

INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

Já sabemos como resolver inequações de primeiro e de segundo grau. Agora, vamos estudar dois tipos específicos de inequações, as chamadas **inequações produto** e **inequações quociente**.

INEQUAÇÕES PRODUTO

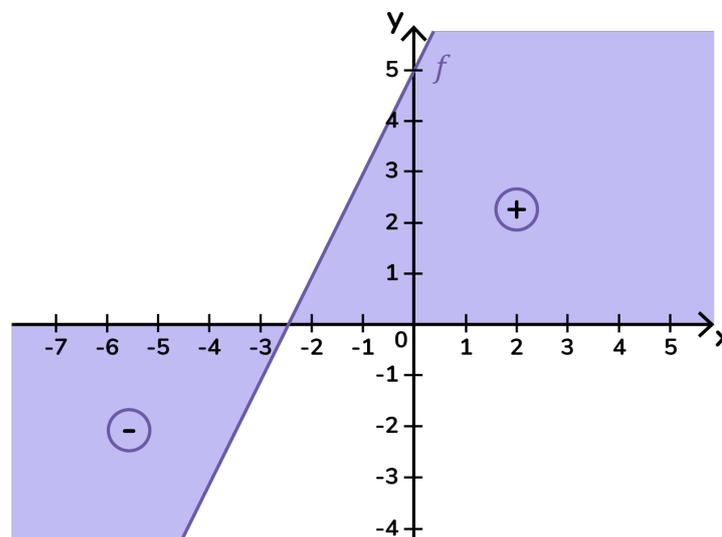
Uma inequação produto é uma expressão que compara um produto de duas funções com o número zero, isto é, uma inequação que pode ser escrita em uma das seguintes formas:

- ▶ $f(x) \cdot g(x) > 0$;
- ▶ $f(x) \cdot g(x) \geq 0$;
- ▶ $f(x) \cdot g(x) < 0$;
- ▶ $f(x) \cdot g(x) \leq 0$;
- ▶ $f(x) \cdot g(x) \neq 0$;

Para resolver uma inequação produto, precisamos realizar o estudo do sinal das funções f e g separadamente e, em seguida, analisar os efeitos desses sinais na função $f \cdot g$. Para facilitar a realização deste último processo, utilizamos um dispositivo prático, que chamaremos de quadro de sinais. Observe o exemplo a seguir:

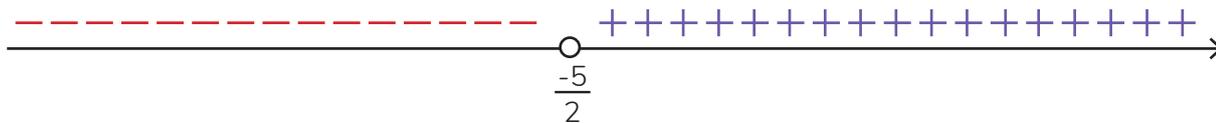
Exemplo: Resolva a inequação $(2x+5) \cdot (x^2+x-2) > 0$.

Definimos $f(x)=2x+5$ e $g(x)=x^2+x-2$. Primeiramente, vamos analisar o sinal de f . Do estudo sobre funções afim, sabemos que $f(x)$ é uma função crescente e se anula em $x = \frac{-5}{2}$. Logo, f será positiva para todo $x > \frac{-5}{2}$ e negativa para todo $x < \frac{-5}{2}$.





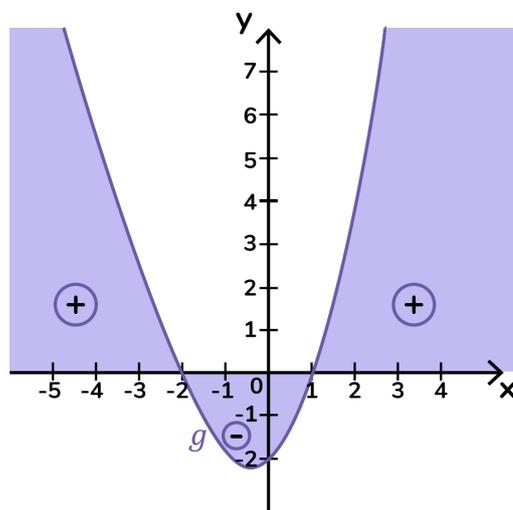
Vamos desenhar o estudo de sinal de f em uma reta, como abaixo:



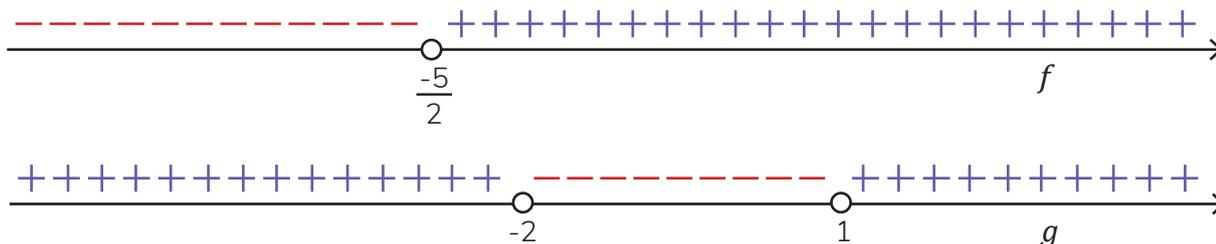
Lembre-se: na representação dos pontos na reta real:

- ▶ **Bola aberta:** o ponto não é incluído;
- ▶ **Bola fechada:** o ponto é incluído.

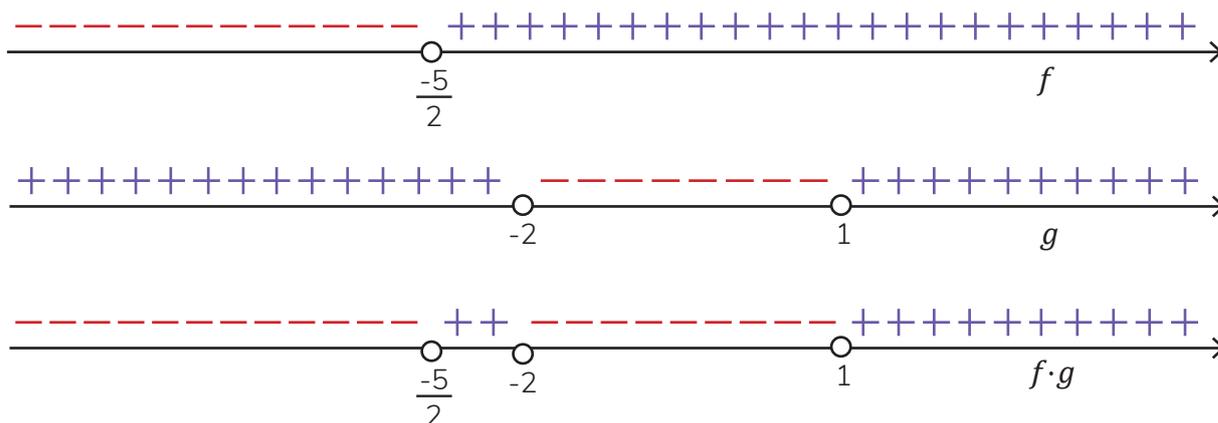
Agora, vamos seguir os mesmos passos para $g(x)$. Pela fórmula de Bhaskara, temos que g se anula em $x=-2$ e $x=1$. Ainda, temos que a parábola associada à g tem concavidade para cima. Logo, g será positiva para todo $x < -2$ e para todo $x > 1$ e negativa para $-2 < x < 1$:



Colocando o estudo do sinal de g em uma reta abaixo do que fizemos para f , temos a seguinte situação:



Agora, temos todas as ferramentas necessárias para encontrar a solução da inequação do exemplo. Queremos ter $f(x) \cdot g(x) > 0$ e isto só ocorre quando f e g têm o mesmo sinal. Assim, podemos adicionar uma última reta abaixo da reta que representa g e, fazendo a regra de sinais da multiplicação em cada subintervalo da reta, temos o sinal de $f \cdot g$:



Olhando para o diagrama e excluindo os pontos onde f e g se anulam, temos que a solução da inequação é $(-\frac{5}{2}, -2) \cup (1, \infty)$.

INEQUAÇÕES QUOCIENTE

Uma inequação quociente é um tipo específico de inequação produto que compara um quociente de duas funções com o número zero, isto é, uma inequação que pode ser escrita em uma das seguintes formas:

- ▶ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$;
- ▶ $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$;
- ▶ $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$;
- ▶ $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$;
- ▶ $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$;

Para resolver uma inequação quociente, seguimos os mesmos passos feitos para inequações produto, porém com um cuidado a mais: a função do denominador **nunca** pode se anular, para que o quociente exista. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo: Para melhor visualizar as semelhanças e diferenças entre a resolução de uma inequação quociente e de uma inequação produto, considere novamente $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = x^2 + x - 2$ e a inequação quociente $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

Pelos estudos de sinais da divisão, temos:

