$
$A_{retângulos} = 2 \cdot 100 \cdot 10$
$A_{retângulos} = 2\,000\ m^2$
$A = A_{coroa} + A_{retângulos}$
$A = 1\,884 + 2\,000$
$A = 3\,884\ m^2$

6. Unifor-CE – A prefeitura do município de Jaguaribe, no interior cearense, projeta fazer uma reforma na praça ao lado da igreja no distrito de Feiticeiro. A nova praça terá a forma de um triângulo equilátero de 40 m de lado, sobre cujos lados serão construídas semicircunferências, que serão usadas na construção de boxes para a exploração comercial. A figura abaixo mostra um desenho da nova praça.



Com base nos dados acima, qual é aproximadamente a área da nova praça em m²?

Obs.: use $\sqrt{3} \cong 1{,}7$ e $\pi \cong 3{,}1$

a) 2 430
b) 2 480
c) 2 540
d) 2 600
e) 2 780

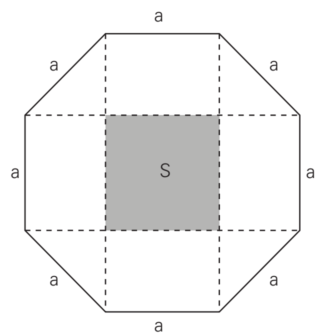
De acordo com as informações, o resultado pedido é dado por:

$$3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{40}{2}\right)^2 + \frac{40^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{3{,}1}{2} \cdot 400 + \frac{1600 \cdot 1{,}7}{4} =$$

$$= 1\,860 + 680 = 2\,540\ m^2.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Insper-SP – As disputas de MMA (*mixed martial arts*) ocorrem em ringues com a forma de octógonos regulares com lados medindo um pouco menos de 4 metros, conhecidos como "Octógonos". Medindo o comprimento exato de seus lados, pode-se calcular a área de um Octógono decompondo-o, como mostra a figura a seguir, em um quadrado, quatro retângulos e quatro triângulos retângulos e isósceles.



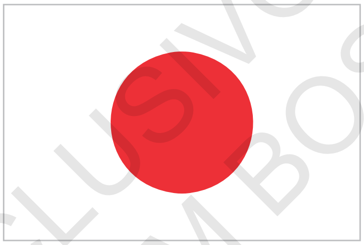
A medida do lado do quadrado destacado no centro da figura é igual à medida a do lado do "Octógono". Se a área desse quadrado é S, então a área do "Octógono" vale

a) $S(2\sqrt{2} + 1)$.
b) $S(\sqrt{2} + 2)$.
c) $2S(\sqrt{2} + 1)$.
d) $2S(\sqrt{2} + 2)$.
e) $4S(\sqrt{2} + 1)$.

8. UECE (adaptado) – Qual a medida da área, em m^2, de um hexágono regular inscrito em uma circunferência com raio que mede $\sqrt{2}$ m?

a) $3\sqrt{3}$.
b) $3\sqrt{2}$.
c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

9. IFPE (adaptado) – A imagem abaixo reproduz a bandeira de uma das nações mais desenvolvidas em todo o mundo, o Japão.



Disponível em: <http://www.br.emb-japan.go.jp/cultura/bandeira.html.> Acesso em: 06 out. 2017.

Sabendo que a bandeira tem formato retangular de dimensões 8 cm e 12 cm e um círculo central de 2 cm e raio, usando $\pi = 3$, qual a área da bandeira pintada de branco, em centímetros quadrados?

10. Unicamp-SP – O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a

a) 3,0 m^2.
b) 2,0 m^2.
c) 1,5 m^2.
d) 3,5 m^2.

11. UEM-PR – Considere um triângulo ABC retângulo em A a circunferência λ que passa pelos pontos A, B e C e considere D o ponto de BC de modo que AD é uma altura do triângulo ABC. Sendo o ponto O o centro de λ, assinale o que for correto.

01) A mediana relativa ao lado BC mede metade do comprimento do lado BC.

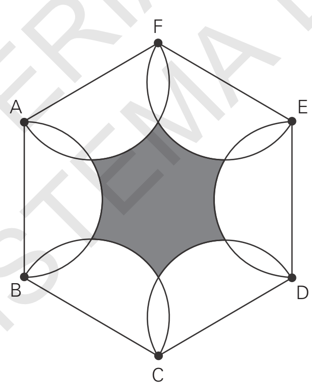
02) O comprimento do lado BC é igual à soma dos comprimentos dos lados AB e AC.

04) Os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes.

08) O segmento BC é um diâmetro da circunferência λ.

16) Se o triângulo ABC é isósceles, sua área corresponde a mais de um terço da área do círculo delimitado por λ.

12. UFRGS-RS – A partir de um hexágono regular de lado unitário, constroem-se semicírculos de diâmetros também unitários, conforme indicados na figura abaixo.



A medida da área sombreada é

a) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{4}$.

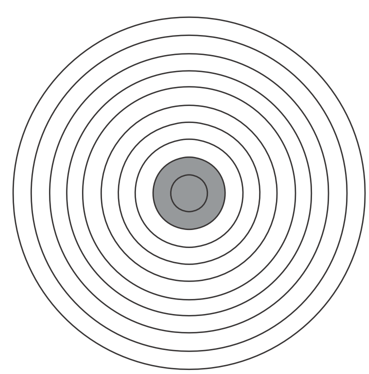
b) $\frac{\pi}{4}$.

c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

d) $\frac{3\sqrt{3} + \pi}{4}$.

e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13. Fatec-SP – Nas competições olímpicas de tiro com arco, o alvo possui 1,22 m de diâmetro. Ele é formado por dez circunferências concêntricas pintadas sobre um mesmo plano e a uma distância constante de 6,1 cm entre si, como vemos no esquema.



Podemos afirmar corretamente que a razão entre a área da região cinza e a área total do alvo, nessa ordem, é igual a

a) $\frac{3}{10}$.

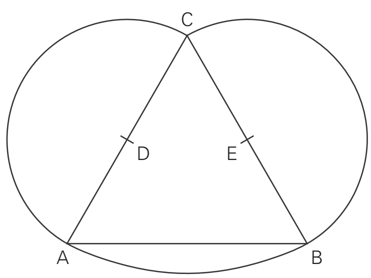
b) $\frac{2}{15}$.

c) $\frac{1}{25}$.

d) $\frac{10}{61}$.

e) $\frac{5}{21}$.

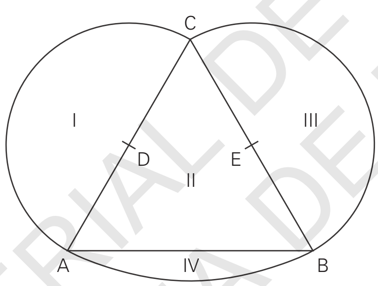
14. PUC-RJ – Seja ABC um triângulo equilátero de lado 16. Com centro em C, temos um arco de círculo entre A e B, como na figura. Sejam D e E os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Com centros em D e E, temos semicírculos de A a C e de B a C, como na figura.



a) Determine os raios dos círculos na figura, de centros C, D e E, respectivamente.

b) Calcule o comprimento dos arcos AC, CB e BA.

c) Calcule as áreas das quatro regiões indicadas na figura abaixo.



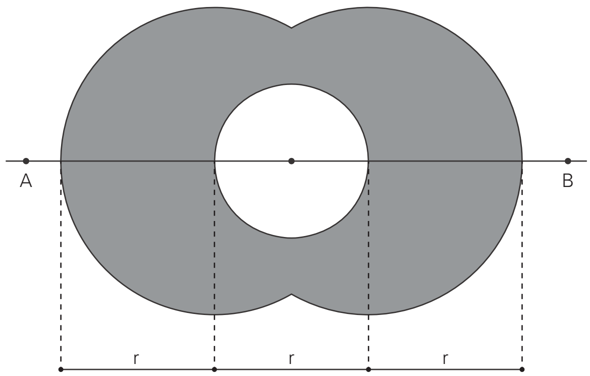
15. UECE – Um triângulo equilátero está inscrito em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 2 cm. A área das regiões que são internas à circunferência e externas ao triângulo, em cm^2, é igual a

a) $2\pi - 3\sqrt{3}$.
b) $4\pi - 2\sqrt{3}$.
c) $4\pi - 3\sqrt{3}$.
d) $3\pi - 4\sqrt{3}$.

16. UFRGS-RS – Considere um triângulo equilátero circunscrito a um círculo. Se a distância de cada vértice do triângulo ao centro do círculo é 2 cm, a área da região do triângulo não ocupada pelo círculo, em cm^2, é

a) $4\sqrt{3} - 2\pi$.
b) $3\sqrt{3} - \pi$.
c) $\sqrt{3} + \pi$.
d) π.
e) $3\sqrt{2}$.

17. Epcar-MG – Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.



A expressão que fornece o valor da área sombreada é

a) $\dfrac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9}\ r^2$

b) $\dfrac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12}\ r^2$

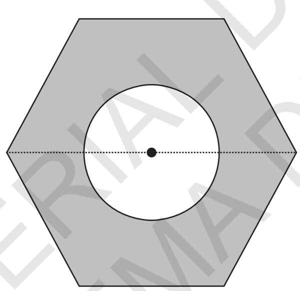
c) $\dfrac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9}\ r^2$

d) $\dfrac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}\ r^2$

ESTUDO PARA O ENEM

18. UPE C2-H7

A figura a seguir representa um hexágono regular de lado medindo 2 cm e um círculo cujo centro coincide com o centro do hexágono, e cujo diâmetro tem medida igual à medida do lado do hexágono.



Considere: $\pi \cong 3$ e $\sqrt{3} \cong 1,7$

Nessas condições, quanto mede a área da superfície pintada?

a) 2,0 cm²
b) 3,0 cm²
c) 7,2 cm²
d) 8,0 cm²
e) 10,2 cm²

19. Enem C2-H9

Em uma casa, há um espaço retangular medindo 4 m por 6 m, onde se pretende colocar um piso de cerâmica resistente e de bom preço. Em uma loja especializada, há cinco possibilidades de pisos que atendem às especificações desejadas, apresentadas no quadro:

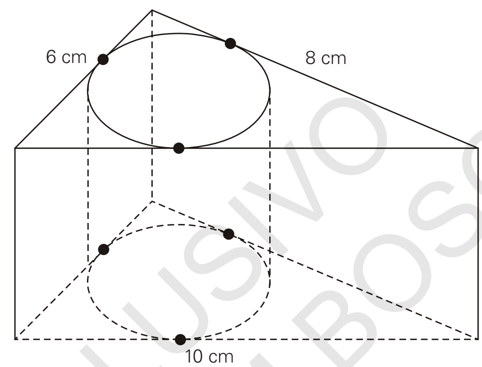
Tipo do piso	Forma	Preço do piso (em reais)
I	Quadrado de lado medindo 20 cm	15,00
II	Retângulo medindo 30 cm por 20 cm	20,00
III	Quadrado de lado medindo 25 cm	25,00
IV	Retângulo medindo 16 cm por 25 cm	20,00
V	Quadrado de lado medindo 40 cm	60,00

Levando-se em consideração que não há perda de material, dentre os pisos apresentados, aquele que implicará o menor custo para a colocação no referido espaço é o

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

20. Enem C2-H8

Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm, e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

a) 1 cm.
b) 2 cm.
c) 3 cm.
d) 4 cm.
e) 5 cm.

15 ÁREA DE FIGURAS CURVILÍNEAS E DE FIGURAS ESPECIAIS

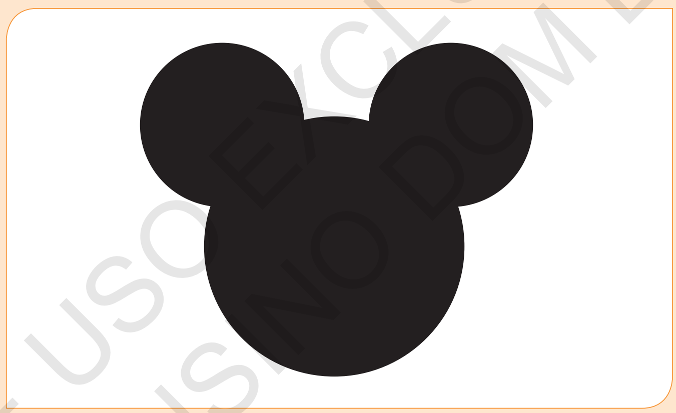
- Figuras com formatos curvilíneos
- Área de setor circular e segmento circular
- Área de figuras especiais

HABILIDADES

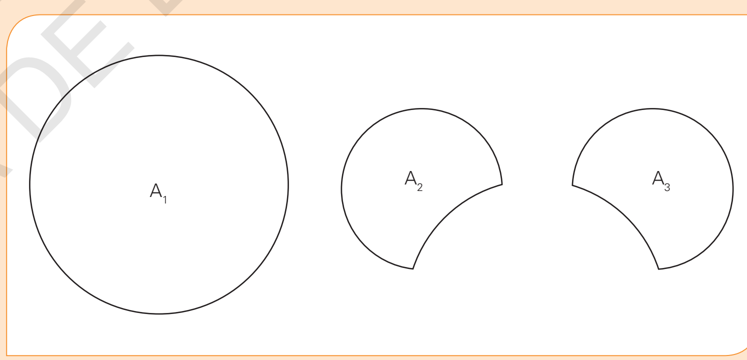
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

ÁREA DE UMA FIGURA CURVILÍNEA

Para trabalharmos o cálculo de áreas mais complexas, vamos imaginar a seguinte situação: uma fábrica decide produzir chaveiros cujo formato é semelhante a um personagem de desenho animado. Por se tratar da fabricação de muitos chaveiros, o ideal será fundir (derreter) o material e colocá-lo em moldes, como vimos na introdução. Porém, antes de iniciar a produção, é necessário saber qual será a área ocupada. Posteriormente, calcula-se o volume de material a ser utilizado.



Neste caso, notamos que a figura é formada por um círculo maior e dois setores circulares.



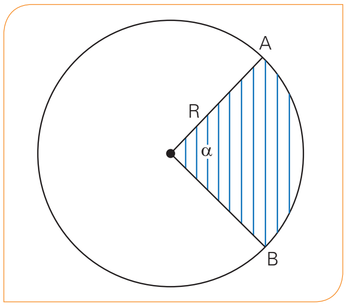
Portanto, a área procurada será calculada da seguinte forma: $A = A_1 + A_2 + A_3$.

O procedimento adotado para o cálculo de figuras curvilíneas requer o uso de algumas áreas já conhecidas. A seguir, vamos recordá-las.

ÁREAS DE SETOR CIRCULAR E SEGMENTO CIRCULAR

ÁREA DE SETOR CIRCULAR

A área de setor circular é proporcional à medida do arco. Podemos calculá-la de duas maneiras:



Quando a medida do ângulo central α estiver em graus:

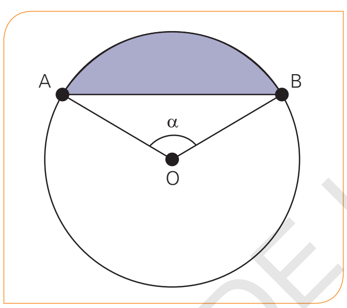
$$A = \frac{\alpha° \cdot \pi R}{360°}$$

Quando a medida do ângulo central α estiver em radianos:

$$A = \alpha \cdot R^2$$

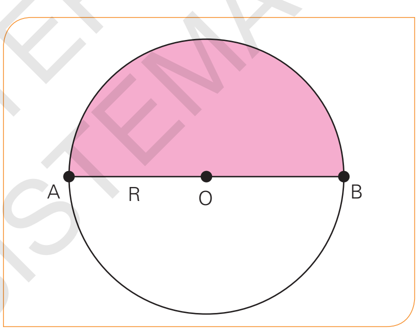
ÁREA DE SEGMENTO CIRCULAR

Podemos calcular a área do segmento circular da seguinte maneira:



$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{360°} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)$$, com α medido em graus.

Observe que, para α = 180° (semicírculo), temos:

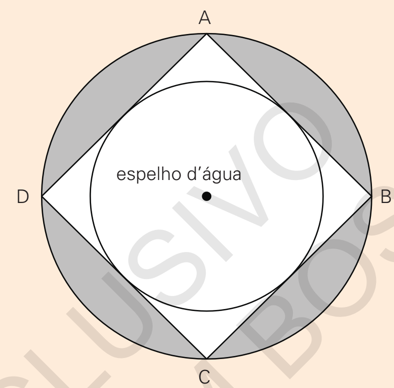


$$A = R^2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 180°}{360°} - \frac{\operatorname{sen}180°}{2}\right) = R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{0}{2}\right) \therefore$$

$$\therefore A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UFTM-MG – A figura mostra o projeto de um paisagista para um jardim em um terreno plano. Sabe-se que os círculos são concêntricos e que a área do quadrado ABCD é igual a 100 m². No círculo inscrito no quadrado haverá um espelho d'água, e na região sombreada do círculo circunscrito ao quadrado serão plantadas flores de várias espécies.



Usando π ≈ 3,1, determine a área aproximada

a) ocupada pelo espelho d'água.

b) da região onde serão plantadas flores.

Resolução

a) Seja l o lado do quadrado ABCD. Como a área do quadrado é igual a 100 m²:

$l^2 = 100$

$l = \sqrt{100}$

$l = 10$ m

Como o raio r do círculo inscrito mede a metade do lado do quadrado:

$r = \frac{10}{2} = 5$ m

Logo, a área ocupada pelo espelho d'água é dada por:

$\pi \cdot r^2 \cong 3{,}1 \cdot 5^2 = 77{,}5\ m^2$

b) Como o raio **R**, do círculo circunscrito ao quadrado ABCD, mede a metade da diagonal do quadrado:

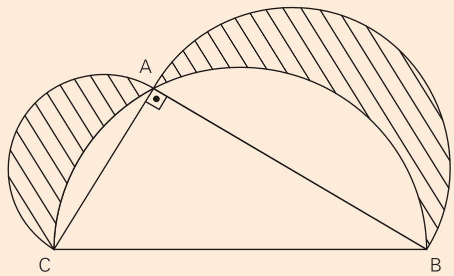
$R = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \cong 5 \cdot 1{,}4 = 9{,}8$ m

Portanto, a área onde serão plantadas flores é:

$A = \pi \cdot R^2 - 100 \cong 3{,}1 \cdot 9{,}8^2 - 100 \cong 197{,}7\ m^2$

$\therefore A \cong 197{,}7\ m^2$

2. IME-RJ – Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura a seguir, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm², é:



a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

Resolução

$BC^2 = 3^2 + 4^2$

$BC^2 = 25$

$BC = \sqrt{25}$

$BC = 5$

$A_1 + A_2$ é a área da região que obtemos ao subtrair a área do triângulo ABC da área do semicírculo de diâmetro BC.

A_3 é a área do semicírculo de diâmetro 3 cm.

A_4 é a área do semicírculo de diâmetro 4 cm.

$A = A_3 + A_4 - (A_1 + A_2)$, que é a área pedida.

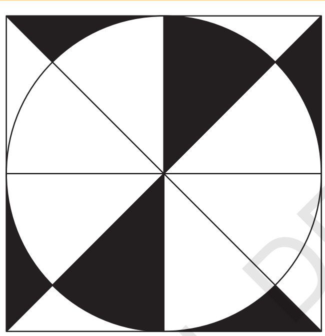
Logo: $A = \dfrac{\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + \dfrac{\pi\left(\frac{4}{2}\right)^2}{2} - \left(\dfrac{\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} - \dfrac{4 \cdot 3}{2}\right) = 6 \therefore$

$\therefore A = 6 \text{ cm}^2$

ÁREA DE FIGURAS ESPECIAIS

Observe a situação a seguir.

Esta figura será pintada de preto em um grande painel.



Sabendo que o raio da circunferência medirá 2 m, qual será a área pintada de preto? (adote: $\pi = 3{,}1$)

I. Área do setor circular

Primeiro, calculamos a área do círculo.
$A = \pi R^2 = 3{,}1 \cdot 2^2 = 12{,}4 \text{ m}^2$

$\therefore A_{círculo} = 12{,}4 \text{ m}^2$

Observe que o círculo foi dividido em oito partes iguais e que serão pintadas duas delas. Logo:

$A_{setor\ pintada} = 2 \cdot \dfrac{12{,}4}{8}. = 3{,}1\text{m}^2 \therefore A_{setor\ pintada} = 3{,}1 \text{ m}^2$

II. Área do setor quadrado

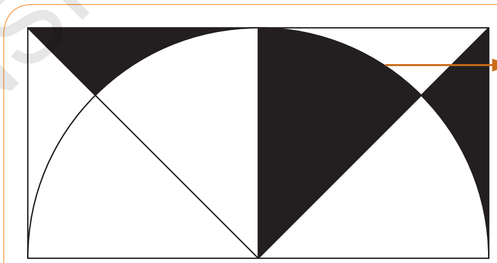
Como a circunferência está inscrita no quadrado, o diâmetro dela (4 m) corresponde ao lado do quadrado (l). Assim:

$A_{quadrado} = l^2 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m}^2$

$A_{quadrado} = 16 \text{ m}^2$

III. Área da região curvilínea

Subtraindo a área do círculo do quadrado, obtemos a área da região curvilínea que foi dividida em oito partes iguais. Apenas quatro dessas partes foram pintadas de preto.



$A_{região} = A_{quadrado} - A_{círculo}$

$A_{região} = 16 - 12{,}4 = 3{,}6 \text{ m}^2$

Como apenas quatro partes das oito da região curvilínea foram pintadas:

$A_{curvilínea\ pintada} = 4 \cdot \dfrac{3{,}6}{8} = 1{,}8 \text{ m}^2$

IV. Área total pintada

Por fim, obtemos a área pintada somando as áreas já calculadas:

$A_{pintada} = A_{setor\ pintada} + A_{curvilínea\ pintada}$

$A_{pintada} = 3{,}1 + 1{,}8 = 4{,}9 \therefore A_{pintada} = 4{,}9 \text{ m}^2$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. UFMG – Um quadrado Q tem área igual à área de n quadrados de área unitária de 1 cm², mais a área de um quadrado K.

Considerando essas informações, responda às questões abaixo em seus contextos.

a) Suponha que n = 19 e que a área do quadrado Q é de 100 cm². Calcule a medida do lado do quadrado K.

b) Suponha que o lado do quadrado K mede 8 cm e que n = 57. Calcule a medida do lado do quadrado Q.

Resolução

Sejam AQ a área do quadrado Q e AK, a área do quadrado k. Temos: $A_Q = n \cdot 1 + A_K$.

a) Sendo k o lado do quadrado K:

$100 = 19 + k^2$

$k^2 = 81$

$k = 9$ cm

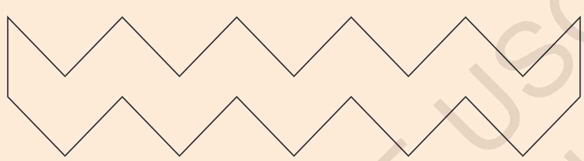
b) Seja q o lado do quadrado Q:

$q^2 = 57 + 82$

$q^2 = 121$

$q = 11$ cm

2. Insper-SP

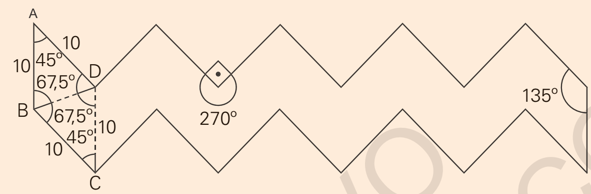


Cada lado do polígono indicado na figura mede 10 cm e seus ângulos internos têm medidas de 45°, 90°, 135° e 270°, como mostra a figura. A área desse polígono, em cm², é igual a

a) $500\sqrt{2}$.
b) $450\sqrt{2}$.
c) $400\sqrt{2}$.
d) $350\sqrt{2}$.
e) $300\sqrt{2}$.

Resolução:

Do enunciado, temos a figura:



Como ABD é um triângulo isósceles e $B\hat{A}D = 45°$, $A\hat{B}D = A\hat{D}B = 67{,}5°$.

Como $A\hat{B}C = 135°$ e $A\hat{B}C = A\hat{B}D + C\hat{B}D$, $135° = 67{,}5 + C\hat{B}D$. Ou seja, $C\hat{B}D = 67{,}5°$.

Note que ABD e CDB são congruentes, pelo caso LAL. Logo, ABCD é um losango.

Sendo $A_{\text{polígono}}$ a área do polígono citado no enunciado; A_{ABCD}, a área do losango ABCD; e A_{ABD}, a área do triângulo ABD, temos:

$A_{\text{polígono}} = 10 \cdot A_{ABCD}$

$A_{\text{polígono}} = 10 \cdot 2 \cdot A_{ABD}$

$A_{\text{polígono}} = 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \text{sen } 45°$

$A_{\text{polígono}} = 1000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$A_{\text{polígono}} = 500\sqrt{2}$ cm²

ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS CURVILÍNEAS II

Para calcular a área de figuras curvilíneas, deve-se dividi-las em áreas menores já conhecidas.

Área do setor circular

$A = \dfrac{\alpha^\circ \cdot R^2}{360^\circ}$

$A = \alpha \cdot R^2$

Área do segmento circular

$A = R^2 \cdot \left(\dfrac{\pi \cdot \alpha}{360^\circ} - \dfrac{\text{sen}\alpha}{2} \right)$

ROTEIRO DE AULA

ÁREAS DE FIGURAS ESPECIAIS

Para calcular a área de figuras especiais, deve-se dividi-las **em** áreas **menores já conhecidas.**

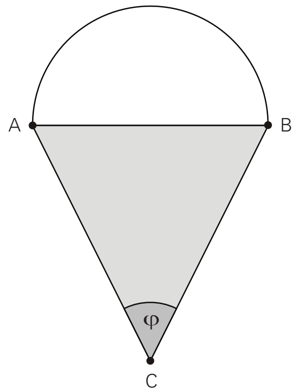
TRIÂNGULOS

QUADRILÁTEROS

CÍRCULOS

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

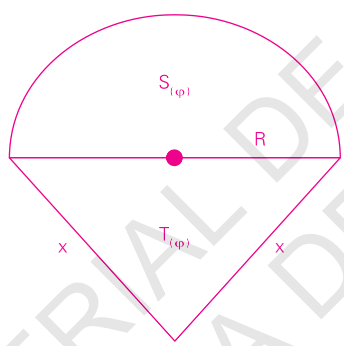
1. Unicamp-SP – O segmento AB é o diâmetro de um semicírculo e a base de um triângulo isósceles ABC, conforme a figura abaixo.



Denotando as áreas das regiões semicircular e triangular, respectivamente, por S(φ) e T(φ), podemos afirmar que a razão $\frac{S(\varphi)}{T(\varphi)}$, quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radianos, é

a) $\frac{\pi}{2}$.
b) 2π.
c) π.
d) $\frac{\pi}{4}$.

Vamos considerar a figura a seguir.



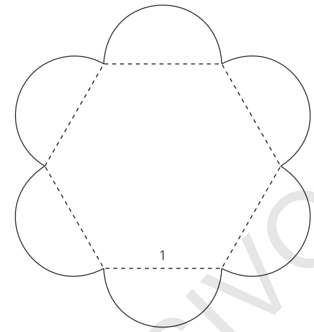
Sejam $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$; **R** igual ao raio do semicírculo; e **x** igual ao lado do triângulo isósceles:

$x^2 + x^2 = (2R)^2$

$x^2 = (2R)^2$

$$\frac{S_{(\varphi)}}{T_{(\varphi)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R}{\frac{1}{2} \cdot x \cdot x} = \frac{\pi \cdot R^2}{x} = \frac{\pi \cdot R^2}{2R^2} = \frac{\pi}{2}$$

2. UFRGS-RS (adaptado) – Uma pessoa desenhou uma flor construindo semicírculos sobre os lados de um hexágono regular de lado 1, como na figura abaixo.



Qual a área dessa flor?

A área A da figura é igual à soma das áreas de um hexágono de lado 1 com 3 círculos de raio $\frac{1}{2}$.

$A = 6 \cdot \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$A = \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right)$

3. UEG-GO C2-H6

Alexander Graham Bell foi o grande inventor da pipa tetraédrica, que pode ser construída com estruturas triangulares em diversos tamanhos, desde que mantidas suas propriedades. Para que a pipa possa subir, ela não pode ser coberta em toda a sua estrutura; em cada uma delas cobre-se apenas dois lados. A Figura 1 mostra o início da construção de uma delas com quatro estruturas. A Figura 2 mostra a pipa já completa. Supondo-se que o triângulo já coberto que compõe cada lado da estrutura possui base igual a 3 cm e altura de 2 cm, a área coberta de uma dessas pipas com 16 estruturas é

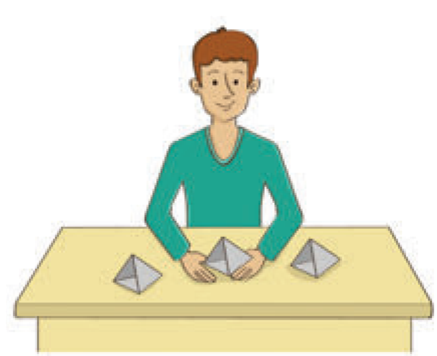


Figura 1

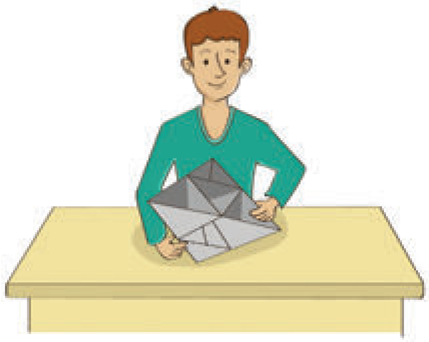


Figura 2

a) 96 cm²
b) 48 cm²
c) 40 cm²
d) 32 cm²
e) 24 cm²

Calculando a área de cada triângulo, temos:

$A_{\Delta} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$

Cada tetraedro tem dois triângulos cobertos, e a pipa tem 16 tetraedros em sua estrutura.

Sendo assim, a área pedida será dada por: $A = 16 \cdot 2 \cdot A_{\Delta} = 96$ cm².

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

4. Fuvest-SP – Uma cerca tem formato de um polígono regular de n lados, cada lado com comprimento l. A égua Estrela pasta amarrada à cerca por uma corda, também de comprimento l, no exterior da região delimitada pelo polígono. Calcule a área disponível para pasto supondo que:

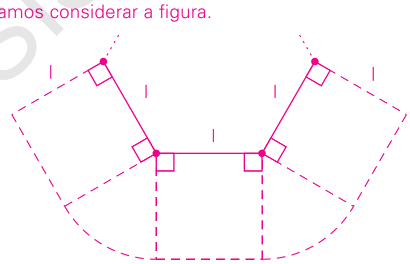
a) a extremidade da corda presa à cerca está fixada em um dos vértices do polígono;

b) a extremidade da corda pode deslizar livremente ao longo de todo o perímetro da cerca.

a) A área disponível para pasto corresponde à área de um setor circular de raio l, cujo ângulo central é o replemento do ângulo interno do polígono regular.

Logo, a resposta é: $\left(360° - \frac{180°\,(n-2)}{n}\right)\frac{\pi l^2}{360°} = \left(1 - \frac{n-2}{2n}\right)\pi l^2$

b) Vamos considerar a figura.

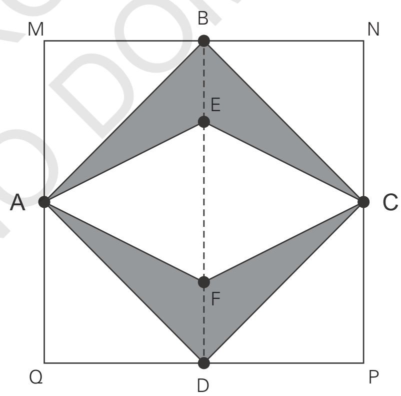


Se a extremidade da corda pudesse deslizar livremente ao longo de todo o perímetro da cerca, o resultado seria dado pela soma das áreas de n quadrados congruentes de lado **l** com as áreas de **n** setores circulares de raio l e ângulo central igual a $\frac{360°}{n}$.

Sendo assim, a resposta é replemento: $nl^2 + n\frac{\pi l^2}{n} = l^2(n + \pi)$.

5. Fatec-PR – Na figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado MNPQ de lado de medida l. Os pontos E e F pertencem ao segmento $\overline{BD}$, de modo que $BE = FD = \frac{l}{4}$.

A área do quadrado MNPQ é igual a k vezes a área da superfície destacada em cinza.



Assim sendo, o valor de k é

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

Calculando, temos:

$\Delta_{ADF} = \Delta_{CDF} = \Delta_{CBE} = \Delta_{ABE}$

$A_{ADF} = \frac{\frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2}}{2} = \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{2}$

$A_{ADF} = \frac{l^2}{16}$

$A_{cinza} = 4 \cdot \frac{l^2}{16}$

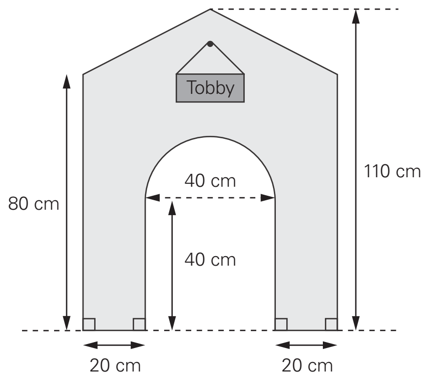
$A_{cinza} = \frac{l^2}{4}$

$A_{MNPQ} = l^2$

$\frac{A_{MNPQ}}{A_{cinza}} = \frac{l^2}{\frac{l^2}{4}} = l^2 \cdot \frac{4}{l^2}$

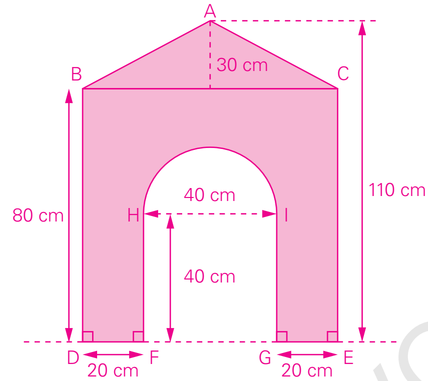
$\frac{A_{MNPQ}}{A_{cinza}} = 4$

6. IFPE (adaptado) – Os alunos do curso de Zootecnia do Campus Vitória adotaram um cachorro que sempre passeava próximo ao campus. A figura abaixo representa a vista frontal da casa que estão construindo para o cachorro Tobby.



Sabendo que a casa vai ser toda construída de madeira, qual é a superfície de madeira na parede frontal da casa, de acordo com a figura acima? (Use $\pi = 3{,}14$).

Analisando a situação:



A área frontal da casinha do cachorro será a área do triângulo ABC, mais a área do retângulo BCDE, menos o semicírculo de diâmetro HI, menos o quadrado HIFG. Sendo assim:

$A_{ABC} = \dfrac{80 \cdot 30}{2} = 1\,200$

$A_{BCDE} = 80 \cdot 80 = 6\,400$

$A_{HI} = \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{3{,}14 \cdot 20^2}{2} = 628$

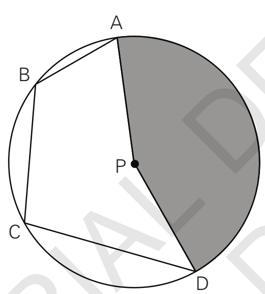
$A_{HIFG} = 40 \cdot 40 = 1600$

Calculando a área, temos:

$A_{procurada} = 1\,200 + 6\,400 - 628 - 1\,600 = 5\,372 \text{ cm}^2$

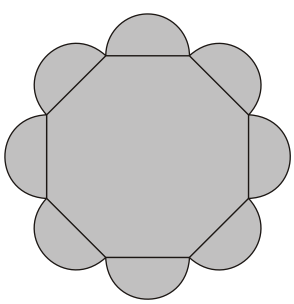
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UFTM-MG (adaptado) – Na figura, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são lados, respectivamente, de um octógono regular, um hexágono regular e um quadrilátero regular inscritos em uma circunferência de centro P e raio 6 cm.



Qual a área do setor circular preenchido na figura, em cm²?

8. UFRGS-RS – A figura abaixo é formada por oito semicircunferências, cada uma com centro nos pontos médios dos lados de um octógono regular de lado 2.



A área da região sombreada é

a) $4\pi + 8 + 8\sqrt{2}$.

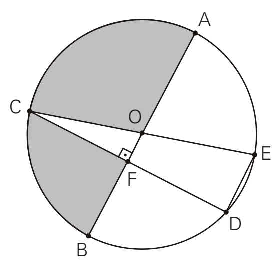
b) $4\pi + 8 + 4\sqrt{2}$.

c) $4\pi + 4 + 8\sqrt{2}$.

d) $4\pi + 4 + 4\sqrt{2}$.

e) $4\pi + 2 + 8\sqrt{2}$.

9. UFG-GO – Na figura a seguir, o círculo de centro O representa um terreno, o triângulo CDE, uma piscina e a região sombreada, um gramado.



Sabendo que AB e CE são diâmetros do círculo, que a medida do segmento DE é igual a 6 metros, que o ângulo DCE mede 30 graus e que AB é perpendicular ao segmento CD, calcule a área da região correspondente ao gramado.

10. Espcex-SP – Em um treinamento de arma de artilharia, existem 3 canhões, A, B e C. Cada canhão, de acordo com seu modelo, tem um raio de alcance diferente, e os três têm capacidade de giro horizontal de 360°. Sabendo que as distâncias entre A e B é de 9 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C é de 6 km, determine, em km², a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.

a) $\frac{23}{2}\pi$

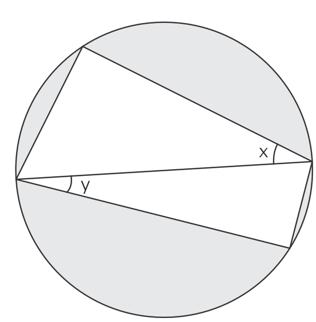
b) $\frac{23}{4}\pi$

c) $\frac{385}{8}\pi$

d) $\frac{195}{4}\pi$

e) $\frac{529}{4}\pi$

11. Fuvest-RS – O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio 1. A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.



Sendo x e y as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de x e y, é:

a) $\pi + \text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)$

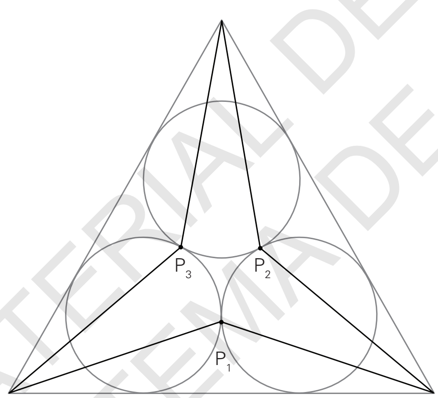
b) $\pi - \text{sen}(2x) - \text{sen}(2y)$

c) $\pi - \cos(2x) - \cos(2y)$

d) $\pi - \dfrac{\cos(2x) + \cos(2y)}{2}$

e) $\pi - \dfrac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)}{2}$

12. Fuvest-SP – São dadas três circunferências de raio r, duas a duas tangentes. Os pontos de tangência são P_1, P_2 e P_3.

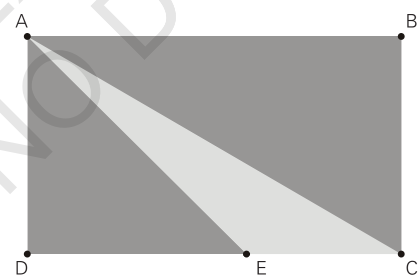


Calcule, em função de r,

a) o comprimento do lado do triângulo equilátero T determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira;

b) a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto P_1, P_2 e P_3 aos dois vértices do triângulo T mais próximos a ele.

13. UERJ – Considere uma placa retangular ABCD de acrílico, cuja diagonal AC mede 40 cm. Um estudante, para construir um par de esquadros, fez dois cortes retos nessa placa nas direções AE e AC, de modo que $D\hat{A}E = 45°$ e $B\hat{A}C = 30°$, conforme ilustrado a seguir:



Após isso, o estudante descartou a parte triangular CAE, restando os dois esquadros.

Admitindo que a espessura do acrílico seja desprezível e que $\sqrt{3} = 1,7$, a área, em cm^2, do triângulo CAE equivale a:

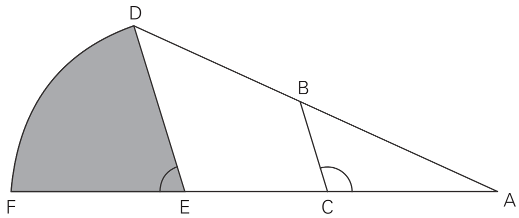
a) 80

b) 100

c) 140

d) 180

14. Epcar-MG (adaptado) – Na figura abaixo, tem-se que $\overset{\frown}{DF}$ é um arco de circunferência de centro E e raio DE.



Sabe-se que:

- ADE é um triângulo
- DE é paralelo a BC
- $\overline{BD} = 7$ cm
- $\overline{AC} = 10$ cm
- $\overline{BC} = 6$ cm
- $A\hat{C}B = 120°$
- $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

Qual a área do setor circular hachurado na figura, em cm²?

15. Insper-SP – As retas $\overline{AQ}$ e $\overline{BP}$ interceptam-se no ponto T do lado $\overline{CD}$ do retângulo ABCD, e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, conforme mostra a figura.

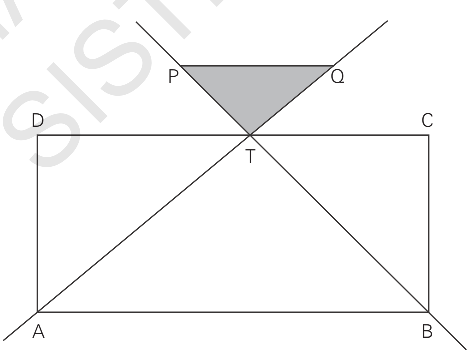
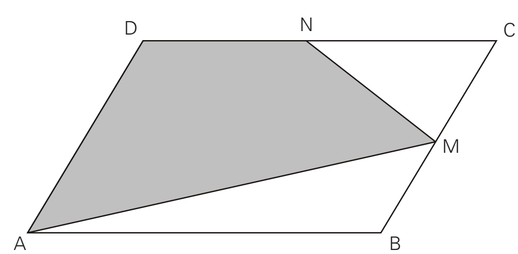


Figura fora de escala

Sabendo que 3QT = 2TA e que a área do triângulo PQT é igual a 12 cm², é correto concluir que a área do retângulo ABCD, em cm², é igual a

a) 36.
b) 42.
c) 54.
d) 72.
e) 108.

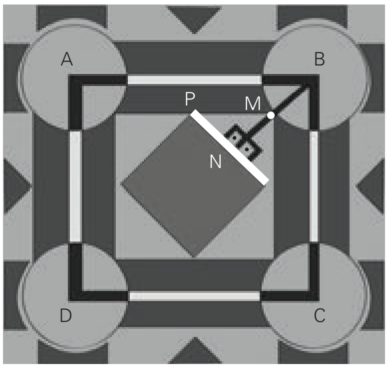
16. ESPM-SP – Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo de área 24 cm². M e N são pontos médios de BC e CD, respectivamente.



A área do polígono AMND é igual a:

a) 20 cm²
b) 16 cm²
c) 12 cm²
d) 15 cm²
e) 18 cm²

17. Insper-SP – A pavimentação indicada na fotografia possui simetria rotacional de 90° e é formada por quadrados, círculos e figuras com a forma . Em relação ao desenho feito sobre a fotografia, sabe-se que A, B, C e D são centros dos círculos, e que BM = MN = 1 m.



Em um plano totalmente recoberto por reproduções completas do quadrado ABCD indicado na figura, a razão entre a área preenchida com ladrilhos pretos e a área preenchida com ladrilhos brancos é igual a

a) $\dfrac{10 - \pi}{4 + \pi}$.

b) $\dfrac{14 - \pi}{4 + \pi}$.

c) $\dfrac{10 + \pi}{4 - \pi}$.

d) $\dfrac{14 + \pi}{4 - \pi}$.

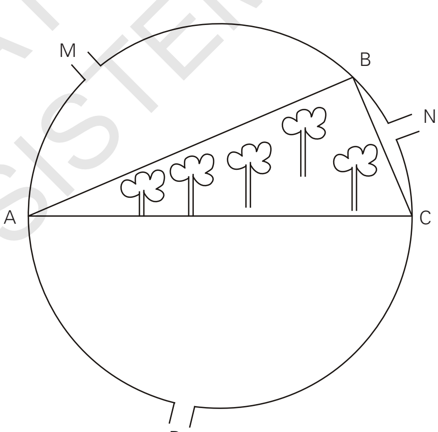
e) $\dfrac{10 - \pi}{4 - \pi}$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. CFTMG C2-H6

Um parque ecológico com formato circular, cujo diâmetro AC mede 500 metros, tem 3 entradas, M, N e P, que dão acesso ao espaço triangular ABC, reservado ao plantio de árvores, conforme figura abaixo.

Considere $\pi = 3$



Se o lado BC do triângulo mede 300 m, então, a área do parque, externa ao espaço plantado, em m², é igual a

a) 93 700

b) 127 500

c) 147 500

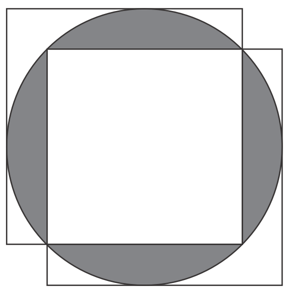
d) 153 750

e) 197 250

19. IFSul-RS C2-H9

Segundo historiadores, o cálculo de áreas é uma prática muito antiga. Os primeiros desses cálculos foram realizados no Egito, muitos anos atrás. Naquela época, os agricultores se deparavam com o problema de dividir as terras que não estavam inundadas pelas cheias do rio Nilo, bem como com problemas de demarcação de divisas, em virtude das altas taxas de impostos. Os registros desses cálculos estão no papiro de Rhind, documento muito antigo que mostra os problemas práticos de Matemática do Egito Antigo.

Na figura abaixo, temos dois quadrados de mesmo tamanho sobrepostos a um círculo de raio 3 cm.

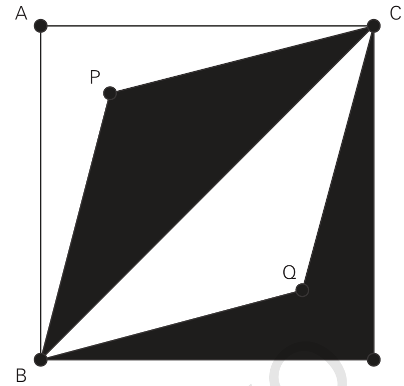


Qual é a área da parte sombreada?

a) $8(\pi - 1)\ cm^2$
b) $6(2\pi - 1)\ cm^2$
c) $9\pi - 25\ cm^2$
d) $9(\pi - 2)\ cm^2$
e) $6(\pi - 1)\ cm^2$

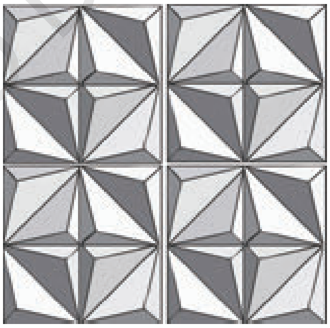
20. Insper-SP C2-H7

Uma artista plástica está criando uma nova obra, que será um quadro com alto relevo de formas geométricas. Para iniciar o projeto, ela desenhou o quadrado-base da obra, mostrada abaixo.



Esse quadrado tem 40 cm de lado, e o ponto P foi posicionado 8 cm para a direita e 8 cm para baixo do ponto A.
Traçando a diagonal do quadrado e tomando o ponto P como vértice, ela construiu o triângulo em preto e, usando a simetria em relação à diagonal, ela construiu o triângulo em branco, com vértice no ponto Q.

Em seguida, reproduzindo esse quadrado-base 16 vezes, ela construiu o quadro em relevo mostrado abaixo, elevando 2 tetraedros sobre cada quadrado-base, cada um com altura de 6 cm em relação ao plano do quadrado-base, conforme ilustra a figura a seguir.



A área do triângulo PBC do quadrado-base é igual a

a) $320\ cm^2$.
b) $480\ cm^2$.
c) $640\ cm^2$.
d) $800\ cm^2$.
e) $960\ cm^2$.

16

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

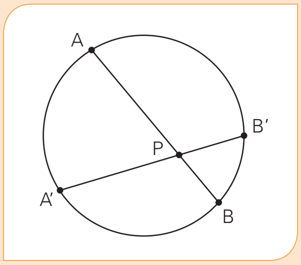
- Teoremas das cordas
- Tangência

HABILIDADES

- Compreender os teoremas das cordas na resolução de problemas que envolvam esses segmentos na circunferência.
- Resolver problemas que envolvam as propriedades de tangência de uma circunferência.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

TEOREMA 1 – RELAÇÃO ENTRE CORDAS

Observe que as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ da figura a seguir se intersectam no ponto P.

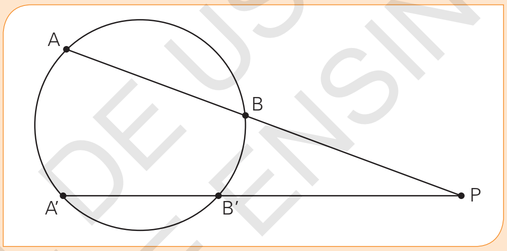


Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ da circunferência se intersectam em um ponto P de seu interior, então

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

TEOREMA 2 – RELAÇÃO ENTRE SECANTES

Observe as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e note que elas se cruzam em um ponto P exterior à circunferência.

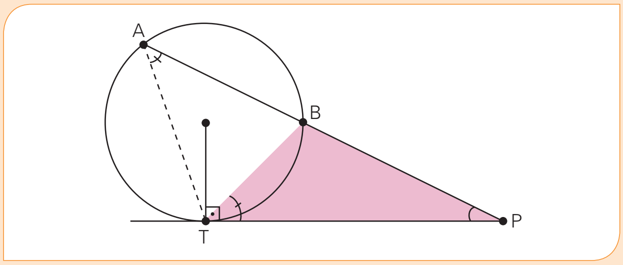


Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ da circunferência se intersectam em um ponto P externo a ela, então

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

TEOREMA 3 – RELAÇÃO ENTRE TANGENTE E SECANTE

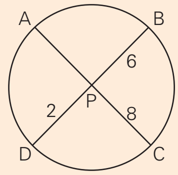
Observe que o segmento PA é secante a circunferência, enquanto o segmento PT é tangente a ela.



Se a reta suporte da corda $\overline{AB}$ da circunferência concorre com uma reta tangente a essa circunferência em um ponto P, sendo T o ponto de tangência, então $PA \cdot PB = (PT)^2$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – As cordas da circunferência a seguir se intersectam no ponto P. Utilizando a relação entre cordas, calcule o valor do segmento $\overline{PA}$.

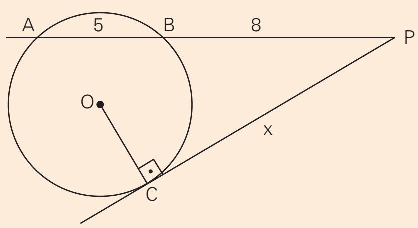


Resolução

Pela relação entre cordas, temos: $PA \cdot PC =$

$= PB \cdot PD \rightarrow PA \cdot 8 = 6 \cdot 2 \rightarrow PA = \frac{12}{8} = 4 \therefore \overline{PA} = 4$

2. Sistema Dom Bosco – Na figura a seguir, o segmento PC é tangente à circunferência, enquanto o segmento PA é secante. Utilize a relação entre secante e tangente em uma circunferência para calcular o valor de x.



Resolução:

Pela relação entre tangente e secante, temos:

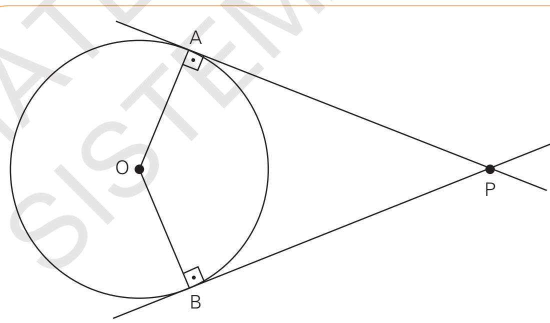
$PA \cdot PB = (PC)^2 \rightarrow (4 + 8) \cdot 8 = x^2 \rightarrow x^2 = 104 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{104}$

A medida negativa é descartada. Passamos, então, a ter $x = 2\sqrt{26}$

RETAS TANGENTES POR UM PONTO EXTERNO

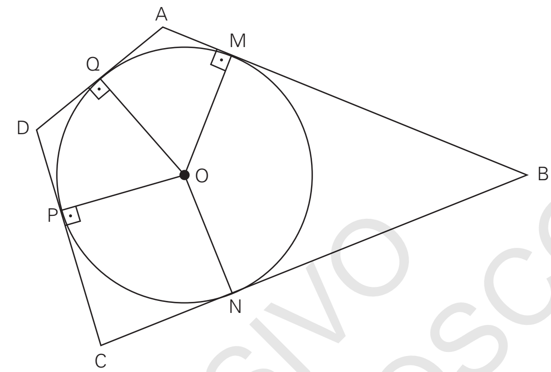
Dado um ponto **P** externo à circunferência, existem duas retas distintas que passam pelo ponto P e que são tangentes em dois pontos, **A** e **B**.



$\overline{PA} \cong \overline{PB}$

QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS

Quando é possível circunscrevermos um quadrilátero na circunferência, dizemos que ele é **circunscritível.**



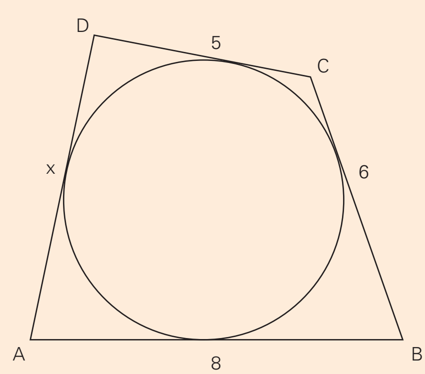
Se um quadrilátero convexo está circunscrito à circunferência, então a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Um quadrilátero convexo ABCD tem lados medindo, respectivamente, 8 cm, 6 cm, 5 cm e x cm. Calcule o valor de x para que esse quadrilátero seja circunscritível a uma circunferência.

Resolução

O quadrilátero em questão pode ser representado pela figura a seguir.



Ao aplicarmos a regra para quadriláteros circunscritíveis, temos:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$

Então:

$8 + 5 = 6 + x \rightarrow 13 - 6 = x \therefore x = 7$

ROTEIRO DE AULA

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Teorema das cordas

Teorema 1
Relação entre cordas
$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Teorema 2
Relação entre secantes
$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Teorema 3
Relação entre tangente e secante
$PA \cdot PB = (PT)^2$

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA II

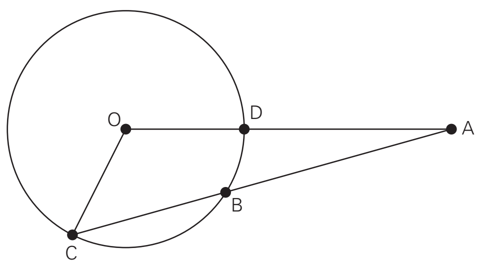
TANGÊNCIA

Retas tangentes por um ponto externo
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$

Quadriláteros circunscritíveis
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

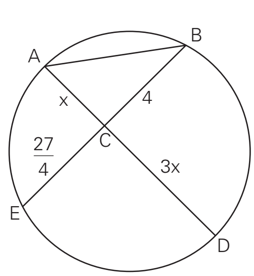
1. Sistema Dom Bosco – Na figura a seguir, AB = 10 cm, BC = 12 cm, AD = 4 cm, e O é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:



a) 22
b) 51
c) 55
d) 120
e) 128

$AB \cdot AC = AD \cdot AO$
$10 \cdot (10 + 12) = 4 \cdot (4 + DO)$
$10 \cdot 22 = 16 + 4DO \to 4DO = 220 - 16 = 204 \to DO = 51$
$AO = 51 + 4 = 55$ cm
$OC = 51$ cm
$AC = 10 + 12 = 22$ cm
Logo, o perímetro do triângulo AOC corresponde a $55 + 51 + 22 = 128$ cm.

2. Sistema Dom Bosco – A corda AB representa a hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Os catetos desse triângulo são segmentos de reta que pertencem às cordas AD e BE. Sendo o diâmetro da circunferência desconhecido, pode-se afirmar que o perímetro do triângulo ABC corresponde a:

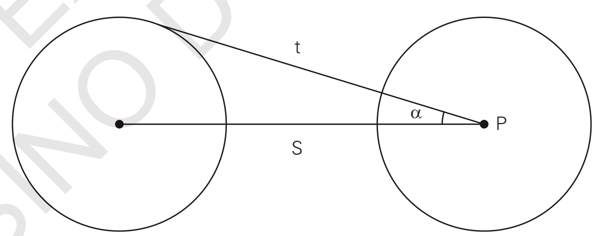


a) 1 cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) 5 cm

Pelo teorema 1 das cordas, obtemos: $x \cdot 3x = 4 \cdot \frac{27}{4} \to 3x^2 = 27 \to$
$\to x^2 = 9 \to x = \pm 3$
Como **x** tem que ser um valor positivo, $x = 3$.
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos: $AB^2 = 3^2 + 4^2 \to AB^2 = 9 - 16 = 25 \to AB = 5$
Assim, obtemos o perímetro do triângulo: $P = 3 + 4 + 5 \to P = 12$.
Portanto, $P = 12$ cm.

3. Unifor-CE C2-H7

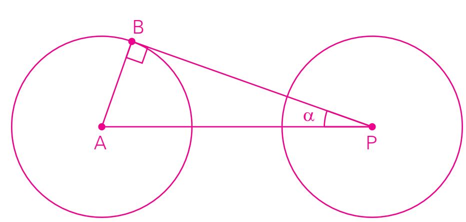
Os pneus de uma bicicleta têm raio R e seus centros distam 3R. Além disso, a reta t passa por P e é tangente à circunferência do pneu, formando um ângulo α com a reta s, que liga os dois centros.



Pode-se concluir que cos α

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Vamos considerar a seguinte figura:

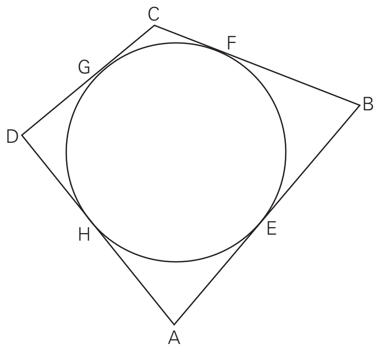


De acordo com a figura: $\overline{AP} = 3R$ e $\overline{AB} = R$
Usando o teorema de Pitágoras, obtemos: $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{PB}^2 \to$
$\to (3R)^2 = R^2 + \overline{PB}^2 \to \overline{PB} = 2\sqrt{2}\,R$.

Em consequência: $\cos\alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} \to \cos\alpha\ \frac{2\sqrt{2}R}{3R} \to \cos\alpha\ \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. Sistema Dom Bosco – O quadrilátero ABCD tangencia a circunferência nos pontos DEFG, conforme figura abaixo. Sabendo que o segmento AB = 10 cm, BC = 8 cm e CD = 9 cm, pode-se afirmar que o segmento AD mede:

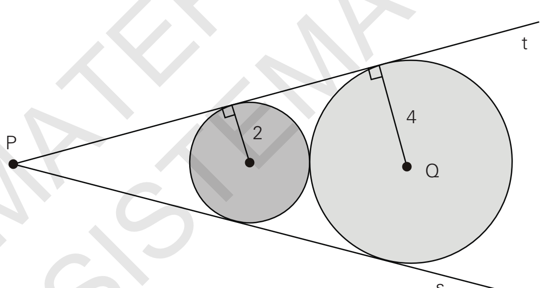


a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

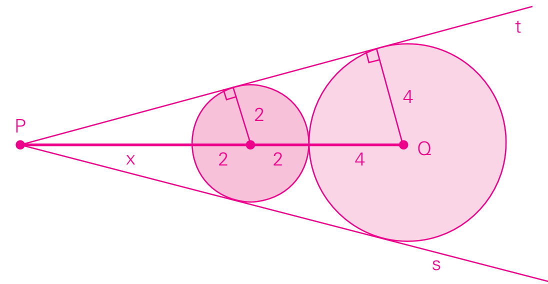
$10 + 9 = 8 + \overline{AD} \rightarrow 19 - 8 = \overline{AD} \therefore x = 11$

5. UFRGS-RS – Observe os discos de raios 2 e 4, tangentes entre si e às semirretas s e t, representados na figura abaixo.



A distância entre os pontos P e Q é

a) 9.
b) 10.
c) 11.
d) 12.
e) 13.



Por semelhança de triângulos, temos:

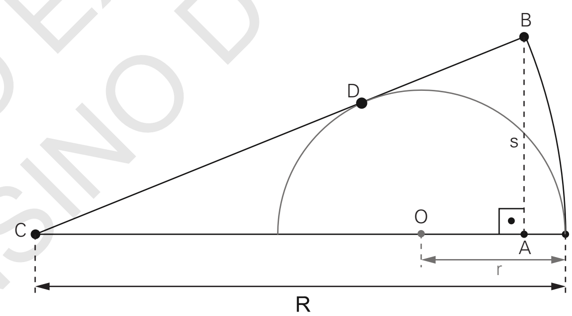
$$\frac{x+2}{x+8} = \frac{2}{4}$$

$4x + 8 = 2x + 16$

$x = 4$

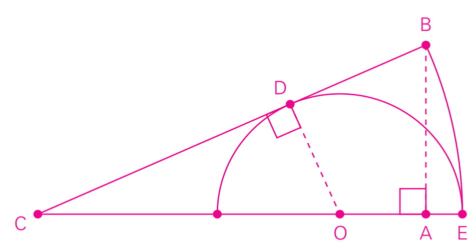
Portanto, a distância de P até Q vale 12.

6. UNESP – Uma semicircunferência de centro O e raio r está inscrita em um setor circular de centro C e raio R, conforme a figura.



O ponto D é de tangência de $\overline{BC}$ com a semicircunferência. Se $\overline{AB} = s$, demonstre que $R \cdot s = R \cdot r + r \cdot s$.

Vamos considerar a figura.



Como o segmento BC tangencia a semicircunferência:

$\triangle ODC \sim \triangle BAC$.

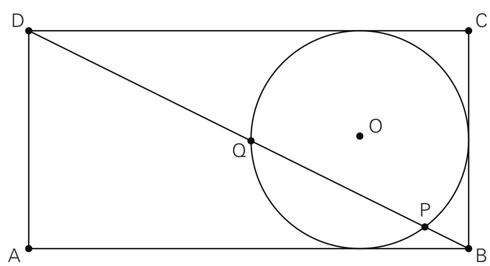
Então:

$\frac{BC}{OC} = \frac{BA}{OD} \rightarrow \frac{R}{R-r} = \frac{s}{r} \rightarrow R \times s - r \times s = R \times r \rightarrow R \times s =$

$= R \times r + r \times s$ (c. q. d.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UFMG – Nos séculos XVII e XVIII, foi desenvolvida no Japão uma forma particular de produzir matemática. Um dos hábitos que a população adotou foi o de afixar em templos placas contendo problemas, em geral de geometria. Essas placas, conhecidas como sangaku, apresentavam o problema com ilustrações e a resposta, sem registrar a solução dos autores. O seguinte problema foi adaptado de um desses sangakus: considere ABCD um retângulo com AB = 160 e AD = 80; tome uma circunferência de centro O tangente aos lados AB, BC e CD do retângulo, e seja BD uma de suas diagonais, interceptando a circunferência nos pontos P e Q.

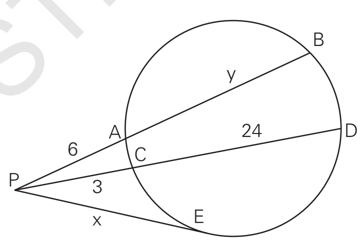


Considerando essas informações,

a) Determine o raio QO da circunferência.

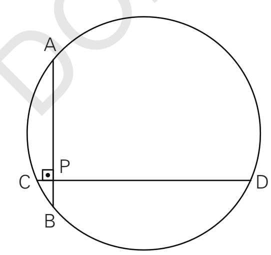
b) Determine o comprimento do segmento PQ.

8. Sistema Dom Bosco – Dada a figura, pode-se afirmar que a soma de **x** e **y** corresponde a:



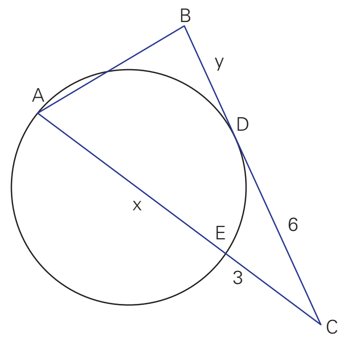
a) 16,3
b) 16,5
c) 23,2
d) 23,5
e) 30,1

9. FGV-RJ – As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um círculo são perpendiculares no ponto P, e AP = 6, PB = 4 e CP = 2. O raio desse círculo mede



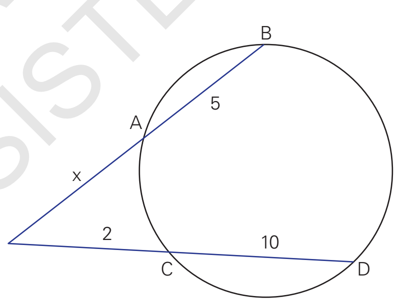
a) 5.
b) 6.
c) $3\sqrt{3}$.
d) $4\sqrt{2}$.
e) $5\sqrt{2}$.

10. Sistema Dom Bosco – O segmento AC é secante à circunferência, enquanto o segmento BC a tangencia. O triângulo ABC é isósceles, sendo congruentes os lados AB e BC. Logo, pode-se afirmar que x + y corresponde a:



a) 12
b) 9
c) 15
d) 21
e) 36

11. Sistema Dom Bosco – A figura a seguir representa dois segmentos de reta secantes à circunferência. Sendo x um número natural, pode-se afirmar que ele corresponde a:



a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

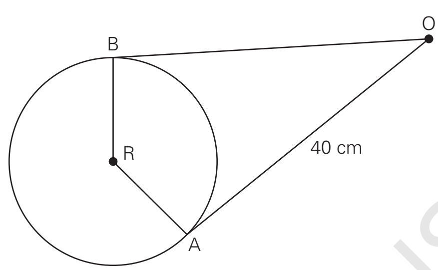
12. Fuvest-SP – As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta t é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta O_1O_2 no ponto Q. Sendo assim, determine

a) o comprimento P_1P_2;
b) a área do quadrilátero $O_1O_2\ P_2P_1$;
c) a área do triângulo QO_2P_2.

13. Sistema Dom Bosco – Um quadrilátero convexo ABCD possui lados medindo, respectivamente, 10 cm, 12 cm, 8 cm e x cm. Pode-se afirmar que o valor de x para que esse quadrilátero seja circunscritível a uma circunferência corresponde a:

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

14. Sistema Dom Bosco – A circunferência λ possui retas tangentes por um ponto externo O. Sabe-se que o seguimento AO mede 40 cm e que o diâmetro da circunferência equivale a 60 cm. Contudo, o perímetro do quadrilátero ABOR formado pelas tangentes e pelo raio da circunferência vale:

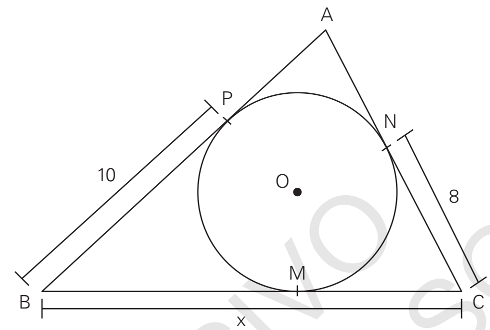


a) 20 cm
b) 80 cm
c) 100 cm
d) 140 cm
e) 200 cm

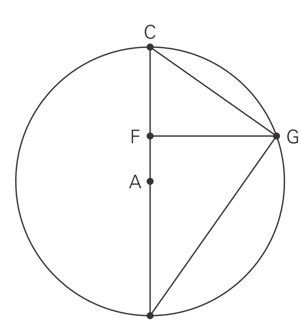
15. Sistema Dom Bosco – Observando a figura a seguir, determine (em cm):

a) o valor de x;

b) a medida do segmento AN, sabendo que o perímetro do triângulo ABC é 50 cm.

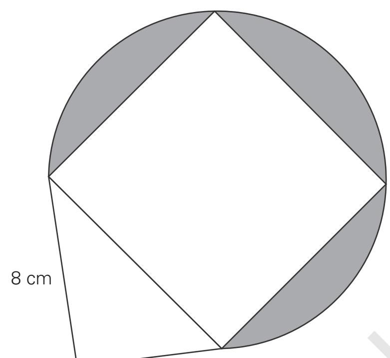


16. CFTMG (adaptado) – Na figura, A é o centro da circunferência, CD é o diâmetro e GF é a altura do triângulo CDG.



Sendo CG = 3 cm e DG = 4 cm, qual a medida, em cm, do segmento AF?

17. IFSul-RS (adaptado) – Considere a figura:



A área da região hachurada, em cm^2, é

a) $\frac{3}{4}(10\pi - 100)$

b) $\frac{3}{4}(50\pi - 100)$

c) $\frac{3}{4}(100\pi - 100)$

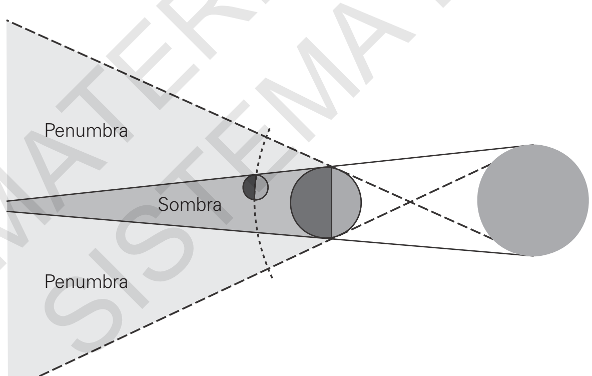
d) $50\pi - 10$

e) 3π

ESTUDO PARA O ENEM

18. Col. Pedro II C2-H6

Observe a imagem (Figura 1) produzida pelo Observatório Astronômico de Lisboa (OAL) do eclipse total ocorrido no mês de setembro de 2015. Nela percebe-se a existência de um cone de sombra.



OAL - SUPERLUA/ECLIPSE TOTAL DA LUA 2015 - SETEMBRO - 28
Fonte: www.oal.pt/. Acessado em 12/10/2015

Figura 1

A partir desta imagem, foi construído o esquema matemático apresentado na Figura 2:

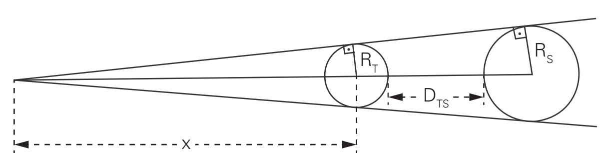


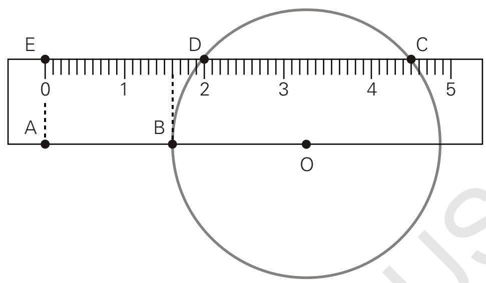
Figura 2

Com base no esquema da Figura 2, e sabendo que os raios da Terra (RT) e do Sol (RS) medem, aproximadamente, 6 000 km e 690 000 km, respectivamente, e que a distância entre a Terra e o Sol (DTS) é de 150 000 000 km, então o comprimento aproximado da altura x desse cone de sombra é de

a) 570 000 km.
b) 800 000 km.
c) 1 300 000 km.
d) 1 500 000 km.

19. UERJ C2-H7

A figura abaixo representa um círculo de centro O e uma régua retangular, graduada em milímetros. Os pontos A, E e O pertencem à régua e os pontos B, C e D pertencem, simultaneamente, à régua e à circunferência.



Considere os seguintes dados

Segmentos	Medida (cm)
$\overline{AB}$	1,6
$\overline{ED}$	2,0
$\overline{EC}$	4,5

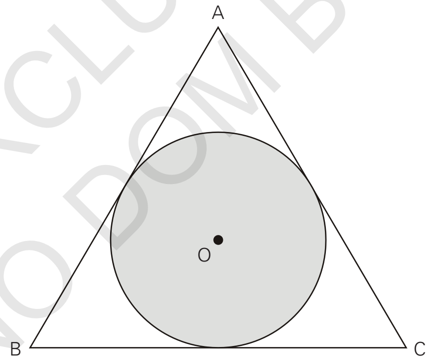
O diâmetro do círculo é, em centímetros, igual a:

a) 3,1
b) 3,3
c) 3,5
d) 3,6
e) 3,9

20. Epcar-MG (adaptado) C2-H7

A figura a seguir representa o logotipo que será estampado em 450 camisetas de uma Olimpíada de Matemática realizada entre os alunos do Colégio Alfa. Essa figura é formada por um círculo de centro O inscrito em um triângulo isósceles cuja base $\overline{BC}$ mede 24 cm. A altura relativa a esse lado mede 16 cm.

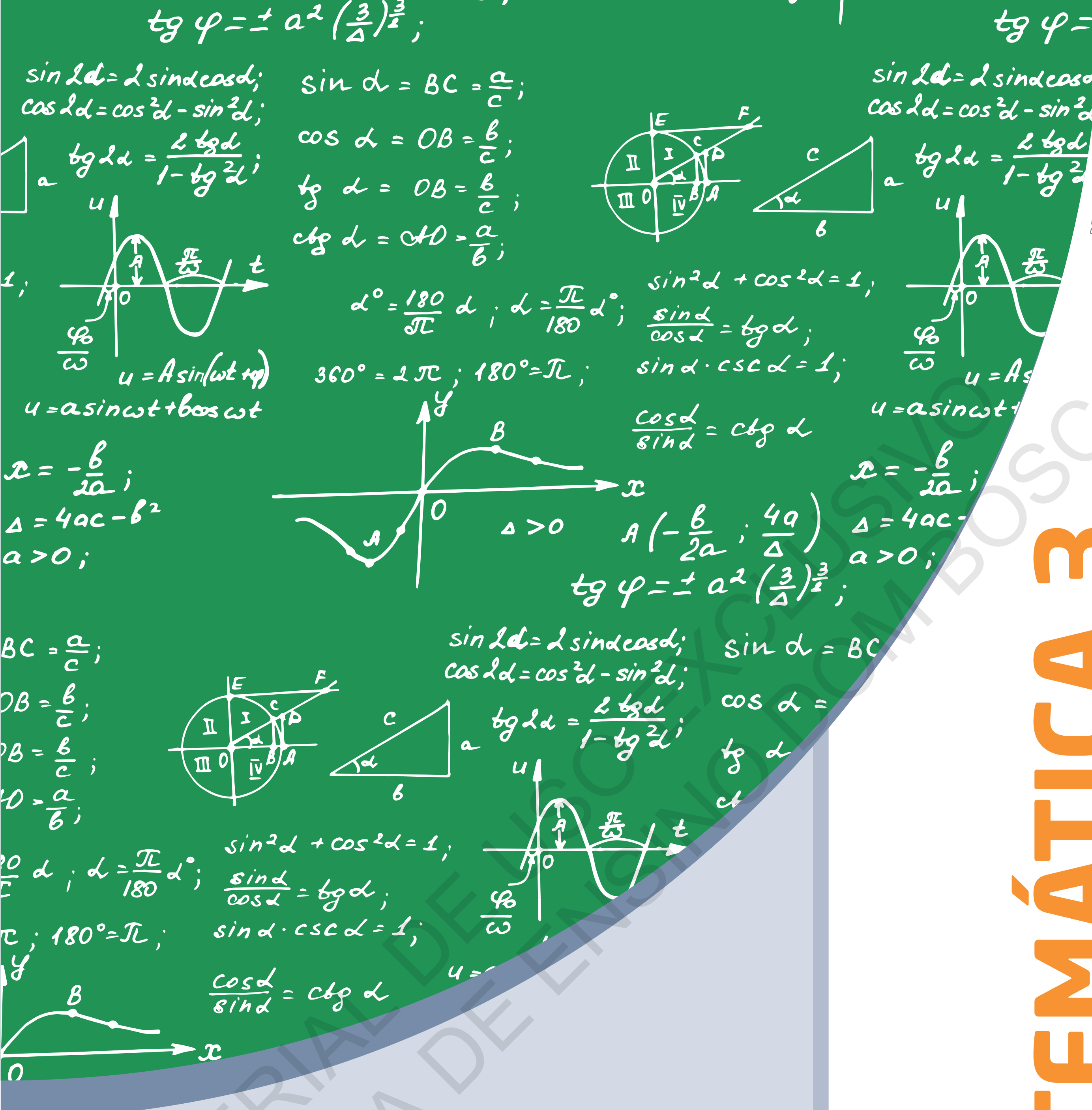
O círculo será pintado com tinta cinza e sabe-se que é necessário, exatamente, 1 pote de tinta cinza para pintar 5400 cm².



Adote $\pi = 3$

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de potes necessários para pintar o círculo em todas as camisetas é igual a

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 14



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 3

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

1

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO, ÂNGULOS COMPLEMENTARES E ÂNGULOS NOTÁVEIS

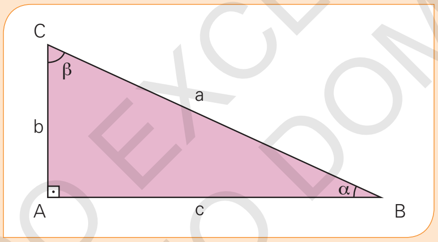
- Conceitos iniciais
- Seno, cosseno e tangente de ângulo agudo
- Secante, cossecante e cotangente
- Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares
- Seno, cosseno e tangente de ângulos notáveis
- Identidade trigonométrica fundamental

HABILIDADES

- Identificar razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Aplicar as razões trigonométricas para obtenção de valores numéricos.
- Resolver problemas envolvendo razões trigonométricas.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Identificar características de figuras planas e espaciais.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

CONCEITOS INICIAIS

Antes de iniciar o estudo de trigonometria, convém rever algumas propriedades. O triângulo a seguir apresenta um ângulo interno reto (mede 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad); por isso, é classificado como triângulo retângulo.



Para todo triângulo é válida a seguinte propriedade:

> A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

Em relação ao triângulo ABC apresentado, tem-se:

$$\alpha + \beta + 90° = 180° \rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Com isso, pode-se concluir que:

- os ângulos α e β são complementares, isto é, a soma de suas medidas é 90°;
- como esses ângulos são complementares, ambos têm medida inferior a 90°.

> Todo triângulo retângulo tem um ângulo interno reto e dois ângulos agudos, complementares entre si.

Considerando o triângulo retângulo apresentado anteriormente, temos que os lados de medida **b** e **c** são os catetos. O lado de medida **a** é a hipotenusa, que é sempre oposto ao ângulo reto e o maior lado de um triângulo retângulo. No triângulo é válido o princípio do teorema de Pitágoras:

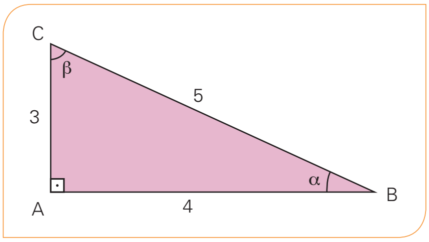
> A soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida hipotenusa.

Algebricamente, o teorema é assim expresso:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Triângulo pitagórico é um triângulo retângulo cujas medidas dos lados são números naturais.

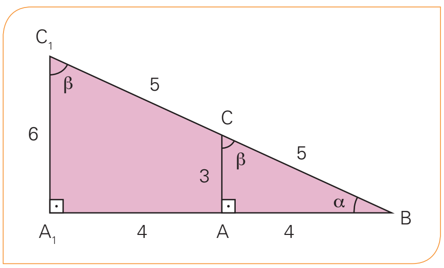
Considere o triângulo retângulo pitagórico a seguir.



BANNAFARSAI_STOCK/ISTOCKPHOTO

De fato, as medidas satisfazem a equação do teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$): sendo $a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$, temos que $5^2 = 4^2 + 3^2$, ou seja, $25 = 16 + 9$.

Multiplicando as medidas dos lados desse triângulo por 2, obtemos um triângulo pitagórico semelhante, com lados medindo 6, 8 e 10, também satisfazendo o teorema de Pitágoras. Observe:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **Sistema Dom Bosco** – Verifique se o triângulo de lados medindo 5, 12 e 13 é pitagórico.

Resolução

Como o maior lado desse triângulo corresponde à medida da hipotenusa, esse valor é 13.

Aplicando o teorema de pitágoras, temos:
$5^2 + 12^2 = 13^2$.
Portanto, o triângulo é pitagórico.

2. **Sistema Dom Bosco** – Mostre que dado um triângulo retângulo de medidas a, b e c, então o triângulo de medidas $k \cdot a$, $k \cdot b$ e $k \cdot c$ (sendo k um número natural não nulo) é retângulo também.

Resolução

No triângulo retângulo de hipotenusa de medida **a** vale o teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$. Multiplicando essa igualdade por k^2, vem:
$k^2a^2 = k^2b^2 + k^2c^2 \rightarrow (ka)^2 = (kb)^2 + (kc)^2$ (ka, kb e kc satisfazem ao teorema de Pitágoras).
O triângulo de lados de medidas ka, kb e kc é, portanto, retângulo.

