Aula 03 – Geometria Plana II

ESPCEX 2021

Professor Victor So

Sumário

Apresentação

Olá,

Na aula passada, estudamos alguns tópicos de geometria plana. Vimos o que é a geometria Euclidiana e também conceitos de retas, ângulos e triângulos. Nessa aula, estudaremos o teorema de Tales e usaremos esse teorema para provar semelhança de triângulos. Também veremos como calcular as cevianas de um triângulo qualquer e quais os pontos notáveis de um triângulo.

Tente se acostumar a “enxergar” quando dois triângulos são semelhantes. Isso será útil para resolver as questões de geometria plana da prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso

/profvictorso

/profvictorso

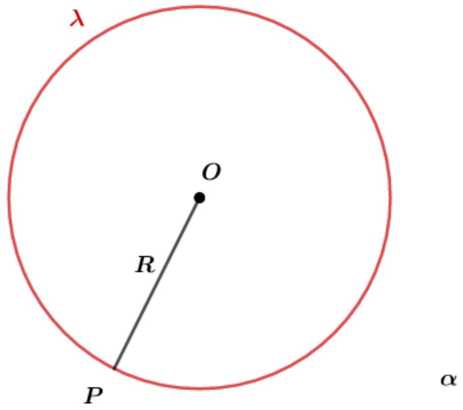
1. Lugar Geométrico

Lugar geométrico é o conjunto de pontos de um plano com uma determinada propriedade. Vamos estudar os principais:

1.1. Circunferência

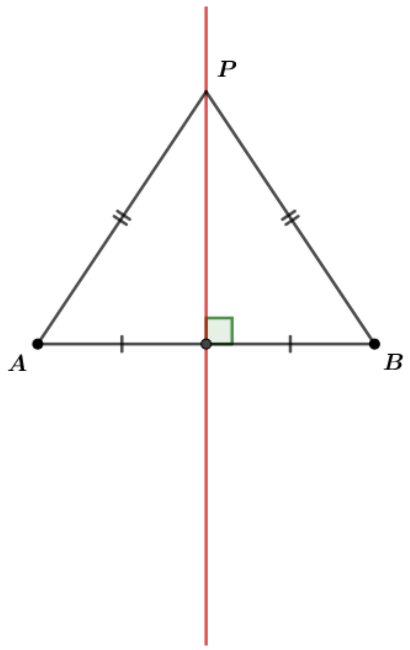
Circunferência é o lugar geométrico dos pontos P de um plano que distam R de um ponto fixo O. Sejam λ, α, O e R, a circunferência, o plano, o centro e o raio, respectivamente. Em símbolos, o LG da circunferência pode ser escrito como:

$$\lambda = \{p \in \alpha | OP = R\}$$



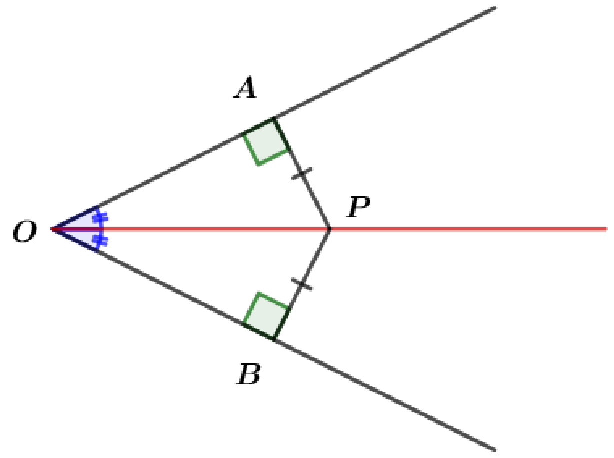
1.2. Mediatriz

Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam das extremidades de um segmento.



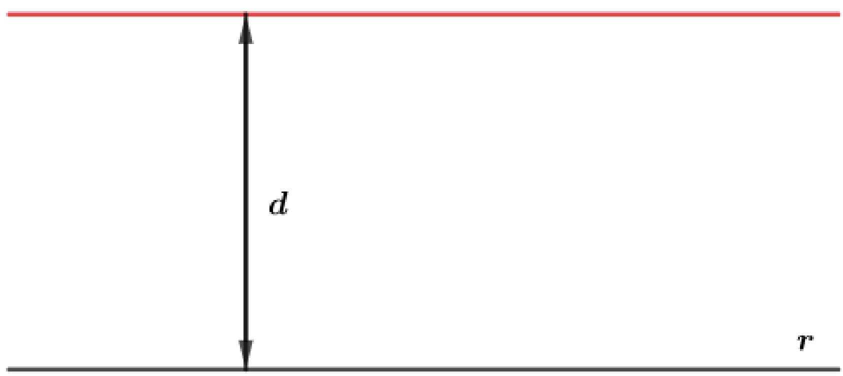
1.3. Bissetriz

É o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de duas retas concorrentes. Consequentemente, esse LG divide o menor ângulo entre as retas concorrentes em duas partes iguais.



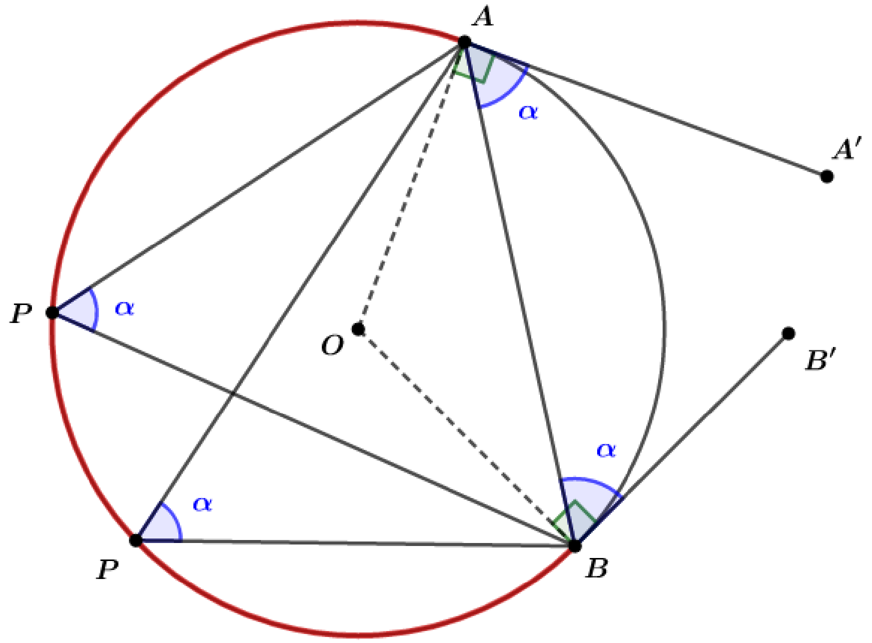
1.4. Par de Retas Paralelas

É o lugar geométrico dos pontos que equidistam d de uma reta.



1.5. Arco Capaz

É o lugar geométrico dos pontos que "enxergam" o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α dado.



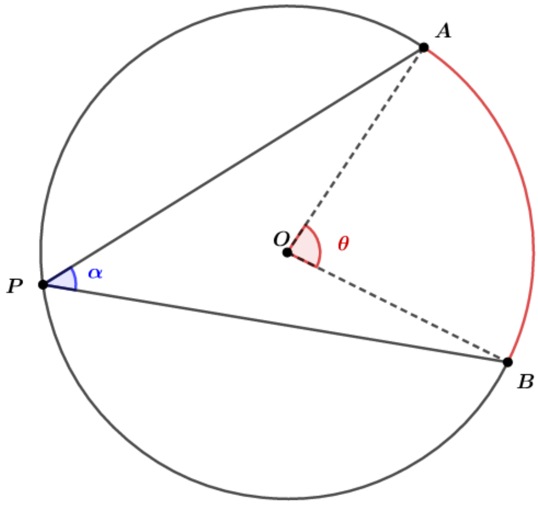
Todos os pontos P pertencentes à região vermelha da circunferência são pontos do arco capaz. Perceba que quando $P \equiv A$ ou $P \equiv B$, temos que os segmentos de reta AA' e BB' tangenciam a circunferência nos pontos A e B, respectivamente. Nesses pontos, eles também enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α.

Outro ponto a se notar é que toda reta tangente a uma circunferência forma um ângulo reto com o segmento de reta que liga o ponto de tangência ao centro da circunferência.

INDO MAIS
FUNDO!

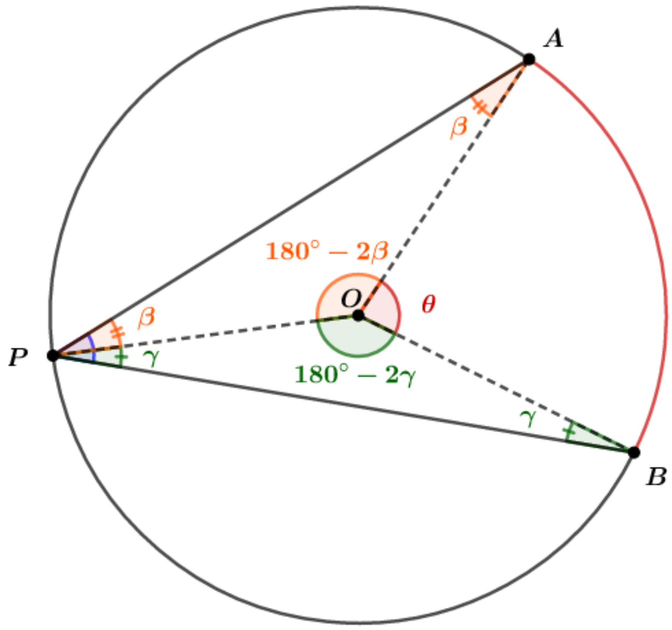
Podemos encontrar uma relação entre α e o menor arco de $\widehat{AB}$.

Sabemos que o ângulo do centro da circunferência é igual ao ângulo formado pelo arco $\widehat{AB}$.



$$\theta = \widehat{AB}$$

Podemos traçar o segmento de reta que liga o ponto P ao centro O. Como $\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{OB}$, formamos dois triângulos isósceles OPA e OPB:



Perceba que $A\hat{P}B = \alpha = \beta + \gamma$. Analisando o centro da circunferência, vemos que:

$$\theta + 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360°$$

$$\theta = 2(\beta + \gamma)$$

$$\theta = 2\alpha$$

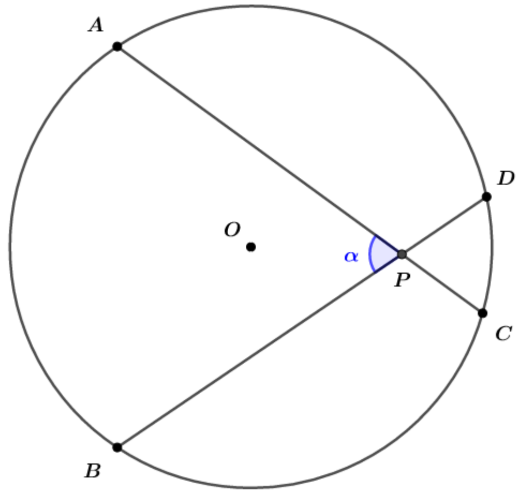
$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}}$$

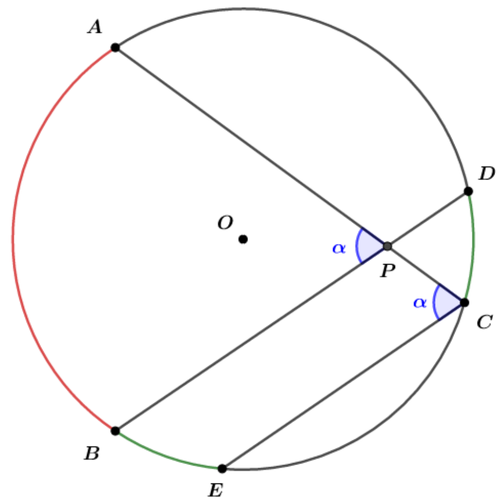
Além desse caso, temos outros dois:

P pode estar localizado no interior da circunferência ou P pode estar no exterior da circunferência.

Para o caso de P interno à circunferência:



Nesse caso, podemos traçar um segmento de reta paralelo ao segmento $\overline{BD}$ e que passe por C:

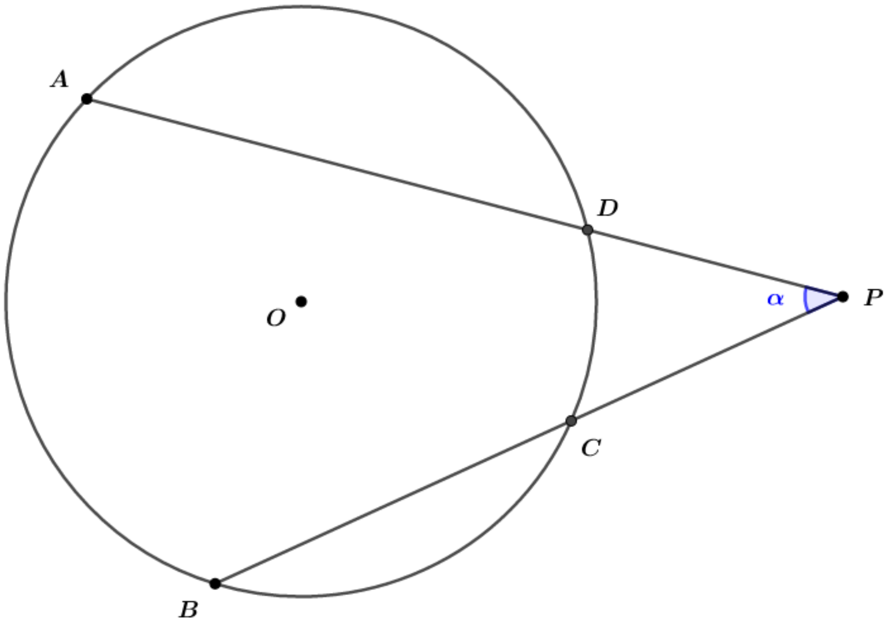


Como $EC//BD$, temos $E\hat{C}A \equiv B\hat{P}A$ e a medida dos arcos $\widehat{BE}$ e $\widehat{CD}$ são iguais. Assim, podemos ver que:

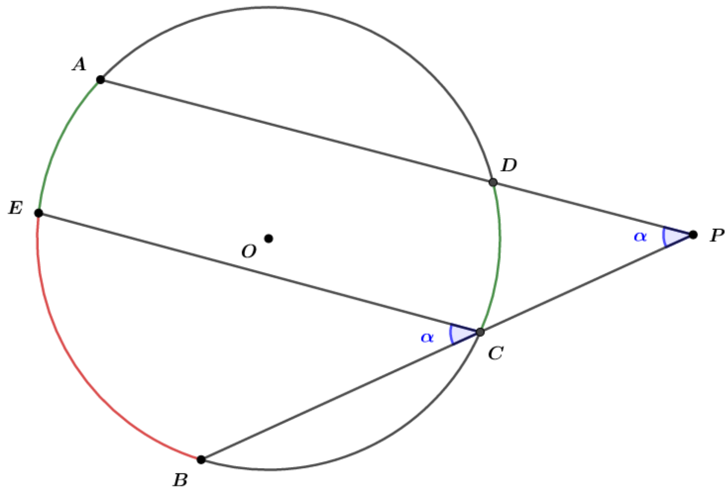
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}}$$

Para o caso de P externo à circunferência:



Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo ao segmento $\overline{AE}$:



Como $CE//AD$, temos $E\hat{C}B \equiv A\hat{P}B$ e $\widehat{AE} \equiv \widehat{CD}$. Desse modo:

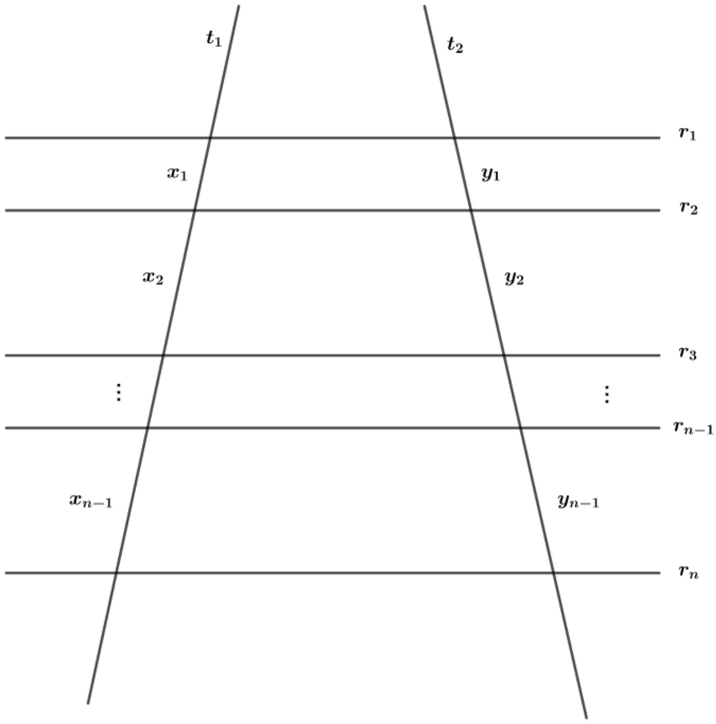
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}}$$

2. Teorema de Tales

O Teorema de Tales afirma que dado um feixe de retas paralelas, os segmentos de retas transversais a estas retas são proporcionais entre si.

Sejam as retas $r_1//r_2//r_3//\dots//r_n$ e $k \in \mathbb{R}_+^*$, então:



$$\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = k}$$

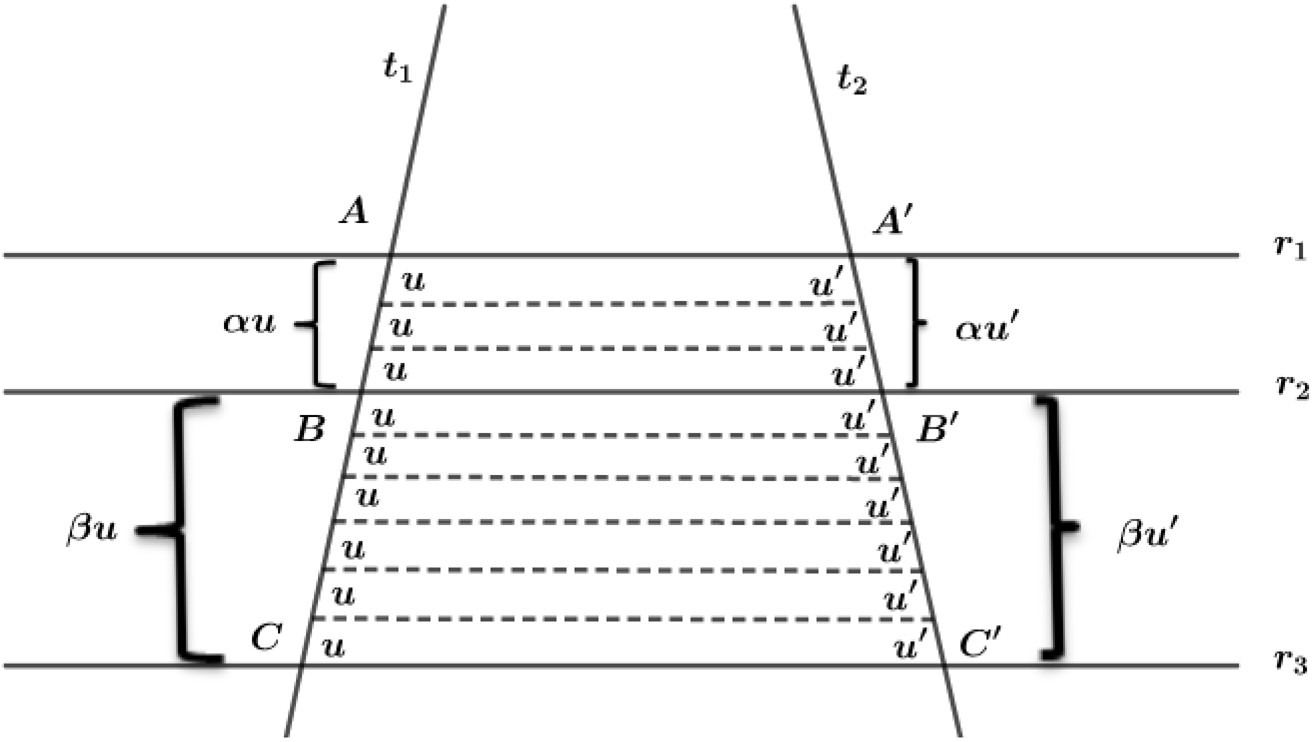
t_1 e t_2 são as retas transversais ao feixe de retas paralelas.

Demonstração:

Devemos dividir em dois casos:

Caso 1) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, podemos escrever a medida desses segmentos como múltiplos de um segmento de unidade u. Então, para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ e $u \in \mathbb{R}_+^*$:



$$\begin{cases} \overline{AB} = \alpha \cdot u \\ \overline{BC} = \beta \cdot u \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\begin{cases} \overline{A'B'} = \alpha \cdot u' \\ \overline{B'C'} = \beta \cdot u' \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

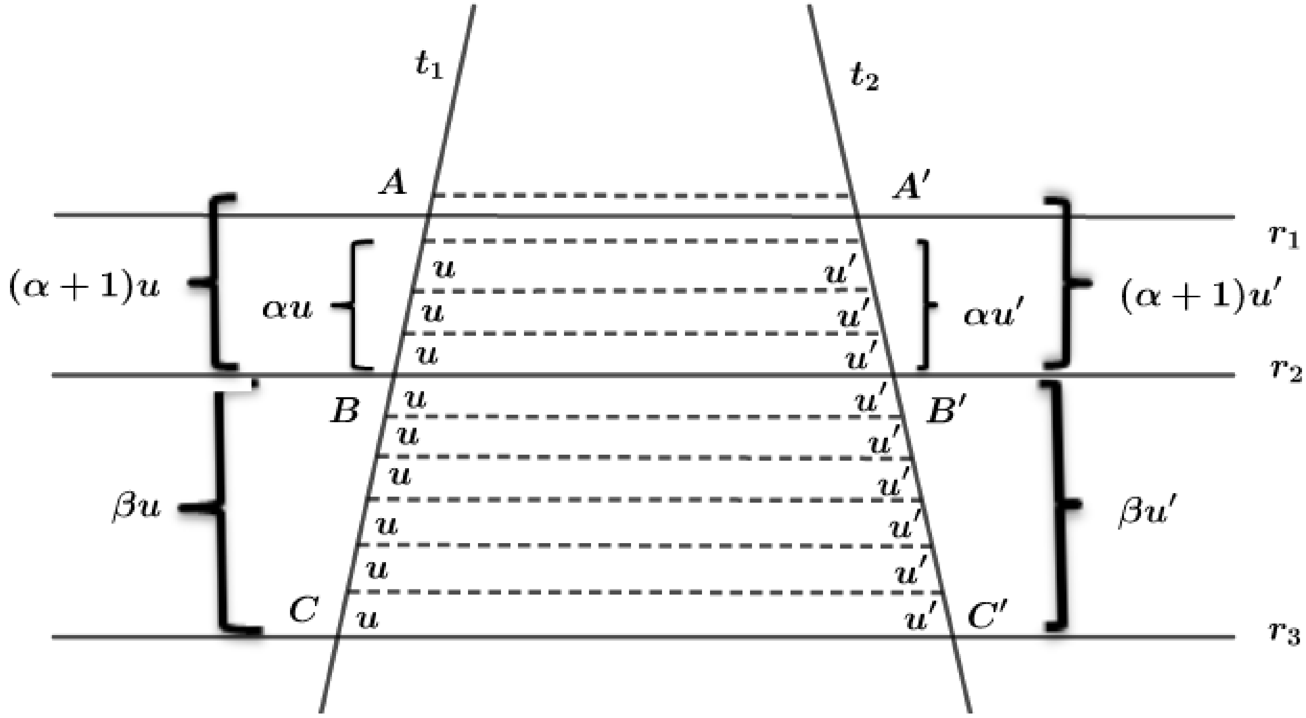
Caso 2) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, não podemos escrever ambos como múltiplos de um segmento de unidade. Então, tomando um segmento de medida u que caiba β vezes em $\overline{BC}$, temos:

$$\overline{BC} = \beta \cdot u$$

Como $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, temos que existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$\alpha \cdot u < \overline{AB} < (\alpha + 1) \cdot u$$



Dividindo a desigualdade de AB por BC, temos:

$$\frac{\alpha \cdot u}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{(\alpha+1)\cdot u}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\alpha \cdot u}{\beta \cdot u} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{(\alpha+1)\cdot u}{\beta \cdot u}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\alpha+1}{\beta} \quad (I)$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \in \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Analogamente para $A'B'$ e $B'C'$:

$$B'C' = \beta \cdot u'$$

$$\alpha \cdot u' < A'B' < (\alpha+1)\cdot u'$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} < \frac{\alpha+1}{\beta} \quad (II)$$

$$\therefore \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \in \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Podemos escolher as unidades de medidas u e u' muito próximas de zero e, assim, os múltiplos β e β' tenderiam ao infinito:

$$u, u' \to 0 \Rightarrow \beta, \beta' \to \infty$$

Assim, as razões α/β e $(\alpha+1)/\beta$ convergem para um mesmo valor. Na desigualdade (I), temos:

$$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Na desigualdade (II):

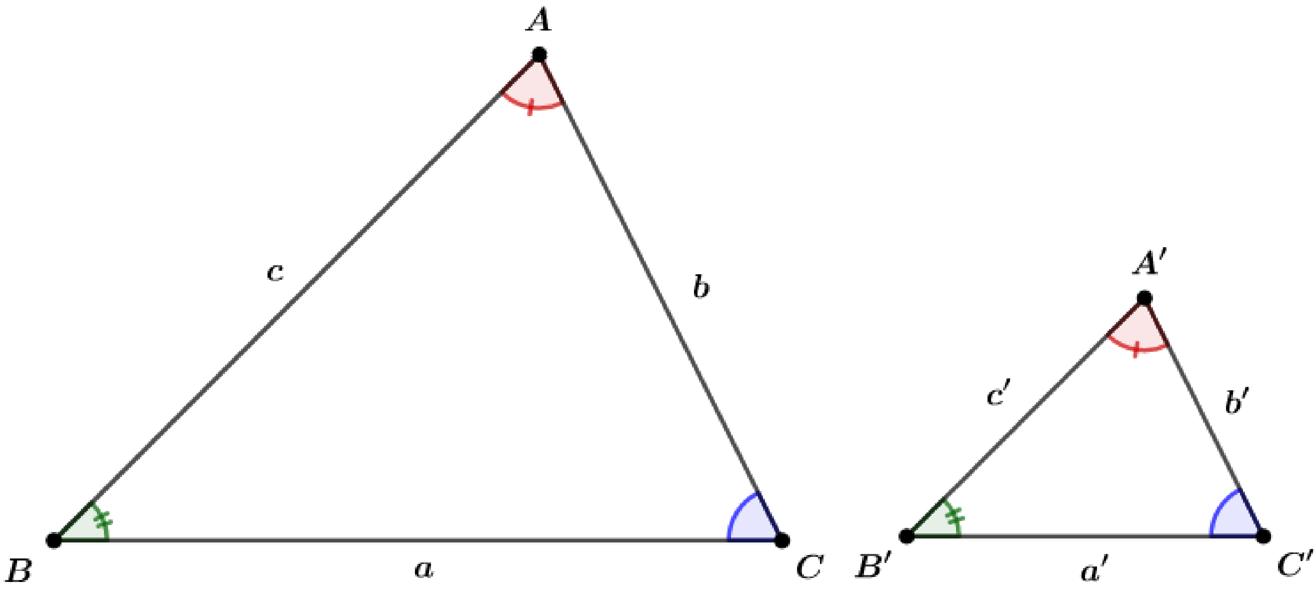
$$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+1}{\beta} \to \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Portanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

3. Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos internos são congruentes e os lados opostos a esses ângulos congruentes são proporcionais entre si. Usamos o símbolo $\sim$ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

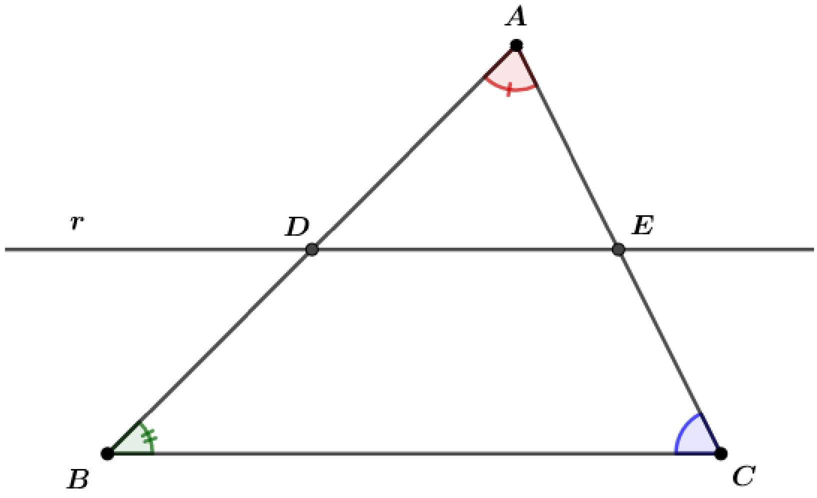


$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C' \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}}$$

Definimos k como a razão de semelhança dos triângulos semelhantes.

3.1. Teorema Fundamental

Dado o seguinte triângulo ABC e a reta r que passa por ele nos pontos D e E, temos:



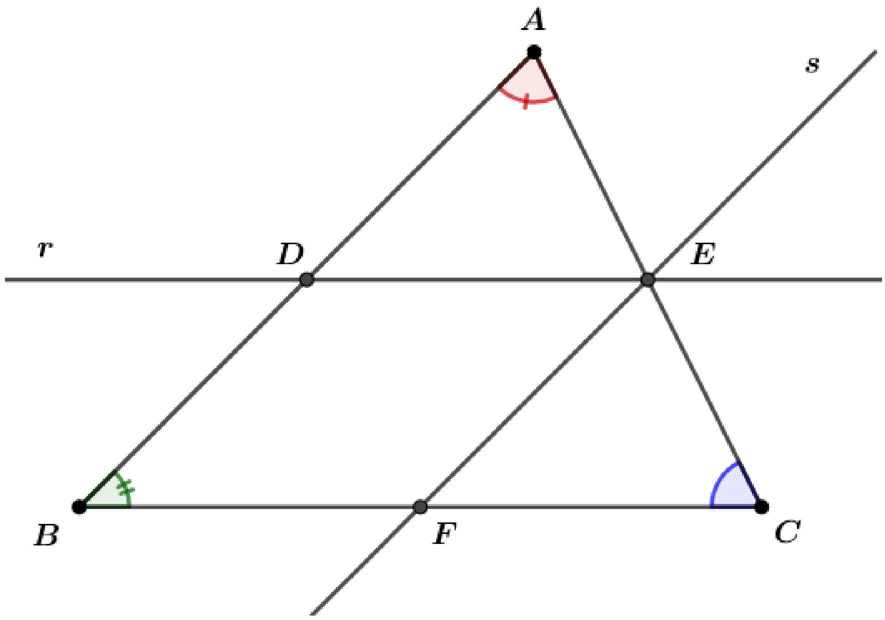
$$\boxed{r//BC \Leftrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC}$$

Se a reta r for paralela a um dos lados de um triângulo ABC, o ΔADE que ele determina é semelhante ao ΔABC.

Demonstração:

Como r é paralelo ao lado BC, temos $\hat{B} \equiv \widehat{D}, \hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ é um ângulo comum aos ΔABC e ΔADE.

Vamos construir a reta paralela s ao lado AB:



Aplicando o Teorema de Tales nas retas paralelas r e AB:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Aplicando o Teorema de Tales nas retas paralelas s e AB:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

Como $BDEF$ é um paralelogramo, temos $BF = DE$, desse modo:

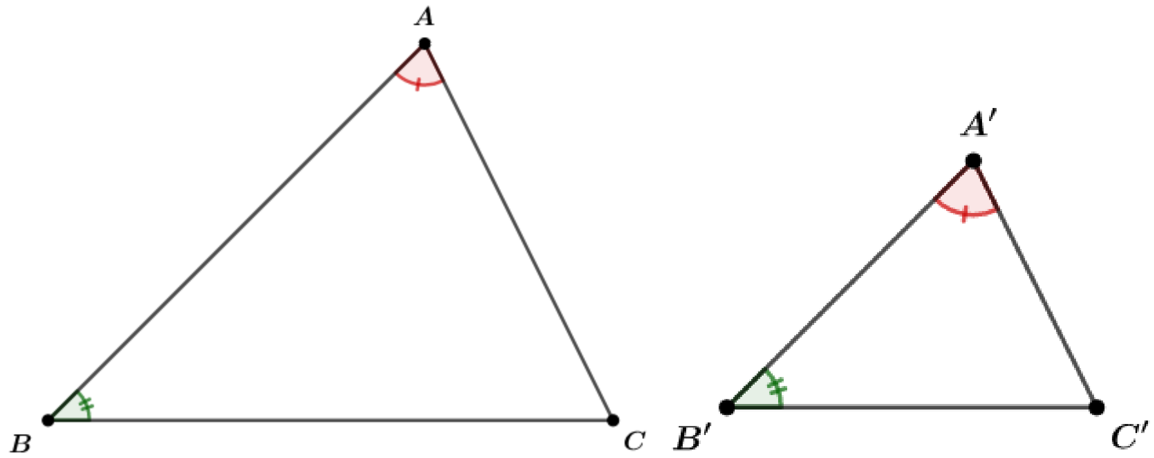
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Portanto, os lados correspondentes dos triângulos são proporcionais e os ângulos internos são ordenadamente congruentes. Logo, são semelhantes.

3.2. Critérios de Semelhança

3.2.1. AA (dois ângulos congruentes)

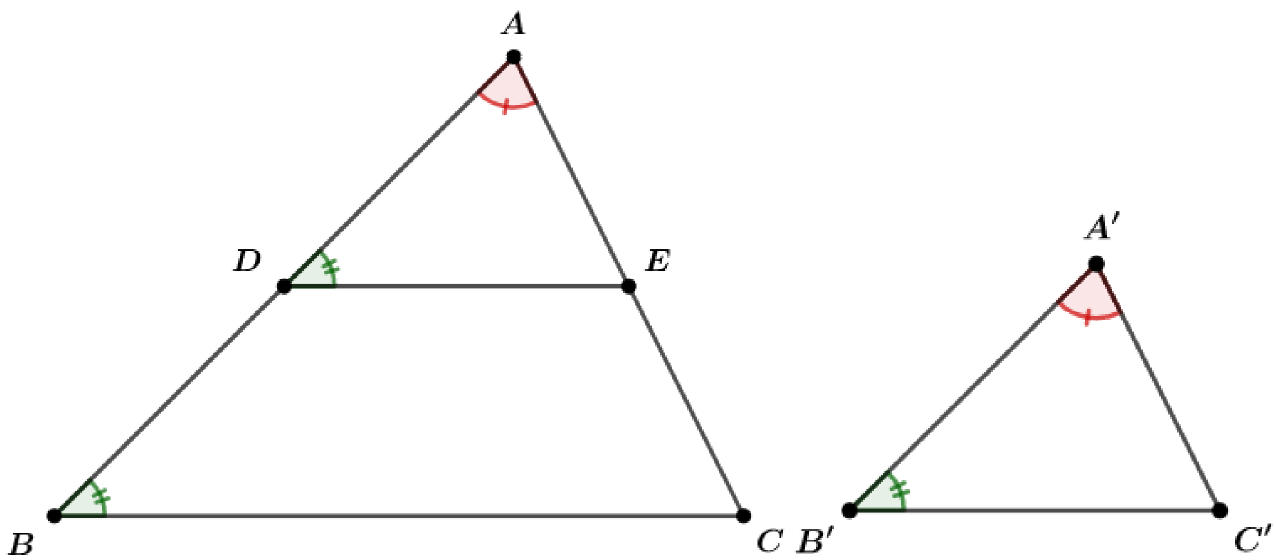
Se dois triângulos tiverem dois ângulos congruentes, eles serão semelhantes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ B \equiv B' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo que $AB > A'B'$, podemos construir um triângulo ADE no triângulo ABC tal que $\widehat{D} \equiv \widehat{B}'$ e $AD \equiv A'B'$:



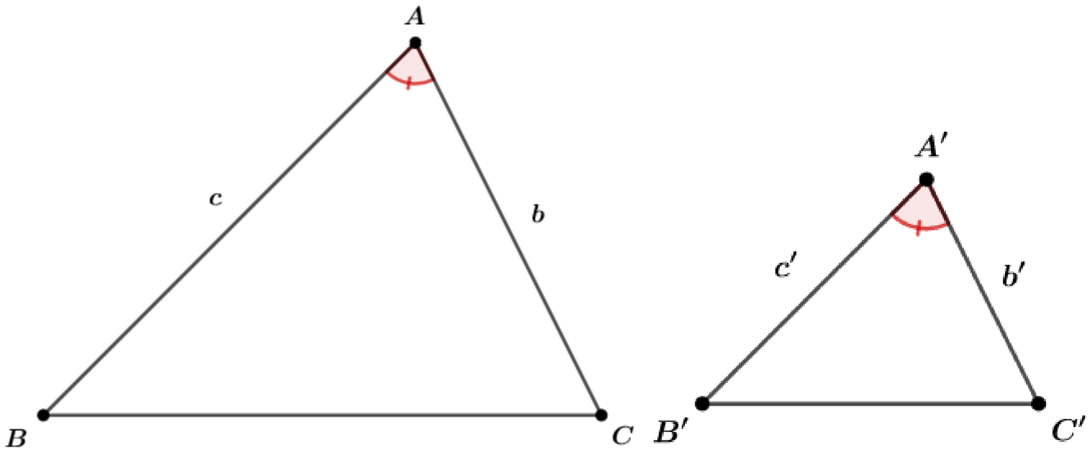
Pelo critério de congruência ALA, podemos afirmar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$.

Como $B \equiv B' \equiv D$, temos que $\overline{DE} // \overline{BC}$, portanto, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Como $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$, temos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Logo, são semelhantes.

3.2.2. LAL (lado-ângulo-lado)

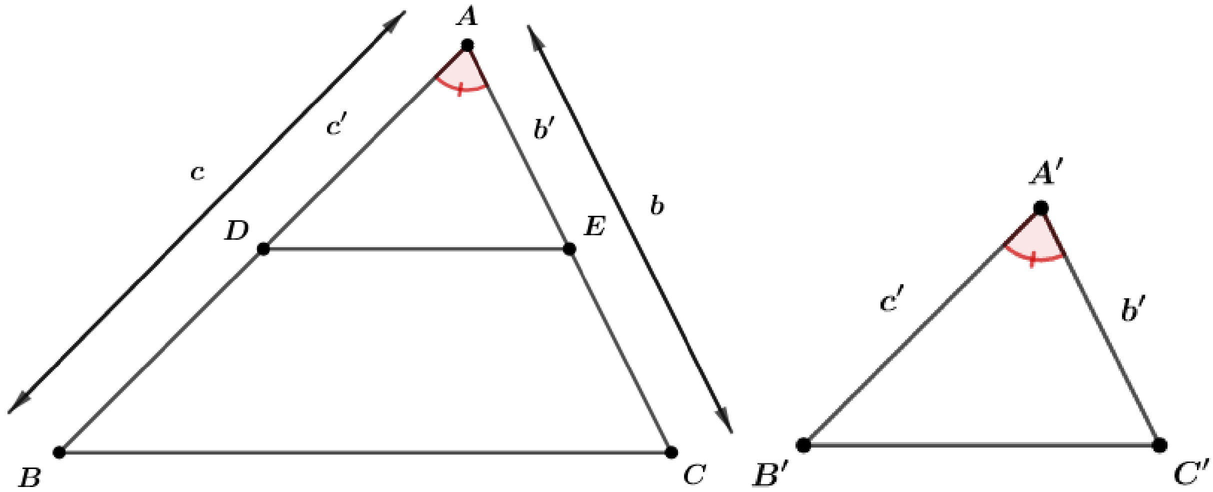
Se dois triângulos tiverem dois lados proporcionais e o ângulo compreendido entre eles for congruente, então esses triângulos são semelhantes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo $AB > A'B'$, vamos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$ no triângulo ABC tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$:



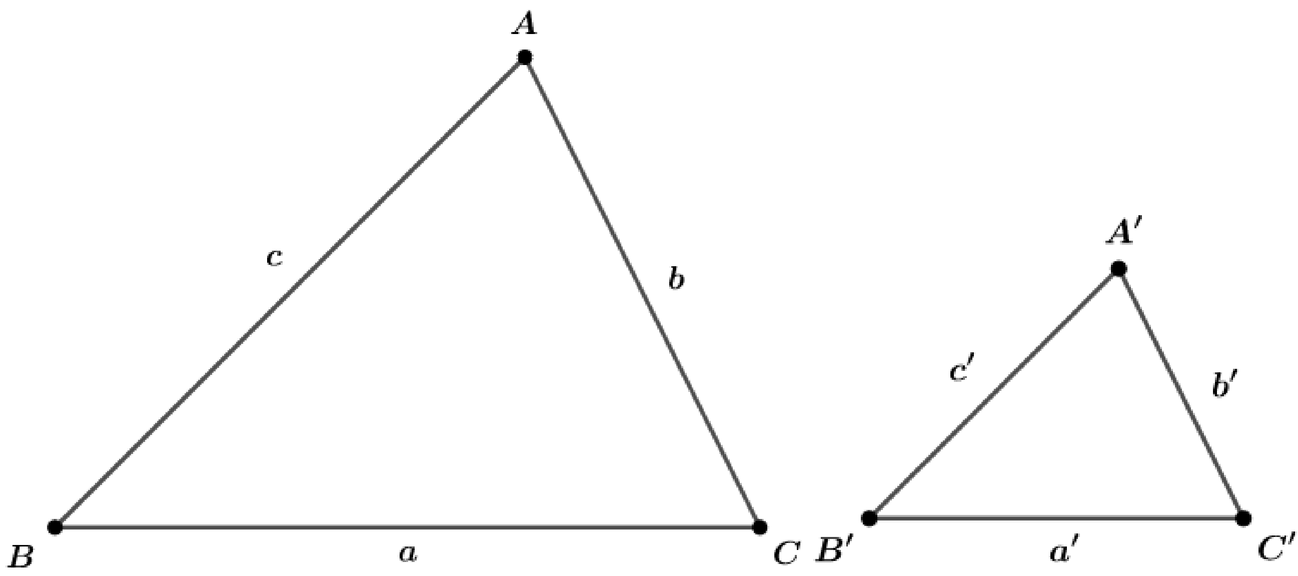
Pelo Teorema de Tales, como $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$, temos que $\overline{DE} // \overline{BC}$. Então, $\hat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C}$.

Usando o critério de congruência LAL, temos $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$. Logo, $\hat{D} \equiv \widehat{B'}$ e $\hat{E} \equiv \widehat{C'}$.

Portanto, pelo critério de semelhança AA, podemos ver que $\hat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$ implica $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

3.2.3. LLL (lado-lado-lado)

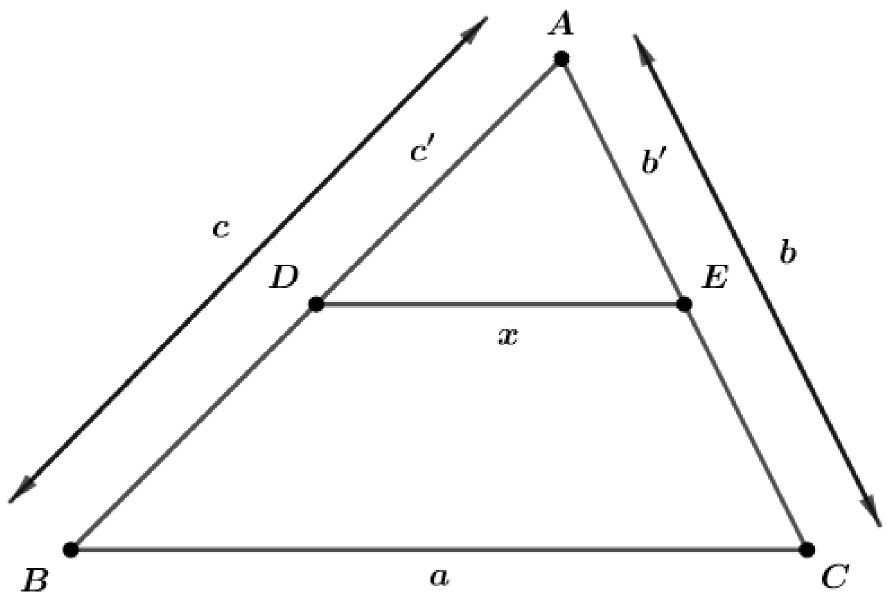
Se dois triângulos tiverem os lados correspondentes proporcionais entre si, então eles são semelhantes.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Demonstração:

Supondo que $AB > A'B'$, podemos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$, tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$:



Usando o Teorema de Tales:

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow DE//BC$$

Então:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Da hipótese, temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Portanto:

$$a' = x$$

$$\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$$

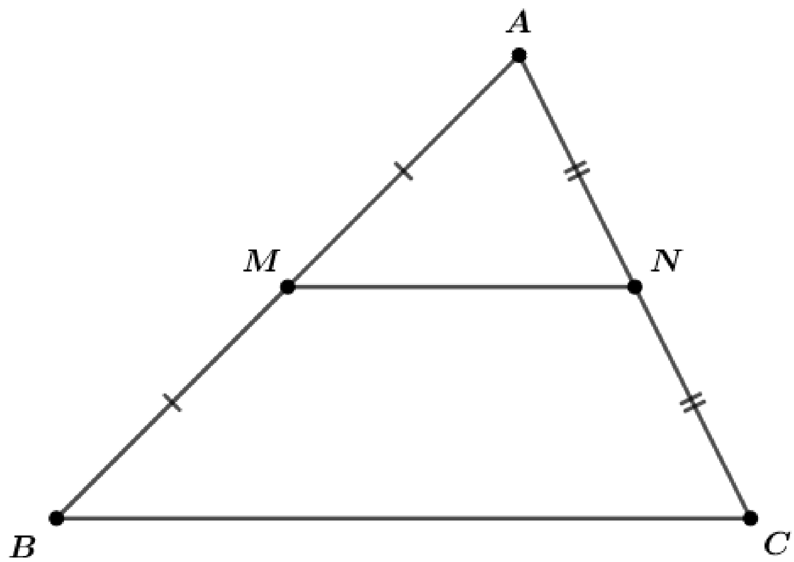
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3.3. Propriedades

As seguintes propriedades decorrem da semelhança de triângulos.

3.3.1. Base Média

Seja ABC, um triângulo qualquer. Se M é o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio do lado AC, temos:



Pelo Teorema de Tales, sendo $AM = MB$ e $AN = NC$:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN//BC$$

Desse modo:

$$M \equiv B \text{ e } N \equiv C$$

Pelo critério de semelhança AA, temos:

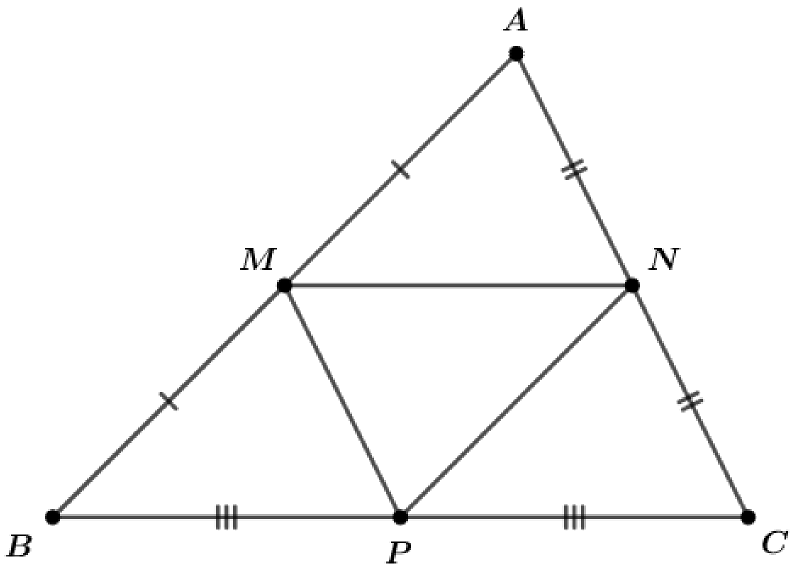
$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

A razão de proporção entre eles é $1/2$:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

Se BC é a base do triângulo ABC, então MN é chamado de base média do triângulo ABC.

Tomando-se P, o ponto médio do lado BC e formando o triângulo MNP, encontramos:



Vimos que MN é paralelo ao lado BC, analogamente, para os outros lados, podemos provar que $NP//AB$ e $MP//AC$. Então, o triângulo MNP é semelhante ao triângulo ABC e possui razão igual a $1/2$.

3.3.2. Razão de Proporção

Se a razão de proporção de dois triângulos é k, então a razão entre seus elementos lineares correspondentes é k. Assim, a razão entre:

-suas alturas é k;

-suas medianas é k;

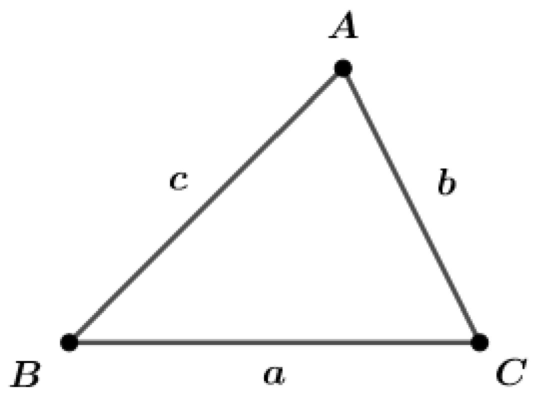
-seus perímetros é k;

-os raios das circunferências inscritas é k;

-os raios das circunferências circunscritas é k;

-dois elementos lineares e homólogos é k.

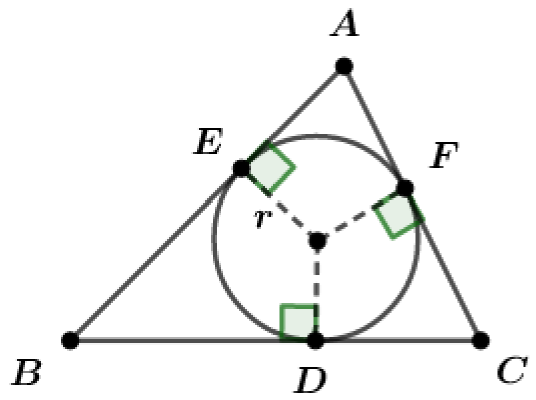
Chamamos de perímetro a soma de todos os lados de um triângulo, então para um triângulo ABC:



$$2p = a + b + c$$

p é o semiperímetro do triângulo ABC e $2p$ é o seu perímetro.

Uma circunferência inscrita em um triângulo é uma circunferência que tangencia internamente os lados do triângulo:

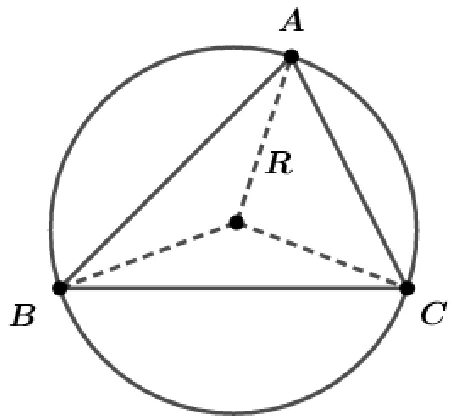


D, E, F são os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo ABC.

r é o raio da circunferência inscrita.

Perceba que os segmentos de reta que ligam o centro da circunferência aos pontos de tangência sempre formam um ângulo reto.

Uma circunferência circunscrita a um triângulo é uma circunferência que passa por todos os vértices do triângulo:



R é o raio da circunferência circunscrita.

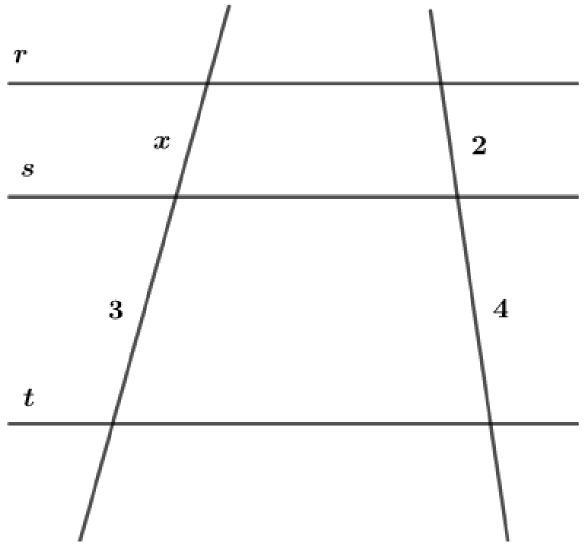
Dizemos que dois elementos são homólogos quando ambos são correspondentes um ao outro. Por exemplo, tomando-se dois triângulos semelhantes, podemos afirmar que os lados opostos aos ângulos congruentes são homólogos.

HORA DE PRATICAR!

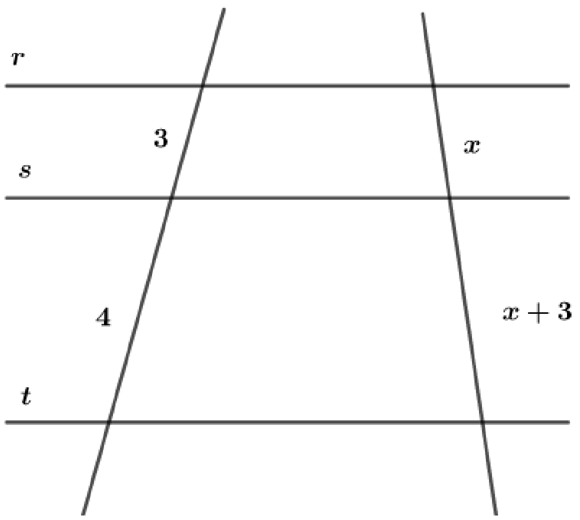
Exercícios de Fixação

1. Sendo r, s, t retas paralelas. Calcule o valor de x:

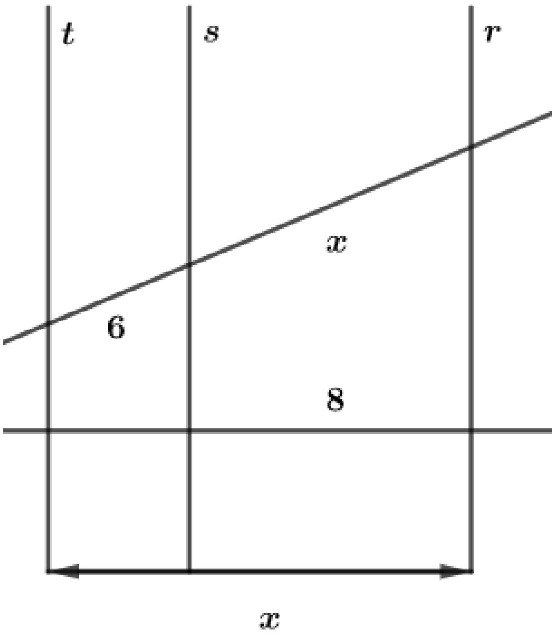
a)



b)

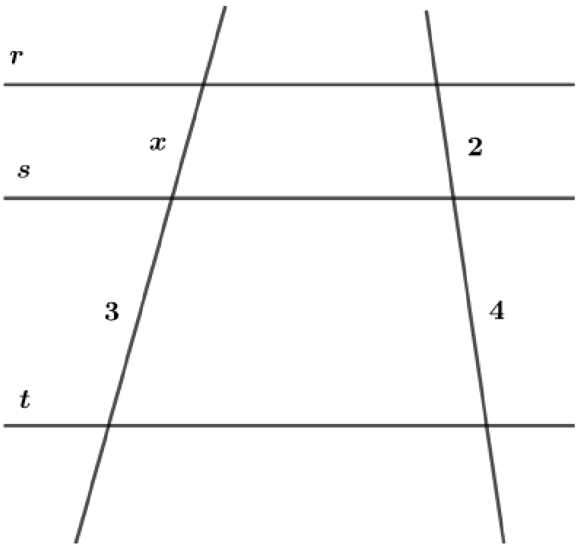


c)



Resolução:

a)

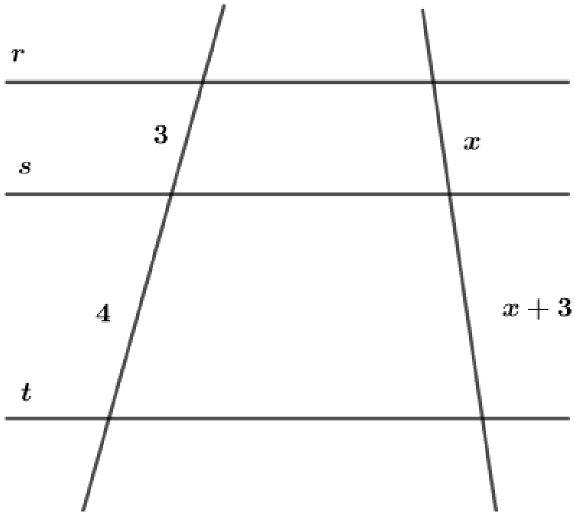


Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

b)

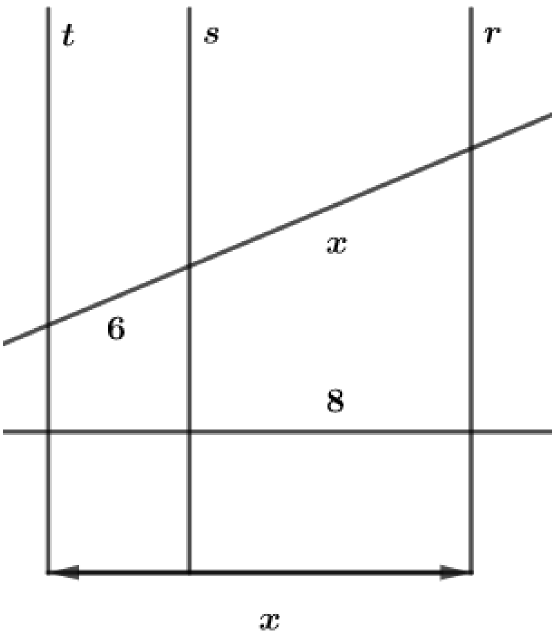


$$\frac{3}{4} = \frac{x}{x+3}$$

$$3x + 9 = 4x$$

$$x = 9$$

c)



$$\frac{x}{x+6} = \frac{8}{x}$$

$$x^2 = 8x + 48$$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$x = \left(4 \pm \sqrt{64}\right)$$

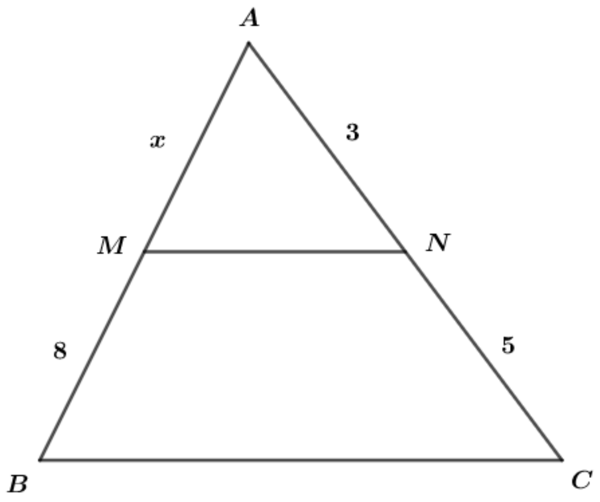
$$x = 4 \pm 8$$

$$x = 12 \; ou - 4$$

$$\therefore x = 12$$

Gabarito: a) $x = 3/2$ b) $x = 9$ c) $x = 12$

2. Sendo $MN//BC$, calcule o valor de x na figura abaixo:



Resolução:

Aplicando o teorema de Tales:

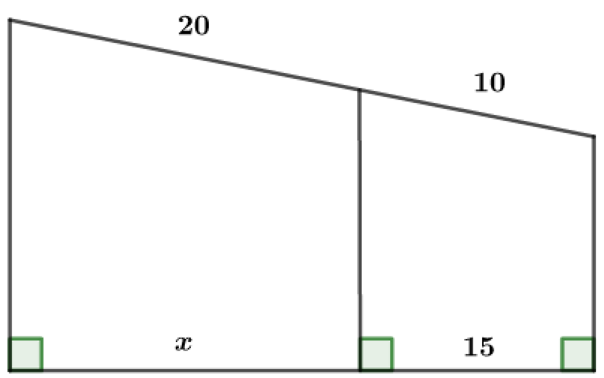
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{24}{5}$$

Gabarito: $x = 24/5$

3. Calcule o valor de x:



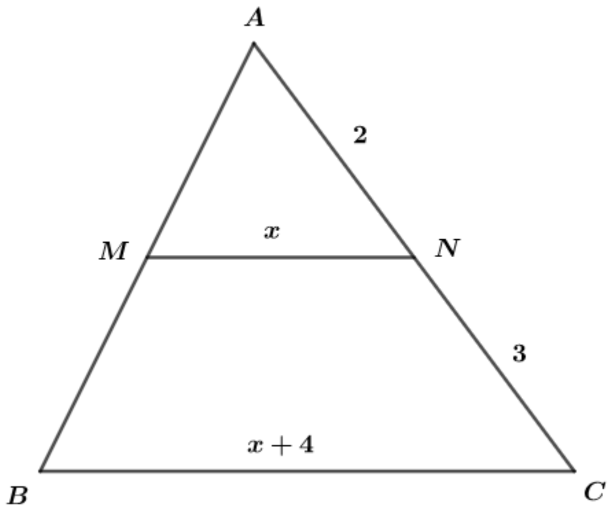
Resolução:

$$\frac{20}{10} = \frac{x}{15}$$

$$x = 30$$

Gabarito: $x = 30$

4. Sendo $MN//BC$, calcule o valor de x na figura abaixo:



Resolução:

Como $MN//BC$, temos que $\Delta AMN \sim \Delta ABC$:

$$\frac{AN}{MN} = \frac{AC}{BC}$$

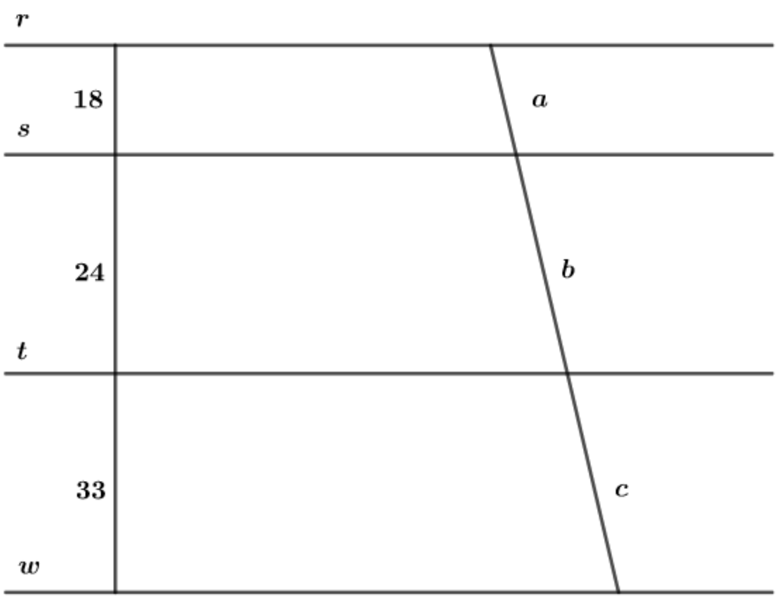
$$\frac{2}{x} = \frac{2+3}{x+4}$$

$$2x + 8 = 5x$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = 8/3}$

5. **(CGTMG/2015)** Na figura a seguir, as retas r, s, t e w são paralelas e, a, b e c representam medidas dos segmentos tais que $a + b + c = 100$.



Conforme esses dados, os valores de a, b e c são, respectivamente, iguais a

a) 24, 32 e 44.

b) 24, 36 e 40.

c) 26, 30 e 44.

d) 26, 34 e 40.

Resolução:

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{18+24+33}{a+b+c}$$

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{75}{100}$$

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{3}{4}$$

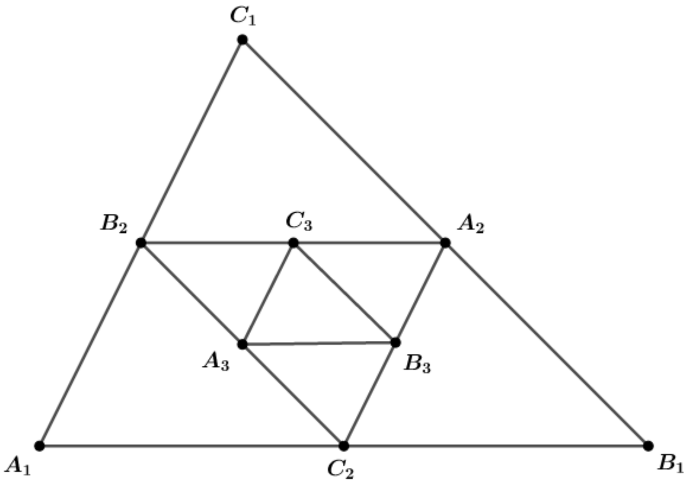
$$\Rightarrow a = 24$$

$$\Rightarrow b = 32$$

$$\Rightarrow c = 44$$

Gabarito: “a”.

6. (UERJ/2019) Os triângulos $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$, ilustrados abaixo, possuem perímetros p_1, p_2, p_3, respectivamente. Os vértices desses triângulos, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo anterior.



Admita que $A_1B_1 = B_1C_1 = 7$ e $A_1C_1 = 4$.

Assim, (p_1, p_2, p_3) define a seguinte progressão:

a) aritmética de razão -8.

b) aritmética de razão -6.

c) geométrica de razão $1/2$.

d) geométrica de razão $1/4$.

Resolução:

Como os vértices dos triângulos internos são os pontos médios de outros triângulos, temos que cada triângulo terá razão igual a $1/2$ do triângulo externo. Desse modo, temos:

$$p_1 = 7 + 7 + 4 = 18$$

$$p_2 = \frac{p_1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$p_3 = \frac{p_2}{2} = \frac{9}{2}$$

Portanto, a sequência (p_1, p_2, p_3) é uma PG de razão $1/2$.

Gabarito: "c".

7. **(IFCE/2016)** O triângulo ABC tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo DEF, semelhante a ABC, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de DEF medem, respectivamente,

a) 64 cm e 32 cm.

b) 60 cm e 48 cm.

c) 48 cm e 24 cm.

d) 96 cm e 48 cm.

e) 96 cm e 64 cm.

Resolução:

O enunciado nos diz que os triângulos ABC e DEF são semelhantes, logo, os lados e os seus perímetros possuem a mesma razão de proporção. Vamos calcular o perímetro p_{ABC} do ΔABC:

$$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$$

Vamos calcular a razão de proporção entre os triângulos:

$$\frac{p_{ABC}}{p_{DEF}} = \frac{34}{204} = \frac{1}{6}$$

Logo, a razão de proporção entre os triângulos é $1/6$. Os lados do triângulo DEF são dados por:

$$8\ cm \Rightarrow 48\ cm$$

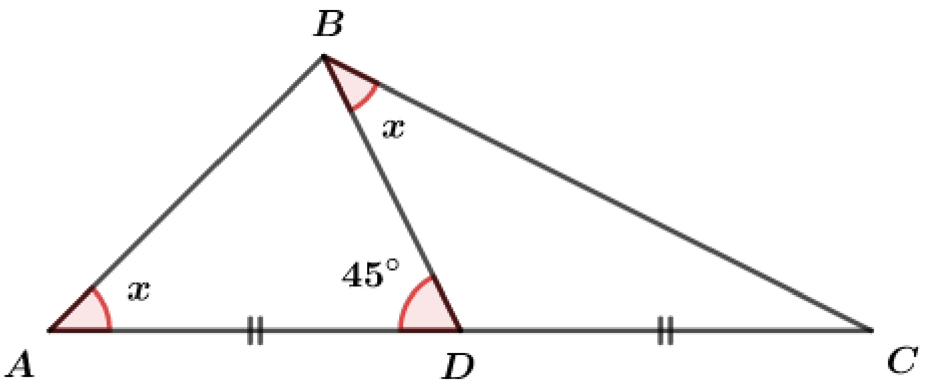
$$10\ cm \Rightarrow 60\ cm$$

$$16\ cm \Rightarrow 96\ cm$$

Portanto, o maior lado é 96 cm e o menor é 48 cm.

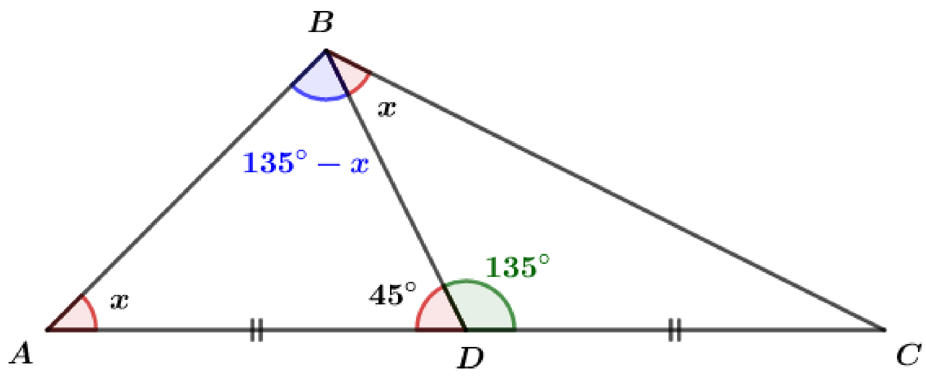
Gabarito: "d".

8. No triângulo ABC, BD é mediana relativa ao lado AC e os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são iguais. Se o ângulo $B\widehat{D}A = 45°$, calcule x.



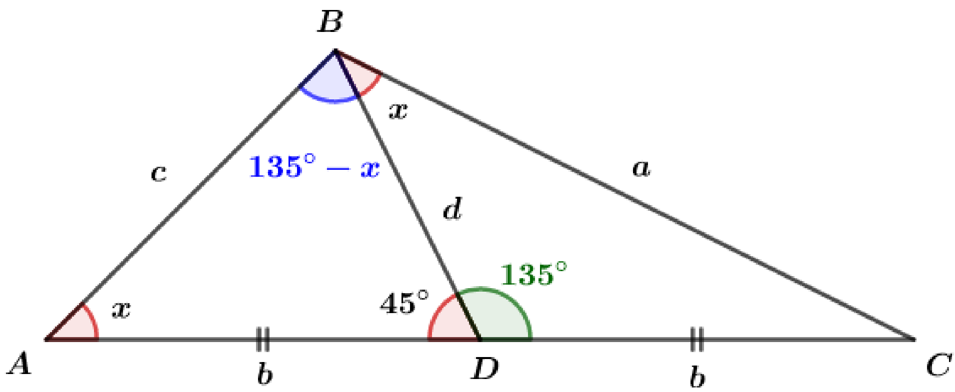
Resolução:

Perceba que os triângulos ABC e BDC são semelhantes, veja:



Pelo critério de semelhança AA:

$$B\hat{A}C \equiv D\hat{B}C \text{ e } A\hat{B}C \equiv B\hat{D}C \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDC$$



Fazendo a razão de semelhança:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{2b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sqrt{2}b$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC:

$$\frac{a}{senx} = \frac{2b}{sen(135°)}$$

$$\frac{\sqrt{2}b}{senx} = \frac{2b}{sen(135°)}$$

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 30°$$

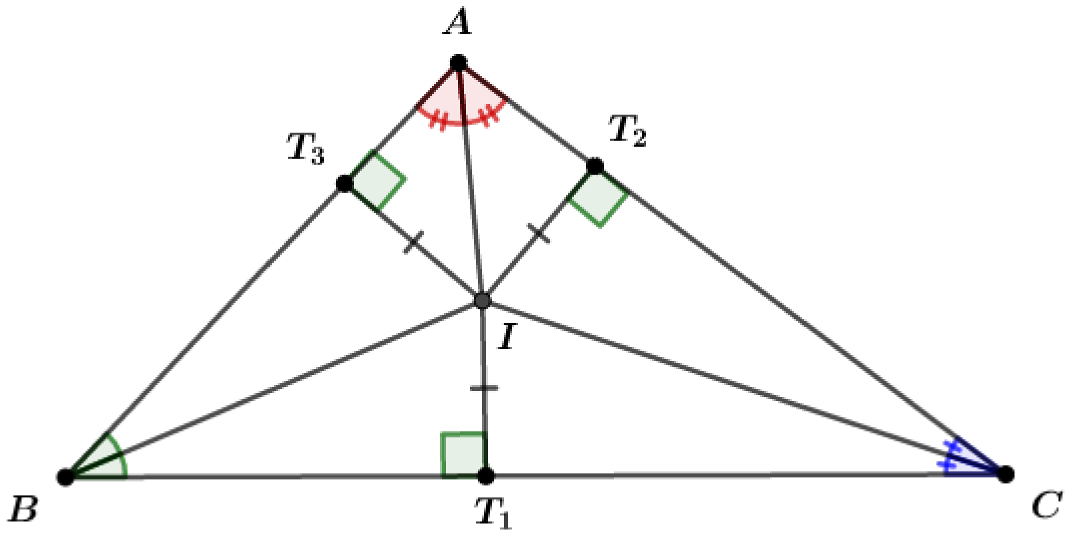
Gabarito: $x = 30°$

4. Pontos Notáveis no Triângulo

4.1. Incentro e Ex-incentro

4.1.1. Incentro

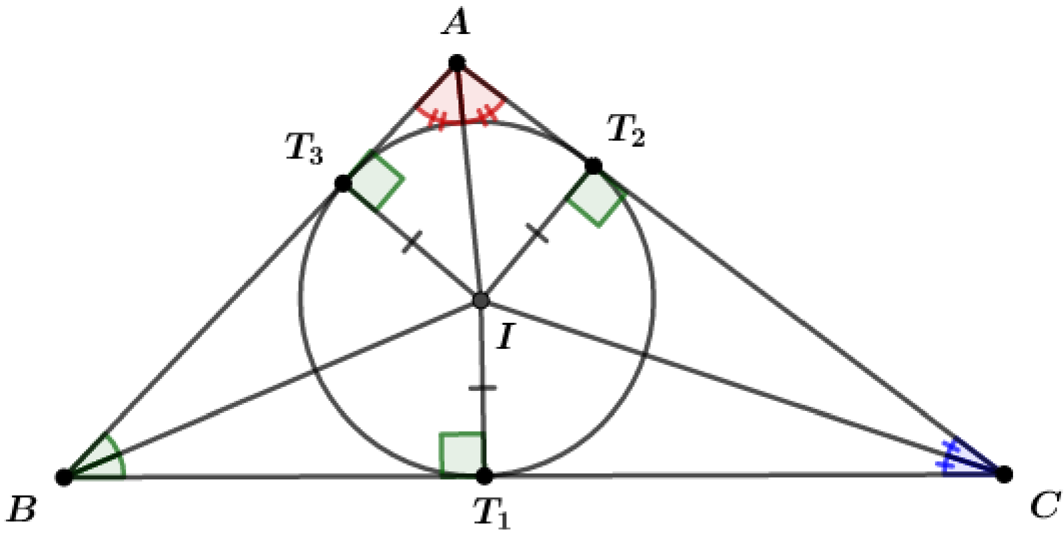
As bissetrizes internas de um triângulo encontram-se em um único ponto. A este ponto denominamos incentro do triângulo.



I é o incentro e este equidista dos lados do triângulo:

$$IT_1 = IT_2 = IT_3$$

Por esse ponto, podemos desenhar uma circunferência a qual chamamos de circunferência inscrita.

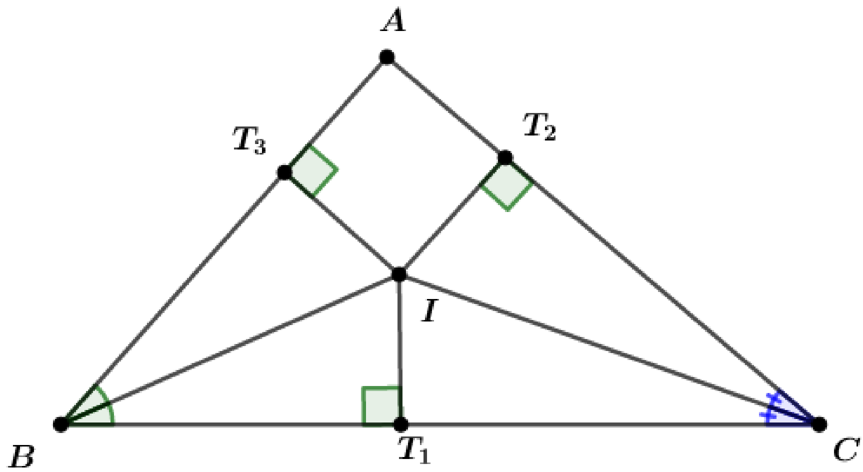


Uma outra propriedade que temos da circunferência inscrita no triângulo é que aplicando-se o critério de congruência LAA_o, temos que:

$$\Delta AIT_3 \equiv \Delta AIT_2 \Rightarrow AT_3 = AT_2$$
$$\Delta BIT_3 \equiv \Delta BIT_1 \Rightarrow BT_3 = BT_1$$
$$\Delta CIT_1 \equiv \Delta CIT_2 \Rightarrow CT_1 = CT_2$$

Demonstração:

Seja I o ponto onde $\overline{BI}$ e $\overline{CI}$ se interceptam no triângulo ABC.



Traçando-se o segmento que liga o ponto I aos lados do triângulo, temos pelo critério de congruência LAA_0 que $\Delta T_1BI \equiv \Delta T_3BI$ $(BI \equiv BI, IBT_1 \equiv IBT_3, IT_1B \equiv IT_3B)$ e $\Delta T_1CI \equiv T_2CI$ $(CI \equiv CI, ICT_1 \equiv ICT_2, IT_1C \equiv IT_2C)$. Assim:

$$\Delta T_1BI \equiv \Delta T_3BI \Rightarrow IT_1 = IT_3$$
$$\Delta T_1CI \equiv T_2CI \Rightarrow IT_1 = IT_2$$

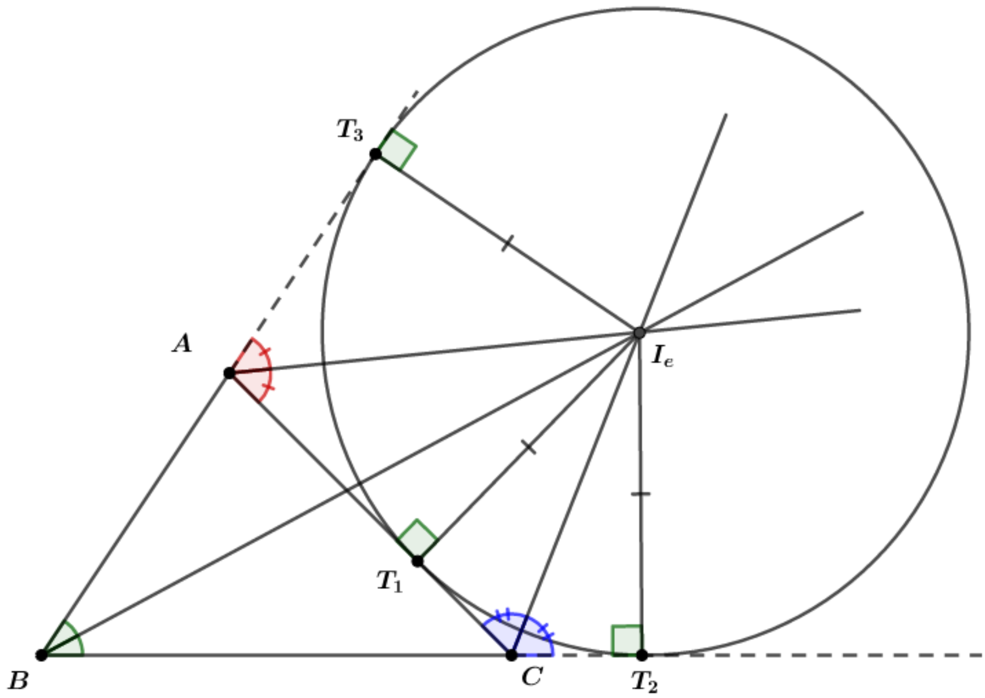
Logo:

$$IT_2 = IT_3$$

Desse modo, podemos afirmar que a bissetriz do vértice A também intercepta o ponto I do triângulo ABC.

4.1.2. Ex-incentro

Chamamos de ex-incentro ao ponto que é interceptado por uma bissetriz interna e duas bissetrizes externas. Esse ponto também equidista dos lados do triângulo e dos prolongamentos dos lados adjacentes:

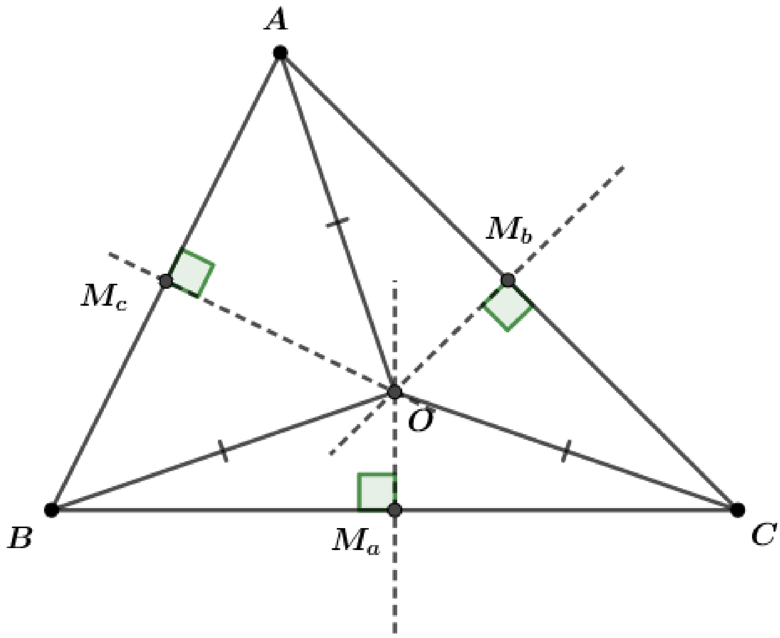


I_e é o ex-incentro do triângulo ABC em relação ao lado AC.

A demonstração da unicidade desse ponto é análoga ao caso do incentro.

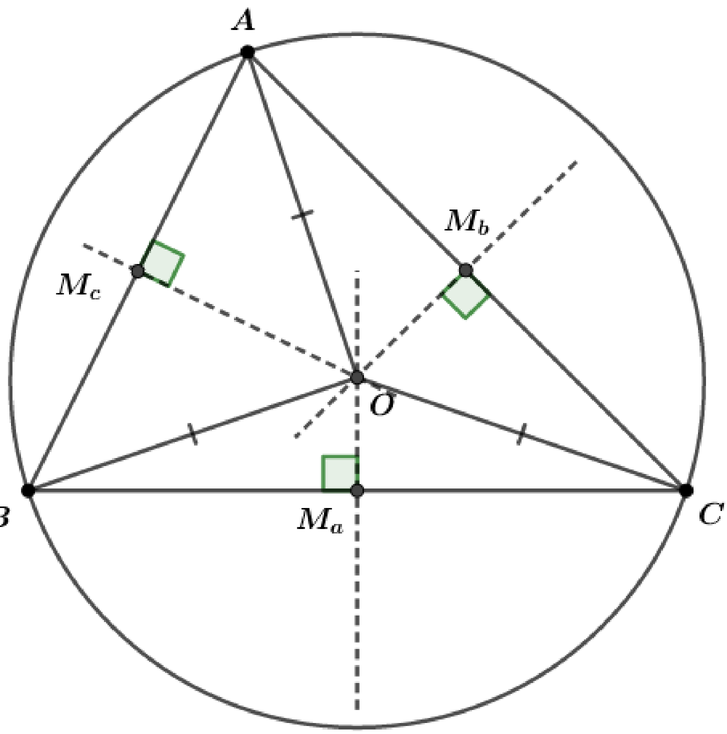
4.2. Circuncentro

As mediatrizes de cada um dos lados de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de circuncentro. Este ponto equidista dos vértices do triângulo.



O é o circuncentro do triângulo ABC.

Como o circuncentro equidista dos vértices do triângulo, este ponto é o centro de uma circunferência que passa pelos vértices desse triângulo.



Demonstração:

Como a mediatriz é o segmento perpendicular ao ponto médio de outro segmento, temos pelo critério de congruência LAL:

$$BM_a \equiv CM_a, BM_aO \equiv CM_aO, M_aO \equiv M_aO \Rightarrow \Delta BM_aO \equiv \Delta CM_aO \Rightarrow OB = OC$$

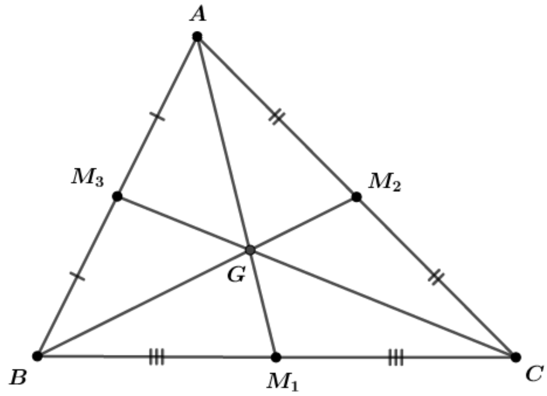
$$BM_c \equiv AM_c, BM_cO \equiv AM_cO, M_cO \equiv M_cO \Rightarrow \Delta BM_cO \equiv \Delta AM_cO \Rightarrow OB = OA$$

$$\Rightarrow OC = OA$$

Portanto, a mediatriz de AC também se encontra no ponto O.

4.3. Baricentro

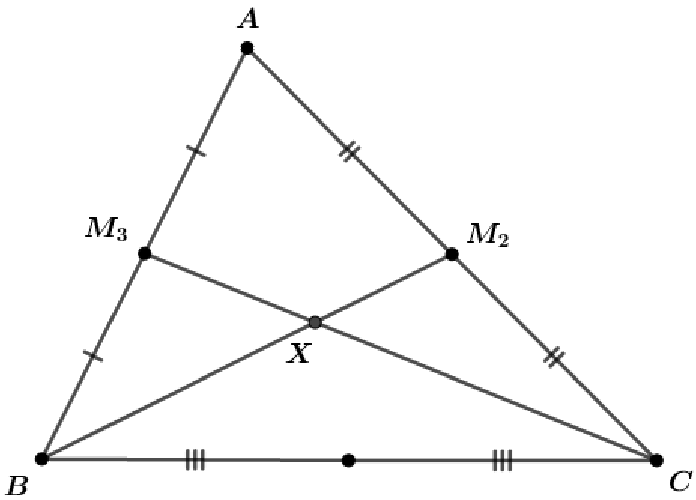
As três medianas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de baricentro.



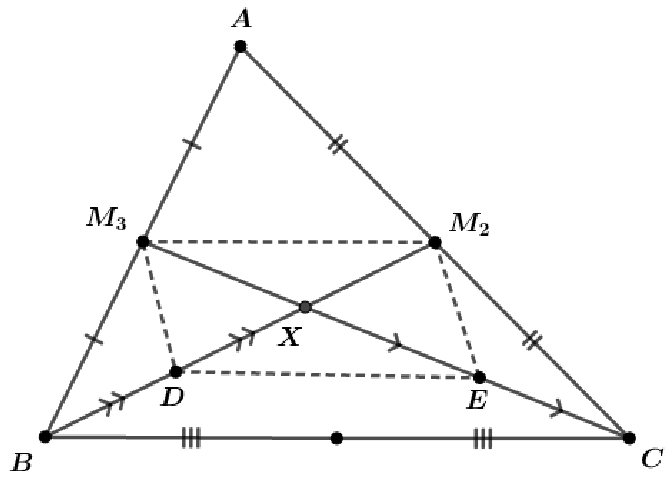
G é o baricentro do triângulo ABC.

Demonstração:

Seja X o ponto onde BM_2 e CM_3 se interceptam:



Tomando-se os pontos médios D e E dos segmentos BX e CX, respectivamente, temos:



Do triângulo ABC:

$$\frac{AM_3}{AB} = \frac{AM_2}{AC} = \frac{1}{2}$$

Pelo teorema de Tales, podemos afirmar que M_2M_3 é paralelo ao segmento BC e possui a mesma razão de proporção:

$$M_2M_3 = \frac{BC}{2}$$

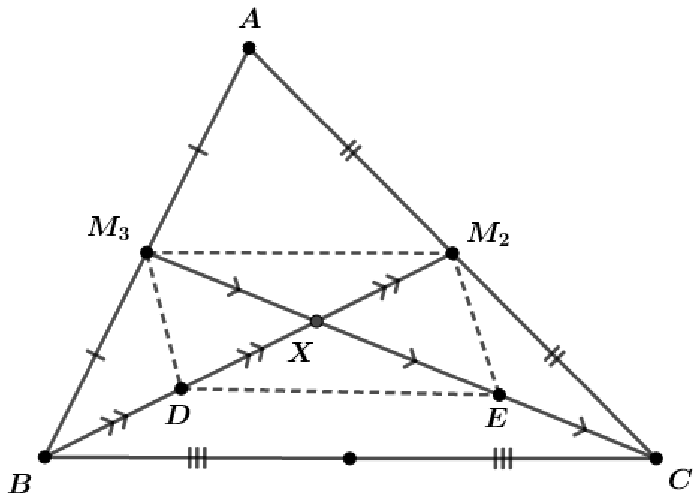
Do triângulo XBC:

$$\frac{XD}{XB} = \frac{XE}{XC} = \frac{1}{2}$$

Assim, pelo teorema de Tales, DE também é paralelo ao lado BC com razão de proporção $1/2$:

$$DE = \frac{BC}{2}$$

Como $M_2M_3 \equiv DE$ e $M_2M_3//DE$, temos que M_2M_3DE é um paralelogramo.

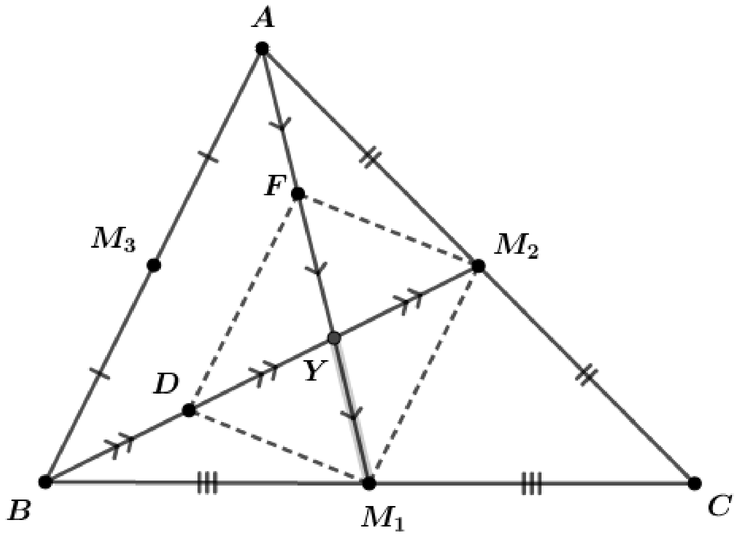


DM_2 e EM_3 são as diagonais do paralelogramo e:

$$XM_3 \equiv XE \Rightarrow CX = 2XM_3$$

$$XD \equiv XM_2 \Rightarrow BX = 2XM_2$$

Tomando-se Y o ponto de encontro das medianas AM_1 e BM_2 e usando a mesma ideia acima, temos:



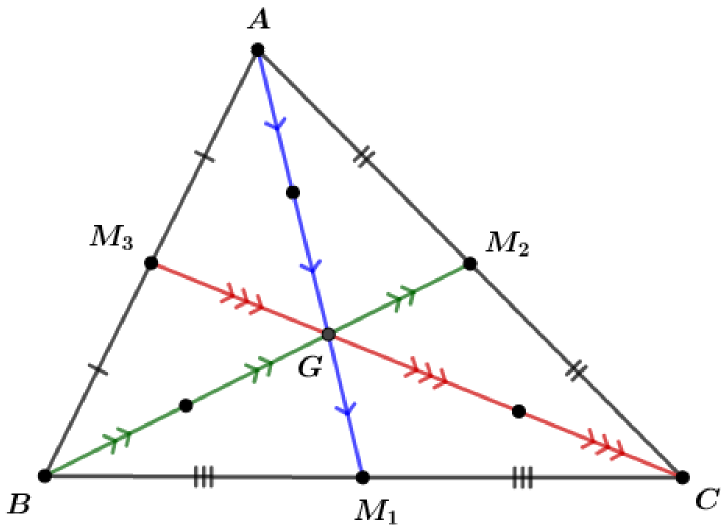
$$M_1M_2FD \text{ é paralelogramo} \Rightarrow DY = YM_2 \text{ e } FY = YM_1$$

$$\Rightarrow AY = 2YM_1$$

$$\Rightarrow BY = 2YM_2$$

Portanto, como $BX = 2XM_2$ e $BY = 2YM_2$, temos $X = Y$. Logo, as medianas do triângulo ABC se encontram no mesmo ponto. A esse ponto denominamos de baricentro.

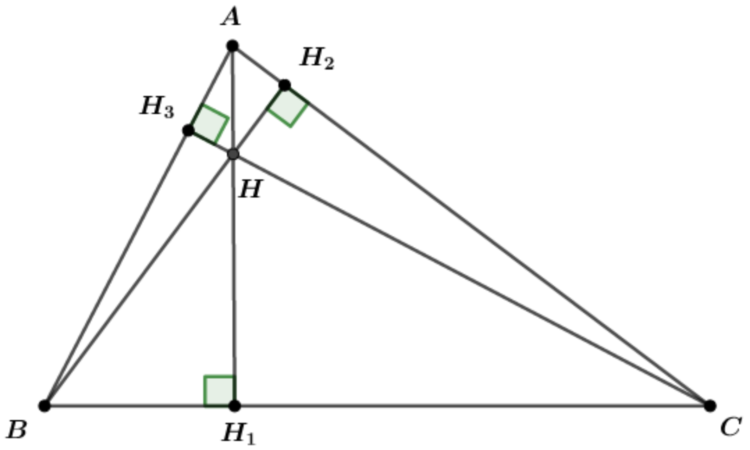
Perceba que uma propriedade do baricentro é que ela divide as medianas na razão de $2/1$:



$$\boldsymbol{AG = 2GM_1}$$
$$\boldsymbol{BG = 2GM_2}$$
$$\boldsymbol{CG = 2GM_3}$$

4.4. Ortocentro

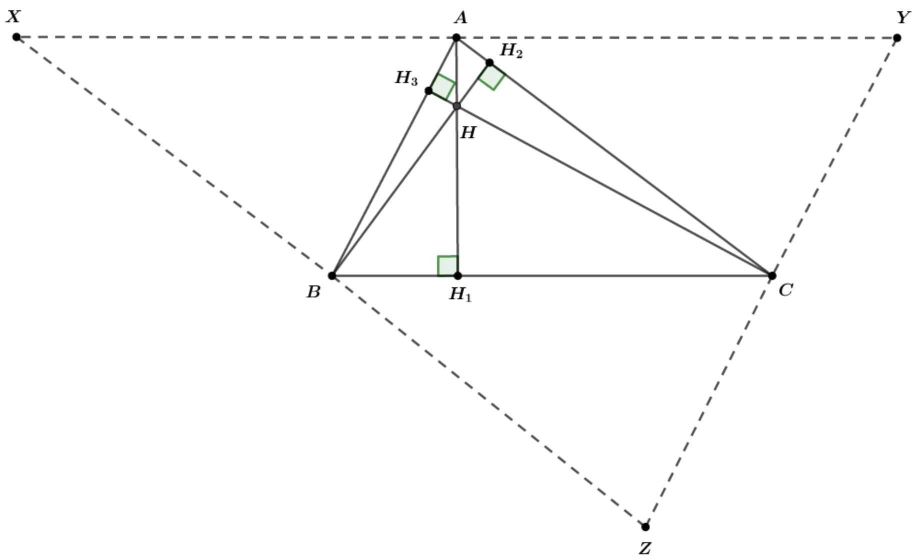
As três alturas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de ortocentro.



H é o ortocentro do triângulo ABC.

Demonstração:

Vamos construir os segmentos de retas paralelos aos lados do triângulo:



$$XY//BC$$

$$YZ//AB$$

$$XZ//AC$$

Como $XY//BC$ e $XZ//AC$, temos que $AXBC$ é um paralelogramo. Assim, podemos afirmar:

$$AX = BC \text{ e } BX = AC$$

$XY//BC$ e $YZ//AB$, então $AYCB$ é paralelogramo:

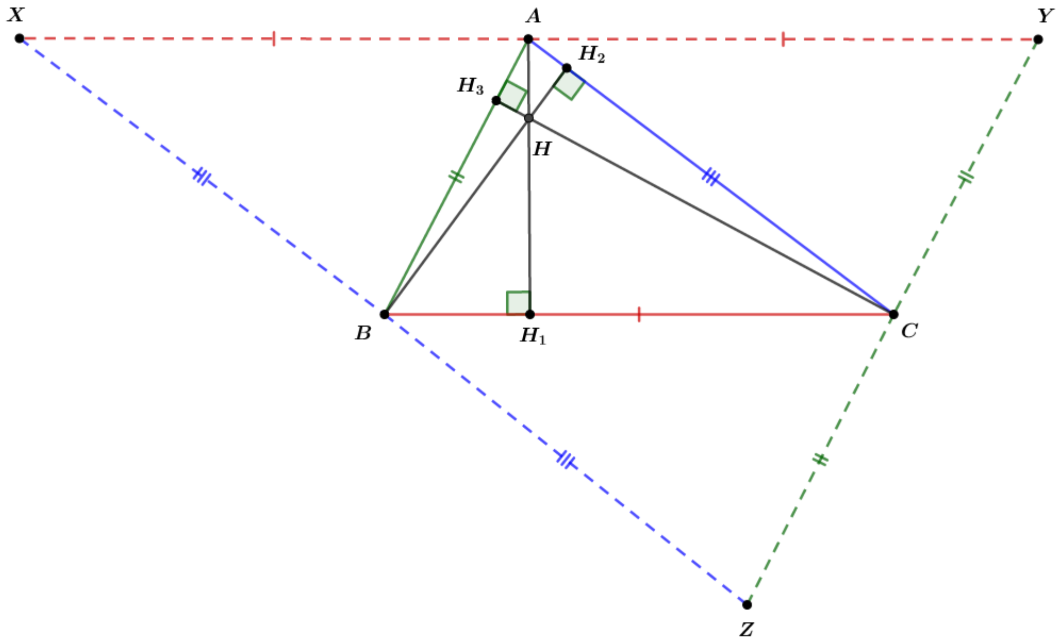
$$AY = BC \text{ e } CY = AB$$

$YZ//AB$ e $XZ//AC$, então $ABZC$ é paralelogramo:

$$CZ = AB \text{ e } BZ = AC$$

Desse modo, concluímos:

$$AX = AY, BX = BZ, CZ = CY$$



$$XY//BC \text{ e } AH_1 \perp BC \Rightarrow AH_1 \perp XY$$

$$XZ//AC \text{ e } BH_2 \perp AC \Rightarrow BH_2 \perp XZ$$

$$YZ//AB \text{ e } CH_3 \perp AB \Rightarrow CH_3 \perp YZ$$

Portanto, os segmentos AH_1, BH_2 e CH_3 são mediatrizes do triângulo XYZ. Logo, eles se encontram em um único ponto H.

H é circuncentro do triângulo XYZ e ortocentro do triângulo ABC.

5. Triângulos Quaisquer

5.1. Teorema dos Senos

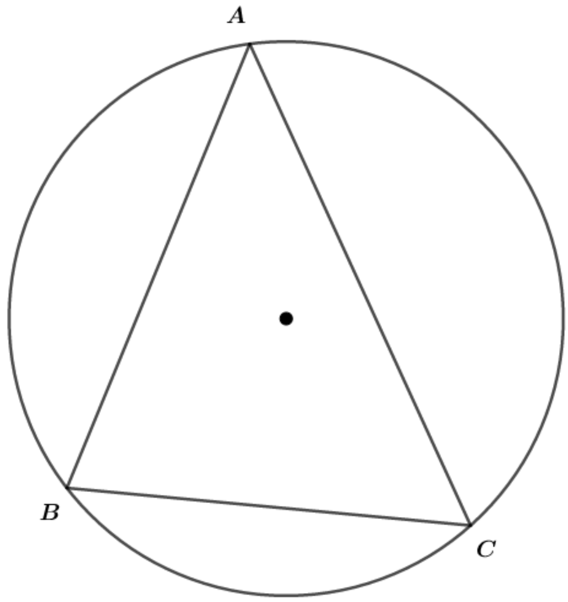
$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo R o raio da circunferência que a circunscreve.

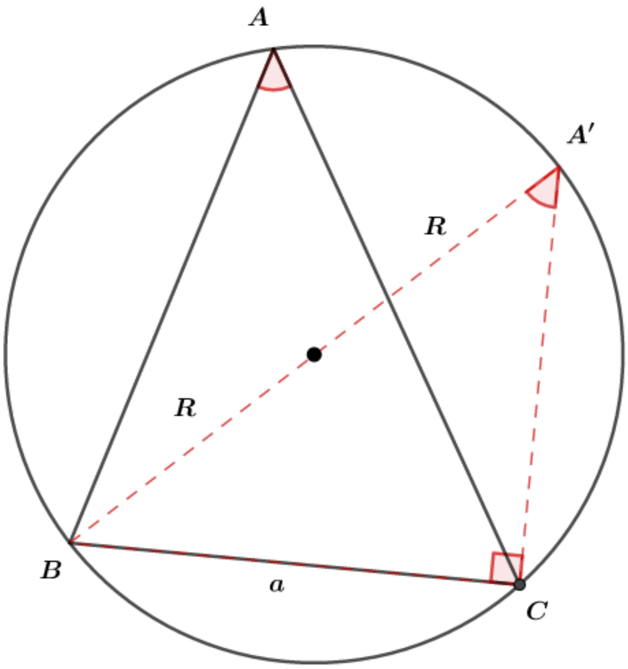
Demonstração:

Vamos provar para os dois casos possíveis: triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo.

Seja ABC um triângulo acutângulo representado pela seguinte figura:



Podemos traçar um triângulo $A'BC$ tal que A' seja a o ponto da intersecção da reta que passa pelo centro da circunferência:



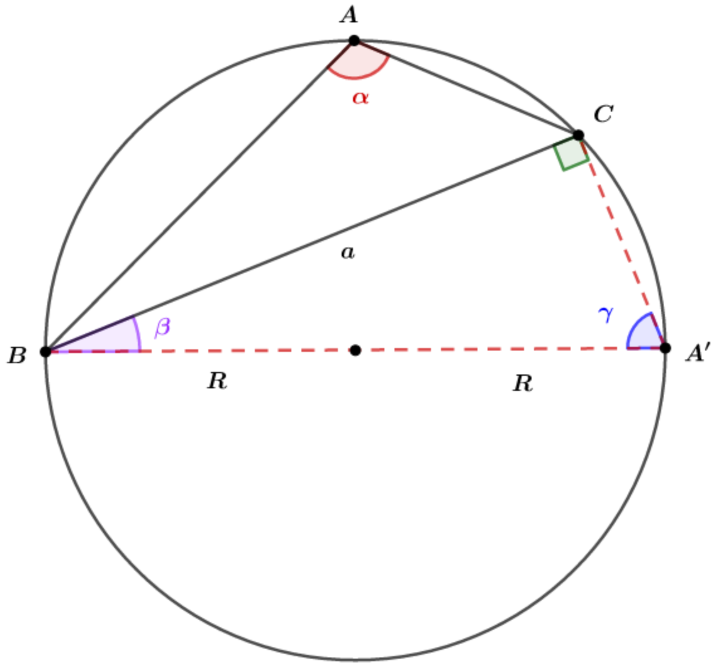
Perceba que o triângulo $A'BC$ é retângulo em C, essa é uma propriedade do triângulo inscrito em uma circunferência. Ainda pela figura, como os ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{A'}$ enxergam a mesma corda BC, podemos afirmar que elas são iguais, então, $\hat{A} = \widehat{A'}$. Aplicando o seno no triângulo $A'BC$, encontramos:

$$senA' = \frac{a}{2R}$$

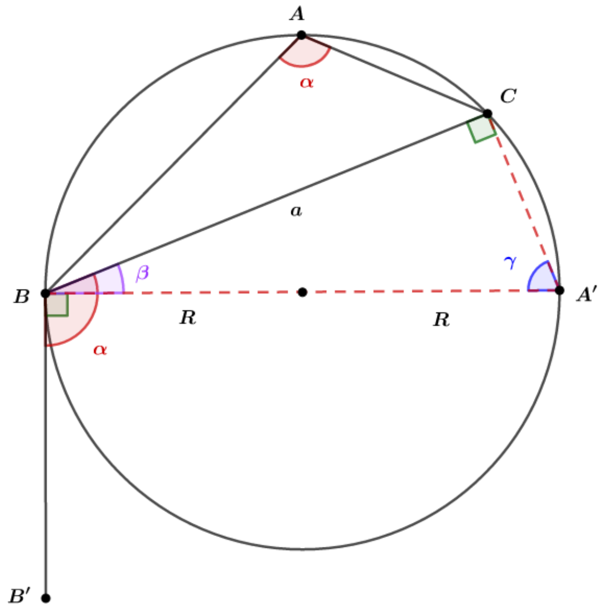
$$\widehat{A'} = \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{senA} = 2R$$

Usando a mesma ideia, podemos provar para os outros lados.