SENO, COSSENO E TANGENTE DE ÂNGULOS AGUDOS

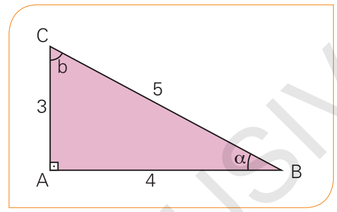
Definimos o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo pelas relações apresentadas a seguir

$$\text{seno do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente do ângulo} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

Com base nessas relações, o cálculo de seno, cosseno e tangente do ângulo α do triângulo a seguir fornece os seguintes valores para o triângulo de medidas 3, 4 e 5:



$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Considerando o triângulo proporcional com os mesmos ângulos α e β e medidas 8, 10 e 6, os valores de seno, cosseno e tangente para o ângulo α são:

$$\text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Ou seja, independentemente das medidas do triângulo, as razões seno, cosseno e tangente são as mesmas para os mesmos ângulos.

SECANTE, COSSECANTE E COTANGENTE DE ÂNGULOS AGUDOS

Além das razões mostradas anteriormente, há também a secante, a cossecante e a cotangente do ângulo agudo de um triângulo retângulo.

$$\text{secante do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

$$\text{cossecante do ângulo} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

$$\text{cotangente do ângulo} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{cateto oposto ao ângulo}}$$

Desse modo, há a seguinte relação:

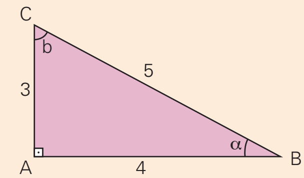
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos a}$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

Sistema Dom Bosco – Determinar os valores da secante, cossecante e cotangente do ângulo a no triângulo retângulo de medidas 3, 4 e 5.



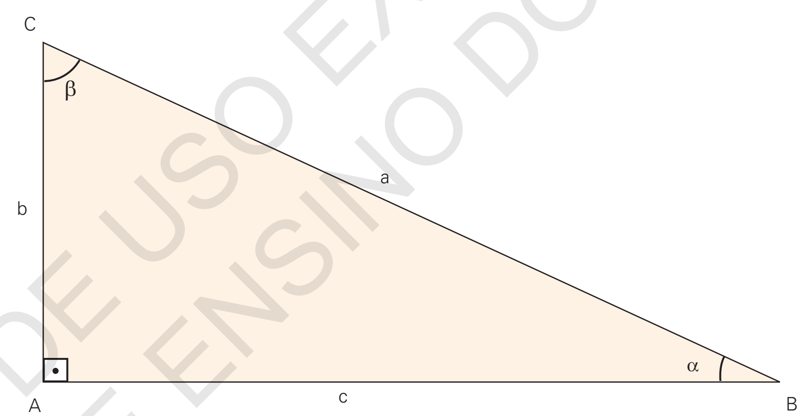
Resolução

De acordo com as medidas dos lados do triângulo ABC, temos:

$$\sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \text{cossec}\,\alpha = \frac{5}{3} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{4}{3}$$

Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares

Os ângulos agudos de todo triângulo retângulo são complementares, ou seja, $\alpha+\beta=90°$. Além disso, dado um triângulo ABC como o que segue, sabe-se que:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{c}{a} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{c}{a} \qquad \cos\beta = \frac{b}{a} \qquad \text{tg}\,\beta = \frac{c}{b} \qquad \text{cotg}\,\beta = \frac{b}{c}$$

Desse modo, as seguintes relações podem ser estabelecidas:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta \qquad \cos\alpha = \text{sen}\,\beta \qquad \text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\,\beta \qquad \text{cotg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$$

Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

O quadrado e o triângulo equilátero são exemplos de figuras planas que possibilitam obter os ângulos notáveis 30°, 45° e 60°.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Identidade trigonométrica fundamental

$$\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1$$

Essa relação é chamada de identidade trigonométrica fundamental.

Podemos expressá-la de outra forma. Basta dividir a equação por $\cos^2\ \theta$, obtendo:

$$\frac{\text{sen}^2\ \theta}{\cos^2\ \theta} + \frac{\cos^2\ \theta}{\cos^2\ \theta} = \frac{1}{\cos^2\ \theta}$$

Também podemos expressar assim:

$$\text{tg}^2\ \theta + 1 = \sec^2\ \theta$$

Analogamente, se dividirmos a equação por $\text{sen}^2\ \theta$, obtemos

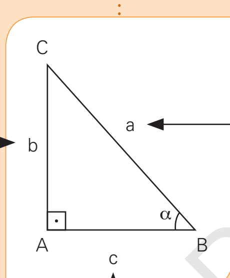
$$\text{cotg}^2\ \theta + 1 = \text{cossec}^2\ \theta$$

ROTEIRO DE AULA

Triângulo retângulo

cateto oposto

hipotenusa



cateto adjacente

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}} = \frac{b}{c}$$

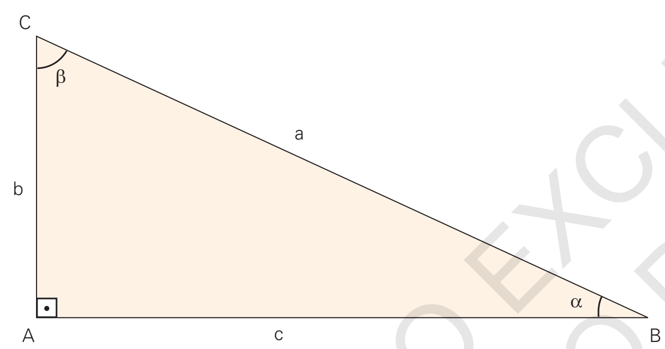
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente ao ângulo}} = \frac{1}{\cos a} = \frac{c}{a}$$

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto ao ângulo}} = \frac{1}{\text{sen}\,a} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo}}{\text{cateto oposto ao ângulo}} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{b}$$

ROTEIRO DE AULA

TRIÂNGULO RETÂNGULO



Se $\alpha + \beta = 90°$
Então,

sen α = cos β

sec α = cossec β

tg α = cotg β

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Identidade trigonométrica fundamental

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \mathbf{1}$

$\text{tg}^2\theta + \mathbf{1} = \sec^2\theta$

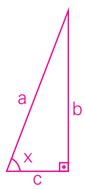
$\text{cotg}^2\theta + \mathbf{1} = \text{cossec}^2\theta$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPE – Num triângulo retângulo, temos que tg x = 3. Se x é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de cos x?

Considere $\sqrt{10} = 3{,}16$

Considere a figura a seguir.



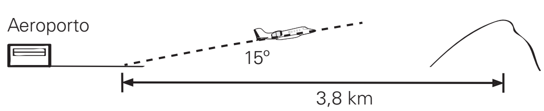
Como tg x = 3, logo $\frac{b}{c} = 3 \rightarrow b = 3c$

Pelo teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2 = 9c^2 + c^2 = 10c^2 \rightarrow$

$a = c\sqrt{10}$

Assim, $\cos x = \frac{c}{c\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3{,}16}{10} = 0{,}316$

2. Unicamp-SP – Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15°. A 3,8 km da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala.



Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de

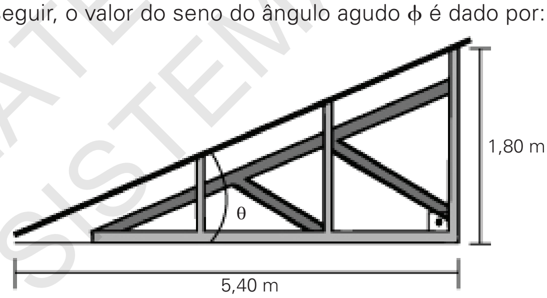
a) 3,8 tg (15°) km
b) 3,8 sen (15°) km
c) 3,8 cos (15°) km
d) 3,8 sec (15°) km

Sendo h a altura do morro, temos $\text{tg}\,15° = \frac{h}{3{,}8} \rightarrow h = 3{,}8 \cdot \text{tg}\,15°$.

Logo, h = 3,8 θ tg (15°) km.

3. UEPA C2-H7

As construções de telhados em geral são feitas com um grau mínimo de inclinação em função do custo. Para as medidas do modelo de telhado representado a seguir, o valor do seno do ângulo agudo ϕ é dado por:



a) $\frac{4\sqrt{10}}{10}$ **c)** $\frac{2\sqrt{2}}{10}$ **e)** $\frac{\sqrt{2}}{10}$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **d)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$

Chamamos a hipotenusa do triângulo formado pela estrutura do telhado de d. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $d^2 = 1{,}8^2 + 5{,}4^2 = 3{,}2^4 + 29{,}16 = 32{,}4 = \frac{324}{10}$.

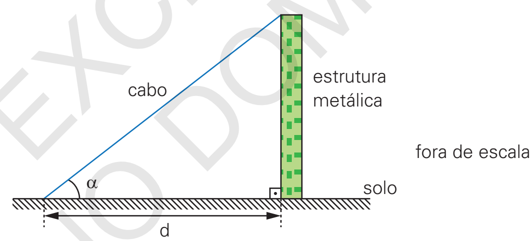
Fatorando o número 324, temos que $324 = 4 \cdot 81 = 2^2 \cdot 9^2$.

Logo, $d = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 9^2}{10}} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}} \frac{18\sqrt{10}}{10} = 1{,}8\sqrt{10}$

Portanto, $\text{sen}\,\theta = \frac{1{,}8}{1{,}8\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4. Unicid-SP – Uma estrutura metálica é mantida perpendicular ao solo por 8 cabos de aço, todos de mesmo comprimento e com a mesma distância d até a base da estrutura. A figura mostra um dos cabos presos à estrutura.



Considere a tabela:

α	senα	cosα	tgα
34°	0,56	0,83	0,67
35°	0,57	0,82	0,70
36°	0,58	0,81	0,72
37°	0,60	0,80	0,75
38°	0,61	0,79	0,78

Sabendo que a soma dos comprimentos de todos os cabos é 240 m e que a distância d corresponde a 80% do comprimento de um cabo, é correto afirmar que a medida do ângulo a é

a) 36° **c)** 35° **e)** 37°
b) 34° **d)** 38°

Temos 8 cabos de aço com um comprimento total de 240 metros. Logo, cada cabo tem 30 m. Como a distância d corresponde a 80% do comprimento de um cabo, então:

$d = 0{,}8 \cdot 30 = 24$ m

Portanto, $\cos\alpha = \frac{24}{30} = 0{,}8 \rightarrow \alpha = \text{arccos}(0{,}8)$.

Segundo a tabela, $\alpha = 37°$.

5. USF-SP – Se cotg x = 2 e x é agudo, então cos x vale

a) $\frac{1}{5}$ **c)** $3\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt{5}$

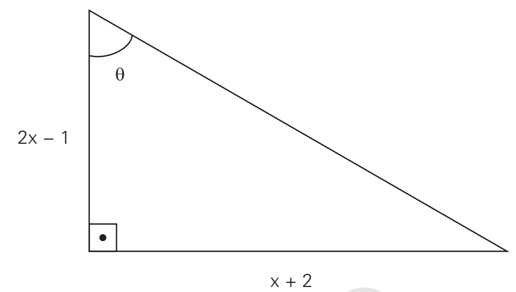
b) $2\sqrt{5}$ **d)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Temos que $\frac{\cos x}{\text{sen } x} = 2$. Elevando ao quadrado ambos os lados da equação:

$\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = 4 \rightarrow \cos^2 x = 4 \cdot \text{sen}^2 x = 4 - 4 \cdot \cos^2 x$

Logo, $5 \cdot \cos^2 x = 4 \rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. UPE (adaptado) – A medida da área do triângulo retângulo, representado a seguir, é de 12,5 cm².



Qual é o valor aproximado do seno do ângulo "θ"?

Considere $\sqrt{2} = 1{,}4$.

$A = \frac{(x+2)\cdot(2x-1)}{2} = 12{,}5$

$2x^2 - x + 4x - 2 = 25$

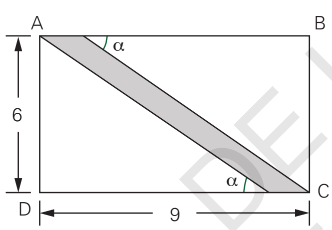
$2x^2 + 3x - 27 = 0$

Resolvendo a equação de 2° grau e dado que $x > 0$, temos que $x = 3$.
Logo, o triângulo tem catetos de lados $2x - 1 = 5$ e $x + 2 = 5$. Portanto, o ângulo θ é igual a 45°.

Assim, $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

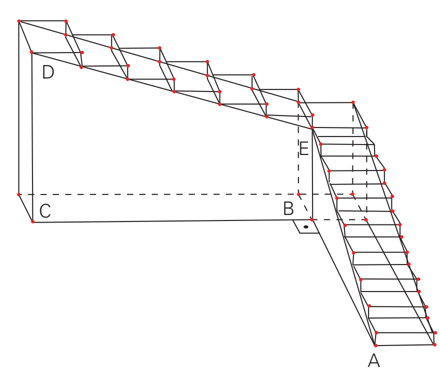
7. UFRGS-RS – Na figura abaixo, o retângulo ABCD tem lados que medem 6 e 9.



Se a área do paralelogramo sombreado é 6, o cosseno de α é

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{8}{9}$

8. UFRN – A escadaria ao lado tem oito batentes no primeiro lance e seis no segundo lance de escada. Sabendo que cada batente tem 20 cm de altura e 30 cm de comprimento (profundidade), a tangente do ângulo CÂD mede:



a) $\frac{9}{10}$ **b)** $\frac{14}{15}$ **c)** $\frac{29}{30}$ **d)** 1

9. Udesc – No *site* <http://www.denatran.gov.br/publicacoes/download/minuta_contran/Arquivo%206.pdf> (acesso em: 23 jun. 2012) encontra-se o posicionamento adequado da sinalização semafórica, tanto para semáforos de coluna simples como para semáforos projetados sobre a via, conforme mostra a Figura 1.

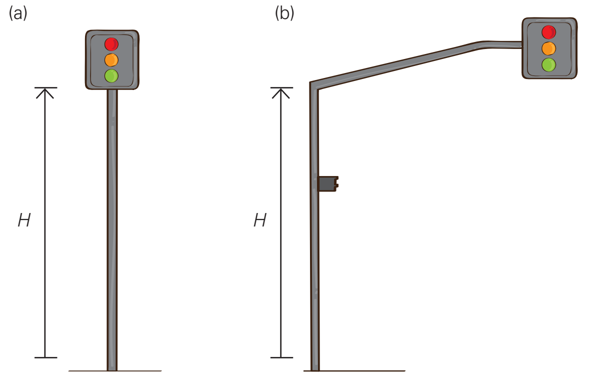


Figura 1
(a) Semáforo de colunas simples;
(b) Semáforo projetado sobre a via.

Para que o motorista de um veículo, ao parar, possa visualizar as luzes do semáforo, o grupo focal deve ser visto sob um ângulo de 20°, conforme mostra a Figura 2.

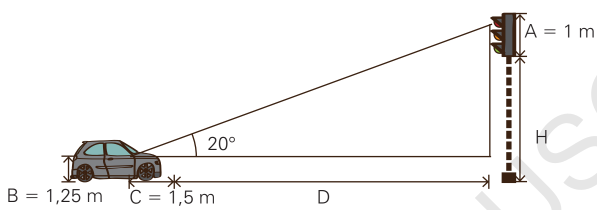


Figura 2
LEGENDA:
A: dimensão média da altura do grupo local;
B: altura dos olhos do condutor sentado no veículo;
C: distância adotada entre os olhos do condutor e a frente do veículo;
D: distância mínima da linha de retenção até a projeção do grupo focal sobre o solo.

Considerando tg (20°) = 0,36, determine os valores que faltam para completar a Tabela 1.

Tipo de semáforo	D	H
Coluna simples	?	2,4
Projetado sobre a via	13,1	?

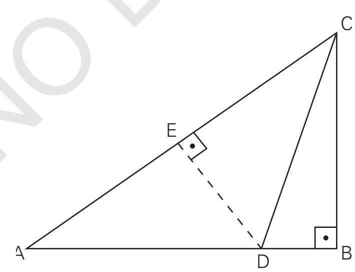
Analise as proposições em relação às informações obtidas na Tabela 1 e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) Para o semáforo de coluna simples, D é aproximadamente 4,5 m.
( ) Para o semáforo projetado sobre a via, H é aproximadamente 4,2 m.
( ) A altura H do semáforo projetado sobre a via é aproximadamente 3,1 m maior que a altura H do semáforo de coluna simples.

Assinale a alternativa **correta**, de cima para baixo.

a) F – V – V
b) V – F – V
c) F – V – F
d) V – V – F
e) F – F – V

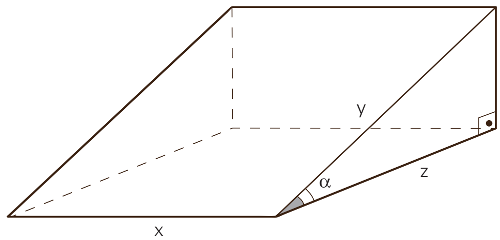
10. Mackenzie-SP – No triângulo retângulo ABC, AB = 4 cm e AD = BC = 3 cm.



A área do triângulo CDE é

a) $\frac{117}{50}$ cm²
b) $\frac{9}{4}$ cm²
c) $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ cm²
d) $\frac{54}{25}$ cm²
e) $\frac{9}{2}$ cm²

11. Unifor-CE – Uma rampa retangular, medindo 10 m², faz um ângulo de 25° em relação ao piso horizontal. Exatamente embaixo dessa rampa, foi delimitada uma área retangular A para um jardim, conforme a figura.

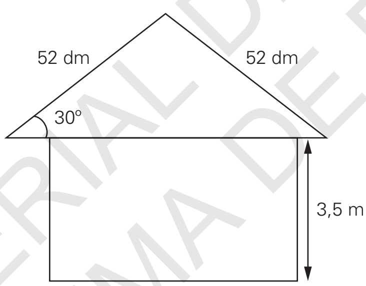


Considerando que cos 25° ≈ 0,9, a área A tem, aproximadamente,

a) 3 m²
b) 4 m²
c) 6 m²
d) 8 m²
e) 9 m²

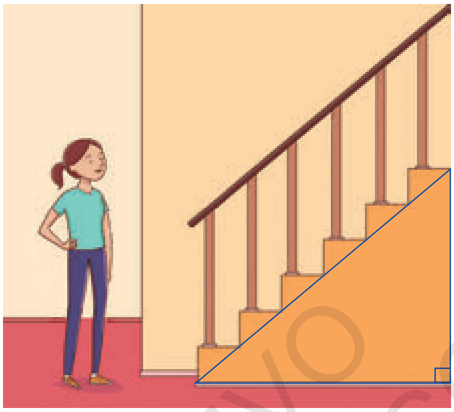
12. Sistema Dom Bosco – Considere o triângulo retângulo com os lados medindo $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ e a sendo $2\sqrt{a}$ a medida de sua hipotenusa. Calcule a medida do menor ângulo desse triângulo.

13. UEMG (adaptado)



Conforme a figura acima, na construção de um telhado, com inclinação de 30° em relação ao solo, foram usadas telhas ecológicas. Em cada lado da casa, foram construídos 52 dm de telhado e a altura da parede lateral da casa é de 3,5 m. Considerando esses dados, calcule a altura do ponto mais alto do telhado em relação ao solo.

14. UEMG (adaptado) – Observe a figura:



Tendo como vista lateral da escada com 6 degraus um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\sqrt{10}$ metros, Ana observa que todos os degraus da escada têm a mesma altura. A medida em cm, de cada degrau, corresponde aproximadamente a:

a) 37
b) 60
c) 75
d) 83

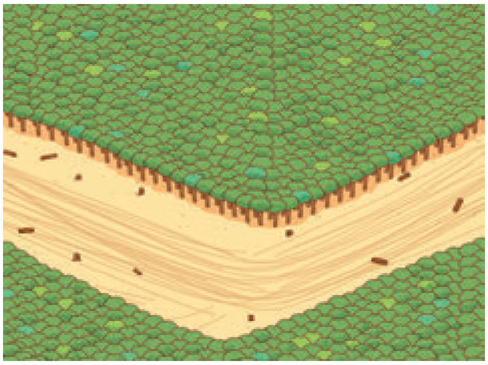
15. Unifenas-MG – Acrescente ao resultado, obtido da expressão abaixo, dois.

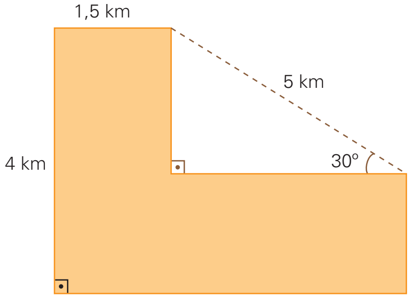
$$\text{sen}^2(15°) + \text{sen}^2(31°) + \text{sen}^2(42°) + \text{sen}^2(59°) + \text{sen}^2(48°) + \text{sen}^2(75°).$$

Assim, o número pedido é:

a) 1
b) 2
c) −3
d) 3
e) 5

16. UEA-AM – Admita que a área desmatada em Altamira, mostrada na figura, tenha a forma e as dimensões indicadas na figura.

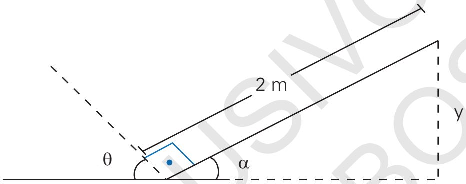




Usando a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,7$, pode-se afirmar que a área desmatada, em quilômetros quadrados, é, aproximadamente,

a) 10,8
b) 13,2
c) 12,3
d) 11,3
e) 15,4

17. Unifor-CE – Uma cama de hospital, equipada com um ajustador hidráulico, move-se de acordo com um controle manual de subir e descer. A altura y que a cama varia em função de θ é de:

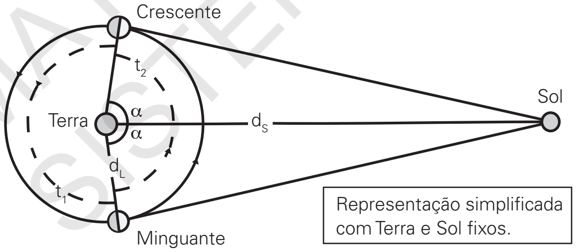


a) $y = 2 \text{ sen } \theta$
b) $y = 2 \text{ sen } \theta + 2$
c) $y = \text{tg } \theta + 2$
d) $y = 2 \cos \theta$
e) $y = 2 \cos \theta + 2$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Fuvest-SP C2-H7

Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S.

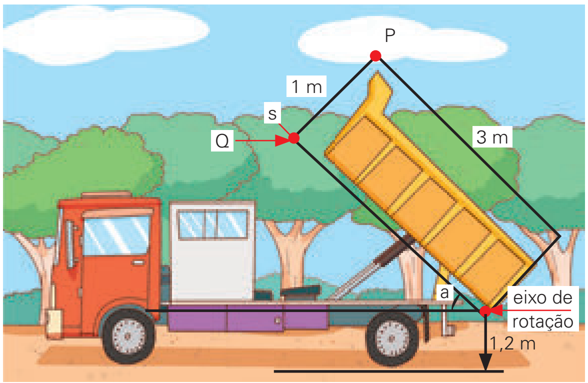


Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S. É possível estimar a medida do ângulo α, relativo ao vértice da Terra, nessas duas fases, a partir da observação de que o tempo t_1, decorrido de uma lua quarto crescente a uma lua quarto minguante, e um pouco maior do que o tempo t_2, decorrido de uma lua quarto minguante a uma lua quarto crescente. Supondo que a Lua descreva em torno da Terra um movimento circular uniforme, tomando $t_1 = 14,9$ dias e $t_2 = 14,8$ dias, conclui-se que a razão d_L/d_S seria aproximadamente dada por:

a) cos 77,7°
b) cos 80,7°
c) cos 83,7°
d) cos 86,7°
e) cos 89,7°

19. UNESP C2-H9

A caçamba de um caminhão basculante tem 3 m de comprimento das direções de seu ponto mais frontal P até a de seu eixo de rotação e 1 m de altura entre os pontos P e Q. Quando na posição horizontal, isto é, quando os segmentos de retas r e s se coincidirem, a base do fundo da caçamba distará 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de seu eixo de rotação, localizado em sua parte traseira inferior, conforme indicado na figura.



Dado cos $\alpha = 0{,}8$, a altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro a for máximo, é

a) 4,8 **b)** 5,0 **c)** 3,8 **d)** 4,4 **e)** 4,0

20. Enem C2-H9

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

DAVID CRESPO/ISTOCK

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

a) menor que 100 m²
b) entre 100 m² e 300 m²
c) entre 300 m² e 500 m²
d) entre 500 m² e 700 m²
e) maior que 700 m²

2

ARCOS, ÂNGULOS E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

- Arcos e ângulos
- Unidades de medida de arcos e ângulos
- Conversão de medidas de arcos e ângulos
- Circunferência trigonométrica
- Razões trigonométricas na circunferência

HABILIDADES

- Relacionar a medida de arco em grau e em radiano com o respectivo comprimento.
- Identificar arcos e ângulos no ciclo trigonométrico.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Associar números reais a pontos na circunferência trigonométrica.
- Estabelecer as razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.
- Determinar os valores de seno, cosseno e tangente para valores notáveis de ângulos.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

Arcos e ângulos

Unidades de medida de arcos e ângulos

As unidades usuais para medir arcos e ângulos são o **grau** e o **radiano**.

GRAU

Grau (°) é a medida do arco equivalente a $\frac{1}{360}$ da circunferência. Ou seja, o arco de uma volta completa mede 360°.

Na circunferência a seguir, observa-se que as retas $\overleftrightarrow{XX'}$ e $\overleftrightarrow{YY'}$, perpendiculares entre si, dividem a circunferência em quatro arcos de mesma medida, referentes a quatro ângulos retos centrais.

O grau tem dois outros submúltiplos: **minuto** (′) e **segundo** (″). Sua equivalência é:

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

Observação: Apesar do mesmo nome, minutos e segundos usados como unidade de tempo não têm nenhuma relação com os minutos e segundos definidos como submúltiplos do grau, exceto por constituírem também um sistema sexagesimal de unidades.

ADIÇÃO DE ARCOS

Para calcular a soma dos arcos dados, devem-se adicionar separadamente os valores de graus, minutos e segundos.

Por exemplo: sabendo que α e β são arcos que medem, respectivamente, 83°30′39″ e 12°43′45″, vamos determinar $\alpha + \beta$.

$$\begin{array}{r} 83°30'39'' \\ +\ 12°43'45'' \\ \hline 95°73'84'' \end{array}$$

Como as quantidades em minutos (73′) e segundos (84″) excedem 60 unidades, pode-se fazer:

$73' = 60' + 13' = 1°13'$ e
$84'' = 60'' + 24'' = 1'24''$

Desse modo, temos:

$73'84'' = 1°(13 + 1)'24'' = 1°14'24''$

Portanto, $\alpha + \beta = 96°14'24''$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Calcule 17°47′9″ + 70°25′56″.

Resolução

$17°47'9'' + 70°25'56'' = (17° + 70°) + (47' + 25') + (9'' + 56'') = 87°72'65'' =$
$= 87° + (60' + 12') + (60'' + 5'') = 87° + (1° + 12') + (1' + 5'') = 88°13'5''$

SUBTRAÇÃO DE ARCOS

Para subtrair arcos, deve-se calcular a diferença separando os valores em graus, minutos e segundos, como na adição.

Por exemplo: sabendo que α e β são arcos que medem, respectivamente, 83°30′39″ e 12°43′45″, vamos determinar $\alpha - \beta$.

Antes de calcular, devemos verificar se não há minuendos menores que os subtraendos (observe que 30′ < 43′ e 39″ < 45″), o que leva a resultados negativos na operação de minutos e segundos.

Neste caso, devemos transformar 1° em 60′ ou 1′ em 60″ e adicioná-los ao minuendo para tornar a diferença positiva.

Dessa forma, vem a seguinte transformação:

$$\alpha = 82°89'99''$$

$$\alpha = (83 - \mathbf{1})°(30 + \mathbf{60} - \mathbf{1})'(39 + \mathbf{60})''$$

Assim: $\alpha = 82°89'99''$,

$$\begin{array}{r} 82°89'99'' \\ -\ 12°43'45'' \\ \hline 70°46'54'' \end{array}$$

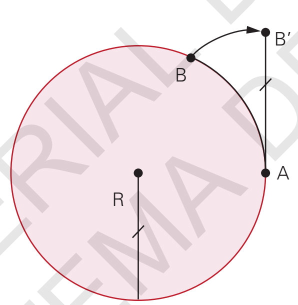
Portanto: $\alpha - \beta = 70°45'54''$.

RADIANO

Radiano (rad) é a medida de um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio dessa circunferência.

Pode-se dizer que a medida de um arco, em radianos, equivale ao número de vezes que o comprimento do raio cabe nesse arco.

Por exemplo, considere o arco $\overset{\frown}{AB}$ a seguir.



O segmento $\overline{AB}$, tendo comprimento igual ao raio da circunferência, significa que med $\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 1$ rad.

Sendo α o arco em radianos e ℓ e R os comprimentos do arco e do raio da circunferência, respectivamente, então:

$$\alpha = \frac{\ell}{R}$$

O comprimento da circunferência é dado por $2\pi R$. Considerando essa relação, para calcular a medida do arco de uma volta em radianos, divide-se o comprimento da circunferência pelo seu raio. Assim:

$$\alpha = \frac{2\pi R}{R} \rightarrow \alpha = 2\pi \text{ rad}$$

Portanto, a medida do arco de uma volta completa é igual a 2π.

Com esse resultado, podemos concluir que:

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$180° = \pi \text{ rad}$$

$$270° = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Dado que o comprimento de circunferência de raio R é dado por $2\pi R$, então podemos determinar o valor de π como a relação entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Portanto, seja o comprimento $C = 2\pi R$, então, $\pi = \frac{C}{2R} \cong 3{,}14$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Numa circunferência de raio 3 cm, determinou-se, com os lados do ângulo central α, o arco de comprimento 9,42 cm. Calcule, em radianos, a medida de α.

Resolução

Temos que:

$$\alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{9{,}42}{3} = 3{,}14 \text{ rad}$$

Logo, $\alpha = 3{,}14$ rad.

2. Sistema Dom Bosco – Em uma circunferência, temos os ângulos a = 89°30′15″ e b = 39°43′45″. Calcule a diferença b – a.

Resolução

89°30'15" – 39°43'45" = 88°90'15" –
– 39°43'45" = 88°89'75"– 39°43'45" = 49°46'30"

CONVERSÃO DE MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

Para converter as medidas de arcos de uma unidade para outra, é suficiente aplicar a regra de três simples, lembrando, por exemplo, a equivalência $180° = \pi$ rad.

Acompanhe os exemplos.

Para converter 135° em radianos:

$$135° \text{—} \theta$$

$$180° \text{—} \pi \text{ rad}$$

$$\frac{135°}{180°} = \frac{\theta}{\pi \text{ rad}} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

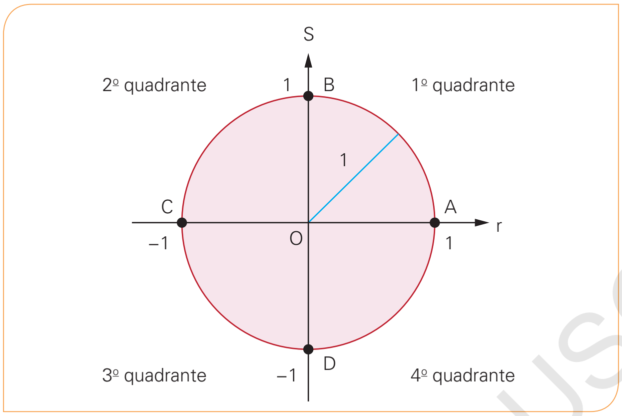
Para converter $\frac{\pi}{6}$ rad para graus:

$$\frac{\frac{\pi}{6}\text{rad}}{\pi\text{rad}} = \frac{\theta}{180°} \rightarrow \theta = 30°$$

Circunferência trigonométrica

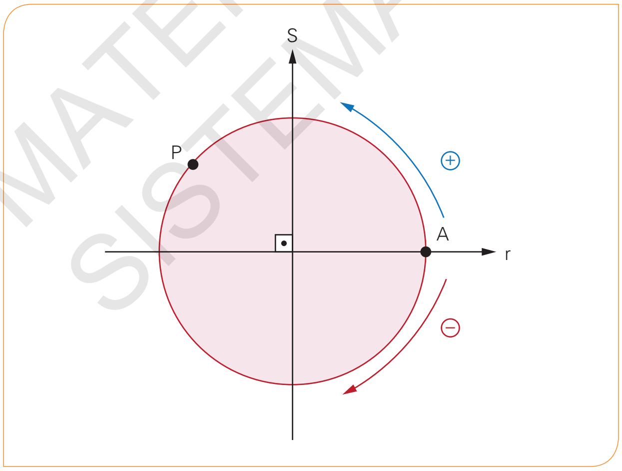
Na figura a seguir, é representada uma circunferência trigonométrica com centro na origem dos eixos (0, 0) e raio unitário.

Como consequência, os pontos de interseção da circunferência com o par de eixos, indicados na figura por A, B, C e D, têm as coordenadas (1, 0), (0, 1), (–1, 0) e (0, –1), respectivamente.



Esses pontos dividem a circunferência trigonométrica em quatro arcos congruentes, denominados **quadrantes**, numerados a partir de A no sentido anti-horário.

- o ponto **A** esteja associado ao número x = 0;
- um número real **x** seja associado a um ponto **P**, tal que o comprimento do arco AC seja igual a |x|;
- se x > 0, determina-se o arco AP sobre a circunferência no sentido anti-horário. Se x < 0, o arco é definido no sentido horário.



De acordo com a indicação, o ponto **P**, associado a um número real **x**, chama-se **imagem de x** na circunferência trigonométrica.

Lembrando que se pode calcular o comprimento da circunferência trigonométrica por C = 2πR, sendo **R** o seu raio.

Como ele mede uma unidade, o comprimento da circunferência trigonométrica é 2π unidades. Em decorrência:

- o arco de uma volta ou medida 2π rad tem comprimento de 2π unidades;
- o arco de comprimento |x| na circunferência trigonométrica tem medida de |x| rad.

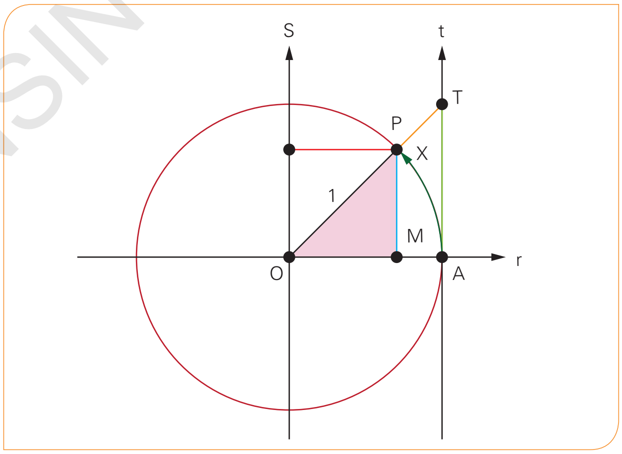
Assim, a medida de um arco na circunferência trigonométrica é igual ao módulo do número real **x**, do qual **P** é a imagem.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Definem-se seno, cosseno e tangente para o ângulo agudo interno de um triângulo retângulo como razões entre seus lados.

Para aplicar tais relações a quaisquer ângulos (nulo, reto e obtuso) e também a quaisquer arcos contidos na circunferência trigonométrica, é necessário redefinir esses conceitos.

Considere a circunferência trigonométrica de centro O (0, 0) e raio unitário a seguir. A reta **t** a tangencia no ponto **A**, de coordenadas (1, 0).



No primeiro quadrante, temos um ponto **P**, imagem na circunferência de um número real **x**. A semirreta intercepta a reta **t** no ponto **T**. Então:

sen x: ordenada de P
cos x: abscissa de P
tg x: ordenada de T

Assim, o ponto **P** tem coordenadas (cos x, sen x) e o ponto **T**, coordenadas (1, tg x).

Portanto, os eixos **r**, **s** e **t** correspondem, respectivamente, aos eixos dos cossenos, dos senos e das tangentes.

É necessário reconhecer que as razões antes definidas continuam válidas. Então, observe o recém-construído triângulo retângulo OMP, em destaque na figura anterior. Considerando **x** um número real positivo, é possível dizer que o ângulo $M\hat{O}P$ tem medida **x**. Assim:

$$\text{sen } x = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{R} = \frac{MP}{1} \rightarrow MP = \text{sen } x$$

$$\cos x = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{R} = \frac{OM}{1} \rightarrow OM = \cos x$$

$$\text{tg } x = \frac{MP}{OM} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}.$$

O valor da tangente de **x** no triângulo OAT é $\frac{AT}{OA}$. Então: AT = tg x.

As medidas dos segmentos MP e OM podem ser dadas pelas coordenadas (positivas, no caso) de **P**: sen x e cos x, respectivamente. A medida do segmento AT pode ser dada pela ordenada de **T** (positiva), que é a tg x.

Para ampliar as noções de seno, cosseno e tangente para arcos da circunferência trigonométrica, considere o ponto **P**, da figura anterior, movimentando-se no sentido positivo de giro sobre a circunferência, conforme figuras a seguir. Note que o ponto **T** movimenta-se também sobre a reta **t**.

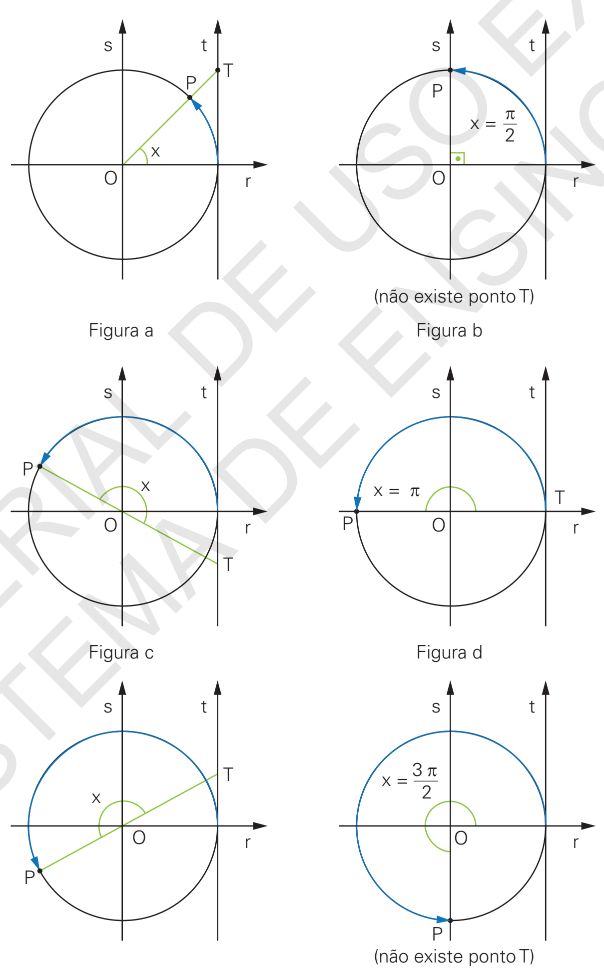
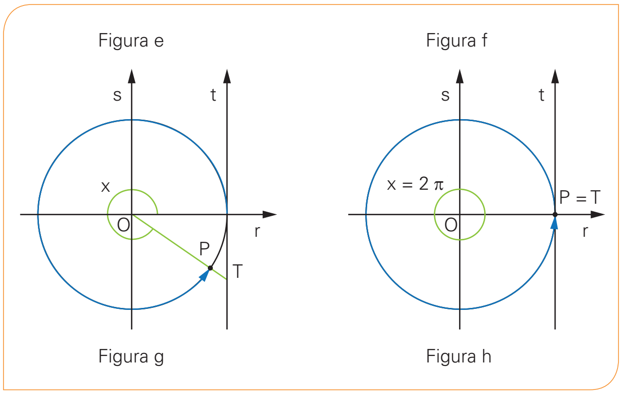


Figura a
Figura b
Figura c
Figura d



Da sequência de ilustrações, podemos concluir que, se **x** é arco com extremidade no:

- primeiro quadrante, todas as coordenadas de **P** e **T** são positivas.

$$\text{sen}\,x > 0,\ \cos x > 0,\ \text{tg}\,x > 0$$

- segundo quadrante, o ponto **P** tem ordenada positiva e abscissa negativa, e o ponto **T** tem ordenada negativa.

$$\text{sen}\,x > 0,\ \cos x < 0,\ \text{tg}\,x < 0$$

- terceiro quadrante, as coordenadas de **P** são negativas, e o ponto **T** tem ordenada positiva.

$$\text{sen}\,x < 0,\ \cos x < 0,\ \text{tg}\,x > 0$$

- quarto quadrante, **P** tem ordenada negativa e abscissa positiva, e o ponto **T** tem ordenada negativa.

$$\text{sen}\,x < 0,\ \cos x > 0,\ \text{tg}\,x < 0$$

Temos também os casos nos ângulos retos, ou seja:

- $x = 0$ ou $x = 2\pi$, temos que sen $x = 0$ e cos $x = 1$
- $x = \frac{\pi}{2}$, temos que sen $x = 1$ e cos $x = 0$
- $x = \pi$, temos que sen $x = 0$ e cos $x = -1$
- $x = \frac{3\pi}{2}$, temos que sen $x = -1$ e cos $x = 0$

Observação: o valor da tangente para arcos de medida $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ não existe, uma vez que não há interseção entre a reta **t** e a semirreta.

Podemos montar uma tabela dos sinais das razões trigonométricas nos diferentes quadrantes, além dos valores para seno, cosseno e tangente de arcos notáveis da primeira volta, com extremidades nos limites desses quadrantes.

	Sinais			
	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
sen x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tg x	+	–	+	–

	Valores				
	0°	90°	180°	270°	360°
	0 rad	$\frac{\pi}{2}$rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$rad	2πrad
sen x	0	1	0	–1	0
cos x	1	0	–1	0	1
tg x	0	∄	0	∄	0

ROTEIRO DE AULA

ARCOS E ÂNGULOS

Circunferência (λ) de
centro O e raio r

Medida angular: 360°

Medida linear (comprimento): 360°

Pontos A e B ∈ λ

Ângulo

Arco

Medidas angulares

Unidade de medida

Medida linear (comprimento): fração de 2πr

Medida angular

Grau

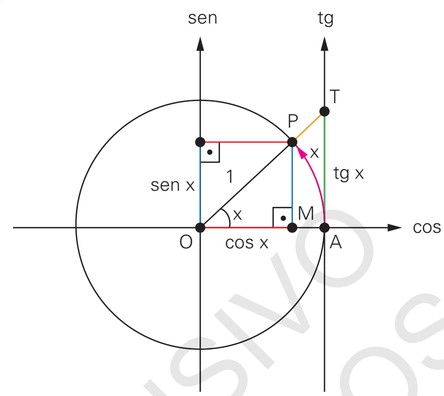
Radiano

180° = πRad

ROTEIRO DE AULA

CICLO TRIGONOMÉTRICO

Seno
Cosseno
Tangente

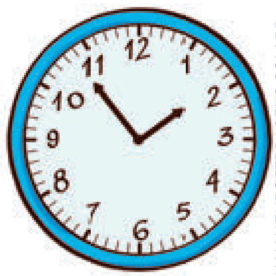


Valores	0°	90°	180°	270°	360°
	0 rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad
sen x	0	1	0	−1	0
cos x	1	0	−1	0	1
tg x	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Sinais	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
sen x	+	+	−	−
cos x	+	−	−	+
tg x	+	−	+	−

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UNESP (adaptado) – A figura mostra um relógio de parede, com 40 cm de diâmetro externo, marcando 1 hora e 54 minutos.



Usando a aproximação $\pi = 3$, calcule a medida, em cm, do arco externo do relógio determinado pelo menor ângulo central formado pelos ponteiros das horas e dos minutos, no horário mostrado.

O ângulo formado entre dois números consecutivos de um relógio é igual a:

$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad

Então, no ponteiro dos minutos:

60 min – 2πrad

1 min – α

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{30}$ rad .

No ponteiro das horas:

60 min – $\frac{\pi}{6}$ rad

54 min – β

$\beta = \frac{60}{54} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{20}$ rad

Portanto, o ângulo formado pelos ponteiros do relógio é:

$\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{30} = \frac{31\pi}{60}$ rad

Desse modo, a medida do arco é $\frac{31 \cdot 3}{60} \cdot 20 = 31$ cm.

2. Fuvest-SP (adaptado) – Calcule o ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos.

Ponteiro das horas:

Em 1 volta há 12 horas. Logo, o ponteiro das horas percorre 360° em 12 horas.

$\frac{360°}{12h} = 30°/h = 0,5°/min$

Ponteiro dos minutos:

Em 1 volta existem 60 minutos. Logo, o ponteiro dos minutos percorre 360° em 60 minutos. $\frac{360°}{60} = 6°/min$

Então, o ponteiro das horas (quando o relógio marcar 1h12min) terá percorrido um arco de $1 \cdot 30° + 0,5 \cdot 12 = 36°$. O ponteiro dos minutos terá percorrido um arco de $12 \cdot 6° = 72°$. Então, o ângulo agudo formado entre os dois ponteiros é de $72° - 36° = 36°$.

3. IFCE (adaptado) C2-H8

Considere um relógio analógico de doze horas. O maior ângulo formado entre os ponteiros que indicam a hora e o minuto, quando o relógio marca exatamente 5 horas e 20 minutos, é

a) 330°
b) 320°
c) 310°
d) 300°
e) 290°

Ponteiro das horas:

Em 1 volta temos 12 horas. Logo, o ponteiro das horas percorre 360° em 12 horas:

$\frac{360°}{12h} = 30°/h = 0,5°/min$

Ponteiro dos minutos:

Em 1 volta há 60 minutos. Logo, o ponteiro dos minutos percorre 360° em 60 minutos:

$\frac{360°}{60 \text{ min}} = 6°/min$

Então, o ponteiro das horas (quando o relógio marcar 5h20min) terá percorrido um arco de $5 \cdot 30° + 0,5 \cdot 20 = 160°$. O ponteiro dos minutos terá percorrido um arco de $20 \cdot 6° = 120°$. Logo, o ângulo obtuso formado entre os dois ponteiros é de $360° - (160° - 120°) = 320°$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. PUC-RJ (adaptado) – Se tg $\theta = 1$ e pertence ao primeiro quadrante, qual é o valor de cos θ?

Se tg $\theta = 1$ e θ pertence ao primeiro quadrante, então $\theta = 45°$, logo $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Mackenzie-SP – Se $\cos x = \frac{2}{3}, \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, então o valor de tg x é igual a

a) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ **c)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **e)** $2\sqrt{5}$

b) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Temos que $\cos x = \frac{2}{3} \rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{9} \rightarrow 1 - \text{sen}^2 x = \frac{4}{9} \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{5}{9}$.

Então, $\text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Como $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$, então x está no 4º quadrante.

Logo, $\text{sen } x < 0$.

Assim, $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Portanto, $\frac{-\sqrt{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. IFPE – Considere o arco $\theta = \frac{77\pi}{3}$. É correto dizer que:

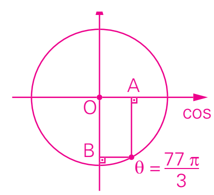
a) $\text{sen } \theta < 0$ **d)** $\text{sen } \theta + \cos \theta > 0$

b) $\cos \theta < 0$ **e)** $\text{sen } \theta + \cos \theta = 1$

c) $\text{tg } \theta > 0$

Temos que a divisão de 77π por 3 resulta em $25\pi + \frac{2}{3}\pi$. Isto é, 11 voltas e meia na circunferência trigonométrica e mais $\frac{2}{3}\pi$.

Portanto, θ está situado no 4º quadrante.



Da figura, temos:

I) $OB < 0 \rightarrow \text{sen } \theta < 0$;

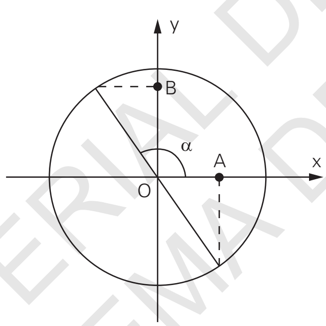
II) $OA > 0 \rightarrow \cos \theta < 0$;

III) $\frac{OB}{OA} < 0 \rightarrow \text{tg } \theta < 0$;

IV) Como $|OB| > |OA|$, temos que $OB + AO < 0$. Daí vem $\text{sen } \theta + \cos \theta < 0$.
Dos itens I, II, III e IV, concluímos que $\text{sen } \theta < 0$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

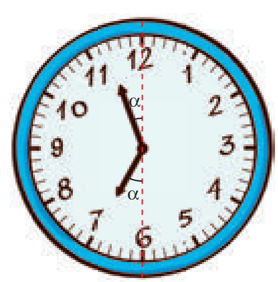
7. UFRGS-RS (adaptado) – No círculo de raio unitário da figura abaixo, tem-se $\alpha = 120°$. O valor de $OA \cdot OB$ é



a) $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. FGV-RJ – O relógio indicado na figura marca 6 horas e



a) $55\frac{7}{13}$ minutos **d)** $54\frac{3}{11}$ minutos

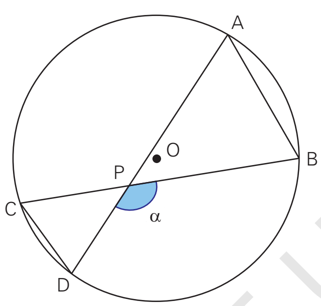
b) $55\frac{5}{11}$ minutos **e)** $54\frac{2}{11}$ minutos

c) $55\frac{5}{13}$ minutos

9. Fuvest-SP – O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então, α é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$
b) 2
c) 1
d) $2\frac{\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{2}$

10. FGV-RJ (adaptado) – Os arcos AB e CD de uma circunferência de centro O medem, respectivamente, 60° e 36°. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



A medida do ângulo, indicado na figura por α, é igual a

a) 120°
b) 124°
c) 128°
d) 130°
e) 132°

11. Unicamp-SP (adaptado) – Seja x um número real, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tal que 2sec x = tg x + 2.
Então, a diferença 2 – sec x é igual a

a) 1
b) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{1}{3}$

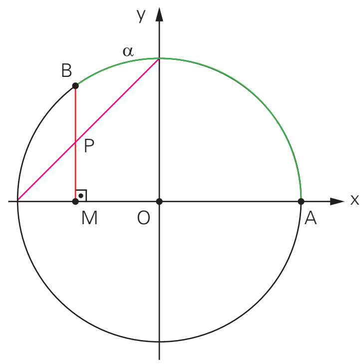
12. Sistema Dom Bosco – Se $\text{sen}\, x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo x do primeiro quadrante, sobre sec x é verdade que

a) $1 < \sec x < \frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3} < \sec x \leq \frac{4}{3}$
c) $\frac{1}{3} \leq \sec x \leq \frac{5}{3}$
d) $1 < \sec x \leq 2$

13. Mackenzie-SP (adaptado) – Se $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \frac{1}{2}$, no intervalo $[0, \pi]$, o menor valor da tg x é

a) $-\sqrt{3}$.
b) $-\sqrt{2}$.
c) -1.
d) $\sqrt{2}$.
e) $\sqrt{3}$.

14. FGV-RJ – No círculo trigonométrico de raio unitário indicado na figura, o arco AB mede α. Assim, PM é igual a



a) $-1-\text{tg}\ \alpha$

b) $1 - \cos \alpha$

c) $1 + \cos \alpha$

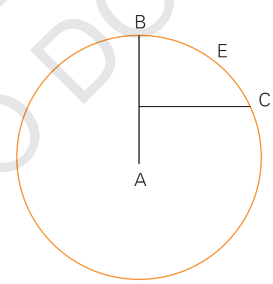
d) $1 + \text{sen}\ \alpha$

e) $-1 + \text{cotg}\ \alpha$

15. Unifenas-MG (adaptado) – O quíntuplo de ângulo excede em 30° o dobro do seu complemento. Qual é o suplemento deste ângulo?

16. Sistema Dom Bosco – Sabendo-se que sen x = a e que x é um ângulo do 1º quadrante, calcule o valor, em função de a, da expressão $\text{sen}\,(x-2\pi)-\cos^2(x-2\pi)$.

17. Sistema Dom Bosco – Na figura abaixo, A é o centro da circunferência de raio AB = 300 m, BEC é um arco de medida linear 200 m, AB e CD são segmentos perpendiculares. Se uma pessoa caminha de A até B sobre o raio AB, depois percorre o arco BEC, em seguida anda de C a D em linha reta e, por fim, volta a A pelo segmento DA, ela percorre, em metros



a) $500+300\left[\text{sen}\left(\frac{2}{3}\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

b) $500+2\cdot\text{tg}\left(\frac{2}{3}\right)$

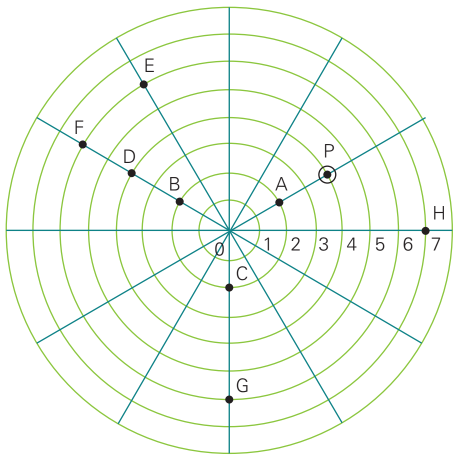
c) $500+600\sqrt{2}$

d) $500+300\sqrt{2}$

e) $500+200\sqrt{3}$

18. Enem C2-H8

No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120°.



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto

a) B **b)** D **c)** E **d)** F **e)** G

19. Enem C2-H8

Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

a) uma volta completa.
b) uma volta e meia.
c) duas voltas completas.
d) duas voltas e meia.
e) cinco voltas completas.

20. Enem C2-H8

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro $x = 2$ ao mês de fevereiro e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2012. (Adaptado)

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro
b) abril
c) junho
d) julho
e) outubro

3 REDUÇÃO DO 2º, 3º E DO 4º QUADRANTE AO 1º QUADRANTE

- Conceitos iniciais
- Simetria em relação ao eixo das ordenadas: redução do 2º quadrante ao 1º quadrante
- Simetria em relação à origem dos eixos coordenados: redução do 3º quadrante ao 1º quadrante
- Simetria em relação ao eixo das abscissas: redução do 4º quadrante ao 1º quadrante

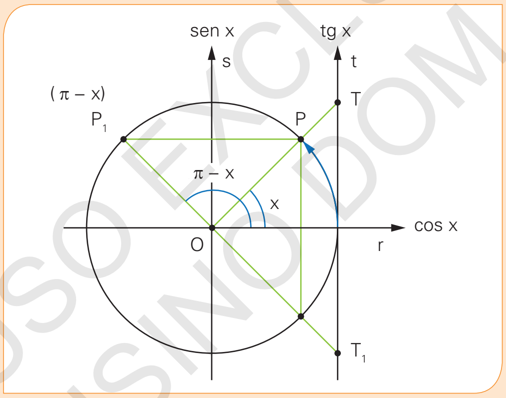
HABILIDADES

- Identificar a posição de arcos em relação ao 2º quadrante da circunferência trigonométrica.
- Determinar os valores do seno, cosseno e tangente de arcos no 2º quadrante, aplicando o procedimento de redução ao 1º quadrante.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identifi car a posição de arcos em relação aos quadrantes da circunferência trigonométrica.
- Determinar os valores do seno, cosseno e tangente de arcos dos 3º e 4º quadrantes, aplicando o procedimento de redução ao 1º quadrante.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO DAS ORDENADAS: REDUÇÃO DO 2º AO 1º QUADRANTE

Na figura a seguir, os pontos P e P_1, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, têm ordenadas iguais e abscissas simétricas. Com isso, podemos associar essas medidas e reduzi-las para o 1º quadrante.

Podemos escrever esses pontos como P(cos x, sen x) e P_1 (cos $(\pi - x)$, sen $(\pi - x)$), originando as seguintes identidades:



$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

Os pontos T e T_1, interseções da reta **t**, respectivamente com as semirretas $\overline{OP}$ e $\overline{OP_1}$, têm ordenadas simétricas. Podemos escrever T e T_1 como $T(1, \text{tg } x)$ e $T_1(1, \text{tg } (\pi - x))$, originando:

$$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg } x$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. **USF** – Se cotg x = 2 e x é do 1º quadrante, então cos x vale

a) $\frac{1}{5}$
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{5}$
d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
e) $\sqrt{5}$

Resolução

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 2 \rightarrow \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \cdot \cos x$$

Pela identidade trigonométrica fundamental, temos que:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{1}{4}\cdot\cos^2 x+\cos^2 x=1\rightarrow\cos^2 x=\frac{4}{5}$$

$(\cos x\geq 0,$ pois x é do primeiro quadrante$)\rightarrow$

$$\rightarrow\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2. Sistema Dom Bosco – Simplifique a expressão a seguir:

$$A=\frac{\text{sen }150°\cdot\sec 60°}{\text{sen}^2 40°-\cos^2 140°}$$

Resolução

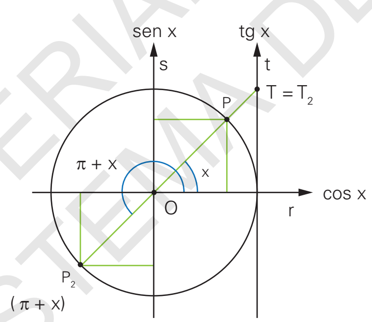
Da circunferência trigonométrica, temos sen 150° = sen 30° e cos 140° = –cos 40°.

Assim:

$$A=\frac{\text{sen }30°\cdot\dfrac{1}{\cos 60°}}{\text{sen}^2\ 40°+\cos^2 40°}=\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Simetria em relação ao eixo das ordenadas: redução do 3º quadrante ao 1º quadrante

Na figura a seguir, os pontos P e P_2, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, têm ordenadas e abscissas simétricas. Com isso, podemos associar essas medidas e reduzi-las para o 1º quadrante.



Podemos escrever esses pontos como P (cos x, sen x) e $P_2(\cos(\pi+x), \text{sen }(\pi-x))$, originando as seguintes identidades:

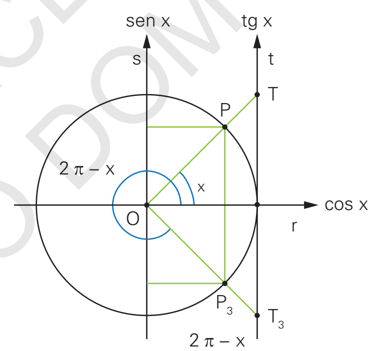
$$\text{sen}(\pi+x)=-\text{sen } x$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos x$$

Os pontos T e T_2, interseções da reta **t**, respectivamente, com as semirretas $\overline{OP}$ e $\overline{OP_2}$, têm ordenadas simétricas. Podemos escrever T e T_2 como $T(1, \text{tg } x)$ e $T_2(1, \text{tg }(\pi+x))$, originando:

$$\text{tg}(\pi+x)=\text{tg } x$$

Simetria em relação ao eixo das ordenadas: redução do 4º quadrante ao 1º quadrante

Na figura a seguir, os pontos P e P_3, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, têm ordenadas simétricas e abscissas iguais. Com isso, podemos associar essas medidas e reduzi-las para o 1º quadrante.



Podemos escrever esses pontos como P(cox x, sen x) e $P_3(\cos(2\pi-x), \text{sen }(2\pi-x))$, originando as seguintes identidades:

$$\text{sen}(2\pi-x)=-\text{sen } x$$
$$\cos(2\pi-x)=\cos x$$

Os pontos T e T_3, interseções da reta **t**, respectivamente, com as semirretas $\overline{OP}$ e $\overline{OP_3}$, têm ordenadas simétricas. Podemos escrever *T* e T_3 como $T(1, \text{tg } x)$ e $T_3(1, \text{tg }(2\pi-x))$, originando:

$$\text{tg}(2\pi-x)=-\text{tg } x$$

O ponto P_3 da circunferência pode ser considerado extremidade de um arco de medida negativa (–x). Esses resultados podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\text{sen}(-x)=-\text{sen } x$$
$$\cos(-x)=\cos x$$
$$\text{tg}(-x)=-\text{tg } x$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. PUC-SP – O valor de sen 1 200° é igual a:

a) cos 60°
b) –sen 60°
c) cos 30°
d) –sen 30°
e) cos 45°

Resolução

Temos que 1 200° = 3 · 360° + 120°. Assim, podemos fazer a redução ao 1º quadrante da seguinte maneira:

$$\text{sen}(180° - 120°) = \text{sen } 60° = \cos 30°$$

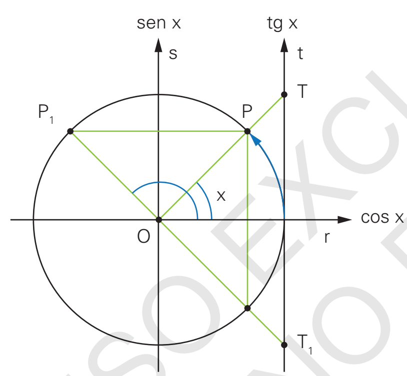
2. Sistema Dom Bosco – Simplifique a expressão.

$$B = \frac{\cos(2\pi - \theta) \cdot \text{sen}(\pi + \theta)}{\cos(\pi - \theta) \cdot \cos(\pi + \theta)}$$

Resolução

$$B = \frac{\cos\theta \cdot (-\text{sen}\,\theta)}{(-\cos\theta) \cdot (-\cos\theta)} = -\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = -\text{tg}\,\theta$$

SIMETRIA E REDUÇÃO DO 2º QUADRANTE AO 1º QUADRANTE



sen (π – x) = sen x

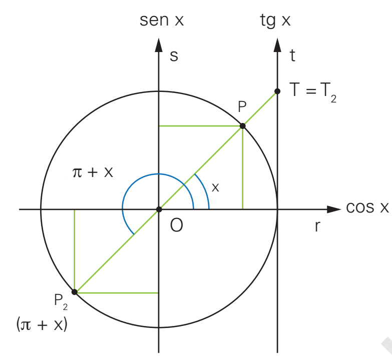
cos (π – x) = – cos x

tg (π – x) = – tg x

ROTEIRO DE AULA

Redução do 3º e do 4º quadrantes a 1º quadrante

3º quadrante

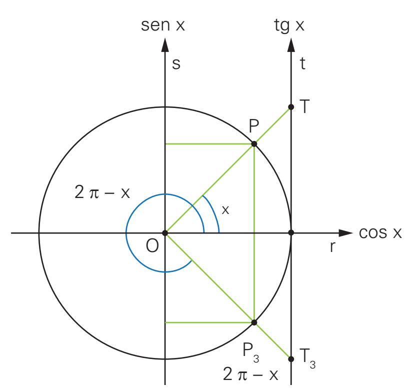


sen (π + x) =
= −sen x

cos (π + x) =
= −cos x

tg (π + x) =
= tg x

4º quadrante



sen (2 π − x) =
= −sen x

cos (2 π − x) =
= −cos x

tg (2 π − x) =
= −tg x

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Cesgranrio-RJ – Se $0 < a < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < b < \pi$ e $\text{sen } a = \text{sen } b = \frac{3}{5}$, então a + b vale:

a) π
b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{3\pi}{5}$
d) $\frac{5\pi}{3}$
d) $\frac{6\pi}{5}$

Como **a** e **b** têm o mesmo valor de seno, eles são simétricos. Logo: $(180° - a) = b \leftrightarrow a + b = 180° = \pi$.

2. IFSul-RS (adaptado) – Sabendo-se que $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$ e que $\alpha \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, o valor da expressão $y = \frac{\text{sen}(\alpha - 90°) \cdot \text{tg } \alpha}{\text{sec}(180° - \alpha)}$ é

a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
c) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Da circunferência trigonométrica, temos que $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 150°$, pois $\alpha \in 2^{\underline{o}}$ quadrante. Então:

$$y = \frac{\text{sen } (150° - 90°) \cdot \text{tg } 150°}{\text{sec } (180° - 150°)} = \frac{\text{sen}60° \cdot \text{tg } 150°}{\text{sec } 30°} = \frac{\text{sen}60° \cdot \text{tg } 150°}{\frac{1}{\cos 30°}} =$$

$= \text{sen } 60^{\underline{o}} \cdot \cos 30° \cdot \text{tg } 150^{\underline{o}}$

Como $\text{tg } 150^{\underline{o}} = -\text{tg } 30°$. Então,

$$y = \text{sen}60° \cdot \cos 30° \cdot -\left(\frac{\text{sen}30°}{\cos 30°}\right) = -\text{sen}60° \cdot \text{sen}30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

3. FGV-SP C2-H9

O número de quartos ocupados em um hotel varia de acordo com a época do ano. Estima-se que o número de quartos ocupados em cada mês de determinado ano seja dado por $Q(x) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$, em que x é estabelecido da seguinte forma: x = 1 representa o mês de janeiro, x = 2 representa o mês de fevereiro, x = 3 representa o mês de março, e assim por diante. Calcule a variação porcentual dos quartos ocupados em junho em relação a março.

a) – 20%
b) – 15%
c) – 30%
d) – 25%
e) – 50%

Em junho: $Q(6) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 150 - 30 = 120$

Em março: $Q(3) = 150 + 30 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = 150 - 0 = 150$

Portanto, $\frac{Q(6)}{Q(3)} = \frac{120}{150} = 0{,}8 = 80\%$. Então, houve uma diminuição de 20%.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

4. UFGD-MS – Considere-se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ e $\text{tg } \theta = \frac{2}{3}$. Calcule o valor da expressão cossec θ – sec θ.

Temos que $\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{sen } \theta = \frac{2}{3} \cdot \cos$.

Da relação fundamental:

$\frac{4}{9} \cdot \cos^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{13} \rightarrow \cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, pois $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Então, $\text{sen } \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Portanto, $\text{cossec } \theta - \sec \theta = -\frac{\sqrt{13}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{13}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{13}}{6}$.

5. Fuvest-SP – Se $\text{tg } x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de cos x – sen x é:

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $-\frac{1}{5}$

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{3}{4} \rightarrow \cos x = \frac{4}{3} \cdot \text{sen } x.$

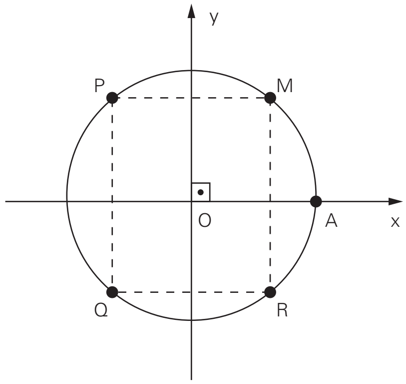
Da relação fundamental, vem:

$\text{sen}^2 x + \frac{16}{9} \cdot \text{sen}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{9}{25} \rightarrow \text{sen } x = -\frac{3}{5}$, pois $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Logo, $\cos x = \frac{4}{3} \cdot \text{sen } x \rightarrow \cos x = \frac{4}{3} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{-4}{5}$.

Assim, $\cos x - \text{sen } x = \frac{-4}{5} - \frac{(-3)}{5} = -\frac{1}{5}$.

6. Cesgranrio-RJ – Considere o ciclo trigonométrico da figura no qual o ponto A é a origem dos arcos, e MPQR é um retângulo com os lados paralelos aos eixos coordenados.



Se o ponto Q corresponde a $\frac{22\pi}{17}$, os pontos M, P e R correspondem, respectivamente, a

a) $\frac{20\pi}{17}, \frac{21\pi}{17}, \frac{23\pi}{17}$
b) $\frac{5\pi}{17}, \frac{12\pi}{17}, \frac{29\pi}{17}$
c) $\frac{5\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{12\pi}{17}$
d) $\frac{5\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{22\pi}{17}$
e) $\frac{7\pi}{34}, \frac{12\pi}{17}, \frac{29\pi}{17}$

Como o ângulo (α) formado pelo raio $\overline{OQ}$ com o eixo x é congruente ao ângulo (β) formado pelo raio $\overline{OM}$ com o eixo x, temos:

$\alpha = \frac{22\pi}{17} - \pi = \frac{5\pi}{17} = \beta$.

O mesmo α é congruente ao ângulo (γ) formado pelo raio $\overline{OP}$ com o eixo x. Logo, $\gamma = \frac{5\pi}{17}$; α também é congruente ao ângulo (θ) formado pelo raio $\overline{OR}$ com o eixo x. Então, $\theta = \frac{5\pi}{17}$. Portanto, $M = \beta = \frac{5\pi}{17}$; $P = \pi - \gamma = \pi - \frac{5\pi}{17} = \frac{12\pi}{17}$ e $R = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{5\pi}{17} = \frac{29\pi}{17}$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. PUC-RJ – Se tg $\theta = 1$ e θ pertence ao primeiro quadrante, então cos θ é igual a:

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) 1

8. Unicentro-RJ – Considerando-se que x é um arco com extremidade no segundo quadrante e que $\text{sen}\, x = \frac{4}{5}$, então pode-se afirmar que o valor de $5\cos^2 x - 3\text{tg}\, x$ é

a) $-\frac{11}{5}$
b) $-\frac{29}{15}$
c) $\frac{11}{5}$
d) $\frac{45}{15}$
e) $\frac{29}{5}$

9. Sistema Dom Bosco – Calcule a secante de um arco de medida 2 340º.

10. UFPB – Se $\text{sen } x = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$ e x está no segundo quadrante, então

a) $\text{tg}x = \dfrac{6\sqrt{10}}{7}$

b) $\text{tg}x = \dfrac{6\sqrt{10}}{49}$

c) $\text{tg}x = \dfrac{-2\sqrt{10}}{3}$

d) $\text{tg}x = \dfrac{-3\sqrt{10}}{2}$

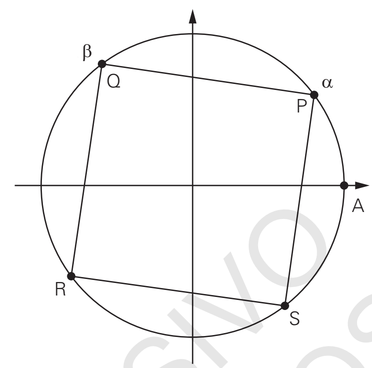
e) $\text{tg}x = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

11. UEFS (adaptado) – Se $\text{tg } \theta = \dfrac{6}{5} \cdot \cos \theta$, calcule sen θ.

12. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor da expressão

$$E = \text{sen } 1290° + \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos 1080° + \text{sen}^2 \frac{\pi}{7} + \cos \frac{37\pi}{6}.$$

13. Insper-SP – Na figura abaixo, em que o quadrado PQRS está inscrito na circunferência trigonométrica, os arcos AP e AQ têm medidas iguais a α e β, respectivamente, com $0 < \alpha < \beta < \pi$.



Sabendo que $\cos \alpha = 0{,}8$, pode-se concluir que o valor de cos β é

a) –0,8
b) 0,8
c) –0,6
d) 0,6
e) –0,2

14. UFPB – Se sen x ≠ 0 e cos x ≠ 0, a expressão

$$\frac{\text{sen}(180° - x)}{\text{cotg}(270° - x) \cdot \cos(270° - x)}$$ é igual a

a) cotg x
b) cossec x
c) –cotg x
d) tg x
e) sec x

15. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor do cosseno do ângulo percorrido pelo ponteiro das horas de um relógio em 10 horas e 30 minutos.

16. UFPB – Se tg θ = –3 e θ é um arco do 4º quadrante, então

a) $\text{sen } \theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{cotg } \theta = \frac{1}{3}$

d) $\sec \theta = -2\sqrt{2}$

e) $\text{cossec } \theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$

17. UPF-RS – Dentre as equações abaixo, assinale aquela que tem uma única solução em $]-\pi, \pi]$.

a) $\text{tg } \alpha = 1$

b) $\text{sen } \alpha = 0$

c) $\cos \alpha = -1$

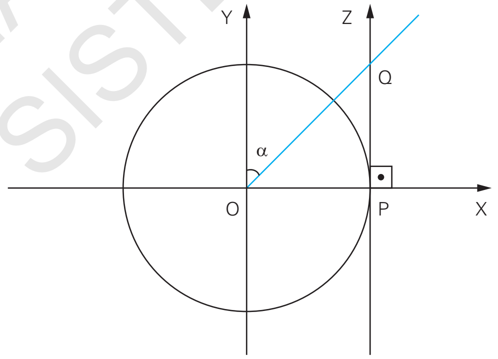
d) $\text{tg } \alpha = 0$

e) $\cos \alpha = -2$

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFRN (adaptado) C2-H8

A figura a seguir é composta por dois eixos perpendiculares entre si, X e Y, que se interceptam no centro O de um círculo de raio 1, e outro eixo Z, paralelo a Y e tangente ao círculo no ponto P. A semirreta OQ, com Q pertencente a Z, forma um ângulo α com o eixo Y.



Podemos afirmar que o valor da medida do segmento PQ é:

a) sen α

b) tg α

c) cotg α

d) cos α

e) cossec α

19. PUCCamp-SP (adaptado) C2-H8

Com um ângulo de inclinação de 30°, em relação ao solo plano, os raios solares que incidem sobre uma haste vertical de 2,5 m de comprimento geram uma sombra de x m. Um pouco mais tarde, quando o ângulo de inclinação dos raios solares é de 45°, a mesma sombra gerada agora é de y m. A diferença entre x e y é de, aproximadamente (dados: sen 30° = 0,5, cos 30° = 0,866, tg 30° = 0,577, sen 45° = 0,707, cos 45° = 0,707, tg 45° = 1):

a) 1 m
b) 1,83 m
c) 2,45 m
d) 0,88 m
e) 2,27 m

20. Insper-SP C2-H7

Considere o produto abaixo, cujos fatores são os cossenos de todos os arcos trigonométricos cujas medidas, em graus, são números inteiros pertencentes ao intervalo [91, 269]

$P = \cos 91° \cdot \cos 92° \cdot \cos 93° \cdot \ldots \cdot \cos 268° \cdot \cos 269°$

Nessas condições, é correto afirmar que

a) $-1 < P < -\frac{1}{4}$
b) $-\frac{1}{4} < P < 0$
c) $P = 0$
d) $0 < P < -\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{4} < P < 1$

4 LEI DOS COSSENOS E LEI DOS SENOS

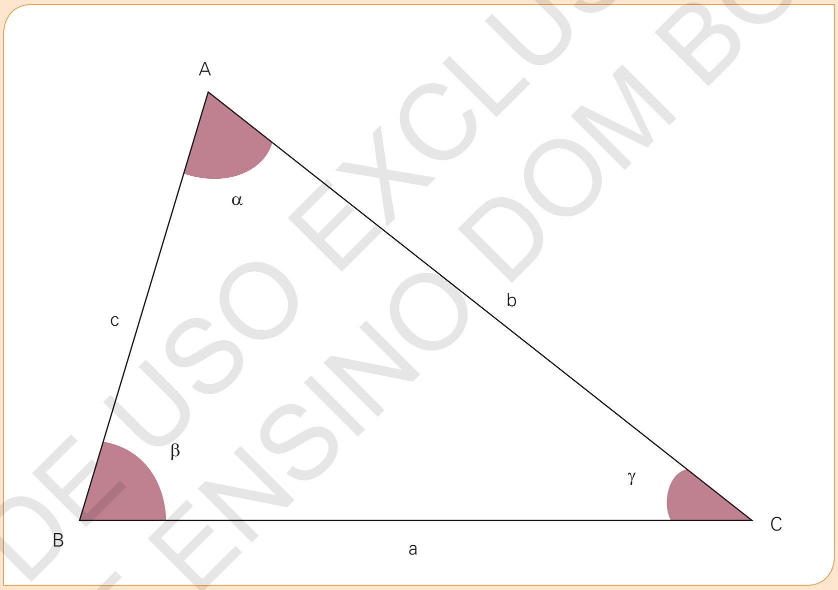
- Lei dos cossenos
- Conceitos iniciais
- Ângulos suplementares
- Lei dos senos

HABILIDADES

- Aplicar a lei dos cossenos em um triângulo qualquer.
- Resolver situações-problema envolvendo ângulos e medidas em triângulos quaisquer.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional
- Aplicar a Lei dos senos em um triângulo qualquer.
- Resolver situações-problema envolvendo ângulos e medidas em triângulos quaisquer.
- Interpretar a localização e amovimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo por eles formado. Observe:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Em um triângulo ABC de lados $a = 4\sqrt{3}$, $b = 3$ e $\hat{C} = 30°$, calcule a medida de **c**.

Resolução

Pela lei dos cossenos, temos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$$

$$c^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 3^3 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \cdot 3 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}$$

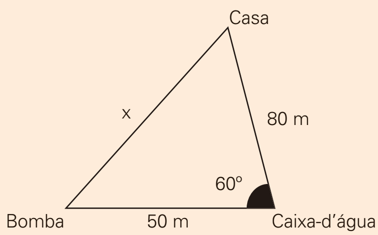
$$c^2 = 57 - 36 = 21$$

$$c = \sqrt{21}$$

2. Unicamp-SP – A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa d'água-bomba e caixa d'água-casa é de 60°. Se a ideia é bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

Resolução

Considere a figura a seguir.



Pela lei dos cossenos:

$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$

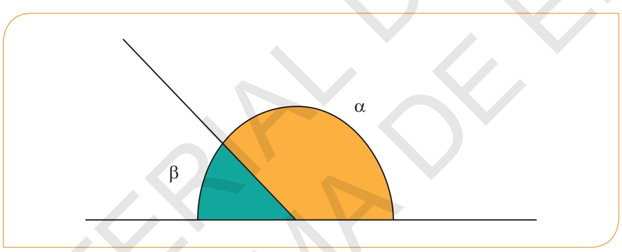
$x^2 = 2\,500 + 6\,400 - 8\,000 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 4\,900 \rightarrow x = 70$

Serão necessários 70 metros de encanamento.

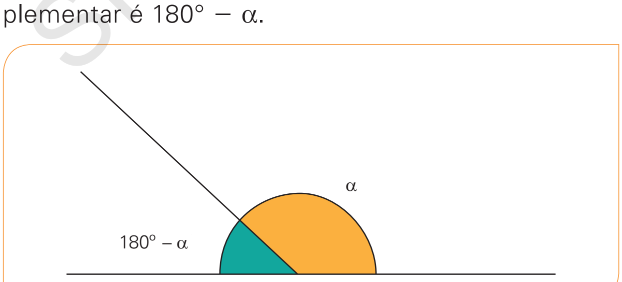
Ângulos suplementares

Retomando, dois ângulos cuja soma das medidas seja igual a 180° são chamados de **ângulos suplementares**. Considera-se cada um como **suplemento** do outro.



$\alpha + \beta = 180° \rightarrow \alpha$ e β são suplementares

Se α é a medida de um ângulo obtuso, isto é, $90° < \alpha < 180°$, então a medida do ângulo agudo suplementar é $180° - \alpha$.



Exemplos:

- 30° é suplemento de 150°, pois 180° − 30° = 150°.
- 120° é suplemento de 60°, pois 180° − 120° = 60°.

Da circunferência trigonométrica, podemos estabelecer as seguintes relações entre ângulos complementares:

- Seno de um ângulo obtuso é o seno de seu suplemento, ou seja,

$$\text{sen } x = \text{sen}(180° - x)$$

- Cosseno de um ângulo obtuso é o oposto do cosseno de seu suplemento, ou seja:

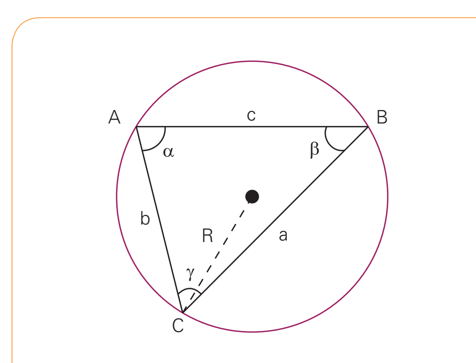
$$\cos x = -\cos(180° - x)$$

Exemplos:

- $\text{sen } 135° = \text{sen}(180° - 135°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{sen } 150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 135° = -\cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lei dos senos

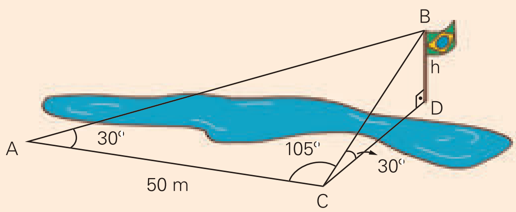
Os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos senos dos ângulos opostos em razão igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.



$$\frac{a}{\text{sen }\alpha} = \frac{b}{\text{sen }\beta} = \frac{c}{\text{sen }\gamma} = 2R$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. UNESP – Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30°, e o ângulo $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura.



A altura h do mastro da bandeira, em metros, é

a) 12,5
b) $12{,}5\cdot\sqrt{2}$
c) 25,0
d) $25{,}0\cdot\sqrt{2}$
e) 35,0

Resolução

Aplicando a Lei dos senos no triângulo ABC, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen }30°}=\frac{50}{\text{sen }45°}$$

$$\frac{BC}{\frac{1}{2}}=\frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\rightarrow BC=25\sqrt{2}\text{ m}$$

Assim, no triângulo retângulo BCD, temos:

$$\text{sen }30°=\frac{h}{BC}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{h}{25\sqrt{2}}\rightarrow h=12{,}5\cdot\sqrt{2}\text{ m}$$

2. UEMA – Considere um triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio unitário cujos lados medem $a=\sqrt{3}$, $b=1$ e $c=2$. Determine a soma $2\hat{A}+3\hat{B}+\hat{C}$, em que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos internos desse triângulo.

Resolução

Utilizando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\text{sen }\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen }\hat{B}}=\frac{c}{\text{sen }\hat{C}}=2R$$

Como o raio é unitário, R = 1.

Então, $\frac{\sqrt{3}}{\text{sen }\hat{A}}=\frac{1}{\text{sen }\hat{B}}=\frac{2}{\text{sen }\hat{C}}=2\cdot 1=2.$

Assim:

$$\frac{\sqrt{3}}{\text{sen }\hat{A}}=2\rightarrow \text{sen }\hat{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \hat{A}=60°$$

$$\frac{1}{\text{sen }\hat{B}}=2\rightarrow \text{sen }\hat{B}=\frac{1}{2}\rightarrow \hat{B}=30°$$

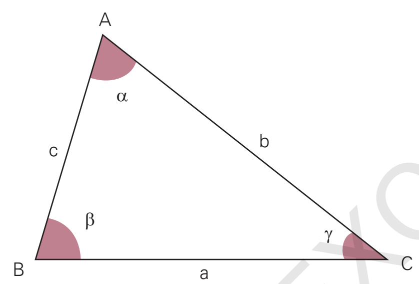
$$\frac{2}{\text{sen }\hat{C}}=2\rightarrow \text{sen }\hat{C}=1\rightarrow \hat{C}=90°$$

Portanto, a soma é

$2\hat{A}+3\hat{B}+\hat{C}=2\cdot 60°+3\cdot 30°+1\cdot 90°=300°.$

ROTEIRO DE AULA

LEI DOS COSSENOS



Lei dos cossenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

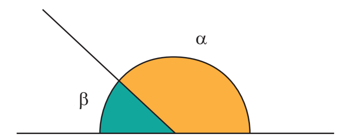
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

ROTEIRO DE AULA

LEI DOS SENOS

Ângulos suplementares



$\alpha + \beta =$ 180°

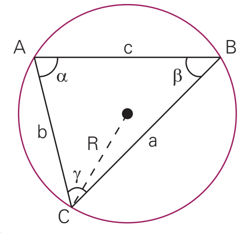
Seno de um ângulo obtuso é o seno do seu suplemento, ou seja,

sen x = sen (180° – x)

Cosseno de um ângulo obtuso é o oposto do cosseno de seu suplemento, ou seja,

cos x = cos (180° – x)

Triângulo qualquer



$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2R$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UFPR – Calcule o seno do maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8 metros.

a) $\sqrt{15}/4$
b) 1/4
c) 1/2
d) $\sqrt{10}/4$
e) $\sqrt{3}/2$

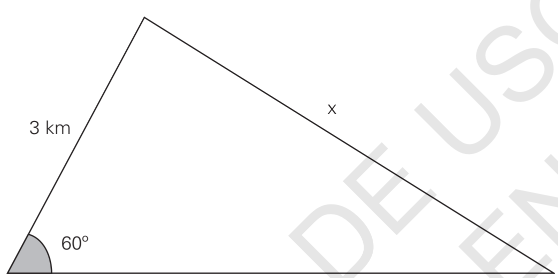
Chamando de θ, o maior ângulo é o ângulo oposto ao maior lado. Utilizando a Lei dos cossenos, temos:

$8^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\theta \rightarrow 64 = 36 + 16 - 48 \cdot \cos\theta \rightarrow$

$\rightarrow 12 = -48 \cdot \cos\theta \rightarrow \cos\theta = -\dfrac{1}{4}$ (θ é do 2º quadrante). Portanto, pela identidade trigonométrica fundamental:

$\text{sen}^2\,\theta + \dfrac{1}{16} = 1 \rightarrow \text{sen}^2\,\theta = \dfrac{15}{16} \rightarrow \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

2. Unemat-MS – A cidade de Brasília (DF) foi projetada e seu mapa foi todo desenhado para ter o formato de um avião. Já Triangolândia foi projetada no formato de um triângulo, conforme a figura abaixo.



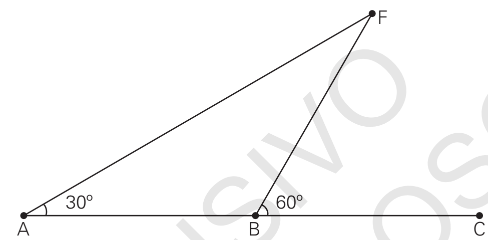
Qual é a medida da distância x?

a) 6 km
b) 5,5 km
c) 5 km
d) 7 km
e) 8 km

Pela lei dos cossenos $x^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60° \rightarrow$
$\rightarrow x^2 = 64 + 9 - 24 = 49 \rightarrow x = 7$ km

3. UFU-MG (adaptado) C2-H8

O comandante de um navio fez, pela primeira vez, uma rota retilínea AC orientado por um farol F, localizado numa ilha. Ele pretendia determinar a distância do ponto inicial A ao farol F. No início da viagem, o comandante obteve a medida FAC = 30° e, após percorrer 6 milhas marítimas, localizando-se em B, ele fez a medição do ângulo FBC, obtendo 60°. Observe a figura a seguir, que ilustra esta situação.



De acordo com as informações, a distância, em milhas, do ponto inicial A ao farol F, obtida pelo comandante foi de

a) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$
b) $4\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}$
e) $7\sqrt{3}$

Considerando $\hat{F} = a$, como o ângulo $F\hat{B}C$ é externo ao triângulo, temos que $60° = 30° + \alpha \rightarrow a = 30°$.

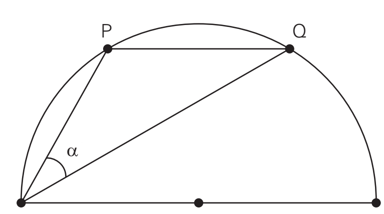
Utilizando a Lei dos senos:

$\dfrac{AB}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{AF}{\text{sen}\,B} \rightarrow \dfrac{6}{\frac{1}{2}} = \dfrac{AF}{\text{sen}\,120°} \rightarrow AF = 12 \cdot \text{sen}\,120° \rightarrow AF = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

4. FGV-RJ – Os pontos P e Q estão em uma semicircunferência de centro C e diâmetro AB, formando com A o triângulo APQ, conforme indica a figura.



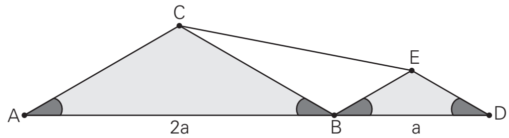
Sabendo-se que $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$, e que AB = 3PQ = = 6 cm, então sen α é igual a:

a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{1}{3}$ **c)** $\dfrac{1}{4}$ **d)** $\dfrac{1}{5}$ **e)** $\dfrac{1}{6}$

Pela Lei dos senos, temos:

$\dfrac{PQ}{\text{sen}\alpha} = 2R \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

5. Unicamp-SP (adaptado) – Na figura abaixo, ABC e BDE são triângulos isósceles de bases 2a e a, respectivamente, e os ângulos CAB e EDB medem 30°. Portanto, o comprimento do segmento CE é:



a) $a\sqrt{\frac{5}{3}}$ **b)** $a\sqrt{\frac{8}{3}}$ **c)** $a\sqrt{\frac{7}{3}}$ **d)** $a\sqrt{2}$

Lembrando que a altura (h) que parte do vértice C, no triângulo isósceles ABC, é também mediana, podemos encontrar a medida BC traçando a altura (h) do triângulo ABC:

$$\cos 30° = \frac{a}{BC} \rightarrow BC = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Analogamente, no triângulo isósceles BDE, temos:

$$\cos 30° = \frac{\frac{a}{2}}{BE} \rightarrow BE = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Então, pela Lei dos cossenos, no triângulo BCE, temos:

$$CE^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120° \rightarrow CE^2 = \frac{5a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = \frac{7a^2}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow CE = a\sqrt{\frac{7}{3}}$$

6. Sistema Dom Bosco – Em um triângulo ABC, temos os ângulos $\hat{A} = 105°$ e $\hat{B} = 45°$. Os lados opostos aos vértices B e C medem x e 100 cm, respectivamente. Calcule x.

Temos que o ângulo $\hat{C} = 180° - 105° - 45° = 30°$. Logo, pela Lei dos senos:

$$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{100}{\text{sen } 30°} \leftrightarrow x = 200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2} \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFRGS-RS (adaptado) – Os lados de um losango medem 4 e um dos seus ângulos 30°. Calcule a medida da diagonal menor do losango.

8. UFJF-MG – Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de 60°. Calcule o terceiro lado desse triângulo.

a) $2\sqrt{21}$ m

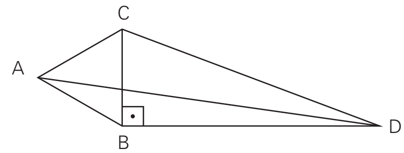
b) $2\sqrt{31}$ m

c) $2\sqrt{41}$ m

d) $2\sqrt{51}$ m

e) $2\sqrt{61}$ m

9. Unemat-MT – Na figura abaixo, o triângulo ABC é um triângulo equilátero de 3 cm de lado, e o triângulo retângulo BCD tem lados BD = 4 cm e CD = 5 cm e $C\hat{B}D = 90°$.



Qual a medida do segmento AD?

a) $\sqrt{3}$

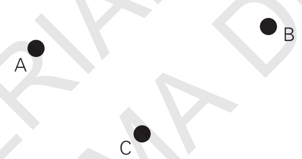
b) $4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{100+\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$

e) $2\sqrt{3}$

10. IFSul-RS – Em certa cidade, a igreja está localizada no ponto A, a prefeitura no ponto B e a livraria no ponto C, como mostra os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros e que o ângulo formado por essas duas direções é 60°, a distância da livraria à igreja é



a) $17\sqrt{5}$ m

b) $5\sqrt{7}$ m

c) $25\sqrt{7}$ m

d) $7\sqrt{5}$ m

11. ITA-SP – Seja ABC um triângulo equilátero, suponha que M e N são pontos pertencentes ao lado BC tais que BM = MN = NC. Sendo α a medida, em radianos, do ângulo $M\hat{A}N$, então o valor de cos α é

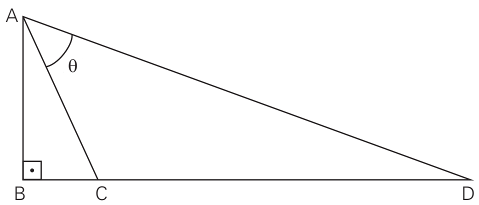
a) $\frac{13}{14}$ **c)** $\frac{15}{16}$ **e)** $\frac{17}{18}$

b) $\frac{14}{15}$ **d)** $\frac{16}{17}$

12. Sistema Dom Bosco – É possível que três segmentos de reta medindo 5, 7 e 13 cm possam formar um triângulo?

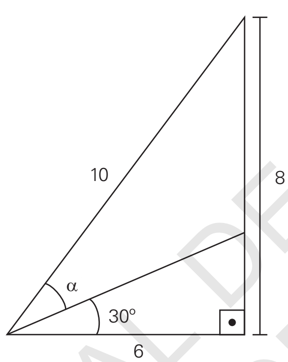
13. Sistema Dom Bosco – Em um triângulo ABC, tem-se AC = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm e $\hat{A} = 30°$. Calcule a medida do ângulo B.

14. Unicamp-SP – Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura abaixo, em que AB = 2 cm, BC = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a



a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°

15. UFG-GO – Observe a figura a seguir, em que estão indicadas as medidas dos lados do triângulo maior e alguns dos ângulos.



O seno do ângulo indicado por α na figura vale:

a) $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$

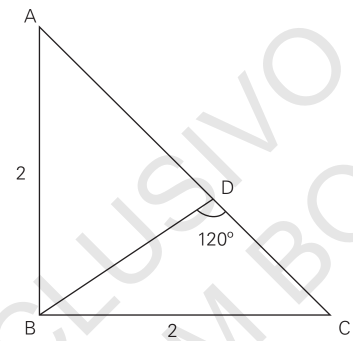
b) $\dfrac{4-\sqrt{3}}{10}$

c) $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$

d) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

e) $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$

16. UFU-MG (adaptado) – Considere o triângulo ABC retângulo em B a seguir.



Sabendo que $\hat{D}$ = 120°, AB = AC = 2 cm, calcule a medida BD.

17. Colégio Naval-RJ – Considere que ABC é um triângulo acutângulo inscrito em uma circunferência L. A altura traçada do vértice B intersecta L no ponto D. Sabendo-se que AD = 4 e BC = 8, calcule o raio de L.

a) $2\sqrt{10}$
b) $4\sqrt{10}$
c) $2\sqrt{5}$
d) $4\sqrt{5}$
e) $3\sqrt{10}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. UPE C2-H9

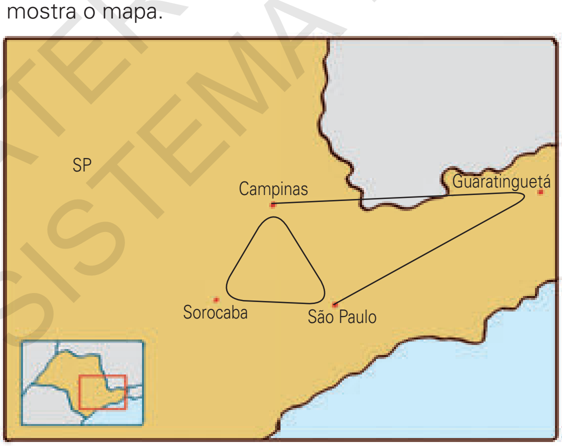
João está procurando cercar um terreno triangular que ele comprou no campo. Ele sabe que dois lados desse terreno medem, respectivamente, 10 m e 6 m e formam entre si um ângulo de 120°. O terreno será cercado com três voltas de arame farpado. Se o preço do metro do arame custa R$ 5,00, qual será o valor gasto por João com a compra do arame?

Dados: sen de $120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e cos de $120° = -\frac{1}{2}$

a) R$ 300,00
b) R$ 420,00
c) R$ 450,00
d) R$ 500,00
e) R$ 520,00

19. UNESP (adaptado) C2-H8

Um professor de Geografia forneceu a seus alunos um mapa do estado de São Paulo, que informava que as distâncias aproximadas em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Campinas e entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Guaratinguetá eram, respectivamente, 80 km e 160 km. Um dos alunos observou, então, que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Campinas e Sorocaba formavam um triângulo equilátero. Já um outro aluno notou que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Guaratinguetá e Campinas formavam um triângulo retângulo, conforme mostra o mapa.



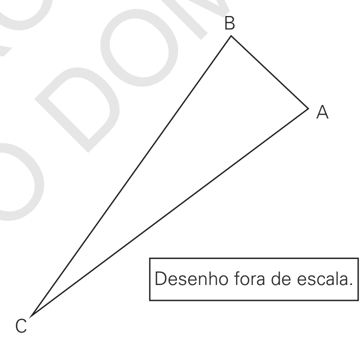
Com essas informações, os alunos determinaram que a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km, é próxima de

a) $80 \cdot \sqrt{2+5 \cdot \sqrt{3}}$
b) $80 \cdot \sqrt{5+2 \cdot \sqrt{3}}$
c) $80 \cdot \sqrt{6}$
d) $80 \cdot \sqrt{5+3 \cdot \sqrt{2}}$
e) $80 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3}}$

20. Fatec-SP (adaptado) C2-H8

A maior parte dos refugiados sírios que solicita abrigo na Europa escolhe a Alemanha como destino. No entanto, muitos refugiados sírios têm vindo também para o Brasil.

Considere o triângulo **ABC** no qual o vértice **A** representa a cidade de Aleppo, na Síria; o vértice **B** representa a cidade de Berlim, na Alemanha, e o vértice **C** representa a cidade de Campinas, no Brasil.



Nesse triângulo, a distância entre A e B é de 3 700 km, a medida de $A\hat{C}B$ é igual a 18° e a medida de $A\hat{B}C$ é igual a 81°.

Com base nos dados apresentados, se um refugiado sírio viaja de Aleppo a Berlim e, em seguida, de Berlim a Campinas, terá percorrido no mínimo x quilômetros em todo o trajeto.

O valor de x é mais próximo de

a) 11 300.
b) 12 300.
c) 13 300.
d) 14 300.
e) 15 300.

Adote:
sen 18° = 0,31
cos 18° = 0,95
sen 81° = 0,98
cos 81° = 0,16

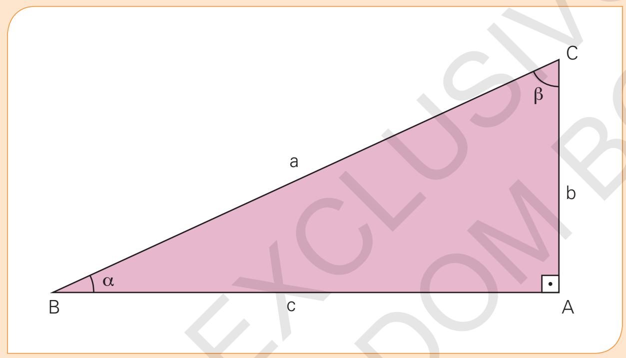
5 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- Introdução às identidades trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Outras identidades trigonométricas

HABILIDADES

- Reconhecer relações entre as razões trigonométricas.
- Simplificar expressões com a utilização das identidades trigonométricas.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

Na trigonometria, podemos utilizar o triângulo retângulo ABC para relacionar as medidas de seus lados e ângulos.



Aplicando as medidas de seus lados no teorema de Pitágoras, obtém-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$.

Dividindo seus membros por a^2, não se altera a igualdade.

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Sabemos que $\frac{b}{a} = \text{sen } \alpha = \cos = \beta$ e $\frac{c}{a} = \text{sen } \beta = \cos = \alpha$.

Portanto, substituindo esses valores na equação anterior para um ângulo x qualquer, temos:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Essa é a **relação fundamental** da trigonometria, cuja importância está no fato de ela possibilitar a determinação do seno do ângulo com base em seu cosseno e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. USF-SP – Seja k o número real que satisfaz simultaneamente as equações $\text{sen } x = (k - 1) \cdot \sqrt{2}$ e $\cos x = \sqrt{2-3k}$. O valor de k é:

a) $\frac{1}{2}$

b) 3

c) 3 ou $\frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

Resolução

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, vem

$\left[(k-1)\sqrt{2}\right]^2 + \left(\sqrt{2-3k}\right)^2 = 1$

$2 \cdot (k - 1)^2 + (2 - 3k) = 1$

$2 \cdot (k^2 - 2k + 1) + 2 - 3k = 1$

$2k^2 - 4k + 2 + 2 - 3k = 1$

$2k^2 - 7k + 3 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$k = 3$ (não convém) ou $k = \frac{1}{2}$

Logo, $k = \frac{1}{2}$.

2. UCSal-BA – Qualquer seja o número real x, a expressão $\cos^4 x - \text{sen}^4 x$ é equivalente a

a) $\text{sen}^2 x - 1$
b) $2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x$
c) $2 \cdot \cos^2 x - 1$
d) $2 - \cos^2 x$
e) $(\text{sen}x + \cos x) \cdot \cos x$

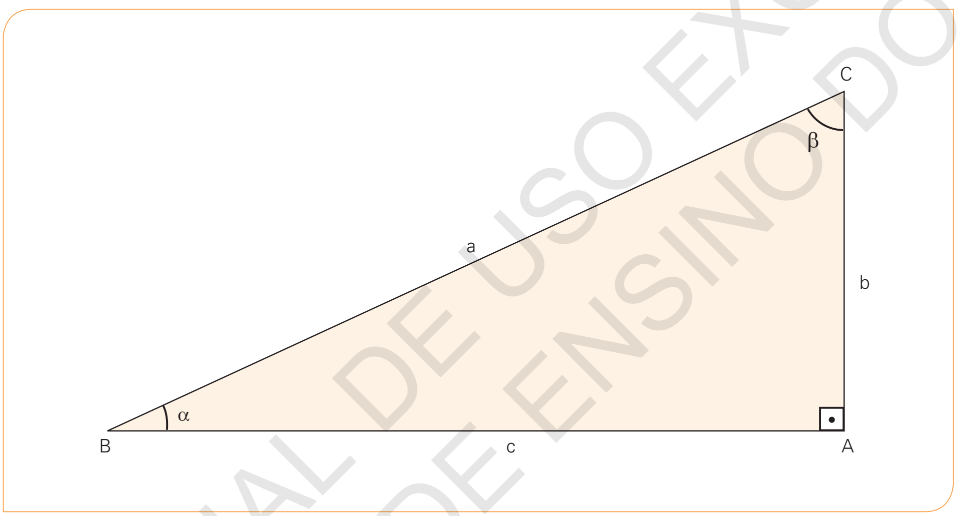
Resolução

$\cos^4 x - \text{sen}^4 x = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cdot (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)$
Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, vem $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
Substituindo:
$[\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \cdot 1 = 2 \cdot \cos^2 x - 1]$

Identidades trigonométricas

Como vimos no módulo anterior, podemos encontrar em um triângulo retângulo qualquer as seguintes relações:

$$\text{sen}\ \alpha = \cos\ \beta = \frac{b}{a} \rightarrow \cos\ \alpha = \text{sen}\ \beta = \frac{c}{a}$$



Assim, podemos concluir que:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} = \text{cotg}\ \beta \rightarrow \text{tg}\ \beta = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \text{cotg}\ \alpha$$

$$\sec\ \alpha = \text{cossec}\ \beta \rightarrow \sec\ \beta = \text{cossec}\ \alpha$$

Façamos agora outro desenvolvimento. Considerando um dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC como o **a**, dividimos sen α por cos α:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\ \alpha$$

O resultado é o mesmo se considerarmos o ângulo β. Portanto, para um ângulo x, tal que $\cos x \neq 0$:

$$\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$$

Podemos observar também que a razão $\frac{b}{c}$, que representa tg α, caso seja invertida [tornando-se $\frac{c}{b}$], constitui cotg α. Em virtude disso e considerando a identidade enunciada, para todo ângulo x de seno não nulo:

- $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$

Tais inversões também ocorrem nas relações seno, cosseno, secante e cossecante. Assim:

- $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \to \text{cossec } \alpha = \frac{a}{b}$
- $\cos \alpha = \frac{c}{a} \to \sec \alpha = \frac{a}{c}$

De modo análogo, encontraríamos inversões semelhantes se considerássemos o ângulo β. Assim, para dado ângulo x:

- $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen} x}$
- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

Observação: Desde que seja respeitada a condição de os denominadores dos segundos membros dessas identidades não serem nulos.

$$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \ (\cos x \neq 0)$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x \ (\text{sen } x \neq 0)$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

FGV-RJ – A função trigonométrica equivalente a (sec x + sen x) / (cossec x + cos x) é

a) sen x
b) cotg x
c) sec x
d) cossec x
e) tg x

Resolução

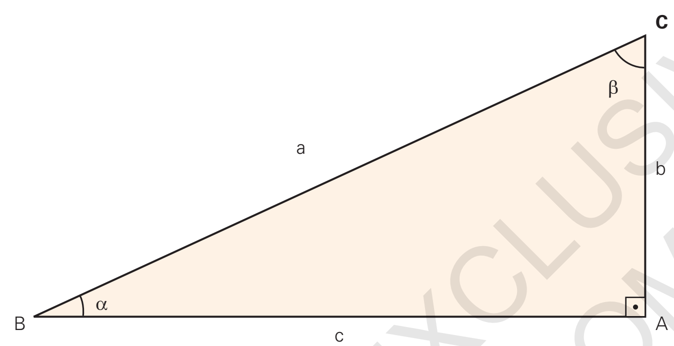
$$\frac{\sec x + \text{sen} x}{\text{cossec} x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \text{sen} x}{\frac{1}{\text{sen} x} + \cos x} = \frac{\frac{1 + \text{sen} x \cdot \cos x}{\cos x}}{\frac{1 + \text{sen} x \cdot \cos x}{\text{sen} x}} =$$

$$= \frac{1 + \text{sen} x \cdot \cos x}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen} x}{1 + \text{sen} x \cdot \cos x}$$

Logo:

$$\frac{\sec x + \text{sen} x}{\cos \sec x + \cos x} = \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \text{tg} x$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

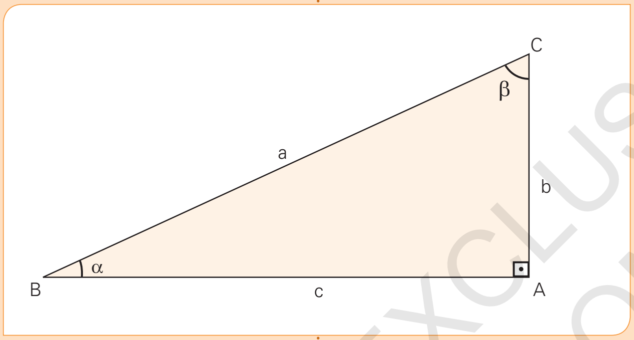


Dado um ângulo α qualquer

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

ROTEIRO DE AULA

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS



Dado um ângulo α qualquer

$\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$

$\text{cossec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RJ – Se tg $\theta = 1$ e θ pertencem ao primeiro quadrante, então cos θ é igual a:

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) 1

Como θ pertence ao primeiro quadrante:

$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 1 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \cos\theta \rightarrow \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \cos^2\theta = \cos^2\theta \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Unioeste-PR – Com respeito às afirmações abaixo, é correto afirmar que somente

I. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, para todo número real positivo a.

II. $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, para todo número real x.

III. $\frac{\text{sen}\,x}{\text{csc}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$, para todo número real $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) a afirmação I está correta.

b) a afirmação II está correta.

c) a afirmação III está correta.

d) as afirmações I e II estão corretas.

e) as afirmações I e III estão corretas.

Verdadeiro, pois $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$

Falso, porque $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\,\text{sen}\,x$

Verdadeiro, pois $\frac{\text{sen}\,x}{\text{csc}\,x} + \frac{\cos x}{\sec x} = \frac{\text{sen}\,x}{\frac{1}{\text{sen}\,x}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = \text{sen}^2x + \cos^2x = 1.$

3. UFSJ-MG (adaptado) C5-H21

As relações matemáticas são fundamentais nos estudos sobre a natureza e usadas constantemente para cálculos do nosso cotidiano, como o número π, a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, muito utilizado na engenharia, geologia, astronomia e demais campos científicos. Na trigonometria, por exemplo, trabalhamos com as funções trigonométricas e as suas relações.

Considerando os valores de θ para os quais a expressão $\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{cossec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$ é definida, é correto afirmar que ela está sempre igual a

a) 1

b) 2

c) sen θ

d) cos θ

e) e) tg θ

Temos que

$\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{cossec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\frac{1}{\text{sen}\,\theta}} + \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Sistema Dom Bosco – Dado que $\sec^2x = 4$ e x pertence ao primeiro quadrante, calcule o valor de cotg x

Temos que $\sec^2x = 1 + \text{tg}^2x$

$4 = 1 + \text{tg}^2x \rightarrow \text{tg}^2x = 3 \rightarrow \text{tg}\,x = \sqrt{3}$

Logo, $\text{cotg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor de $\frac{\cos x + \text{tg}\, x}{\text{cotg}\, x \cdot \sec x}$, dado que $\cos x = \frac{3}{5}$ e $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Temos $\dfrac{\cos x + \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \cdot \frac{1}{\cos x}} = \dfrac{\cos x + \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}{\frac{1}{\text{sen}\, x}} = \left(\cos x + \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right) \cdot \text{sen}\, x$

Se $\cos x = \frac{3}{5}$, então: $\text{sen}^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{sen}^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen}\, x = \frac{4}{5}$

Logo: $\left(\cos x + \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right) \cdot \text{sen}\, x = \left(\frac{3}{5} + \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right) \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} =$

$= \left(\frac{9 + 20}{15}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{15} \cdot \frac{4}{5} = \frac{116}{75}$

6. UPE – Num triângulo retângulo, temos que tg x = 3. Se x é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de cos x?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

Temos que $\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, $2\,\text{sen}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}\, x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEM-PR – Usando conhecimentos sobre trigonometria, assinale o que for correto.

01) Num triângulo isósceles, a base mede 10 e os ângulos da base medem, cada um deles, $\frac{\pi}{4}$. Portanto, o perímetro desse triângulo é $10 + 10\sqrt{2}$.

02) Vale a igualdade $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

04) Se $y = \dfrac{\text{cotg}\frac{3\pi}{2} + \text{cossec}\frac{3\pi}{2}}{\text{sen}\frac{3\pi}{2}}$ e $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, então $y = 1$.

08) Se tg x = a e cotg x = b, então $a \cdot b = 1$.

16) Supondo que $\text{sen}\, x = \frac{3}{4}$ e $\text{tg}\, x = \frac{1}{2}$, então $\sec x = \frac{1}{4}$.

8. Sistema Dom Bosco – Calcule o intervalo da expressão real $\frac{\cos^2 x}{1 - \text{sen}\, x}$ com $\text{sen}\, x \neq 1$ e $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

9. FGV-RJ – A função trigonométrica equivalente a $\dfrac{\sec x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x + \cos x}$ é

a) sen x
b) cotg x
c) sec x
d) cossec x
e) tg x

10. Unicamp-SP – Seja x real tal que cos x = tg x. O valor de sen x é

a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

11. FGV-SP

a) Num triângulo isósceles ABC, em que AB = AC, o ângulo Â mede o dobro da soma dos outros dois. O lado BC mede 10 cm. Obtenha o perímetro desse triângulo.

b) Considerando que sen x + cos x = k, calcule, em função de k, o valor da expressão $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

12. Sistema Dom Bosco – Se cotg x = 2 e x é do 2º quadrante, calcule o valor de cos x.

13. ITA-SP – O número de soluções da equação

$(1 + \sec \theta)(1 + \text{cossec}\,\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3 **e)** 4

14. UEMG – Sobre trigonometria, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta as corretas.

I. $\sec(x) = (1-\text{sen}^2 x)^{\frac{-1}{2}}$

II. O valor de $(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x)$, para $x \neq k\pi$, com k inteiro, é igual a 1.

III. A medida do arco trigonométrico da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de medida $-40°$, é $40°$.

IV. $\text{tg}\ 50° \cdot \text{tg}\ 310° < 0$.

a) Apenas I, II e IV.
b) Apenas I, II e III.
c) Apenas I e IV.
d) Apenas II e III.

15. UFSJ-MG – Considerando os valores de θ, para os quais a expressão $\left(\dfrac{\text{sen}\theta}{\csc\theta}\right) + \left(\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta}\right)$ é definida, é correto afirmar que ela está sempre igual a

a) 1 **b)** 2 **c)** sen θ **d)** cos θ

16. Sistema Dom Bosco – Um ângulo do segundo quadrante tem seno igual a $\dfrac{12}{13}$. Calcule a cotangente de seu ângulo complementar.

17. UNESP – Se x e y são números reais tais que y =

$$= \frac{\cos^3 x - 2 \cdot \cos x + \sec x}{\cos x \cdot \text{sen}^2 x}, \text{ então:}$$

a) $y = \sec^2 x$
b) $y = \text{tg}^2 x$
c) $y = \cos^2 x$
d) $y = \text{cossec}^2 x$
e) $y = \text{sen}^2 x$

18. CFTMG (adaptado) C5-H21

Na astronomia, um dos métodos mais usados para medir distâncias é a triangulação, levando em conta que não se é possível calcular as distâncias de forma direta. Em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos é 2. Sabendo-se que a hipotenusa desse triângulo é 5, o valor do seno desse mesmo ângulo é:

a) $\frac{4}{5}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
e) $\frac{2}{5}$

19. Unicamp-SP (adaptado) C5-H21

Por serem periódicas, as funções trigonométricas são usadas em muitas aplicações que possuam periodicidade, por exemplo, nas ondas estacionárias e no movimento das cordas de um instrumento musical, como o violão. Seja x um número real, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tal que a sequência (tan x, sec x, 2) é uma progressão aritmética (PA). Então, a razão dessa PA é igual a

a) 1
b) $\frac{5}{4}$
c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{5}{3}$

20. Enem C5-H21

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br em 2 ago.2012 (adaptado)

Na safra o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro
b) abril
c) junho
d) julho
e) outubro

6 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

- Introdução
- Função seno
- Função cosseno
- Função tangente
- Funções inversas
- Variações das funções trigonométricas

HABILIDADES

- Estudar funções trigonométricas, domínio, imagem, período e paridade.
- Estabelecer relações a respeito do comportamento dos gráficos.
- Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas e suas variações.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- Compreender as funções trigonométricas em relação a domínio, imagem, período e paridade.
- Estabelecer relações a respeito do comportamento dos gráficos.
- Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas e suas variações.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Função seno

Associa o número y = sen x a cada número real x.

Domínio

Como sen x é definido para todo x real, o domínio de f(x) = sen x é o conjunto $\mathbb{R}$.

Conjunto imagem

Na circunferência trigonométrica, a função sen x assume valor máximo igual a 1 $\left(\text{quando x é número real que representa arco o com primeira determinação } \frac{\pi}{2}\right)$ e e valor mínimo igual a −1 (quando x representa arco com primeira determinação $\frac{3\pi}{2}$).

Assim, o conjunto imagem de f(x) = sen x é: Im = [−1, 1].

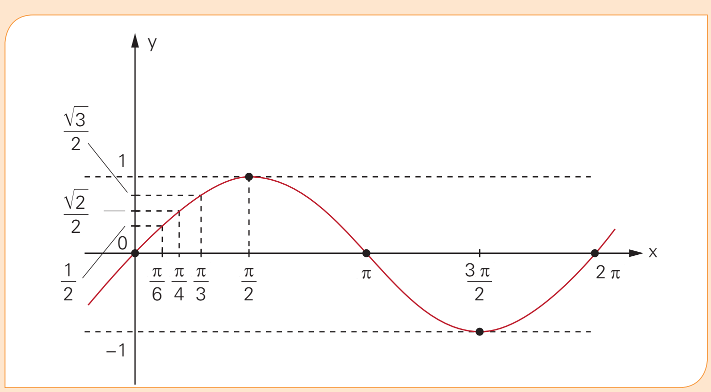
Gráfico

Para construir o gráfico da função definida por f(x) = sen x, podemos montar uma tabela para os arcos notáveis. Usando as propriedades de simetria, obtém-se o gráfico para todo conjunto dos reais.

Assim:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0

Localizando no plano cartesiano os pares (x, sen x) e sabendo o comportamento da função, temos o seguinte esboço:



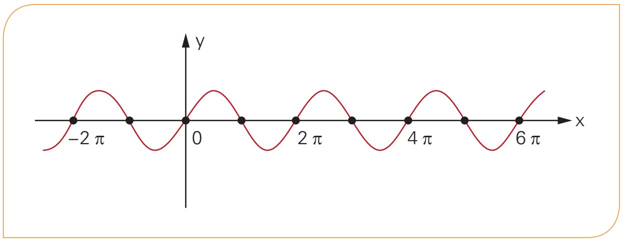
A curva do gráfico é chamada de **senoide**, e o gráfico da função f(x) = sen x, tal que x ∈ $\mathbb{R}$ é uma sucessão de senoides.

Período

Uma função y = f(x), definida no domínio D, é chamada função periódica se existir um número positivo p que satisfaça a igualdade f(x + p) = f(x), para todo x ∈ D.

O menor valor de p que verifica essa condição é chamado período da função.

Observa-se que sen (x + 2π) = sen x. Então, o período da função f(x) = sen x é 2π. Portanto, o gráfico é uma repetição de senoides de 2π em 2π.



Paridade

Uma função y = f(x), definida no domínio D, é chamada função par se f(−x) = f(x) para todo x ∈ D, e função ímpar se f(−x) = −f(x) para todo x ∈ D.

Na circunferência trigonométrica, verifica-se que sen (−x) = − sen (x). Portanto, a função f(x) = sen x é função ímpar.

Função cosseno

Associa o número y = cos x a cada número real x.

Domínio

Como cos x é definido para todo x real, o domínio de f(x) = cos x é o conjunto ℝ.

Conjunto imagem

Na circunferência trigonométrica, a função cos x assume valor máximo igual a 1 (quando x é número real que representa o arco com primeira determinação 0) e valor mínimo igual a −1 (quando x representa arco com primeira determinação π).

Assim, o conjunto imagem de f(x) = cos x é: Im = [−1, 1]

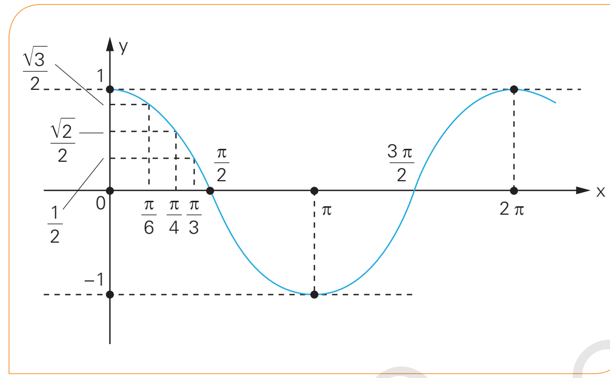
Gráfico

Para construir o gráfico da função definida por f(x) = cos x, podemos montar uma tabela para os arcos notáveis. Usando as propriedades de simetria, obtém-se o gráfico para todo conjunto dos reais.

Assim:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1

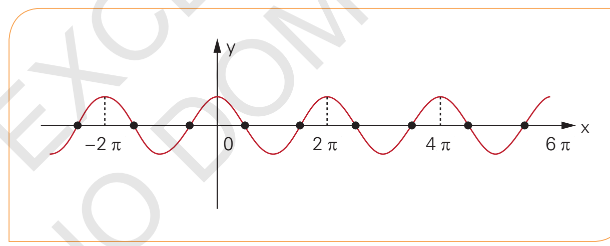
Localizando no plano cartesiano os pares (x, cos x) e sabendo o comportamento da função, temos o seguinte esboço:



A curva do gráfico é chamada de **cossenoide**, e o gráfico da função f(x) = cos x tal que x ∈ ℝ é uma sucessão de cossenoides.

Período

Observa-se que em cos (x + 2π) = cos x. Então o período de f(x) = cos x é 2π. Portanto, o gráfico é uma sucessão de cossenoides de 2π em 2π



Paridade

Na circunferência trigonométrica, verifica-se que cos (−x) = cos (x). Portanto, a função f(x) = cos x é função par.

Função tangente

A tangente de um número real é a razão entre o seno e o cosseno desse real. Assim: tg x = $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, em que cos ≠ 0.

Dessa forma, para todo real x, x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k ∈ ℝ, a tangente existe e é única. Então,

$$f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = \text{tg}\ x.$$

Domínio

Como tg x existe quando cos x ≠ 0, o domínio da função f(x) = tg x é: D = {x ∈ ℝ | x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + kπ, k ∈ ℝ}

Conjunto imagem

A tangente de um número real pode assumir qualquer valor real. Assim: Im =]−∞, +∞[

Gráfico

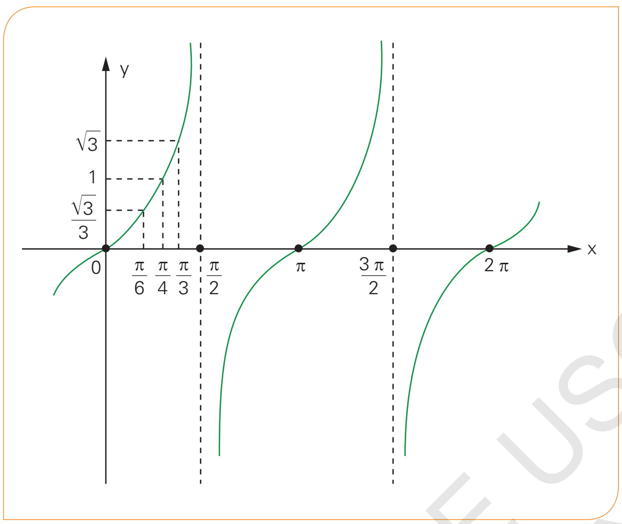
O gráfico da função f(x) = tg x pode ser obtido com base na tabela com os arcos notáveis. Por meio de propriedades de simetria, obtém-se a curva para todo x pertencente ao domínio.

Assim:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Podemos observar que o gráfico não tem imagens para os valores de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ... Analise a função tangente quando x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

A curva compreendida entre $x = 0$ e $x = \pi$ é uma **tangentoide**, o gráfico de $f(x) = \text{tg } x$ é obtido pela repetição sucessiva de tangentoides de π em π.



Período

Como $\text{tg }(x + \pi) = \text{tg } x$, para qualquer x pertencente ao domínio, o período da função $f(x) = \text{tg } x$ é $p = \pi$.

Paridade

Na circunferência trigonométrica, temos que $\text{tg }(-x) = -\text{tg } x$.

Logo, a função $f(x) = \text{tg } x$ é uma função ímpar.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1. Sistema Dom Bosco – Um barco de passageiros encontra-se atracado. A distância de uma dado ponto do navio ao fundo do rio varia com a maré. Essa distância (**d** em metros) pode ser obtida, em determinado dia, em função do tempo (**t** em horas), pela expressão

$$d(t) = 4{,}6 + \frac{7}{5} \cdot \cos\left(t + \frac{11}{18}\pi\right)$$

Em relação a esse ponto, é correto afirmar que a sua distância ao fundo do rio, às 10 horas, é igual a:

a) 3,9 m
b) 4,6 m
c) 5,3 m
d) 7,8 m
e) e) 9,2 m

Resolução

Para $t = 10$ e considerando $\pi = 180°$ temos que:

$$t + \frac{11}{18}\pi = 10 + \frac{11}{18} \cdot 180° = 10 + 110° = 120°$$

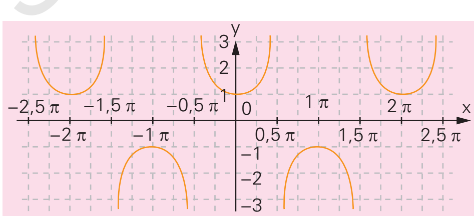
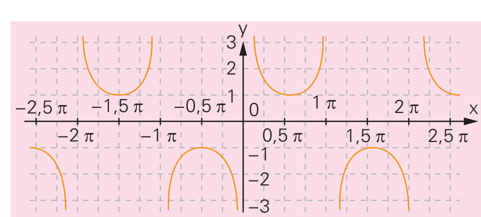
Assim, utilizando a redução ao 1º quadrante vem:

$$\cos 120° = \cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$d(10) = 4{,}6 + \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4{,}6 - \frac{7}{10} = 4{,}6 - 0{,}7 = 3{,}9 \text{ m}$$

Funções inversas

Além das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, existem outras três definidas por meio da inversão das razões conhecidas. Podemos citá-las numa tabela.

Função secante	Função cossecante
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$
Pela definição, excluem-se do domínio da secante valores em que $\cos x = 0$. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ Com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Pela definição, excluem-se do domínio da cossecante valores em que $\text{sen } x = 0$. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ Com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$Im = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant -1 \text{ ou } f(x) \geqslant 1\}$	$Im = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant -1 \text{ ou } f(x) \geqslant 1\}$
	

Função cotangente

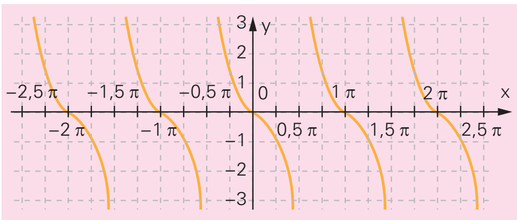
$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$$

Pela definição, excluem-se do domínio da cotangente valores em que tg x = 0

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$

Com k = 0, ± 1, ± 2, ...

$\text{Im} = \mathbb{R}$



Analise cada função para os pontos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

Variações das funções trigonométricas

FUNÇÃO f(x) = a + sen x

O número **a**, adicionado ao sen x, altera a paridade e a imagem da função y = sen x. Assim, sendo a ≠ 0, a função f(x) = a + sen x fica sem paridade (nem par nem ímpar), pois: a + sen x ≠ a + sen (−x) e − (a + sen x) ≠ a + sen (−x).

Cada uma das imagens de y = sen x deve ser acrescida de a, e o conjunto imagem de f(x) = a + sen x é: Im = [−1 + a, 1 + a].

Assim, o gráfico de f(x) = a + sen x pode ser obtido deslocando-se o gráfico de y = sen x de **a** unidades, para cima ou para baixo, conforme o valor de **a** seja positivo ou negativo. Resumindo: o valor acrescido na função periódica sen x resulta em um **deslocamento vertical** da curva do gráfico.

Mostre o resultado do deslocamento vertical para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

Exemplo:

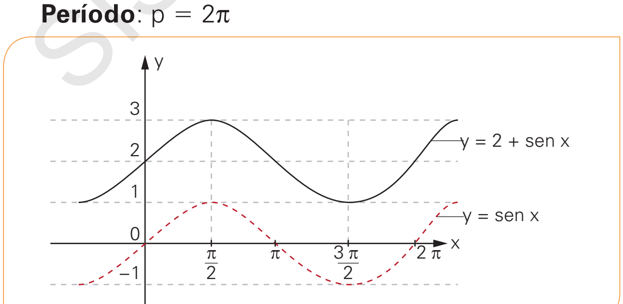
Ao analisar a função f(x) = 2 + sen x quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, obtemos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: Im = [−1 + 2, 1 + 2] → Im = [1, 3]

Paridade: sem paridade

Período: p = 2π



FUNÇÃO f(x) = b · sen x

O número **b** (b ≠ 0), multiplicado por senx, altera a imagem da função y = sen x. Cada uma das imagens de y = sen x deve ser multiplicada por **b**, e o conjunto imagem de f(x) = b · sen x é: Im = [−1 · b, 1 · b] = = [−b, b].

Assim, o gráfico de f(x) = b · sen x continua sendo uma senoide, porém de amplitude alterada para o intervalo [−b, b]. Resumindo: o valor que multiplica a função periódica sen x resulta em uma alteração na **amplitude** da curva do gráfico.

No caso em que o valor de **b** é negativo, todas as imagens ficam invertidas, isto é, a senoide fica invertida.

Mostre o resultado da alteração da amplitude para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

Exemplo:

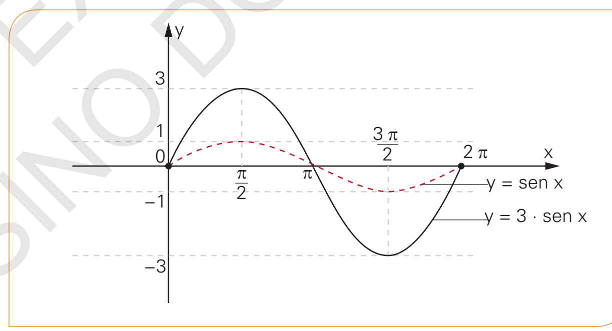
Ao analisar a função f(x) = 3 · sen x quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, temos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: Im = [−3, 3]

Paridade: f(−x) = 3 · sen (−x) = 3 · (− sen x) = = − 3 · sen x = − f(x). Assim, f(x) é ímpar.

Período: 2π



FUNÇÃO f(x) = sen (mx)

O número **m**, multiplicado por arco **x**, altera o período da função y = sen x. Assim:

mx = 0 → x = 0 (início de uma senoide)

mx = 2π → x = $\frac{2\pi}{m}$ (final de uma senoide)

Como **m** pode ser negativo, o período de f(x) = sen (mx) é dado por: $p = \frac{2\pi}{|m|}$

Resumindo: o valor que multiplica o ângulo **x** na função periódica sen x resulta em uma alteração no **período** da curva do gráfico.

Mostre o resultado da alteração do período para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

Exemplo:

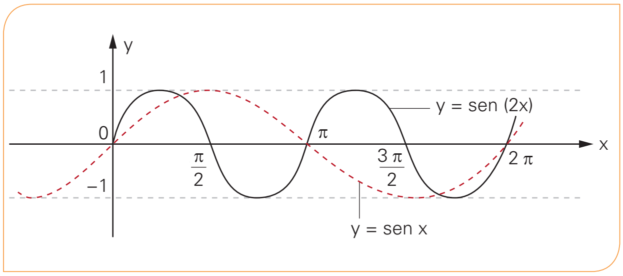
Ao analisar a função f(x) = sen (2x) quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, temos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: Im = [−1, 1]

Paridade: f(−x) = sen (−2x) = − sen (2x) = − f(x). Logo, f(x) é ímpar.

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$ $p = \pi$



FUNÇÃO f(x) = sen (x + n)

O número **n**, acrescido ao arco **x**, altera o gráfico da função y = sen x, deslocando todos os seus pontos para a esquerda ou para a direita, conforme o valor de **n** seja positivo ou negativo. Resumindo: o valor **n** acrescido no ângulo da função periódica sen x resulta em um **deslocamento horizontal** da curva do gráfico.

Mostre o resultado do deslocamento horizontal para as funções sen, cos, tg, sec, cossec, cotg.

Exemplo:

Ao analisar a função $f(x) = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade, temos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: $Im = [-1, 1]$

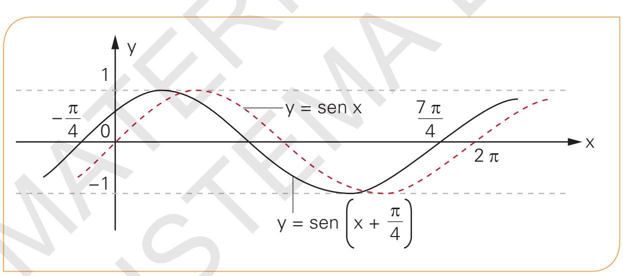
Paridade: $\text{sen}\left(-x + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ e $\text{sen}\left(-x + \dfrac{\pi}{4}\right) \neq -\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Então, f(x) não tem paridade.

Período: $p = 2\pi$

$x + \dfrac{\pi}{4} = 0 \rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4}$ (início de uma senoide)

$x + \dfrac{\pi}{4} = 2\pi \rightarrow x = \dfrac{7\pi}{4}$ (final de uma senoide)



FUNÇÃO F(X) = a + b · sen (mx + n) COM b ≠ 0 e m ≠ 0

Para a função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(mx + n)$:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: $Im = [-b + a, b + a]$

Paridade: calcular f(–x) e comparar com f(x):

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ função par

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ função ímpar

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ função sem paridade

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$

Gráfico:

$mx + n = 0 \rightarrow x = -\dfrac{n}{m}$ (início de uma senoide)

$mx + n = 2\pi \rightarrow x = \dfrac{2\pi}{m} - \dfrac{n}{m}$ (final de uma senoide)

Exemplo:

Ao analisar a função $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen}(2x)$ quanto a domínio, imagem, gráfico, período e paridade.

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: $Im = [-2 + 1, 2 + 1] \rightarrow Im = [-1, 3]$

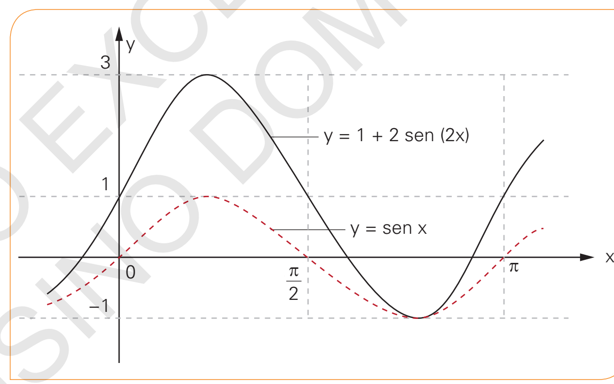
Paridade: não tem paridade, pois $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen}(2x)$ e $f(-x) = 1 - 2 \cdot \text{sen}(2x)$.

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|2|}$ $p = \pi$

Gráfico:

$2x = 0 \rightarrow x = 0$ (começo da senoide)

$2x = 2\pi \rightarrow x = \pi$ (final da senoide)



FUNÇÃO f(x) = a + b · cos (mx + n) com b ≠ 0 E m ≠ 0

Para a função $f(x) = a + b \cdot \cos(mx + n)$:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: $Im = [-b + a, b + a]$

Paridade: calcular f(–x) e comparar com f(x):

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ função par

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ função ímpar

$f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow$ função sem paridade

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$

Gráfico:

$mx + n = 0 \rightarrow x = -\dfrac{n}{m}$ (início de uma cossenoide)

$mx + n = 2\pi \rightarrow x = \dfrac{2\pi}{m} - \dfrac{n}{m}$ (final de uma cossenoide)

Lembre-se: a amplitude da cossenoide fica determinada pelo conjunto imagem da função, e a cossenoide fica invertida se $b < 0$.

Exemplo:

Ao analisar a função $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x - \pi)$ quanto a domínio, imagem, período e gráfico, temos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

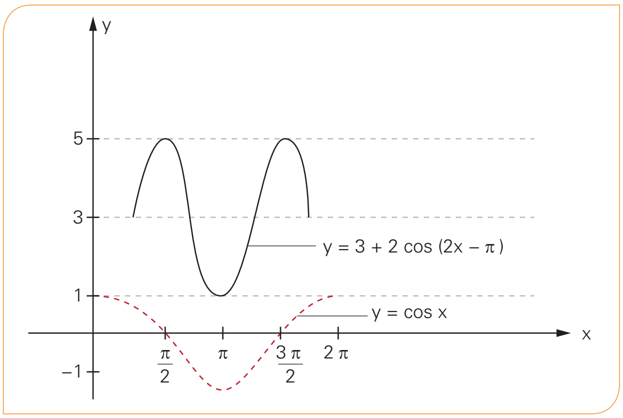
Imagem: $Im = [-2 + 3, 2 + 3] = [1, 5]$

Período: $p = \dfrac{2\pi}{|2|} = \pi$

Gráfico:

$2x - \pi = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ (início de uma cossenoide)

$2x - \pi = 2\pi \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$ (final de uma cossenoide)



Função $f(x) = a + b \cdot tg\ (mx + n)$ com $b \neq 0$ e $m \neq 0$

Análise apenas em relação ao domínio e ao período:
Domínio: para que exista f(x), é preciso que tg (mx + n) ≠ 0. Isso acontece quando:

$mx + n \neq \dfrac{\pi}{2} + + k\pi,\ k \in \mathbb{R}$

Assim, o domínio é dado por:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid mx + n \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\}$

Período: as funções do tipo $f(x) = a + b \cdot tg\ (mx + n)$ têm como gráfico uma sucessão de tangentoides. Assim:

$mx + n = 0 \rightarrow x = -\dfrac{n}{m}$ (início de uma tangentoide)

$mx + n = \pi \rightarrow x = \dfrac{\pi}{m} - \dfrac{n}{m}$ (final de uma tangentoide)

Então, o período **p** é:

$$p = \left|\left(\frac{\pi}{m} - \frac{n}{m}\right) - \left(-\frac{n}{m}\right)\right| \rightarrow p = \left|\frac{\pi}{m}\right|$$

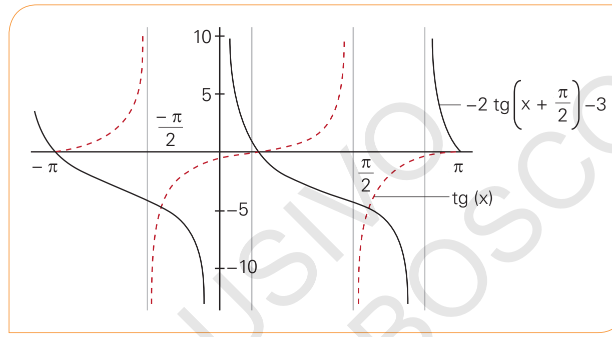
Exemplo:

Dada a função $f(x) = -3 - 2 \cdot tg\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, vamos determinar seu domínio, período e gráfico:

$x + \dfrac{\pi}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq k\pi$

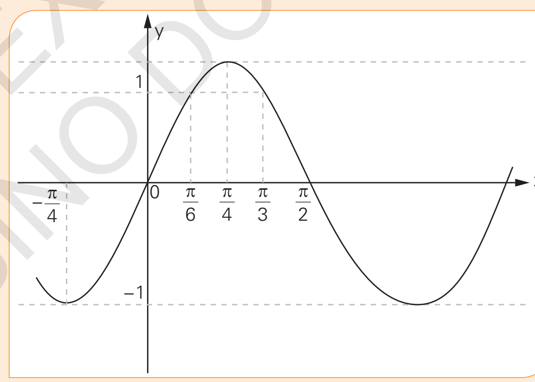
Assim: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{R}\}$

$p = \left|\dfrac{\pi}{m}\right| \rightarrow p = \dfrac{\pi}{1} \rightarrow p = \pi$



EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

PUCCamp-SP – Observe o gráfico a seguir:



A função real de variável real que melhor corresponde a esse gráfico é:

a) y = cos x
b) y = sen x
c) y = cos 2x
d) y = sen 2x
e) y = 2 sen x

Resolução

Temos:

Período: $p = \pi \rightarrow \pi = \dfrac{2\pi}{|k|} \rightarrow |k| = 2$

Logo, y = sen 2x ou y = cos 2x

Como para x = 0, y = 0, então ou = sen 2x.

ROTEIRO DE AULA

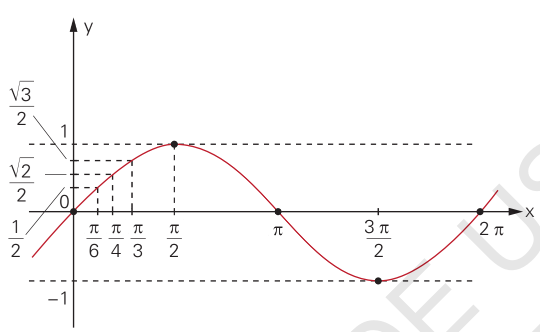
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

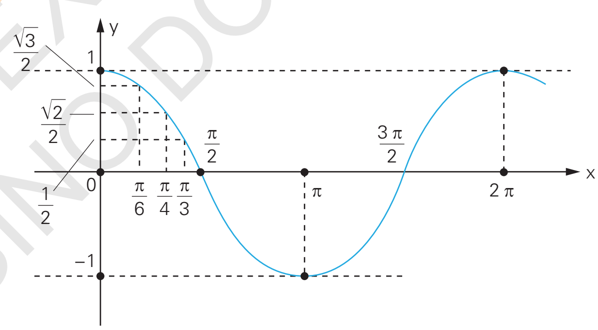
Dado um ângulo α qualquer

sen α

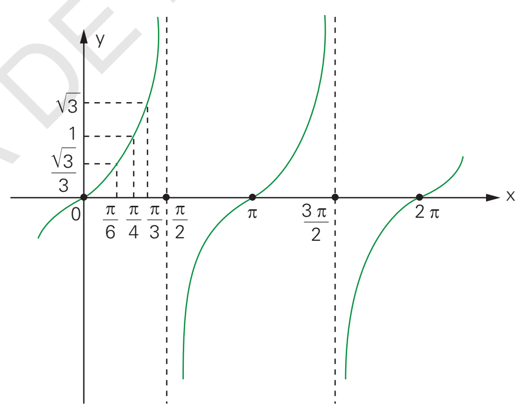
tg α

cos α





Domínio: D = $\mathbb{R}$
Imagem: Im = $[-1, 1]$
Período: 2π
Paridade: função ímpar



Domínio: D = $\mathbb{R}$
Imagem: Im = $[-1, 1]$
Período: π
Paridade: função par

Domínio: D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}\}$
Imagem: Im = $[-\infty, +\infty]$
Período: π
Paridade: função ímpar

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

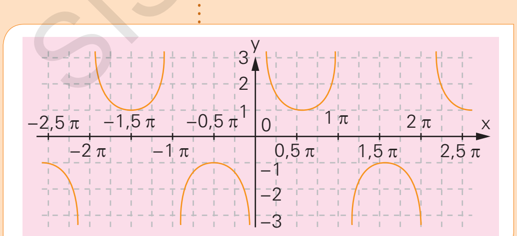
Dado um ângulo x qualquer

$\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

Pela definição, excluem-se do domínio da secante valores em que $\cos x = 0$.

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\text{Im} = \left\{ f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \text{ ou } f(x) \geq 1 \right\}$

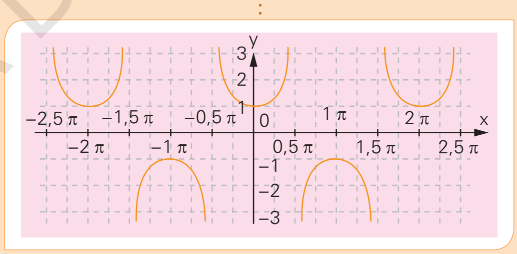


$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Pela definição, excluem-se do domínio da cossecante valores em que $\text{sen } x = 0$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\text{Im} = \left\{ f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq -1 \text{ ou } f(x) \geq 1 \right\}$

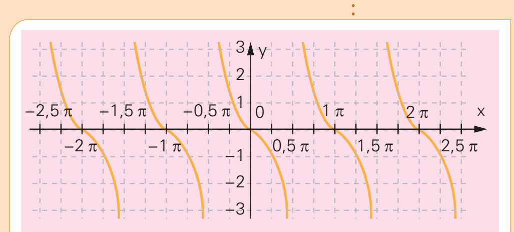


$\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x}$

Pela definição, excluem-se do domínio da cotangente valores em que $\text{tg } x = 0$.

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\text{Im} = \mathbb{R}$



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unifenas-MG – Estudando-se as funções: seno, cosseno e tangente, pode-se afirmar que:

a) são periódicas e limitadas.
b) são limitadas.
c) são periódicas.
d) são funções pares: seno e cosseno e, ímpar, a tangente.
e) são todas sobrejetoras.

Todas essas funções citadas são periódicas.

2. Sistema Dom Bosco – Sendo f(x) =

$= -5 \cdot \text{sen}\,(\pi + x) - 2 \cdot \cos x$, calcule $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Temos $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -5 \cdot \text{sen}\left(\pi + \frac{7\pi}{4}\right) - 2 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$

$= -5 \cdot \frac{\left(-\sqrt{2}\right)}{2} - 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. Acafe-SC (adaptado) C5-H21

Com o objetivo de auxiliar os maricultores a aumentar a produção de ostras e mexilhões, um engenheiro de aquicultura fez um estudo sobre a temperatura da água na região do sul da ilha, em Florianópolis. Para isso, efetuou medições durante três dias consecutivos, em intervalos de 1 hora. As medições se iniciaram às 5 horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e os dados foram representados pela função periódica $T(t) = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da medição e T(t), a temperatura (em °C) no instante t. O período da função, o valor da temperatura máxima e o horário em que ocorreu essa temperatura no primeiro dia de observação valem, respectivamente:

a) 6h, 25,5 °C e 10h.
b) 12h, 27 °C e 10h.
c) 12h, 27 °C e 15h.
d) 6h, 25,5 °C e 15h.
e) 6h, 27 °C e 15h.

Temos que o período é dado por $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12$ h.

A temperatura máxima ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Logo, $T_{max} = 27$ °C.

Assim, podemos encontrar o horário em que ocorreu essa temperatura:

$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = 2\pi$

$t = 12k - 2,\ k \in$

Para k = 1, temos t = 10 h.

Portanto, t = 10 + 5 = 15 h.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. UERN – A razão entre o maior e o menor número inteiro que pertencem ao conjunto imagem da função trigonométrica $y = -4 + 2 \cdot \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ é

a) 2
b) $\frac{1}{3}$
c) -3
d) $-\frac{1}{2}$

A imagem de $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ é Im = [−1, 1]. Logo, a imagem de y é Im(y) = [−4 − 2, −4 + 2] = [−6, −2]. Portanto, a razão entre o maior e o menor número inteiro que pertencem ao conjunto imagem é $\frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$.

5. Unifenas-MG – Quando se menciona a palavra função na matemática, lembramos que ela poderá ser classificada em crescente, estritamente crescente, decrescente, estritamente decrescente, par, ímpar, periódica e, por exemplo, limitada. Para o seguinte caso: y = 3 + 2sen (4x + π), qual é o período da função?

a) $\frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{2}$
c) π
d) 2π
e) 4π

$P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

6. UnB-DF (adaptado)


ANEESE/ISTOCKPHOTO

A cidade de Las Vegas, nos Estados Unidos, famosa pelos cassinos e hotéis, ostenta também uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Inaugurada em abril de 2014, a High Roller tem 165 m de altura, 158 m de diâmetro e 28 cabines. Uma volta completa na High Roller dura 30 minutos. Ela é 30 m mais alta que a London Eye, de Londres, que possui diâmetro de 122 m e 32 cabines. Se, para um instante $t \geqslant 0$, em minutos, a altura, em metros, de uma cabine na High Roller for expressa pela função $H(t) = 7 + 79\left[1 - \cos\frac{\pi t}{15}\right]$, então calcule o instante em que essa cabine estará a uma altura de 86 m pela primeira vez.

Temos que $86 = 7 + 79\left[1 - \cos\frac{\pi t}{15}\right]$

$79 = 79\left[1 - \cos\frac{\pi t}{15}\right] \rightarrow 1 - \cos\frac{\pi t}{15} = 1 \rightarrow \cos\frac{\pi t}{15} = 0 \rightarrow \frac{\pi t}{15} = \frac{\pi}{2}$

$t = 7{,}5$ min.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Acafe-SC (adaptado) – Sabe-se que a receita mensal (em milhões de reais) gerada pela produção e venda de equipamentos eletrônicos de duas empresas, A e B, varia de acordo com as seguintes funções periódicas: na empresa A, a receita obtida é dada pela equação $R_A = \left|2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right|$ e na empresa B, dada pela equação $R_B = \left|\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right|$, onde, em ambas, t é o tempo medido em meses.

Portanto, o tempo, em meses, para que as duas empresas tenham pela primeira vez a mesma receita é um número entre:

a) 10 e 12 meses.
b) 12 e 16 meses.
c) 5 e 8 meses.
d) 20 e 24 meses.

Texto para as questões 8 e 9:

Considere o texto e o esquema para responder à(s) questão(ões).

Ao longo de um ano, a taxa de câmbio de uma moeda X em relação a uma moeda Y foi dada pela seguinte função:

$$f(y) = 1{,}625 + 1{,}25 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right)$$

Sendo t o tempo, dado em meses desde o início do ano. Assim, t = 9 indica a taxa no início de outubro, que era de 1,625 unidades da moeda X para uma unidade da moeda Y (note que esse valor da taxa indica que no instante considerado a moeda X era "menos valiosa" que a moeda Y).

8. Insper-SP (adaptado) – Ao longo do ano analisado, a maior taxa de câmbio da moeda X em relação à moeda Y atingida e o instante em que isso ocorreu foram, respectivamente,

a) 2,625 e início de janeiro.
b) 2,625 e início de março.
c) 2,875 e início de janeiro.
d) 2,875 e início de abril.
e) 2,875 e início de junho.

9. Insper-SP (adaptado) – Houve um intervalo de tempo ao longo do ano considerado em que a moeda X deixou de ser "menos valiosa" que a moeda Y. Calcule a duração desse intervalo.

10. UFRGS-RS – O gráfico da função f, definida por $f(x) = \cos x$, e o gráfico da função g, quando representados no mesmo sistema de coordenadas, possuem somente dois pontos em comum. Assim, das alternativas abaixo, a que pode representar a função g é

a) $g(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

b) $g(x) = x^2$

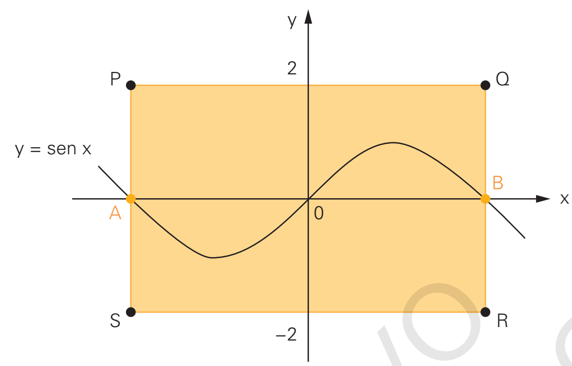
c) $g(x) = 2^x$

d) $g(x) = \log x$

e) $g(x) = \text{sen } x$

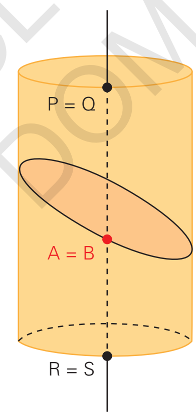
11. Insper-SP – A figura 1 indica o gráfico da função trigonométrica, de em R, definida por $y = \text{sen } x$. Seu gráfico foi desenhado no plano cartesiano de eixos ortogonais paralelos aos lados do retângulo PQRS e origem no centro desse retângulo. Sabe-se, ainda, que de A até B ocorre um período completo da senoide.

Figura 1



Em seguida, o retângulo PQRS é enrolado perfeitamente, formando um cilindro circular reto, como se vê na figura 2. A senoide da figura 1 origina uma elipse sobre a superfície lateral do cilindro, como indicado na figura 2.

Figura 2



O comprimento do eixo maior da elipse que foi produzida sobre a superfície do cilindro, na unidade de medida de comprimento dos eixos cartesianos, é igual a:

a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $2\sqrt{2}$

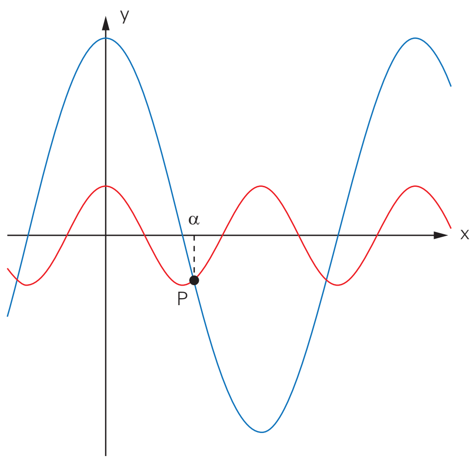
c) $2\sqrt{5}$

d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

e) $2\sqrt{3}$

12. Insper-SP (adaptado) – A figura mostra os gráficos das funções reais f e g, dadas, respectivamente, pelas leis

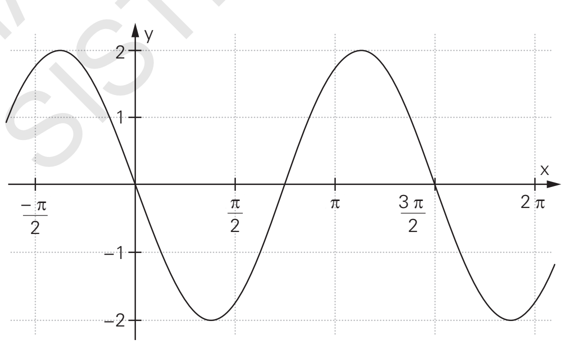
$f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = 4\cos x$



Os dois gráficos interceptam-se no ponto P, de abscissa α. Assim, calcule o valor de cos α.

Dica: $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

13. Cefet-MG – Seja a função $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx)$ em que a, $b \in \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado a seguir.



O valor do produto ab é

a) $-\frac{8}{3}$

b) $-\frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{3}$

14. UFSM-RS – Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$ onde t é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco. Analise as afirmativas:

I. A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.

II. A pressão em t = 2 segundos é de 110 mmHg.

III. A amplitude da função P(t) é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

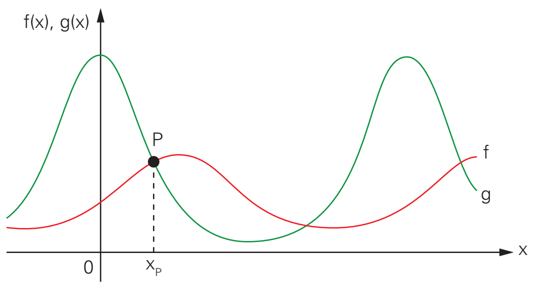
c) apenas III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

15. Famerp (adaptado) – Muitas vezes podemos construir representações gráficas de fenômenos da natureza para auxiliar a prever e entender como o ecossistema de um determinado ambiente funciona.

Observe os gráficos das funções reais f e g, definidas por $f(x) = 2^{\text{sen } x}$ e $g(x) = 4^{\cos x}$.



Considere P (x_p, y_p) um ponto comum aos gráficos das funções f e g tal que x_p, em radianos, é um ângulo do primeiro quadrante. Nessas condições, cos x_p é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

16. Cefet-MG – Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \cdot \cos^2 x - \frac{1}{2} + k$; $k \in \mathbb{R}$.

O valor de k para que o máximo de f(x) seja igual a 4 é

a) $\frac{1}{2}$

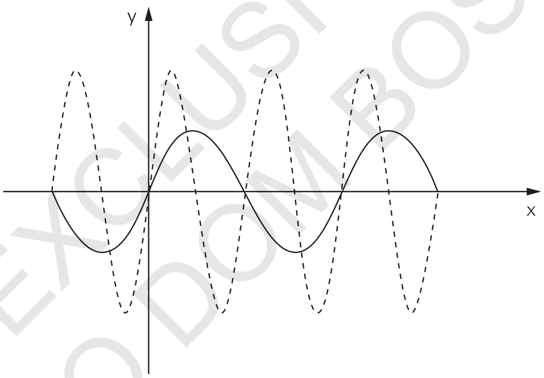
b) 2

c) $\frac{5}{2}$

d) 3

e) $\frac{7}{2}$

17. Fuvest-SP



Admitindo que a linha pontilhada represente o gráfico da função (x) = sen(x) e que a linha contínua represente o gráfico da função $g(x) = \alpha \cdot \text{sen}(\beta x)$, segue que

a) $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.

b) $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$.

c) $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

d) $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$.

e) $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. FGV-SP C5-H21

A previsão mensal da venda de sorvetes para 2012, em uma sorveteria, é dada por

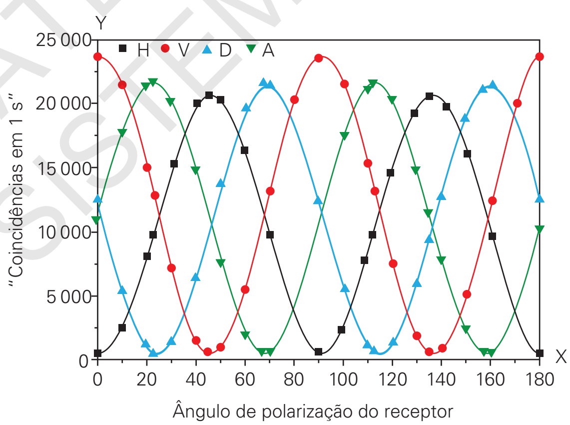
$$P = 6000 + 50x + 2000 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right),$$

em que P é o número de unidades vendidas no mês x; x = 0 representa janeiro de 2012, x = 1 representa fevereiro de 2012, x = 2 representa março de 2012, e assim por diante. Se essas previsões se verificarem, em julho haverá uma queda na quantidade vendida, em relação a março, de aproximadamente:

a) 39,5%
b) 38,5%
c) 37,5%
d) 36,5%
e) 35,5%

19. Insper-SP C5-H22

Em estudo divulgado recentemente na The Optical Society of America, pesquisadores da Tong University revelaram uma forma de transmitir dados de comunicação de forma segura utilizando as águas dos mares como meio de transporte das informações. No artigo, os cientistas apresentam o seguinte gráfico como parte dos resultados.



Disponível em: <www.osapublishing.org>. (Adaptado)

Uma função trigonométrica que modela razoavelmente bem a curva indicada por A no gráfico do artigo, com x em graus e y em "coincidências em 1 s", é

a) y = 22 000 + cos (x).
b) y = 22 000 + 10 000 cos (2x).
c) y = 22 000 + sen (4x).
d) y = 11 000 + sen (2x).
e) y = 11 000 + 10 000 sen (4x).

20. Cefet-MG (adaptado) C5-H22

Através da análise de duas funções trigonométricas é possível observar e analisar o comportamento de uma empresa e seus custos. Os gráficos das funções reais f(x) = cos(x) e g(x) = sen(x) não coincidem. Entretanto, a partir de uma transformação, é possível fazer o gráfico de g(x) coincidir com o gráfico de f(x). Essa transformação é a função

a) $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\text{sen}\ x$

b) $h(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

c) $h(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $h(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $h(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

7 TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

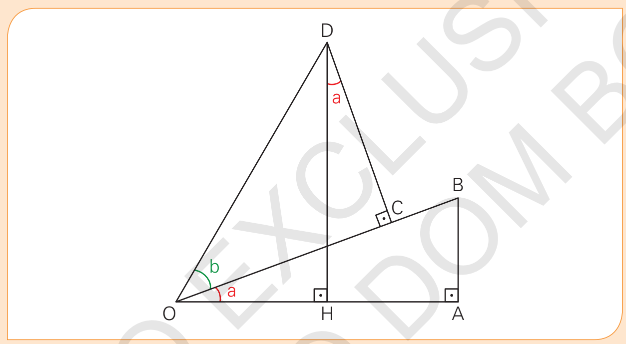
- Introdução às transformações trigonométricas
- Adição de arcos
- Diferença de arcos
- Arco duplo
- Transformação em produto

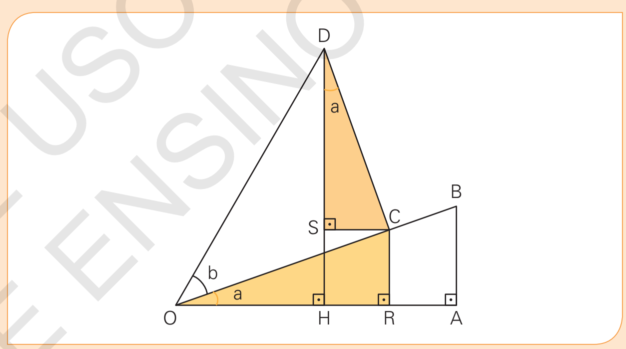
HABILIDADES

- Determinar razões trigonométricas para ângulos não notáveis.
- Resolver problemas envolvendo valores de razões trigonométricas para ângulos não notáveis.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.

Adição de arcos

Observe na figura três triângulos retângulos de hipotenusa unitária **OAB**, **OCD** e **OHD**. Assim, temos que OB = OD = 1.





Assim,
no triângulo **CDS**:

$$\text{sen } a = \frac{CS}{CD} = \frac{CS}{\text{sen} b} \rightarrow CS = \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\cos a = \frac{DS}{CD} = \frac{DS}{\text{sen} b} \rightarrow DS = \text{sen } b \cdot \cos a$$

no triângulo **OCR**:

$$\text{sen } a = \frac{CR}{OC} = \frac{CR}{\cos b} \rightarrow CR = \text{sen } a \cdot \cos b$$

$$\cos a = \frac{OR}{OC} = \frac{OR}{\cos b} \rightarrow OR = \cos a \cdot \cos b$$

Portanto, como sen (a + b) = DH:

sen (a + b) = CR + DS = sen a · cos b + sen b · cos a

Como cos (a + b) = OH:

cos (a + b) = OR − CS = cos a · cos b − sen a · sen b

Com base nesses resultados, podemos calcular tg (a + b) $= \dfrac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a + b)}$, desde que cos (a + b) ≠ 0.

Logo:

$$\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} =$$

$$= \frac{\text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

Mostre esse resultado utilizando os triângulos da figura anterior.

Diferença de arcos

Seja sen (a − b) = sen [a + (−b)].

Aplicando-se a fórmula do seno da soma de dois arcos:

sen (a − b) = sen a · cos (−b) + sen (−b) · cos a

Aplicando a redução ao 1º quadrante, em que cos (−b) = cos b e sen (−b) = − sen b:

sen (a − b) = sen a · cos b + (−sen b) · cos a

Assim:

sen (a − b) = sen a · cos b − sen b · cos a

Analogamente, para cos (a − b), temos:

cos (a − b) = cos a · cos b + sen a · sen b

Prova:

cos (a − b) = cos (a + (−b)) = cos a · cos (−b) +
+ sen a · sen(−b) = cos a · cos b − sen a · sen b
cos (a − b) = cos a · cos b − sen a · sen b

Finalmente, para deduzir a tangente da diferença, podemos utilizar o procedimento tg (a − b) = tg [a + (−b)]. Aplicando a fórmula da adição de arcos:

$$\text{tg}\ (a - b) = \frac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

Prova:

tg (a − b) = tg (a + (−b)) =

$$= \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ (-b)}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ (-b)} = \frac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

$$\text{tg}\ (a - b) = \frac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

Primeiras transformações

Para dois ângulos a e b quaisquer, temos que

seno:
sen (a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a
sen (a − b) = sen a · cos b − sen b · cos a

cosseno:
cos (a + b) = cos a · cos b + sen a · sen b
cos (a − b) = cos a · cos b + sen a · sen b

tangente:

$$\text{tg}\ (a + b) = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

$$\text{tg}\ (a - b) = \frac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

ARCO DUPLO

Para reduzir seno, cosseno e tangente para o dobro de um arco, aplicam-se as expressões reduzidas para a soma de arcos, fazendo b = a.

Seno:

sen (a + b) = sen (a + a) = sen 2a sen 2a = sen a · cos a + sen a · cos a

Logo, sen 2a = 2 · sen a · cos a

Cosseno:

cos (a + b) = cos (a + a) = cos 2a
cos 2a = cos a · cos a − sen a · sen a
Assim, cos 2a = $\cos^2$a − sen^2a

Tangente:

tg (a + b) = tg (a + a) = tg 2a →

$$\rightarrow \text{tg}\ 2a = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ a}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ a}$$

$$\text{Portanto, tg}\ 2a = \frac{2\text{tg}\ a}{1 - \text{tg}^2 x}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Deduza a fórmula do seno para quando o argumento equivale a 3a:

sen (3a) = sen (a + 2a) = sen a · cos 2a + sen 2a · cos a
= sen a · (1 − 2 · sen^2a) + 2 · sen a · $\cos^2$a
= sen a − 2 · sen^3a + 2 · sen a · (1 − sen^2a)
= sen a − 2 · sen^3a + 2 · sen a − 2 · sen^3a
= − 4 · sen^3a + 3 · sen a

2. Sistema Dom Bosco – Deduza a fórmula do cosseno para quando o argumento equivale a 3a:

cos (3a) = cos (a + 2a) = cos a · cos 2a − sen a · sen 2a
= cos a · (2 · $\cos^2$a −1) − sen a · 2 · sen a · cos a
= 2 · $\cos^3$a − cos a − 2 · sen^2a · cos a
= 2 · $\cos^3$a − cos a − 2 · (1 − $\cos^2$a) cos a
= 2 · $\cos^3$a − cos a − 2 · cos a + 2 · $\cos^3$a
= 4 · $\cos^3$a − 3 · cos a

3. Sistema Dom Bosco – Deduza a fórmula do tangente para quando o argumento equivale a 3a:

$$\text{tg}\ (3a) = \text{tg}\ (a + 2a) = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ 2a}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ 2a} =$$

$$= \frac{\text{tg}\ a + \dfrac{2 \cdot \text{tg}\ a}{1 - \text{tg}^2 a}}{1 - \text{tg}\ a \cdot \dfrac{2 \cdot \text{tg}\ a}{1 - \text{tg}^2 a}} = \frac{\dfrac{\text{tg}\ a - \text{tg}^3 a + 2 \cdot \text{tg}\ a}{1 - \text{tg}^2 a}}{\dfrac{1 - \text{tg}^2 a - 2 \cdot \text{tg}^2 a}{1 - \text{tg}^2 a}} =$$

$$= \frac{3 \cdot \text{tg}\ a - \text{tg}^3 a}{1 - 3 \cdot \text{tg}^2 a}$$

Com base na identidade $sen^2 a + cos^2 a = 1$, a expressão do cosseno do arco duplo pode assumir outras formas:

$cos^2 a = 1 - sen^2 a \rightarrow cos\ 2a = cos^2 a - sen^2 a \rightarrow \rightarrow$ $cos\ 2a = 1 - sen^2 a - sen^2 a$

Então:

$cos\ 2a = 1 - 2 \cdot sen^2 a$

$sen^2 a = 1 - cos^2 a$

$cos\ 2a = 1 - 2 + 2cos^2 a$

Logo:

$cos\ 2a = 2 \cdot cos^2 a - 1$

Com base nas fórmulas para 2a, podemos encontrar uma fórmula para $sen\ \frac{a}{2}$ e $cos\ \frac{a}{2}$.

Como, $cos\ 2b = 1 - 2 \cdot sen^2 b$.

Fazendo $b = \frac{a}{2}$:

$$cos\ a = 1 - 2 \cdot sen^2\ \frac{a}{2}$$

$$sen^2\ \frac{a}{2} = \frac{1 - cos\ a}{2}$$

$$sen\ \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ a}{2}}$$

Temos também que $cos\ 2b = 2 \cdot cos^2 b - 1$.

Fazendo $b = \frac{a}{2}$:

$$cos\ a = 2 \cdot cos^2\ \frac{a}{2} - 1$$

$$cos^2\ \frac{a}{2} = \frac{cos\ a + 1}{2}$$

$$cos\ \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{cos\ a + 1}{2}}$$

TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

Em muitas ocasiões, é útil transformar somas algébricas como $sen\ p + sen\ q$, $sen\ p - sen\ q$, $cos\ p + cos\ q$ em produtos. Para tanto, considere as seguintes fórmulas de adição e subtração:

- $sen\ (A + B) = sen\ A \cdot cos\ B + sen\ B \cdot cos\ A$ (I)
- $sen\ (A - B) = sen\ A \cdot cos\ B - sen\ B \cdot cos\ A$ (II)
- $cos\ (A + B) = cos\ A \cdot cos\ B - sen\ A \cdot sen\ B$ (III)
- $cos\ (A - B) = cos\ A \cdot cos\ B + sen\ A \cdot sen\ B$ (IV)

Então,

I + II: $sen\ (A + B) + sen\ (A - B) = 2\ sen\ A \cdot cos\ B$

I − II: $sen\ (A + B) - sen\ (A - B) = 2\ sen\ B \cdot cos\ A$

III + IV: $cos\ (A + B) + cos\ (A - B) = 2\ cos\ A \cdot cos\ B$

III − IV: $cos\ (A + B) - cos\ (A - B) = -2\ sen\ A \cdot sen\ B$

Chamamos agora $A + B = p$ e $A - B = q$.

Resolvendo o sistema, temos: $A = \frac{p + q}{2}$ e $B = \frac{p - q}{2}$.

Substituindo A e B nas quatro igualdades obtidas, obtêm-se as fórmulas de fatoração:

$$sen\ p + sen\ q = 2 \cdot sen\left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$sen\ p - sen\ q = 2 \cdot sen\left(\frac{p - q}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{p + q}{2}\right)$$

$$cos\ p + cos\ q = 2 \cdot cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

$$cos\ p - cos\ q = -2 \cdot sen\left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{p - q}{2}\right)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Desenvolva a relação a seguir $sen\ 50° + sen\ 10°$

$sen\ 50° + sen\ 10° =$

$= 2 \cdot sen\left(\frac{50° + 10°}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{50° - 10°}{2}\right)$

$= 2 \cdot sen\ 30° \cdot cos\ 20°$

2. Sistema Dom Bosco – Sabendo que $sen\ x = \frac{-3}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, determine: $sen\ 2x$

Lembre que: $sen\ 2x = 2 \cdot sen\ x \cdot cos\ x$

Temos que $cos^2 x = 1 - sen^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Logo: $cos\ x = \frac{4}{5}$, pois $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

Assim, $sen\ 2x = 2 \cdot \frac{-3}{5}\ \frac{4}{5} = \frac{-24}{25}$

$cos\ 2x = cos^2 x - sen^2 x = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

ROTEIRO DE AULA

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Adição e subtração

Seno

sen (a + b) =
sen a · cos b + sen b · cos a

sen (a − b) =
sen a · cos b − sen b · cos a

Cosseno

cos (a + b) =
cos a · cos b − sen a · sen b

cos (a − b) =
cos a · cos b + sen a · sen b

Tangente

tg (a + b) =
$\frac{(\text{tg a} + \text{tg b})}{(1 - \text{tg a} \cdot \text{tg b})}$

tg (a − b) =
$\frac{(\text{tg a} - \text{tg b})}{(1 + \text{tg a} \cdot \text{tg b})}$

ROTEIRO DE AULA

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Arco duplo

seno

sen 2a = $2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a$

cosseno

cos 2a = $\cos^2 a - \text{sen}^2 a$

tangente

tg 2a = $\dfrac{2\text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 x}$

Transformação em produto

$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Se tg (a + b) = 10 e tg a = 1, então tg y é igual a:

a) $\frac{-9}{11}$

b) $\frac{9}{11}$

c) 1

d) 9

e) 0,1

Temos que $\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$.

Então, $10 = \frac{1 + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,b}$.

$1 + \text{tg}\,b = 10 - 10 \cdot \text{tg}\,b$

Logo, $11 \cdot \text{tg}\,b = 9$

$\text{tg}\,b = \frac{9}{11}$

2. Sistema Dom Bosco – Calcule o valor da expressão

$$4 \cdot \text{sen}\left(\frac{31\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$\text{sen}\left(\frac{31\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{31\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$

$= \text{sen}\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

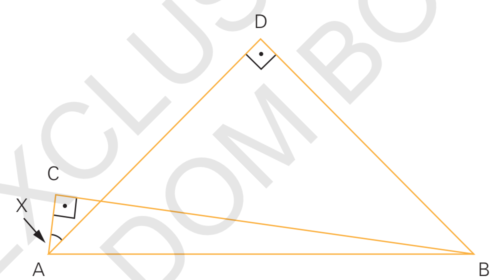
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(1 + \sqrt{3})$

Então: $4 \cdot \text{sen}\left(\frac{31\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$

3. Fuvest-SP (adaptado) C5-H21

Podemos utilizar triângulos e suas razões trigonométricas para resolver muitos problemas do cotidiano, como a largura de um rio, a altura de um prédio, entre outras situações.

Nos triângulos retângulos da figura, AC = 1 cm, BC = 7 cm, AD = BD. Sabendo que: (a − b) = sen a · · cos b − sen b · cos α, o valor de sen x é:



a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{7}{\sqrt{50}}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

Temos que: $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

$AB = 5\sqrt{2}$ cm

Logo, $\text{sen}\,B\hat{A}C = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ e $\cos B\hat{A}C = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

O triângulo ABD é isósceles. Logo, $D\hat{B}A = B\hat{A}D = 45°$.
Então, $x = B\hat{A}C - 45°$.

Assim, $\text{sen}\,x = \text{sen}\,(B\hat{A}C - 45°) = \frac{7}{5\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{5\sqrt{2}} =$

$= \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. ESPM-SP – A hipotenusa de um triângulo retângulo mede $\sqrt{2}$ e forma 15° com um de seus catetos. A soma das medidas dos catetos é igual a:

a) 2
b) 3
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{2} + 1$
e) $\sqrt{3} + 1$

Como um ângulo mede 15°, o outro ângulo agudo deve medir 75°.

Temos que 75° = 45° + 30°.

Logo, sendo os catetos x e y tal que: $x = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 75°$ e $y = \sqrt{2} \cdot \cos 75°$

Temos que:

$\text{sen } 75° = \text{sen } (45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$

e $\cos 75° = \cos (45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

Logo, $x + y = \sqrt{2}\,(\text{sen } 75° + \cos 75°) = \frac{2}{4}\,(1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}$.

5. Unifesp – A expressão sen (x − y) cos y + cos (x − y) sen y é equivalente a:

a) sen (2x + y)
b) cos (2x)
c) sen x
d) sen (2x)
e) cos (2x + 2y)

Temos que $\text{sen } (x - y) \cos y + \cos (x - y) \text{ sen } y =$
$= \text{sen } x \cdot \cos^2 y - \text{sen } y \cdot \cos x \cdot \cos y + \cos x \cdot \cos y \cdot \text{sen } y + \text{sen } x \cdot \text{sen}^2 y = = \text{sen } x \cdot (\text{sen}^2 y + \cos^2 y) = \text{sen } x$

6. PUC-RJ (adaptado) – Considere a equação sen (2θ) = cos θ. Calcule a soma de todas as soluções da equação com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Temos que $\text{sen } 2\theta = \cos \theta$.

Logo, $2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta = \cos \theta \rightarrow 2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta - \cos \theta = 0 \rightarrow \cos \theta\,(2 \cdot \text{sen } \theta - 1) = 0$

$\cos \theta = 0$ ou $2 \cdot \text{sen } \theta - 1 = 0$

Para $\cos \theta = 0$, temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Para $2 \cdot \text{sen } \theta - 1 = 0 \rightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2}$, temos $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

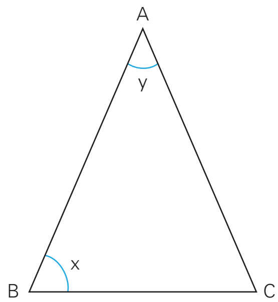
Então, a soma das soluções é $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi + \pi = 3\pi$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Fuvest-SP – Seja x no intervalo $\left]0, \frac{\neq}{2}\right[$ satisfazendo a equação $\text{tg } x + \frac{2}{\sqrt{5}} \sec x = \frac{3}{2}$. Assim, calcule o valor de:

a) sec x;
b) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

8. Mackenzie-SP – No triângulo ABC, temos AB = AC e sen $x = \frac{3}{4}$. Então, cos y é igual a:



a) $\frac{9}{16}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{9}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{3}{16}$

9. Facisa-MG – Calcule o número de soluções da equação $2 \cdot \text{sen } 3x - 1 = 0$ em $0 \leq x \leq \pi$.

10. Facisa-MG – O sen $\frac{\pi}{8}$ é

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$

b) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

11. ITA-SP – Se tg $x = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então sen (3x) é igual a

a) $-\frac{\sqrt{14}}{8}$

b) $\frac{\sqrt{14}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{14}}{6}$

12. UEG-GO – Sabendo-se que sen (x) $= \frac{1}{2}$ e que x é um ângulo do 1º quadrante, o valor da expressão

sen(4x) − cos(4x) é

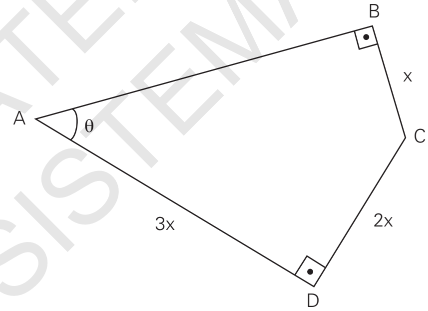
a) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

d) 2

13. FGV-SP – No quadrilátero ABCD mostrado na figura abaixo, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são ângulos retos, BC = x, CD = 2x, AD = 3x e $\hat{A} = \theta$. Determine:



a) o comprimento dos segmentos AC e AB em função de x.

b) o valor de sen θ.

14. ITA-SP – A soma de todas as soluções distintas da equação:

$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0$, que estão no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, é igual a:

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

15. FGV-SP – A única solução da equação sen 2x · sen 3x = = cos 2x · cos 3x, com $0° \leqslant x < 90°$, é

a) 72°
b) 36°
c) 24°
d) 18°
e) 15°

16. PUC-RJ (adaptado) – Sendo x um arco satisfazendo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{sen } x = \frac{24}{25}$, calcule o valor de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

17. ITA-SP – Sabendo que $\text{sen } x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ um possível valor para $\text{cossec } 2x - \frac{1}{2}\text{ tg } x$ é

a) $\frac{a - b}{ab}$
b) $\frac{a + b}{2ab}$
c) $\frac{a^2 - b^2}{ab}$
d) $\frac{a^2 + b^2}{4ab}$
e) $\frac{a^2 - b^2}{4ab}$

ESTUDO PARA O ENEM

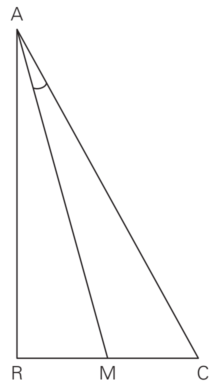
18. Espcex-SP C5-H22

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \cdot \left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right) + 5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.
b) a população atinge seu máximo em t = 6.
c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
d) a população média anual é de 6 000 animais.
e) a população atinge seu mínimo em t = 4 com 6 000 animais.

19. Fuvest-SP C5-H22

No triângulo retângulo ABC, ilustrado na figura, a hipotenusa AC mede 12 cm e o cateto BC mede 6 cm. Se M é o ponto médio de BC, então a tangente do ângulo MAC é igual a



a) $\frac{\sqrt{2}}{7}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

c) $\frac{2}{7}$

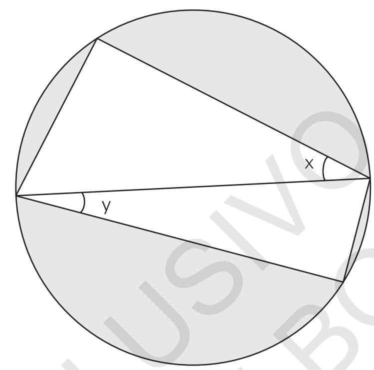
d) $\frac{2\sqrt{2}}{7}$

e) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

20. Fuvest-SP (adaptado) C5-H22

Um empreiteiro estava com o projeto de uma piscina que devia ser construída de modo que o espaço fora dela fosse utilizado pelos banhistas.

O quadrilátero da figura está inscrito em uma circunferência de raio 1. A diagonal desenhada é um diâmetro dessa circunferência.



Sendo x e y as medidas dos ângulos indicados na figura, a área da região cinza, em função de x e y, é:

a) $\pi + \text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(2y)$

b) $\pi - \text{sen}\,(2x) - \text{sen}\,(2y)$

c) $\pi - \cos\,(2x) + \cos(2y)$

d) $\pi - \frac{\cos(2x) + \cos(2y)}{2}$

e) $\pi - \frac{\text{sen}(2x) + \text{sen}(2y)}{2}$

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

8

- Introdução a equações trigonométricas
- Equação de forma sen x = sen a
- Equação de forma cos x = cos a
- Equação de forma tg x = tg a
- Inequações trigonométricas

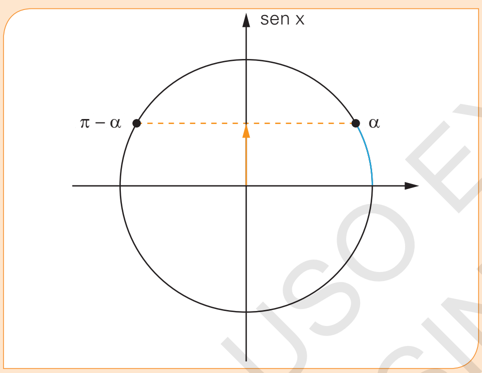
HABILIDADES

- Compreender a resolução de equações trigonométricas envolvendo seno, cosseno e tangente.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para construir argumentos.
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Resolver inequações aplicando funções trigonométricas e estudo de seus sinais.

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

EQUAÇÃO DE FORMA SEN X $=$ SEN α

Os números x e α apresentam o mesmo **seno** se, e somente se, suas imagens na circunferência trigonométrica forem coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das ordenadas.



Assim,

$$\text{sen } x = \text{sen } \alpha \leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{R} \text{ ou } x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{R}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

Sistema Dom Bosco – Descubra o valor de x para sen $3x = \frac{1}{2}$ em $\mathbb{R}$.

Para resolver a equação sen $3x = \frac{1}{2}$ em $\mathbb{R}$, temos:

$\text{sen } 3x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen } 3x = \text{sen } \frac{\pi}{6}$

Então:

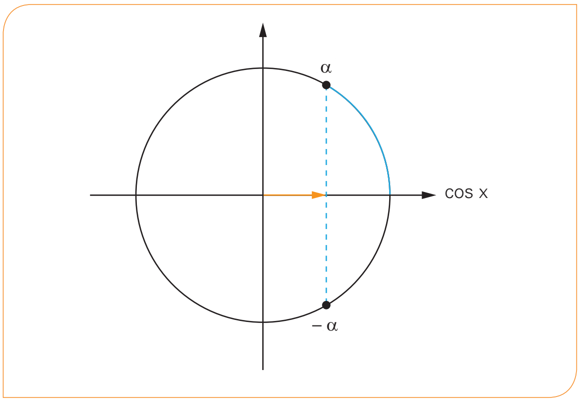
$3x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $3x = \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

Assim:

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{R}$

EQUAÇÃO DE FORMA cos x $=$ cos α

Os números x e α apresentam o mesmo **cosseno** se, e somente se, suas imagens na circunferência trigonométrica forem coincidentes ou simétricas em relação ao eixo das abscissas.



Assim,

$$\cos x = \cos \alpha \leftrightarrow x = \pm\, \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{R}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Descubra o valor de x para $2 \cdot \cos 3x + 1 = 0$ em $\mathbb{R}$.

Para resolver a equação $2 \cdot \cos 3x + 1 = 0$ em $\mathbb{R}$, temos:

$2 \cdot \cos 3x + 1 = 0 \rightarrow \cos 3x = \dfrac{-1}{2}$

Como $\cos \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{-1}{2}$

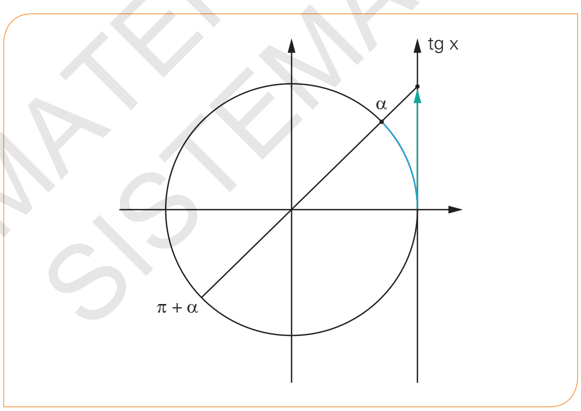
$\cos 3x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$

Assim:

$3x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leftrightarrow x = \pm \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k \cdot 2\pi}{3},\ k \in \mathbb{R}$

EQUAÇÃO DE FORMA tg x = tg α

Os números x e α apresentam a mesma **tangente** se, e somente se, suas imagens na circunferência trigonométrica forem coincidentes ou simétricas em relação à origem dos eixos coordenados (diametralmente opostos).



Assim,

$$\text{tg } x = \text{tg } a \leftrightarrow x = a + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Descubra o valor de x para $\text{tg } 2x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ em $\mathbb{R}$.

Para resolver a equação $\text{tg } 2x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ em $\mathbb{R}$, temos:

Como $\text{tg } \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg } 2x = \text{tg } \dfrac{5\pi}{6}$

Então: $2x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{R}$

INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

INEQUAÇÕES DO TIPO SEN X < A OU SEN X > A

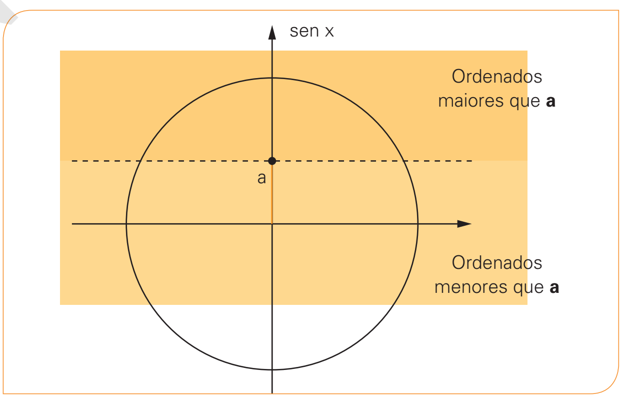
Pelo valor **a**, no eixo das ordenadas (ou dos senos), pertencente ao intervalo $[-1, 1]$, traçamos uma reta paralela ao eixo das abscissas. Observe a figura.

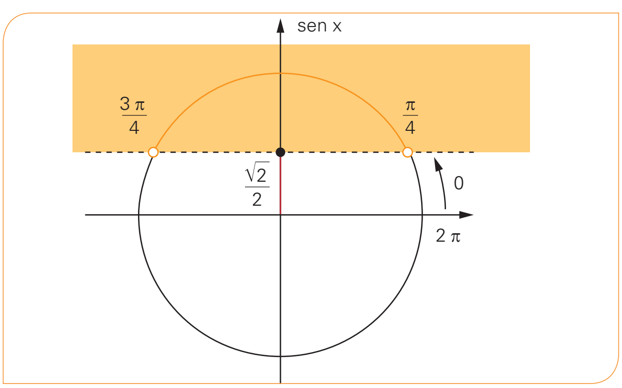
Após isso, destacamos os pontos da circunferência cujas ordenadas são maiores (ou menores, dependendo da inequação fornecida) que **a**. A resposta é dada pelo(s) intervalo(s) de arcos definidos na circunferência, lido(s) no sentido anti-horário a partir da origem dos arcos.

Exemplo:

Defina o conjunto solução para $\text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 \leqslant x < 2\pi$.

Para $\text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, com $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

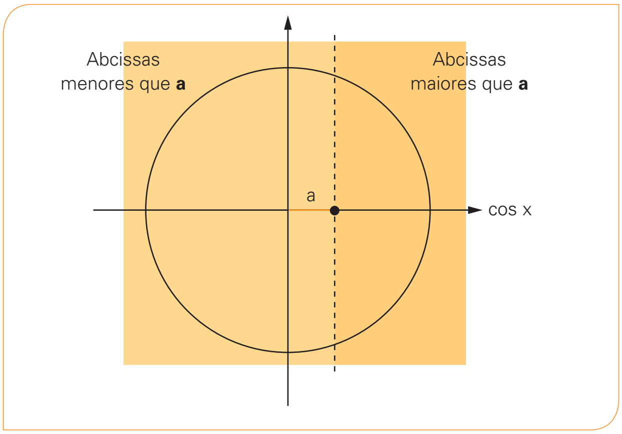




A solução do conjunto é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4} \right\}$.

INEQUAÇÕES DO TIPO cos x < a ou cos x > a

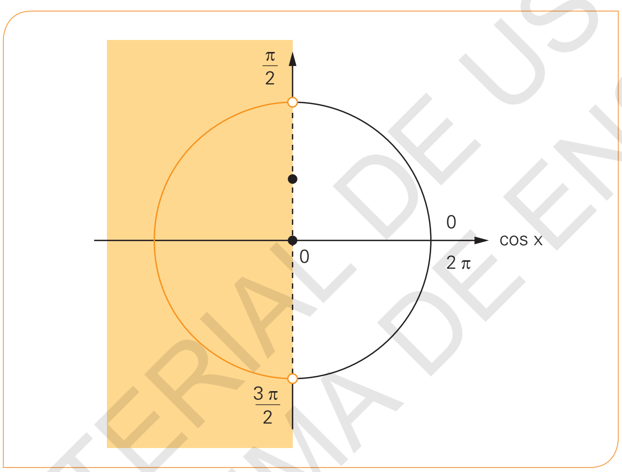
No eixo das abscissas (ou dos cossenos), localizamos o valor **a** e por ele traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas, conforme a figura a seguir.



Em seguida, destacamos os pontos da circunferência cujas abscissas são maiores (ou menores) que **a**. No sentido anti-horário, a partir da origem dos arcos, anotamos o(s) intervalo(s) que compreende(m) os pontos da circunferência que confirmem a resposta.

Exemplo:

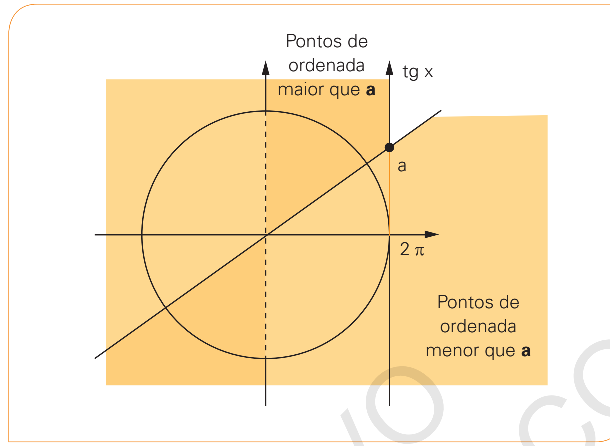
Para $0 \leq x < 2\pi$, resolva a inequação cos x < 0.



A solução do conjunto é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

INEQUAÇÕES DO TIPO tg x < a ou tg x > a

Identificamos, no eixo das tangentes, o ponto de ordenada **a**, conforme a figura.

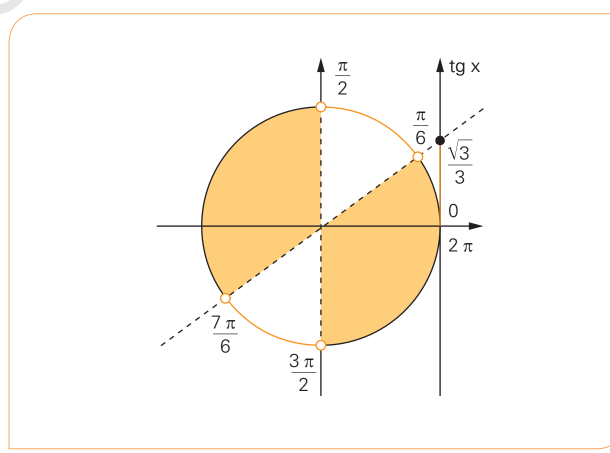


Em seguida, traçamos a reta que passa por esse ponto e pelo centro da circunferência trigonométrica, identificando, na circunferência, a região cujos pontos, ligados ao centro, determinam retas que interceptam o eixo das tangentes em valores maiores (ou menores) que **a**.

Importante: anotamos o(s) intervalo(s) que forma(m) a resposta sempre no sentido anti-horário, a partir da origem dos arcos.

Exemplo:

Para $0 \leq x < 2\pi$, resolva $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.



A solução do conjunto é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$$

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

seno

$\text{sen } x = \text{sen } \alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = \underline{\alpha + k \cdot 2\pi,} \; k \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ x = \underline{\pi - \alpha + k \cdot 2\pi}, \; k \in \mathbb{R} \end{cases}$

cosseno

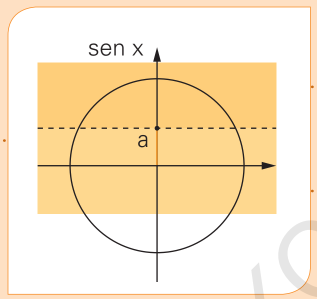
$\cos x = \cos \alpha \leftrightarrow \underline{\pm \alpha + k \cdot 2\pi}, \; k \in \mathbb{R}$

tangente

$\text{tg } x = \text{tg } a \leftrightarrow x = \underline{\alpha + k \cdot \pi}, \; k \in \mathbb{R}$

INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

sen x < a ou
sen x > a



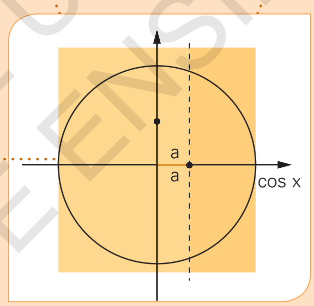
Ordenados maiores que **a**.

Ordenados menores que **a**.

cos x < a ou
cos x > a

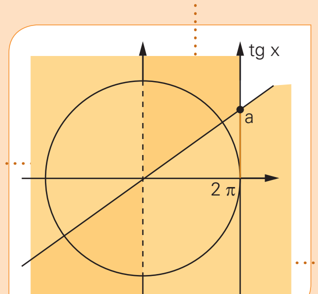
Abcissas maiores que **a**.

Abcissas menores que **a**.



tg x < a ou
tg x > a

Pontos de ordenada maior que **a**.



Pontos de ordenada menor que **a**.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Resolva em $\mathbb{R}$ a equação sen 2x − cos 2x = 2 · sen²x.

$\text{sen } 2x - \cos 2x = 2 \cdot \text{sen}^2 x$

$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 2 \cdot \text{sen}^2 x$

$-\cos^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen}^2 x = 0$

$\cos^2 x - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen}^2 x = 0$

$(\cos x - \text{sen } x)^2 = 0$

$\cos x - \text{sen } x = 0$

$\cos x = \text{sen } x$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

2. UECE – Se p e q são duas soluções da equação $2 \cdot \text{sen}^2 x - 3\ ?\ \text{sen } x + 1 = 0$ tais que sen p ± sen q, então o valor da expressão sen² p − cos² q é igual a

a) 0
b) 0,25
c) 0,50
d) 1

$\text{sen } x = y$

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$y = \frac{3 - 1}{4}$

$y = 0{,}5$ ou $y = 1$

$y = \text{sen } x$

$\text{sen } x = 0{,}5$

$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

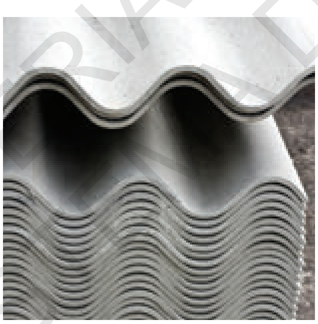
$\text{sen } x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$

Assim, $\text{sen}^2 p - \cos^2 q$ para $\text{sen } p \neq \text{sen } q$.

$\text{sen}^2 p - 1 + \cos^2 q = (0{,}5)^2 - 1 + 1^2 = 0{,}25 - 1 + 1 = 0{,}25.$

3. UEFS-BA (adaptado) C5-H22



SERAFICUS/ISTOCKPHOTO

As telhas onduladas de amianto, bastante populares, vêm tendo seu uso proibido em diversos municípios brasileiros, por ser um material cancerígeno e por também poder causar doenças respiratórias. Para substituí-las, podem ser usadas as chamadas ecotelhas – telhas onduladas produzidas a partir da reciclagem de material plástico, como, por exemplo, aparas de tubos de creme dental. As ecotelhas têm elevada resistência mecânica, bem como à ação dos raios ultravioleta e infravermelho, além de serem econômicas, são 100% impermeáveis. Supondo-se que a curva representativa de uma secção transversal de uma telha ondulada, como a da figura, seja definida por parte da função real $f(x) = 1 - 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{3}\right)$, é correto afirmar que o conjunto-imagem e o período de f(x) são, respectivamente,

a) [−1, 3] e 4π.
b) [−3, 1] e 4π.
c) [−1, 3] e 3π.
d) [−1, 1] e 2π.
e) [−3, 3] e 2π.

Temos que $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{3}\right) \leq 1$.

Logo, $-1 \leq 1 - 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{3}\right) \leq 3$.

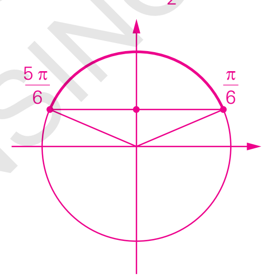
Assim, o conjunto imagem de f(x) é [−1, 3].
Seu período é $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

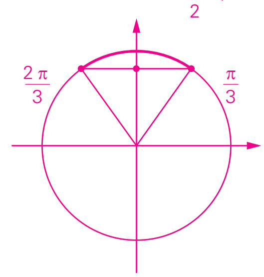
Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

4. Sistema Dom Bosco – Calcule a solução da inequação $\frac{1}{2} \leq \text{sen } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

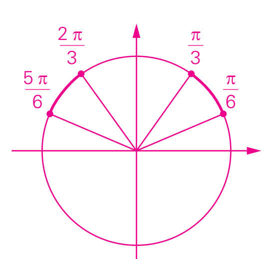
Temos que $\text{sen } x \geq \frac{1}{2}$ quando $x \geq \frac{\pi}{6}$ e $x \leq \frac{5\pi}{6}$.



Além disso, $\text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ quando $x \leq \frac{\pi}{3}$ e $x \geq \frac{2\pi}{3}$.



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$.



5. Sistema Dom Bosco – Sabendo que tg θ ≤ x e que $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, então o valor de sen θ está no intervalo

a) [0,1]

b) [–1,1]

c) $\left[x, \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

d) $\left[0, \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

e) $\left[0, \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \le x$

$\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \le x^2$

$\text{sen}^2\theta \le x^2 \cdot \cos^2\theta = x^2 \cdot (1 - \text{sen}^2\theta)$

$\text{sen}^2\theta \le x^2 - x^2 \cdot \text{sen}^2\theta$

$(1 + x^2) \cdot \text{sen}^2\theta \le x^2$

$\text{sen}^2\theta \le \frac{x^2}{(1+x^2)}$

$\text{sen}\,\theta \le \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Como $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, então $\text{sen}\,\theta \ge 0$.

Logo, $0 \le \text{sen}\,\theta \le \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. Sistema Dom Bosco – Encontre a solução da equação

$\cos 2x = \cos^2 \frac{x}{2}$ para $0 \le x \le 2\pi$.

$\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$

Para $y = \frac{x}{2}$

$\cos x = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$

$\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

$2 \cdot \cos^2 x - 1 = \frac{\cos x + 1}{2}$

$4 \cdot \cos^2 x - 2 = \cos x + 1$

$4 \cdot \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 1 + 48 = 49$

$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 7}{8}$

$\cos x = -1$ ou $\cos x = \frac{3}{4}$

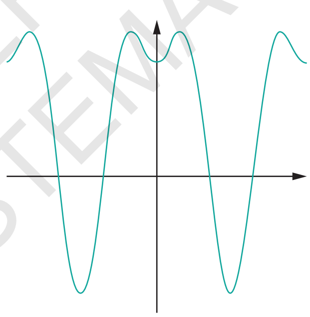
$x = \pi$ ou $x = \text{arccos}\left(\frac{3}{4}\right)$

$S = \left\{\pi, \text{arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFPE – Quantas soluções a equação trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$ admite no intervalo [0, 60π]?

Parte do gráfico da função $\text{sen}^2 x + \cos x$ está esboçada a seguir.



8. UEM-PR – Considerando a tabela abaixo (com os valores do seno e do cosseno de alguns ângulos x medidos em radianos), as identidades trigonométricas dadas pelas fórmulas apresentadas abaixo e os conhecimentos de trigonometria, assinale o que for correto.

Tabela com senos e cossenos

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Identidades trigonométricas $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\text{sen}(x + y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$

01) $\cos 2x = \frac{\cos^2(x) - 1}{2}$.

02) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{1}{2}$.

04) $\cos(x + \pi) + \cos x = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

08) $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos x = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

16) $\text{sen}(3x) = (4 \cdot \cos^2(x) - 1) \cdot \text{sen}(x)$.

9. AFA-SP – Considere a função real sobrejetora $f: A \to B$ definida por $f(x) = \dfrac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$. Sobre f é FALSO afirmar que

a) O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
b) f é par.
c) f é injetora.
d) B = {2}.

10. Uniube-MG – Medindo-se t em horas e $0 \leqslant t < 24$, a sirene de uma usina está programada para soar em cada instante t, em que $\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$ é um número inteiro. De quantas em quantas horas a sirene da fábrica soa?

11. Mackenzie-SP – Em $\mathbb{R}$ o domínio da função f, definida por $f(x) = \sqrt{\left(\dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x}\right)}$, é

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq 2 + 2k\pi \vee \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

12. FGV-SP – Resolvendo-se a inequação 2 cos x ⩽ 1 no intervalo [0, 2π], obtém-se:

a) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

b) $x \geq \frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$

d) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

e) $x \leqslant \frac{1}{2}$

13. Sistema Dom Bosco – Encontre o conjunto solução da inequação $\frac{1}{4} \leq \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{4}$, onde $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Ufla-MG – Os valores de x com 0 ⩽ x ⩽ 2 π que satisfazem à desigualdade $\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right)(\operatorname{sen} x - 2) \leq 0$ são

a) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

c) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{6\pi}{4}$

e) $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

15. Cefet-MG – A solução da inequação

$$0 < \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } 2x}{1 + \text{tg } x} < 1 \text{ para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ é o conjunto}$$

a) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$

b) $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

c) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

d) $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

e) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

16. UNESP – O conjunto solução (S) para a inequação $2 \cdot \cos^2 x + \cos(2x) > 2$, em que $0 < x < \pi$, é dado por

a) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in (0, \pi) \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

e) $S = \{x \in (0, \pi)\}$

17. Unicamp-SP – Considere dois triângulos retângulos, T_1 e T_2, cada um deles com sua hipotenusa medindo 1 cm. Seja α a medida de um dos ângulos agudos de T_1 e 2α a medida de um dos ângulos agudos de T_2.

a) Calcule a área de T_2 para $\alpha = 22{,}5°$.

b) Para que valores de α a área de T_1 é menor que a área de T_2?

18. Unifor-CE C5-H22

Os tsunamis são ondas de grande comprimento geradas por deformações bruscas no fundo do mar. Considere que uma equação simplificada desse fenômeno pode ser expressa por $f(t) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{t\pi}{4}\right)$, em que f(t) é altura da onda, em metros, e t é o tempo, em minutos, $t \geq 0$. O nível do mar, em repouso, é tomado como referencial inicial de altura. Ao se aproximar da costa, o período diminui, enquanto sua amplitude aumenta. Qual das alternativas abaixo melhor representa a função do tsunami quando da sua aproximação da costa?

a) $f(t) = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{t\pi}{6}\right)$

b) $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{t\pi}{12}\right)$

c) $f(t) = \frac{1}{3} \cdot \text{sen}\left(\frac{t\pi}{3}\right)$

d) $f(t) = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{t\pi}{2}\right)$

e) $f(t) = \text{sen}\left(\frac{t\pi}{8}\right)$

19. UNESP C5-H21

Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C) do solo em determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às três horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e terminou 72 horas depois (t = 72). Os dados puderam ser aproximados pela função H(t) = 15 + 5 · sen, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e H(t) a temperatura (em °C) no instante t.

Nesse caso, qual é o valor da equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) =$ $= 1$, para $t \in [0,24]$?

a) 6

b) 12

c) 18

d) 24

e) 36

20. Unioeste-PR C5-H21

Em uma área de proteção ambiental existe uma população de coelhos. Com o aumento natural da quantidade de coelhos, há muita oferta de alimento para os predadores. Os predadores com a oferta de alimento também aumentam seu número e abatem mais coelhos. O número de coelhos volta então a cair. Forma-se assim um ciclo de oscilação do número de coelhos nesta reserva. Considerando-se que a população p(t) de coelhos fica bem modelada por $p(t) = 1\,000 - 250 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{360}\right)$, sendo $t \geqslant 0$ a quantidade de dias decorridos, e o argumento da função seno é medido em radianos, pode-se afirmar que

a) a população de coelhos é sempre menor ou igual a 1 000 indivíduos.

b) em quatro anos a população de coelhos estará extinta.

c) a população de coelhos dobrará em 3 anos.

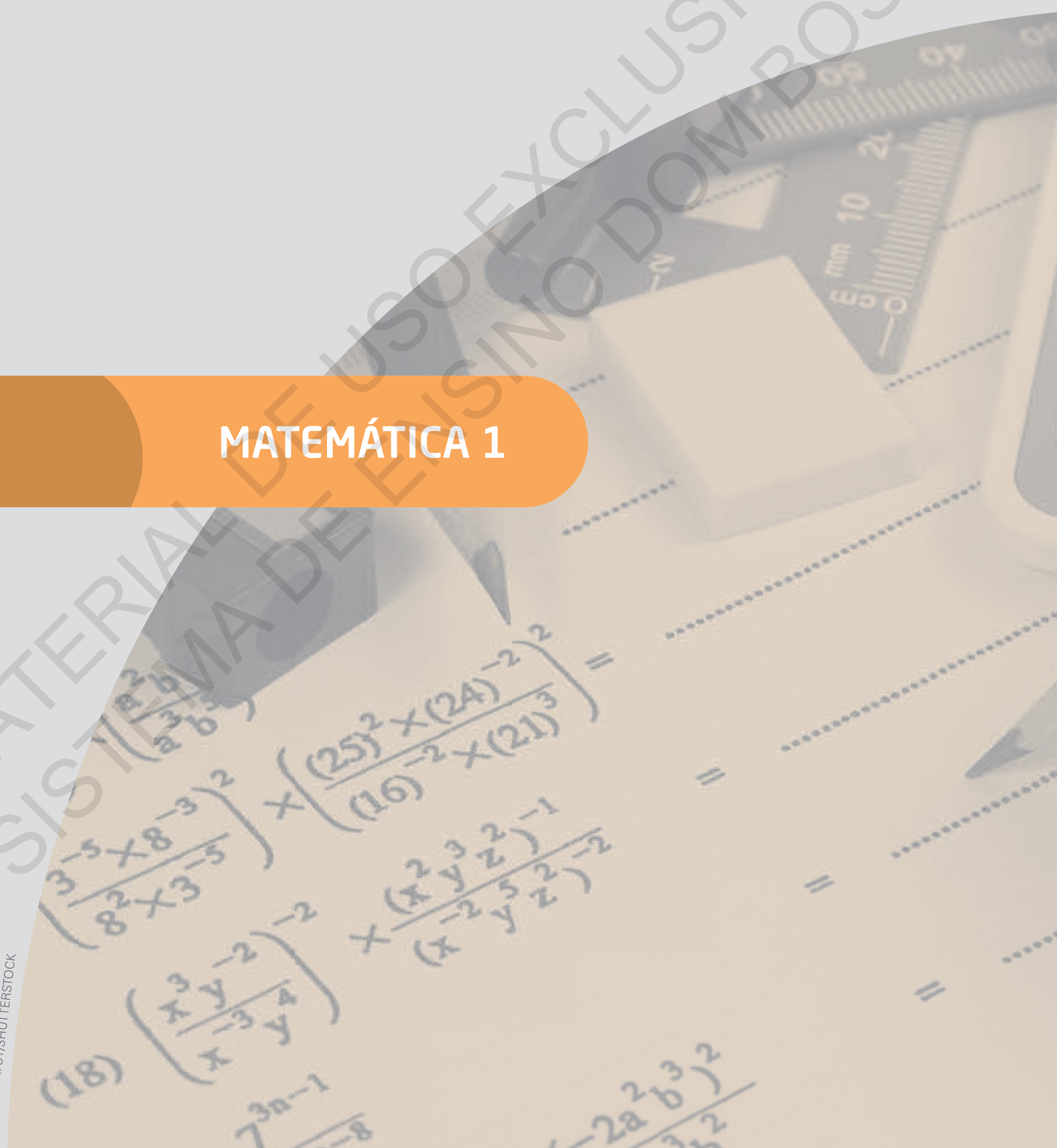
d) a quantidade de coelhos só volta a ser de 1 000 indivíduos depois de 360 dias.

e) a população de coelhos atinge seu máximo em 1 250 indivíduos.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 1



WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

APRESENTAÇÃO

A disciplina de Matemática é uma ciência de características específicas, que se organiza por meio de **definições, teoremas e demonstrações**. Os alunos do ensino pré-vestibular devem demonstrar teoremas, justificar definições e, principalmente, usar a Matemática para **resolver problemas do cotidiano** e compreender fenômenos de outras áreas do conhecimento. Para tanto, precisam valorizar o raciocínio matemático, nos aspectos de formular questões, indagar a existência de solução, estabelecer hipóteses e conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar de maneira lógico-dedutiva.

Esse material respalda-se na qualidade dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as áreas de conhecimento do Ensino Médio, cujos conteúdos conceituais são exigidos nos principais vestibulares do Brasil e no novo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), e contempla **uma ampla coletânea de questões** extraídas de tais provas, com respectivos gabaritos e resoluções comentadas.

Por critério de organização didática, os conteúdos conceituais estão separados da sequência de exercícios e distribuídos para atender à demanda das diversas formatações de cursos, considerando as prioridades dos principais vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Com base nisso, o material didático produzido para essa etapa de ensino contempla e destaca inúmeras competências da nova Matriz de Referências para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e, consequentemente, habilidades a elas relacionadas.

CONTEÚDO

MATEMÁTICA 1

Volume	Módulo	Conteúdo
1	1	Potenciação e radiciação
	2	Produtos notáveis, fatoração, múltiplos e divisores
	3	Conjuntos, intervalos reais e diagrama de Venn
	4	Equações do 1º grau, equações do 2º grau, redutíveis e irracionais
	5	Introdução ao estudo de funções, proporcionalidade e função linear
	6	Função afim, função linear, identidade e constante
	7	Função quadrática, seus máximos e mínimos
	8	Inequações do 1º e 2º grau, produto e quociente
	9	Função composta
	10	Função modular
	11	Equações e inequações modulares
	12	Equações e funções exponenciais
	13	Tipos de função e função inversa
	14	Logaritmos
	15	Equações logarítmicas
	16	Função logarítmica e inequações logarítmicas

MATEMÁTICA 2

Volume	Módulo	Conteúdo
1	1	Porcentagem, aumentos e descontos: fator de correção
	2	Matemática financeira: juros simples e composto
	3	Ângulos e paralelismo
	4	Ângulos no triângulo e na circunferência
	5	Comprimento da circunferência e polígonos regulares
	6	Pontos notáveis no triângulo e quadriláteros notáveis
	7	Quadriláteros notáveis e teorema de Tales
	8	Semelhança de triângulos
	9	Relações métricas no triângulo retângulo
	10	Área de figuras planas- paralelogramo
	11	Área de figuras planas - triângulos
	12	Área de figuras planas - trapézios, losangos e círculos
	13	Área de figuras planas - círculos e polígonos
	14	Área de figuras planas - polígonos regulares e figuras curvilíneas
	15	Área de figuras curvilíneas e outras figuras especiais
	16	Relações métricas na circunferência

MATEMÁTICA 3

Volume	Módulo	Conteúdo
1	1	Razões trigonométricas no triângulo retângulo, ângulos complementares e ângulos notáveis
	2	Arcos, ângulos e razões trigonométricas na circunferência
	3	Redução do 2º, 3º e 4º quadrante ao 1º quadrante
	4	Lei dos cossenos e lei dos senos
	5	Identidades trigonométricas
	6	Funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas
	7	Transformações trigonométricas
	8	Equações e inequações trigonométricas

1 POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Comentário sobre o módulo

O conteúdo abordado de potenciação está relacionado à aritmética. A proposta é retomar conceitos abordados no ensino fundamental.

É fato que, pensando dessa forma, teríamos que retomar outros pontos dessa área da matemática, como as quatro operações.

Mas entendemos que o grau de dificuldade em potenciação é mais elevado, cabendo ao professor identificar demais dúvidas relacionadas à aritmética e saná-las no decorrer das aulas pensadas para este módulo, que foi dividido em etapas.

Abordamos o conteúdo de potenciação, trazendo definição, propriedades, casos particulares e uma aplicação para o caso de potência de base 10. Para finalizar há uma série de exercícios de compreensão, desenvolvimento e aplicação dos conceitos de potenciação estudados no módulo.

O conteúdo abordado sobre radiciação está relacionado à aritmética. A proposta é retomar conceitos abordados no ensino fundamental. o grau de dificuldade em radiciação é mais elevado, cabendo ao professor identificar demais dúvidas relacionadas à aritmética e saná-las no decorrer das aulas pensadas para este módulo.

O conteúdo de radiciação é abordado, com a apresentação de definições, propriedades operatórias e processo de racionalização. Para finalizar, há uma série de exercícios de compreensão, desenvolvimento e aplicação dos conceitos de radiciação estudados no módulo.

Exercícios propostos

7. Temos que

$$\frac{18^n \cdot 2^2}{2\cdot(6^n\cdot 3^n)} = \frac{18^n\cdot 2^2}{2\cdot(18^n)} = \frac{2^2}{2} = 2$$

8. B

Transformando para potências de base 3, temos $2\cdot(3^4)^3 + 3\cdot(3^2)^6 + 4\cdot(3^3)^4 = 3^{12}\cdot(2+3+4) =$ $= 3^{12}\cdot 9 = 3^{12}\cdot 3^2 = 3^{14} = (3^2)^7 = 9^7$.

9. B

$$\frac{(4{,}25)^3\cdot(9{,}8)^2}{(10{,}1)^4} \cong \frac{4^3\cdot 10^2}{10^4} = \frac{64}{100} = 0{,}64.$$

10. D

Como $0{,}125 = (0{,}5)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3}$ temos que

$(0{,}125)^{15} = (2^{-3})^{15} = 2^{-45}$.

11. E

I. FALSA, pois

$$(2^a)^3 = 3^6 \to (2^a)^3 = (3^2)^3 \to 2^a = 3^2 = 9 \to 2^{-a} = \frac{1}{9}$$

II. FALSA, pois $(1{,}25\cdot 10^{-4} - 1{,}16\cdot 10^{-7}) =$ $= 10^{-4}\cdot(1{,}25 - 1{,}16\cdot 10^{-3}) \neq 1{,}19\cdot 10^{-4}$

III. FALSA, pois $x^2 = (25^6)^2 \to x = 25^6$; $y^6 =$ $= (25^2)^6 \to y = 25^2$ e $w^7 = (25^9)^7 \to w =$ $= 25^9$. Logo $(x\cdot y\cdot w)^{12} = (25^{6+2+9})^{12} = 25^{204}$

12. Temos que o volume é dado por V = (área) · (espessura). Daí: 10 000 ℓ = 150 000 m² · (espessura). Como 1 m³ = 1 000 ℓ, vem: 10 m³ = 15 · $10^4 \to$ $\to$ (altura) = (altura) = $\frac{10}{15}\cdot 10^{-4} = 0{,}66\ldots\cdot 10^{-4} =$ $= 6{,}6\ldots\cdot 10^{-5}$. Utilizando a definição de ordem de grandeza de um número, temos que a ordem de grandeza da espessura da camada de óleo é de 10^{-4}.

13. B

Temos que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$

14. Temos que $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2^1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2^1}{2^{2/3}} = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$

15. C

Transformando os termos da expressão em potências:

$$\sqrt{2\cdot 5^2} - \sqrt{2\cdot 3^2} + \sqrt{2\cdot 7^2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

16. B

$a = \sqrt{8} = \sqrt[6]{8^3} = \sqrt[6]{512}$;

$b = 3 = \sqrt[6]{3^6} = \sqrt[6]{729}$;

$c = \sqrt[3]{25} = \sqrt[6]{25^2} = \sqrt[6]{625}$.

17. A

$5\sqrt[3]{27\cdot 2} - 3\sqrt[3]{8\cdot 2} = 15\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{9^3\cdot 2} =$

$= \sqrt[3]{729\cdot 2} = \sqrt[3]{1458}$.

Estudo para o Enem

18. D

1 real = $2{,}75\cdot 10^3\cdot 10^3\cdot 10^3\cdot 10^3\cdot 10^3\cdot 10^3$ réis = $= 2{,}75\cdot 10^{18}$ réis.

Logo, 300 *contos* = $300\cdot 10^6 = 3\cdot 10^8$ réis. Portanto, o saldo da conta seria de $\frac{3\cdot 10^8}{2{,}75\cdot 10^{18}} \approx \frac{1}{10^{10}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10^9}$.

Ou seja, aproximadamente um décimo de bilionésimo de real.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

19. B

Temos que, em segundo, 43,18 = 4,318 · 10^1.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

20. E

Do texto, temos que $\Delta t = (1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)$ s e $V = 300\,000$ km/s.

Logo, a distância percorrida é de $\Delta S = V \cdot \Delta t \approx 1{,}89 \cdot 10^{13}$ km $= 1{,}89 \cdot 10^{16}$ m.

Como $1{,}89 < \sqrt{10} \approx 3{,}16$, segue que a resposta é 10^{16}.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

2 PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO, MÚLTIPLOS E DIVISORES

Comentário sobre o módulo

O desenvolvimento deste módulo está subdividido em duas etapas: 1. produtos notáveis; 2. fatoração. Na primeira etapa, ao tratar de produtos notáveis, consideramos a relação álgebra-geometria, existente desde a origem deste objeto de estudo. No clássico *Elementos*, livro II, Euclides enuncia a proposição 4:

"Se uma linha reta é cortada ao acaso, o quadrado do total é igual à soma do quadrado dos segmentos e duas vezes o retângulo formado pelos segmentos". *Isto é, em linguagem algébrica moderna:* $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (MILIES; BUSSAB, 1999, p. 66).

São abordados conceitos de múltiplos e divisores. O principal foco de estudo, neste momento, deve se voltar para a compreensão de fenômenos repetitivos ou com eventos comuns, aos quais se aplicam os conceitos de MMC ou MDC.

Vale destacar que existem poucos itens abordados no Enem que envolvem esses conceitos.

Para ir além

O uso de ferramentas digitais, esquemas ou resumos certamente vai enriquecer a aula. Por mais que a fixação das "fórmulas" tenha importância crucial nesta etapa do ensino, não deixe de apresentar a representação geométrica de produtos notáveis.

Exercícios propostos

7. Temos que $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$.

8. B

Simplificando a expressão: $\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-y^2}=$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{x^2-y^2}=\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)\cdot(x-y)}=$$

$$=\frac{(x-y)^2}{(x+y)\cdot(x-y)}=\frac{x-y}{x+y}.$$

9. D

O número $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$, de acordo com o enunciado, pode ser escrito das seguintes formas:

$180 = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2) \cdot (1) \therefore$ soma $= 22$;

$180 = (3 \cdot 2) \cdot (5) \cdot (3) \cdot (2) \therefore$ soma $= 16$;

$180 = (3 \cdot 3) \cdot (5) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (1) \therefore$ soma $= 19$;

$180 = (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3) \cdot (1) \therefore$ soma $= 20$.

10. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3+\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+3\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x}+3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x^2}\rightarrow$

$\rightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3+\dfrac{1}{x^3}+3x+\dfrac{3}{x}\rightarrow$

$\rightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$. Como $x+\dfrac{1}{x}=3$,

vem: $(3)^3=\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+3\cdot 3$.

Portanto, $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=27-9=18$.

11. D

Temos que $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Então, $xy + xz + yz = 6 \rightarrow 2xy + 2xz + 2yz = 12$.

Logo, $(x + y + z)^2 = 6 + 12 = 18$.

Portanto, $x+y+z=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}$. Um possível valor é $3\sqrt{2}$.

12. C

Considerando-se **a** e **b** números naturais, como $MDC(a, b) \neq 1$, pois **a** e **b** são primos entre si, **a** e **b** têm pelo menos um fator primo em comum. Sendo $a \cdot b = 825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$, o único fator primo em comum aos números **a** e **b** é o 5. Logo, $MDC(a, b) = 5$.

13. A

Tempo para a colheita da variedade $V_1 = 5 + 3 + 1 = 9$ semanas.

Tempo para a colheita da variedade $V_2 = 3 + 2 + 1 = 6$ semanas.

Tempo para a colheita da variedade $V_3 = 2 + 1 + 1 = 4$ semanas.

O número mínimo de semanas necessárias para que a colheita das três variedades ocorra simultaneamente será: $MMC(9, 6, 4) = 36$ semanas.

14. A

Como os alunos das três escolas serão divididos em **x** grupos (com mesma quantidade de alunos de cada escola) e **x** deve ser o maior possível, temos que **x** é máximo divisor comum dos números de alunos de cada escola. Ou seja, $x = MDC(120, 180, 252)$. Fatorando 120, 180 e 252:

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$;

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$;

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Portanto, $x = MDC(120, 180, 252) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

15. a) A menor quantidade de dias **x** para que os três rituais sejam celebrados simultaneamente é menor múltiplo positivo da quantidade de dias em que cada ritual se repete. Ou seja, $x = MMC(20, 66, 30)$.

Fatorando 20, 66 e 30:

$20 = 2^2 \cdot 5$;

$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$;

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Portanto, $x = \text{MMC}(20, 66, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 =$
$= 660$.

b) Como os dias da semana formam um ciclo completo de 7 dias, dividindo o intervalo dado por 7, obtemos o número de ciclos completos (quociente dessa divisão) e o número de dias excedentes que não completam um ciclo (resto dessa divisão). Ou seja: 3 960 ÷ 7 = 565 *ciclos completos* + 5 *dias*.

Assim, como cada ciclo completo inicia-se na segunda-feira (resto 0), o quinto dia (resto 5) será um sábado.

16. 15 (01 + 02 + 04 + 08)

Utilizando a propriedade do MDC e do MMC:

$\text{MMC}(a, 15) \cdot \text{MDC}(a, 15) = a \cdot 15 \rightarrow 120 \cdot 5 =$
$= a \cdot 15 \rightarrow a = 40$.

$\text{MMC}(b, 20) \cdot \text{MDC}(b, 20) = b \cdot 20 \rightarrow 140 \cdot 4 =$
$= b \cdot 20 \rightarrow b = 28$.

Analisando os itens:

01) $\text{MMC}(a, b) = 280$

VERDADEIRA, pois $\text{MMC}(40, 28) = \text{MMC}(2^3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 7) = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

02) $\text{MDC}(a, b) = 4$

VERDADEIRA, pois $\text{MDC}(40, 28) = \text{MDC}(2^3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 7) = 2^2 = 4$.

04) **a** e **b** são números pares.

VERDADEIRA, pois a = 40 e b = 28, os quais são números pares.

08) $a > b$

VERDADEIRA, pois 40 > 28.

17. Fatorando-se o produto das idades:

$$\begin{array}{r|l} 37\,037 & 7 \\ 5\,291 & 11 \\ 481 & 13 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a idade da mãe será 37 anos e das filhas, 7, 11 e 13 anos. A diferença de idade entre a filha mais velha e a mais nova será de 6 anos.

Estudo para o Enem

18. B

Reescrevendo a expressão:

$$\frac{(x^3 - 14x^2 + 49x)\cdot(ax - bx + 7a - 7b)}{(x^2 - 49)\cdot(2a - 2b)\cdot(7x - 49)} =$$

$$= \frac{x(x-7)\cdot(x-7)\cdot[x\cdot(a-b) + 7\cdot(a-b)]}{(x+7)\cdot(x-7)\cdot 2\cdot(a-b)\cdot 7\cdot(x-7)} =$$

$$= \frac{x\cdot(x+7)\cdot(a-b)}{(x+7)\cdot(a-b)\cdot 2\cdot 7} = \frac{x}{14} = \frac{966}{14} = 69$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

19. D

Temos uma diferença de quadrados, da forma $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Portanto, podemos reescrever a expressão como:

$x = 525^2 - 523^2 = (525 + 523) \cdot (525 - 523) =$
$= 1\,048 \cdot 2 = 2\,096$.

A soma dos algarismos de x é 2 + 0 + 9 + 6 = 17.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. B

Para atender à exigência do feirante, o número **x** de famílias que dividirão as três espécies de frutas deverá ser o maior possível. Ou seja, **x** será o MDC das quantidades de frutas de cada espécie.

Fatorando as quantidades de goiabas, laranjas e maçãs:

$576 = 2^6 \cdot 3^2$

$432 = 2^4 \cdot 3^3$

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

$x = \text{MDC}(432, 504, 576) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, ou seja, 72 famílias.

Assim, cada família receberá:

$576 \div 72 = 8 \rightarrow 8$ goiabas

$732 \div 72 = 6 \rightarrow 6$ laranjas

$507 \div 72 = 7 \rightarrow 7$ maçãs

Somando as frutas que cada família receberá, tem-se o número 21, que é múltiplo de 7.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

3 CONJUNTOS, INTERVALOS REAIS E DIAGRAMA DE VENN

Comentário sobre o módulo

O conteúdo abordado envolve a teoria dos conjuntos. No início do módulo, é apresentada a parte teórica relacionada à teoria de conjuntos, dividida em tópicos, seguidos de alguns exemplos com o objetivo de auxiliar na compreensão do aluno.

Exercícios propostos

7. D

I. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros.

VERDADEIRA, pois todo número natural é um número inteiro.

II. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números racionais.

VERDADEIRA, pois todo número natural pode ser escrito na forma de fração, ou seja, como um número racional.

III. O conjunto dos números naturais é subconjunto dos números irracionais.

FALSA, pois, como todo número natural é racional, pode-se afirmar que não existe número natural que seja irracional.

8. Se $A \cap B = \{0,2\}$, então os elementos 0 e 2 pertencem a B; se $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{0, 1, 2\}$, então os elementos 3 e 4 pertencem somente a B. Então, $B = \{0, 2, 3, 4\}$.

9. O número de homens que jogam xadrez é 25% de $40 = \frac{1}{4}$ de $40 = 10$.
Se 14 pessoas jogam xadrez, entre elas 10 homens, então 4 são mulheres, que correspondem a 25% (1/4) do total de mulheres. Portanto, o número de mulheres (100%) é $4 \cdot 4 = 16$.
Logo, $x = 40 + 16 = 56$.

10. C

Se $A \cap B = \{b,d\}$, então B tem os elementos b e d. Se $B - A = \{a\}$, então B tem o elemento a. Logo, $B = \{a, b, d\}$.

11. E

Como os conjuntos dos números naturais, dos inteiros, dos racionais e dos irracionais são subconjuntos dos reais, qualquer que seja esse número, ele é real.

12. Se 25% dos funcionários são mulheres, então 75% dos funcionários são homens.

Se 20% dos homens têm menos de 30 anos, então 80% dos homens têm pelo menos 30 anos.

Dessas conclusões, temos que 80% de 75% = 60% é a porcentagem dos funcionários que são homens e têm pelo menos 30 anos.

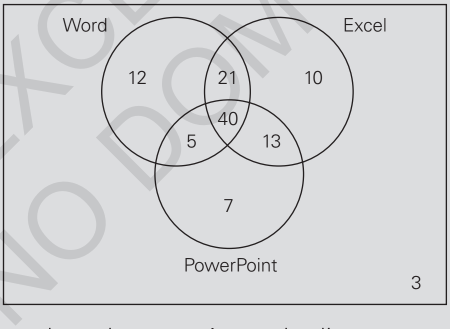
Se 80% dos funcionários têm pelo menos 30 anos e 60% são homens, então 20% são mulheres.

Entre as mulheres, a porcentagem das que têm pelo menos 30 anos é dada pela razão:

$$\frac{20\% \text{ dos funcionários}}{25\% \text{ dos funcionários}} = \frac{20}{25} = \frac{80}{100} = 80\%.$$

13. D

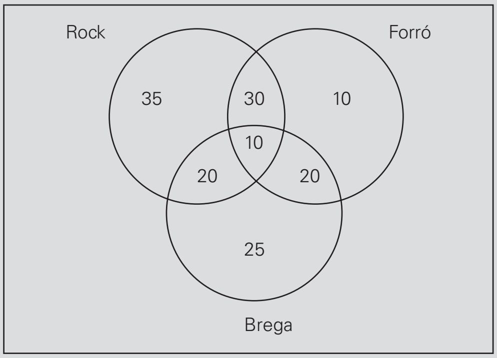
De acordo com os dados apresentados, tem-se:



Somando todos os valores do diagrama, temos:

$12 + 21 + 10 + 5 + 40 + 13 + 7 + 3 = 111$.

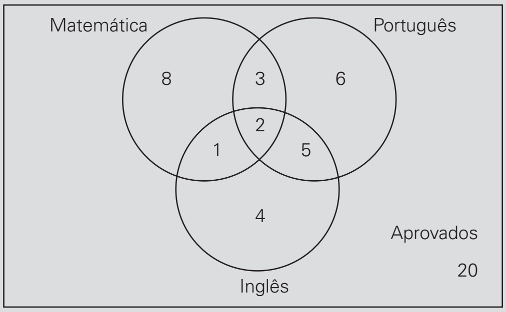
14. De acordo com o enunciado da questão:



Então, se temos 200 estudantes no total, o número de alunos que não gostam de nenhum desses três estilos musicais é $200 - (35 + 30 + 10 + 10 + 10 + 20 + 25) = 60$.

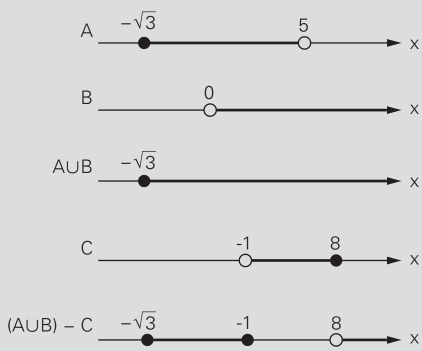
15. E

Considerando o diagrama com os conjuntos dos alunos que não obtiveram a nota mínima em uma disciplina, temos:



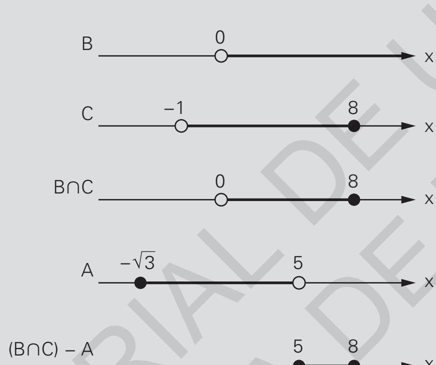
Portanto, o total de alunos é dado pela soma $8 + 3 + 6 + 1 + 2 + 5 + 4 + 20 = 49$.

16. a)



Portanto, $(A \cup B) - C = [-3, -1] \cup]8, \infty[$.

b)



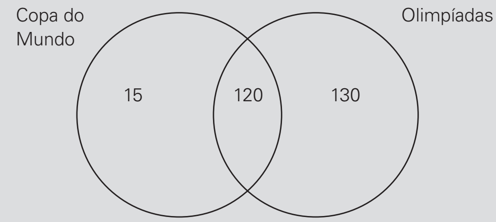
Portanto, $(B \cap C) - A = [5, 8]$.

17. Se y não pertence ao intervalo fechado de extremo -3 e 4, então $y < -3$ ou $y > 4$. Como qualquer número real menor que -3 é menor que -2 e qualquer número real maior que 5 é maior que 4, temos que $y < -3$ ou $y > 5$, ou seja, $y \in]-\infty, -3[\cup]5, \infty[$.

Estudo para o Enem

18. B

Considere o diagrama de Euler-Venn:



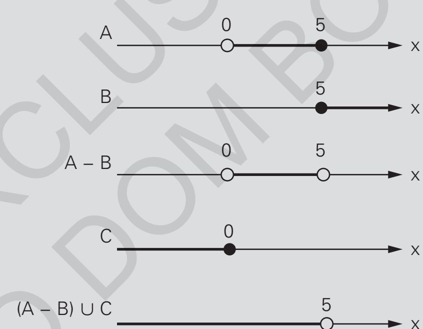
Temos que $15 + 120 + 130 + x = 420$.

Logo, $x = 155$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. B



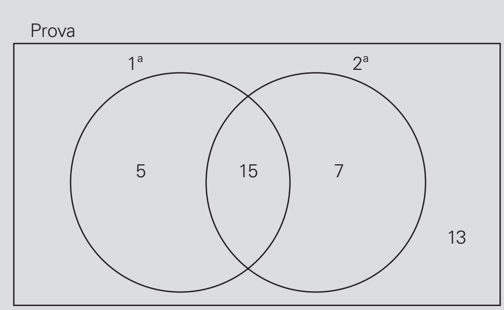
Portanto, $(A - B) \cup C =]-\infty, 5[= \mathbb{R} - [5, \infty[= \mathbb{R} - B$.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. B

De acordo com o enunciado, temos:



Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

4 EQUAÇÕES DO 1º GRAU, EQUAÇÕES DO 2º GRAU, REDUTÍVEIS E IRRACIONAIS

Comentário sobre o módulo

As páginas iniciais trazem situações-problema cuja resolução ocorre por meio de equações. Apesar de os alunos já conhecerem o tema, ressalte que uma equação nada mais é do que a igualdade de duas expressões algébricas. Em seguida, apresente a definição de equações de 1º grau com uma incógnita.

O conteúdo abordado neste módulo tem grande importância para a Matemática. Nos vestibulares e no Enem, de maneira geral, ele é abordado dentro de um contexto, ou seja, na resolução de situações-problema.

As páginas iniciais trazem situações-problema cujas resoluções ocorrem por meio de equações. Apesar de os alunos já conhecerem o tema, ressalte que uma equação nada mais é do que a igualdade de duas expressões algébricas. Em seguida, apresente a definição de equações de 2º grau com uma incógnita.

Para ir além

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

A seguir estão duas referências que abordam de forma clara e diferenciada o assunto trabalhado neste módulo.

- ENZENSBERGER, H. M. *O diabo dos números*. São Paulo: Cia. das Letras, 2008.
- REVISTA Pré-Univesp. O número de ouro e a divina proporção. Disponível em:

<http://pre.univesp.br/o-numero-de-ouro-e-a-divina-proporcao#.WqWwL87wbIU>.

Acesso em: jul. 2018.

Exercícios propostos

7. A

$mx - 2m + 15 - 10x = 2 + 2x + 6m \rightarrow mx - 12x = 8x - 13 \rightarrow$

$\rightarrow (m - 12) \cdot x = 8m - 13 \rightarrow x = \dfrac{8m - 13}{m - 12};\ m \neq 12$

8. B

Considere V_A e V_B as velocidades de produção de Adriana e Beatriz, respectivamente, e V_{A+B} a velocidade de produção de Adriana e Beatriz juntas.

Do enunciado, temos que $V_A = \dfrac{240}{T+4}$, $V_B = \dfrac{240}{T+9}$ e $V_{A+B} = \dfrac{240}{T}$.

Logo, como $V_{A+B} = V_A + V_B$

$V_{A+B} = \dfrac{240}{T+4} + \dfrac{240}{T+9}$

$\therefore \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{T+4} + \dfrac{1}{T+9}$

$\therefore \dfrac{1}{T} = \dfrac{T+9+T+40}{(T+4)\cdot(T+9)}$

$\therefore \dfrac{1}{T} = \dfrac{2T+13}{T^2+13T+36}$

$\therefore T^2 + 13T + 36 = 2T^2 + 13T$

$\therefore T^2 = 36$

$\therefore T = 6$

Assim, $V_A = \dfrac{240}{10} = 24$ peças/hora e $V_B = \dfrac{240}{15} =$
$= 16$ peças/hora.

Portanto, Adriana produz 8 peças por hora a mais que Beatriz.

9. Número de meninas: x

Número de meninos: 3x

Portanto:

$3x + x = 36$

$4x = 36$

$x = 9$

Então, nessa turma há 9 meninas.

10. D

Considere **x** e **y** os preços dos azulejos do tipo 1 e 2, respectivamente. Do enunciado, temos as equações:

(I) $35x + 13y = 1\,354$ e (II) $21x + 6y = 780 \rightarrow$
$\rightarrow 7x + 2y = 260$ (III) $\leftrightarrow 35x + 10y = 1\,300$ (IV)

Subtraindo (I) – (IV), vem: $3y = 54 \rightarrow y = 18$. Substituindo o valor de **y** em (III), temos

$7x + 36 = 260 \rightarrow 7x = 224 \rightarrow x = 32$

11. D

Se **t** é a taxa pedida, então:

$t - 12 \cdot (900 - t) = 6\,950 \rightarrow 11t = 3\,850 \rightarrow t = 350$

12. D

$2x + \dfrac{6}{x-3} = 6 + \dfrac{6}{x-3} \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3.$

Como $x \neq 3$, pois $x = 3$ torna o denominador nulo, conclui-se que não existem raízes para a equação do enunciado.

13. A

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$x^2 = y$

$y^2 - 10y + 9 = 0.$

Utilizando a soma e o produto das raízes, temos:

$y = 1 \rightarrow x = \pm 1$

ou

$y = 9 \rightarrow x = \pm 3$

14. D

$\sqrt{x^2-7x+12}=2\sqrt{3} \rightarrow \left(\sqrt{x^2-7x+12}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 7x + 12 = 12 \rightarrow x^2 - 7x = 0$

Utilizando a fatoração, temos:

$x \cdot (x - 7) = 0$

$x = 0$ ou $x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$

Portanto, $S = \{0, 7\}$

15. C

Dividindo a sentença $3x^2 + 9x - 120 = 0$ por 3 e aplicando a fórmula de Bhaskara, temos:

$x^2+3x-40=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-40)}}{2\cdot1} \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-3+13}{2} \rightarrow x_1=\dfrac{10}{2} \rightarrow x_1=5 \\ x_2=\dfrac{-3+13}{2} \rightarrow x_2=\dfrac{-16}{2} \rightarrow \end{cases}$$

$\rightarrow x_2 = -8$

16. a) $x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \rightarrow \Delta = 1 + 8 \rightarrow \Delta = 9$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} \rightarrow x=\frac{1\pm3}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{1-3}{2}=\dfrac{-2}{2} \end{cases}$$

Portanto, $S = \{-1, 2\}$

b) $\sqrt{x^2+3x+6}=2x \rightarrow \left(\sqrt{x^2+3x+6}\right)^2=(2x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 3x + 6 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - x^2 - 3x - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0$

Usando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot3\cdot(-6)}}{2\cdot3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+81}}{6} \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{81}}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{3\pm9}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3+9}{6}=\dfrac{12}{6}=2 \\ x_2=\dfrac{3-9}{6}=\dfrac{-6}{6}=-1 \end{cases}$$

17. D

Sejam x o número de alunos e y o valor de cada aluno; temos as duas situações:

$$\begin{cases} \dfrac{3600}{x}=y & \text{(I)} \\ \dfrac{3600}{x-8}=y+75 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$\frac{3600}{x-8}=\frac{3600}{x}+75 \rightarrow \frac{3600\cdot x}{x\cdot(x-8)}=$$

$$=\frac{3600}{x\cdot(x-8)}+\frac{75\cdot x\cdot(x-8)}{x\cdot(x-8)} \rightarrow$$

$\rightarrow -75x^2 + 600x + 28\,800 = 0$

Dividindo a equação por 75, temos:

$-x^2 + 8x + 384 = 0$

Aplicando soma e produto, temos:

$x = -16$ ou $x = 24$

Logo, o total de alunos da turma é 24.

Estudo para o Enem

18. E

Temos que o custo é dado por

$$\text{custo}=18\cdot\frac{2}{3}+14{,}70\cdot\frac{1}{3}=16{,}90$$

$$16{,}90=x\cdot\frac{2}{3}+15{,}30\cdot\frac{1}{3} \rightarrow \frac{2x}{3}=11{,}8 \rightarrow x=17{,}70$$

Redução de R$ 0,30.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. B

Considerando que x é a quantidade do produto comprado, temos que, por semana, essa pessoa gasta $10x + 6$. Após o aumento de 20%, o produto passou a custar 12 reais, sendo assim, essa pessoa consegue comprar $x - 2$ produtos levando a mesma quantia em dinheiro.

$12 \cdot (x - 2) = 10x + 6x = 15$

Logo, a quantia que essa pessoa levava era de $10 \cdot 15 + 6 = 156$ reais.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

A área do *outdoor* A_{out} é dada pelo produto dos lados do retângulo. Então:

$$A_{out} = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{21}{1} = 21 \rightarrow 21 \text{ m}^2.$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

5 INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FUNÇÕES, PROPORCIONALIDADE E FUNÇÃO LINEAR

Comentário sobre o módulo

Este módulo inicia o estudo sobre funções – das noções básicas de representação de uma função até a análise detalhada de gráficos, bem como determinação de domínio, imagem e contradomínio.

Uma sequência de exercícios propostos e de aplicação, os quais podem ser resolvidos pelo professor em sala de aula e os demais encaminhados para resolução extraclasse, finaliza o módulo.

No momento da resolução de exercícios, acreditamos no enfoque em questões de contexto mais abrangente, ou seja, contextualizadas, como as apresentadas no Enem e nas principais instituições de ensino espalhadas pelo Brasil.

O módulo visa apresentar o conceito matemático de grandezas proporcionais e a correlação entre função linear e grandezas diretamente proporcionais. Será de grande valia destacar que não há equivalência entre funções crescentes/grandezas diretamente proporcionais e funções decrescentes/grandezas inversamente proporcionais. Buscar exemplos contextualizados ajuda bastante a evidenciar tais fatos.

Ressaltamos que a escolha dos exercícios e sua ordenação, apesar do caráter particular, têm o propósito de auxiliar no entendimento e no domínio dos conteúdos abordados.

Para ir além

O professor tem total autonomia na preparação e no desenvolvimento de suas aulas. Mas entendemos também que objetos auxiliadores são sempre bem-vindos.

A utilização de objetos digitais de aprendizagem no ensino proporciona uma formação continuada de qualidade, que potencializa a aprendizagem significativa. Tão importante quanto o uso adequado de objetos educacionais para o ensino e a aprendizagem são a escolha dos ambientes utilizados e a forma de apoio dada aos alunos a serem capacitados.

Existem vários *softwares* disponibilizados gratuitamente pelo MEC na Rived (Rede Internacional Virtual de Educação). Professores e alunos podem acessar, fazer *download* e utilizar todos os recursos disponíveis.

http://rived.mec.gov.br/.

Exercícios propostos

7. C

$65 = 160 \cdot 2^{-0,8 \cdot t} + 25 \rightarrow 65 - 25 = 160 \cdot 2^{-0,8 \cdot t} \rightarrow$
$\rightarrow 40 = 160 \cdot 2^{-0,8 \cdot t} \rightarrow \dfrac{40}{160} = 2^{-0,8 \cdot t} \rightarrow$
$\rightarrow \dfrac{1}{4} = 2^{-0,8 \cdot t} \rightarrow \dfrac{1}{2^2} = 2^{-0,8 \cdot t} \rightarrow 2^{-2} = 12^{-0,8 \cdot t} \rightarrow$
$\rightarrow -2 = 0,8 \cdot t \rightarrow t = \dfrac{2}{0,8} \rightarrow t = \dfrac{20}{8} \rightarrow t = 2,5$, ou seja, 2,5 min.

8. $F(X) = C \cdot 0,8^x$

$40\,000 \cdot 0,8^x = 0,512 \cdot 4\,000$

$0,8^x = 0,512$

$\left(\dfrac{8}{10}\right)^x = \dfrac{8^3}{10^3}$

$\left(\dfrac{8}{10}\right)^x = \left(\dfrac{8}{10}\right)^3$

$x = 3$

Logo, $x = 3$ anos.

9. B

Nessa função cada boi reage à medicação, ou seja, cada número natural não nulo indica um boi que se associa com 1 (reação positiva) ou com zero (reação negativa).

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 51\}$.

10. a) $I = \dfrac{M}{h^2} = \dfrac{64}{(1,6)^2} = \dfrac{64}{2,56} = 25$. A mulher está levemente obesa.

b) Para que o homem não seja considerado obeso, seu índice de massa corporal máximo é 30. Daí vem: $30 = \dfrac{97,2}{h^2} \rightarrow h^2 = 3,24 \rightarrow h = 1,8$ m.

11. B

Analisando as alternativas, com relação ao valor absoluto da variação do nível de água em cada intervalo apresentado, temos:

a) 200 cm;
b) 300 cm;
c) 0 cm;
d) 100 cm;
e) 200 cm.

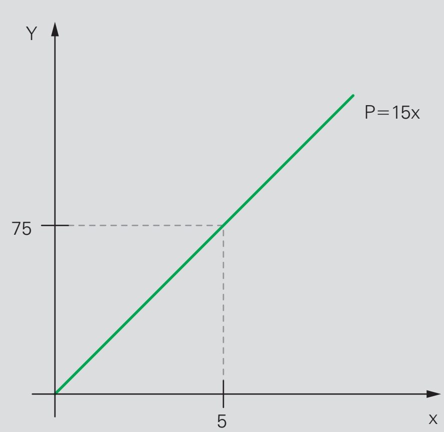
12. B

A primeira relação não é uma função, pois Carlos e Juca têm mais de um filho. A segunda relação é uma função, pois cada filho tem um único pai. A terceira relação não é uma função, pois cada filho tem mais de um primo.

13. a) De acordo com o enunciado: $30 = k \cdot 2 \rightarrow$ $\rightarrow k = 15$.

$F = 15 \cdot 5 = 75$ N

b)



14. Sendo d a distância percorrida pelo carro, em metros, até parar, e sendo v a velocidade do automóvel, em km/h, quando os freios são acionados, temos:

$$\frac{d}{v^2} = k \rightarrow \frac{7}{35^2} = k \rightarrow k = \frac{1}{175} \rightarrow \frac{1}{175} = \frac{d}{70^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow d = \frac{4\,900}{175} = \frac{700}{25} = 28 \rightarrow 28 \text{ metros.}$$

15. B

Sejam x e y os valores recebidos na divisão dos lucros pelo primeiro e segundo sócios, respectivamente, do enunciado vem:

$$\frac{x}{18\,000} = \frac{y}{23\,000} = k \rightarrow x = 18\,000k;\ y = 23\,000k$$

$$x + y = 5\,000 \rightarrow 18\,000k = 23\,000k = 5\,000 \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{5\,000}{41000} \rightarrow k = \frac{5}{41}$$

Portanto, $y - x = 5\,000k \rightarrow x - y = 5\,000 \cdot \frac{5}{41} \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{25\,000}{41} \cong 609 \rightarrow \text{R\$ } 609{,}00.$$

16. B

Sejam x, y, z, w e v as áreas de lazer, em m^2, de cada residência, em ordem crescente de suas áreas, do enunciado temos:

$$\frac{x}{102} = \frac{y}{110} = \frac{z}{112} = \frac{w}{116} = \frac{v}{120} = k \rightarrow x = 102k;$$

$y = 100k;\ z = 112k;\ w = 116k;\ v = 120k$

$x + y + z + w + v = 84 \rightarrow 102k + 110k + 112k + 116k + 120k = 84 \rightarrow 560k = 84 \rightarrow$

$$\rightarrow k = \frac{84}{560} = \frac{3}{20}$$

Portanto, $y = 110k \rightarrow y = 100 \cdot \frac{3}{20} \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{330}{20} = \frac{33}{2} = 16{,}5$$

17. B

I. Verdadeira, pois, para ingestões de até 20 mg/dia, ou seja $x \geqslant 20$, tem-se a representação gráfica da função linear

$$y = \frac{18}{20}x \rightarrow y = \frac{9}{10}x.$$

Então: $\frac{y}{x} = 0{,}9$ (constante). Logo, a absorção (y) é proporcional à ingestão (x).

II. Falsa, para ingestões acima de 20 mg/dia, ou seja, $x > 20$. A razão $\frac{y}{x} = \frac{180}{x}$ não é constante pelo fato de x ser variável.

III. Verdadeira, pois, sendo $x > 20$, a razão $\frac{y}{x} = \frac{180}{x}$ decresce à medida que x cresce.

Ou seja, quanto maior a ingestão (x), menor a porcentagem (razão) que indica a absorção.

IV. Verdadeira, pois a absorção e a ingestão não são proporcionais. Veja que 18 mg/dia é a máxima absorção, então, a partir desse ponto, não aumenta, mas a ingestão, sim.

Estudo para o Enem

18. A

Podemos observar no gráfico que o carro estava com velocidade zero em dois momentos. Portanto, ele parou em 2 semáforos.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. E

No claro, temos: $m_1 = \frac{y}{x} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = 4$.

No escuro, temos: $m_2 = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$.

Logo, $m_1 = 2m_2$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. C

Seja P o preço e A, a área da pizza, temos:

$$\frac{P}{A} = k \text{ (constante)} \rightarrow k = \frac{36}{100\pi} = \frac{P}{225\pi} \rightarrow$$

$$\rightarrow P = \frac{225\pi \cdot 36}{100\pi} = 81 \rightarrow \text{R\$ } 81{,}00.$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

6 FUNÇÃO AFIM, FUNÇÃO LINEAR, IDENTIDADE E CONSTANTE

Comentário sobre o módulo

Comente com os alunos sobre problemas reais envolvendo funções. Instigue-os a pensar em uma situação que poderia ser representada por uma função afim decrescente, como a desvalorização de um automóvel ou o esvaziamento de uma caixa-d'água com o passar do tempo, sempre relacionando as leis das funções aos seus gráficos. Apresentar a aplicação do zero da função facilita a compreensão dos alunos. Utilize um gráfico de uma função. Por exemplo, de uma conta bancária com saldo negativo que recebe um depósito por mês. Analisem em qual mês o saldo ficou em zero.

Neste módulo estudam-se as funções linear, identidade e constante. É importante compará-las com a função afim nos aspectos algébrico e gráfico.

Para ir além

Acesse o software Equation Grapher, disponível em:

<http://ultradownloads.com.br/download/Equation-Grapher/>

Então, explore propriedades das funções apresentadas no material. É possível inserir até 12 funções num mesmo gráfico, o que pode facilitar o estudo dos coeficientes e sinais das funções.

Outro software para resolução de problemas e visualização de dados pode ser acessado no link:

<http://www.wolframalpha.com/>

No *link* a seguir encontre uma proposta de modelagem matemática para o estudo de funções. O estudo é direcionado para professores do 1º ano do Ensino Médio e pode enriquecer sua prática pedagógica:

<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Soraya.pdf>

Exercícios propostos

7. D

Do gráfico do Sr. Luiz o coeficiente a é calculado por:

$\frac{100-80}{25-15} = \frac{20}{10} = 2$. Ou seja, 2 reais/metro. Logo, a alternativa C é incorreta.

Para determinar a parte fixa (coeficiente b) cobrada pelo Sr. Luiz, podemos utilizar um ponto de coordenadas conhecidas de seu gráfico e substituí-lo na expressão algébrica que a representa. Utilizando o ponto (15, 80), temos:

$2 \cdot 15 + b = 80 \rightarrow 30 + b = 80 \rightarrow b = 50$.

Portanto, a parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é de R$ 50,00. Logo, alternativa A é incorreta.

Para 20 metros de fio:

- O preço do Sr. Luiz é $2 \cdot 20 - 50 = 40 + 50 = 90 \rightarrow$ R$ 90,00.
- O preço do Sr. José é $4{,}5 \cdot 20 = 90 \rightarrow$ R$ 90,00.

8. A

Temos que, se cada carro parte com um intervalo de 15 minutos, e que há 24 intervalos entre o primeiro e vigésimo quinto carro, então, até que o último carro parta, temos um tempo de:

$15 \cdot 24 = 360 \rightarrow 360$ minutos = 6 horas.

Se o primeiro carro partiu às 7 horas, o último carro saiu às 13h (7h + 6h = 13 h).

9. E

Analisando o problema, temos uma função afim $y = a \cdot x + b$, com $a = 750$ e $b = 360$; x e y indicam, respectivamente, a quantidade de dias após o derramamento e a taxa de concentração de hidrocarbonetos.

Assim, 27 dias após o derramamento, temos:

$750 \cdot 27 + 360 = 20\,250 + 360 = 20\,610 \rightarrow$
$\rightarrow 20\,610$ ppm.

10. O gráfico da função g passa pela origem. Logo, g é uma função linear cujo formato algébrico é $g(x) = ax$. Como A pertence à reta que representa a função f, temos: $y = -2 + 3 \rightarrow y = 1$. Logo, A (2,1). Calculando o coeficiente a, já que A também pertence à reta que representa a função b, temos: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$.

Portanto, $g(x) = \frac{1}{2}x$.

11. E

Sendo f_A e f_B os preços, respectivamente, dos planos A e B para t minutos de conexão mensal, temos: $f_A(t) = 0{,}05 \cdot t + 15$ e $f_B = 0{,}02 \cdot t + 40$.

Analisando as alternativas:

a) Falsa, pois existe t de modo que $f_A(t) = f_B(t) \rightarrow$
$\rightarrow 0{,}03t = 25 \rightarrow t = \frac{2500}{3}$.

Ou seja, para $\frac{2500}{3}$ minutos de conexão, a escolha do plano é indiferente.

b) Falsa, pois $f_A(60 \cdot 30) = 0{,}05 \cdot 60 \cdot 30 + 15 =$
$= 105$ e $f_B(60 \cdot 30) = 0{,}02 \cdot 60 \cdot 30 + 40 = 76$.

Logo, mais vantajoso é o B.

c) Falsa (vide justificativa do item a).

d) Falsa, pois $f_A(900) = 0{,}05 \cdot 900 + 15 = 60$ e $f_B(900) = 0{,}02 \cdot 900 + 40 = 58$. Logo, mais vantajoso é o B.

e) Verdadeira (vide justificativa do item anterior).

12. A

Como a porcentagem varia linearmente de acordo com o tempo, o modelo matemático que descreve a situação é $y = a \cdot x + b$. Sendo a porcentagem (y); o tempo (x) e a, b coeficientes reais, do enunciado, temos:

$0{,}6 = a \cdot 0 + b \rightarrow b = 0{,}6$ e $0{,}85 = a \cdot 10 + 0{,}6 \rightarrow$
$\rightarrow 10 \cdot a = 0{,}25 \rightarrow a = 0{,}025$

Portanto, $y = 0{,}95 \rightarrow 0{,}025x + 0{,}6 = 0{,}95 \rightarrow$

$\rightarrow 0{,}025x = 0{,}35 \rightarrow x = \frac{350}{25} \rightarrow x = 14.$

Então, a porcentagem é de 95%, após 14 anos contados do atual ano. Ou seja, 2018 + + 14 = 2032.

13. D

A máquina sofreu uma desvalorização de $\frac{8\,000}{4} =$ $= 2\,000 \rightarrow$ R\$ 2.000,00 ao ano. Portanto, após 8 anos de uso, temos uma desvalorização de R\$ 16 000,00.

Assim, o preço da máquina ficará R\$ 40.000 − R\$ 16.000 = R\$ 24.000,00

14. D

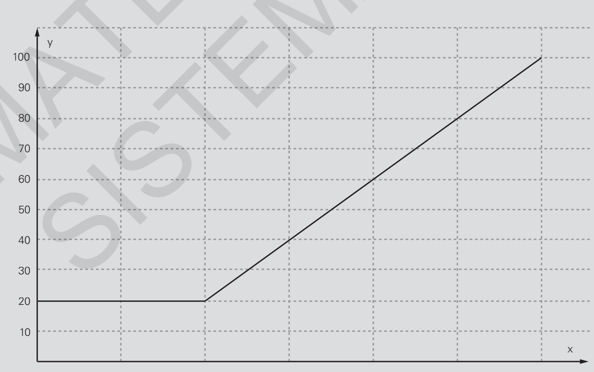
Seja C(x) o custo, em reais, para uma tiragem de x exemplares da revista, temos:
$g(x) = 4 \cdot x + 100\,000.$

Para o custo de R\$ 200 000, temos: $200\,000 = 4 \cdot x + 100\,000 \rightarrow x = 25\,000.$

O custo por exemplar, em reais, para x exemplares é $\frac{C(x)}{x}$. Então, para 5 000 exemplares o custo é: $\frac{4 \cdot 5000 + 100\,000}{5\,000} = \frac{120\,000}{5\,000} = 24 \rightarrow$ $\rightarrow$ R\$ 24,00.

15. a) A função C(x) é dada por:

$C(x) = 20$ se $0 \leqslant x \leqslant 10$ e $C(x) = 20 + 4x - 40 \rightarrow$
$\rightarrow C(x) = 4x - 20$ se $x > 10$. Então:



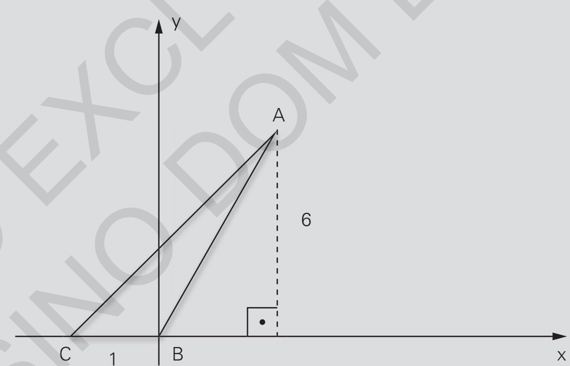
b) Para $x = 4\ m^3$, temos $\frac{C(4)}{4} = \frac{20}{4} = 5 \rightarrow 5$ reais por metro cúbico.

c) Para $x = 25\ m^3$ o preço unitário é dado por $\frac{C(25)}{25} = \frac{4 \cdot 25 - 20}{25} = \frac{80}{25} = 3{,}2 \rightarrow 3{,}20$ reais por metro cúbico.

16. A partir do primeiro dia ($t \geqslant 1$), e sendo n_1 e n_2 o número de pacientes, respectivamente, atendidos no ambulatório e o de internados em área restrita, temos que $n_1 = t + 16$ e $n_2 = 2t + 5$. A condição $n_1 = n_2$ responde à questão. Então: $t + 16 = 2t + 5 \rightarrow t = 11$. Portanto, no décimo primeiro dia.

17. D

Como A pertence às funções f e g, temos que x_A é a solução de $f(x) = g(x)$. Então: $3x = 2x + 2 \rightarrow x = 2$. Portanto, $x_A = 2$. Substituindo o valor do x_A em uma das funções, obtém-se $y_A = 6$.
x_B e x_C são as raízes, respectivamente, das funções f e g. Portanto, $x_B = 0$ e $x_C = -1$.



Representando o triângulo ABC no plano cartesiano, a área do triângulo ABC é $\frac{1 \cdot 6}{2} = 3.$

Estudo para o Enem

18. A

Seja P a porcentagem do nível de água no reservatório em relação à sua capacidade e t o período de monitoramento, em meses, temos que $P = a \cdot t + b$, sendo $a = \frac{10\% - 30\%}{6 - 1} = \frac{-20\%}{5} =$ $= -4\%$. Ou seja, há perda constante de 4% da capacidade do reservatório a cada mês. Assim, a partir do sexto mês de monitoramento, o reservatório irá zerar se houver perda de 10% da sua capacidade. Então: $\frac{-10\%}{-4\%} = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5$ meses.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. A

Seja x o valor cobrado pelos dois dias de estacionamento, então $10 + x \leqslant 80 \rightarrow x \leqslant 70$.

Portanto, o valor cobrado por dia de estacionamento deverá ser $\frac{70}{2} = 35 \rightarrow$ R\$ 35,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. A

Plano A: $6 \cdot 500 + 4 \cdot 650 = 3000 + 2600 = 5600$.
Plano B: $6 \cdot 200 + 6 \cdot 650 = 1200 + 3900 = 5100$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

7 FUNÇÃO QUADRÁTICA, SEUS MÁXIMOS E MÍNIMOS

Comentário sobre o módulo

Explore com os alunos os conceitos de função quadrática e como podemos modelar um problema real utilizando-a. Certifique-se do entendimento da definição de uma função quadrática e seus componentes, principalmente a exigência de que o coeficiente a deve ser diferente de zero, para que o aluno perceba que, se a = 0, teremos uma função afim.

O trabalho com o conceito de raiz da função auxilia no entendimento e na construção do gráfico da função. Enfatize que determinar a raiz de uma função f significa encontrar o número real x tal que f(x) = 0.

A busca pelos pontos de máximo ou de mínimo da função quadrática tem muitas aplicações. Utilize os exemplos apresentados no módulo para facilitar a compreensão dos alunos.

Para ir além

No *link* a seguir estão disponíveis conceitos e exercícios de funções quadráticas:

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/algebra/quadratics>.

O site pode ajudar a visualização e resolução de funções.

<https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/mathematical-functions/>

Exercícios propostos

7. C

O ponto A de abscissa 8, ou seja, $x_A = 8$, pertence à parábola. Então:

$y_A = f(8) = 8^2 - 20 \cdot 8 + 98 = 64 - 160 + 98 = 2$

O ponto B de ordenada 7. Ou seja, $y_B = 7$, pertence à parábola. Então:

$7 = x^2 - 20x + 98 \rightarrow x^2 - 20x + 91 = 0.$

Resolvendo a equação do 2° grau pela soma e pelo produto: $x_1 = 7$ e $x_2 = 13$. Pelo gráfico, x_B é o menor valor entre x_1 e x_2, ou seja, $x_B = 7$.

Então, temos que a área do trapézio é dada por

$$A = \frac{(x_A + x_B)\cdot(y_A + y_B)}{2} = \frac{(8+7)\cdot(7-2)}{2} = \frac{15 \cdot 5}{2} = $$
$$= \frac{75}{2} = 37{,}5 \rightarrow 37{,}5 \text{ unidades de área.}$$

8. A representação algébrica da função quadrática é $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Como os pontos A, B e C pertencem à parábola:

$A(0,1) \rightarrow 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 1$

$B(-1, -2) \rightarrow -2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \rightarrow$
$\rightarrow -2 = a - b + c = -3$ (I)

$C(-2, -7) \rightarrow -7 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \rightarrow$
$\rightarrow -7 = 4a - 2b + 1 \rightarrow 4a - 2b = -8 \rightarrow$
$\rightarrow 2a - b = -4$ (II)

Fazendo (II) − (I): a = −1. Substituindo o valor de a em (I): −1 −b = −3 → b = 2.

Portanto, $y = -x^2 + 2x + 1$.

9. B

Há encontro dos gráficos se f(x) = g(x). Então: $x^2 + 1 = mx \rightarrow x^2 - mx + 1 = 0$.

Como há um único ponto de encontro, a equação do 2° grau tem uma única solução. Ou seja, $\Delta = 0$. Logo, $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow m^2 - 4 = 0 \rightarrow m = -2$ ou $m = 2$.

10. B

Do enunciado, temos:

$g(1) = a(1)^2 + b(1) + 3 = 9 \rightarrow a + b + 3 = 9 \rightarrow$
$\rightarrow a + b = 6$ (I) e

$g(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + 3 = 1 \rightarrow$
$\rightarrow a - b + 3 = 1 \rightarrow a - b = -2$ (II)

Somando (I) + (II): 2a = 4 → a = 2. Substituindo o valor de a em (I):

b = 4. Logo, a − b = 2 − 4 = −2.

11. B

A função que representa a parábola tem uma única raiz. Logo, a equação $0 = x^2 + kx + (8 - k)$ tem uma única raiz, ou seja, $\Delta = 0$. Então:

$\Delta = 0 \rightarrow k^2 - 4 \cdot (8 - k) = 0 \rightarrow k^2 + 4k - 32 = 0$

Resolvendo pela soma (s = −4) e pelo produto (p = −32), temos: k = −8 ou k = 4.

Para $k = -8 \rightarrow y = x^2 - 8x + 16 \rightarrow y = (x - 4)^2$. A raiz dessa função é x = 4.

Para $k = 4 \rightarrow y = x^2 + 4x + 4 \rightarrow (x + 2)^2$. A raiz dessa função é x = −2.

Como a única raiz é negativa, $y = x^2 + 4x + 4$. O valor de y = m ocorre para x = 0. Então y = $= m = 0^2 + 4 \cdot 0 + 4 = 4$.

12. C

Do enunciado, temos: $2 = 1^2 + b \rightarrow 1 + c \rightarrow b +$
$+ c = 1$ (I)

$$x_v = \frac{-b}{2} = 2 \rightarrow -b = 4 \rightarrow b = -4.$$

Retornando o valor de b em (I): c = 5. Substituindo o valor da abscissa do vértice na função que representa a parábola:

$2^2 - 4 \times 2 + 5 = y_v = n = 4 - 8 + 5 = 1$

13. D

O maior valor que a dívida atingirá, em bilhões de reais, é y_v. O ano em que isso ocorrerá é x_v. Assim:

$$x_v = \frac{-18}{2\cdot\frac{(-9)}{2}} = 2$$

Isso corresponde a 2 016 + 2 = 2 018 e $y_v = D(x) = -\frac{9}{2}(2)^2 + 18 \cdot (2) + 30 \to y_v = 48$

14. D

O maior lucro possível será obtido para x sendo x_v. Como −10 e 50 são raízes (x_1 e x_2) de L, $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10+50}{2} = 20.$

15. B

Calculando as raízes da função f, $-x^2 - x + 2 = 0$.

Portanto, $x = 1$ e $x = -2$.

Logo, $A(-2,0)$ e $E(1,0)$.

Calculando as coordenadas do vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{-2} = -\frac{1}{2}$ e $y_v = \frac{-(1-4\cdot(-1)\cdot 2)}{4\cdot(-1)} = \frac{9}{4}$.

Logo, $C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

Dividindo o polígono ABCDE em duas partes iguais, temos $A_{ABCDE} = 2 \cdot A_{CDEF}$ sendo que o F é o ponto de intersecção entre o eixo de simetria da parábola e o eixo x.

$$A_{CDEF} = A_{CDOF(\text{trapézio retângulo})} + A_{OED(\text{triângulo retângulo})} =$$

$$= \frac{\left(2+\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2} + \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{17}{4}\cdot\frac{1}{4} + 1 = \frac{17}{16} + \frac{16}{16} = \frac{33}{16}$$

$$A_{ABCDE} = 2\frac{33}{16} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$$

16. Do enunciado, tem-se $y = 12 - 2x$, sendo $P = x \cdot y$. Então:

$P(x) = x \cdot (12 - 2x) \to P(x) = -2x^2 + 12x$.

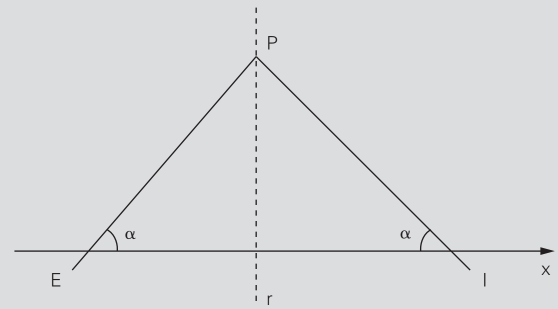
O produto máximo é a ordenada do vértice da parábola y_v, que representa a função P. Logo,

$y_v = P(x_v) = P\left(\frac{-12}{-4}\right) = P(3) = -2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 =$

$= -18 + + 36 = 18$.

17. B

Do enunciado, conclui-se a figura:



Como o triângulo PEI é isósceles, a reta tracejada (r) que passa por P é perpendicular ao eixo x. Sendo P um ponto da parábola que representa o gráfico de f, temos que r é o eixo de simetria dessa parábola. Portanto, P é vértice. Então: $\alpha =$ $= \frac{-9}{2\cdot(-1)} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

Estudo para o Enem

18. C

Para um desconto de x centavos, o preço do álcool (p), em reais, será $p = 3{,}15 - \frac{x}{100}$, e a quantidade vendida $q = 10000 + 100x$. O valor arrecadado (V) é dado por $V = p \cdot q$. Assim:

$V = \left(3{,}15 - \frac{x}{100}\right) \cdot (10\,000 + 100x) = 31\,500 +$ $+ 315x - x^2 = 31\,500 - 215 - x^2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. D

Conforme o enunciado, o maior número possível de bactérias ocorre na temperatura máxima da estufa, que é o y_v da parábola, que representa a função T. Assim:

$y_v = T(x_v) = T\left(\frac{-22}{-2}\right) = T(11) = -121 + 22 \cdot$ $\cdot 11 - 85 = -121 + 2 \cdot 121 - 85 = 36 \to 36°C$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

20. D

A temperatura máxima é o y_v da parábola descrita por f(x). Logo:

$$y_v = f(x_v) = f\left(\frac{-2}{2\left(\frac{-1}{12}\right)}\right) = f\left(\frac{-2}{-\frac{1}{6}}\right) = f(12) = \frac{-144}{12} +$$

$$+ 24 + 10 = 22 \rightarrow 22°C$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

8 INEQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU, PRODUTO E QUOCIENTE

Comentário sobre o módulo

É de vital importância ressaltar que o estudo sobre inequações (1º e 2º graus) está fundamentado na análise dos sinais da respectiva função. Não menos importante é associar a multiplicação ou divisão da inequação por um número negativo à alteração que esse fato acarreta tanto no aspecto algébrico quanto na representação gráfica.

As inequações são, em geral, um obstáculo aos alunos. Ressalte, fortemente, que resolver inequações é basicamente analisar sinais em torno das raízes e que o quadro é uma forma compacta dessa análise.

Para ir além

O *site* a seguir possibilita construir gráficos de equações e inequações. O GrafiEq 2.13 não é um *software* livre, mas existe uma versão para teste:

<http://www.peda.com/download/>.

Leia o artigo disponível no link a seguir para enriquecer suas aulas:

<http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/10-03.pdf>.

Exercícios propostos

7. D

a) f é crescente no intervalo [a, 0].

Falsa, pois no intervalo [a, c] f é crescente; no intervalo, [c, 0] é decrescente.

b) $f(x) \leqslant f(e)$ para todo x no intervalo [d, b].

Falsa, pois para x no intervalo [d, b] $f(x) \leqslant f(e)$.

c) $f(x) \leqslant 0$ para todo x no intervalo [c, 0].

Falsa, pois para x no intervalo [c, 0] temos $f(x) > 0$.

d) A função f é decrescente no intervalo [c, e].

Verdadeira, pois para x_1 e x_2 no intervalo [c, e] se $x_1 > x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

e) Se $x_1 \in [a, c]$ e $x_2 \in [d, e]$. Então, $f(x_1) < f(x_2)$.

Falsa, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, pois $f(x_1), \geqslant 0$ e $f(x_2) \leqslant 0$.

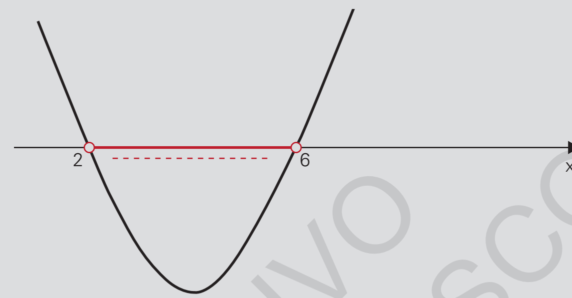
8. C

Temos que $x^2 - 6x < 2x - 12$.

$x^2 - 8x + 12 < 0$

As raízes da função $y = x^2 - 8x + 12$ são $x = - 2$ e $x = - 6$.

Esboçando o gráfico da função em torno das raízes, vem:



Logo, $y < 0$ no intervalo $2 < x < 6$. Assim, o produto dos valores inteiros no intervalo é de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

9. D

O valor da ordenada do vértice é dado por

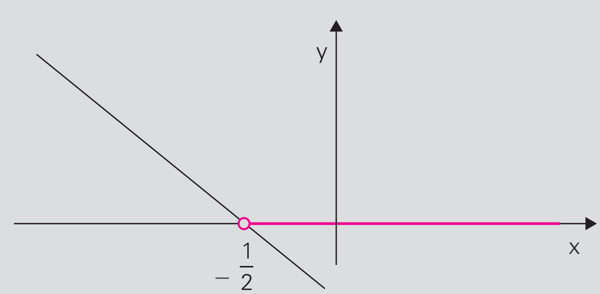
$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4))}{4 \cdot (-2)} = -2{,}875$$

A parábola tem concavidade para baixo, pois $a < 0$.

Portanto, o conjunto imagem é dado por $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -2{,}875\}$.

10. A

Seja $y = ax + b$. Esboçando seu gráfico, conforme inequação e respectiva solução do enunciado, temos:

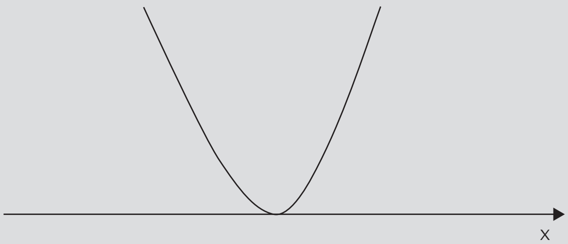


Como a reta é decrescente, tem-se $a < 0$ e, na sua intersecção com eixo y ($x = 0$), tem-se

$y = b < 0$.

11. C

Seja a função $y = 2x^2 - 20x + 2m$. Temos $y > 0$ para todo x real no esboço do gráfico da função a seguir.



Nesse gráfico, não há raízes reais. Portanto: $\Delta < 0 \to$ $\to 400 - 4 \cdot 2 \cdot 2m < 0 \to 400 < 16m \to m > 25$.

12. E

Analisando o sinal da expressão do radicando em torno do eixo x, concluímos que ela é positiva para todo x real. Logo, o denominador é positivo. Como o quociente e o denominador são positivos, concluímos que o numerador é positivo, ou seja, $(5 - x^2) \cdot (x^2 - 2) > 0$. Fazendo o quadro de sinais para essa inequação produto, obtemos:

$S = \{x \in \mathbb{R};\ -\sqrt{5} < x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x < \sqrt{5}\}$

Como $\sqrt{2} \cong 1,41$ e $\sqrt{5} \cong 2,23$, portanto as únicas soluções inteiras são $x = -2$ e $x = 2$.

13. B

O domínio da função é a solução da seguinte inequação: $\frac{9-x^2}{x^2+x-2} \geq 0$.

Ao final do quadro de sinais da inequação quociente $\frac{9-x^2}{x^2+x-2} \geq 0$, temos:

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -2 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$.

14. $\frac{x \cdot a}{x+12} > \frac{(x+1)\cdot a}{24} \to \frac{x}{x+12} - \frac{(x+1)}{24} > 0 \to$

$\to \frac{-x^2+11x-12}{24(x+12)} > 0.$

x é positivo, então o denominador é positivo. Sendo o quociente e o denominador positivos, concluímos que o numerador é positivo. Ou seja, $-x^2 + 11x -$ $- 12 > 0$. Analisando o sinal de $y = -x^2 + 11x - 12$ em torno do eixo x, temos: $S = \{x \in \mathbb{R}\ 1 < x < 12\}$. Como $2 \leqslant x \leqslant 13$, temos: $2 \leqslant x < 12$.

15. B

Temos que:

$x - 1 > (x^2 - 2x + 2) - 1 \to -x^2 + 3x - 2 > 0 \to$ $\to x^2 - 3x + 2 < 0$

Raízes da função: $x = 1$ e $x = 2$. Então, temos que a solução da inequação é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$.

16. $\sqrt{x^2-4x+5} > \frac{1}{2} \to x^2 - 4x + 5 > \frac{1}{4} \to$

$\to 4x^2 - 16x + 19 > 0$

Analisando os sinais de $y = 4x^2 - 16x + 19$ em torno do eixo x, temos: $S = \mathbb{R}$.

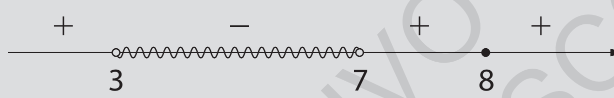
17. B

Sendo $5x - 40 = 0 \to x = 8$ satisfaz.

Como $(5x - 40)^2 \geqslant 0$, pois tendo x real, $x^2 - 10x + + 21 < 0$.

$x^2 - 10x + 12 < 0 \to x = 3$ ou $x = 7$

Analisando o quadro de sinais da inequação quociente $f(x) = \frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21}$, temos:



Logo, $x^2 - 10x + 21 < 0 \to 3 < x < 7$.

Como x é inteiro, pode ser 4, 5 ou 6.

Portanto, a soma (S) pedida será dada por:

$S = 4 + 5 + 6 + 8 = 23$.

Estudo para o Enem

18. A

Temos que a arrecadação é dada por $A(p) = (400 - 100p) \cdot p$.

Para que a arrecadação seja de R$ 300,00, devemos ter

$(400 - 100p) \cdot p = 300 \to 4p^2 - p^2 = 3 \to$ $\to p^2 - 4p + 3 = 0$.

Então, $p = 1$ ou $p = 3$.

Para $p = 1$, sabe-se pelo enunciado que a quantidade vendida de pães é 300. Para $p = 3$, a quantidade vendida de pães é $400 - 100 \cdot 3 = 100$.

Logo, o preço que mantém a arrecadação e maximiza a quantidade vendida é R$1,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. D

De acordo com o enunciado, $E(p) > 1$:

$\frac{-p^2-2p+1}{-4p+1} > 1$

$\frac{-p^2-2p+1}{-4p+1} - 1 > 0$

$\frac{-p^2-2p+1+4p-1}{-4p+1} > 0$

$\frac{-p^2+2p}{-4p+1} > 0$

Fazendo o quadro de sinais da inequação quociente, temos:

$0 < p < \frac{1}{4}$ ou $p > 2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. D

Como Antônio aplicou R$ 2.500,00 inicialmente, após um ano obteve R$ 5.000,00. Portanto, temos que a razão é de $q = \frac{5000}{2500} \rightarrow q = 2$. Assim,

$40\,000 < 2\,500 \cdot 2^n$

$16 < 2^n$

$2^4 < 2^n$

Portanto, $4 < n$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

9 FUNÇÃO COMPOSTA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, abordamos as funções compostas e sua aplicação para resolver situações-problema. Uma delas serve de mote para a apresentação do conteúdo, pois possibilita aos alunos identificarem a necessidade de ferramentas matemáticas mais sofisticadas a fim de resolvê-las.

A série de exercícios difere em grau de complexidade e foram escolhidos dentro de um contexto e conforme as habilidades da matriz de referência do Enem. Os exercícios de aprofundamento são considerados mais difíceis.

Exercícios propostos

7. A

Observando os pontos de $x = 0$ e $x = 2$, temos que $f(2) = 0$ e $g(0) = -2$. Logo, $g(f(2)) = g(0) =$ $= -2$ e $f(g(0)) = f(-2) = 0$. Portanto, $g(f(2)) +$ $+ f(g(0)) = -2 + 0 = -2$.

8. $f(g(x)) = 3^{x^3} = (3^x)^3 = g(f(x))$

$3^{x^3} = 3^{3x} \leftrightarrow x^3 = 3x \rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0$

$x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Portanto, há 3 soluções para a equação.

9. 07 (01 + 02 + 04)

01) A função g é injetora.

Verdadeiro, pois para todo $a \neq b$, temos que $g(a) \neq g(b)$. Logo, **g** é injetora.

02) Para todo x real, $(g \circ f)(x) \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Verdadeiro, pois o valor mínimo de $(g \circ f)(x)$ é dado quando $f(x)$ for mínimo.

Logo, $f(x_v) = \dfrac{-[1^2 - 4 \cdot (-1)]}{4} = \dfrac{-5}{4}$.

Portanto, o valor mínimo de $(g \circ f)(x)$ será $g(f(x_v)) =$ $= 2^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Assim $(g \circ f)(x) \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

04) $(f \circ g)(x) = 2^{2x} + 2^x - 1$, para todo x real. Verdadeiro, pois $f(g(x)) = (2^x)^2 + 2^x - 1 = 2^{2x} +$ $+ 2^x - 1$.

08) $f(-1) = -3$.

Falso, pois $f(-1) = 1 - 1 - 1 = -1$.

16) $g(-2) = -4$.

Falso, pois $g(-2) = 4 - 2 - 1 = 1$.

10. a) Temos que $f(x) \cdot g(x) = (ax + 3a) \cdot (9 - 2x) > 0$. Então:

$-3 \qquad \frac{9}{2}$

f(x)	−	+	+
g(x)	+	+	−
f(x)g(x)	+	−	−

Assim, $f(x)g(x) > 0$ se, e somente se, $-3 < x < \dfrac{9}{2}$.

Logo, as soluções inteiras da inequação são −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, totalizando 7 soluções.

b) $f(g(x)) = a(9 - 2x) + 3a = 9a - 2ax + 3a = 12a - 2ax$

$g(f(x)) = 9 - 2(ax + 3a) = 9 - 2ax - 6a$

Então, $12a - 2ax = 9 - 2ax - 6a$.

$12a = 9 - 6a$

$18a = 9$

$a = \dfrac{1}{2}$.

11. C

a) $\forall x \in [0, 4]$, $g(x) - f(x) > 0$. Falsa.
Ou seja, $\forall x \in [0, 4]$, $g(x) > f(x)$.
O que não se verifica para $x \in [3, 4]$.

b) $f(g(0)) - g(f(0)) > 0$. Falsa.
$f(g(0)) = f(2) = 2$
$g(f(0)) = g(0) = 2$

c) $\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} \leqslant 0$, $\forall x \in]-\infty, 0[\cup [4, 9]$. Verdadeira.

$\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ se $f(x) \neq 0$.

$\dfrac{g(x)f(x)}{[f(x)]^2} \leqslant 0$ (sempre que as funções têm sinais contrários e **f** não nula)

d) Como $\forall x \in [0, 3]$, temos que $g(x) \in [2, 3]$.
Falsa. Para $x \in [0, 3]$, temos $g(x) \in [2, 4]$.

12. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^{\alpha x}) = \sqrt{e^{\alpha x}} = e^{\frac{\alpha x}{2}}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = e^{\alpha\sqrt{x}}$

Portanto, para que $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$, devemos ter

$e^{\frac{\alpha x}{2}} > e^{\alpha\sqrt{x}} \rightarrow \dfrac{\alpha x}{2} > \alpha\sqrt{x} \rightarrow x > 2\sqrt{x} \rightarrow x^2 > 4x \rightarrow$

$\rightarrow x(x - 4) > 0$

$x > 0$ e $x > 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} = \{x > 4\}$.

13. C

I. f é ímpar.

Falso, pois f é par.

II. f é injetora.

Falso. Para $a \neq b$, $\exists f(a) = f(b)$. Logo, f não é injetora.

III. A lei matemática de f é $f(x) = ||x| - 1|$.

Verdadeiro. Podemos verificar analisando o gráfico e testando alguns de seus pontos $f(1) = ||1| - 1| = 0$, $f(-1) = ||-1| - 1| = 0$, $f(0) = ||0| - 1| = 1$.

IV. f é crescente se, e só se, $x > 1$.

Falso, pois f também é crescente no intervalo $[-1, 0]$.

V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

Verdadeiro, pois $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(0) = f(f(1)) = (f \circ f)(1)$.

14. A

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = x - 3$

Ou seja, $a^2 = 1$ e $ab + b = -3 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = 1$ ou $a = -1 \rightarrow b + ab = -3$

Se $a = -1$, então $b - b = -3$, (absurdo). Logo, $a = 1$ e $b + b = -3 \rightarrow b = \frac{-3}{2}$.

15. Calculando a composta, temos:

$f \circ g \circ h(6) = f(g(h(6))) = f(g(2)) = f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= 4 \circ \frac{1}{4} + 5 = 6.$

16. C

a) $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$f(g(x)) = 2(2x^2 - 2x + 1) + 3 = 4x^2 - 4x + 5$

$g(f(x)) = 2(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 = 2(4x^2 + 12x + 9) - 4x - 6 + 1 = 8x^2 + 20x + 13$

$f(g(x)) \neq g(f(x))$.

b) O gráfico de $f(g(x))$ não intercepta o gráfico de $g(f(x))$.

Fazendo $f(g(x)) = g(f(x))$, temos:

$4x^2 - 4x + 5 = 8x^2 + 20x + 13$

$4x^2 + 24x + 8 = 0$

$x^2 + 6x + 2 = 0$

Como a equação tem solução real, o gráfico de $f(g(x))$ intercepta o gráfico de $g(f(x))$.

c) $g(f(x)) = 8x^2 + 20x + 13$.

$g(f(x)) = 2(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 1 = 2(4x^2 + 12x + 9) - 4x - 6 + 1 = 8x^2 + 20x + 13$.

d) $f(g(x)) = 2x^2 + 4$.

$f(g(x)) = 2(2x^2 - 2x + 1) + 3 = 4x^2 - 4x + 5$.

e) O domínio da função $h(x) = f(g(x))$ é o conjunto $(0, \infty)$.

O domínio da função h(x) é o conjunto dos reais.

17. C

Desde que $h(0) = 2^1 = 2$, temos $h(2) = \sqrt{2-1} = 1$ e, portanto, vem $h(1) = 2^{1+1} = 4$

Portanto, temos que:

$h\big(h\big(h(0)\big)\big) = h(h(2)) = h(1) = 4.$

Estudo para o Enem

18. B

O número de pessoas é igual a **p**. Então, o número de copinhos utilizados na empresa é $y(p) = 15p$. Assim, como cada copinho custa R$ 0,05, o valor gasto é $v(y) = 0{,}05y$.

Portanto, o valor gasto na empresa em função do número de pessoas é $v(y(p)) = v(15p) = 0{,}05 \cdot 15p = 0{,}75p$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. C

Temos que $c(v(t)) = 0{,}5(0{,}2t^2 + 5) + 2$.

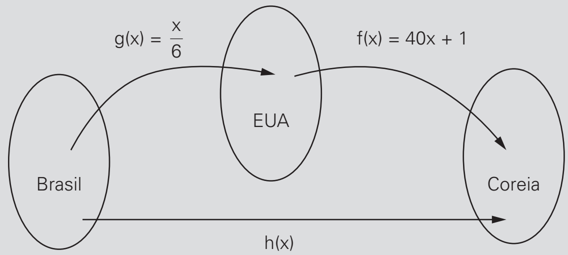
Então, $c(v(t)) = 0{,}01t^2 + 4{,}5 = 0{,}01t^2 + \frac{9}{2}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Fazendo a composta, temos:



Assim,

$h(x) = f[g(x)]$

$h(x) = 40 \cdot \frac{x}{6} + 1.$

$(x) = \frac{20}{3}x + 1.$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

10 FUNÇÃO MODULAR

Comentários sobre o módulo

O ensino de módulo ou valor absoluto tem se apresentado desafiador para professores do Ensino Fundamental e, em especial, do Ensino Médio, a começar pela definição dos conceitos a ele relacionados. Tal fato pode se apresentar como entrave para o aprendizado de diversos saberes em Matemática, caso o professor não estabeleça estratégias para dinamizar e investigar com eficácia cada saber envolvido no estudo de valor absoluto de um número e suas diversas aplicações em funções e geometria analítica.

Apresentamos neste módulo situações-problema que vão das mais simples às mais complexas. Além disso, há quatro exercícios contextualizados, similares aos propostos no Enem.

Exercícios propostos

7. B

I. A solução da desigualdade $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$. Verdadeiro. Temos que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \geq 0$. Assim ou $x - 1 \leq 0 \rightarrow x \geq 1$ e $(x - 1)(x - 2) \geq 0$ ou $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$ e $(x - 1)(x - 2) \geq 0$. Assim, a solução da inequação $(x - 1)(x - 2) \geq 0$ é o conjunto $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

II. Se $|x + 2| < 2$, então $x \in\ ]-3, -1[$. Falso. Se $x + 2 \geq 0$, $x + 2 < 2$, logo $x < 0$. Se $x + 2 < 0$, $-x - 2 < 2$, logo $x > -4$, $x \in\ ]-4, 0[$.

8. Calculando as raízes para $x^2 + 2x - 15 = 0$, temos $x = 3$ ou $x = -5$. Para $|x| = 3$, podemos ter $x = -3$ ou $x = 3$. Ambas satisfazem a equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$. Para $|x| = 5$, podemos ter $x = -5$ ou $x = 5$. Porém, $x = 5$ não satisfaz $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$. Assim, as soluções da equação são $\{-3, 3\}$.

9. C

Temos que

$3x + 10 = 5x + 2$, ou seja, $2x = 8 \rightarrow x_1 = 4$ ou $x_2 = 4$

$3x + 10 = -(5x + 2)$, ou seja, $8x = -12 \rightarrow x_1 = \frac{-3}{2}$ ou $x_2 = \frac{-3}{2}$

Assim, $|x_1 - x_2| = \left|4 - \frac{(-3)}{2}\right| = \left|\frac{8 + 3}{2}\right| = \frac{11}{2}$.

10. Temos que, se $|4x - 6| - 2 > 0$, então:

- se $4x - 6 \geq 0$, então, $4x - 6 - 2 < 3 \rightarrow \rightarrow 4x < 11 \rightarrow x < \frac{11}{4}$
- se $4x - 6 < 0$, então $-4x + 6 - 2 < 3 \rightarrow \rightarrow -4x < \frac{-1}{4} \rightarrow x > \frac{1}{4}$

Se $|4x - 6| - 2 < 0$, temos que:

- se $4x - 6 \geq 0$, então $-(4x - 6 - 2) < 3 \rightarrow \rightarrow 4x > 5 \rightarrow x > \frac{5}{4}$
- se $4x - 6 < 0$, então $-(-4x + 6 - 2) < 3 \rightarrow \rightarrow 4x < 7 \rightarrow x < \frac{7}{4}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}\right\}$.

11. E

Fazendo $p(x) = 0$, a soma das raízes é dada por $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = b$, e o produto é dado por $x_1 x_2 = \frac{-c}{a} = 441 = 9 \cdot 49 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$.

Podemos concluir que o número deve ser divisível por essas raízes. Assim, deve ser divisível por $3 \cdot 7 = 21$. Entre os números das alternativas, o único que satisfaz essa condição é 84.

12. Temos que $3x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(3x + 8) = 0$. Ou seja, o gráfico é uma parábola com concavidade para cima, cujas raízes são $\frac{-8}{3}$ e 0.

Logo, temos que, para $\frac{-8}{3} \leq x \leq 0 \rightarrow 0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2 \leftrightarrow 0 \leq x^2 - (-3x^2 - 8x) \leq 2 \leftrightarrow 0 \leq \leq 4x^2 + 8x \leq 2 \leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0$ e

$2x^2 + 4x - 1 \leq 0 \leftrightarrow x \leq -2$ ou $x \geq 0$

Então, $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Portanto, $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq -2 \text{ ou } x = 0\right\}$.

Para $x \leq \frac{-8}{3}$ ou $x \geq 0$:

$0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2 \leftrightarrow 0 \leq x^2 - (-3x^2 - 8x) \leq 2 \leftrightarrow \leftrightarrow 0 \leq -2x^2 - 8x \leq 2 \leftrightarrow -2x^2 - 8x \geq 0 \leftrightarrow x^2 + + 4x \leq 0$ e

$x^2 + 4x + 1 \geq 1 \leftrightarrow -4 \leq x \leq 0$ e $x \leq 2 - \sqrt{3}$ ou $x \geq -2 + \sqrt{3}$

Assim, $S_2 = \left\{\begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -2 - \sqrt{3} \\ \text{ou} \\ -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq -2 \text{ ou } x = 0 \end{array}\right\}$.

Portanto, nesse conjunto, existem os inteiros -4, -2 e 0. Então, há 3 soluções.

13. 03 (01 + 02)

01) $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Verdadeiro, pois $3^{-x} > 0$, para $x > 0$ e $3^{-x} > 0$, para $x < 0$.

02) $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Verdadeiro, pois $g\left(\frac{3}{2}\right) = \left|\frac{3}{2} - \frac{9}{4}\right| = \left|\frac{6-9}{4}\right| = \left|\frac{-3}{4}\right| = $ $= \frac{3}{4}$.

04) f é sobrejetora.

Falso. Existe um elemento **y** na imagem de **f** tal que não existe **x** no domínio de **f** tal que $f(x) = y$.

08) $g(f(0)) = f((g(0))$.

Falso, pois $g(f(0)) = g(1) = 0$ e $f(g(0)) = f(0) = 1$.

16) O gráfico da função **g** é uma parábola.

Falso. Como a equação $x^2 - x = 0$ tem 2 raízes distintas, o gráfico é uma parábola com valores negativos. Assim, quando aplicado o módulo, a parte negativa dessa parábola será refletida em relação ao eixo **y**, descaracterizando-a.

14. A

Temos que, se $x > 1$, $f(x) = 2x$

Se $-1 < x < 1$, $f(x) = 2$.

Se $x < -1$, $f(x) = -2x$.

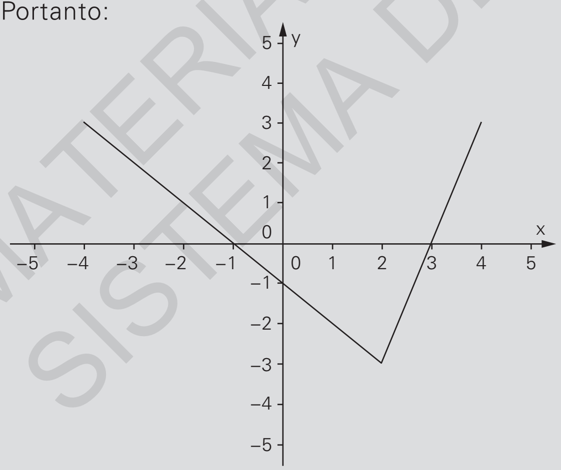
15. Temos que se $2x - 4 < 0 \rightarrow x < 2$

$f(x) = -(2x - 4) + x - 5 = -2x + 4 + x - 5 = $ $= -x - 1$

Se $2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2$

$f(x) = (2x - 4) + x - 5 = 3x - 9$

Portanto:



16. A

Para que $f(x) = g(x)$, temos

$2 = x^2 - |x|$

$x^2 - |x| - 2 = 0$

Para $x > 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$ e $x = -1$ (não convém)

Para $x < 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = -2$ e $x = 1$ (não convém)

Logo, a soma das abscissas dos pontos em comum é $2 + (-2) = 0$.

17. 06 (02 + 04)

01) $|x| \neq -x, \forall x \in R$

Falso. Se $x < 0$, temos que $|x| = -x$.

02) Se **f** e **g** estão definidas no mesmo domínio e no mesmo contradomínio, então o gráfico de $f(x) = |x + 2| - 2$ é igual ao gráfico de $g(x) = |x|$, porém deslocado 2 unidades para a esquerda no eixo **x** e 2 unidades para baixo no eixo **y**.

Verdadeiro. Temos na função f:

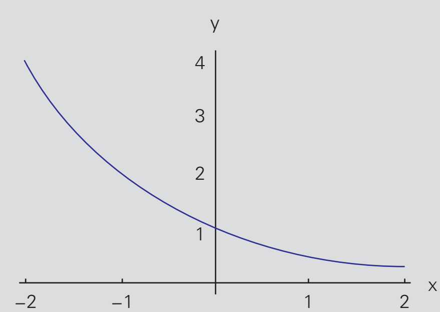
Se $x + 2 > 0$

$f(x) = x + 2 - 2 = x$

Se $x + 2 < 0$

$f(x) = -x - 2 - 2 = -x - 4$

Ou seja



Isto é, é igual ao gráfico de g(x), mas deslocado 2 unidades para a esquerda no eixo **x** e 2 unidades para baixo no eixo **y**.

04) A função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = |x|$ é injetora e sobrejetora.

Verdadeiro. Para $x \neq y$, com $x, y \in \mathbb{R}^+$, temos que $f(x) \neq f(y)$.

Para um $y \in \mathbb{R}^+$, existe um **x** real positivo tal que $f(x) = y$.

08) A solução da equação $\left|\cos(x+4) - \text{sen}(x-1) + \sqrt{x+2-1}\right| + 5 = 0$ é $k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}^+$.

Falso. Para $x = k\pi$, $\left|\cos(k\pi+4) - \text{sen}(k\pi-1) + \sqrt{k\pi+2-1}\right| + 5 \neq 0$.

16) A equação $|x + 1| - |x - 1|$ não tem solução real.

Falso, pois $|x + 1| - |x - 1| = 0$.

$|x + 1| = |x - 1|$

Se $x > 1$

$x + 1 = x - 1$

$1 = -1$, (absurdo)

Se $-1 < x < 1$

$x + 1 = -x + 1$

$2x = 0$

$x = 0$

Se $x < -1$

$-x - 1 = -x + 1$

$1 = -1$, (absurdo)

Estudo para o Enem

18. C

A distância entre os pontos $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{7}$ é $\frac{1}{7}$. Então, cada espaço entre eles vale $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$. Logo, o valor de x é dado por

$\frac{3}{7} + \frac{1}{28} = \frac{12}{28} + \frac{1}{28} = \frac{13}{28}$.

Portanto, a soma do numerador com o denominador da fração irredutível que representa x é $13 + 28 = 41$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. D

O maior crescimento absoluto registrado é observado entre os anos 2001 e 2000. Logo, em 1 ano houve um crescimento absoluto de $|47\,943 - 45\,360| = 2\,583$. Portanto, em 2010 haverá um número de homicídios de $51\,434 + 2\,583 = 54\,017$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. D

Calculando as raízes do polinômio:

$P(x) = 0$

$x^2 + 10x - 144 = 0$

$x = 8$ ou $x = -18$

Os valores absolutos das raízes são $|x| = 8$ ou $|x| = 18$.

Assim, sendo **x** as pessoas que deveriam pagar meia, mas pagaram inteira, e **y** as pessoas que pagam inteira, temos:

$8x + 18y = 140$

$18x + 18y = 180$

$10x = 40$

$x = \frac{40}{10}$

$x = 4$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

11 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES MODULARES

Comentários sobre o módulo

O ensino de módulo ou valor absoluto tem se apresentado desafiador para professores do Ensino Fundamental e, em especial, do Ensino Médio, a começar pela definição dos conceitos a ele relacionados. Tal fato pode se apresentar como entrave para o aprendizado de diversos saberes em Matemática, caso o professor não estabeleça estratégias para dinamizar e investigar com eficácia cada saber envolvido no estudo de valor absoluto de um número e suas diversas aplicações em funções e geometria analítica.

De modo geral, o estudo de equações possibilita resolver grande parte dos problemas matemáticos ligados à álgebra. No caso de modular, essa ferramenta particular diminui a amplitude de eficiência, mas constantemente é exigido que o aluno aplique seus conceitos em provas de vestibular.

O conteúdo refere-se a inequações modulares. Além da parte teórica, há exercícios resolvidos de aplicação dos principais conceitos e propriedades ligados ao assunto. Na medida do possível, apresente a resolução de alguns deles como exemplos das propriedades.

Proponha a resolução dos exercícios de aplicação para sistematizar os conceitos estudados em aula, alguns mais simples e dois contextualizados.

Exercícios propostos

7. B

Temos que $2x - 1 = 1 - x$ ou $2x - 1 = x - 1$.

Ou seja, $3x = 2 \to x = \frac{2}{3}$ ou $x = 0$.

8.

Se $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} \geq 0$, temos:

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{3}{4}$

Se $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} < 0$, temos:

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{8} = -\frac{1}{4}$

$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8} = 0$, (não há solução no universo dos reais)

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$.

9. D

$\frac{1}{2}|x| \cdot |x - 3| = 2 \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right| \to \frac{|x^2 - 3x|}{2} = \frac{|2(2x-3)|}{2} \to$

$\to x^2 - 3x = 4x - 6$ ou $x^2 - 3x = -2x + 6 \to$
$\to x^2 - 7x + 6 = 0$ ou

$x^2 - x - 6 = 0 \to x = 1$ ou $x = 6$ ou $x = -3$ ou $x = 2$.

Logo, a equação tem quatro raízes.

10. C

Por definição, sabemos que $|x|^2 = x^2$. Para todo **x** real:

$x^2 - 5|x| - 6 = 0 \to |x|^2 - 5|x| - 6 = 0 \to$
$\to (|x| - 6) \cdot (|x| + 1) = 0 \to x = 6$ ou $x = -6$

Consequentemente, $a = 0$ e $b = 36$.

11. E

Se $|x - 2| - 7 \geq 0$:

Se $x - 2 \geq 0$:
$x - 2 - 7 = 6$
$x = 15$

Se $x - 2 < 0$:
$-x + 2 - 7 = 6$
$-x = 11$
$x = -11$

Se $|x - 2| - 7 < 0$:
Se $x - 2 \geq 0$:
$-x + 2 + 7 = 6$
$x = 3$

Se $x - 2 < 0$:
$x - 2 + 7 = 6$
$x = 1$

A soma das raízes da equação modular é $S = 15 - 11 + 3 + 1 = 8$.

12. a) $\frac{1}{2}|x| + 3 = \frac{3}{2}|x + 1|$

$|x| + 6 = 3|x + 1|$

Se $x \leq -1$, temos que:
$|x| + 6 = 3|x + 1|$
$-x + 6 = 3(-x - 1)$

$x = \frac{-9}{2}$

Se $-1 \leq x \leq 0$, temos que:
$|x| + 6 = 3|x + 1|$
$-x + 6 = 3(-x - 1)$

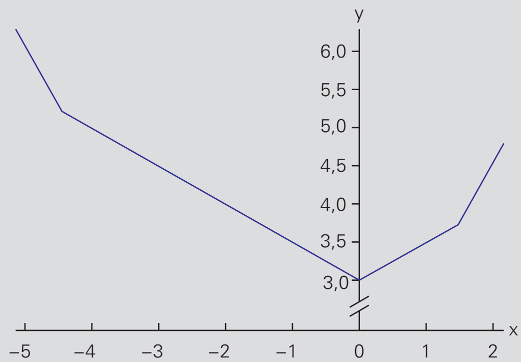
$x = \frac{3}{4}$, mas $\frac{3}{4} \not\subset [-1, 0]$

Se $x \geq 0$, temos que:

$x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{-9}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

b) Se fizermos um esboço do gráfico de **f**, temos:



O menor valor de **f** é 3.

c) A função **f** pode ser definida como $f(x) = \frac{3}{2}|x + 1|$, para $x \leq \frac{-9}{2}$ ou $x \geq \frac{3}{2}$.

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x| + 3$, para $\frac{-9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Com isso, $\frac{3}{2}|x + 1| = 5 \rightarrow |x + 1| = \frac{10}{3}$.

$\leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ (pois $x = \frac{-13}{3}$ não está no intervalo)

$\frac{1}{2}|x| + 3 = 5 \rightarrow |x| = 4 \leftrightarrow x = -4$ (pois $x = 4$ não está no intervalo).

Então, $x = -4$ ou $x = \frac{7}{3}$.

13. E

Se $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$:

$x^2 - 4x + 3 < 3$

$x^2 - 4x < 0$

$x \cdot (x - 4) < 0$

$0 < x < 4$

Se $x^2 - 4x + 3 < 0$:

$-x^2 + 4x - 3 < 3$

$x^2 - 4x + 6 > 0$, (não tem solução nos reais)

Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$.

14. Temos que, no caso $|x^2 - 10x + 21| = |3x - 15|$:

$x^2 - 10x + 21 = 3x - 15$

ou

$x^2 - 10x + 21 = -3x + 15$

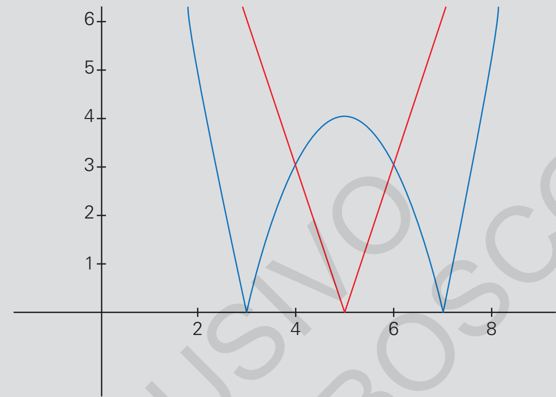
Então:

$x^2 - 13x + 36 = 0$ ou $x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = 4$ ou $x = 9$ ou $x = 1$ ou $x = 6$

Portanto, para $|x^2 - 10x + 21| \leqslant |3x - 15|$.

Analisando o gráfico das funções: $|x^2 - 10x + 21|$ e $|3x - 15|$.



Portanto, $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4$ ou $6 \leqslant x \leqslant 9\}$.

15. A

Temos que:

$x^2 - 4x \geqslant 0$

$x^2 - 4x \leqslant 3$

$x^2 - 4x - 3 \leqslant 0$

$(x - (2 - \sqrt{7}) \cdot (x - (2 + \sqrt{7})) \leqslant 0$

Se $x^2 - 4x < 0$:

$-x^2 + 4x \leqslant 3$

$x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$

$(x - 1) \cdot (x - 3) \geqslant 0$

Portanto, $2 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{7}$.

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant$ $\leqslant 2 + \sqrt{7}\}$.

16. Para que $|x^2 - 6x - 8| < 1$, temos que, se $x^2 - 6x -$ $- 8 > 0$:

$x^2 - 6x - 8 < 1$

$x^2 - 6x - 9 < 0$

A equação $x^2 - 6x - 9 = 0$ tem as soluções:

$x = 3 - 3\sqrt{2}$ e $x = 3 + 3\sqrt{2}$

Se $x^2 - 6x - 8 < 0$:

$-x^2 + 6x + 8 < 1$

$x^2 - 6x - 7 > 0$

A equação $x^2 - 6x - 7 = 0$ tem as soluções: $x = -1$ e $x = 7$

Logo, $3 - 3\sqrt{3} < x < -1$ ou $7 < x < 3 + 3\sqrt{2}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - 3\sqrt{3} < x < -1 \text{ ou } 7 < x < 3 + 3\sqrt{2}\}$.

17. B

No conjunto P:

Se $x \geqslant 0$:

$x \leqslant \sqrt{7}$

Se $x < 0$:

$-x \leqslant \sqrt{7}$

$x \geqslant -\sqrt{7}$

$-\sqrt{7} \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$

Portanto, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

No conjunto Q:

$x^2 \leqslant 0{,}333...$

$x^2 \leqslant \dfrac{1}{3}$

$|x| \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$|x| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$|x| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{-\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Portanto, $Q = \{0\}$.

II. Incorreta, pois $Q - P = \{\ \}$.

III. Incorreta, pois $P \supset Q$.

Estudo para o Enem

18. E

Para que o reservatório seja esvaziado completamente, precisamos ter $y = 0$. Logo, $|3600 - 45x| = 0$.

Assim, $3\,600 - 45x = 0$. Logo, $x = \dfrac{3\,600}{45} = 80 \text{ min} = 1\text{h}20\text{min}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. D

Temos $q(8) = |8 - 14| = 6$.
Para $t < 8$, temos $q(t) = |-(t - 8) + t - 14| < 6$.
$q(16) = |8 + 16 - 14| = 10$
Para $8 < t < 16$, temos $q(t) = 2|t - 11|$, $q(t) \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
Portanto, o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

Pela figura, a soma das dimensões da bagagem não pode ser superior a 115 cm.

Portanto, $x + 42 + 24 \leqslant 115$.

Assim, $x \leqslant 49$.

Dessa forma, o valor máximo de **x** para que a caixa permaneça dentro dos padrões da Anac é 49 cm.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

12 EQUAÇÕES E FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Comentários sobre o módulo

Retomamos as propriedades de potenciação e as aplicações da resolução de equações exponenciais de mesma base.

A equação exponencial é considerada uma importante ferramenta da Matemática e abrange diversas situações cotidianas, além de contribuir de forma satisfatória para se obterem resultados que exigem análises quantitativa e qualitativa.

São abordadas técnicas de resolução de equações exponenciais dentro do conjunto dos reais utilizando propriedades da potenciação.

Exercícios propostos

7. A

Chamamos $t = 2^x$. Logo, $t^3 - 7t + 6 = 0$. Podemos verificar por inspeção que $t = 1$ e $t = 2$ são raízes.

Portanto, se $t = 1$, $x = 0$; e se $t = 2$, $x = 1$.

8. B

Reescrevendo a equação, temos:

$$2\left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$$

$$2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^{4x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$$

Chamamos $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$.

Logo, $2t^2 - 5t + 3 = 0$.

As raízes da equação são $t = 1$ e $t = \frac{3}{2}$.

Assim, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 1 \rightarrow x = 0$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \rightarrow$
$\rightarrow 2\,x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Portanto, o dobro da soma das raízes da equação é $2 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) = 1$.

9. D

Para uma criança de 8 kg:

$$S_C = \frac{11}{100} 8^{\frac{2}{3}} = \frac{11}{100}\sqrt[3]{2^{3\cdot 2}} = \frac{44}{100}$$

Quando essa área duplicar, $S_C = \frac{88}{100}$.

Logo:

$$\frac{88}{100} = \frac{11}{100} m^{\frac{2}{3}}$$

$$m^{\frac{2}{3}} = 8$$

$$m^2 = 8^3 = 2^9$$

$$m = \sqrt{2^9} = 2^4\sqrt{2} = 16 \cdot 1{,}4 = 22{,}4 \text{ kg.}$$

10. C

Temos que $f(g(x)) = 3^{x^3}$ e $g(f(x)) = (3^x)^3 = 3^{3x}$.

Assim, quando $f(g(x)) = g(f(x))$:

$$3^{x^3} = 3^{3x}$$

$$x^3 = 3x$$

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0$$

Portanto, é uma equação do 3º grau. Consequentemente, há 3 soluções.

11. Na base 1 temos, $x^2 - 5x + 7 = 1 \rightarrow x = 2$ ou $x = 3$.
Para $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$.
Portanto, os números reais que satisfazem a equação são 3.
Assim, $S = \{-1, 2, 3\}$.

12. D

Fazendo $y = 2^{\sqrt{x+1}}$, $y > 0$, temos: $y^3 - 19y^2 + 44y + 64 = 0$.

Por inspeção, 4 é raiz da equação. Logo, as outras duas raízes α e β satisfazem as seguintes equações:

$\alpha + \beta + 4 = 19$ e $\alpha \cdot \beta \cdot 4 = -64$

Então, $\alpha + \beta = 15$ e $\alpha \cdot \beta = -16$.

Assim, $\alpha = 16$ e $\beta = -1$ ou $\alpha = -1$ e $\beta = 16$.

Portanto, os possíveis valores de y serão 4, 16 ou -1.

Assim:

$$4 = 2^{\sqrt{x+1}} \rightarrow x = 3$$

$$16 = 2^{\sqrt{x+1}} \rightarrow x = 15$$

$$-1 = 2^{\sqrt{x+1}},\ \nexists x \in \mathbb{R}$$

Portanto, as raízes são 3 e 15, cuja soma é 18.

13. D

Temos que $y = y(t)$.

Logo, a dose inicial é dada por $y(0) = 100 \cdot 0{,}9^0 = 100$ mg.

A dose após 3 horas é de $y(3) = 100 \cdot 0{,}9^3 = 72{,}9$ mg.

14. Temos que, no ponto $\left(0, \frac{1}{64}\right)$, $a^{0+2} = \frac{1}{64} \rightarrow a = \frac{1}{8}$.

Podemos encontrar os valores de **n** e **k** quando A(x) = B(x). Ou seja, $a^{-x+2} = (4)^{\frac{x}{2}}$.

Assim, $a = \frac{1}{8}$.

$\left(\frac{1}{8}\right) = 4^{\frac{x}{2}}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x+6} = 2^x$

$2^{3x-6} = 2^x$

$3x - 6 = x$

$x = 3 = k$

Como $4^{\frac{x}{2}} = n$

$\sqrt{64} = n$

$n = 8$

Logo, $n + k = 8 + 3 = 11$.

15. D

Ao analisarmos cada alternativa, temos:

a) **f** é crescente e **g** é decrescente

Falsa, ambas são crescentes.

b) **f** e **g** se interceptam em x = 0. Falsa.

$\frac{2^x + 2^{-x}}{2} = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$

$2^x + 2^{-x} = 2^x - 2^{-x}$

$2 \cdot 2^{-x} = 0$

$2^{1-x} = 0$, (não intercepta em x = 0)

c) f(0) = – g(0). Falsa.

$f(0) = \frac{1+1}{2} = 1$

$g(0) = \frac{1-1}{2} = 0$

d) $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$. Verdadeira.

$\frac{2^{2x} + 2 + 2^{-2x}}{4} - \frac{2^{2x} - 2 + 2^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

e) $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Para $x < 0$, $g(x) < 0$.

16. E

Calculando, obtemos:

$\left(\frac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x+1} \geqslant 0 \rightarrow$

$\rightarrow 7^{-x^4+4x} - 7^{2x^3-x^2+2x} \geqslant 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x-1)(x+1)(x+2) \leqslant 0 \rightarrow -2 \leqslant x \leqslant -1$ ou $0 \leqslant x \leqslant 1$

Portanto, $[-2, -1] \cup [0,1]$.

17. C

Resolvendo a inequação, temos:

$N(t) = N_0e^{kt} \rightarrow N(0) = 100 \rightarrow N_0e^{k \cdot 0} = 100 \rightarrow$
$\rightarrow N_0 = 100 \rightarrow N_0 > 0$

Assim:

$N(t) = 100 \cdot e^{kt} \rightarrow N(8) = 50 \rightarrow 100 \cdot e^{k \cdot 8} = 50 \rightarrow$

$\rightarrow e^{k \cdot 8} = \frac{1}{2} \rightarrow k < 0$

Estudo para o Enem

18. A

A taxa de juros em relação ao tempo é de $(100\% + 0{,}033\%)^t = 1{,}00033^t$.

Soma-se a isso a multa de 2% sobre o valor inicial da parcela, que é R$ 2.600,00.

Portanto, a expressão que descreve o valor do juro pago é:

$2\,600\,[(1{,}00033)^t - 0{,}98]$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. B

Como o circuito tem a metade de sua funcionalidade no dia 20:

$50 = Ca^{-k \cdot 20} - 150$

$Ca^{-20k} = 200$

No dia 0:

$100 = Ca^{-k \cdot 0} - 150$

$C = 250$

Assim:

$250a^{-20k} = 200$

$a^{-20k} = \frac{4}{5}$

Quando $t = 40$:

$f(40) = 250a^{-40t} - 150$

$250a^{-20t}a^{-20t} - 150 =$

$= 250 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - 150 = 10$

Portanto, a queda de funcionalidade nos primeiros 40 dias é de $100 - 10 = 90\%$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. B

Caso sejam removidos 20% dos poluentes, sobram 80% dos poluentes no tubo. Logo, como a quantidade inicial de poluentes no tubo é de P_0, temos que, em **n** metros de tubulação, $P = P_0 (0,8)^n$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

13 TIPOS DE FUNÇÃO E FUNÇÃO INVERSA

Comentários sobre o módulo

O estudo das relações entre domínio, contradomínio e imagem possibilita construir funções mais sofisticadas.

É preciso ter em mente a ideia de que nem sempre uma função se classifica como injetora ou sobrejetora.

Algumas funções não admitem essa classificação. Converse com os alunos sobre esses conceitos e prepare-os para os próximos módulos, que abordam funções inversas e logaritmos.

Exercícios propostos

7. A

1. A função é crescente no intervalo aberto (4, 6). Verdadeiro. No intervalo aberto (4, 6), se $x < y$, temos que $f(x) < f(y)$.

2. A função tem um ponto de máximo em $x = 1$. Verdadeiro. O ponto $x = 1$ é um ponto de máximo.

3. Esse gráfico representa uma função injetora. Falso. Se traçarmos uma reta horizontal no gráfico, ela o intercepta em mais de um ponto. Logo, não é injetora.

4. Esse gráfico representa uma função polinomial de 3º grau.

Falso. Como há 4 pontos em que $f(x) = 0$, essa função é do 4º grau.

8. B

Para que a função seja injetora, temos que, para cada valor de **x** que pertence ao domínio **A**, existe um único valor **y** (ou f(x)) que pertence ao contradomínio **B**.

Se $\forall\, x_1, x_2 \in A$, temos $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Portanto, se a função associa a cada país que tem um presidente, a função é injetora.

9. A

Como **f** é injetora, cada elemento de **A** tem um único elemento correspondente em **B**. Portanto: $3n - 3 = 2n + 1n = 4$. Então, $1 < n \leqslant 4$.

10. 12 (04 + 08)

01. A função f: $R \rightarrow R$, definida por $f(x) = 10 - 2^x$, é decrescente e sobrejetiva. Falso. A função é decrescente, mas como f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a função não é sobrejetiva, pois não existe um elemento **y** nos reais para todo elemento **x** no domínio, tal que $f(x) = y$.

02. A área da região plana fechada, pertencente ao 1º quadrante e limitada pela função $f(x) = 12 - 2x$, é igual a 72 u.a. Falso. Temos que $f(x) = 0 \rightarrow x = 6$ e $f(0) = 12$.

Logo, é um triângulo de base 6 e altura 12. Portanto, de área igual a $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$.

04. A imagem da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 20$, é dada pelo conjunto $Im = [16, +\infty[$.

Verdadeiro. Como o vértice da função é $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 - 4 \cdot 20)}{4} = \frac{64}{4} = 16$. Como $a > 0$ a parábola é côncava para cima. Logo, $Im = [16, +\infty[$.

08. Se g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = 2x - 11$, então $g(2x + 3) = 4x - 5$. Verdadeiro. Temos que $g(2x + 3) = 2(2x + 3) - 11 = 4x + 5$.

16. Se a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + bx + 10$ e com $b \in \mathbb{R}$, tem valor mínimo igual a 1, então o único valor possível para **b** é 6. Falso. O valor mínimo é o vértice da parábola. Logo, $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = 1$.

$-b^2 - 40 = 4$.

$b = + -6$.

32. A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ||x - 2| - 1|$, tem três raízes reais distintas. Falso. Para $f(x) = 0$, temos $|x - 2| - 1 = 0$. $|x - 2| = 1$ $x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1$ $x = 3$ ou $x = 1$, (duas raízes)

11. A

I. Se **f** e **g** são injetoras, f + g é injetora. Falso. Suponhamos que $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, ambas são funções injetora, mas f + g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(f + g)(x) = 0$ não é injetora, pois é uma função constante.

II. Se **f** e **g** são injetoras, f + g é injetora. Falso. Tal como no exemplo anterior, as duas funções **f** e **g** são sobrejetoras, porém f + g : $R \rightarrow R$, tal que $(f + g)(x) = 0$, não é sobrejetora. Então, f + g é sobrejetora (portanto, bijetora).

12. Calculando a inversa de **f**:

$y = 2^{c - 4x}$

Invertendo **x** e **y**:

$x = 2^{c - 4y}$

Temos que $f^{-1}(\sqrt{2}) = 0$.

Então $2^{\frac{1}{2}} = 2^c$.

Assim, $c = \frac{1}{2}$.

13. 19 (01 + 02 + 16)

Analisando cada situação, temos:

01) Para todo $x \in R$, $f(x) < 84$.

Verdadeiro. Calculando os valores do vértice da parábola:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(400 - 4 \cdot 16)}{-4} = 84$$

Como a parábola é côncava para baixo, esse é o ponto de máximo. Logo, $f(x) \leq 84$ para todo **x** real.

02) $(f + g)(1) = 8$.

Verdadeiro, pois $(f + g)(1) = f(1) + g(1) =$

$= (-1 + 20 - 16) + (-5 + 10) = 3 + 5 = 8$.

04) Os gráficos de **f** e **g** não se interceptam.
Falso, pois, fazendo $f(x) = g(x)$:

$-x^2 + 20x - 16 = -5 + 10$

$-x^2 + 25x - 26 = 0$

$\Delta = 625 - 4 \cdot 26 = 521 > 0$

Portanto, existem pontos reais em que **f** e **g** se interceptam.

08) O gráfico da função **g** é uma parábola com concavidade voltada para cima.
Falso. O gráfico de **g** não é uma parábola.

16) A função **f** não tem inversa, e $g^{-1}(x) = -\frac{x}{5} + 2$, para todo **x** real.

Verdadeiro. Como **f** não é bijetora, **f** não tem inversa.
Seja $y = -5x + 10$.

Invertendo **x** e **y**:

$x = -5y + 10$

$5y = 10 - x$

$y = -\frac{x}{5} + 2$

$g^{-1}(x) = -\frac{x}{5} + 2$.

14. D

Temos que $f(x) = ax + b$

$f(4) = 0$ e $f(0) = 2$

$f(0) = b = 2$

$f(4) = 4a + 2 =$

$a = \frac{-1}{2}$

Logo, $f(x) = \frac{-1}{2}x + 2$.

$y = \frac{-1}{2}x + 2$

Invertendo **x** e **y**:

$x = \frac{-1}{2}y + 2$

$2x = -y + 4$

$y = 4 - 2x$

$f^{-1}(x) = 4 - 2x$

$a = -2$ e $b = 4$ (decrescente e intercepta o eixo das abscissas em $x = 2$)

15. B

Analisando cada caso, temos:

(V) A função **f** é injetora.

Para cada $x \neq y$, temos $f(x) \neq f(y)$.

(V) $\forall x \in \mathbb{R}$, – a função **f** é crescente.

Para $x < 2$, a função é crescente, pois o coeficiente linear é positivo.

Para $x > 2$, a função também é crescente, pois é uma parábola com concavidade para cima.

(V) A função f^{-1}, inversa de **f**, é dada por $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

tal que $f(x)^{-1} \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leq -1 \\ \sqrt{4x+4}, \text{ se } x > -1 \end{cases}$.

Para $x < 2$, $y = x - 3$.

Invertendo **x** e **y**:

$y < 2$, $x = y - 3$

$y = x + 3$

$f^{-1}(x) = x + 3$

$x + 3 \leq 2 \to x \leq \ -1$

Para $x > 2$, $y = \frac{x^2}{4} - x$.

Invertendo **x** e **y**:

$y > 2$, $x = \frac{y^2}{4} - y$

$4x = y^2 - 4y$

$4x + 4 = y^2 - 4y + 4$

$(y - 2)^2 = 4x + 4$

$y - 2 = \sqrt{4x + 4}$

$y = \sqrt{4x + 4} + 2$

$\sqrt{4x + 4} + 2 > 2$

$\sqrt{4x + 4} > 0$

$4x + 4 > 0$

$x > -1$.

16. Se f e f^{-1} têm um ponto comum, é da forma (a, a).
Portanto, para determinar esses pontos, temos $y = x$.

Logo, $x = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0$.
$x = \ -1 \notin [1, +\infty[$ ou $x = 2$

Logo, o ponto é (2, 2). Portanto, $a + b = 2 + 2 = 4$.

17. A

Temos que f(x) = y = ax + b

$x = \frac{y-b}{a}$, logo $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

Sendo g(x) = t = cx + b

$x = \frac{t-d}{c}$, logo $g^{-1}(x) = \frac{x-d}{c}$

$$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left[\frac{x-d}{c}\right] = \frac{\frac{x-d}{c} - b}{a} =$$

$$= \frac{x-d-bc}{ac}$$

$$g^{-1}(x) \circ f^{-1}(x) = g^{-1}[f^{-1}(x)] = g^{-1}\left[\frac{x-b}{a}\right] = \frac{\frac{x-b}{a} - d}{c} =$$

$$= \frac{x-b-ad}{ac}$$

Como $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$:

$$\frac{x-d-bc}{ac} = \frac{x-b-ad}{ac}$$

d + bc = b + ad

Estudo para o Enem

18. A

Como cada menina do conjunto **A** tem um menino correspondente diferente do conjunto **B**, **f** é injetiva. Porém, como existem meninos que não formarão par com nenhuma menina do conjunto **A**, então **f** não é sobrejetiva. Dessa forma, **f** não é bijetiva.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. E

Temos que y = 2x + 1

Invertendo **x** e **y**:

x = 2y + 1

$y = \frac{x-1}{2}$

$G^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Como a primeira letra é codificada por 27, $G^{-1}(x) = \frac{27-1}{2} = 13$, o que corresponde à letra M.

Portanto, a palavra é **Matemática**.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. D

Temos que $v = -0{,}1t^2 + 4t - 10$.

Invertendo **v** e **t**:

$t = -0{,}1v^2 + 4v - 10$. Para que v = 20:

$t = -0{,}1(100) + 4(10) - 10 = -10 + 40 - 10 = 20$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

14 LOGARITMOS

Comentários sobre o módulo

A aplicação do logaritmo é feita em diversas áreas. No Ensino Básico, os usos mais evidentes estão em Matemática financeira, Química, Geografia etc.

Na Matemática financeira, o logaritmo tem aplicação no cálculo do tempo de aplicação de um capital, a juros compostos, para gerar determinado montante.

Nos enunciados de questões de concursos e vestibulares, em que não é possível usar calculadora, normalmente é fornecido o logaritmo dos números que dizem respeito à resolução do problema.

Exercícios propostos

7. B

Temos que $1 - 2x > 0$ e $2 - x - x^2 > 0$ e $1 > 2x \rightarrow$

$\rightarrow x < \dfrac{1}{2}$

As raízes da equação $x^2 + x - 2 = 0$

são $x = 1$ e $x = -2$.

Logo:

$-(x+2)(x-1) > 0$

$(x+2)(x-1) < 0$

$x > -2$

$x < 1$

Então, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x < \dfrac{1}{2}\right\}$.

8. B

Colocando todos os termos na base **x**, temos:

$$\frac{2}{\log_2 x} + \frac{2}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_4 x} = 2\left(\frac{\log_2 2}{\log_2 x} + \frac{\log_2 2}{\log_3 x} + \frac{\log_2 2}{\log_4 x}\right) =$$

$$= 2(\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4)$$

$$2 \cdot \log_x 2 \cdot 3 \cdot 4 = \log_x 24^2 = \log_x 576$$

9. $S = \dfrac{\log_2 2}{2 \cdot \log_2 2016} + \dfrac{\log_3 3}{5 \cdot \log_3 2016} + \dfrac{\log_7 7}{10 \cdot \log_7 2016} =$

$$= \frac{1}{2}\log_{2016} 2 + \frac{1}{5}\log_{2016} 3 + \frac{1}{10}\log_{2016} 7 =$$

$$= \log_{2016}\sqrt{2} + \log_{2016}\sqrt[5]{3} + \log_{2016}\sqrt[10]{7} =$$

$$= \log_{2016}\sqrt[10]{32} + \log_{2016}\sqrt[10]{9} + \log_{2016}\sqrt[10]{7} =$$

$$= \log_{2016}\left(\sqrt[10]{32 \cdot 9 \cdot 7}\right) = \log_{2016} 2016^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} = S = \frac{1}{10}.$$

10. 28 (04 + 08 + 16)

01) $\log 360 = 6(a + b) + 1$.

Falso, pois

$\log 360 = \log(2^3 3^2 5) = \log 2^3 + \log 3^2 + \log 5 =$

$= 3a + 2b + \log 5$.

02) $\log_{0,04} 18 = \dfrac{a+2b}{a-1}$.

Falso, porque

$$\log_{\frac{4}{100}} 18 = \log_{\frac{4}{100}} 3^2 2 = 2 \cdot \log_{\frac{4}{100}} 3 + \log_{\frac{4}{100}} 2$$

$$= 2 \cdot \frac{\log 18}{\log \frac{4}{100}} + \frac{\log 2}{\log \frac{4}{100}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\log 3^2 2}{\log 2^2 - \log 10^2} + \frac{\log 2}{\log 2^2 - \log 10^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2b + a}{2a - 2} + \frac{a}{2a - 2}$$

$$= \frac{4b + 2a + a}{2a - 2} = \frac{3a + 4b}{2a - 2}.$$

04) $\log_x 40 = 2$ tem solução $x = \sqrt{10^{2^a+1}}$.

Verdadeiro, pois

$$\log_x 40 = \log_x 2^2 10 = 2 \cdot \log_x 2 + \log_x 10 =$$

$$= 2\frac{\log 2}{\log x} + \frac{\log 10}{\log x} = \frac{2^a}{\log x} + \frac{1}{\log x} = \frac{2^a + 1}{\log x} = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \log x = 2a + 1 \rightarrow \log x^2 = 2a + 1$$

$$x^2 = 10^{2a+1} \rightarrow x = \sqrt{10^{2a+1}}.$$

08) $\log 8^x - \log 6^{2x} = x^2$ tem duas soluções, sendo uma delas $x = a - 2b$.

Verdadeiro, porque

$$\log 8^x - \log 6^{2x} = \log \frac{8^x}{6^{2x}} = \log\left(\frac{8}{6^2}\right)^x = \log\left(\frac{2}{9}\right)^x =$$

$$= x \cdot \log \frac{2}{3^2} = x \cdot (\log 2 - 2 \cdot \log 3) = x \cdot (a - 2b) = x^2$$

$x = a - 2b$.

16) $\log\sqrt{250} = \dfrac{3}{2} - a$.

Verdadeiro, pois

$$\log\sqrt{250} = \log\sqrt{5^2 \cdot 10} = \log 5 \cdot 10^{\frac{1}{2}} = \log 5 + \frac{1}{2}$$

$= \log\frac{10}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \log 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - a.$

11. B

Temos que

$A = \log_{25} 27 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2} = \frac{3}{8} \log_5 3 \cdot \log_2 5 \cdot \log_3 2 =$

$= \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8}$

$B = \log_n(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = \log_n\left(\log_n n^{\frac{1}{n^2}}\right) = \log_n n^{-2} = -2$

$C = \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b}$

$C = \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} = \frac{a^{\log c}}{b^{\log c}} \cdot \frac{b^{\log a}}{c^{\log a}} \cdot \frac{c^{\log b}}{a^{\log b}} =$

$= a^{\log c - \log b} \cdot b^{\log a - \log c} \cdot c^{\log b - \log a} \rightarrow$

$\rightarrow \log C = \log\left(a^{\log c - \log b} \cdot b^{\log a - \log c} \cdot c^{\log b - \log a}\right) =$

$= \log a^{\log c - \log b} + \log b^{\log a - \log c} + \log c^{\log b - \log a} =$

$= (\log c - \log b)\log a + (\log a - \log c)\log b + (\log b - \log a)\log c =$

$= 0 \leftrightarrow C = 10^0 = 1$

$B < A < C$

12. C

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}$.

Verdadeiro, pois $a^{(\log_c b)} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = (a^{\log_a b})^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$.

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

Verdadeiro, porque

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}} \cdot \frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}} \cdot \frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}} = 1.$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$.

Falso, pois, suponha que $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$, então $\log_{ab}(bc) = \log_{10} 6 \neq \log_5 3$.

13. D

Calculando, temos:

$\log\left(10^3 \cdot 100^{\frac{1}{3}}\right) = \log 10^3 + \log 10^{2\left(\frac{1}{3}\right)} =$

$= 3 + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

14. a) Substituindo na função, temos

$f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = 10^{1+\log_{10}(2+\sqrt{3})} + 10^{1-\log_{10}(2+\sqrt{3})}$

$= 10 \cdot 10^{\log_{10}(2+\sqrt{3})} + 10 \cdot 10^{-\log_{10}(2+\sqrt{3})}$

$= 10 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) + 10 \cdot (2+\sqrt{3})^{-1}$

$= 10 \cdot \left(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}\right) = 10 \cdot 4 = 40$ (que é um número inteiro)

b) Temos que $52 = 10^{1-x} + 10^{1-x} = 52$

$10 \cdot 10^x + 10 \cdot \frac{1}{10^x} = 52$

Fazendo $y = 10^x$, temos:

$10y + 10\frac{1}{y} = 52 \quad 10y^2 - 52y + 10 = 0$

$y = 5$ ou $y = \frac{1}{5}$

Logo, para $y = 5$:

$10^x = 5 \quad x = \log 5$

$x = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Para $y = \frac{1}{5}$:

$10^x = \frac{1}{5} \quad x = \log\frac{1}{5}$

$x = \log\frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3 - 1 = -0{,}7$. Portanto, $S = \{0{,}7;\ -0{,}7\}$.

15. B

$\log_x\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right) = \log_x x^2y^3 - \log_x z^4 =$

$= 2\log_x x + 3\log_x y - 4\log_x z$

Temos que, se $\log_y x = 5$, então $\log_x y = \frac{1}{\log_y x} =$

$= \frac{1}{5}$

Também temos que

$\log_y z = \frac{\log_x z}{\log_x y} = \frac{\log_x z}{\frac{1}{5}} = 7 \rightarrow \log_x z = \frac{7}{5}.$

Assim,

$\log_x\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right) = 2 + 3 \cdot \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{7}{5} = \frac{10+3-28}{5} = \frac{-15}{5} = -3$

16. B

A população de pássaros em A e B é dada por

$p_A = p_{0A} \cdot (1{,}05)^t$.

$p_B = p_{0B} \cdot (1{,}2)^t$

Para que $p_A = p_B$:

$p_{0A} \cdot (1{,}05)^t = p_{0B} \cdot (1{,}2)^t$

$12 \cdot (1{,}05)^t = (1{,}2)^{tw}$

$\left(\frac{1{,}05}{1{,}20}\right)^t == 12$

$$\left(\frac{8}{7}\right)^t = 12$$

$$t \cdot \log\left(\frac{2^3}{7}\right) = \log(2 \cdot 6)$$

$t \cdot (3 \cdot 0{,}3 - 0{,}85) = 0{,}3 + 0{,}78$
$t = 21{,}6$ anos
Portanto, no 2º semestre do ano de 2034.

17. C

Temos que:

$$B = \log\sqrt{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{5}}}} = \log\sqrt{a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}} = \log\sqrt{a^{\frac{15-10-6}{30}}} =$$

$$= \log\sqrt{a^{\frac{-1}{30}}} = \log a^{\frac{-1}{60}}$$

Então, se $\log_b a = \frac{k}{m}$:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} = \frac{k}{m} \rightarrow \frac{\log a}{m} = \frac{k}{m} \rightarrow \log a = k$$

Assim,

$B = \frac{-k}{60}$.

Estudo para o Enem

18. E

A expressão para o terremoto do Chile é dada por:

$$8{,}3 = \log\frac{a_C}{T} + B = \log a_C - \log T + B$$

E no Japão é dada por:

$$5{,}3 = \log\frac{a_J}{T} + B = \log a_J - \log T + B$$

Subtraindo uma equação de outra:

$$3{,}0 = \log a_C - \log a_J = \log\frac{a_C}{a_J}$$

$$\frac{a_C}{a_J} = 10^3 = 1000$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. D

Temos que $3000 \cdot (0{,}99)^n = 30 \leftrightarrow (0{,}99)^n = \frac{1}{100}$

$\log\,(0{,}99)^n = \log\left(\frac{1}{100}\right) \leftrightarrow n \cdot \log 0{,}99 = -2$. Como

$\log 0{,}99 = \log\frac{99}{100} = \log\frac{3^2 11}{100} = 2\log 3 + \log 11 -$

$- \log 100 = 2 \cdot 0{,}477 + 1{,}041 - 2 =$

$= -0{,}005$. Então: $-0{,}005n = -2 \rightarrow n = 400$.

Ou seja, $400\frac{1}{2} = 200$ horas.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. D

$F(h) = 16 - \log_2(3h+1)$
$10 = 16 - \log_2(3h+1)$
$\log_2(3h+1) = 6$
$3h = 63$
$h = 21$ horas.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

15 EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Comentários sobre o módulo

Na sequência ao estudo de logaritmos, após vermos a definição e algumas de suas propriedades no módulo anterior, este conteúdo envolve equações logarítmicas e o uso delas na resolução de determinadas situações-problema. Este módulo ainda inclui algumas aplicações que dão sentido ao estudo sobre equações logarítmicas.

Exercícios propostos

7. C

Temos que $1{,}5\ C0 = C_0 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$

$1{,}5 = 2^{\frac{t}{5}}$

$3 = 2^{\frac{t+5}{5}}$

$\log_2 3 = \log_2 2^{\frac{t+5}{5}}$

$1{,}6 = \dfrac{t + 5}{5}$

$8 = t + 5$

$t = 3$ horas

8. A

Temos:

$0{,}8 = 2(0{,}5)^t$

$\log 0{,}8 = \log 2(0{,}5)^t$

$\log \dfrac{2^3}{10} = \log 2 + t \cdot \log 0{,}5 = \log 2 + t \cdot \log 2^{-1}$

$3 \cdot 0{,}3 - 1 = 0{,}3 + t(-0{,}3)$

$0{,}3t = 0{,}4$

$t = \dfrac{4}{3}$ horas

$t = \dfrac{4}{3} \cdot 60 = 80$ minutos

9. A

Temos que $\log_4 (y) = \dfrac{\log_2 y}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2} \log_2 y$

Logo:

$\log_2 x + \dfrac{1}{2} \log_2 y = 2$

$\log_2 \left(x \cdot y^{\frac{1}{2}}\right) = 2$

$x \cdot y^{\frac{1}{2}} = 4$

10. D

Temos que $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) = \log_{3^{-1}} (x - 1) =$

$= \dfrac{\log_3 (x-1)}{\log_3 (3^{-1})} = -\log_3 (x - 1)$

Então:

$\log_3 (x^2 - 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}} (x-1) = \log_3 (x + 1)$

$\log_3 (x^2 - 2x - 3) - \log_3 (x - 1) = \log_3 (x + 1)$

$\log_3 \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)} = \log_3 (x + 1)$

$\log_3 (x - 3) = \log_3 (x + 1)$

$x - 3 = x + 1$

$-3 = 1$, (absurdo)

Portanto, $S = \varnothing$.

11. A

Temos que:

$2\,000 = \dfrac{20\,000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}}$

$1 = \dfrac{10}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}}$

$2 + 15 \cdot 4^{-2t} = 10$

$4^{-2t} = \dfrac{8}{15}$

$\log 4^{-2t} = \log \dfrac{2^3}{3 \cdot 5}$

$-2t \cdot 2 \cdot \log 2 = 3 \cdot \log 2 - \left(\log 3 + \log \dfrac{10}{2}\right) =$

$= 3 \cdot \log 2 - (\log 3 + \log 10 - \log 2)$

$-2t \cdot 0{,}6 = 3 \cdot 0{,}3 - (0{,}48 + 1 - 0{,}3)$

$-1{,}2t = -0{,}28$

$t = 0{,}2333...$ meses

Ou seja, aproximadamente 7 dias.

12. C

Temos que $\log_2 (1 + x^4 + x^2) + \log_2 (1 + 2x^2) = \log_2 (1 + x^4 + x^2)(1 + 2x^2) = 0$

$(1 + x^4 + x^2)(1 + 2x^2) = 1$

$1 + 2x^2 + x^4 + 2x^6 + x^2 + 2x^4 = 1$

$2x^6 + 3x^4 + 3x^2 = 0$

$x^2 (2x^4 + 3x^2 + 3) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

Ou:

$2x^4 + 3x^2 + 3 = 0$

$y = x^2$

$2y^2 + 3y + 3 = 0$

Como $\Delta < 0$, a equação admite exatamente duas raízes reais, as quais são iguais.

13. E

Temos:

$A \cdot \log_{200} 5 + B \cdot \log_{200} 2 = \log_{200} 5^A + \log_{200} 2^B = C$

$\log_{200} 5^A 2^B = C$

$200^C = 5^A 2^B$

$(2^3 \cdot 5^2)^C = 5^A 2^B$

$2^{3C} \cdot 5^{2C} = 5^A 2^B$

Assim, $A = 3C$ e $B = 2C$.

Portanto, $A + B + C = 3C + 2C + C = 6C$.

14. A

I. Um dos valores é um número primo.

Verdadeiro, pois $\log_2 (a + b + c) = 0 \rightarrow a + b + c = 1$.

Então:

$\log(a + 2b) = 1$

$a + 2b = 10$

$$\frac{2^a \cdot 4^b}{8^c} = \frac{2^a 2^{2b}}{2^{3c}} = 2$$

$a + 2b - 3c = 1$

$10 - 3c = 1 \rightarrow 3c = 9 \rightarrow c = 3$ (primo)

$a + b + 3 = 1 \rightarrow a + b = -2$

$a + 2b = 10$

$b = 12$ e $a = -14$.

II. Todos os valores são números reais não negativos.

Falso, pois $a = -14 < 0$.

III. Dois dos valores são números naturais.

Verdadeiro, pois $b = 12$ e $c = 3$, $b, c \in \mathbb{N}$.

IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Falso. Todos os valores são inteiros.

15. C

Calculando, temos:

$$140 = (740 - 40) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + 40$$

$$100 = 700 \cdot 10^{-\frac{t}{12}}$$

$$1 = 7 \cdot 10^{-\frac{t}{12}}$$

$$\log 1 = \log 7 \cdot 10^{-\frac{t}{12}}$$

$$0 = \log 7 - \frac{t}{12}$$

$$\frac{t}{12} = \log 7$$

$t = 12 \log(7)$ minutos

16. D

Temos que:

$(5y)^{\log_x 5} - (7y)^{\log_x 7} = 0$

$(5y)^{\log_x 5} = (7y)^{\log_x 7}$

$\log_x (5y)^{\log_x 5} = \log_x (7y)^{\log_x 7}$

$\log_x 5 \cdot \log_x 5y = \log_x 7 \cdot \log_x 7y$

$\log_x 5 \cdot (\log_x 5 + \log_x y) = \log_x 7 \cdot (\log_x 7 + \log_x y)$

$(\log_x 5)^2 + \log_x 5 \cdot \log_x y = (\log_x 7)^2 \cdot \log_x 7 \cdot \log_x y$

$\log_x y \cdot (\log_x 7 - \log_x 5) = (\log_x 5)^2 - (\log_x 7)^2$

$$\log_x y = \frac{(\log_x 5 + \log_x 7)(\log_x 5 - \log_x 7)}{(\log_x 7 - \log_x 5)} =$$

$$= -(\log_x 5 + \log_x 7)$$

$$\log_x y = \log_x (7 \cdot 5)^{-1} = \log_x 35^{-1} = \log_x \frac{1}{35}$$

$$y = \frac{1}{35}$$

17. Dado um montante inicial **M**, o valor corrigido pela taxa de juros é de $(1 + 0,1)M$.

Após **n** anos, $(1,1)^n$ M.

Ao triplicar o capital, $(1,1)^n\ M = 3M$.

Logo:

$(1,1)^n = 3$

$\log (1,1)^n = \log 3$

$n \cdot \log 1,1 = \log 3$

$$n = \frac{\log 3}{\log \frac{11}{10}} = \frac{\log 3}{\log 11 - \log 10} = \frac{0,48}{1,04 - 1} = \frac{0,48}{0,04} = 12$$

Portanto, 12 anos.

Estudo para o Enem

18. B

Temos que $3\,000 \cdot N_0 = N_0 \cdot 3^t$

$3\,000 = 3^t$

$\log 3^t = \log 3\,000$

$t \cdot \log 3 = \log 3 \cdot 1\,000 = \log 3 + \log 1\,000 =$

$= \log 3 + \log 10^3$

$t \cdot (0,48) + 0,48 + 3$

$$t = \frac{3,48}{0,48} = 7,25 \text{ dias}$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. C

Para que $V = 0,1 \cdot V_0$.

$0,1 \cdot V_0 = V_0 \cdot 2^{-t}$

$0,1 = 2^{-t}$

$\log 0,1 = t \cdot \log 2^{-1}$

$$t = \frac{\log 0,1}{\log 2^{-1}} = \frac{\log 10^{-1}}{\log 2^{-1}} = \frac{-\log 10}{-\log 2} = \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{0,3} \simeq$$

$\simeq 3,3\text{ h} = 3\text{h e } 18 \text{ min}$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

Temos que:

$\log (k + n) = \frac{h}{2}, \log k = \frac{-h}{2}$

$h = 2 \cdot \log (k + n)$

$h = -2 \cdot \log k$

$2 \cdot \log (k + n) = -2 \cdot \log k$

$\log (k + n) = -\log k$

$\log (k + n) + \log k = 0$

$\log (k + n)\, k = 0$

$(k + n)\, k = 1$

$k^2 + nk - 1 = 0$

$$k = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}, \text{ pois } k > 0$$

$$h = 2 \cdot \log (k + n) = 2 \cdot \log \left(\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} + n\right) =$$

$$= 2 \cdot \log \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

16 FUNÇÃO LOGARÍTMICA E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Comentários sobre o módulo

O conteúdo deste módulo é sequencial ao estudo de logaritmos. Constantemente nos vestibulares há questões envolvendo funções logarítmicas, que, na substituição de determinado valor, recaem em equações logarítmicas. Para desenvolver o estudo proposto, aplique a definição e as propriedades logarítmicas vistas no módulo anterior.

Os principais objetivos deste módulo estão relacionados a compreensão, aplicação e resolução de situações-problema envolvendo funções. Oriente os alunos a manter-se em dia com a matéria ministrada em sala de aula, dedicando-se a aprender logaritmos com afinco, porque se trata de assunto que facilita o amadurecimento do raciocínio em geral.

Apresente esquemas e gráficos com propriedades operatórias, para melhor fixação das informações e compreensão de conceitos e análises.

Exercícios propostos

7. A

Temos que f(2) = g(2).

Logo:

$$\frac{3}{2} + \log_{10}(2-1) = k \cdot 2^{(-2+1)}$$

$$\frac{3}{2} = k \cdot \frac{1}{2}$$

$$k = 3$$

$$g(f(11)) = g\left(\frac{3}{2} + \log_{10}(11-1)\right) = g\left(\frac{3}{2}+1\right) =$$

$$= g\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot 2^{\left(\frac{-5}{2}+1\right)} = 3 \cdot 2^{\frac{-3}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

8. Todos os retângulos do gráfico têm base igual a 1. Assim:

$$S_1 = \log 3 + \log 4 + \log 5 = \log 3 \cdot 4 \cdot 5 = \log 60$$

$$S_2 = \log 4 + \log 5 + \log 6 = \log 4 \cdot 5 \cdot 6 = \log 120$$

Logo:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2}(\log 60 + \log 120) =$$

$$= \frac{1}{2}(\log 60 \cdot 120) = \frac{1}{2}\log 7200$$

$$S = \frac{1}{2}(\log 100 + \log 72) = \frac{1}{2}(2 + \log 2^3 \cdot 3^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3)$$

$$S = 1{,}93.$$

9. A

Temos que:

$$f\left(\frac{1}{100}\right) = m + \log\frac{1}{100} = 0$$

$$m - 2 = 0$$

$$m = 2$$

$$f\left(g\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\right) = f\left(n\cdot\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)+1\right) =$$

$$= 2 + \log\left(n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)+1\right) = \frac{5}{2}$$

$$\log\left(n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)+1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{10} = n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) + 1$$

$$n\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) = \sqrt{10} - 1$$

$$n = -3$$

Assim, $m^n = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

10. E

Temos que y = f(x).

Logo:

$$f(2) = 1 + \log 2 = 1{,}301$$

$$f(6) = 1 + \log 6 = 1 + \log 2 \cdot 3 = 1 + \log 2 + \log 3 = 1 + 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}778$$

Assim, a área do trapézio é dada por

$$S = \frac{(6-2)(1{,}778 + 1{,}301)}{2} = 6{,}158.$$

11. a) Se $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$, deve-se ter:

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$x + 1 > 0$

$x + 1 \neq 1$

Logo:

$x < -2$ ou $x > 4$

$x > -1$

$x \neq 0$

Então:

$x > 4$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) Calculando, temos:

$f(x) = 2 = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$

$(x + 1)^2 = x^2 - 2x - 8$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x - 8$

$4x = -9$

$x = \frac{-9}{4} \notin D_f \rightarrow S = \varnothing$.

c) Calculando, temos: $f(x) > 1 \rightarrow \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) > 1$

Como $x > 4$, $f(x)$ é estritamente crescente. Assim:

$x^2 - 2x - 8 > x + 1$

$x^2 - 3x - 9 > 0$

$x < \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ ou $x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$

$x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$, pois $x > 4$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}\right\}$.

12. D

Calculando, temos:

$\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$

$\log_2\left(\frac{2x + 5}{3x - 1}\right) > 1$

$\frac{2x + 5}{3x - 1} > 2$

$2x + 5 > 6x - 2$

$-4x > -7$

$x < \frac{7}{4}$

Das condições de existência:

$2x + 5 > 0$

$x > \frac{-5}{2}$ e $3x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{3}$

Logo, $x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$.

13. A produção de A é dada por: $P_A = 120\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^t$

A produção de B é dada por: $P_B = 60\,000 \cdot (1 + 0{,}12)^t$

Logo:

$120\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^t = 60\,000 \cdot (1 + 0{,}12)^t$

$2(1{,}04)^t = (1{,}12)^t$

$\log 2 + t \cdot \log 1{,}04 = t \cdot \log 1{,}12$

$t \cdot \log \frac{1{,}12}{1{,}04} = \log 2$

$t \cdot \log \frac{14}{13} = \log 2$

$t = \frac{\log 2}{\log 14 - \log 13} = \frac{\log 2}{\log 2 + \log 7 - \log 13}$

$\frac{0{,}301}{0{,}301 + 0{,}845 - 1{,}114} = \frac{0{,}301}{0{,}032} \simeq \frac{300}{32} = 9{,}375$

Portanto, a produção de soja do município B será, pela primeira vez, maior que a produção do município A no ano em que $t = 10$. Ou seja, em 2023.

14. C

(F) A função quadrática $f(x) = 2(x - 2)^2$ apresenta valor mínimo no ponto $(-2,5)$.

Falso. O valor mínimo se dá quando $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$. Logo, $f(2) = 0$.

(V) Se $f(x) = |x + 5| \cdot \sqrt{x+5} \cdot (-x^2 + 2x - 2)$.

Então, para todo $x \geq -5$, temos $f(x) \leqslant 0$. Verdadeiro. Para todo $x \geq -5$:

$f(x) = (x + 5) \cdot \sqrt{x+5} \cdot (-x^2 + 2x - 2)$

$f(x) = (x+5)^{\frac{3}{2}} (-x^2 + 2x - 2)$

Para $x \geq -5$, $(x+5)^{\frac{3}{2}} \geq 0$ e

$- x^2 + 2x - 2 < 0$.

Logo, $f(x) \leqslant 0$.

(F) O domínio da função $f(x) = \log_{\sqrt{x}} \sqrt{x+1}$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Falso, pois:

$\sqrt{x+1} > 0$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

e $\sqrt{x} \neq 1$

$x \neq 1$.

15. a) Temos:

$S = - 18 \cdot \log (t + 1) + 86$

$S = - 18 \cdot \log (9 + 1) + 86$

$S = - 18 \cdot 1 + 86$

$S = 68\%$

b) Temos:

$50 < - 18 \cdot \log (t + 1) + 86$

$-36 < - 18 \cdot \log (t + 1)$

$\log (t + 1) > t + 1 > 100$

$t > 99$ minutos = 1 hora e 39 minutos

Depois de 1 hora e 39 minutos.

16. D

Calculando, temos: $e^{2\log x} - 11 \cdot e^{\log x} + 28 < 0$

Se $y = e^{\log x}$ $y^2 - 11y + 28 < 0$

Resolvendo a equação $y^2 - 11y + 28 = 0$, temos:

$y = 4$ ou $y = 7$

Logo:

$e^{\log x} = 4$ ou $e^{\log x} = 7$

$\log x = \ln 4$ ou $\log x = \ln 7$

$x = 10^{\ln 4}$ ou $x = 10^{\ln 7}$

Assim, $x \in \,]10^{\ln 4}, 10^{\ln 7}[$.

17. Temos que $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$.

Logo: $0 < x < \frac{\pi}{4}$; $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1$ (para todos os números reais, pois a equação

$x^2 - \frac{\pi}{4}x + 1 = 0$ não tem raízes reais)

Então:

$4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x - 1 > 0$

$2 \cdot \operatorname{sen} 2x > 1$

$\operatorname{sen} 2x > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$

Portanto, o maior domínio é dado quando

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$.

Logo, por $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$.

Estudo para o Enem

18. C

O preço do automóvel é igual a $P(t) = P_0 (1 - 19\%)^t$.

Logo, para que $P(t) = \frac{1}{3} P_0$, temos:

$\frac{1}{3} P_0 = P_0 (1 - 0,19)^t = P_0 (0,81)^t$

$\frac{1}{3} = (0,81)^t$

$\log_3 \frac{1}{3} = t \cdot \log_3 \left(\frac{81}{100}\right) = t \cdot (\log_3 3^4 - \log_3 10^2)$

$-1 = t \cdot (4 - 2 \cdot 2,1)$

$t = \frac{1}{0,2} = 5$ anos

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. B

Temos que $E = 10^{15,3}$.

E também $10^{n-0,5} \leqslant 10^{15,3} \leqslant 10^{n+0,5}$.

Logo, $n - 0,5 \leqslant 15,3 \leqslant n + 0,5$.

Dessa forma, podemos concluir que a ordem de grandeza é equivalente a $n = 15$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. C

O número de pessoas deslocadas é dado por:

$N(t) = N_0 \cdot (1,1)^t$

Para que $N_0 \cdot (1,1)^t > 2N_0$

$(1,1)^t > 2$

$t \cdot \log 1,1 > \log 2$

$t > \dfrac{0,30}{0,04} > 7,5$

Logo, no ano de 2014 + 8 = 2022

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 2

ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

1 PORCENTAGEM, AUMENTOS E DESCONTOS: FATOR DE CORREÇÃO

Comentário sobre o módulo

Ao definir o que é uma porcentagem, reforce a ideia de que ela é apenas uma forma de comparar dois valores. Dê exemplos de comparação absoluta (diferença entre valores) e comparação relativa (razão entre valores) e mostre que a porcentagem é uma comparação relativa.

Muitos alunos têm a ideia de que, para calcular uma porcentagem, devem multiplicar ou dividir por 100. Mostre que essa divisão por 100 é apenas para mudar uma porcentagem da forma decimal para a percentual e vice-versa. A porcentagem, de fato, é obtida pela razão entre os dois valores comparados.

Na seção *Porcentagem de quantias*, reforce o fato de usar a multiplicação na hora dos cálculos. Muitos alunos usam a regra de três: sempre que possível evitaremos isso, pois quando essa regra é aplicada, vários estudantes podem não estar plenamente conscientes do processo que estão realizando, apenas reproduzindo um procedimento que aprenderam sem ter real noção que qual conceito justifica essa ação.

Enfatize o uso do fator de correção em contraponto ao uso da regra de três. Principalmente em exercícios de variações sucessivas, o fator de correção facilita muito a organização e a resolução.

Para ir além

SANTOS, Robinson Nelson dos. Porcentagem "por dentro" e a conta de luz. **Revista do Professor de Matemática**, n. 78. Disponível em:

<http://rpm.org.br/cdrpm/78/3.html>.

Acesso em: 29 maio 2018.

Artigo sobre a aplicação de porcentagens para aumentos ou descontos sobre o valor final.

Exercícios Propostos

7. A

Calculando, temos: $0{,}64 \cdot 0{,}3 \cdot T =$
$= 60\,000 \therefore T = 312\,500$

8. C

Calculando, temos: $\frac{630}{504} = 1{,}25$.

Portanto, houve um aumento de 25%.

9. A

Note que 3% de meio litro ou 500 ml de leite correspondem a: $0{,}03 \cdot 500$ ml $= 15$ ml.

Como a colher tem 3 cm³, ou seja, 3 ml, serão necessárias 5 colheres, pois: $\frac{15 \text{ ml}}{3 \text{ ml por colher}} = 5$ colheres.

10. C

Consideramos n o número total de indivíduos dessa população.

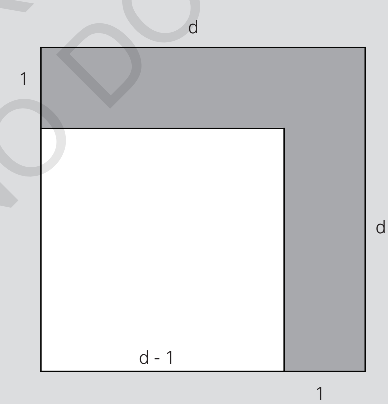
- Mulheres: 0,6 n
- Homens: 0,4 n
- Mulheres vegetarianas: $0{,}1 \cdot 0{,}6\,n = 0{,}06\,n$
- Homens vegetarianos: $0{,}05 \cdot 0{,}4\,n = 0{,}02\,n$

Dessa forma, a porcentagem pedida é:

$$\frac{0{,}06n}{0{,}06n + 0{,}02n} = \frac{0{,}06n}{0{,}08n} = \frac{6}{8} = 75\%.$$

11. A

Considere a figura, em que se tem a reprodução do padrão de preenchimento da malha num quadrado de lado **d**.



O quadrado de lado d − 1 corresponde à área transparente do padrão. Logo, para que a taxa de cobertura seja de 75%, deve-se ter:

$$\frac{(d-1)^2}{d^2} = \frac{1}{4} \to \frac{d-1}{d} = \frac{1}{2} \to d = 2 \text{ mm}.$$

12. C

Sendo **x** e **y**, respectivamente, o número de vagas para homens e o número de vagas para mulheres, logo, tem-se inicialmente que $x = 0{,}8y$.

Após a mudança, a relação entre os números de vagas passou a ser: $x + 30 = 0{,}84(y + 15)$.

Substituindo o valor de *x* na segunda equação, temos:

$$0{,}8y + 30 = 0{,}84y + 12{,}6$$

$$17{,}4 = 0{,}04y \therefore y = 435$$

O número de vagas para homens, antes do aumento, era de 0,8 · 435 = 348.

Logo, o total de vagas é: 348 + 435 + 45 = 828.

13. D

Sendo x o preço anunciado, temos o valor que será parcelado de 1,2x. Como o cliente pagou 10 parcelas de R$ 3.240,00, podemos escrever:

$1{,}2x = 10 \cdot 3240 \rightarrow x = 27\,000$

Já o valor à vista será de $0{,}9 \cdot 27\,000 = 24\,300$.

Portanto, a economia entre as duas opções de compra será de 32 400 − 24 300 = R$ 8.100,00.

14. A relação entre as grandezas é expressa por:

$$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{P' \cdot V'}{T'}$$

Pelo enunciado, temos que T' = 1,2T e V' = 0,8V. Logo,

$\frac{P \cdot V}{T} = \frac{P' \cdot 0{,}8V}{1{,}2T} \rightarrow P' = \frac{1{,}2P}{0{,}8} = 1{,}5P$, ou seja, P aumentou 50%.

15. A

Consideramos x o preço de custo do produto. A farmácia W vende o produto por 1,5x, e a farmácia Y vende 80% mais caro. Isto é, 1,8 · 1,5x. Logo, o preço na farmácia Y é:

$$1{,}8 \cdot 1{,}5x = 2{,}7x = x + 1{,}7x$$

Portanto, o lucro é de 170%.

16. Valor aplicado em A: x

Valor aplicado em B: 4x

Total aplicado: 5x

Agora vamos aplicar as taxas de rentabilidade de cada aplicação:

$A_{final} = 0{,}98x$

$B_{final} = 1{,}15 \cdot 4x = 4{,}6x$

$Total_{final} = 0{,}98x + 4{,}6x = 5{,}58x$

Logo, a rentabilidade anual foi de:

$$\frac{5{,}58x - 5x}{5x} = 0{,}116 = 11{,}6\%$$

17. B

Seja g a quantidade, em litros, de gasolina pura que deverá ser adicionada ao estoque, temos que:

$$\frac{g + 0{,}75 \cdot 40\,000}{g + 40\,000} = 0{,}8 \rightarrow g + 30\,000 =$$

$$= 0{,}8g + 32\,000 \rightarrow 0{,}2g = 2000 \therefore g = 10\,000$$

Estudo para o Enem

18. A

Calculando cada aumento:

Site U: $\frac{56}{40} = 1{,}4 \rightarrow$ aumento de 40%

Site X: $\frac{21}{12} = 1{,}75 \rightarrow$ aumento de 75%

Site Y: $\frac{51}{30} = 1{,}7 \rightarrow$ aumento de 70%

Site Z: $\frac{11}{10} = 1{,}1 \rightarrow$ aumento de 10%

Site W: $\frac{57}{38} = 1{,}5 \rightarrow$ aumento de 50%

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. E

Calculando o percentual de acerto de cada um dos jogadores, temos:

I) $\%_{Acertos} = \frac{20}{30} \approx 0{,}66667 \approx 66{,}67\%$ de acerto.

II) $\%_{Acertos} = \frac{10}{34} \approx 0{,}2941 \approx 29{,}41\%$ de acerto.

III) $\%_{Acertos} = \frac{19}{32} = 0{,}59375 = 59{,}375\%$ de acerto.

IV) $\%_{Acertos} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$ de acerto.

V) $\%_{Acertos} = \frac{8}{10} = 0{,}8 = 80\%$ de acerto.

Logo, o jogador com maior percentual de acertos (o qual deve entrar em quadra) é o jogador V.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. C

Se o lucro total foi de R$ 40,00 cada caixa deu um lucro de $40 \div 4 =$ R$ 10,00. Se a pessoa deseja aumentar seus lucros em 20%, no segundo dia deverá ter um lucro igual $1{,}2 \cdot 10 =$ R$ 12,00. Logo, o preço de venda em cada caixa será de $16 + 12 =$ = R$ 28,00. Assim, cada picolé será vendido por $28 \div 20 =$ R$ 1,40.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS SIMPLES E COMPOSTO

Comentário sobre o módulo

Ao falar sobre juros, enfatize o fato de que **juro** é **dinheiro**. É muito comum os alunos pensarem que juros é porcentagem. Deixe bem clara a diferença entre **juro** e **taxa** de juro.

Reforce o uso de fator de correção em movimentações de apenas um período: mostre aos alunos a vantagem dessa abordagem em comparação à regra de três. Comente também que o fator de correção é a ferramenta que usamos para deslocar valores ao longo do tempo: ao multiplicarmos um valor pelo fator de correção, estamos calculando o valor futuro. Em contraponto, para determinarmos o valor passado, devemos dividir pelo fator de correção. Exemplo: uma aplicação rende 10% ao mês.

a) Se R$ 200 reais foram aplicados, qual será o valor daqui um mês?

$V_f = 200 \cdot 1,1 = \text{R\$ } 220$

b) Qual valor foi aplicado um mês atrás se hoje há R$ 200 aplicados?

$V_i = \dfrac{200}{1,1} = \text{R\$ } 181,81$

Muitos alunos, no item **b** do exemplo, pensariam em retirar 10% de 200, o que seria equivalente a multiplicar por 0,9. Mas essa ideia está errada, pois um desconto de 10% não desfaz um aumento de 10%.

Enfatize a diferença entre os regimes de juros compostos e juros simples: comente como no cotidiano são mais comuns operações baseadas em juros compostos.

Comente também como o cálculo da variável tempo se torna mais trabalhoso nos juros compostos, sendo necessário o uso dos logaritmos.

Sobre equivalência de taxas, mostre que as diferenças entre os dois regimes é mais perceptível em variações grandes de tempo. Por exemplo: 1% ao mês em regime de juros compostos é igual a 12,68%; entretanto, se a situação não exigir muita precisão, talvez possamos aproximar para 12%, que seria a taxa equivalente em regime de juros simples; este último regime de cálculo de juro deixa o cálculo de equivalência de taxas muito mais simples, mas deve ser usado com muita cautela e bom senso.

Exercícios propostos

7. B

Após um desconto de 21% sobre o valor x, seu novo valor passará a ser $x \cdot (1 - 0,21)$, ou seja, $0,79\,x$.

Dessa forma, a função f que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor de um produto é $f(x) = 0,79\,x$.

8. B

O acréscimo percentual, em relação ao valor inicial, é igual a $5 \cdot 0,7 = 3,5$.

9. Aplicando a fórmula de juros simples:

$M = C \cdot (1 + n \cdot i) = 3000(1 + 18 \cdot 0,008) =$
$= \text{R\$ } 3.432,00$

10. Desde que $i_1 = 0,01$ e $i_2 = \dfrac{0,18}{12} = 0,015$, temos:

$2000 \cdot (1 + 0,01 \cdot t) = 3840$

$20t + 22,5t = 3840 - 3500$

$42,5t = 340$

$t = \dfrac{340}{42,5}$

$t = 8$

Se M_2 é o montante produzido por C_2 para $t = 8$ m, então

$M_2 = 1500 \cdot (1 + 0,015 \cdot 8) = \text{R\$ } 1.680,00.$

Seja J_1 os juros simples produzidos por C_1 para $t = 8$ m. Logo, $J_1 = 2000 \cdot 0,01 \cdot 8 = \text{R\$ } 160,00.$

[01] Verdadeira, pois $t = 8\text{ m} > 6\text{ m}$.

[02] Falsa. Na verdade, temos $M_2 = \text{R\$ } 1.680,00$.

[04] Verdadeira, pois $J_1 = \text{R\$ } 160,00$.

[08] Falsa, pois $t = 8\text{ m} = 240\text{ d}$.

Somatória das corretas: $01 + 04 = 05$

11. Valor emprestado com juros

$600 + 2 \cdot \dfrac{4}{100} \cdot 600 = 648$ reais.

Desconto concedido pelo sorteio: $648 - 602,64 =$
$= 45,36$ reais.

Em porcentagem: $\dfrac{45,36}{648} = 0,07$, ou seja, um desconto de 7%.

12. C

$M = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,085)^{15}$

$M = 1\,000\,000 \cdot (1,085)^{15}$

$M = 1\,000\,000 \cdot (1,085)^5 \cdot (1,085)^5 \cdot (1,085)^5$

$M = 1\,000\,000 \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,5$

$M = 1\,000\,000 \cdot 3,375 = 3\,375\,000$, ou seja, 3,375 milhões

13. B

10/jan. $\rightarrow 0 + 1000 = 1000$

10/fev. $\rightarrow$ $(1\,000 \cdot 1{,}10) + 1\,000 = 2\,100$

10/mar. $\rightarrow$ $(2\,100 \cdot 1{,}10) + 1\,000 = 3\,310$

10/abr. $\rightarrow$ $(3\,310 \cdot 1{,}10) = 3\,461$

14. O texto informa que a primeira parcela é de R$ 400,00. O saldo devedor será, portanto, de R$ 600,00. Logo, a segunda parcela será de:

$600 \cdot 1{,}05 =$ R$ 630,00

15. B

1 ano e 6 meses = 18 meses.

Sendo x o capital aplicado por Patrícia e M, o montante obtido por essa aplicação, temos:

$M = x \cdot (1{,}08)^{18} = x + 11960 \rightarrow x \cdot 3{,}99 - x =$
$= 11\,960 \rightarrow 2{,}99x = 11960 \rightarrow x = 4\,000$

Portanto, o capital empregado é de R$ 4.000,00.

16. A

O montante obtido com o presente dos pais é:

$5\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^{60} = 5\,000 \cdot 1{,}35 = 6\,750$, ou seja, R$ 6.750,00

17. Seja C o valor inicialmente aplicado e M, o montante obtido por essa aplicação, temos que:

$M = C + 4\,020 = C(1{,}01)^2 \rightarrow C + 4\,020 =$
$= 1{,}0201C \rightarrow C + 4\,020 = C + 0{,}0201C \rightarrow$
$\rightarrow C = \dfrac{4\,020}{0{,}0201}$

Portanto, o valor inicialmente aplicado R$ 200.000,00.

Estudo para o Enem

18. E

Analisando as alternativas:

a) Renegociar com banco: $18 \cdot 125 =$ R$ 2.250;

b) Empréstimo do total da dívida com José:
$(10 \cdot 150 + 5 \cdot 0{,}75 \cdot 80) \cdot 1{,}25 =$
$= (1.500 + 300) \cdot 1{,}25 = 1800 \cdot 1{,}25 =$
$=$ R$ 2.250;

c) Pagamento da dívida no prazo:
$12 \cdot 150 + 5 \cdot 80 = 1.800 + 400 =$ R$ 2.200;

d) Empréstimo do valor da quitação do cheque especial com José: $(10 \cdot 150) \cdot 1{,}25 + 400 =$
$= 1.875 + 400 =$ R$2.275;

e) Empréstimo do valor da quitação do cartão de crédito com José:

$1.800 + 300 \cdot 1{,}25 = 1.800 + 375 = 2\,175$, ou seja, R$ 2.175,00.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

19. A

Sendo P o valor da parcela mensal, devemos retroceder o valor das 7ª e 8ª parcelas em um e dois períodos, respectivamente. Sendo assim, o valor a ser pago no ato da 6ª parcela será:

$$P + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} = P \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Do gráfico, tem-se que o saldo devedor inicial é de R$ 500,00. Além disso, como a capitalização é composta, podemos concluir que a parcela mensal de juros é variável. Finalmente, supondo uma taxa de juros constante e igual a 10% ao mês, teríamos, ao final de 1% mês, um saldo devedor igual a $500 \cdot (1{,}1) =$ R$ 550,00. Portanto, comparando esse resultado com o gráfico, podemos afirmar que a taxa de juros mensal é superior a 10%.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

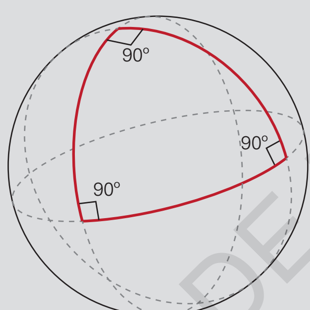
3 ÂNGULOS E PARALELISMO

Comentário sobre o módulo

O roteiro da aula é um bom direcionamento para este módulo. Provavelmente, a maior dificuldade dos alunos estará no equacionamento das questões que utilizam os conceitos de ângulos complementares e/ou suplementares. Se julgar necessário, faça questões introdutórias de maior simplicidade algébrica semelhantes aos exercícios resolvidos.

Sempre enfatize que retas paralelas ajudam muito nos exercícios pelo fato de criarem ângulos congruentes. Essa ação se mostrará bastante útil quando falarmos sobre o teorema de Tales e semelhança de triângulos.

Na introdução da aula, ao comentar sobre o quinto postulado de Euclides, você pode mostrar aos alunos a existência de geometrias não euclidianas: a Geometria esférica pode ser um bom caminho, em virtude da familiaridade que os alunos têm com o globo terrestre. Na superfície de um modelo de globo, é fácil observar um triângulo com três ângulos retos, o que é impossível na Geometria plana euclidiana.



Esse tipo de exemplo reforça a importância das paralelas para a Geometria plana euclidiana.

Exercícios propostos

7. E

De acordo com a figura, podemos escrever:

$y - 10° = x + 30° \rightarrow y = x + 40°$ (OP é bissetriz)

$2y + y - 10° + x + 30° = 180° \rightarrow 3y + x = 160°$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = x + 40° \\ 3y + x = 160° \end{cases}$, temos:

$x = 10°$ e $y = 50°$.

A medida do suplemento de x é 170° e do complemento de y, 40°.

8. B

A primeira afirmação é verdadeira, pois é a definição de ângulos opostos pelo vértice.

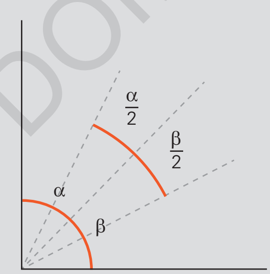
A segunda afirmação é falsa, pois:

$$\frac{x}{180° - x} = \frac{2}{7} \rightarrow 7x = 360° - 2x \rightarrow 9x = 360° \rightarrow x = 40°$$

Os ângulos são 40° e 140°. Logo, o complemento do menor ângulo é 40°.

A terceira afirmação é verdadeira, pois a diferença citada é $179° - 89° = 90°$

9. Sejam α e β dois ângulos complementares, $\alpha + \beta = 90°$. Observe a figura abaixo, na qual foram traçadas as bissetrizes de α e β.



Com base na figura, concluímos que o ângulo formado pelas bissetrizes é:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

10. E

Se α é a medida em graus de $\hat{A}$, então a medida em graus de $\hat{B}$ é $90° - \alpha$. Do enunciado, temos:

$$\frac{\alpha}{90° - \alpha} = \frac{13}{17} \rightarrow 17\alpha = 1170° - 13\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow 30\alpha = 1170° \rightarrow \alpha = 39°$$

Logo, $90° - \alpha = 51°$.

Portanto, a razão procurada é

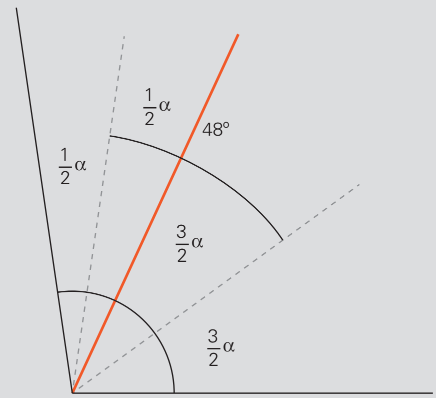
$$\frac{180° - 39°}{180° - 51°} = \frac{141°}{129°} = \frac{47°}{43°}.$$

11. Como se trata de ângulos, vamos considerar que as medidas dos ângulos e das alternativas estejam em graus. Assim, temos que:

$x + 8x + 9x = 180° \rightarrow 18x = 180° \rightarrow x = 10°$

12. C

Do enunciado, temos:



Da figura, vem: $\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = 48° \rightarrow 2\alpha = 48° \rightarrow$
$\rightarrow \alpha = 24°$. A soma dos ângulos é

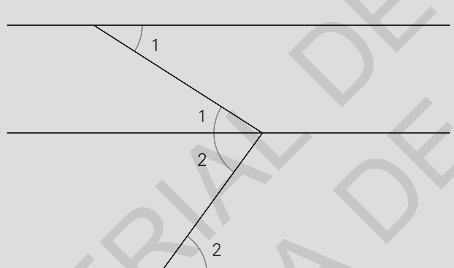
$3\alpha + \alpha = 4\alpha = 96°$.

13. D

Os ângulos $(60° - \alpha + 4\alpha) = (60° + 3\alpha)$ e $2\alpha + 90°$ são alternos internos. Portanto, $60° + 3\alpha - 2\alpha + 90° \rightarrow \alpha - 30°$, que é um divisor de 60.

14. E

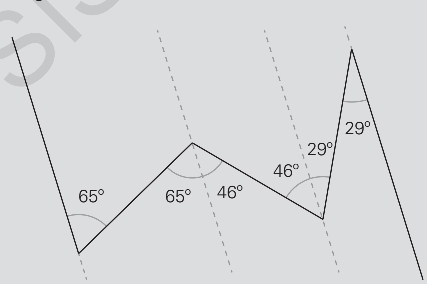
Traçando uma paralela às retas r e s pelo vértice do ângulo 3, vemos que este é formado por dois ângulos alternos internos dos ângulos 1 e 2.



Portanto, a medida do ângulo 3 é 45° + 55° = 100°.

15. C

Traçando duas paralelas às retas r e s, temos três pares de ângulos alternos internos, conforme a figura:



Concluímos que o ângulo A mede 65° + 46° = 111°.

Nove vezes o valor do ângulo a será 9 · 111 = 999.

16. D

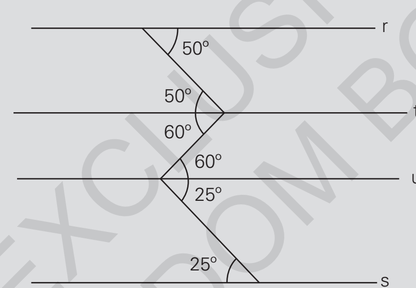
x = 60°. Os ângulos cujas medidas são x e 120° são suplementares (x e 120° são colaterais internos).

z = 50°. Os ângulos cujas medidas são z e 130° são suplementares (z e 130° são colaterais internos).

Da figura, temos $x + y + z = 180° \rightarrow y = 70°$.

Portanto, $\frac{y}{z} = \frac{70°}{50°} = \frac{7}{5} = 1,4$.

17. Traçando as retas paralelas "t" e "u", temos:



Com os ângulos alternos internos que surgem com a nova paralela, podemos escrever:

$x = 60° + 25° \rightarrow x = 85°$

Logo, x mede 85°.

Estudo para o Enem

18. E

Uma simetria em relação ao ponto O pode ser obtida girando a figura 180°, o que nos leva à alternativa E.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

19. D

Como o triângulo DCB é isósceles, logo as medidas dos ângulos são:

$B\hat{D}C = C\hat{B}D = 45°$

$B\hat{C}E = 180° - 45° - 75° = 60°$

$C\hat{E}D = 180° - 75° = 105°$

$E\hat{C}D = 90° - 60° = 30°$

Portanto, as medidas dos ângulos BDC, BCE, CED e ECD vale 45°, 60°, 105° e 30° respectivamente.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

20. D

Através da simetria, é possível observar que o imóvel deverá estar sobre a mediatriz do segmento de reta que une o consultório do pai e o local de trabalho da mãe. Essa mediatriz corresponde à rua 4. Por observação, concluímos que a rua horizontal que cumpre a condição é a D.

Competência: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

4 ÂNGULOS NO TRIÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA

Comentário sobre o módulo

É interessante demonstrar, por meio do paralelismo, a soma dos ângulos internos do triângulo. Tal procedimento reforça a importância do paralelismo.

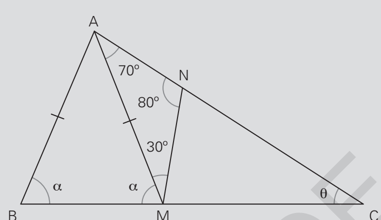
Enfatize a construção do ângulo externo, mostrando a necessidade de prolongarmos o lado do triângulo. Destaque o teorema do ângulo externo, que sempre encurta as resoluções dos problemas apresentados.

Sobre a soma dos ângulos externos, mostre que o resultado obtido decorre do fato de um ângulo interno e seu adjacente (externo) serem suplementares.

Neste módulo, o professor pode utilizar questões do Enem para contextualizar o objeto de estudo. Aquelas desenvolvidas nesse padrão possibilitam abordar alguns conceitos de forma interdisciplinar. Algumas exploram obras de arte e outras estão no contexto da Física, apresentando ilusão de óptica e associação de espelhos planos. Explore essa oportunidade de trabalho contextualizado.

Exercícios propostos

7. C



Observando o triângulo, temos que:

$AB = AM \to A\hat{M}B = \alpha$

Utilizando o teorema do ângulo externo no triângulo AMC temos:

$\alpha = 70° + \theta \to \alpha - \theta = 70°$

Logo, $\alpha - \theta = 70°$

8. B

Pelo teorema do ângulo externo aplicado no triângulo ACD temos:

$A\hat{D}E = C\hat{A}D + D\hat{C}A \to A\hat{D}E = \alpha + 40°$

Logo, aplicando novamente o teorema no triângulo ADE,

$A\hat{E}B = A\hat{D}E + D\hat{A}E$

$70° = \alpha + 40° + \alpha$

$2\alpha = 70° - 40°$

$\alpha = \dfrac{30°}{2} \to \alpha = 15°$

Portanto, o valor de $\alpha = 15°$.

9. D

Observando o triângulo, verificamos que:

$\overline{CD} // \overline{EF}$, então temos que $\hat{F} = \alpha$

$med(\overline{AB}) = med(\overline{BC})$, então temos que $A\hat{C}B = \theta$

$\overline{BC} // \overline{DE}$, então temos $\hat{E} = \theta + \beta$

Como a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180° temos:

$\theta + \alpha + \theta + \beta = 180 \to \theta = \dfrac{180° - \alpha - \beta}{2}$

Portanto, O valor de θ escrito em função de α e β é $\theta = \dfrac{180° - \alpha - \beta}{2}$

10. Como é bissetriz do ângulo $M\hat{O}N$, então calculando $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$, temos:

$\dfrac{52}{x^2+1} = \dfrac{32}{3x+1} \to (x^2+1) = \dfrac{52}{32} \cdot (3x + 1) \to$
$\to (x^2 + 1) = \dfrac{13}{8} \cdot (3x + 1) \to 8 \cdot (x^2 + 1) =$
$= 13 \cdot (3x + 1) \to$
$\to 8x^2 + 8 = 39x + 13 \to 8x^2 - 39x - 5 = 0$

Resolvendo a equação do 2° grau, obtemos:

$x = -\dfrac{1}{8}$ (não convém) ou $x = 5$

Substituindo valor de x, obtemos:

$x^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$ e $3x + 1 = 3 \cdot 51 = 16$

Assim, temos que:

$\overline{MN} = 16 + 26 = 42$

Logo, $\overline{MN} = 42$ cm

11. A

Seja $C\hat{B}D = x$. Logo, dado que $\overline{CB} = \overline{CE}$, $C\hat{E}B = x + 39°$. Em consequência, usando o fato de a soma dos ângulos internos do triângulo BED ser igual a 180°, obtemos $E\hat{D}B = 102° - x$. Além disso, como $\overline{AB} = \overline{AD}$, segue que $A\hat{B}E = 63° - x$. Portanto, a medida do ângulo ABC é a soma das medidas dos ângulos ABE, EBD e CBD. Ou seja, $63° - x + 39° + x = 102°$.

12. B

Seja S um ponto do menor arco $\overset{\frown}{BE}$.

Como $\overset{\frown}{BPC} = \overset{\frown}{CQD} = \overset{\frown}{DRE} = 2\alpha$, segue-se que $\overset{\frown}{BSE} = 360° - 6\alpha$. Logo, como $E\hat{A}B$ é excêntrico exterior, temos

$$E\hat{A}B = \frac{\widehat{BQE} - \widehat{BSE}}{2}$$

$$60° = \frac{6\alpha - (360° - 6\alpha)}{2}$$

$$60° = 6\alpha - 180°$$

$$\alpha = 40°$$

13. A

Sabendo que $\overline{AP} = \overline{AD}$, tem-se $A\hat{D}P \equiv B\hat{P}D$. Além disso, os ângulos inscritos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ subentendem o mesmo arco, bem como os ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$. Logo, $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$ e $B\hat{A}D \equiv B\hat{C}D$. Por outro lado, $B\hat{A}D$ é ângulo externo do triângulo ADP e, portanto, $B\hat{A}D = 2 \cdot A\hat{D}P$. Desse modo, como $AD \perp BC$ e sendo Q o ponto de interseção das cordas AD e BC, vem, do triângulo QCD

$$A\hat{D}C + B\hat{C}D = 90°$$

$$A\hat{D}P + B\hat{A}D = 90°$$

$$A\hat{D}P + 2 \cdot A\hat{D}P = 90°$$

$$A\hat{D}P = 30°.$$

14. E

Se o lado AB refere-se a um polígono regular de 6 lados, o arco AB mede 60°.

Se o lado CD refere-se a um polígono regular de 10 lados, o arco CD mede 36°.

A circunferência tem um total de 360°. Sendo assim, o ângulo pedido será:

$$\alpha = \frac{360 - 60 - 36}{2}$$

$$\alpha = 132°$$

15. D

O ângulo CAB é inscrito; logo, o menor arco BC mede 80°. Como $\overline{AB}$ é diâmetro, o arco AB mede 180° e então, o arco ABC mede 180° + 80° = 260°. O ângulo inscrito ADC "enxerga" o arco ABC, portanto $A\hat{D}C$ = 130°.

16. C

Os ângulos DAB e BCD são congruentes, pois são inscritos e observam o mesmo arco. Então, $D\hat{A}B = \widehat{BD} = 80°$.

$\widehat{AD} = \widehat{BD} = 80°$, pois o segmento CD é bissetriz do ângulo do vértice C. Logo, $\hat{C} = 80°$.

Os ângulos dos vértices B e C são congruentes, pois o triângulo ABC é isósceles. Logo, nesse triângulo temos: 80° + 80° + α = 180° → α = 20°.

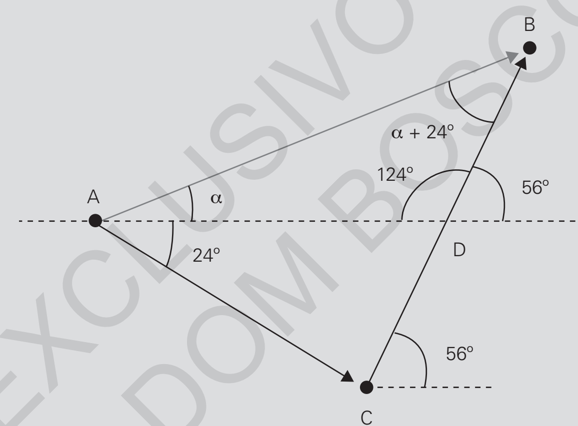
17. O ângulo de vértice N é inscrito, logo a medida do menor arco AD é 2y e o ângulo de vértice P é excêntrico externo. Então, $x = \frac{(46° + 42°) - 2y}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 2x + 2y = 88° \rightarrow x + y = 44°$.

Estudo para o Enem

18. B

Sabendo que os dois lados descritos medem 30 cm logo temos um triˆAngulo isósceles e que o ângulo D possui os ângulos suplementares 56° + 124° considere a situação:



Igualando a soma dos ângulos internos do triangulo ADB a 180° temos:

$\alpha + 124° + \alpha + 24° = 180° \rightarrow$
$\rightarrow 2\alpha = 180° - 124° - 24° \rightarrow$
$\rightarrow 2\alpha = 32° \rightarrow \alpha = \frac{32°}{2} \rightarrow \alpha = 16°$

Logo, elas deveriam ter iniciado sob a medida α = 16° em relação ao eixo horizontal para realizar a prova com o menor percurso.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. C

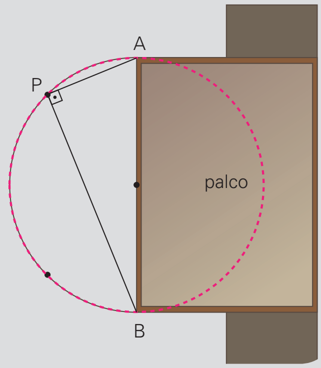
Se $\overline{AC}$ = R, temos o triângulo AFC equilátero. Logo, θ = 60°.

Competência: utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

20. E

Para qualquer posição do ponto P, o ângulo $A\hat{P}B$ situado na semicircunferência (mostrada na figura) é constante, ou seja, reto.



$$A\hat{P}B = \frac{180°}{2} = 90°$$

Logo, o trilho deverá ser aquele representado na figura da alternativa E.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

5 COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA E POLÍGONOS REGULARES

Comentário sobre o módulo

Neste módulo, o professor pode demonstrar o valor de π usando um barbante e materiais circulares com diferentes diâmetros. Também deve ser enfatizada a obtenção do número π de forma geométrica, com desenhos sucessivos dos polígonos inscritos ou uso de software de matemática. Por fim, o comprimento da circunferência é uma medida relevante na produção de peças de qualquer tipo de aparelho que funcione por meio de torque. Logo, pode-se reforçar o uso de circunferências em objetos diversos.

Na hora de explorar com os alunos as fórmulas para soma dos ângulos internos e do número de diagonais, insista com eles no raciocínio que levou a elas, pois ter em mente as ideias que resultaram nas expressões facilita recordá-las. A ideia sempre é mais importante que o resultado em si.

Enfatize também que os resultados que estamos estudando são válidos para polígonos convexos, o que não se aplica em polígonos não convexos.

Mostre aos alunos como a soma dos ângulos é vantajosa no caso de polígonos regulares, por não depender do número de lados.

Exercícios Propostos

7. C

Como a praça tem 30 m de raio, basta calcular o comprimento da praça (C_p) e dividi-lo pelo total de refletores. Assim, temos:

$C_p = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow C_p = 2 \cdot (3,15) \cdot 30$ m

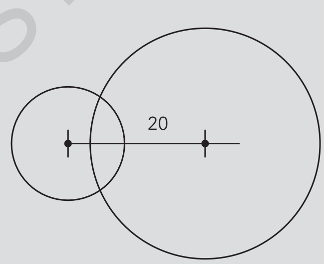
$\therefore C_p = 189$ m

Dividindo por 21, temos:

$\dfrac{189\text{ m}}{21} = 9$ m de distância entre cada dois refletores vizinhos.

Portanto, os refletores deverão ter 9 m de distância entre cada dois refletores vizinhos.

8. C



$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$

$15 - 8 < 20 < 15 + 8$

$7 < 20 < 22$

$\therefore$ As circunferências são tangentes.

9. C

Na figura temos 8 semicircunferências com diâmetros $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_8$.

A soma dos comprimentos de todas as semicircunferências será dada por:

$$S = \frac{d_1 \cdot \pi}{2} + \frac{d_2 \cdot \pi}{2} + \frac{d_3 \cdot \pi}{2} + \frac{d_4 \cdot \pi}{2} + \frac{d_5 \cdot \pi}{2} + \frac{d_6 \cdot \pi}{2} + \frac{d_7 \cdot \pi}{2} + \frac{d_8 \cdot \pi}{2}$$

$$S = \pi \cdot \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8}{2}$$

$$S = \pi \cdot \frac{AB}{2}$$

$$S = \frac{\pi \cdot x}{2}$$

10. B

Se $\overline{PQ}$ é o lado de um hexágono regular de lado de medida 3 cm, então o ângulo $P\hat{O}Q$ mede 60°, e o triângulo PQO é equilátero. Logo, os segmentos $\overline{PO}$ e $\overline{QO}$ têm a mesma medida que o raio da circunferência que mede 3 cm. Assim, pode-se escrever:

$360° - 60° = 300°$ percorridos pela formiga

$\dfrac{5}{6}$ do comprimento total da circunferência

$d_{formiga} = \dfrac{5}{6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \rightarrow d_{formiga} = \dfrac{5}{6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3$

$\therefore d_{formiga} = 5\pi$ cm

11. A

Determinando as raízes da equação $x^2 - 7x - 44 = 0$, temos $x = -4$ ou $x = 11$.

Logo, o raio da circunferência é $x = 11$. Portanto, o comprimento da circunferência será dado por:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 11$

$\therefore C = 69,08$

12. C

O polígono de n lados tem n ângulos internos.

Se dois desses ângulos medem 125°, então os outros (n – 2) ângulos medem 165°. Sendo S_i a soma dos ângulos internos:

$125° \cdot 2 + 165° \cdot (n - 2) = S_i = 180° \cdot (n - 2) \rightarrow$
$\rightarrow 250° = 25° \cdot (n - 2) \rightarrow n - 2 = 10 \rightarrow n = 12$

13. Polígono 1: (n + 4) lados. A_1: medida do ângulo interno.

Polígono 2: n lados. A_2: medida do ângulo interno. Do enunciado, temos: $A_1 - A_2 = 15° \rightarrow$

$\rightarrow \left(180° - \dfrac{360°}{n+4}\right) - \left(180° - \dfrac{360°}{n}\right) = 15° \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{360°}{n} - \dfrac{360°}{n+4} = 15° \rightarrow 15n^2 + 60n = 360n + 1440 - 360n \rightarrow n^2 + 4n - 96 = 0.$

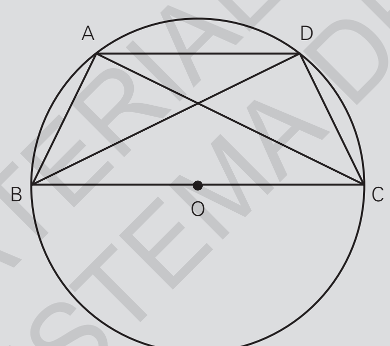
Portanto, n = –12 ou n = 8. Como n é natural, n = 8. Os polígonos são octógono e dodecágono.

14. C

Os vértices do pentágono regular dividem a circunferência em cinco arcos congruentes de medida igual a $\dfrac{360°}{5} = 72°$. Além disso, como $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos A e B, segue que os ângulos $O\hat{A}P$ e $O\hat{B}P$ são retos. Em consequência, $A\hat{P}B$ é o suplemento do ângulo central $A\hat{O}Q$ ou seja, 180° – 72° = 108°.

15. B

Lembrando que todo triângulo retângulo é inscritível na semicircunferência, e como os triângulos ABC e DBC são retângulos de mesma hipotenusa, temos a figura abaixo, sendo O o centro da circunferência:



Os ângulos ACB e ADB são congruentes, pois são ângulos inscritos que "enxergam" o mesmo arco (menor arco AB). Logo, $A\hat{D}B$ = 33°.

16. E

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é sempre 360°. Então:

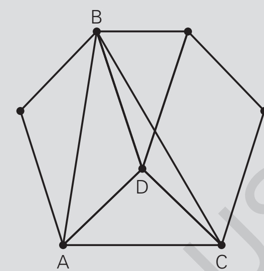
$n \cdot 15° = 360° \rightarrow n = 24.$

Logo, o número de diagonais de um polígono de 24 lados será dado por:

$d = \dfrac{24 \cdot (24 - 3)}{3} = 168$

17. C

Traçando os triângulos ABD, ACD e BCD, temos a seguinte imagem:



Os triângulos ABD, ACD e BCD são isósceles. Então:

$B\hat{A}D = A\hat{B}D = 45°$

$ADC = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$

$DAC = DCA = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$

$DBC = 60° + 90° = 150°$

Assim:

$A\hat{B}C = 15° + 45° = 60°$

$B\hat{A}C = 45° + 30° = 75°$

$B\hat{C}A = 15° + 30° = 45°$

Estudo para o Enem

18. B

A posição dos cavalos é irrelevante, pois ambos completarão as 10 voltas, iniciando e terminando o percurso no mesmo ponto. Assim, sobre a distância percorrida por cada cavalo do carrossel, pode-se escrever:

$D_{C1} = 10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1 = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rightarrow D_{C1} = 240$

$D_{C2} = 10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_2 = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \rightarrow D_{C2} = 180$

Dessa forma, a diferença das distâncias percorridas entre os dois cavalos será 60 m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. E

A distância percorrida pelo homem em sua caminhada diária corresponde a

$15 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cong 4500 \text{ m} = 4{,}5 \text{ km}.$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. C

Observação :108 e 180 = 108° e 180°

Então, temos:

pentágono retangular → z é o ângulo

$S_{\text{internos}} = 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot (5 - 2) = 540°$

$$z = \frac{S_{\text{internos}}}{n} = \frac{540°}{5} = 108°$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 108° \\ x = y \end{array}\right\} \to 2x + 108° = 180° \to x = y = 36°$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

6 PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO E QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Comentário sobre o módulo

Enfatize a definição de cada ceviana notável. Os alunos não podem acabar este módulo confundindo mediana com bissetriz e mediatriz. Destaque a caracterização de bissetriz e mediatriz como lugares geométricos.

Sobre os pontos notáveis, os alunos devem entender quais cevianas geram aquele ponto e qual propriedade aquele ponto tem (no caso do baricentro, incentro e circuncentro). Por exemplo, em vários exercícios é dito que um ponto é o incentro, e o aluno deveria automaticamente pensar nas bissetrizes que geraram aquele ponto e desenhá-las, pois provavelmente serão úteis na resolução.

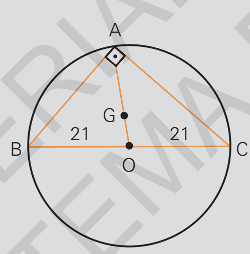
Finalmente, mostre como os pontos notáveis coincidem no triângulo equilátero. A relação entre lado, altura e propriedade do baricentro é frequente nos exercícios em que há triângulo equilátero.

O assunto abordado são os quadriláteros notáveis. Antes de iniciar a leitura deste módulo, explore os conhecimentos prévios dos alunos, perguntando qual a soma da medida dos ângulos internos de um quadrilátero e quantas diagonais a figura tem. Provavelmente eles chegarão à conclusão de que a resposta é 360°, com duas diagonais, pelo fato de saberem que um quadrado tem quatro ângulos retos e duas diagonais. Chame a atenção para os significados de lado, ângulo e vértice opostos. Inicialmente analise com os alunos as características básicas de um paralelogramo e, em seguida, mostre as propriedades desse polígono

Exercícios Propostos

7. C

Do enunciado, temos a figura:



Na figura, O é circuncentro, G é baricentro, A é ortocentro e AO é mediana. Sendo OG = x e AG = 2x (propriedade do baricentro), e como AO = 21 cm, temos: $x + 2x = 21 \rightarrow x = 7$ cm. Portanto, $AG = 2 \cdot 7 = 14$ cm.

8. C

O triângulo ABC é escaleno, pois seus lados têm medidas diferentes e qualquer triângulo pode ser inscrito numa circunferência. O centro dessa circunferência é o circuncentro do triângulo, ou seja, o ponto de encontro das mediatrizes dos lados.

9. A

O é baricentro, pois os pontos notáveis no triângulo equilátero coincidem. Aplicando a propriedade do baricentro no triângulo ABC, temos $OA = 2 \cdot OD$. Como OD = OE (raio), temos OA = 4 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AEO, pois $A\hat{E}O$ é reto (ângulo formado pelo raio e reta tangente no ponto de tangência), temos: $4^2 = 2^2 + AE^2 \rightarrow AE^2 = 12 \rightarrow$ $\rightarrow AE = 2\sqrt{3}$ cm.

10. D

O enunciado traz exatamente a definição da altura de um triângulo.

11. (F) – O incentro é o centro da circunferência inscrita.

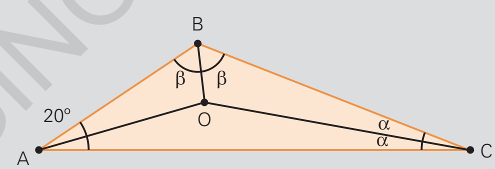
(V) – Essa é a definição de baricentro.

(F) – O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita.

(V) – Essa é a definição de ortocentro.

12. B

Do enunciado, temos a figura:

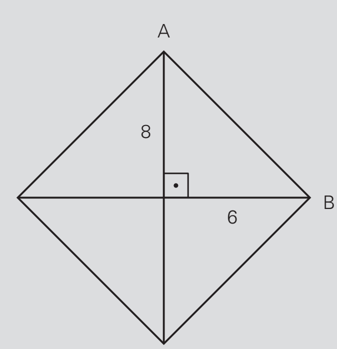


Como a soma dos ângulos internos é 180°, temos que $2\alpha + 2\beta = 160°$. Portanto, $\alpha + \beta = 80°$. Então, olhando para o triângulo BOC, temos:

$$B\hat{O}C + \alpha + \beta = 180° \therefore B\hat{O}C = 100°$$

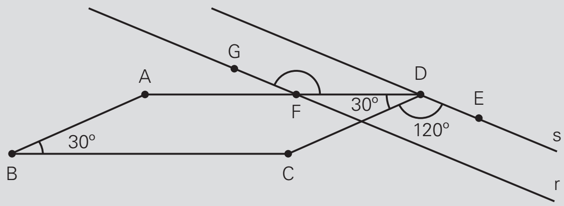
13. A

Desejamos obter o perímetro do losango. Do enunciado, vem a figura:



AB = 10 dm (triângulo retângulo pitagórico). Logo, o perímetro é $10 \cdot 4 = 40$ dm.

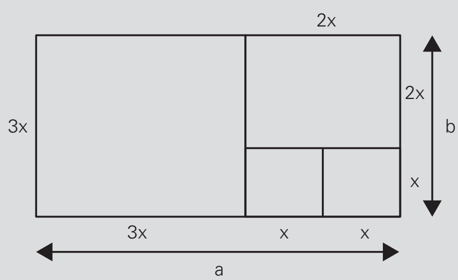
14. D



$A\hat{D}C = 30°$ (ângulos opostos do paralelogramo)

$G\hat{F}D = 30° + 120° = 150°$ (alternos internos)

15. Do enunciado, vem a figura:



$\therefore\ \frac{b}{a} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

16. D

A distância percorrida é dada pela soma das dimensões da praça de alimentação, ou seja,

$d = 16 + 12$

Portanto, $d = 28$ m.

17. Se ABCD e A'B'C'D são retângulos, e os percursos de Fábio e André têm o mesmo comprimento:

$FB = \overset{\frown}{B'C} - \overset{\frown}{A'D}$

$\frac{2\pi}{5} \cdot (40 - 30) \cong 12$ m

Estudo para o Enem

18. A

Marcando três pontos na circunferência, determinamos os vértices de um triângulo nela inscrito. O centro da moeda é o circuncentro do triângulo obtido.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. E

A nova arrumação (figura 2) consiste em reposicionar o retângulo da figura 1 de forma que seu comprimento passa a ser sua altura e vice-versa. De acordo com enunciado e as figuras, temos:

4ª = 2b + 2 → 2ª – 1 (I)

e

3b = 5ª + 5 (II).

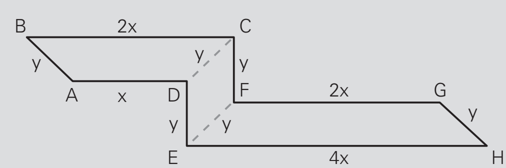
Substituindo (I) em (II), vem: a = 8 cm → b = 15 cm. Portanto, a figura 2, ou seja, a nova arrumação tem comprimento de 45 cm e altura 32 cm. Dessa maneira, a troca será possível.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais espaço e forma.

20. B

Considerando os trapézios isósceles, o losango e as informações da questão, temos:



O perímetro da figura será dado pela soma de todos os lados. Logo:

$P = x + 4x + 2x + 2x + y + y + y + y$

$P = 9x + 4y$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

7 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS E TEOREMA DE TALES

Comentário sobre o módulo

Com o objetivo de aplicar de forma rápida e efetiva as classificações, características e propriedades dos quadriláteros, faça uma rápida e direta revisão dos conceitos trabalhados no módulo anterior.

Reforce o fato de que as figuras devem ser analisadas com cuidado: se a proporção não for montada na ordem correta, todo o exercício será perdido.

Também deixe claro que a proporção estabelecida pelo teorema de Tales pode ser montada de diferentes maneiras. Por exemplo, se invertermos os dois lados da igualdade, a equação continua verdadeira. Talvez seja uma boa ideia mostrar as propriedades que uma proporção tem, como:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$$

Exercícios propostos

7. D

I. Verdadeira, pois os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares e, como são congruentes, são retos. Portanto, o paralelogramo de ângulos congruentes (retos) é o retângulo.

II. Verdadeira. Temos que h é a altura do trapézio e ℓ é a medida do lado não perpendicular às bases. Logo, como sen $30° = \frac{h}{\ell}$, vem $h = \frac{\ell}{2}$.

III. Falsa. Para que a descrição do enunciado seja verdadeira, é necessário que o ponto de intersecção das diagonais seja ponto médio.

8. B

I. Incorreto, pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

II. Correta.

III. Incorreto, não há dados suficientes para se calcular o valor dos ângulos.

9. Os paralelogramos têm pares de ângulos iguais. Logo:

$\hat{A}+\hat{C} = x$

$\hat{B}=\hat{D} = 4x$

A soma dos ângulos internos é igual a 180°. Então:

$\hat{A}+\hat{C}+\hat{B}+\hat{D} = 180°$

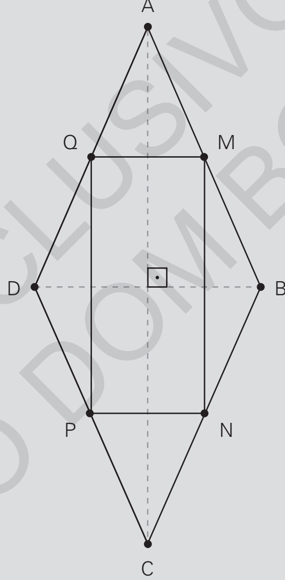
$x + x + 4x + 4x = 180°$

$10x = 180° \rightarrow x = 18°$

Logo, o maior ângulo mede $4 \cdot x = 4 \cdot 18° = 72°$.

10. B

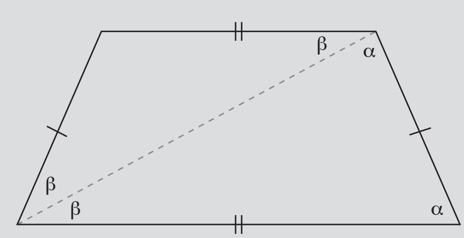
Considere a figura:



As alturas dos triângulos ADB e BCD partem, respectivamente dos vértices A e C do losango e se cruzam, sendo perpendiculares entre si. O mesmo ocorre com as alturas dos triângulos ABC e CDA, que partem dos vértices B e D. Como os ângulos AMQ e BMN são complementares, o ângulo QMN do quadrilátero é de 90°, e o mesmo ocorre com os outros quatro lados. Logo, trata-se de um retângulo que não é losango.

11. C

Temos,



Então, podemos calcular:

$\alpha = 2 \cdot \beta \rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$

$\beta + \alpha + \alpha = 180°$

$\frac{\alpha}{2} + 2\alpha = 180° \rightarrow 2{,}5\alpha = 180° \rightarrow \alpha = 72°$

12. A

Sejam a, b, c e d as medidas dos ângulos internos do quadrilátero.

Temos que $5a = 8b = 10c = 40d = k \rightarrow \rightarrow a = \frac{k}{5}; b = \frac{k}{8}; c = \frac{k}{10}; d = \frac{k}{40}$, em que k é a constante de proporcionalidade.

Além disso, sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°, temos:

$a + b + c + d = 360°$

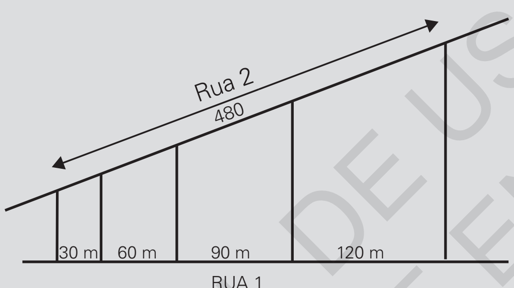
$\frac{k}{5} + \frac{k}{8} + \frac{k}{10} + \frac{k}{40} = 360°$

$8k + 5k + 4k + k = 40 \cdot 360°$

$k = \frac{40 \cdot 360°}{18} = 800°.$

$\therefore a = 160°, b = 100°, c = 80°, d = 20°$

13. Chamando as frentes da rua 2 de x, y, z e w, temos:



Somando as frentes da rua 1, teremos:
30 m + 60 m + 90 m + 120 m = 300 m
Usando o teorema de Tales:

$\frac{x}{30} = \frac{y}{60} = \frac{w}{90} = \frac{z}{120} = \frac{480}{300} = 1{,}6$

Assim,

$\frac{x}{30} = 1{,}6 \rightarrow x = 48$

$\frac{y}{60} = 1{,}6 \rightarrow y = 96$

$\frac{z}{90} = 1{,}6 \rightarrow z = 144$

$\frac{w}{120} = 1{,}6 \rightarrow w = 192$

Logo, a medida de cada frente é 48 m, 96 m, 144 m e 192 m.

14. C

Temos que:

$a = 18 + 22 \rightarrow a = 40$

$a + b + c = 120 \rightarrow 40 + b + c = 120 \rightarrow b + c = 80$

Usando o teorema da bissetriz interna, temos:

$\frac{b}{22} = \frac{c}{18} = \frac{b+c}{22+18} \rightarrow \frac{b}{22} = \frac{c}{18} = \frac{80}{40} \rightarrow \frac{b}{22} = \frac{c}{18} = 2 \rightarrow$
$\rightarrow c = 36 \text{ e } b = 44$

Portanto, a medida do maior lado do triângulo é de 44 cm.

15. B

Observando a figura, temos:

$\tan 30° = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{BA}}{6\sqrt{3}} \rightarrow 3\overline{BA} = 18 \rightarrow \overline{BA} = 6$

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 \rightarrow$

$\rightarrow \overline{AC}^2 = 108 + 36 \rightarrow \overline{AC}^2 = 144 \rightarrow \overline{AC} = 12$

Agora, usando o teorema da bissetriz interna:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{PA}} \rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\overline{CP}} = \frac{6}{12 - \overline{CP}} \rightarrow$

$\rightarrow 6 \cdot \overline{CP} = 72\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \cdot \overline{CP} \rightarrow$

$\rightarrow 6 \cdot \overline{CP} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) = 72\sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow 6 \cdot \overline{CP} = \frac{72\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)} \rightarrow$

$\rightarrow 6 \cdot \overline{CP} = 36\sqrt{3} \cdot \left(1+\sqrt{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \overline{CP} = \frac{36\sqrt{3} \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)}{6} \rightarrow$

$\rightarrow \overline{CP} = 6\sqrt{3} \cdot \left(1+\sqrt{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \overline{CP} = 6\left(3 - \sqrt{3}\right)$

Portanto, $\overline{CP} = 6\left(3 - \sqrt{3}\right)$.

16. Sejam

Lote I: 40 m para rua A e (x)m para rua B;
Lote II: 30 m para rua A e (y)m para rua B;
Lote III: 20 m para rua A e (z)m para rua B.

Aplicando o teorema de Tales, pois as divisas laterais são paralelas (perpendiculares a uma mesma reta), temos:

$\frac{x+y+z}{40+30+20} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{180}{90} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} \rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{30} = \frac{z}{20} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow x = 80$ m; $y = 60$ m e $z = 40$ m.

A medida de frente para a rua B de cada lote é 80 m, 60 m e 40 m, respectivamente.

17. B

Temos:

a = 2 (menor primo)

b = 1,5 · 2 = 3 (50% maior que a)

Aplicando o teorema de Tales na figura, temos:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{x}{9} \rightarrow 2x = 3x - 6 \rightarrow x = 6$$

Portanto, o valor de x = 6.

Estudo para o Enem

18. E

Como o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, e o segmento $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, o ângulo $D\hat{B}C$ vale 45°.

A soma dos ângulos internos do triângulo é 180°. Logo, o ângulo $B\hat{C}D$ vale: 180° – 95° – 45° = 40°

Então, o ângulo $\hat{C}$ vale:

$\hat{C} = 180° - 40° = 140°$

$\therefore \hat{C} = 140°$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. B

Sendo x o tamanho da barreira, e aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{30}{24} = \frac{x+2}{56-24} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{x+2}{32} \rightarrow 4(x + 2) = 160 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x + 8 = 160 \rightarrow 4x = 152 \rightarrow x = 38.$$

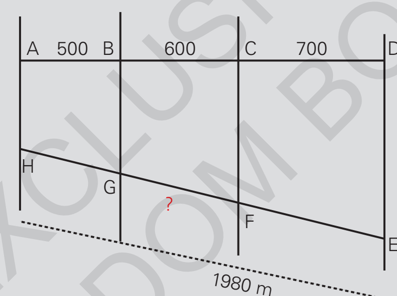
Portanto, x = 38 m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. B

De acordo com o enunciado, temos:



Utilizando o teorema de Tales, teremos:

$$\frac{\overline{GF}}{1980} = \frac{600}{1800} \rightarrow \frac{\overline{GF}}{1980} = \frac{1}{3} \rightarrow 3 \cdot \overline{GF} = 1980 \rightarrow \overline{GF} = 600$$

Portanto, GF = 600 m

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

8 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Comentário sobre o módulo

Neste módulo, o professor pode, por meio de aula dialogada, observar com os alunos as diferentes formas de triângulos e suas mais diversas aplicações. Deve ser enfatizado o teorema fundamental da semelhança de triângulos, demonstrando-o teoricamente, se desejável. Devem-se desenvolver os três casos de semelhanças de triângulos com a demonstração teórica dos teoremas.

Os triângulos servem como elemento de fixação e, justamente por isso, é comum encontrá-los na construção civil. As semelhanças de triângulos foram utilizadas por Tales de Mileto para determinar as grandes pirâmides do Egito, assim como aparece de maneira mística no curioso Triângulo das Bermudas. Contudo, o professor pode sugerir uma pesquisa em grupo sobre as curiosidades ao longo dos tempos envolvendo o uso dos triângulos.

Neste módulo, o professor pode recapitular os três casos de semelhanças de triângulo, revisar o conceito de perímetro de um polígono e demonstrar o cálculo de áreas em triângulos e quadriláteros. Deve-se reforçar o conceito de polígonos semelhantes e desenvolver algebricamente as razões entre perímetros e áreas de figuras semelhantes.

Para ir além

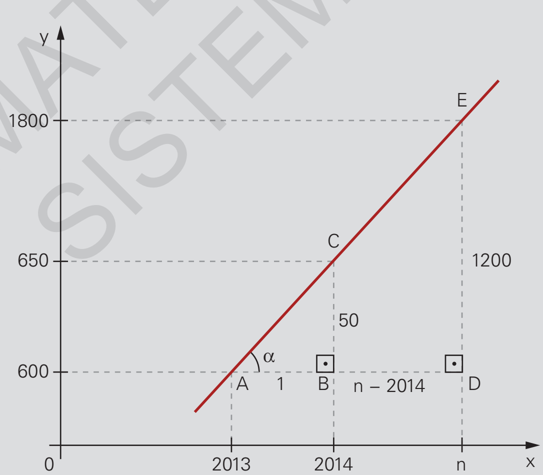
O *software* GeoGebra é uma ótima ferramenta para auxiliar nas construções e demonstrações de geometria. Podem-se dividir os alunos em duplas e trabalhar a construção dos triângulos e polígonos estudados nos dois últimos módulos, atentando-se aos três casos de semelhança de triângulos e às propriedades de semelhanças dos polígonos. Acesse-o em:

<www.geogebra.org>.

Exercícios propostos

7. D

Do enunciado, temos:



$C\hat{A}B = E\hat{A}D = \alpha$ e $A\hat{B}C = A\hat{D}E = 90°$. Logo, os triângulos ACB e AED são semelhantes.

Então:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{ED}$$

$$\frac{1}{n-2013} = \frac{50}{1200} \rightarrow \frac{1}{n-2013} = \frac{1}{24} \rightarrow$$

$$1 \cdot 24 = 1 \cdot (n - 2013) \rightarrow 24 = n - 2013 \rightarrow$$

$$\rightarrow n = 24 + 2013 \rightarrow n = 2037$$

Desta forma, a exportação triplicará em relação à de 2013 no ano de 2037.

8. Os triângulos AEB e BDC são semelhantes e do tipo 30, 60 e 90 (o ângulo em C é igual ao ângulo em B e em A).

Logo, pode-se calcular:

$$\Delta 30/60/90 \rightarrow \begin{cases} x = \text{cateto menor} \\ x\sqrt{3} = \text{cateto maior} \\ 2x = \text{hipotenusa} \end{cases}$$

Em ΔBCD:

$\Delta BCD \rightarrow \Delta 30/60/90$

$\overline{CD} = 3 = x\sqrt{3} \rightarrow x = \sqrt{3}$

$2x = \overline{BD} = 2\sqrt{3}$

Em ΔAEB:

$\Delta AEB \rightarrow \Delta 30/60/90$

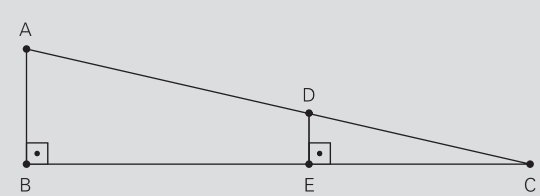
$2x = AB = 6 \rightarrow x = 3$

$x = \overline{BE} = 3$

$\overline{DE} = 3 + 2\sqrt{3}$

Portanto a medida de $\overline{DE} = 3 + 2\sqrt{3}$ cm.

9. Considere a figura abaixo.



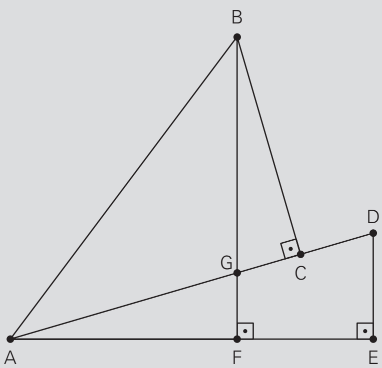
Os triângulos retângulos ABC e DEC são semelhantes por AA.

Portanto, sabendo que $\overline{AB} = 21$ dm, $\overline{DE} = 9$ dm e BE = 120 dm e vem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \rightarrow \frac{21}{9} = \frac{120 + \overline{EC}}{\overline{EC}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 7 \cdot \overline{EC} = 360 + 3 \cdot \overline{EC} \rightarrow \overline{EC} = 90 \text{ dm} = 9 \text{ m}$$

10. Considere a figura.



Como $\overline{AB} = 25 = 5 \cdot 5$ e $\overline{BC} = 15 = 5 \cdot 3$, segue que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo retângulo de lados 5, 3 e 4.

Logo, $AC = 5 \cdot 4 = 20$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ADE:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2 \rightarrow \overline{AE}^2 = 25^2 - 7^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AE} = \sqrt{576} \rightarrow \overline{AE} = 24$$

Como os triângulos ADE e BGC são semelhantes por AA:

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AE}} \rightarrow \overline{GC} = \frac{15 \cdot 7}{24} = \frac{35}{8}$$

Logo, $\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{CG} = 20 - \frac{35}{8} = \frac{125}{8}$.

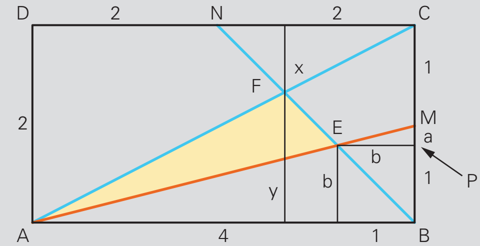
Por outro lado, os triângulos ADE e AGF também são semelhantes por AA.

Portanto:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{AF} = \frac{\frac{125}{8} \cdot 24}{25} = 15$$

11. D

De acordo com o enunciado, temos:



$\Delta NFC \sim \Delta AFBQ$

$$\frac{2}{4} = \frac{x}{y} \rightarrow 2y = 4x \rightarrow y = \frac{4x}{2} \rightarrow y = 2x$$

$$x + y = 2 \rightarrow x + 2x = 2 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Logo, $y = 2x \rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}$

$\rightarrow y = \Delta MEP \sim \Delta MAB$

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{b} \rightarrow b = 4a$$

$$a + b = 1 \rightarrow a + 4a = 1 \rightarrow 5a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{5}$$

Assim, $b = 4a \rightarrow b = 4 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow b = \frac{4}{5}$

Assim, a área do triângulo AEF será:

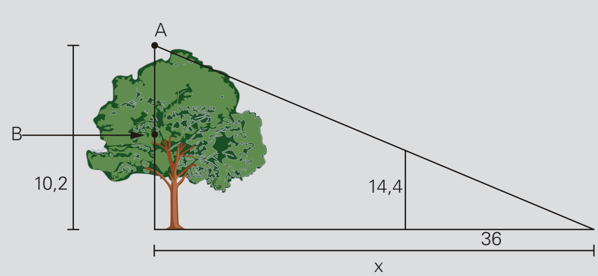
$$S_{\Delta AEF} = S_{\Delta ABF} - S_{\Delta ABE}$$

$$S_{\Delta AEF} = \frac{4y}{2} - \frac{4b}{2} \rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}}{2} - \frac{4 \cdot \frac{4}{5}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{8}{3} - \frac{8}{5}$$

$$\therefore S_{\Delta AEF} = \frac{16}{15}$$

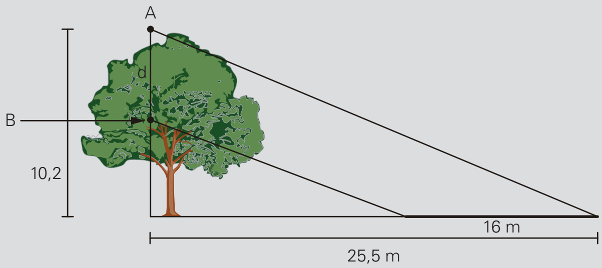
12. Calculando a medida da sombra da árvore:



$$\frac{10,2}{x} = \frac{14,4}{36} \rightarrow 14,4x = 10,2 \cdot 36 \rightarrow$$

$$\rightarrow 14,4x = 367,2 \rightarrow x = \frac{367,2}{14,4}$$

$$\therefore x = 25,5 \text{ m}$$



Aplicando teorema de Tales:

$$\frac{d}{10,2} = \frac{16}{25,5} \rightarrow 25,5d = 163,2 \rightarrow d = \frac{163,2}{25,5}$$

$\therefore$ d = 6,4 m

13. C

Podemos utilizar a semelhança de triângulos. Desse modo, temos:

$$\frac{h}{4,2} = \frac{3}{0,12} \rightarrow 0,12h = 3 \cdot 4,2 \rightarrow 0,12h = 12,6 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{12,6}{0,12} \rightarrow h = 105 \text{ m}$$

14. E

Desde que os triângulos ACE e BCD sejam semelhantes por AA, temos:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE} \rightarrow \frac{CD}{CD+3} = \frac{4}{5} \rightarrow CD = 12$$

Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACE, encontramos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 15^2$$

$$\overline{AC} = 5\sqrt{10}$$

15. B

Se d é a distância procurada, então:

$$\frac{d}{12} = \frac{2}{3} \rightarrow 3d = 12 \cdot 2 \rightarrow 3d = 24 \rightarrow$$

$$\rightarrow d = \frac{24}{3} \rightarrow d = 8 \text{ m}$$

16. D

Seja x a medida do lado do quadrado DEFG.

Os triângulos ABC e AEF são semelhantes por AA.

Portanto:

$$\frac{x}{40} = \frac{24-x}{24} \rightarrow 120 - 5x = 3x \rightarrow 8x = 120 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 15$$

Logo, x = 15 que é um múltiplo de 5.

17. C

Podemos utilizar a semelhança de triângulos:

$$\frac{h}{4,2} = \frac{3}{0,12} \rightarrow 0,12h = 3 \cdot 4,2 \rightarrow 0,12h = 12,6 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{12,6}{0,12} \rightarrow h = 105 \text{ m}$$

Estudo para o Enem

18. E

Para obter a altura, basta aplicar a semelhança de triângulos. Então, temos a seguinte relação:

$$\frac{h}{30} = \frac{8}{12} \rightarrow 12 \cdot h = 30 \cdot 8 \rightarrow 12h = 240 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{240}{12} \therefore h = 20 \text{ m}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. B

O mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o 2.

De fato, pois os triângulos 30°, 60° 90° são congruentes e o triângulo 30°, 30°, 120° é isósceles.

No mosaico 1, o triângulo 30°, 20°, 120° é isósceles, mas os triângulos 30°, 60°, 90° não são congruentes.

No mosaico 3, os triângulos 22°, 68°, 90° são congruentes, mas o triângulo 44°, 46°, 90° não é isósceles.

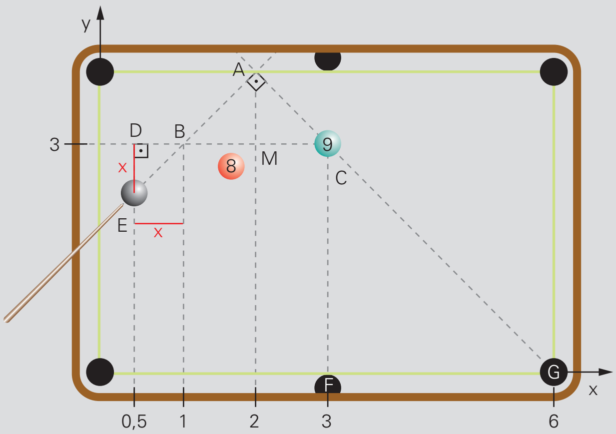
Nos mosaicos 4 e 5, não é possível formar um triângulo retângulo com as três peças.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização de um resultado de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

20. E

Considerando os dados do enunciado, temos:



Logo,

$\Delta ABC \sim \Delta CFG$

$AB = AC$

$BM = CM$

$BM = 1$

$B(1, 3)$

e

$\Delta ABC \sim \Delta DBE$

$\overline{DE} = \overline{DB}$

$DE = 0{,}5$

$E\ (0{,}5;\ 2{,}5)$

Portanto, a ordenada da posição original da bola branca era 2,5.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização de um resultado de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

9 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Comentários sobre o módulo

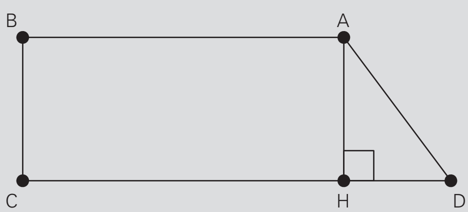
Deduza o teorema de Pitágoras e indique algumas de suas aplicações. Deduza também a fórmula para a diagonal do quadrado e a fórmula para a altura do triângulo equilátero. Enfatize que as fórmulas podem ser aplicadas diretamente, ou que podem ser obtidas com o uso do teorema de Pitágoras.

Exercícios propostos

7. Ao usarmos a fórmula da altura do triângulo equilátero, temos: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \rightarrow h = 3\sqrt{3}$
Logo, a diagonal do quadrado mede $d = 3\sqrt{3}$ cm.

8. C

Considere a figura, em que H é o ponto do segmento AH, perpendicular a $\overline{CD}$.



Tem-se que o segmento AB = CH = 9 cm. Logo, o segmento DH tem por medida DH = CD − CH = = 3 cm.

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras, temos:

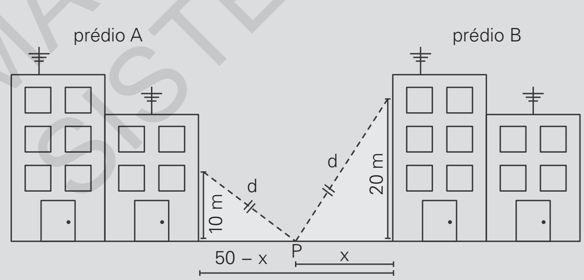
$5^2 = 3^2 + \overline{AH}^2$

$\overline{AH}^2 = 25 - 9$

$\overline{AH} = \sqrt{16} = 4$

Como o segmento AH = BC = 4 cm, teremos: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 9 + 4 + 12 + 5 = 30$ cm.

9. A



Como o ponto P está equidistante às crianças, temos:

$d^2 = 10^2 + (50 - x)^2$ e $d^2 = 20^2 + x^2$

Igualando as equações, obtemos:

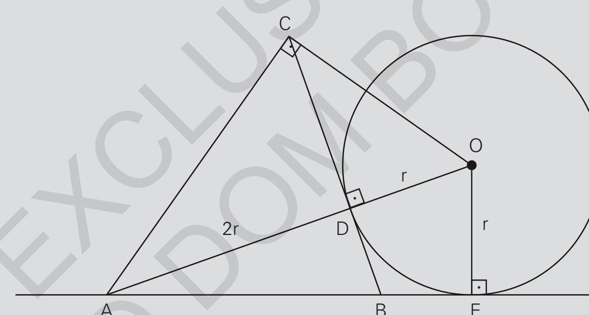
$20^2 + x^2 = 10^2 + (50 - x)^2$

$400 + x^2 = 100 + 2\,500 - 100x + x^2$

$100x = 2\,500 + 100 - 400 = 2\,200 \rightarrow x = \frac{2\,200}{100} =$
$= 22$

Portanto, x = 22 m.

10. Considere a figura a seguir.



a) No ΔAOE: $AE^2 + r^2 = (3r)^2$

$AE^2 = 8r^2$

$AE = 2r\sqrt{2}$

$\Delta ADB \sim \Delta AEO$

$\frac{AB}{3r} = \frac{2r}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot r}$

$AB = \frac{3 \cdot r}{\sqrt{2}}$

$AB = \frac{3 \cdot r\sqrt{2}}{2}$

b) No ΔACO, temos:

$CO^2 = (2r + r) \cdot r$

$CO^2 = 3 \cdot r^2$

$CO = r \cdot \sqrt{3}$

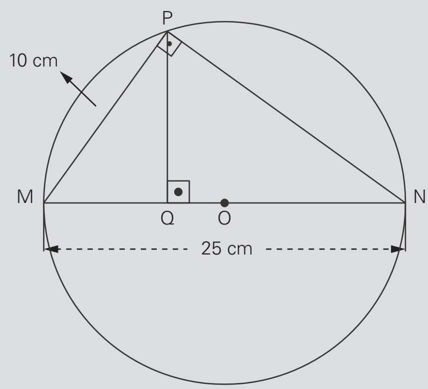
11. E

Ao aplicarmos o teorema de Pitágoras e utilizarmos a proporção dada no enunciado, podemos montar o seguinte sistema:

$x^2 + y^2 = (32 \cdot 2{,}5)^2$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$$

12. Considere a figura a seguir.



Considerando que todo triângulo inscrito numa semicircunferência com lado coincidindo com o diâmetro é retângulo, temos:

$PM^2 = 25 \cdot MQ$

$10^2 = 25 \cdot MQ$

$MQ = 4$

$PQ^2 = MQ \cdot QN$

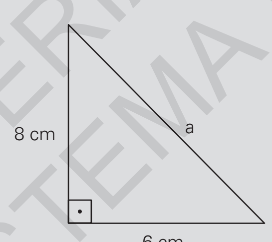
$PQ^2 = 4 \cdot (25 - 4)$

$PQ^2 = 84$

$PQ = 2\sqrt{21}$

13. B

Observe primeiro que:



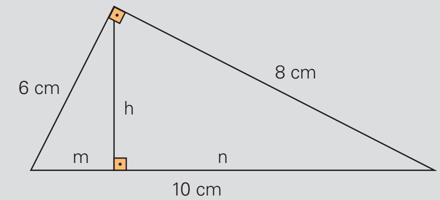
Obtendo a hipotenusa, temos:

$a^2 = 8^2 + 6^2$

$a = \sqrt{100}$

$a = 10$

Analisando a altura relativa (h), temos:



De acordo com as propriedades referentes à altura relativa à hipotenusa, podemos afirmar que:

$6^2 = m \cdot 10$

$36 = 10\ m$

$m = 3{,}6$

E que:

$8^2 = n \cdot 10$

$10n = 64$

$n = 6{,}4$

Por fim, basta aplicar a relação $h^2 = m \cdot n$ sobre o triângulo. Logo:

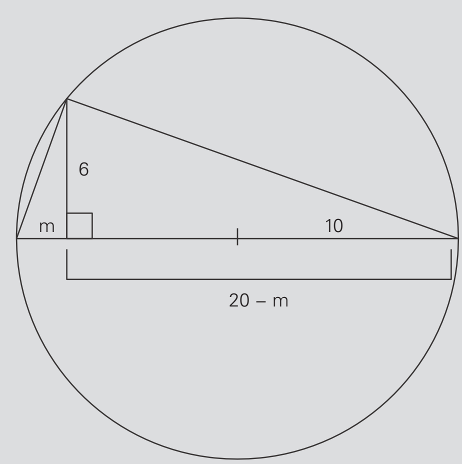
$h^2 = m \cdot n$

$h^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4$

$h = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$

Portanto, $h = 4{,}8$ m.

14. Pelas relações métricas do triângulo retângulo, podemos afirmar que $6^2 = (20 - m) \cdot (m)$.



Resolvendo, temos:

$6^2 = (20 - m) \cdot (m)$

$36 = 20m - m^2$

$m^2 - 20m + 36 = 0$

$a = 1 \qquad b = -20 \quad c = 36$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$

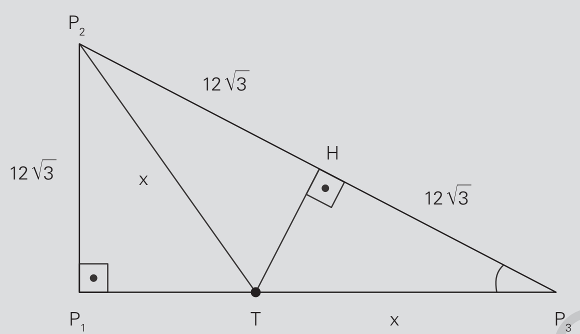
$$x_1 = \frac{20 + 16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$x_2 = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, $m = 2$ e $m = 18$.

Como o raio é 10, a resposta é $m = 2$.

15. Considere a figura a seguir.



Traça-se inicialmente o segmento $\overline{TH}$ perpendicular à hipotenusa $\overline{P_2P_3}$.

Calculando a medida do segmento P_1P_3, temos:

$$\left(\overline{P_1P_3}\right)^2 = \left(24\sqrt{3}\right)^2 - \left(12\sqrt{3}\right)^2$$

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{1296}$$

$$\overline{P_1P_3} = 36$$

Considerando que os triângulos $P_1P_2P_3$ e THP_3 são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{24\sqrt{3}}{x} = \frac{36}{12\sqrt{3}}$$

$$36x = 24 \cdot 12 \cdot 3$$

$x = 24$ m.

16. A

Desde que $AB \parallel EM$ e E seja o ponto médio do segmento AD, segue-se que EM é base média do triângulo ABD. Assim, temos $EM = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DEM, temos: $\overline{DM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{DE}^2 \rightarrow \overline{DM}^2 =$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$.

Podemos concluir então que $\overline{DM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Por conseguinte, dado que DH é um arco de circunferência com centro em M, encontramos:

$$\overline{EH} = \overline{HN} - \overline{EM} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

17. C

Sendo x e y as dimensões da TV menor, pode-se calcular:

$16^2 = x^2 + y^2$

$21^2 = (kx)^2 + (ky)^2 = k^2 \cdot (x^2 + y^2)$

$21^2 = k^2 \cdot 16^2$

$k = \left(\frac{21}{16}\right)$

Pela razão de proporção das áreas, $k^2 = \frac{A_1}{A_2}$. Logo:

$A_1 = xy$

$A_2 = k \cdot xy = \left(\frac{21}{16}\right)^2 \cdot A_1$

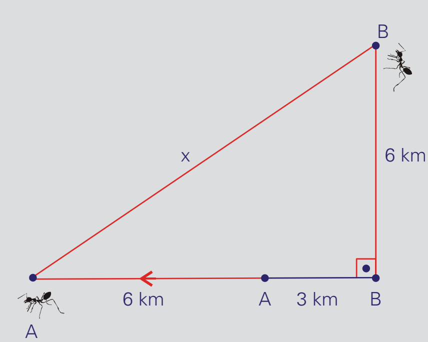
$A_2 = 1{,}723 \cdot A_1$

$\approx 72\%$ de acréscimo

Estudo para o Enem

18. D

Cada formiga, em duas horas, percorrerá 6 km. Desse modo, temos a seguinte situação:



Logo, $x^2 = 6^2 + 9^2 = 117$.

$x = \sqrt{117}$ km

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. A

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos AFE e ABE, obtemos:

$$\overline{AE}^2 = 9^2 + \left(\overline{AB} + 2\right)^2$$

e

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + 13^2$$

Logo, $81 + \overline{AB}^2 + 4 \cdot \overline{AB} + 4 = \overline{AB}^2 + 169$

$\overline{AB} = 21$ m.

Portanto, $\overline{AB} = 21$ m e $\overline{EF} = 23$ m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. D

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Assim:

$$\overline{AR} = a + d$$

$$\overline{AR} = \frac{a\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}$$

Portanto, a resposta é: $\dfrac{\frac{a\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}}{a} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

10 ÁREA DE FIGURAS PLANAS I – PARALELOGRAMO

Comentário sobre o módulo

Neste módulo foram estudadas as áreas de dois quadriláteros notáveis, o retângulo e o quadrado.

Exercícios propostos

7. Primeiro, temos:

$x + y + (y - 2) + (x - 1) = 35$

$x + y = 19$

$6 + y = 19$

$y = 13$

$S_{externa} = 6 \cdot 13 - (2 \cdot 1) = 76\ m^2$

Logo:

$S(x) = x \cdot y - (2 \cdot 1)$

$x + y = 19$

$y = 19 - x$

$S(x) = x \cdot (19 - x) - 2 = -x^2 + 19x - 2$

$x_{máx} = \dfrac{19}{2 \cdot (-1)}$

$x_{máx} = 9{,}5$

$y = 9{,}5$

8. 15 (01 + 02 + 04 + 08)

Sejam a e b, nessa ordem, a hipotenusa e o maior cateto do triângulo; como o menor lado mede 8 m, temos:

$a + b + 8 = 40$

$a + b = 32$

Além disso, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + 8^2$

$a^2 - b^2 = 64$

Sendo assim, $a - b = 2$. Dessa forma, $a = 17$ e $b = 15$.

9. B

Analisando cada retângulo decorado, obtemos dimensões de $(x + 2)$ m e 2 m. Logo:

$x^2 = 2 \cdot 2 \cdot (x + 2)$

$x^2 - 4x + 8 = 0$

Sendo assim, $x = 2 + 2\sqrt{3}$.

10. B

Vamos considerar:

A_I = área do triângulo I

A_{II} = área do triângulo II

A_{III} = área do triângulo III

Teremos, então:

$$\frac{A_I + A_{II}}{A_{III}} =$$

$$= \frac{a \cdot \frac{b}{2} + a \cdot b}{\frac{7a}{4} \cdot b} =$$

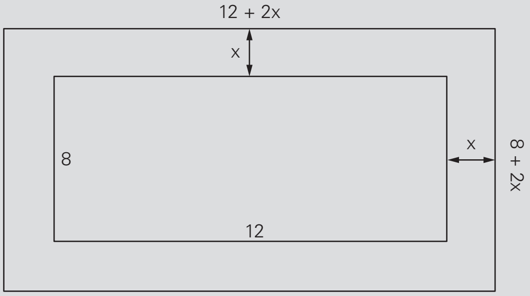
$$= \frac{a \cdot b \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right)}{a \cdot b \cdot \frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \cong 0{,}857 \cong 86\%$$

11. B

Podemos notar que o quadrilátero MNPQ é um quadrado, com lado medindo $a\sqrt{5}$. Assim, a resposta é $5a^2$.

12. Se x é a largura da calçada, podemos desenhar:



Sendo assim:

$S_{calçada} = 69\ m^2 = ((8 + 2x) \cdot (12 + 2x)) - 8 \cdot 12$

$69 = 96 + 16x + 24x + 4x^2 - 96$

$4x^2 + 40x - 69 = 0$

$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-69)$

$\Delta = 2\,704$

$x = \dfrac{-40 \pm \sqrt{2704}}{2 \cdot 4}$

$x = \dfrac{-40 \pm 52}{8} \rightarrow \begin{cases} x' = -11{,}5 \text{ (não convém)} \\ x'' = 1{,}5 \text{ m} \end{cases}$

$x_I = \dfrac{-40 - 52}{8} = \dfrac{-92}{8} = -11{,}5$

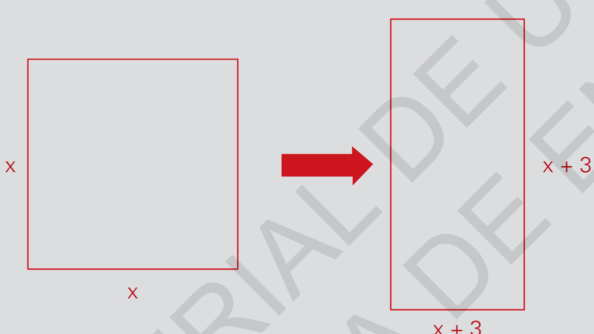
$x_{II} = \dfrac{-40 + 52}{8} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$

Portanto, a largura da calçada deverá ser de, no máximo, 1,5 m.

13. Com base nos dados informados na questão, a área de terreno que excede à do campo é: $200\,000 - (105 \cdot 68) = 192\,860$ m².

14. B

Considere a transformação:



Como a área de um retângulo é dada pela fórmula b · h, temos:

$A = (x - 3)(x + 3)$

$A = x^2 - 3^2$

$A = x^2 - 9$

15. D

Sabendo que O é o centro do quadrado e R é o ponto médio do lado AB, temos que $\overline{RO}$ é a diagonal do quadrado pintado. Logo, $\overline{RO} = \dfrac{x}{2}$.

O resultado é dado por: $\dfrac{\frac{\overline{RO}^2}{2}}{\overline{AB}^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \dfrac{1}{8}$.

16. A

Calculando as áreas, obtemos:

$A_{ABCD} = x^2$

$A_{DEFG} = y^2$

Sendo assim, temos: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

17. Como (AEF) = 2S, pela simetria da figura, temos (EBDF) = (BDHG) = S. Assim, os triângulos AEF e ABD são semelhantes por AA.

Logo, (ABD) = (AEF) + (EBDF) = 3S.

Portanto:

$\dfrac{(AEF)}{(ABD)} = \left(\dfrac{x}{b}\right)^2$

$\dfrac{2S}{3S} = \left(\dfrac{x}{b}\right)^2$

$\therefore \dfrac{x}{b} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Estudo para o Enem

18. E

Para obter o resultado solicitado, teremos:

$\dfrac{7\,000 \cdot 10\,000}{40 \cdot 125} = \dfrac{70\,000\,000}{5\,000} = 14\,000.$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. A

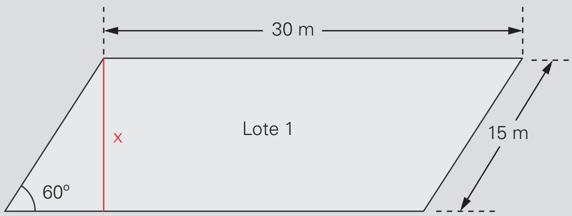
Como os triângulos retângulos são isósceles e congruentes, seus catetos medem 18 m. A base do paralelogramo mede 24 m − 18 m = 6 m. Logo, a área do passeio será igual a 6 · 18 = = 108 m².

Competência: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

20. C

Vamos considerar a figura a seguir.



$$\frac{15}{\text{sen}\,90°} = \frac{x}{\text{sen}\,60°}$$

$$x = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 15 \cdot \frac{1,7}{2}$$

$$x \approx 12,75 \text{ m}$$

Logo:

$$S_{\text{lote1}} = 12,75 \cdot 30 = 382,5 \text{ m}^2$$

$$S_{\text{lote2}} = 15 \cdot 30 = 450 \text{ m}^2$$

Sendo assim, o Lote 2 é o único que tem área suficiente para a execução do projeto.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

11 ÁREA DE FIGURAS PLANAS II – TRIÂNGULOS

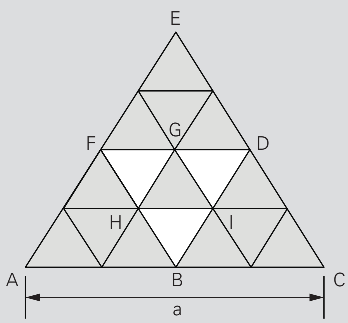
Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudadas as áreas dos triângulos a partir das medidas da base e da altura, quando indicadas a área do triângulo no caso de dois catetos adjacentes; e o ângulo entre eles e a área do triângulo em dois casos particulares: o triângulo retângulo e o triângulo equilátero.

Exercícios propostos

7. D

Dividindo o triângulo **ABC** e os triângulos equiláteros congruentes ao triângulo **GHI**, podemos concluir que a área assinalada é $\frac{13}{16}$ da área total do triângulo ABC. Logo:



$$A = \frac{13}{16} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{13a^2 \cdot \sqrt{3}}{64}$$

8. A

Sabemos que a área das cerâmicas é de $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04\ m^2$

Contando o número de cerâmicas, temos:

$$58 \cdot 0{,}04 + \frac{20}{2} \cdot 0{,}04 = 2{,}27\ m^2.$$

Separamos a contagem entre as cerâmicas inteiras e aquelas pela metade. Multiplicando pelo valor do metro, temos: $2{,}4 \cdot 12{,}5 = 34$.

9. A

Sendo L a medida, em metros, de cada lado do triângulo equilátero de área $9\sqrt{3}\ cm^2$, temos que:

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$L = 6\ m$$

Conseguimos visualizar que os quatro triângulos menores são semelhantes ao triângulo maior, de modo que a razão de semelhança é igual a $\frac{1}{2}$.

Logo, a medida dos lados dos triângulos menores é igual a 3 m. Então, o resultado pedido é igual a $\frac{3\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sqrt{3} = \sqrt{6{,}75}$ cm.

10. $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{1}{4}$

$$\frac{S_{RC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{S_{RQC}}{8}$$

$$S_{RQC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{PBQ}}{S_{RQC}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = \frac{9}{1}$$

$$\frac{9}{1} = \frac{S_{PBQ}}{\frac{1}{2}}$$

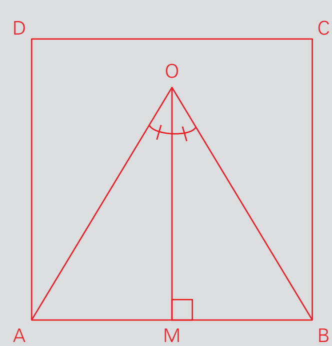
$$S_{PBQ} = \frac{9}{2}$$

$$S_{hachurado} = S_{ABC} - S_{PBQ} = 8 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$$

$$S_{hachurado} = 3\ cm^2$$

11. E

Podemos considerar a figura a seguir, em que M é o ponto médio do lado AB.



Do triângulo retângulo OMB, obtemos:

$$\text{tg } M\hat{O}B = \frac{\overline{BM}}{\overline{MO}}$$

$$\overline{MO} = \frac{\overline{AB}}{2\text{tg } \frac{\theta}{2}}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$\overline{AB} = 1$. Assim, $(AOB) = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{MO}}{2} = \dfrac{1}{4\text{tg}\,\frac{\theta}{2}}$

A área do quadrado ABCD é maior que a área do triângulo AOB se (ABCD) > (AOB):

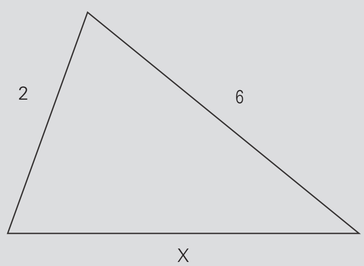
$$1^2 > \frac{1}{4\text{tg}\,\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{tg}\,\frac{\theta}{2} > \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Logo, como tg 15° ≅ 0,2679 > 0,25 e

$0° < \theta < 180°$, temos que $30° < \theta < 180°$. Note que $]30°, 150°[\subset]30°, 180°[$.

12. Considere a figura:



Temos:

$$S_n = \frac{1}{2}\ \text{ab sen}\ \alpha$$

$$6 = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (6) \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$\text{sen}\ \alpha = 1$$

$$\alpha = 90°$$

Portanto, trata-se de um triângulo retângulo.

Logo, podemos calcular utilizando o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 2^2 + 6^2$$

$$x^2 = 4 + 36$$

$$x = \sqrt{40}$$

$$x = 2\sqrt{10}\ \text{cm}$$

13. B

Sendo, $\overline{AB} = 2x$ e $\overline{BC} = 2y$, temos:

$$A_{DEF} = A_{ABCD} - A_{ADE} - A_{BEF} - A_{CDF}$$

$$A_{DEF} = 2x \cdot 2y - \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y - \frac{1}{2} \cdot x \cdot y - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y$$

$$A_{DEF} = 4xy - \frac{5}{2}\ xy$$

$$A_{DEF} = \frac{3}{2}\ xy$$

Logo, a resposta é:

$$\frac{A_{DEF}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{2}\ xy}{4xy} = \frac{3}{8}$$

14. A

Analisando o triângulo, concluímos que seus lados formam uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

Logo, o lado do triângulo JKL será $\frac{1}{8}$ do lado do triângulo ABC.

Sabendo que o lado do triângulo ABC é 1, vamos considerar que o lado do triângulo JKL é $\frac{1}{8}$.

Portanto, sua área será dada por: $A = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{256}$$

15. C

Podemos calcular a área do triângulo ABC utilizando a fórmula de Heron:

$$p = \frac{8 + 10 + 12}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{15 \cdot (15-8) \cdot (15-10) \cdot (15-12)}$$

$$A = 15\sqrt{7}$$

Agora podemos calcular o raio R da circunferência inscrita no triângulo ABC.

$$15 \cdot \sqrt{7} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot R}$$

$$60 \cdot R \cdot \sqrt{7} = 8 \cdot 10 \cdot 12$$

$$R = \frac{16}{\sqrt{7}}$$

$$R = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

O raio r da circunferência que passa pelos pés das alturas do triângulo ABC é a metade do raio R da circunferência circunscrita no triângulo ABC.

Sendo assim: $R = \dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

16. E

Como já conhecemos os lados AB e BC, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para descobrir quanto mede o lado AC. Logo:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$12^2 + AC^2 = 20^2$

$AC^2 = 256$

$AC = 16$

Note que, como os pontos E, F e G são pontos médios do triângulo ABC, temos: $\Delta BEF \sim \Delta EAG \sim \Delta FGC \sim \Delta GFE$.

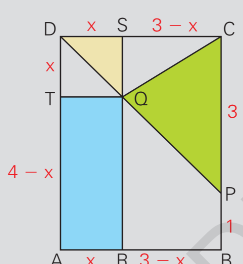
Também teremos que $\begin{matrix} \overline{AG} \equiv \overline{EF} = 8 \\ \overline{AE} \equiv \overline{FG} = 6 \end{matrix}$.

Logo, a área do triângulo FEG será: $A_{FEG} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} =$

$= 24\ cm^2$.

17. A

De acordo com o enunciado, pode-se desenhar:



A soma das áreas hachuradas será:

$$S(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3 \cdot (3 - x)}{2} + x \cdot (4 - x)$$

$$S(x) = \frac{x^2 + 9 - 3x + 8x - 2x^2}{2}$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot (-x^2 + 5x + 9)$$

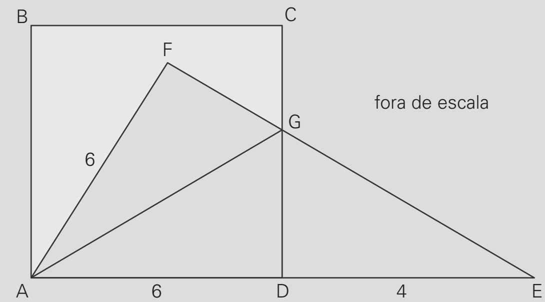
$$S_{máx} = Y_{máx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-(5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 9)}{4 \cdot (-1)}$$

$$S_{máx} = \frac{61}{8}$$

Estudo para o Enem

18. B

Considere a figura a seguir.



No triângulo AFE, temos:

$EF^2 + 6^2 = 10^2 \rightarrow EF^2 = 100 - 36 \rightarrow EF^2 = 64 \rightarrow$
$\rightarrow EF = \sqrt{64} \rightarrow EF = 8$

$\Delta EDG \sim \Delta EFA \rightarrow \dfrac{DG}{6} = \dfrac{4}{8} \rightarrow DG = 3\ cm$

$\Delta GFA \sim \Delta GDA$ (caso HC).

Portanto, têm a mesma área A: $A = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9\ cm^2$.

Sendo assim, a área S pedida será dada por: $S = 6^2 - 2 \cdot 9 = 18\ cm^2$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. B

$$S\Delta = \frac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{2}$$

$$S\Delta = 18\sqrt{2}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. A

Para que as áreas dos terrenos sejam iguais, devemos considerar que BD = DC = 10 m.

No triângulo ABD, temos:

$AD^2 = 21^2 + 10^2$

$AD \approx 23\ m$

Então, o comprimento total do muro será dado por, aproximadamente,

$21 + 29 + 20 + 23 = 93$ m.

Portanto, a área total de muro construído será de, aproximadamente,

$93 \cdot 3 = 279$ m².

O valor total da construção será de, aproximadamente, $279 \cdot 90 = 25 \cdot 110{,}00$. Ou seja, cerca de 25 mil reais.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

12 ÁREA DE FIGURAS PLANAS III – TRAPÉZIOS, LOSANGOS E CÍRCULOS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudados os cálculos das áreas do trapézio e do losango, com a demonstração das fórmulas das áreas de cada um para o aprofundamento do tema. Também foram estudadas as áreas das figuras planas com formato curvilíneo: o círculo e a coroa circular. Também foi demonstrada, geometricamente por aproximação, a fórmula da medida da área do círculo.

Exercícios propostos

7. A área do trapézio é $A_t = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$. Logo:

$22{,}32 = \dfrac{(8 + 6{,}4) \cdot h}{2}$

$44{,}54 = 14{,}4\ h$

$h = 3{,}10$ m

8. D

Calculando, temos:

$S = \dfrac{(b + B) \cdot h}{2} = \dfrac{(b + B) \cdot 50}{2} = 1\,800$

$b + B = 72$

$\dfrac{b}{8} + \dfrac{B}{8} = \dfrac{72}{8}$

$\dfrac{b}{8} + \dfrac{B}{8} = 9$

Dois números inteiros cuja soma é 9:

1 e 8

$1 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 72$

2 e 7

$2 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 72$

3 e 6

$3 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 72$

4 e 5

$4 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 72$

Ou seja, 4 possibilidades.

9. A

Temos que $A_{ACFG} = \overline{AC}^2 = s_1$ e $A_{ABHI} = \overline{AB}^2 = s_2$.

Logo, no triângulo ABC podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

$\overline{BC}^2 = S_1 + S_2$

Sendo assim, a área do trapézio BCDE é dada por:

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2}\,(\overline{CD} + \overline{BE})$

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2} \cdot (\overline{CX} + \overline{BX}) \cdot \overline{BC}$

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BC}$

$A_{BCDE} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BC}^2$

$A_{BCDE} = \dfrac{S_1 + S_2}{2}$

10. C

Sendo **h** a altura do trapézio e considerando as informações contidas no enunciado, podemos escrever:

$PQ = x$

$SR = 3x$

$S_{trapézio} = \dfrac{(x + 3x) \cdot h}{2} \rightarrow S_{trapézio} = 2xh$

$S_{quadrilátero} = xh$

$\dfrac{S_{trapézio}}{S_{quadrilátero}} = \dfrac{2xh}{xh} = 2$

11. E

Área do lote: $20(12 + 18) = 600$ m².

Área construída: $\dfrac{(x + 12) \cdot 20}{2} = 10x + 120$.

De acordo com as informações do enunciado, temos:

$\dfrac{40}{100} \cdot 600 \leq 10x + 120 \leq \dfrac{60}{100} \cdot 600$

$240 \leq 10x + 120 \leq 360$

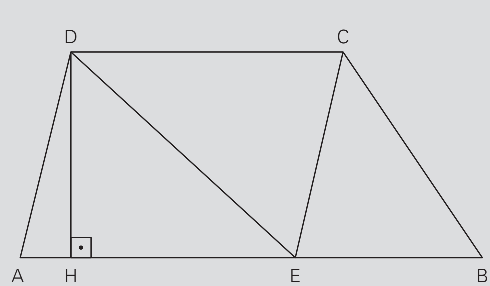
$120 \leq 10x \leq 240$

$12 \leq x \leq 24$

Logo, $x \in [12, 24]$.

12. E

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de D sobre $\overline{AB}$.



Traçando CE e escrevendo $\overline{BE} = 54 - \overline{AE}$, temos:

$$A_{ADE} = A_{BCDE}$$

$$A_{ADE} = A_{CDE} + A_{BCE}$$

$$A_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{DH}$$

$$A_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DH} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{DH}$$

$$\overline{AE} = 26 + 54 - \overline{AE}$$

$$\overline{AE} = 40 \text{ cm}$$

13. C

Sendo **r** o raio do círculo, se aumentarmos a medida de r em 20%, obtemos um círculo de área $\pi \cdot (1{,}2r)^2 = 1{,}44\ \pi r^2$. Ou seja, 44% maior que a área do círculo de raio r.

14. D

Temos que a altura do retângulo é 1,5x. Logo, a resposta será obtida por:

$$A = x \cdot 1{,}5x + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1{,}5 + \frac{\pi}{8}\right) x^2$$

15. B

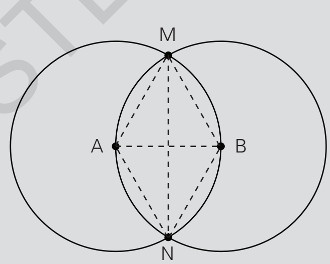
Sejam **l**, **r** e **R**, respectivamente, o lado do quadrado, o raio do círculo menor e o raio do círculo maior.

Logo, como $l = 2r$ e $R = r\sqrt{2}$, temos que a área escura é dada por: $l^2 - \pi r^2 \cong (2r)^2 - 3{,}14r^2 \cong 0{,}86r^2$.

Sendo assim, como a área do círculo maior é $\pi R^2 \cong 6{,}28r^2$, obtemos: $\frac{0{,}86r^2}{6{,}28r^2} \cdot 100\% = 13{,}7\%$.

16. D

Considere a figura, em que **A** e **B** são os centros das circunferências e **M** e **N** são os pontos em que elas se intersectam.



Sabendo que os triângulos ABM e ABN são equiláteros (já que os segmentos AM, BM e AB são congruentes), podemos concluir que $N\hat{A}M = 120°$.

A área solicitada corresponde à soma das áreas de dois segmentos circulares congruentes de raio 10 m e ângulo central igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad. Então:

$$2 \cdot \frac{10^2}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$100 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}\right) m^2$$

17. a) Vamos supor que **ACDE** seja um retângulo. Assim: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 15 - 7 = 8$ cm.

Então, sendo $\overline{AE} = \overline{CD} = 6$ m, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo BCD para encontrar $\overline{BD} = 10$ m.

Por conseguinte, o custo total da cerca é igual a: $7 \cdot 100 + 10 \cdot 200 =$ R$ 2.700,00.

b) Se **ACDE** é um retângulo, então:

$$A_{ABDE} = \frac{\overline{AB} + \overline{DE}}{2} \cdot \overline{AE}$$

$$A_{ABDE} = \frac{7 + 15}{2} \cdot 6$$

$$A_{ABDE} = 66 \text{ m}^2$$

c) Como $BB' = 2BC = 16$ m e $B'D' = CD = 6$ m, temos:

$$A_{BB'D} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BB'} \cdot \overline{B'D'}$$

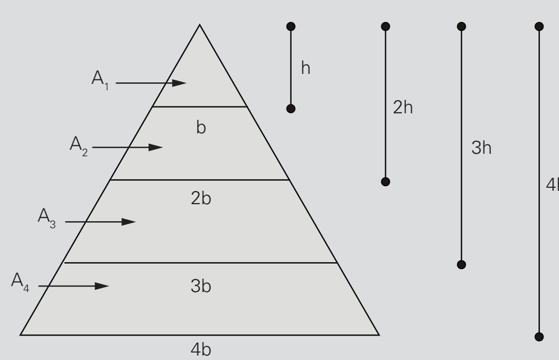
$$A_{BB'D} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6$$

$$A_{BB'D} = 48 \text{ m}^2$$

Estudo para o Enem

18. A

Considere a figura a seguir.



$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_2 = \frac{(b + 2b)}{2} \cdot h = \frac{3bh}{2}$$

$$A_3 = \frac{(2b + 3b)}{2} \cdot h = \frac{5bh}{2}$$

$$A_4 = \frac{(3b + 4b)}{2} \cdot h = \frac{7bh}{2}$$

Portanto, são sete terços da área do grupo com predominância de proteínas.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. E

Seja a área do quadrado de lado a: $A = a \cdot a = a^2$, nota-se que as hortas das alternativas B e C têm metade da área do quadrado: $A_h = \frac{a^2}{2}$.

A horta da alternativa A é menor que a metade do quadrado. Logo: $A_h < \frac{a^2}{2}$.

A área da horta da alternativa D é:

$a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{2a^2 - a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2}$. Ou seja, a metade da área do quadrado.

Desta maneira, a horta da alternativa E é a que tem maior área.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. A

A área total de cobertura das duas antenas era de $2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi$ km².

Com a nova antena, a área passou a ser de $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$ km².

Logo, o aumento foi de $16\pi - 8\pi = 8\pi$ km².

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

13 ÁREA DE FIGURAS PLANAS IV – CÍRCULOS E POLÍGONOS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, continuamos a estudar as áreas das figuras planas com formato curvilíneo: o setor circular e o segmento circular. Também foram demonstradas as fórmulas utilizadas para o cálculo da área do segmento circular em função do ângulo central.

Exercícios propostos

7. C

De acordo com as informações do enunciado, a resposta será dada por: $\frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{8\pi}{3}$ cm².

8. E

Sabemos que a área do losango inscrito em um retângulo é metade da área do retângulo. Basta obtermos a área do retângulo e do círculo: $A_{retângulo} = 8 \cdot 12 = 96$

Dividindo pela metade, temos: $\frac{96}{2} = 48$ cm².

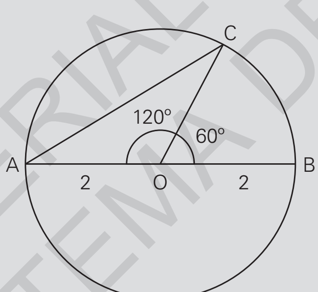
$A_{círculo} = \pi r^2$

$A_{círculo} = 3^2\pi$

$A_{círculo} = 9\pi$

9. C

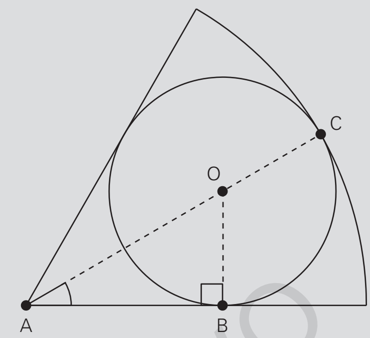
De acordo com as informações do enunciado, a área pedida corresponde à região destacada na figura abaixo, ou seja, a área de um segmento circular de 120°.



$$A = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen}120°$$

$$A = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

10. a) Considere a figura.



Como o círculo e o setor são tangentes internamente, temos $\overline{AC} = R$, $\overline{OB} = \overline{OC} = r$ e $B\hat{A}O = 30°$.

Sendo assim, segue que $\overline{AO} = \overline{AC} - \overline{OC} = R - r$.

Portanto, do triângulo ABO, temos:

$$\text{sen } B\hat{A}O = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}}$$

$$\text{sen } 30° = \frac{r}{R - r}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$$

Em consequência, a razão pedida é igual a:

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2 \cdot \frac{60°}{360°}} = 6 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

b) Se R = 4r, então, do triângulo ABO, obtemos:

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{r}{R - r}$$

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}$$

Logo:

$$\cos\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

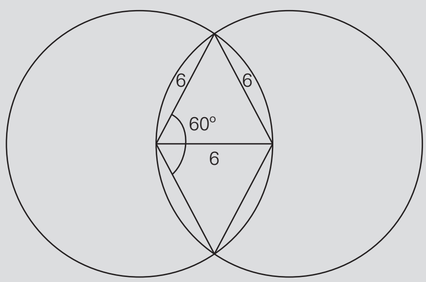
$$\cos\theta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\cos\theta = \frac{7}{9}$$

11. C

O segmento $\overline{C_1C_2}$ é igual ao raio de ambas as circunferências, e também é igual a 6.

Assim, pode-se concluir:



Logo, a área da região limitada pelos círculos é composta pela área dos círculos menos a área da intersecção entre eles.

Já a área da intersecção é composta por dois triângulos equiláteros de lado 6 e quatro segmentos circulares.

Assim, considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$, podemos estimar a área da intersecção como:

$$S_\Delta = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_\Delta = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_\Delta = 9\sqrt{3}$$

$$S_\Delta \cong 15{,}6$$

$$S_{seg} = S_{setor} - S_n$$

$$S_{seg} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60°}{360°} - 9\sqrt{3}$$

$$S_{seg} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60°}{360°} - 9\sqrt{3}$$

$$S_{seg} = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

$$S_{seg} \cong 3{,}27$$

$$S_{intersec} = 2\,S_\Delta + 4\,S_{seg}$$

$$S_{intersec} = 2 \cdot 15{,}6 + 4 \cdot 3{,}27$$

$$S_{intersec} \cong 44{,}28$$

Logo, a área da região limitada pelos círculos será:

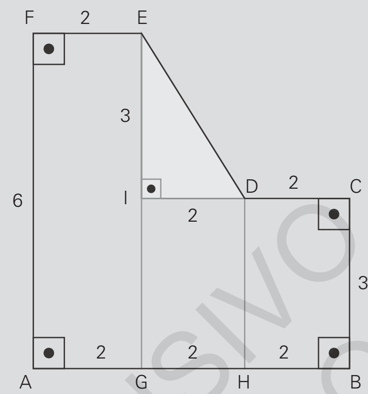
$$S_\infty = 2\,S_0 - S_{intersec}$$

$$S_0 = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \cong 113$$

$$S_\infty = 2 \cdot 113 - 44{,}28 \cong 181{,}72$$

$$S_\infty = 182\ cm^2$$

12. a) Teremos:

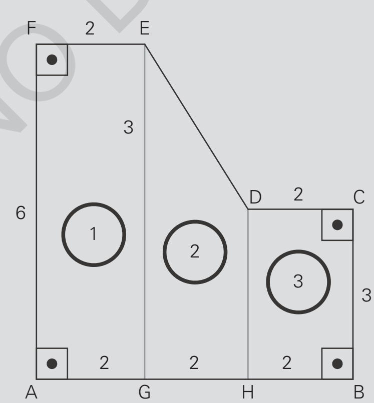


Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo EID:

$DE^2 = 3^2 + 2^2$

$DE = \sqrt{13}$ cm

b) Vamos obter:



Considerando A_1 a área do retângulo AGEF, A_2 a área do trapézio GHDE e A_3 a área do retângulo HBCD, podemos calcular a área A do polígono ABCDEF da seguinte forma:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = 6 \cdot 2 + \frac{(6 + 3) \cdot 2}{2} + 3 \cdot 2$$

$$A = 12 + 9 + 6$$

$$A = 27\ cm^2$$

13. A

Considerando que:

- S: a área do triângulo ABC
- S_1: a área do triângulo AMN
- S_2: a área do trapézio BCNM

Além disso, os triângulos AMN e ABC são semelhantes. Então:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{8}{18}\right)^2 \rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \rightarrow S_1 = \frac{16 \cdot S}{81}$$

$$S_2 = S - S_1 = \frac{65 \cdot S}{81}$$

Portanto, a razão entre a área do trapézio BCNM e a área do triângulo AMN é: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{65 \cdot S}{81}}{\frac{16 \cdot S}{81}} =$

$= 4{,}0625 \cong 4$.

14. E

Como sabemos que o lado dos furos mede 1 cm, a área de cada furo é dada por:

$$\frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cong \frac{17}{40}\ \text{cm}^2$$

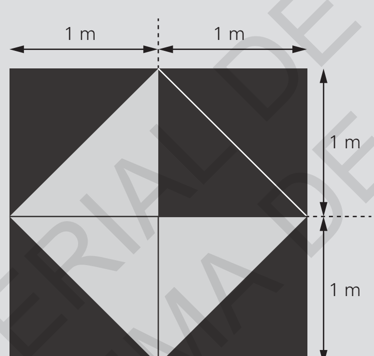
Sabemos também que o número de furos em cada etapa cresce segundo uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 1 e razão 3.

Sendo assim, o número de furos na 14ª etapa é igual a $1 + 13 \cdot 3 = 40$.

Logo, o percentual pedido é igual a: $\frac{170 - 40 \cdot \frac{17}{40}}{170} \cdot$

$\cdot\ 100\% = 90\%$

15. Vamos considerar esta tela dividida em 8 triângulos retângulos congruentes:



a) A área pintada de preto é $\frac{5}{8}$ da área total, ou seja: $A = \frac{5}{8} \cdot (2 \cdot 2) = 2{,}5\ \text{m}^2$.

A proporção da cor preta para a cor cinza será de $\frac{5}{3}$.

b) A área pintada de cinza será $4 - 2{,}5 = 1{,}5\ \text{m}^2$.

Portanto, o custo com a pintura da tela será de: $2{,}5 \cdot 100 + 1{,}5 \cdot 200 = 550$.

Logo, o custo total do quadro será de R$ 550,00.

c) Considerando a pintura com cores invertidas, temos o seguinte gasto: $1{,}5 \cdot 100 + 2{,}5 \cdot 200 = 650$.

Portanto, um aumento de R$ 100,00.

Em porcentagem, será dado por: $\frac{100}{550} = \frac{2}{11} =$

$= 0{,}1818 \rightarrow 18{,}18\%$

16. A

Desde que os ângulos $A\hat{Q}P \equiv S\hat{Q}B$ sejam opostos pelo vértice, podemos afirmar que os triângulos retângulos APQ e SQB são semelhantes por AA. Logo:

$$\frac{QB}{8 - QB} = \frac{SB}{AP} \rightarrow \frac{QB}{8 - QB} = \frac{7}{3} \rightarrow QB = \frac{28}{5}\ \text{cm}$$

Sendo os triângulos SRC e SQB também semelhantes por AA:

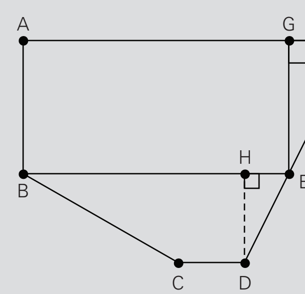
$$\frac{QB}{RC} = \frac{SB}{SC} \rightarrow \frac{\frac{28}{5}}{RC} = \frac{7}{2} \rightarrow RC = \frac{8}{5}\ \text{cm}$$

Logo, a resposta é: $(QBCR) = \frac{1}{2} \cdot (QB + RC) \cdot BC \rightarrow$

$\rightarrow (QBCR) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{28}{5} + \frac{8}{5}\right) \cdot 5 \rightarrow (QBCR) = 18\ \text{cm}^2$

17. E

Considere a figura, em que H é o pé da perpendicular baixada de D sobre $\overline{BE}$.



Sabendo que AF = 15 cm, AG = 12 cm e AB = = EG = 6 cm e aplicando o teorema de Pitágoras:

$$EF^2 = GF^2 + EG^2$$

$$EF^2 = 3^2 + 6^2$$

$$EF^2 = 3^2 \cdot 5$$

$$EF = 3\sqrt{5}\ \text{cm}$$

Sendo assim, dado que $DF = 5\sqrt{5}$ cm, obtemos $ED = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ cm.

Assim, como os triângulos FGE e EHD são semelhantes:

$$\frac{DH}{EG} = \frac{DE}{EF}$$

$$\frac{DH}{6} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$$

$$DH = 4 \text{ cm}$$

Desse modo, a área pedida, em cm², é dada por:

$$(ABEF) + (BCDE) = \frac{(15 + 12)}{2} \cdot 6 + \frac{(12 + 3)}{2} \cdot 4$$

$$(ABEF) + (BCDE) = 81 + 30$$

$$(ABEF) + (BCDE) = 111$$

Consequentemente, se x é a área real da APP, então:

$$\frac{111 \cdot 10^{-10}}{x} = \left(\frac{1}{200\,000}\right)^2$$

$$x = 111 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^{10}$$

$$x = 444 \text{ km}^2$$

Estudo para o Enem

18. C

Sendo **R** o raio do círculo maior, e de acordo com as informações fornecidas no enunciado, temos que R = 3 cm.

Logo, como a área pedida é a área do círculo maior subtraída da área dos 7 círculos menores, temos como resultado:

$\pi \cdot 3^2 - 7 \cdot \pi \cdot 1^2$

$9\pi - 7\pi$

$2\pi \text{ cm}^2$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. A

O custo total das lajotas é dado por 8x + 6y, que é o resultado pedido.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. A

Seja, y_p a ordenada do ponto P, de tal forma que:

$$B = \frac{90 \cdot y_p}{2} + \left(\frac{y_p + 100}{2}\right) \cdot 10 = 50 \cdot y_p + 500$$

Assim:

$$A = \frac{100 \cdot 100}{2} - B = 4\,500 - 50 \cdot y_p$$

Desse modo, se a meta é 0,3, então:

$$\frac{A}{A + B} = 0{,}3 \rightarrow A = 1\,500$$

$$4\,500 - 50 \cdot y_p = 1\,500$$

$$y_p = 60$$

Portanto, (100 − 60)% = 40%.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

14 ÁREA DE FIGURAS PLANAS V – POLÍGONOS REGULARES E FIGURAS CURVILÍNEAS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as áreas de polígonos regulares. Também aproveitamos para ver a relação entre as medidas dos polígonos regulares inscritos na circunferência.

Exercícios propostos

7. C

Como sabemos que o ângulo interno de um octógono regular mede 135°, os quatro triângulos resultantes da decomposição do octógono são retângulos isósceles de catetos iguais a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Sabendo que a área do quadrado destacado no centro do octógono é S = a², o resultado pedido é:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + S$$

$$a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + S$$

$$2S\sqrt{2} + 2S$$

$$2S(\sqrt{2} + 1)$$

8. A

Sabemos que um hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros (seus lados medem o mesmo que o raio da circunferência circunscrita).

Sendo assim, calculando a área:

$$S_{hexágono} = 6 \cdot \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{hexágono} = 3\sqrt{3}$$

9. A área **A** pintada de branco será dada pela diferença entre a área A_R do retângulo e a área do círculo A_C. Sendo assim:

$$A = A_R - A_C$$

$$A = 8 \cdot 12 - \pi \cdot 2^2$$

$$A - 8 \cdot 12 - 3 \cdot 2^2$$

$$A = 96 - 12$$

$$A = 84 \text{ cm}^2$$

10. C

Sejam x, x + r e x + 2r as medidas, em metros, dos lados do triângulo, com x, r > 0.

Aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos x = 3r.

Assim, os lados do triângulo medem 3r, 4r e 5r.

Como sabemos que o perímetro do triângulo mede 6,0 m:

$$3r + 4r + 5r = 6$$

$$12r = 6$$

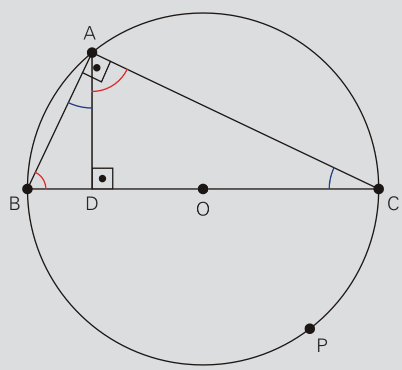
$$r = \frac{12}{6}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Logo, a área do triângulo é igual a:

$$\frac{3r \cdot 4r}{2} = 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1{,}5 \text{ m}^2$$

11. 13 (01 + 04 + 08)

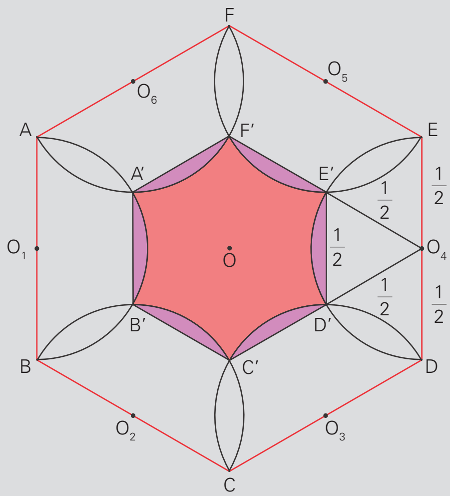


02. Falsa, pois BC² = AB² + AC².

16. Falsa. Área máxima para o triângulo ABC: $\frac{2 \cdot R \cdot R}{2}$ e $R^2 < \frac{\pi \cdot R^2}{3}$.

12. A

De acordo com as informações do enunciado e da figura:



A'B'C'D'E'F' é um hexágono regular cujo lado tem medida igual a $\frac{1}{2}$.

Sendo assim, podemos decompô-lo em 6 triângulos equiláteros congruentes, todos com lados de medida $\frac{1}{2}$.

$S_{A'B'C'D'E'F'}$: área do hexágono regular A'B'C'D'E'F'.

S_{setor}: área do setor circular de centro no ponto O_4, extremos nos pontos E' e D' e raio de medida $\frac{1}{2}$.

$O_4E'D'$ é um triângulo equilátero cujo lado tem medida igual a $\frac{1}{2}$.

Sendo **S** a área pedida:

$$S = S_{A'B'C'D'E'F'} - 6 \cdot (S_{setor} - S_{O_4E'D'})$$

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen}60° \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{sen}60°\right)$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{8} - 6 \cdot \left(\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$S = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{4}$$

13. C

$$A_{total} = \pi \cdot \left(\frac{122}{2}\right)^2$$

$$A_{total} = \pi \cdot 61^2$$

$$A_{cinza} = \pi \cdot (2 \cdot 6,1)^2$$

$$A_{cinza} = \pi \cdot 12,2^2$$

$$\frac{A_{cinza}}{A_{total}} = \frac{\pi \cdot 12,2^2}{\pi \cdot 61^2} = \left(\frac{12,2}{61}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\frac{A_{cinza}}{A_{total}} = \frac{1}{25}$$

14. a) Centro C: 16

Centros A e B: 8

b) Sendo assim:

$$m(AC) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8}{2} = 8 \cdot \pi$$

$$m(BC) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8}{2} = 8$$

$$\pi m(AB) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 16 \cdot 60°}{360°} = \frac{16 \cdot \pi}{3}$$

c) Calculando, obtemos:

$$A_I = \frac{\pi \cdot 8^2}{2} = 32 \cdot \pi$$

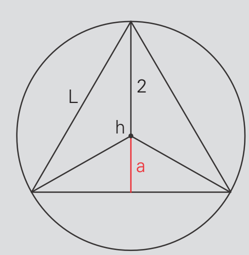
$$A_{II} = \frac{16^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 63 \cdot \sqrt{3}$$

$$A_{III} = A_I = 32 \cdot \pi$$

$$A_{IV} = \frac{\pi \cdot 16^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{128 \cdot \pi}{3}$$

15. C

A figura a seguir apresenta um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2.



Sendo **L** o lado do triângulo equilátero e **h** sua altura, da Geometria plana sabemos que:

$$a = \frac{R}{2} = \frac{2}{2} \to a = 1$$

$$h = R + a = 2 + 1 \to h = 3$$

$$L = R\sqrt{3} \to L = 2\sqrt{3}$$

Assim, a área do triângulo equilátero será:

$$S_\Delta = \frac{h \cdot L}{2} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow S_\Delta = 3\sqrt{3}$$

Já a área da circunferência será:

$$S_o = \pi R^2 = (2)^2\,\pi \rightarrow S_o = 4\pi$$

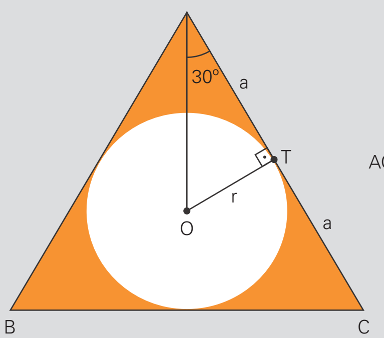
Por fim, a área das regiões internas à circunferência e externas ao triângulo será:

$$S = S_o - S_\Delta$$

$$S = 4\pi - 3\sqrt{3}$$

16. B

De acordo com as informações do enunciado:



AO = 2 cm

S: área da região do triângulo não ocupada pelo círculo.

S_{ABC}: área do triângulo ABC.

$S_{circulo}$: área do círculo.

No triângulo AOT, temos:

$$\begin{cases} \text{sen}30° = \dfrac{r}{2} \rightarrow r = 1 \\ \cos 30° = \dfrac{a}{2} \rightarrow a = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$S = S_{ABC} - S_{círculo}$$

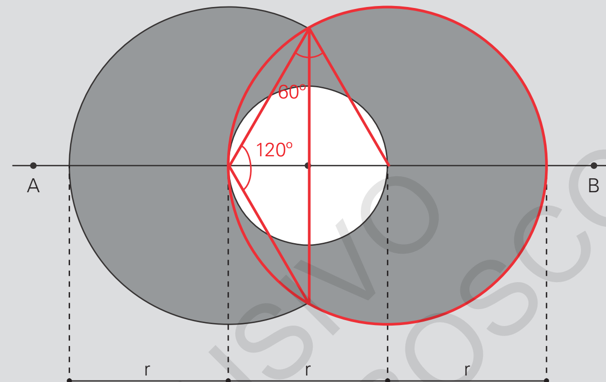
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \text{sen}\,60° - \pi r^2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi \cdot 1^2$$

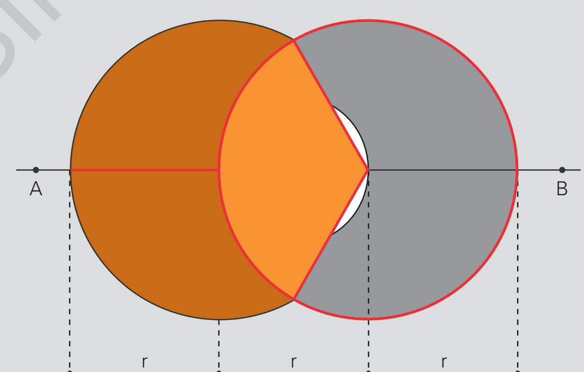
$$S = (3\sqrt{3} - \pi)\ \text{cm}^2$$

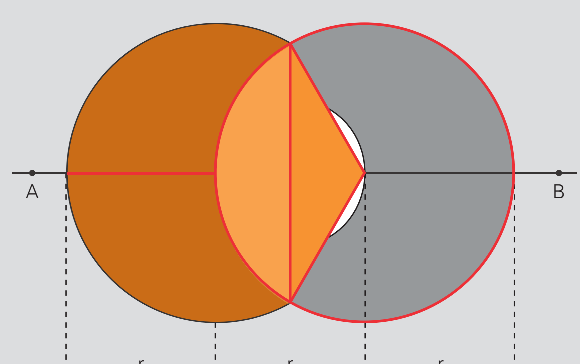
17. D

A área hachurada será igual à área de uma circunferência maior (raio r) somada à área da "lua" remanescente da outra circunferência maior (raio r). Subtraindo-se a área da circunferência menor $\left(\text{raio } \dfrac{r}{2}\right)$, podemos deduzir graficamente:



Concluímos, portanto, que a área de uma circunferência maior é igual a πr^2. Para calcular a área da "lua" remanescente da outra circunferência de raio **r** (área hachurada em azul nas figuras a seguir), precisamos subtrair o equivalente a duas áreas verdes (ver figuras a seguir). Para calcular a área verde, necessitamos calcular a área do setor circular de 120° menos a área de um triângulo equilátero de lado **r**.





Assim, podemos escrever que a área total hachurada em cinza é igual a:

$$\left\{\pi r^2+\left[\pi r^2-2\cdot\left(\frac{\pi r^2\cdot 120^\circ}{360^\circ}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)\right]\right\}-\pi\frac{r^2}{4}=$$

$$=\pi r^2-\pi\frac{r^2}{4}+\left[\pi r^2-2\cdot\left(\frac{4\pi r^2-3r^2\cdot\sqrt{3}}{12}\right)\right]=$$

$$=\frac{3\pi r^2}{4}+\left[\pi r^2-\left(\frac{8\pi r^2-6r^2\cdot\sqrt{3}}{12}\right)\right]=$$

$$=\frac{3\pi r^2}{4}+\left[\frac{12\pi r^2-8\pi r^2+6r^2\cdot\sqrt{3}}{12}\right]=$$

$$=\frac{3\pi r^2}{4}+\frac{4\pi r^2+6r^2\cdot\sqrt{3}}{12}=$$

$$=\frac{9\pi r^2+4\pi r^2+6r^2\sqrt{3}}{12}=\frac{13\pi r^2+6r^2\sqrt{3}}{12}=$$

$$=\left(\frac{13\pi+6\sqrt{3}}{12}\right)\cdot r^2$$

Estudo para o Enem

18. C

O resultado pedido é dado por:

$$\frac{3\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}}{2}-\pi\cdot 1^2\cong 6\cdot 1{,}7-3=7{,}2\text{ cm}^2.$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. B

A área do espaço é igual a $4\cdot 6=24$ m² = = 240 000 cm²

Cada quadrado do tipo I tem área igual a 20² = = 400 cm². Sendo assim, o custo do piso I é:

$$\frac{240000}{400}\cdot 15=\text{R\$ } 9.000{,}00.$$

Cada retângulo do tipo II tem área igual a $30\cdot 20$ = = 600 cm². Logo, o custo do piso II é:

$$\frac{240000}{600}\cdot 20=\text{R\$ } 8.000{,}00.$$

Cada quadrado do tipo III tem área igual a 25² = = 625 cm². Desse modo, o custo do piso III é:

$$\frac{240000}{625}\cdot 25=\text{R\$ } 9.600{,}00.$$

Cada retângulo do tipo IV tem área igual a $16\cdot 25$ = = 400 cm². Sendo assim, o custo do piso IV é:

$$\frac{240000}{400}\cdot 20=\text{R\$ } 12.000{,}00.$$

Cada quadrado do tipo V tem área igual a 40² = = 1 600 cm². Então, o custo do piso V é:

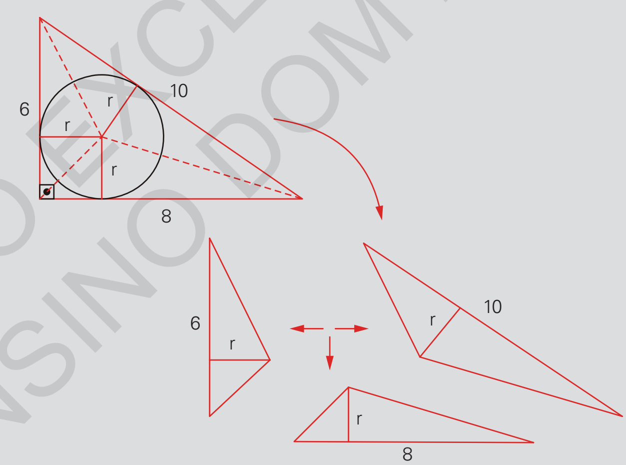
$$\frac{240000}{1600}\cdot 60=\text{R\$ } 9.000{,}00.$$

Com base nessas informações, o piso que terá o menor custo para a colocação no referido espaço é II.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. B



Seja **r** o raio da base do cilindro.

O triângulo é retângulo, pois $6^2+8^2=10^2$.

Logo, sua área será $A=\dfrac{6\cdot 8}{2}=24$.

Portanto:

$$\frac{6r}{2}+\frac{8r}{2}+\frac{10r}{2}=24$$

$12r=24$

$r=2$ cm

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

15 ÁREA DE FIGURAS CURVILÍNEAS E DE FIGURAS ESPECIAIS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, foram estudadas as áreas de regiões curvilíneas mais complexas. Para isso, foram revistas as áreas de setor circular e segmento circular, além de serem utilizados todos os outros conceitos relacionados às áreas já trabalhados.

Neste módulo, estudamos as áreas de figuras especiais, ou seja, áreas de figuras complexas que são resultados da adição de muitas outras. Contudo, com este módulo concluímos os estudos sobre as áreas principais com os conhecimentos da Geometria euclidiana.

Para ir além

Para aprofundar o tema deste módulo, estes dois *links* têm bons materiais que abordam o cálculo de áreas de polígonos.

Área e aplicações em geometria. Disponível em:

<https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/areas_e_aplicacoes_em_geometria.pdf>

Acesso em: out. 2018.

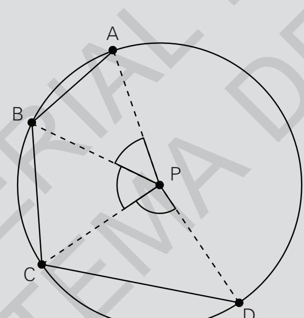
Fórmula de áreas de figuras geométricas planas. Disponível em:

<https://scholar.google.com/scholar?cluster51101913946594908607&hl5pt-BR&as_sdt50,5>

Acesso em: out. 2018.

Exercícios propostos

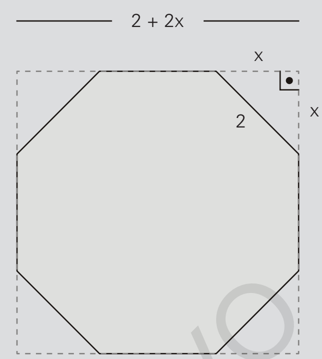
7. Observe a figura.



No caso do octógono, o ângulo central mede 45°; no hexágono, 60°; no quadrilátero, 90°. Logo, o ângulo do setor circular será: 360° − 45° − 60° − − 90° = 165°. Como já sabemos que o raio da circunferência mede r = 6 cm:

$$A = \frac{\alpha° \cdot \pi \cdot R^2}{360°} = \frac{165° \cdot \pi \cdot 6^2}{360°} \therefore A = \frac{33\pi}{2}\ \text{cm}^2$$

8. A



Vamos calcular a área do octógono regular:

$x^2 + x^2 = 2^2$

$x = \sqrt{2}$

Portanto, a área A_1 do octógono regular será dada por:

$$A_1 = (2 + 2x)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$A_1 = (2 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 8\sqrt{2} + 8$$

Cálculo da área A_2 dos oito semicírculos:

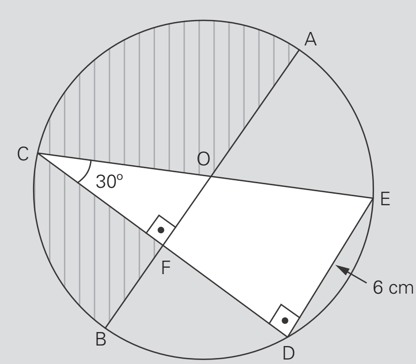
$$A_2 = 8 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi$$

Logo, a área da figura será dada por:

$A = A_1 + A_2$

$A = 8\sqrt{2} + 8 + 4\pi$

9.



$$C\hat{D}E = \frac{180°}{2} = 90°$$

$CE = 2R$

$\text{sen}30° = \dfrac{6}{2R}$

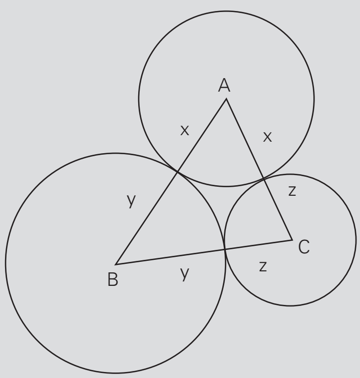
$OC = R = 6$

Sendo assim, $OF = 6 \cdot \text{sen}30° = 3$ e $CF = 6 \cdot \cos30° = 3\sqrt{3}$.

A área pedida será dada por:

$$A = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \left(18\pi - \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2}\right)$$

10. D



Admitindo **x**, **y** e **z** como os raios das circunferências de centros **A**, **B** e **C**, respectivamente:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$x = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{11}{2}$

$z = \dfrac{5}{2}$

Calculando, agora, a soma das áreas de todos os círculos:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{195\pi}{4}\ \text{km}^2$$

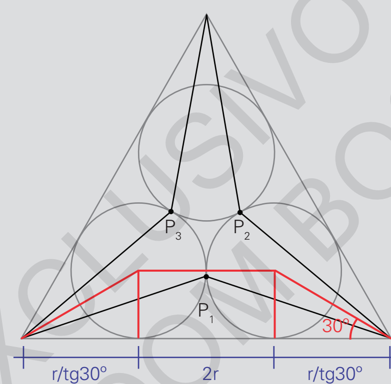
11. B

Sabemos que a diagonal do quadrilátero o divide em dois triângulos retângulos.

Sendo 2senx e 2cosx os catetos do primeiro e 2seny e 2cosy, os catetos do segundo, podemos concluir que o resultado é:

$$\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\text{sen}x \cdot 2\cos x - \frac{1}{2} \cdot 2\text{sen}y \cdot 2\cos y =$$
$$= \pi - \text{sen}2x - \text{sen}2y$$

12. a) O triângulo equilátero descrito é o "externo", que contém as três esferas. Assim, seu lado será igual a:

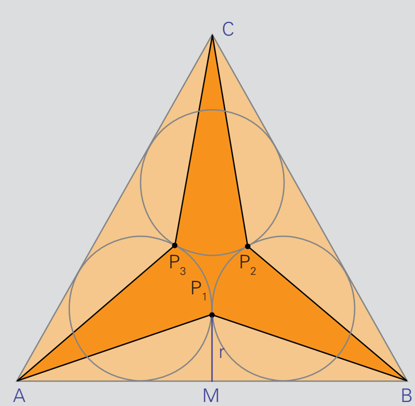


Ou seja:

$$\text{lado}_\Delta = \frac{2r}{\text{tg}30°} + 2r = 2r \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} + 2r$$

$$\text{lado}_\Delta = 2r \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

b) Considerando como **A**, **B** e **C** os vértices do triângulo equilátero "externo", podemos desenhar:



Assim, percebemos que a área destacada em azul se dá por:

$$S_{azul} = S_\Delta - S_{amarelo}$$

$$S_{azul} = \frac{(\text{lado}_\Delta)\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{r \cdot \text{lado}_\Delta}{2}$$

$$S_{azul} = \frac{\left[2r \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)\right]^2}{4} - 3 \cdot \frac{r \cdot 2r \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2}$$

$S_{azul} = \sqrt{3r}^{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)^2 - 3r^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)$

$S_{azul} = \sqrt{3r}^{2} \cdot (3 + 2\sqrt{3} + 1) - 3r^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)$

$S_{azul} = 3\sqrt{3r}^{2} + 6r^2 + \sqrt{3r}^{2} - 3r^2$

$S_{azul} = \sqrt{3r}^{2} + 3r^2$

$S_{azul} = r^2 \cdot (\sqrt{3} + 3)$

13. C

Do triângulo ABC, obtemos:

$\text{sen}B\hat{A}C = \dfrac{BC}{AC}$

$\overline{BC} = \dfrac{1}{2} \cdot 40$

$BC = 20$ cm

Temos também que:

$\cos B\hat{A}C = \dfrac{AB}{AC}$

$AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 40$

$AB \cong 34$cm

Além disso, como $D\hat{A}E = 45°$, segue que $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BC} = 20$ cm.

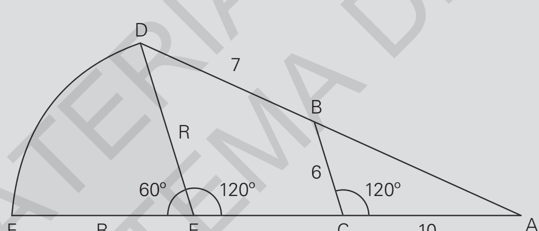
Portanto, a área do triângulo ACE é dada por:

$(ACE) = (ADC) - (ADE)$

$(ACE) = \dfrac{34 \cdot 20}{2} - \dfrac{20 \cdot 20}{2}$

$(ACE) = 140$ cm²

14.



Podemos aplicar o teorema dos cossenos no triângulo ABC:

$AB^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120°$

$AB^2 = 136 - 120 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$AB^2 = 196$

$AB = 14$ cm

Os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Logo:

$\dfrac{AB}{AB+7} = \dfrac{6}{R}$

$\dfrac{14}{14+7} = \dfrac{6}{R}$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{R}$

$R = 9$ cm

Se calcularmos a área A do setor circular de raio R, vamos obter:

$A = \dfrac{60 \cdot \pi \cdot 9}{360°} = \dfrac{81\pi}{6} = \dfrac{27\pi}{2}$ cm²

15. C

$3QT = 2TA$

$\dfrac{QT}{TA} = \dfrac{2}{3}$ (razão de semelhança)

Os triângulos PTQ e BTA são semelhantes. Considerando que S é a área do triângulo BTA, podemos escrever que:

$\dfrac{12}{S} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$4 \cdot S = 108$

$S = 27$

Portanto, a área do triângulo ABCD será o dobro da área do triângulo BTA, ou seja, 54 cm².

16. D

Sendo ABCD um paralelogramo, é imediato que $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Como a área de ABCD vale 24 cm²:

$(ABCD) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C$

$\overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C = 24$

Além disso, $A\hat{D}C \equiv A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D = 180° - A\hat{D}C$.

Por conseguinte, o resultado pedido é dado por:

$(AMND) = (ABCD) - (ABM) - (MCN)$

$(AMND) = 24 - \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BM} \cdot \text{sen}A\hat{B}C -$
$- \dfrac{1}{2} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{CN} \cdot \text{sen}B\hat{C}D$

$(AMND) = 24 - \dfrac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \dfrac{\overline{AD}}{2} \cdot \text{sen}A\hat{D}C -$
$- \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\overline{AD}}{2} \cdot \dfrac{\overline{CD}}{2} \cdot \text{sen}(180° - A\hat{D}C)$

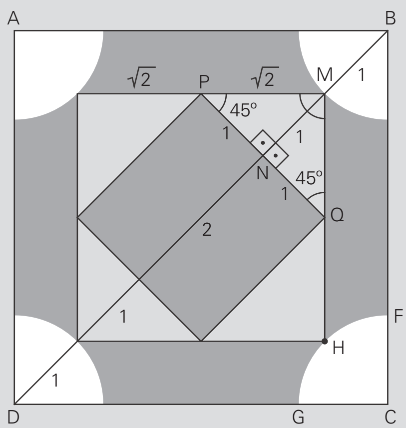
$$(AMND) = 24 - \frac{1}{4} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C -$$

$$- \frac{1}{8} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \text{sen}A\hat{D}C$$

$$(AMND) = 24 - 6 - 3$$

$$(AMND) = 15 \text{ cm}^2$$

17. B



Do enunciado e da figura, temos:

No triângulo PMN:

$$(PM)^2 = 1^2 + 1^2$$

$$(PM)^2 = 2$$

Como PM > 0:

$$PM = \sqrt{2} \text{ m}$$

Seja x a medida do lado do quadrado ABCD:

No triângulo BCD:

$$6^2 = x^2 + x^2$$

$$2x^2 = 36$$

$$x^2 = 18$$

Assim, a área do quadrado ABCD é 18 m².

Seja S_1 a área preenchida com ladrilhos pretos e S_2 a área preenchida com ladrilhos brancos:

$S_1 = S_{ABCD} - S_2$, em que S_{ABCD} é a área do quadrado ABCD.

Então:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{ABCD}}{S_2} - \frac{S_2}{S_2}$$

Como $S_{ABCD} = 18$:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{S_2} - 1$$

$$S_2 = 4 \cdot S_{setorCGHF} + 4 \cdot S_{PMQ}$$

$S_{setorCGHF}$ é a área do setor circular CGHF, e S_{PMQ} é a área do triângulo PMQ.

Então:

$$S_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$S_2 = 4 + \pi$$

Dessa forma:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{4+\pi} - 1$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18-(4+\pi)}{4+\pi}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{14-\pi}{4+\pi}$$

Estudo para o Enem

18. B

A = área do círculo – área do triângulo

$$A = \pi \cdot \left(\frac{500}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 300$$

$$A = \frac{3 \cdot 250\,000}{4} - 60\,000$$

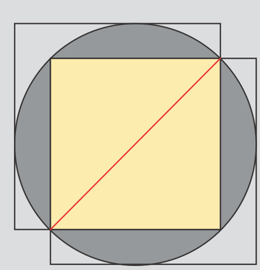
$$A = 127\,500 \text{ m}^2$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. D

Calculando:



l = lado do quadrado amarelo

r = raio do círculo = 3

$$l\sqrt{2} = 2r$$

$l\sqrt{2} = 6$

$l = 3\sqrt{2}$

$S_{cinza} = S_{círc} - S_{quadrado}$

$S_{cinza} = \pi \cdot 3^2 - (3\sqrt{2})^2$

$S_{cinza} = 9\pi - 18$

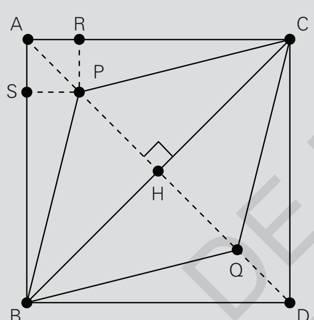
$S_{cinza} = 9 \cdot (\pi - 2)$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. B

Vamos considerar a figura, em que R é o pé da perpendicular baixada de P sobre AC e S é o pé da perpendicular baixada de P sobre AB.



É imediato que ARPS é um quadrado de lado 8 cm.

Logo, a diagonal AD intersecta BC em H, centro do quadrado. Então:

$\overline{PH} = \overline{AH} - \overline{AP}$

$\overline{PH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overline{AD} - \overline{AR} \cdot \sqrt{2}$

$\overline{PH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 40 - 8 \cdot \sqrt{2}$

$\overline{PH} = 12\sqrt{2}$ cm

A área do triângulo BPC é dada por:

$(BPC) = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{PH} \cdot \overline{BC}$

$(BPC) = \dfrac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 40\sqrt{2}$

$(BPC) = 480$ cm²

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

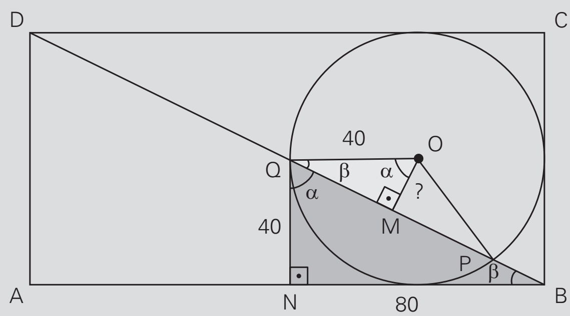
16 RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as relações métricas na circunferência. Foram abordados os três teoremas das cordas e a relação de tangência entre um segmento e uma circunferência.

Exercícios propostos

7.



a) A circunferência tem raio de $\frac{80}{2} = 40$.

b) Por meio do teorema de Pitágoras, temos:

$BQ^2 = 80^2 + 40^2 \rightarrow BQ = 40\sqrt{5}$

Como o $\Delta MOQ \sim \Delta NQB$:

$\frac{MQ}{80} = \frac{40}{40\sqrt{5}} \rightarrow MQ = \frac{80}{\sqrt{5}} \therefore MQ = 16\sqrt{5}$

Como M é o ponto médio da corda PQ:

$PQ = 2 \times MQ = 2 \times 16\sqrt{5} \therefore PQ = 32\sqrt{5}$

8. B

Primeiro calculamos o valor de **y**:

$6 \cdot (6 + y) = 3 \cdot (3 + 24)$

$36 + 6y = 3 \cdot 27 = 81 \rightarrow 6y = 81 - 36 = 45 \therefore$
$\therefore y = 7{,}5$

Depois calculamos o valor de **x**:

$x^2 = 3 \cdot (3 + 24) = 3 \cdot 27 = 81$

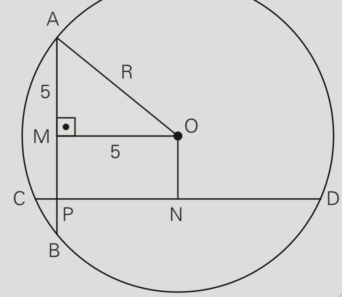
$x^2 = 81 \rightarrow x = 9$

Fazendo x + y:

$7{,}5 + 9 = 16{,}5 \therefore x + y = 16{,}5$

9. E

Vamos considerar a figura:



Pelo teorema 1 das cordas, temos:

$PD \cdot 2 = 6 \cdot 4 \rightarrow PD = 12$

$AM = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$ e $OM = \frac{12+2}{2} - 2 =$

$= \frac{14}{2} - 2 = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$R^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \therefore R = 5\sqrt{2}$

10. D

Pelo teorema 3, temos:

$AC \cdot EC = DC^2$

$x \cdot 3 = 6^2 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12$

Como o triângulo é isósceles, $AC \cong BC$. Logo:

$x + 3 = y + 6 \rightarrow 12 + 3 = y + 6 \rightarrow 15 - 6 = y \rightarrow$
$\rightarrow y = 9$

Com os valores de **x** e **y** conhecidos, obtemos a soma x + y.

$x + y = 12 + 9 = \rightarrow x + y = 21$

11. B

Pelo teorema 2 das cordas, temos:

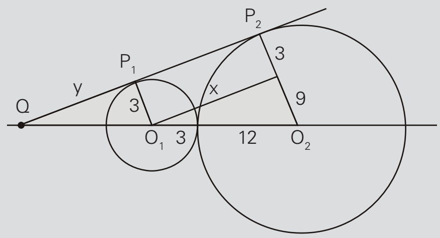
$x \cdot (x + 5) = 2 \cdot (2 + 10)$

$x^2 + 5x = 24$

$x^2 + 5x - 24 = 0$

As raízes da equação do 2º grau são: $x_1 = 3$ e $x_2 = -8$. Como está no enunciado que x é um número positivo, logo x = 3.

12. De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Então:

a) $x^2 + 9^2 = 15^2 \rightarrow x^2 = 225 - 81 \rightarrow x = 144 \rightarrow$
$\rightarrow x = 12$

b) $A = 12 \cdot 3 + \dfrac{(9 \cdot 12)}{2} \rightarrow A = 36 + 54 \rightarrow A = 90$

c) $\dfrac{y}{y+12} = \dfrac{3}{12} \rightarrow 12y = 3y + 36 \rightarrow 9y = 36 \rightarrow$
$\rightarrow y = 4$

Logo: $A = \dfrac{12 \cdot (12 + 4)}{2} \rightarrow A = 6 \cdot 16 \rightarrow A = 96$

13. C

$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

$10 + 8 = 12 + x \rightarrow 18 - 12 = x \therefore x = 6$

14. D

Como AO e BO são tangentes à circunferência:

$AO \cong BO = 40$ cm

$R = \dfrac{60}{2} = 30$ cm

$P = 40 + 40 + 30 + 30 \rightarrow P = 140$

Portanto, $P = 140$ cm.

15. a) $MC = MN = 8$ cm

$BP = BM = 10$ cm

$x = BM + MC = 10 + 8 = 18 \therefore x = 18$ cm

b) Como o perímetro do triângulo ABC mede 50 cm:

$PA = AN = y$

$10 + PA + AN + 8 + x = 50$

$10 + y + y + 8 + 18 = 50$

$2y + 36 = 50 \rightarrow y = 14/2 \therefore y = 7$ cm

16. $C\hat{G}D = \dfrac{180°}{2} = 90°$

ΔCGD é retângulo

Podemos então encontrar o diâmetro CD:

$CD^2 = 3^2 + 4^2$

$CD = 5$ e $AC = 2{,}5$

Temos também que:

$CG^2 = CD \cdot CF$

$3^2 = 5 \cdot CF$

$CF = 18$

Portanto:

$AF = AC - CF$

$AF = 2{,}5 - 1{,}8$

$AF = 0{,}7$

17. B

A figura apresenta um arco de circunferência com um quadrado "inscrito" e um triângulo retângulo em um de seus lados. O lado do quadrado é igual à hipotenusa do triângulo.

Pelo teorema de Pitágoras:

$l^2 = 8^2 + 6^2$

$l = 10$

Pelos conhecimentos em Geometria plana, podemos deduzir que a diagonal do quadrado será igual ao diâmetro do "semicírculo", e seu raio R é igual a duas vezes seu diâmetro. Logo:

$2R = l\sqrt{2}$

$2R = 10\sqrt{2}$

$R = 5\sqrt{2}$

A área hachurada S será igual a três quartos da área da circunferência C menos a área do quadrado Q. Aplicando as fórmulas, temos:

$S = \dfrac{3}{4}(C - Q)$

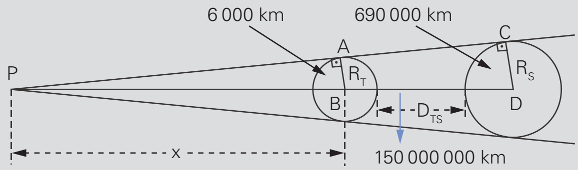
$S = \dfrac{3}{4}(\pi R^2 - l^2)$

$S = \dfrac{3}{4}\left(\pi\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 10^2\right)$

$S = \dfrac{3}{4}(50\pi - 100)$

Estudo para o Enem

18. C



Da figura, notamos que ΔPAB ~ ΔPCD. Logo:

$$\frac{x + 150\,000\,000}{x} = \frac{690\,000}{6\,000} \rightarrow 115x =$$

$$= x + 150\,000\,000 \rightarrow 114x = 150\,000\,000$$

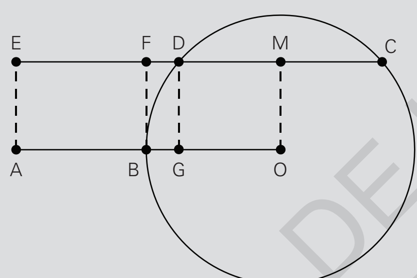
$$\therefore x = \frac{150\,000\,000}{114} \cong 1\,300\,000 \text{ km}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. B

Podemos considerar a seguinte figura:



Temos que calcular $2 \cdot \overline{OB}$.

De acordo o enunciado, sabemos que $\overline{ED} = 2$ cm e $\overline{EC} = 4{,}5$ cm. Logo, $\overline{DC} = \overline{EC} - \overline{ED} = 4{,}5 - 2 = 2{,}5$ cm.

Se M é o ponto médio do segmento DC, então $\overline{DM} = \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ cm.

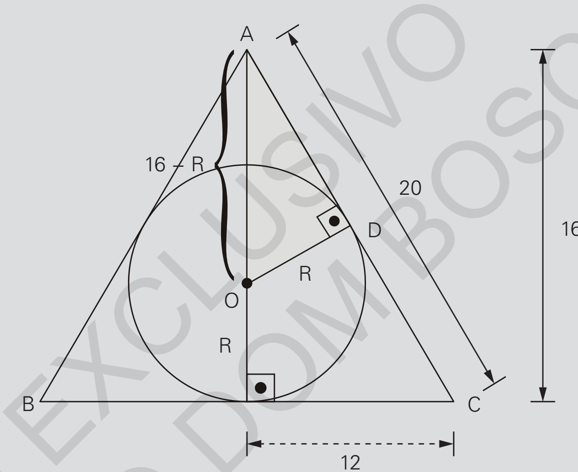
Por outro lado, se EF // AB, temos que $\overline{FD} = \overline{ED} - \overline{EF} = \overline{ED} - \overline{AB} = 2 - 1{,}6 = 0{,}4$ cm.

Portanto, $2 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot (\overline{FD} + \overline{DM}) = 2 \cdot (0{,}4 + 1{,}25) = 3{,}3$ cm.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

20. A



$AC^2 = 16^2 + 122$

$AC = 20$

ΔAOD ~ ΔACM

$$\frac{R}{12} = \frac{16 - R}{20}$$

$R = 6$

Área que será pintada:

$A = A = 450 \cdot \pi \cdot R^2 = 450 \cdot 3 \cdot 6^2 = 48\,600 \text{ cm}^2$

$$\text{Número de potes} = \frac{48\,600}{5\,400} = 9.$$

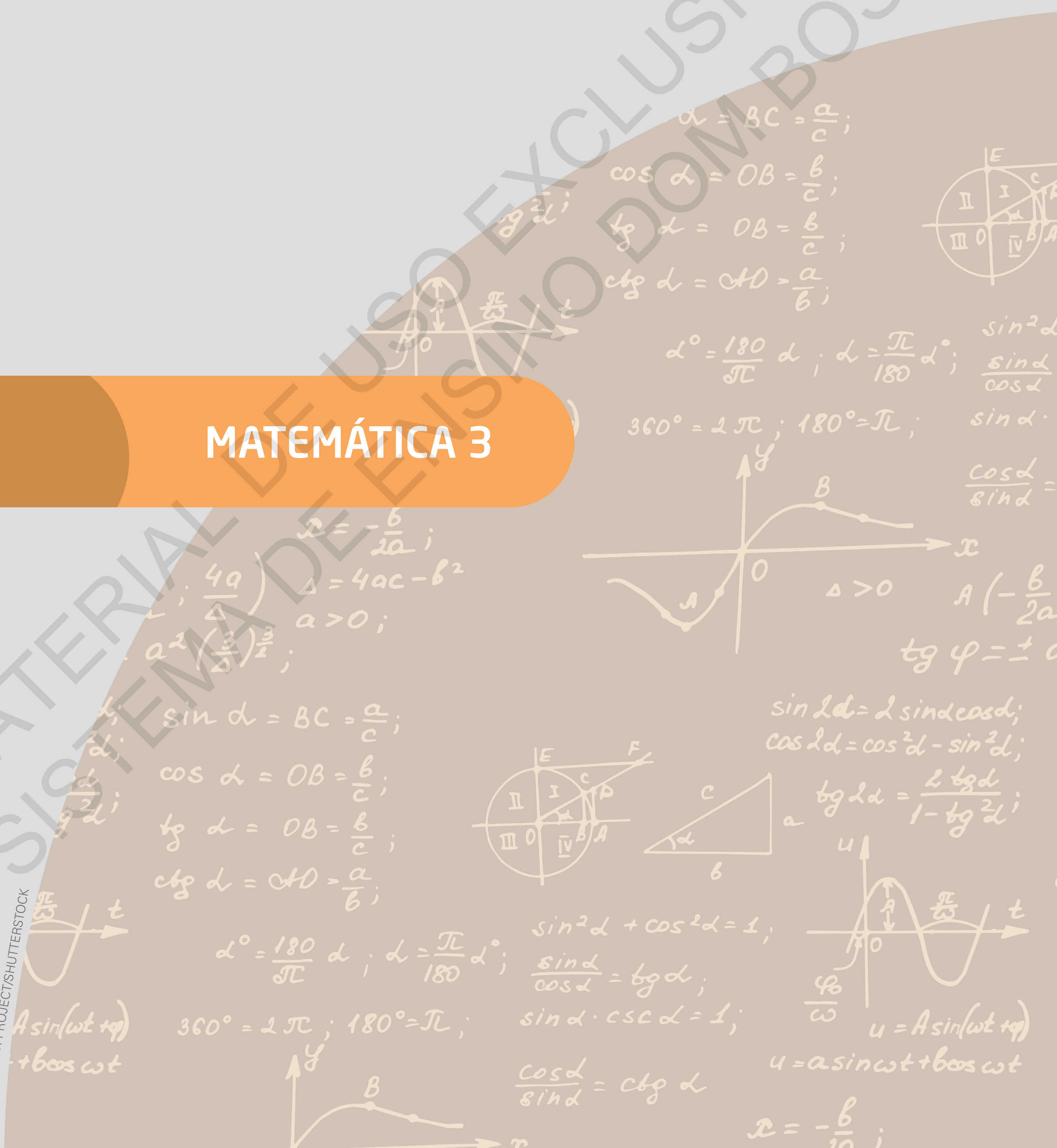
Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 3



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

1 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO, ÂNGULOS COMPLEMENTARES E ÂNGULOS NOTÁVEIS

Comentário sobre o módulo

O estudo da Trigonometria é dedicado à determinação de razões envolvendo lados e ângulos de triângulos retângulos. Introduz conceitos iniciais, como o de ângulos complementares e nomenclatura dos lados do triângulo retângulo. Fica a critério do professor demonstrar o teorema de Pitágoras. Num segundo momento, são apresentadas as razões seno, cosseno e tangente referentes aos lados de um triângulo retângulo, de acordo com seus ângulos agudos.

O estudo da Trigonometria é dedicado à determinação de razões envolvendo lados e ângulos de triângulos retângulos e seus ângulos complementares. Também é explorada a demonstração e aplicação da identidade trigonométrica fundamental.

A aplicação dessas razões vai além da simples determinação de lados e ângulos, ou seja, torna-se possível resolver uma infinidade de problemas e situações práticas muito exploradas em exames de vestibular. Constam as razões secante, cossecante e cotangente, uma vez que também apresentam aplicabilidade na resolução de problemas, tanto nos vestibulares como em problemas reais. Ao final, a determinação dos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) visa demonstrar aos alunos que tenham dificuldade de memorização a maneira de obtê-los facilmente com base em um quadrado e um triângulo equilátero.

Exercícios propostos

7. D

Como a área do paralelogramo é dada por:

$A_{\text{paralelogramo}} = (\text{base}) \cdot (\text{altura})$, temos que

$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot 6 = 6 \rightarrow b = 1.$

Assim, o triângulo retângulo tem catetos iguais a 6 e 8. Assim, sua hipotenusa, segundo o teorema de Pitágoras, mede 10.

Logo, o cosseno de α é dado por

$$\cos \alpha = \frac{(9-1)}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

8. B

Temos que a tangente do ângulo CÂD é

$$\text{tg } C\hat{A}D = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$$

Pelas medidas de cada batente, temos que:

$\overline{AB} = 8 \cdot 30 = 240 \rightarrow 240$ cm

$\overline{BC} = 6 \cdot 30 = 180 \rightarrow 180$ cm

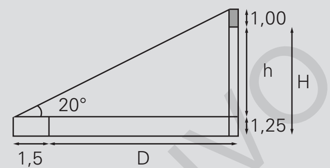
Logo, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{AC} = 300$ cm.

Como a altura de cada batente é de 20 cm, a medida $\overline{DC}$ é dada por $(6 + 8) \cdot 20 = 280$ cm.

Então, $\text{tg } C\hat{A}D = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \dfrac{280}{300} = \dfrac{14}{15}$

9. B

Considere a figura a seguir.



A primeira afirmação é verdadeira (V), pois:

$$\text{tg } 20° = \frac{h+1}{D+1,5} = 0,36 \rightarrow h + 1 = 0,36 \cdot D + 0,54$$

$0,36 \cdot D = 2,15 - 0,54 = 1,61$

$$D = \frac{1,61}{0,36} = 4,4 \rightarrow 4,4 \text{ m}$$

A segunda afirmação é falsa (F), pois:

$$\text{tg } 20° = \frac{h+1}{14,6} = 0,36$$

$h + 1 = 5,256$

$h = 4,256 \rightarrow h = 4,256$ m

Assim, $H = 4,256 + 1,25 \approx 5,5$ m

A terceira afirmação é verdadeira (V), pois a diferença entre eles é $5,5 - 2,4 = 3,6$ m.

Logo, V – F – V.

10. A

Temos que, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC} = 5$ cm. Como $\overline{AD} = 3$ cm, $\overline{DB} = 1$ cm e então $\overline{CD} = \sqrt{10}$ cm.

Assim, sendo α o ângulo CÂB, então $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$.

$$\text{Mas, sen } \theta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{3} = \frac{3}{5} \rightarrow ED = \frac{9}{5}.$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos que $(CD)^2 = (ED)^2 + (CE)^2$.

$$\text{Então } (CE) = 10 = \frac{81}{25} + (CE)^2 \rightarrow CE = \frac{13}{5}.$$

$$\text{Portanto } A_{CDE} = A_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{117}{50} \rightarrow \frac{117}{50} \text{ cm}^2$$

11. E

Temos que $x \cdot y = 10$.

Como o enunciado pede a área $A = x \cdot z$, mas

$$\cos 25° = \frac{z}{y} \cong 0,9 \rightarrow z \cong 0,9 \cdot y$$

Multiplicando ambos os lados da equação por x, temos:
$x \cdot z = 0{,}9 \cdot y \cdot x = 0{,}9 \cdot 10 = 9 \rightarrow 9\ m^2$
Logo, $A = 9\ m^2$.

12. Utilizando Pitágoras, temos:
$(2\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2 + a^2 \rightarrow 4a + a^2 \rightarrow 3a = a^2$ (dividindo por a, pois $a \neq 0$), vem $a = 3$. Portanto, os lados do triângulo retângulo medem, em ordem crescente, $\sqrt{3}$, 3 e $2\sqrt{3}$. Como o menor ângulo (x) em um triângulo está oposto ao menor lado, temos que:

$$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

Logo $x = 30°$.

13. Temos que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$. Logo, a altura do telhado **h** é dada por:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 52\ \text{dm} = 26\ \text{dm} = 2{,}6\ \text{m}$$

Portanto, o ponto mais alto do telhado em relação ao solo é de $2{,}6 + 3{,}5 = 6{,}1$ m.

14. A

Como o triângulo é isósceles, então seus catetos têm a mesma medida. Logo, o ângulo entre a hipotenusa e o chão é de 45°.

Portanto, temos que

$$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{\sqrt{10}} \rightarrow h = \frac{\sqrt{20}}{2} \approx 2{,}24\ \text{m}.$$

Assim, como a escada tem 6 degraus, cada degrau tem aproximadamente $\frac{2{,}24}{6}\ \text{m} \approx 37\ \text{cm}$.

15. E

Temos que $\text{sen } 15° = \cos 75°$, $\text{sen } 31° = \cos 59°$ e $\text{sen } 42° = \cos 48°$.
Portanto:

$\text{sen}^2(15°) + \text{sen}^2(31°) + \text{sen}^2(42°) + \text{sen}^2(59°) + \text{sen}^2(48°) + \text{sen}^2(75°) =$

$= \cos^2(75°) + \cos^2(59°) + \cos^2(48°) + \text{sen}^2(59°) + \text{sen}^2(48°) + \text{sen}^2(75°) = 3$

Acrescentando 2 ao resultado, obtemos 5.

16. C

Temos que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}85$.

Logo, o cateto menor do triângulo retângulo da figura será igual a 2,5 km e o cateto maior, igual a $5 \cdot 0{,}85 = 4{,}25$ km.

Portanto, a área desmatada é dada por:

$A_{desmatada} = 1{,}5 \cdot 2{,}5 + (4 - 2{,}5) \cdot (1{,}5 + 4{,}25) = 3{,}75 + 8{,}625 = 12{,}375\ km^2$.

17. D

Temos que $\alpha = 90° - \theta$

Portanto, $\frac{y}{2} = \text{sen } \alpha = \cos \theta \rightarrow y = 2 \cdot \cos \theta$.

Estudo para o Enem

18. E

Temos que $\dfrac{2\alpha}{14{,}8\ \text{dias}} = \dfrac{360°}{(14{,}8 + 14{,}9)\ \text{dias}}$

Então, $\dfrac{2\alpha}{14{,}8} = \dfrac{360°}{29{,}7}$

Logo, $2\alpha \approx 179{,}4° \rightarrow \alpha \approx 89{,}7°$

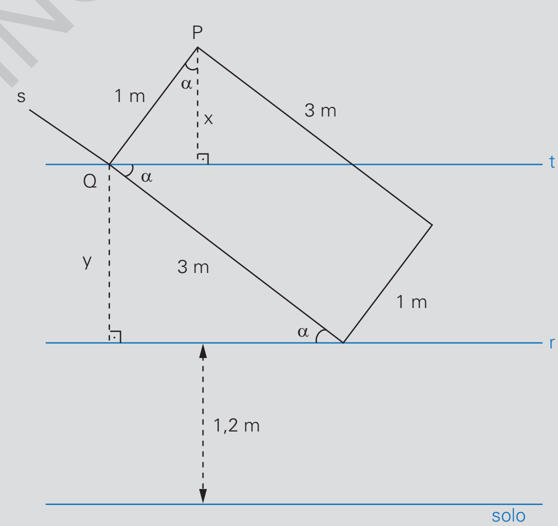
Portanto, $\cos \alpha = \dfrac{d_L}{d_S} \approx \cos 89{,}7°$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. C

Seja uma reta **t** paralela a **r** que passa pelo ponto **Q**, conforme representado a seguir.



Chamamos de **x** e **y** as distâncias de **P** até **t** e de **Q** até **r**, respectivamente.

Como $\cos \alpha = 0$, pela identidade trigonométrica fundamental, temos que:

$$0{,}8^2 + \text{sen}^2\alpha = 1{,}0 \Rightarrow \text{sen } \alpha = 0{,}6$$

Logo, $\cos \alpha = \frac{x}{1} = 0{,}8 \Rightarrow x = 0{,}8\ \text{m}$ e

$\text{sen } \alpha = \frac{y}{3} = 0{,}6 \Rightarrow y = 1{,}8\ \text{m}$.

Portanto, a altura atingida pelo ponto **P** em relação ao solo é de 1,2 m + 1,8 m + 0,8 m = 3,8 m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. E

Sabemos que $tg\ 15° \approx 0,26$,. Portanto, sendo **b** a base da torre:

$$tg\ 15° = \frac{b}{114} \approx 0,26 \Rightarrow b \approx 29,64$$

Então, a área da base (b^2) da torre é de aproximadamente 878,5 m^2.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

2 ARCOS, ÂNGULOS E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Comentários sobre o módulo

Iniciamos o módulo com a relação de arcos e ângulos e as respectivas medições. Por questões práticas, apresentamos uma relação de conversão de unidades de medidas em graus e radianos, muito útil na resolução de problemas. Vale lembrar: é mais fácil visualizar e quantificar o grau que o radiano. Também são mostrados exemplos de aplicação de arcos e ângulos.

O objetivo é estender os conceitos das razões trigonométricas do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, que são úteis quando se trata de ângulos obtusos e funções trigonométricas.

Em seguida, com base na circunferência trigonométrica, estão definidas as razões seno, cosseno e tangente, assim como estabelecidos os respectivos sinais para cada quadrante da circunferência trigonométrica e os valores para arcos de extremidades da circunferência.

Exercícios propostos

7. E

Sendo $\alpha = 120°$, os triângulos formados no 2° e 4° quadrantes têm ângulos iguais a 90°, 60° e 30°. Assim, $OA = \cos 60° = \frac{1}{2}$, e o valor de $OB = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Então, $OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

8. C

A cada 360° que o ponteiro dos minutos gira, o ponteiro das horas gira 30°.

Então, se o ponteiro dos minutos percorre $360° - \alpha$, o ponteiro das horas percorre α. Logo:

$$\frac{360°}{360° - \alpha} = \frac{30°}{\alpha} \rightarrow 12\alpha = 360° - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{360°}{13}$$

A cada hora, o ponteiro dos minutos gira 30°. Logo, a quantidade de minutos (m) percorrida após 6 horas é:

$$30° \cdot m = 60 \cdot \frac{360°}{13} \rightarrow m = \frac{720}{13} = 55\frac{5}{13}$$

9. B

O perímetro do setor circular é dado por $\alpha R + 2R$. O perímetro do quadrado de lado R é dado por 4R. Assim:

$$\alpha R + 2R = 4R \rightarrow \alpha = 2$$

10. E

Lembrando que o ângulo APB é excêntrico interno, $APB = \frac{60° + 36°}{2} = 48°$.

Da figura, vem que $\alpha + 48° = 180° \rightarrow \alpha = 132°$.

11. D

Da equação do enunciado, temos:

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{\text{sen} x}{\cos x} + 2 \rightarrow 2 = \text{sen } x + 2 \cdot \cos x \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{sen } x = 2 - 2 \cos x.$$

Utilizando a relação fundamental da Trigonometria:
$(2 - 2\cos x)2 + \cos 2x = 1 \rightarrow 4 - 8\cos x + 4\cos 2\,x +$
$+ \cos 2\,x = 1 \rightarrow 5\cos 2\,x - 8\cos x + 3 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau na variável cos x:

$\cos x = 1$ ou, $\cos x = \frac{3}{5}$ como $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então $\cos x = \frac{3}{5}$

Assim, $\sec x = \frac{5}{3}$ e $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$.

12. A

Utilizando a circunferência trigonométrica, temos que $0° < x \leq 60°$.

Como $\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$ e $\sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ e, observando que nesse intervalo, ao qual x pertence à sec **x** é crescente, pois seu inverso cos x é decrescente. Então, $1 < \sec x \leq 2$.

13. A

Sendo $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cdot (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)$, temos:

$$(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cdot (\cos^2 x + \text{sen}^2 x) = \frac{1}{2}$$

Como $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, então:

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow 2\cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sendo $x \in [0, \pi]$ e $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, o menor valor para tg x ocorrerá se x pertencer ao segundo quadrante. Assim, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Da relação fundamental vem: $\text{sen} x = \frac{1}{2}$.

Portanto, $\text{tg } x = -\sqrt{3}$.

14. C

Pelo enunciado, temos que $OM = -\cos\alpha$. Da figura, o triângulo retângulo de cateto PM é isósceles, pois o segmento não perpendicular ao eixo x forma com esse um ângulo de 45°.

Com isso,

$PM = 1 - OM = 1 - (-\cos\alpha) \to PM = 1 + \cos\alpha$

15. Seja α o ângulo em questão.

Então, $5\alpha = 2 \cdot (90° - \alpha) + 30° \to$
$\to 7\alpha = 180° + 30° = 210° \to \alpha = 30°$

Portanto, o suplemento de α é igual a $180° - \alpha = 150°$.

16. Da circunferência trigonométrica, temos:

$\text{sen}(x - 2\pi) = \text{sen}\, x = a \cdot$

Da relação fundamental, vem:

$\cos^2(x - 2\pi) = 1 - \text{sen}^2(x - 2\pi) = 1 - a^2 \cdot$

Portanto,

$\text{sen}\,(x - 2\pi) - \cos^2(x - 2\pi) = a - (1 - a^2) = a^2 + a - 1 \cdot$

17. A

A medida em radianos do ângulo central BÂC é a mesma que a do arco BEC: $\dfrac{200}{300} = \dfrac{2}{3}\text{rad}$.

Do triângulo ADC, temos:

$$\text{sen}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \to DC = 300\ \text{sen}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} \to DA = 300\ \cos\left(\frac{2}{3}\right)0$$

Logo, o caminho percorrido, em metros, é:

$$300 + 200 + 300\ \text{sen}\left(\frac{2}{3}\right) + 300\ \cos\left(\frac{2}{3}\right) =$$
$$= 500 + 300\left[\text{sen}\left(\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

Estudo para o Enem

18. D

Andando duas casas no mesmo sentido que o movimento de O até A e deslocando-se 120° no sentido anti-horário, chegaremos ao ponto F.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. D

Observe que $\dfrac{900°}{360°} = 2{,}5$.

Logo, o skatista deu duas voltas e meia no ar.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. D

O mês de produção máxima se dá quando temos o menor preço. Como o menor ocorre quando o cosseno é mínimo, ou seja, –1, temos que

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \to \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \to x = 7.$$

Logo, o mês é julho.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

3 REDUÇÃO DO 2º, 3º E 4º QUADRANTE AO 1º QUADRANTE

Comentário sobre o módulo

O conteúdo de redução ao 1° quadrante está contido em módulo separado, para maior destaque, porque se trata de conteúdo muito útil na resolução de uma série de exercícios e problemas, nos quais o ângulo em questão seja maior que 90°.

Assim é apresentada a redução ao 2° quadrante, considerando as simetrias das razões trigonométricas presentes na circunferência trigonométrica. Vale ressaltar: em alguns problemas, a relação fundamental da Trigonometria ($sen^2x + cos^2x = 1$) consta como informação a considerar para a resolução. Essa relação vem demonstrada em outro módulo.

Na seção de exercícios propostos "Aprofundamento" e "Enem", são indicadas questões que envolvem a ideia de função trigonométrica. É importante que o professor relacione este conteúdo ao módulo a fim de mostrar que a redução ao 1° quadrante consiste em calcular valores de arcos e de funções trigonométricas com extremidades no 2° quadrante por meio de valores do 1° quadrante.

O conteúdo de redução ao 1° quadrante está contido em módulo separado, para maior destaque, porque se trata de conteúdo muito útil na resolução de uma série de exercícios e problemas, nos quais o ângulo em questão seja maior que 90°.

Assim estão apresentadas as reduções aos 3° e 4° quadrantes, considerando as simetrias das razões trigonométricas presentes na circunferência trigonométrica. Vale ressaltar: em alguns problemas, a relação fundamental da Trigonometria ($sen^2x + cos^2x = 1$) consta como informação a considerar para a resolução. Essa relação vem demonstrada em outro módulo.

Antes de iniciar a explicação sobre a redução aos 2°, 3° e 4° quadrantes, relembre a representação de um ângulo no primeiro quadrante.

É possível baixar do link a seguir um programa que faz simulações do movimento de um ponto sobre a circunferência trigonométrica com os correspondentes valores de seno, cosseno e tangente dos arcos: <http://www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=tex&cod=_funcaotrigonometricasgraficosi>.

Exercícios propostos

7. C

Temos que $tg\,\theta = \dfrac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = 1 \rightarrow sen\,\theta = cos\,\theta.$

Como θ pertence ao primeiro quadrante, então

$cos\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

8. E

Como **x** é um arco com extremidade no 2° quadrante e $sen\,x = \dfrac{4}{5}$, temos que $cos\,x < 0$. Então, pela identidade trigonométrica fundamental:

$cos^2x = 1 - sen^2x = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \rightarrow cos\,x = -\dfrac{3}{5}$

Logo,

$$5\,cos^2x - 3tg\,x = 5\cdot\frac{9}{25} - 3\cdot\frac{\frac{4}{5}}{\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{9}{5} + 4 = \frac{29}{5}.$$

9. Como $2340° = 6\cdot360° + 180°$ (seis voltas e meia na circunferência trigonométrica), e tão 2340° correspondem a 180°. Então,

$sec\,2340° = sec\,180° = \dfrac{1}{cos\,180°} = -1.$

10. C

Pela identidade trigonométrica fundamental, temos:

$\dfrac{4\cdot10}{49} + cos^2x = \rightarrow cos^2x = \dfrac{9}{49} \rightarrow cos\,x = -\dfrac{3}{7}$, pois **x** está no 2° quadrante.

Assim, $tg\,x = \dfrac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{-\frac{3}{7}} = \dfrac{-2\sqrt{10}}{3}$.

11. Observe que:

$\dfrac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = \dfrac{6}{5}\cdot cos\,\theta \rightarrow sen\,\theta = \dfrac{6}{5}\cdot cos^2\theta \rightarrow$

$\rightarrow sen\,\theta = \dfrac{6}{5}\cdot(1 - sen^2\theta) \rightarrow 6\cdot sen^2\theta + 5\cdot sen\,\theta - 6 = 0.$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$sen\,\theta = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ ou $sen\,\theta = \dfrac{-18}{12} = \dfrac{-3}{2}$ (não existe θ).

Logo, $sen\,\theta = \dfrac{2}{3}$.

12. Como

- 1 290° = 360°.3 + 210°, ou seja, 3 voltas mais 210° (1 290° correspondem a 210°);
- 1 080° = 360°·3, ou seja, 3 voltas mais 120° (1 080° correspondem a 0°);
- $\dfrac{37\pi}{6} = \dfrac{36\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = 6\pi + \dfrac{\pi}{6}$, ou seja, 3 voltas mais 30° ($\dfrac{37\pi}{6}$ correspondem a 30°).

Então:

$$E = \text{sen } 210° + \cos 0° + \cos 30° + \text{sen}^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} =$$

$$= -\text{sen } 30° + \cos 0° + \cos 30° + 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

13. C

Podemos observar que, como o quadrado está inscrito na circunferência, o valor de β é igual a: $\alpha + 90°$.

Portanto, $\cos\beta = \cos(\alpha + 90°) = \text{sen }(-\alpha)$ (ângulos complementares).

Como $\cos\alpha = 0{,}8$, então, pela identidade trigonométrica fundamental:

$\text{sen}^2\alpha + 0{,}64 = 1 \to \text{sen}^2\alpha = 0{,}36 \to \text{sen}\alpha = 0{,}6$

Como $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$ então, $\cos\beta = -0{,}6$.

14. C

Observe que:

$$\frac{\text{sen}(180° - x)}{\text{cotg}(270° - x)\cdot\cos(270° - x)} =$$

$$= \frac{\text{sen}x}{\dfrac{\cos(270° - x)}{\text{sen}(270° - x)}\cdot\cos(270° - x)} = \frac{\text{sen}x}{\dfrac{\cos^2(270° - x)}{\text{sen}(270° - x)}}.$$

Da circunferência trigonométrica, temos:

$\text{sen }(270° - x) = -\text{ sen}(90° - x)$ e $\cos(270° - x) = -\cos(90° - x)$

Como (90° – x) e (x) são complementares, temos:

$\text{sen}(90° - x) = \cos(x)$ e $\cos(90° - x) = \text{sen}(x)$.

Então:

$$\frac{\text{sen}x}{\dfrac{\cos^2(270° - x)}{\text{sen}(270° - x)}} = \frac{\text{sen}x}{\dfrac{(-\text{sen}x)^2}{-\cos x}} = -\frac{\cos x}{\text{sen}x} = -\text{cotg}x.$$

15. O ponteiro das horas percorre 360° em 12 horas. Logo 30°/h, ou 0,5°/min.

Então, em 10 horas e 50 minutos, temos $10\cdot 30° + 30\cdot 0{,}5° = 300° + 15° = 315°$.

Da circunferência trigonométrica, vem: cos 315° = = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. E

Temos que $\text{tg }\theta = \frac{\text{sen }\theta}{\cos\theta} = -3 \to \text{sen }\theta = -3\cdot\cos\theta$.

Da relação fundamental, vem:

$$9\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1 \to \cos^2\theta = \frac{1}{10}$$

Como θ é do quarto quadrante, então $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Então, $\text{sen }\theta = -3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Portanto, $\text{cossec }\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3}$.

17. C

Analisando as alternativas:

a) $\text{tg }\alpha = 1 \to \alpha = -\frac{3\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

b) $\text{sen }\alpha = 0 \to \alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

c) $\cos\alpha = -1 \to \alpha = \pi$

d) $\text{tg }\alpha = 0 \to \alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

e) $\cos\alpha = -2 \nexists\ \alpha$.

Estudo para o Enem

18. C

Temos que o segmento PQ é a tangente do ângulo 90° – α.

Então:

$\text{tg}(90° - \alpha) = \frac{\text{sen}(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$ (ângulos complementares).

Portanto, $\text{tg}(90° - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha} = \text{cotg }\alpha$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. B

Observe que:

$$\text{tg } 30° = \frac{2{,}5}{x} = 0{,}577 \to x = 4{,}3328$$

$$\text{tg } 45° = \frac{y}{2{,}5} = 1 \to y = 2{,}5$$

Então, $x - y = 4{,}3328 - 2{,}5 \approx 1{,}83$ m.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. B

Temos que

$\cos(360° - 1) = \cos x$, logo $P =$

$= \cos 91° \cdot \cos 92° \cdot \cos 93° \cdot \ldots \cdot \cos 268° \cdot \cos 269°$

$P = \cos^2 91° \cdot \cos^2 92 \cdot \cos^2 93° \cdot \ldots \cdot \cos^2 179 \cdot$

$\cdot \cos^2 180° < 0$

Pois

$P = \cos^2 91° \cdot \cos^2 92 \cdot \cos^2 93° \cdot \ldots \cdot \cos^2 179 >$

> 0 e $\cos^2 180° = -1$

Como $\cos^2 120° \cdot \cos^2 135 = \dfrac{1}{8}$ e os outros termos de P são todos positivos e menores que 1, temos que:

$0 < \cos^2 91 \cdot \cos^2 92° \cdot \cos^2 93° \cdot \ldots \cdot \cos^2 179° < \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{4}$,

ou seja,

$-\dfrac{1}{4} < P < 0$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

4 LEI DOS COSSENOS E LEI DOS SENOS

Comentário sobre o capítulo

Após estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, este módulo dedica-se a apresentar uma ferramenta matemática muito útil na resolução de problemas em que seja preciso determinar distâncias não possíveis de medição direta. A lei dos cossenos serve para os ângulos agudo, obtuso e reto. Também são apresentados exemplos de aplicação no dia a dia em instrumentos que utilizam estes teoremas como base.

A primeira explicação envolve o conceito de ângulos suplementares e as razões de seno definidas para esse tipo de ângulo.

Em seguida, é apresentada e demonstrada a Lei dos senos, para cada caso de ângulo: agudo, obtuso e reto. Também são apresentados exemplos de aplicação no dia a dia, citando instrumentos que utilizam estes teoremas como base.

Exercícios propostos

7. Traçando o segmento oposto ao ângulo de 30° de forma a obtermos um triângulo com dois lados medindo 4 cm e chamando esse segmento de x, pela lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot \cos 30° \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 16 + 16 - 32\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 4\sqrt{2-\sqrt{3}} \rightarrow x = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

8. A

Chamando o terceiro lado do triângulo de **x** e utilizando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 10^2 + 8^2 - 2\cdot 10\cdot 8\cdot \cos 60° = 100 + 64 - 80 = 84 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \sqrt{84} = \sqrt{4\cdot 21} = 2\sqrt{21}\,\text{m}$$

9. D

Como o triângulo ABC é equilátero de lado 3 cm, seus ângulos internos medem 60°. Portanto:

$$A\hat{B}D = 90° + 60° = 150°$$

Assim, como $\overline{AB}$ = 3 cm e aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ABD, temos:

$$\overline{AD}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 150° = 9 + 16 + 24\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 25 + 12\sqrt{3} \rightarrow \overline{AD} = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$$

10. B

Utilizando a Lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow AC^2 = 100 + 225 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot \frac{1}{2}$$

$$AC^2 = 100 + 225 - 150 = 175 = 25\cdot 7 \rightarrow AC = 5\sqrt{7}\,\text{m}$$

11. A

Seja ℓ a medida do lado do triângulo equilátero, $BM = MN = NC = \dfrac{\ell}{3}$.

Assim, aplicando a Lei dos cossenos:

$$AM^2 = \ell^2 + \left(\frac{l}{3}\right)^2 - 2\cdot\ell\cdot\frac{\ell}{3}\cdot\cos 60° = \ell^2 + \frac{\ell^2}{9} -$$
$$-2\cdot\frac{\ell^2}{3}\cdot\frac{1}{2} \rightarrow AM = \frac{\ell\sqrt{7}}{3}$$

Temos que $AM = AN = \dfrac{\ell\sqrt{7}}{3}$, pois os triângulos ABM e ACN são congruentes (caso LAL).

Sendo $\alpha = M\hat{A}N$ e aplicando a Lei dos cossenos no triângulo AMN, temos:

$$\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\ell\sqrt{7}}{3}\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{14\ell^2}{9}\cdot\cos\alpha = \frac{7\ell^2}{9} + \frac{7\ell^2}{9} - \frac{\ell^2}{9} = \frac{13\ell^2}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{13}{14}$$

12. Não, supondo que seja possível obter o triângulo com as medidas estabelecidas no enunciado. Aplicando a Lei dos cossenos nesse triângulo:

$$169 = 49 + 25 - 70\cdot\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{-95}{70} < -1$$

Como o menor valor do cosseno de um ângulo é –1, concluímos que não existe o triângulo, pois não existe α, um de seus ângulos internos.

13. Chamando de Sendo BC = x e utilizando a Lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 4 + 3 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30° \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 7 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1\cdot$$

Aplicando a Lei dos cossenos:

$$\frac{x}{\text{sen } A} = \frac{AC}{\text{sen } B} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\text{sen} B} \rightarrow \text{sen } B = 1 \therefore B = 90°.$$

14. C

Temos que $AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \rightarrow AC = \sqrt{5}$ e

$$AD^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \rightarrow AD = \sqrt{40}$$

Chamando de **α** o ângulo $A\hat{C}B$, temos

$A\hat{C}D = 180° - \alpha$ e $\text{sen}\,A\hat{C}D = \text{sen}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Utilizando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{\sqrt{40}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{\text{sen}\theta} \to \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\theta = 45°$.

15. A

Chamando de x o cateto vertical do menor triângulo retângulo da figura, temos que:

$$\text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{6} \to x = 2\sqrt{3}$$

Assim, pela Lei dos senos:

$$\frac{8 - 2\sqrt{3}}{\text{sen}\alpha} = \frac{10}{\text{sen}120°} \to$$

$$\to 10 \cdot \text{sen}\alpha = \left(8 - 2\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to$$

$$\to 10 \cdot \text{sen}\alpha = 4\sqrt{3} - 3 \to \text{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$$

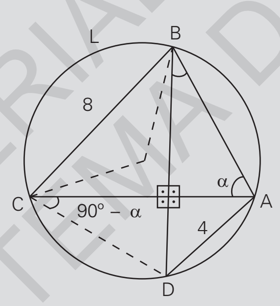
16. Temos que, como o triângulo é retângulo e isósceles, o ângulo $\hat{C} = 45°$.

Portanto, pela Lei dos senos:

$$\frac{BD}{\text{sen }45°} = \frac{2}{\text{sen }120°} \to$$

$$\to BD = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm.}$$

17. C



Observe que o ângulo $C\hat{D}B = \alpha$. Logo, o ângulo $A\hat{C}D = 90° - \alpha$.

Aplicando a Lei dos senos no triângulo BCA:

$$\frac{8}{\text{sen}\alpha} = 2R \leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{4}{R}.$$

Aplicando a Lei dos senos no triângulo ACD:

$$\frac{4}{\text{sen}(90° - \alpha)} = 2R \to \cos\alpha = \frac{2}{R}$$

Assim, pela identidade trigonométrica fundamental:

$$\frac{16}{R^2} + \frac{4}{R^2} = 1 \to R^2 = 20$$

Portanto, $R = 2\sqrt{5}$.

Estudo para o Enem

18. C

Chamando o lado oposto ao ângulo de 120° de **x** e utilizando a Lei dos cossenos:

$$x^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120° = 100 + 36 + 60$$

$$x^2 = 196 \to x = 14\text{m}$$

Portanto, o perímetro desse terreno é igual a $14 + 10 + 6 = 30\text{m}$.

Então, a quantidade de arame necessária é $3 \cdot 30 = 90\text{m}$.

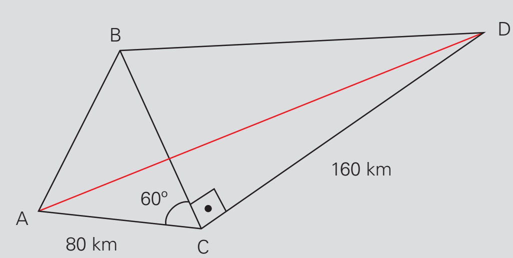
Como o preço por metro do arame é R$ 5,00, então João irá gastar R$ 90,00 · 5 = R$ 450,00.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. B

Como as distâncias entre as cidades de Sorocaba, São Paulo e Campinas formam um triângulo equilátero de lado 80 km, temos que AC = AB = = BC = 80 km.



Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo ACD:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos A\hat{C}D$$

$$AD^2 = 80^2 + 160^2 - 2 \cdot 80 \cdot 160 \cdot \cos 150°$$

$$AD^2 = 6\,400 + 25\,600 - 25\,600 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \to$$

$$\to AD^2 = 32\,000 + 12\,800\sqrt{3} \to$$

$$\to AD^2 = 6\,400 \cdot \left(5 + 2\sqrt{3}\right) \to.$$

$\rightarrow AD = \sqrt{6\,400 \cdot \left(5 + 2\sqrt{3}\right)} = 80\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. E

Da soma dos ângulos internos de um triângulo (180°), concluímos que o ângulo ACB = 81°. Logo, o triângulo ABC é isósceles.

Seja CA = CB = d, pela Lei dos senos:

$$\frac{3\,700}{\text{sen } 18°} = \frac{d}{\text{sen } 81°} \Rightarrow d = \frac{3\,700 \cdot 0{,}98}{0{,}31} \approx$$

$$\approx 3\,700 \cdot 3{,}16 \approx 37 \cdot 316 \approx 11\,692 \text{ km}$$

Assim, o valor de x é 3 700 + 11 692 ≈ 15 392 km.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

5 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Comentários sobre o módulo

O objetivo é apresentar as identidades trigonométricas e suas inversas como ferramentas na simplificação de expressões extensas envolvendo relações trigonométricas para um mesmo ângulo. Demonstram-se essas identidades com base nas razões entre lados e ângulos de triângulo retângulo, por isso é importante que os alunos relembrem as razões seno, cosseno e tangente para se aprofundar no estudo.

Exercícios propostos

7. 13 (01 + 04 + 08).

02) Incorreto, pois $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

16) Incorreto, pois $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{4}}{\cos x} = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$ (não convém).

8. Como $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, temos que $\text{sen } x \leqslant 0$ e $\cos x \leqslant 0$.

Logo, $\frac{\cos^2 x}{1 - \text{sen} x} = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{1 - \text{sen} x} =$

$= \frac{(1 + \text{sen} x)(1 - \text{sen} x)}{1 - \text{sen} x} = 1 + \text{sen } x.$

Como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 0$, temos que $0 \leqslant 1 + \text{sen } x \leqslant 1$. Logo, o intervalo é $[0,1]$.

9. E

Temos que $\frac{\sec x + \text{sen } x}{\text{cossec } x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \text{sen } x}{\frac{1}{\text{sen } x} + \cos x} =$

$= \frac{\frac{1 + \cos x \cdot \text{sen } x}{\cos x}}{\frac{1 + \cos x \cdot \text{sen } x}{\text{sen } x}} = \frac{1 - \cos x \cdot \text{sen } x}{1 - \cos x \cdot \text{sen } x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} =$

$= \text{tg } x.$

10. C

Temos que $\cos x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \rightarrow \cos^2 x = \text{sen } x.$

$1 - \text{sen}^2 x = \text{sen } x \rightarrow \text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

11. a) Chamamos o ângulo $\hat{B} = \hat{C} = x$, logo

$\hat{A} = 2(x + x).$

Então, $2(x + x) + x + x = 6x = 180°$

$x = 30°$

Portanto, o ângulo $\hat{A} = 120°$.

Assim, pela lei dos senos, temos que:

$\text{sen } \frac{30°}{L} = \frac{\text{sen}120°}{10} \rightarrow L = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} =$

$= 10 \frac{\sqrt{3}}{3}$

$P = L + L + 10 = \left(\frac{20\sqrt{3}}{3} + 10\right)$ cm.

b) Temos que $a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b)$.

Logo, $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = (\text{sen } x + \cos x)(\text{sen}^2 x - \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x) = k\,(1 - \text{sen } x \cdot \cos x)$.

Temos também que, como $\text{sen } x + \cos x = k$, $\text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = k^2 \rightarrow$ $\rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = k^2 - 1$ $\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{k^2 - 1}{2}$

Então: $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = k\left(1 - \frac{k^2 - 1}{2}\right) = \frac{3k - k^3}{2}.$

12. Temos que $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = 2$

$\cos x = 2\text{sen } x \rightarrow \cos^2 x = 4\text{sen}^2 x \rightarrow \cos^2 x =$

$= 4 - 4\cos^2 x \rightarrow 5\cos^2 x = 4 \rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5}$

Como x é do 2° quadrante: $\cos x = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}.$

13. A

Temos que, pela equação,

$(1 + \sec \theta)(1 + \text{cossec } \theta) = 0$

$1 + \sec \theta = 0$ ou $1 + \text{cossec } \theta = 0$

com $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ e $\theta \neq n\pi$

Além disso: $1 + \sec \theta = 0 \rightarrow \sec \theta = -1\cos \theta = = -1 \rightarrow \theta = \pi + n2\pi$

Finalmente, temos que: $1 + \text{cossec } \theta = 0 \rightarrow$ $\text{cossec } \theta = -1 \rightarrow \text{sen } \theta = -1 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Portanto, concluímos que o número de soluções é zero.

14. A

III. Incorreto, pois a medida é 360°– 40°= 320°.

15. A

Temos que

$$\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{csc}\,\theta}\right) + \left(\frac{\cos\theta}{\sec\theta}\right) = \frac{\text{sen}\,\theta}{\frac{1}{\text{sen}\,\theta}} + \frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} =$$

$$= \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

16. Seja x o ângulo da questão.

Como $\text{sen}\,x = \frac{12}{13}$, temos que

$$\text{sen}^2x + \cos^2x = \frac{144}{169} + \cos^2x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2x = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

$\cos x = \frac{-5}{13}$, pois $x \in 2°$ quadrante.

Assim, temos que

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{-5}{13}} = \frac{-12}{5}.$$

17. B

Temos que

$$\frac{\cos^3x - 2 \cdot \cos x + \sec x}{\cos x \cdot \text{sen}^2x} =$$

$$= \frac{\cos^3x - 2 \cdot \cos x + \frac{1}{\cos x}}{\cos x \cdot \text{sen}^2x} =$$

$$= \frac{\cos^3x - 2 \cdot \cos x + \frac{1}{\cos x}}{\cos x \cdot \text{sen}^2x} =$$

$$= \frac{\cos^4x - 2 \cdot \cos^2x + 1}{\cos^2x \cdot \text{sen}^2x} = \frac{(\cos^2x - 1)^2}{\cos^2x \cdot \text{sen}^2x} =$$

$$= \frac{(-\text{sen}^2x)^2}{\cos^2x \cdot \text{sen}^2x} = \frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x} = \text{tg}^2x$$

Estudo para o Enem

18. D

Como $\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{y}$

$\frac{x}{y} = 2$

$x = 2y$

Temos que $x^2 + y^2 = 25$.

$4y^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 5 \rightarrow y = \sqrt{5}$

Portanto, $x = 2\sqrt{5}$ e $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. D

Temos que $\sec x = \frac{\text{tg}\,x + 2}{2}$

Ou seja: $\frac{1}{\cos x} = \frac{\text{sen}\,x}{2 \cdot \cos x} + 1 \rightarrow 2 =$

$= \text{sen}\,x + 2 \cdot \cos x \rightarrow \text{sen}\,x = 2 - 2 \cdot \cos x$

Como $\text{sen}\,x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\sqrt{1 - \cos^2 x} = 2 - 2 \cdot \cos x \rightarrow 1 - \cos^2x =$

$= 4 - 8 \cdot \cos x + 4 \cdot \cos^2x \rightarrow$

$\rightarrow 5 \cdot \cos^2x - 8 \cdot \cos x + 3 = 0$

$\cos x = 1$ ou $\cos x = \frac{3}{5}$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Temos que $\sec x = \frac{5}{3}$ e $\text{tg}\,x = \frac{4}{3}$.

Logo, a razão da sequência é $\frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. D

Com base no texto, podemos perceber que:

1° A produção máxima ocorre quando o preço é o mais baixo possível.

2° Sabemos que a função cosseno varia entre [1, −1].

Como queremos o menor valor possível, teremos então:

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \rightarrow$$

$\rightarrow x - 1 = 6 \rightarrow x = 7$

Como x = 7, o mês de produção máxima será julho.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

6 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Comentários sobre o módulo

São analisadas também as variações das funções trigonométricas inversas, no que se refere ao deslocamento do gráfico em relação aos eixos coordenados e às alterações de amplitude e de período.

Exercícios propostos

7. B

Devemos ter $R_A = R_B$. Logo:

$$\left|2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right| = \left|\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)\right|$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi t}{60}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi t}{60} = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 15 \text{ meses.}$$

8. D

O valor máximo se dá quando $\cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right) = 1$

Ou seja, quando $\pi \cdot \frac{(t-3)}{12} = k \cdot 2\pi$.

$t - 3 = 24k$

$t = 24k + 3$

No intervalo [0,11], o único valor possível é $t = 3$ (início de abril).

$f(3) = 1,625 + 1,25 \cdot 1 = 2,875$.

9. A moeda X deixa de ser menos valiosa que a moeda Y quando $f(x) \leq 1$. Logo,

$$1,625 + 1,25 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right) \leq 1 \rightarrow 1,25 \cdot \cos$$

$$\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right) \leq -0,625 \rightarrow \cos\left(\pi \cdot \frac{(t-3)}{12}\right) \leq \frac{-1}{2} \rightarrow$$

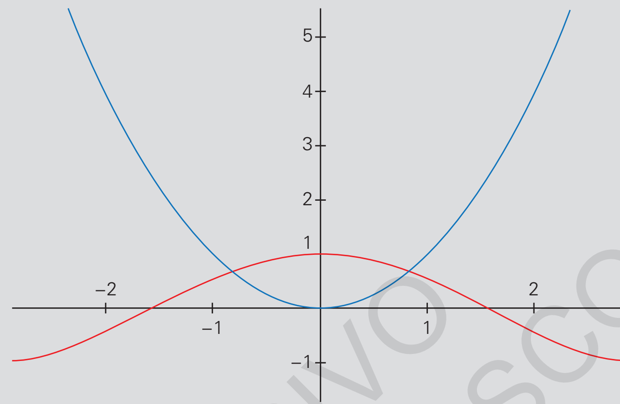
$$\rightarrow \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \cdot \frac{(t-3)}{12} \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow$$

$$8 + 24k \leq t - 3 \leq 16 + 24k \rightarrow 11 + 24k \leq t \leq 19 + 24k$$

No intervalo [0,11], o único valor possível para t é $t = 11$. Portanto, a moeda deixou de ser menos valiosa em dezembro. Logo, o intervalo é de 1 mês.

10. B

Podemos analisar os gráficos e, como x^2 é côncava para cima, temos que:

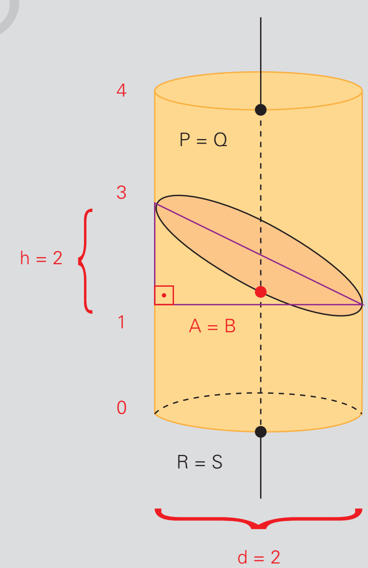


11. B

Podemos observar que o diâmetro do cilindro pode ser calculado pelo comprimento do círculo, que, pelo gráfico da figura 1, é igual ao período da função $y = \text{sen } x$, ou seja, 2π. $2\pi r = 2\pi \rightarrow r = 1$

Logo, o diâmetro é igual a $d = 2$.

Assim, como a altura do cilindro é igual a 4, e a imagem de $y = \text{sen } x$ é $\text{Im} = [-1,1]$, temos o triângulo:



Portanto, o diâmetro maior da elipse é dado por: $D = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

12. Igualando as equações, teremos:

$\cos(2\alpha) = 4\cos(\alpha) \rightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha =$

$= 4\cos\alpha \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 4\cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow 2\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - = 0$

Resolvendo a equação de 2° grau, temos que:

$\cos\alpha = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

13. A

Podemos observar que a amplitude é igual a 2. Logo, a = 2.

Temos também que o período é igual a $p = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{3\pi}{2}$.

Então, $|b| = \frac{4}{3}$. Como o gráfico está invertido: $b = \frac{-4}{3}$.

Portanto, $a \cdot b = 2 \cdot \frac{(-4)}{3} = \frac{-8}{3}$.

14. B

III) Incorreto. A amplitude é dada pela constante que multiplica a função periódica, no caso, 20 mmHg.

15. D

$f(x_p) = g(x_p)$

$2^{\text{sen}x_p} = 4^{\cos x_p}$

$2^{\text{sen}x_p} = 2^{2\cos x_p}$

$\text{sen } x_p = 2\cos x_p$

$\text{sen}^2 x_p = 4\cos^2 x_p$

$1 - \cos^2 x_p = 4\cos^2 x_p$

$\cos^2 x_p = \frac{1}{5}$

$\cos x_p = \frac{\sqrt{5}}{5}$

16. C

Temos o máximo da função quando cox x = 1.

Logo, x = 0. Portanto, $f(0) = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} + k = 4$.

Assim, $\frac{3}{2} + k = 4 \rightarrow k = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

17. A

Temos que, como a função não é invertida no gráfico, $\alpha > 0$.

Como a amplitude aumenta, temos que $\alpha \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \alpha$. E, portanto, $0 < \alpha < 1$.

Como o período de g(x) é 4π, temos que

$p = \frac{2\pi}{|\beta|} = = 4\pi \rightarrow |\beta| = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$.

Estudo para o Enem

18. A

Em março: $P(2) = 6\,000 + 50 \cdot 2 + 2000 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{6}\right) = 6\,000 + 100 + 2000 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 6000 + 100 + 1000 = 7100$.

Em julho: $P(6) =$

$= 6\,000 + 50 \cdot 6 + 2000 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 6}{6}\right) =$

$= 6000 + 300 - 2000 = 4300$

$1 - \frac{P(6)}{P(2)} = 1 - \frac{4300}{7100}$; 0,395 = 39,5%.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. E

Temos que o gráfico deve ter

$y(0) = 11\,000$.

$y(90) = 11\,000 + \text{sen } (4 \cdot 90) = 11\,000$

$y(180) = 11\,000 + \text{sen } (4 \cdot 180) = 11\,000$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. C

Analisando a circunferência trigonométrica, temos que

$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Assim, se tomarmos $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, podemos coincidir os gráficos de f(x) e g(x).

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

7 TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Comentários sobre o módulo

Em geral, o conteúdo deste módulo é cobrado em questões de simplificação de expressões envolvendo as razões trigonométricas. Entretanto, selecionamos alguns problemas que também podem ser resolvidos com essas transformações trigonométricas.

Exercícios propostos

7. a) $\text{tg } x = \frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sec x$

$\text{tg}^2 x = \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \sec x + \frac{4}{5} \sec^2 x$

Mas $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\sec^2 x - 1 = \frac{9}{4} - \frac{6}{\sqrt{5}} \sec x + \frac{4}{5} \sec^2 x \rightarrow$

$\rightarrow 4\sqrt{5} \sec^2 x + 120 \sec x - 65\sqrt{5} = 0$

$\sec x = \frac{-120 \pm 140}{8\sqrt{5}}$. Como $\sec x > 0$, $\sec x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Como $\sec x = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Temos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen } x = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Então,

$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \text{sen } \frac{\pi}{4} \cdot \cos x =$

$= \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

8. D

Temos que $2x + y = \pi$.

$\cos y = \cos(\pi - 2x) =$

$= \cos \pi \cdot \cos 2x + \text{sen } \pi \cdot \text{sen } 2x$

$\cos y = -\cos 2x = -\cos(x + x) =$

$= -\cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \text{sen } x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$

$\cos y = \text{sen}^2 x - 1 + \text{sen}^2 x = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x$

$\cos y = 1 - 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{8}$

9. Temos $\text{sen } 3x = \frac{1}{2}$.

Para $0 \leq x \leq \pi \rightarrow 0 \leq 3x \leq 3\pi$.

Então, $3x = \frac{\pi}{6}$ ou $3x = \frac{5\pi}{6}$ ou $3x = \frac{11\pi}{6}$ ou $3x = \frac{17\pi}{6}$.

4 soluções.

10. E

Temos que $\cos(x + x) =$

$= \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$.

Então, $\cos(x + x) = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x =$

$= 1 - 2\text{sen}^2 x$.

Fazendo $x = \frac{\pi}{8}$, temos:

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{\pi}{8}$

Assim, $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -2\text{sen}^2 \frac{\pi}{8}$

$\text{sen}^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

$\text{sen } \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

11. B

Temos que $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \sqrt{7}$

$\text{sen } x = \sqrt{7} \cos x$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\text{sen}^2 x = 7 \cos^2 x = 7 - 7\text{sen}^2 x$

$8 \cdot \text{sen}^2 x = 7$

$\text{sen}^2 x = \frac{7}{8}$

$\text{sen } x = \frac{-\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{14}}{4}$, pois $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Temos que $\text{sen}(3x) = \text{sen}(x + 2x) = \text{sen } x \cdot \cos 2x + \text{sen } 2x \cdot \cos x$

Porém, como $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$\text{sen } 2x = \text{sen}(x + x) = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos x = 2\text{sen } x \cdot \cos x$

Assim, $\text{sen } 3x = \text{sen } x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 2\text{sen } x \cdot \cos x \cdot \cos x$

$= \text{sen } x(1 - 2\text{sen}^2 x) + 2\text{sen } x \cdot (1 - \text{sen}^2 x) =$

$= \frac{-\sqrt{14}}{4}\left(1 + 2 \cdot \frac{14}{16}\right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4}\left(1 - \frac{14}{16}\right) = \frac{\sqrt{14}}{8}$

12. C

Temos que $\cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois x é um ângulo do 1º quadrante.

Então: $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}(4x) - \cos(4x) = \operatorname{sen}(2x + 2x) - \cos(2x + 2x) =$

$= 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x - (\cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x)) =$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

13. a) $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 9x^2 + 4x^2 = 13x^2$

$AC = x\sqrt{13}$ $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 13x^2 - x^2 =$

$= 12x^2$ $AB = 2x\sqrt{13}$

b) $\theta = B\hat{A}C + D\hat{A}C$

$\operatorname{sen}(B\hat{A}C) = \frac{x}{x\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$

$\cos(B\hat{A}C) = \frac{2x\sqrt{3}}{x\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\operatorname{sen}(D\hat{A}C) = \frac{2x}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos(D\hat{A}C) = \frac{3x}{x\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(B\hat{A}C + D\hat{A}C) =$

$= \frac{\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{3}{13} + \frac{4\sqrt{3}}{13} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{13}$

14. E

Como $\cos p + \cos q =$

$= 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Fazendo a =

= 3x, temos: $\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a = 0$

$2 \cdot \cos 2a + 2 \cdot \cos\frac{3a + a}{2} \cdot \cos\frac{3a - a}{2} = 0$

$2 \cdot \cos 2a + 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a$ $2 \cdot \cos 2a \cdot (1 + \cos a) = 0$

$\cos 2a = 0$ ou $\cos a = -1$

Então, $\cos 6x = 0$ ou $\cos 3x = -1$.

Logo: $6x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ou $3x = \pi + n\pi$, (n inteiro)

$x = \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3} + n\frac{2\pi}{3}$ (n inteiro)

Para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, a soma de todas as soluções distintas é:

$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$.

15. D

$\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$

$\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 3x - \cos 2x \cdot \cos 3x = 0$

$\cos(2x + 3x) = 0$ $\cos 5x = 0$

$5x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{10} = \frac{180°}{10} = 18°$

16. Como $\operatorname{sen} x = \frac{24}{25}$

$\cos x = \sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{49}{625}} = \frac{7}{25}$ pois $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Temos que $\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$.

Fazendo

$y = \frac{x}{2}$: $\cos x = 2 \cdot \cos^2\frac{x}{2} - 1$ $\frac{-7}{25} = 2 \cdot \cos^2\frac{x}{2} - 1$

$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{25}\right)$ $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

17. E

Temos que

$\operatorname{sen} x = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

$\cos^2 x = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} \rightarrow \cos x = \pm\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

Assim:

$\operatorname{cossec}(2x) - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

$- \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cdot \cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2 \cdot \operatorname{sen} x}$

$\operatorname{cossec}(2x) - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x = \frac{\pm(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)}{2 \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2}}$

$= \pm\frac{a^2 - b^2}{4ab}$

Estudo para o Enem

18. A

A função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \pi]$ e crescente no intervalo $[\pi, 2\pi]$.

Quando temos o mínimo da função cosseno, vem: $\cos\left(\frac{t-2}{6}\right) \cdot \pi = \cos\pi \rightarrow t = 8$

Quando temos o máximo da função cosseno, vem: $\cos\left(\frac{t-2}{6}\right) \cdot \pi = \cos 0 \rightarrow t = 2$

Portanto, do mês 0 ao mês 2 e do mês 8 ao mês 12, temos chuva.

Assim, 6 meses de chuva e 6 meses de seca. Temos a população mínima de 4 000 animais.

A população média é de $\dfrac{4\,000 + 6\,000}{2} = 5\,000$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. B

O cateto AB mede:

$\sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

Como $A\hat{C}B = 60°$:

$\text{tg}\,(A\hat{C}B) = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Como $A\hat{M}B = 60° + \alpha$:

$\text{tg}\,(60° + \alpha) = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} =$

$= 2\sqrt{3}$

Portanto,

$\dfrac{\text{tg}\,60° + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,60° \cdot \text{tg}\,\alpha} = 2\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{3} + \text{tg}\,\alpha}{1 - \sqrt{3}\,\text{tg}\,\alpha} = 2\sqrt{3}$

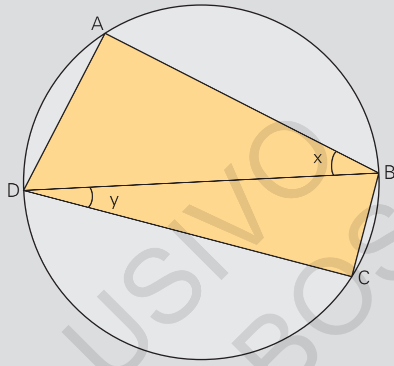
$\sqrt{3} + \text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{3} - 6\text{tg}\,\alpha$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. B



Como DB é um diâmetro, então $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ são ângulos retos.

Logo: $AD = 2 \cdot \text{sen}\,x$ e $AB = 2 \cdot \cos x$.

Então, sua área é $\dfrac{AB \cdot AD}{2} = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x =$ $= \text{sen}\,2x$.

Assim: $CB = 2 \cdot \text{sen}\,y$ e $CD = 2 \cdot \cos y$.

Então, sua área é $\dfrac{CD \cdot CB}{2} = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos y =$ $= \text{sen}\,2y$.

Portanto, a área da região cinza é:

$\pi \cdot 1^2 - \text{sen}\,2x - \text{sen}\,2y = \pi - \text{sen}\,2x - \text{sen}\,2y$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

8 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Comentários sobre o módulo

O estudo deste módulo é dedicado a equações e inequações trigonométricas, válidas para todo o conjunto dos números reais. Com base nos exemplos, são apresentadas as soluções para as igualdades de seno, cosseno e tangente de arcos com imagens coincidentes ou simétricas. De modo análogo, foram apresentados os principais casos de inequações trigonométricas.

Exercícios propostos

7. $\text{sen}^2x + \cos x = \frac{5}{4} \rightarrow 1 - \cos^2x + \cos x = \frac{5}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \cos^2x - \cos x + \frac{1}{4} = 0$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, em $[0, 60\pi]$

Há 60 soluções.

8. 28 (04 + 08 + 16)

1) Incorreto, pois $\cos 2x = 2\cos^2x - 1$.

2) Incorreto, pois, como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, então $\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) > \frac{1}{2}$.

9. C

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\text{sen}(x + 2x)}{\text{sen}\,x} -$$

$$- \frac{\cos(x + 2x)}{\cos x} = \frac{\text{sen}\,x \cdot \cos 2x + \text{sen}\,2x \cdot \cos x}{\text{sen}\,x} -$$

$$- \frac{\cos x \cdot \cos 2x - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,2x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\text{sen}\,x - 2 \cdot \text{sen}^2x + 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos^2x}{\text{sen}\,x} -$$

$$- \frac{\cos x(2 \cdot \cos^2x) - 2 \cdot \text{sen}^2x \cdot \cos x}{\cos x} =$$

$= 1 - 2 \cdot \text{sen}\,x + 2 \cdot \cos^2x - 2 \cdot \cos^2x - 2 \cdot \text{sen}^2x =$

$= -1 - 2 \cdot \text{sen}\,x + 2 \cdot \cos^2x = -1 - 2 \cdot \text{sen}\,x - 2 + 2 \cdot \text{sen}^2x = 2 \cdot \text{sen}^2x - 2 \cdot \text{sen}\,x - 3$

Temos que a solução para a equação $2 \cdot \text{sen}^2x - 2 \cdot \text{sen}\,x - 3 = 0 \rightarrow \text{sen}\,x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} =$

$= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$

O domínio da função é igual aos reais, mas $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

$x \neq \frac{k\pi}{2}$

$$f(-x) = \frac{\text{sen}(-3x)}{\text{sen}(-x)} - \frac{\cos(-3x)}{\cos(-x)} = \frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} =$$

$= f(x)$ (portanto, a função é par)

Dados dois números **a** e **b**, tal que $a \neq b$, temos que $f(a) = f(b)$.

Logo, f não é injetora.

10. Temos que:

- se $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \rightarrow \frac{\pi t}{6} = 0 \rightarrow t = 0$
- se $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 3$
- se $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \rightarrow \frac{\pi t}{6} = \pi \rightarrow t = 6$

A sirene soa de três em três horas.

11. D

Temos que $f(x) = \sqrt{\frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x}{\text{sen}\,x}}$,

temos que $\text{sen}\,x \neq 0 \rightarrow x \neq 2k\pi$

$f(x) = \sqrt{2 \cdot \cos x}$

Temos que $2 \cdot \cos x > 0$.

$\cos x > 0$

$0 + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

12. D

$2 \cos x \leq 1$ $\cos x \leq \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

13. $\frac{1}{4} \leq \cos x \cdot \text{sen}\,x < \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{1}{2} \leq 2 \cdot \cos x \cdot \text{sen}\,x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2} \leq \text{sen}\,2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{8}$

$S = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}\right]$.

14. C

$\text{sen } x - \frac{1}{2} \leq 0$ ou $\text{sen } x - 2 \leq 0 \rightarrow \text{sen } x \leq 2 \rightarrow x \in \mathbb{R}$

$\text{sen } x < \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

15. B

$0 < \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x + \text{sen } 2x}{1 + \text{tg } x} < 1$

$0 < \frac{2 \cdot \text{sen}^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}{1 + \text{tg } x} < 1$

$0 < \frac{2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x)}{1 + \text{tg } x} < 1$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x) < 1 + \text{tg } x$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x) < 1 + \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + \cos x) < \frac{\cos x + \text{sen } x}{\cos x}$

$0 < 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x < 1$

$0 < \text{sen } 2x < 1$

$0 < 2x < \frac{\pi}{2}$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$

16. A

$2 \cdot \cos^2 x + \cos 2x > 2$

$2 \cdot \cos^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x > 2$

$2 \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \cos^2 x - 1 > 2$

$4 \cdot \cos^2 x > 3$

$\cos^2 x > \frac{3}{4}$

$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ou seja, $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$.

17. a) Temos então que um ângulo de $T_2 = 45°$.

Portanto, seus catetos valem $1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, a área vale $A_{T_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

b) $A_{T_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{sen } \alpha \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \frac{\text{sen } 2\alpha}{4}$

$A_{T_1} = \frac{\text{sen } 2\alpha}{4}$

$A_{T_2} = \frac{1}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{\text{sen } 4\alpha}{4}$

$A_{T_1} < A_{T_2}$

$\frac{\text{sen } 2\alpha}{4} < \frac{\text{sen } 4\alpha}{4}$

$\text{sen } 2\alpha < 2 \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$

$1 < 2 \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha > \frac{1}{2}$

$2\alpha > \frac{\pi}{3}$

Como $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ e a função cosseno é decrescente $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{3}$, logo $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$.

Estudo para o Enem

18. D

Dada a função y = a + b · sen (cx + d). O período é dado por $\frac{2\pi}{c}$.

O maior coeficiente de t é $\frac{\pi}{2}$, portanto corresponde ao menor período.

A maior amplitude é 4.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. B

Temos que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$.

$\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{t}{12} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 2k$

$\frac{t}{6} + 3 = 1 + 4k$

$t = 24k - 12$

Como $t \in [0,24]$

Para k = 0, temos t = −12 (não convém).

Para k = 1, temos t = 12 (convém).

Para k = 2, temos t = 36 (não convém).

Portanto, t = 12.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

Temos que $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{360}\right) \leq 1$.

Logo, $750 \leqslant p\,(t) \leqslant 1\,250$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Pearson

PRÉ-VESTIBULAR
SEMIEXTENSIVO 1

Pearson

www.dombosco.com.br
701625365