Se o triângulo fosse obtusângulo, teríamos:



O ponto A enxerga o segmento $\overline{BC}$ sob um ângulo α, sabemos da propriedade do arco capaz que o segmento de reta tangente ao ponto B também enxergará $\overline{BC}$ sob o mesmo ângulo α. Desse modo:



Analisando os ângulos internos do triângulo $A'BC$, podemos ver que:

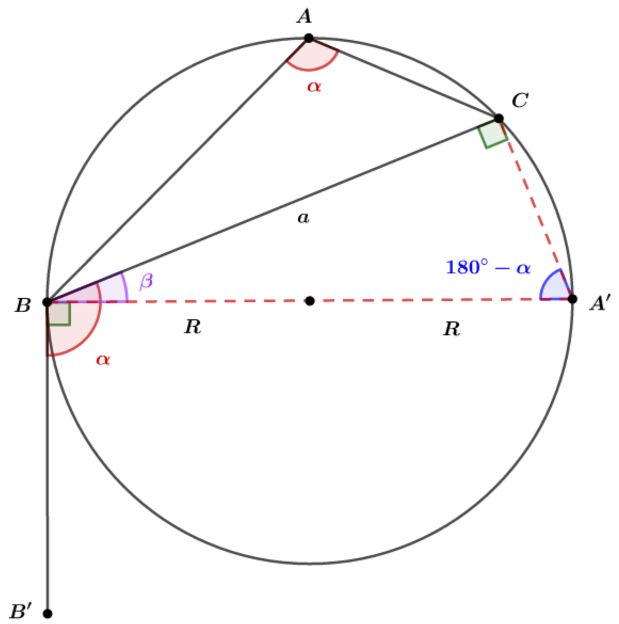
$$\beta = 90° - \gamma$$

Mas:

$$\alpha = 90° + \beta \Rightarrow \beta = \alpha - 90°$$

$$\Rightarrow 90° - \gamma = \alpha - 90°$$

$$\Rightarrow \gamma = 180° - \alpha$$



Analisando o triângulo $A'BC$, vemos que o seno do vértice A' é dado por:

$$sen(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$$

$$sen\alpha = \frac{a}{2R}$$

Como $\alpha = \hat{A}$, temos:

$$\frac{a}{senA} = 2R$$

Podemos provar analogamente para os outros vértices do triângulo ABC e concluir:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

5.2. Teorema dos Cossenos

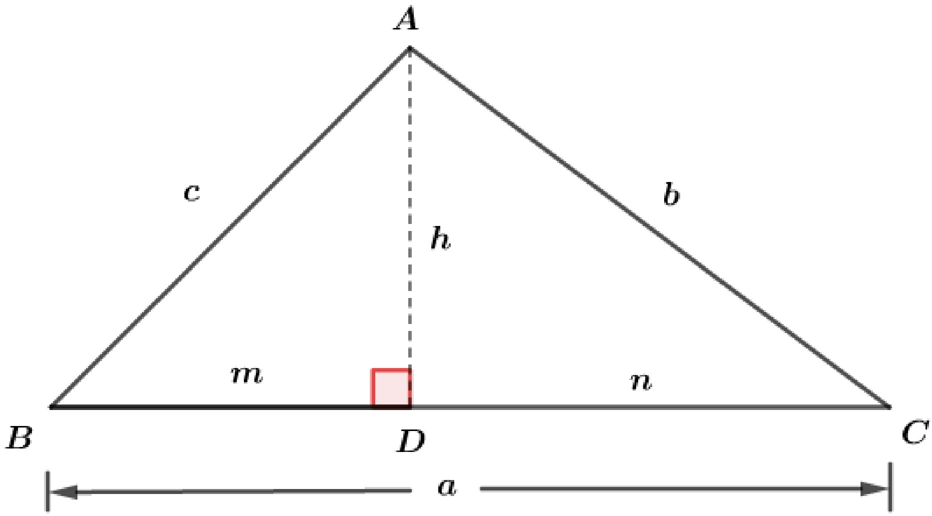
Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC \end{array}}$$

Demonstração:

Devemos dividir em dois casos, um para o triângulo com ângulo agudo e outro para o triângulo com ângulo obtuso.

1) Considere o triângulo ABC dado pela figura abaixo:



Podemos ver que o triângulo ADC é retângulo, então podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + n^2 \quad (I)$$

Analogamente para o triângulo ADB:

$$c^2 = m^2 + h^2 \quad (II)$$

Também, de acordo com a figura, temos:

$$n = a - m \quad (III)$$

De (II), temos $h^2 = c^2 - m^2$. Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2$$

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \quad (IV)$$

Observando o triângulo ADB, podemos escrever a seguinte relação:

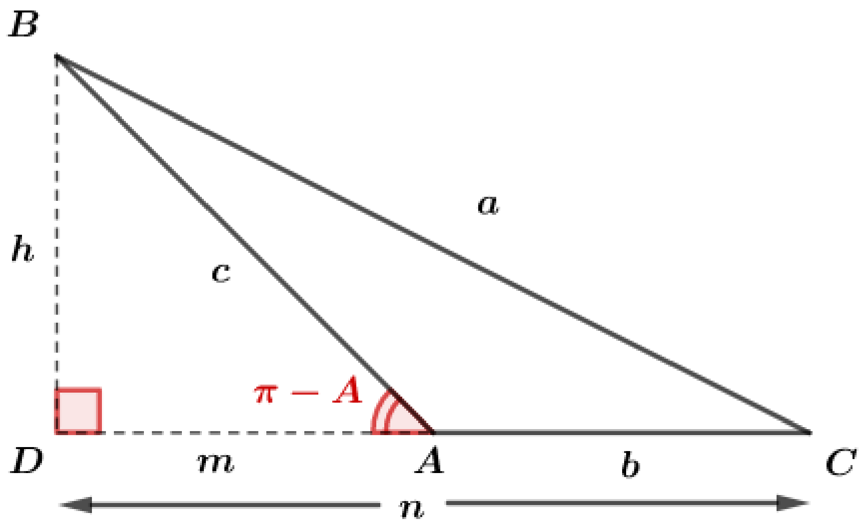
$$m = c\ cosB$$

Substituindo em (IV), obtemos a lei dos cossenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

2) Seja ABC um triângulo dado pela figura abaixo:



Os triângulos BAD e BCD são retângulos, desse modo, podemos escrever:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (I)$$

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (II)$$

Observando o triângulo BCD, temos a seguinte relação:

$$n = m + b \quad (III)$$

Substituindo (III) e (I) em (II), obtemos:

$$a^2 = (m + b)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = m^2 + 2bm + b^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \quad (IV)$$

No triângulo BAD, temos:

$$m = c\cos(\pi - A) = -c\cos A$$

Substituindo essa identidade em (IV):

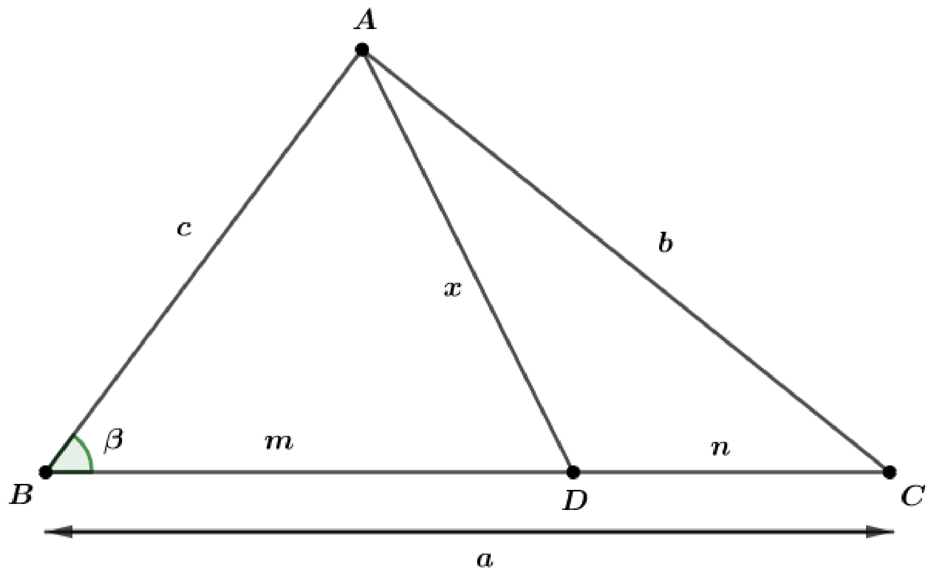
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

5.3. Relação de Stewart

A relação de Stewart é uma ferramenta muito útil na resolução de questões envolvendo triângulos.

Dado um triângulo ABC, temos:



$$\boxed{ax^2 + amn = b^2m + c^2n}$$

Demonstração:

Aplicando o teorema dos cossenos nos triângulos ABD e ABC, encontramos:

$$x^2 = c^2 + m^2 - 2cm\cos\beta \quad (I)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta \quad (II)$$

De (II), temos:

$$c\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

Substituindo em (I):

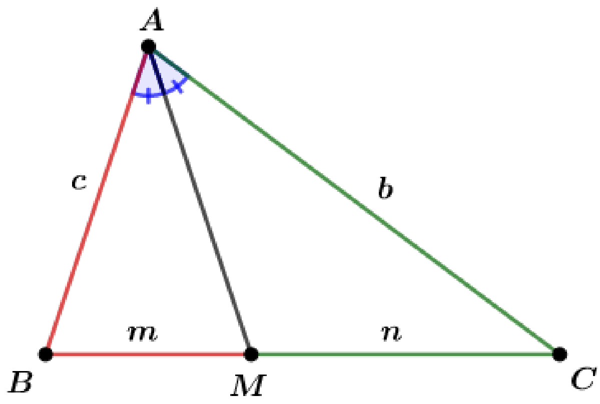
$$x^2 = c^2 + m^2 - 2m\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)$$
$$ax^2 = ac^2 + m^2a - mc^2 - ma^2 + mb^2$$
$$ax^2 = c^2(a - m) + ma(m - a) + b^2m$$

Sabemos que $n = a - m$, desse modo:

$$ax^2 = c^2n + ma(-n) + b^2m$$
$$\therefore ax^2 + amn = b^2m + c^2n$$

5.4. Teorema das Bissetrizes

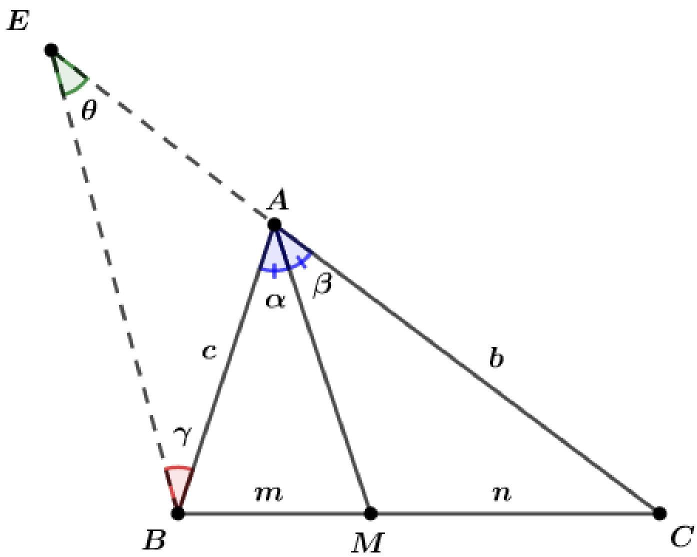
5.4.1. Teorema da Bissetriz Interna



$$\boxed{\frac{c}{m} = \frac{b}{n}}$$

Demonstração:

Vamos traçar um segmento de reta paralelo à bissetriz $\overline{AM}$ e que passa pelo prolongamento do lado $\overline{AC}$:



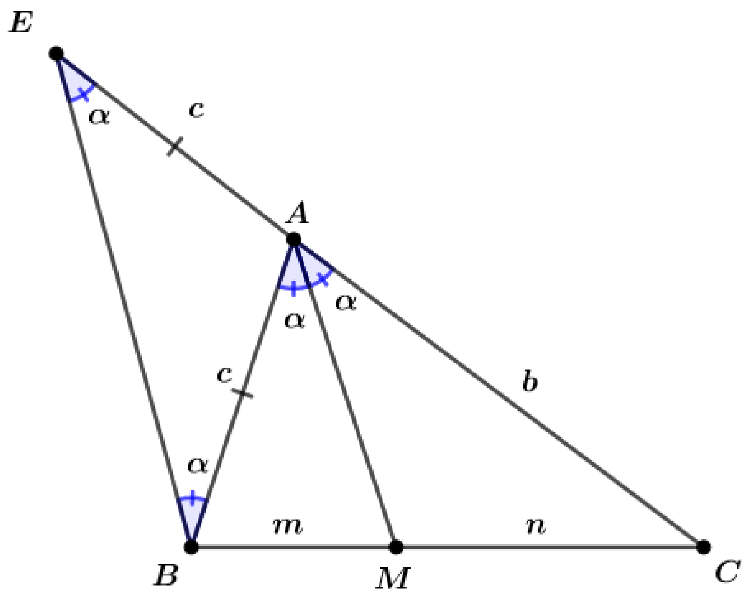
Como $\overline{EB}$ é paralelo a $\overline{AM}$, temos pela propriedade do paralelismo:

$$\gamma \equiv \alpha$$

$$\theta \equiv \beta$$

$\overline{AM}$ é bissetriz do triângulo ABC no vértice A, então $\alpha \equiv \beta$.

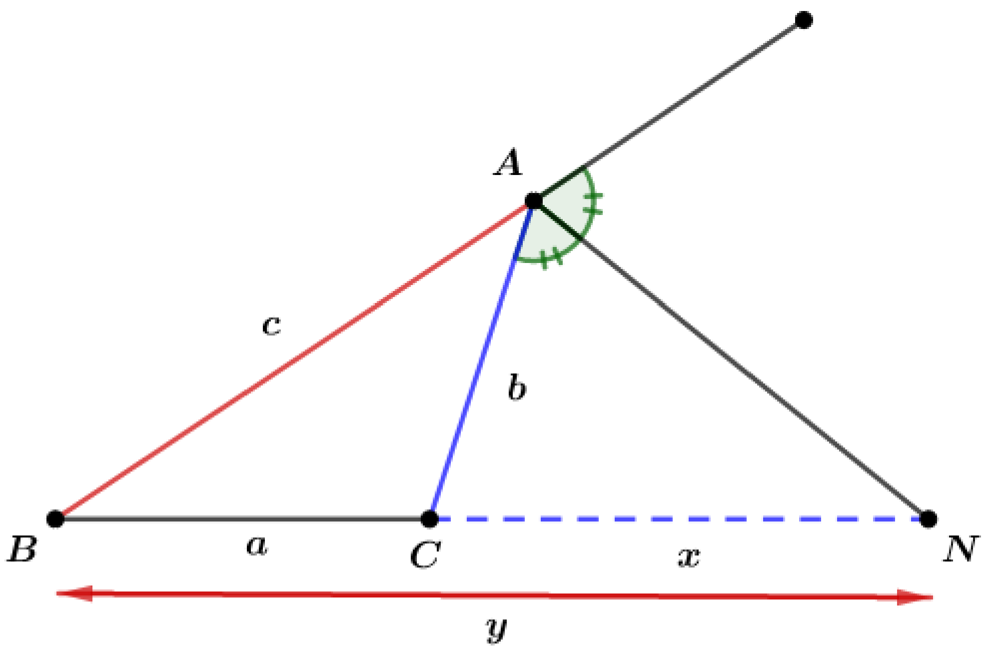
Logo, $\gamma \equiv \theta$ e, assim, ΔAEB é isósceles com $AE = AB = c$:



Aplicando o teorema de Tales, encontramos:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$$
$$\therefore \frac{c}{m} = \frac{b}{n}$$

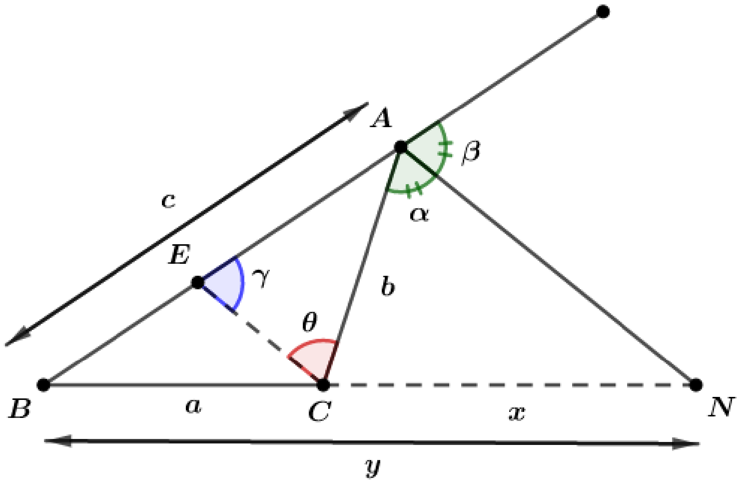
5.4.2. Teorema da Bissetriz Externa



$$\boxed{\frac{c}{y} = \frac{b}{x}}$$

Demonstração:

Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ tal que E pertença à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{CE}//\overline{AN}$:



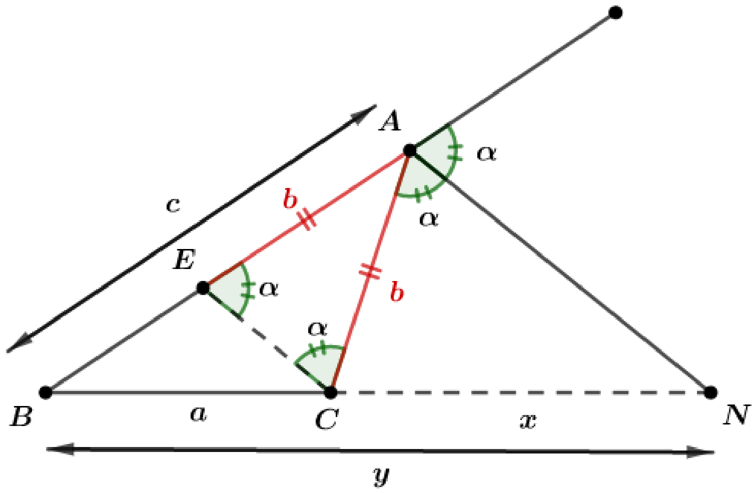
Como $EC//AN$, temos:

$$\theta \equiv \alpha$$

$$\gamma \equiv \beta$$

AN é bissetriz externa, então $\alpha \equiv \beta$. Portanto:

$$\gamma \equiv \theta \Rightarrow \Delta AEC \text{ é isósceles com } AE = AC$$

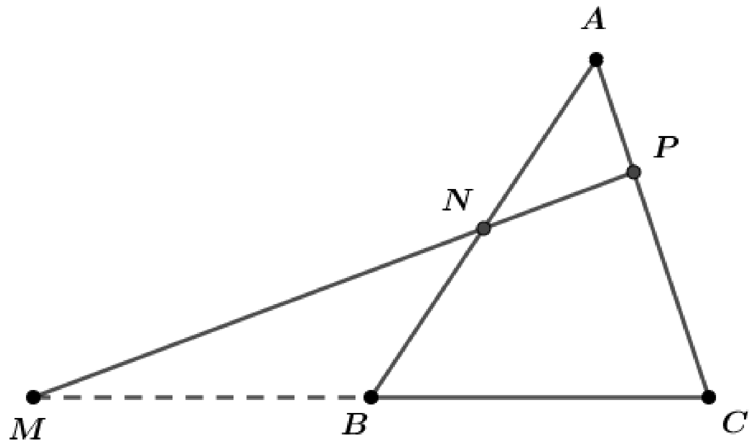


Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{c}{y} = \frac{b}{x}$$

5.5. Teorema de Menelaus

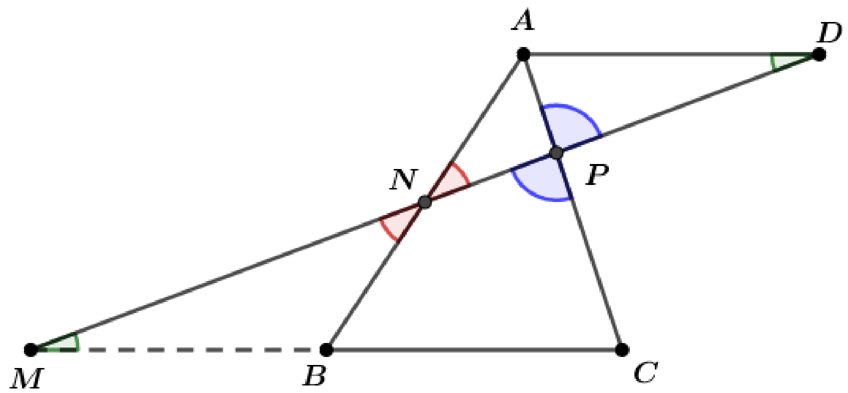


$$\boxed{\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}=1}$$

Esse teorema é conhecido como teorema da colinearidade, pois caso os pontos MNP satisfaçam essa relação, podemos afirmar que esses pontos são colineares. $\overleftrightarrow{MP}$ é a reta de Menelaus.

Demonstração:

Vamos prolongar o segmento $\overline{MP}$ até o ponto D tal que $\overline{AD}$ seja paralelo ao segmento $\overline{MC}$.



$$\Delta ADN \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{AD}{AN}=\frac{MB}{NB} \Rightarrow AD = MB\cdot\frac{AN}{NB}$$

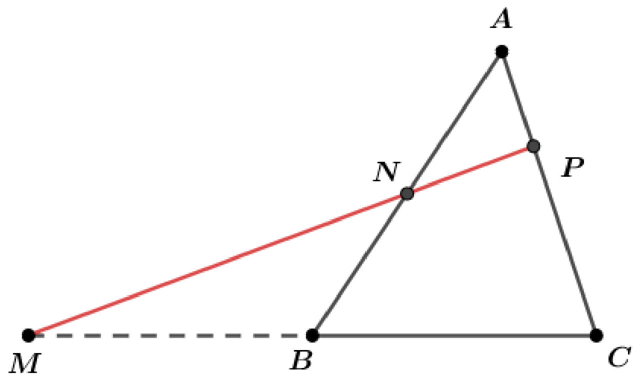
$$\Delta APD \sim \Delta CPM \Rightarrow \frac{AD}{PA}=\frac{MC}{CP} \Rightarrow AD = PA\cdot\frac{MC}{CP}$$

Igualando as relações, obtemos:

$$MB\cdot\frac{AN}{NB}=PA\cdot\frac{MC}{CP}$$

$$\therefore \frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$$

Um modo de decorar o teorema de Menelaus é notar os pontos de colinearidade M, N, P:



O bizu é saber que cada razão do teorema terá sempre um ponto de colinearidade. Podemos começar pelo ponto M. Esse ponto pertence à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Inicialmente, escrevemos o segmento do vértice mais próximo do ponto M e dividimos com o mais afastado:

$$\frac{MB}{MC}$$

Perceba que o denominador para no ponto C. A próxima razão começará por esse ponto e deve possuir o ponto de colinearidade P que pertence ao lado AC:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}$$

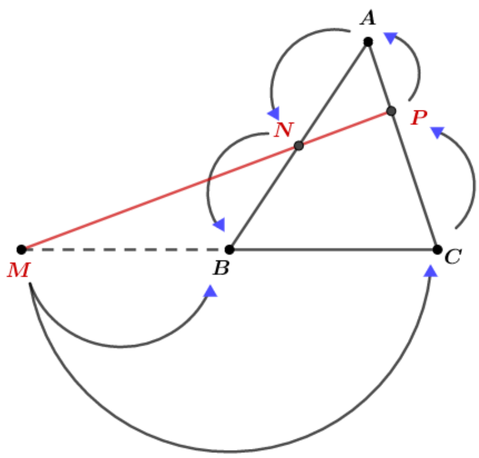
O último denominador terminou no ponto A, assim, a próxima razão deve iniciar nesse ponto e deve possuir o último ponto de colinearidade N:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}$$

Finalmente, igualamos essa expressão a 1:

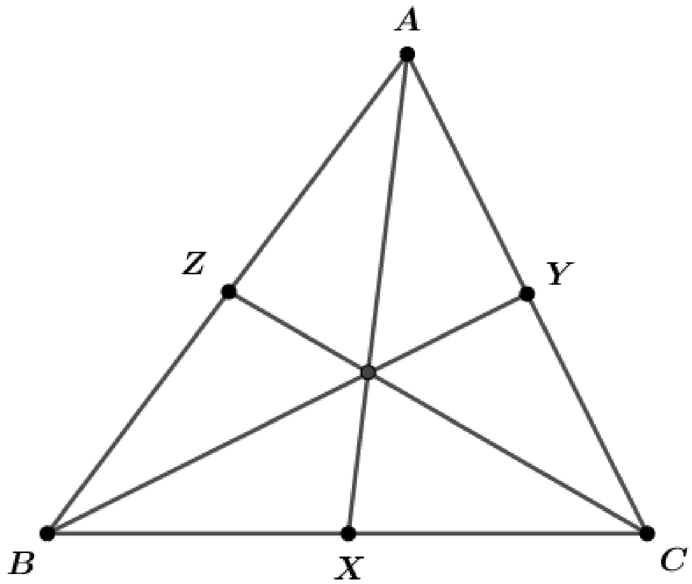
$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$$

ESQUEMATIZANDO



$$\boxed{\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}=1}$$

5.6. Teorema de Ceva



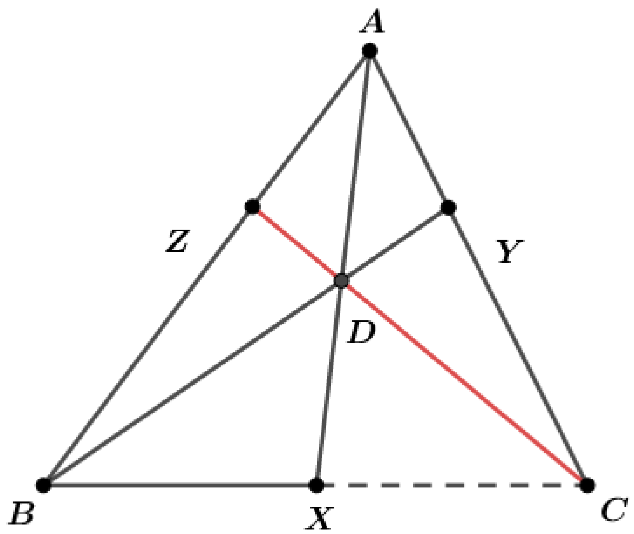
$$\boxed{\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1}$$

Esse teorema é conhecido como o teorema da concorrência, pois caso os pontos X, Y, Z satisfaçam essa relação, podemos afirmar que esses pontos se encontram em um mesmo ponto.

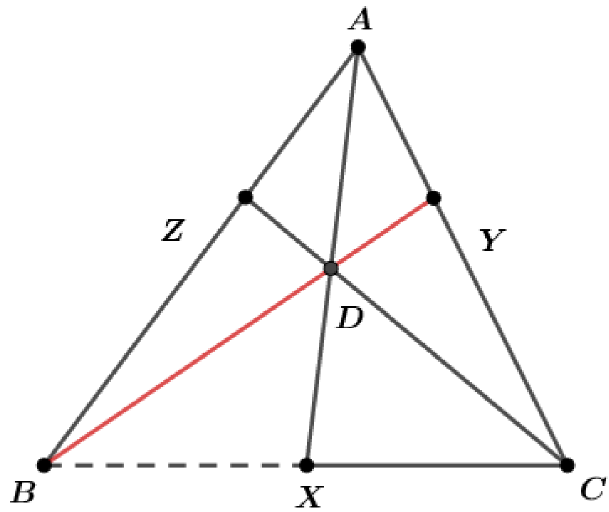
Demonstração:

Vamos usar o teorema de Menelaus para provar o teorema de Ceva.

Seja CDZ os pontos de colinearidade. Aplicando o teorema de Menelaus no ΔABX:



$$\frac{CX}{CB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AD}{DX} = 1 \quad (I)$$



Fazendo o mesmo para o triângulo ACX e os pontos de colinearidade BDY:

$$\frac{BX}{BC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AD}{DX}=1\ \ (II)$$

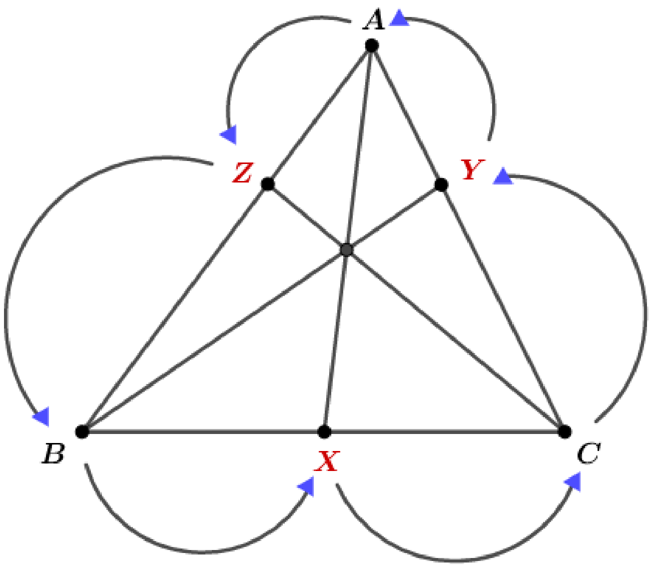
Igualando (I) com (II):

$$\frac{CX}{\cancel{CB}}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{\cancel{AD}}{\cancel{DX}}=\frac{BX}{\cancel{BC}}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{\cancel{AD}}{\cancel{DX}}$$

$$\frac{ZA}{BZ}\cdot\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

$$\therefore\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

Esse teorema é mais fácil de memorizar. O bizu é começar por um vértice e sempre incluir os pontos de concorrência em cada razão:

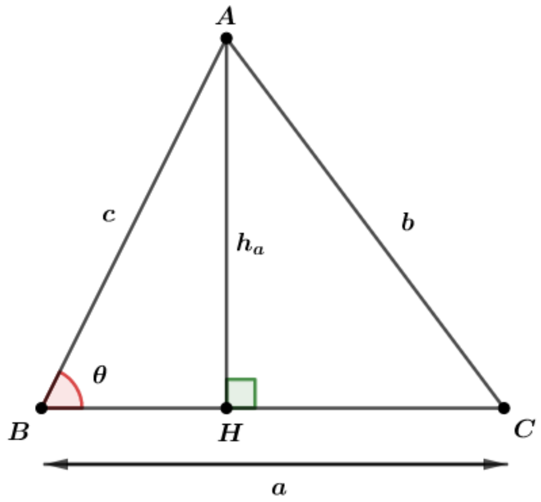


$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

5.7. Cálculo das Cevianas

Vamos deduzir as fórmulas para calcular a medida das cevianas de um triângulo qualquer em função dos lados do triângulo.

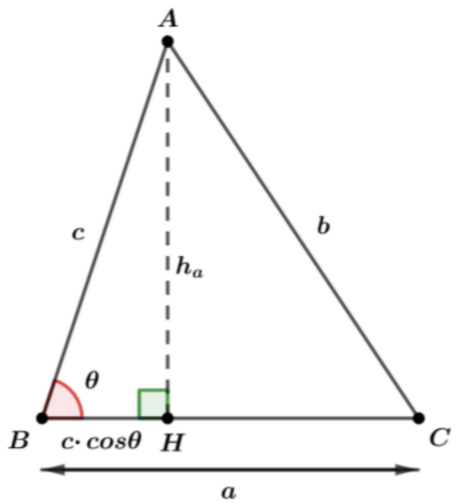
5.7.1. Altura



$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demonstração:

Considere o seguinte triângulo ABC:



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos AHB, temos:

$$\Delta AHB \Rightarrow c^2 = h_a^2 + (c\cos^2\theta) \Rightarrow h_a = c\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Usando a lei dos cossenos no ΔABC:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Substituindo o valor do cosseno na equação de h_a:

$$h_a = c\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2}$$

Simplificando a equação:

$$h_a = \sqrt{c^2\left[1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2\right]}$$

$$h_a = \sqrt{c^2 - c^2\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2}$$

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}$$

$$h_a = \sqrt{\left(c - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\right)\left(c + \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\right)}$$

$$h_a = \sqrt{\left(\frac{2ac - (a^2 + c^2) + b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + (a^2 + c^2) - b^2}{2a}\right)}$$

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{\left(b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)\right)\left((a^2 + 2ac + c^2) - b^2\right)}$$

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)}$$

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{\left(b - (a - c)\right)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b)}$$

Sabendo que $2p = a + b + c$:

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{\underbrace{(-a + b + c)}_{2p-2a}\underbrace{(a + b - c)}_{2p-2c}\underbrace{(a - b + c)}_{2p-2b}\underbrace{(a + b + c)}_{2p}}$$

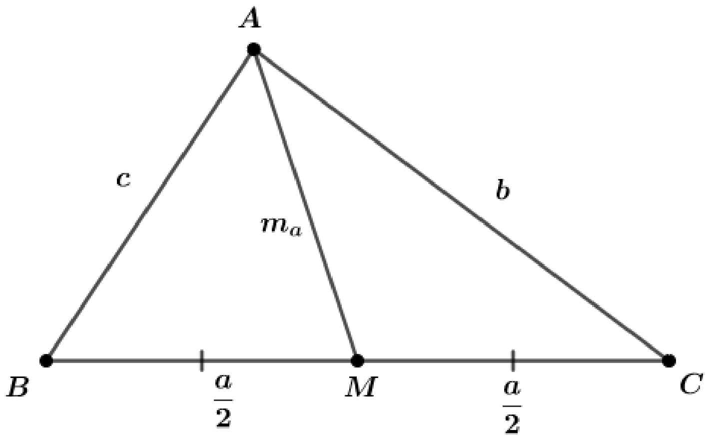
$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{2^4 p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Podemos deduzir a fórmula das outras alturas analogamente.

Essa fórmula também é válida para triângulos obtusângulos, basta usar a mesma ideia para deduzi-la.

5.7.2. Mediana



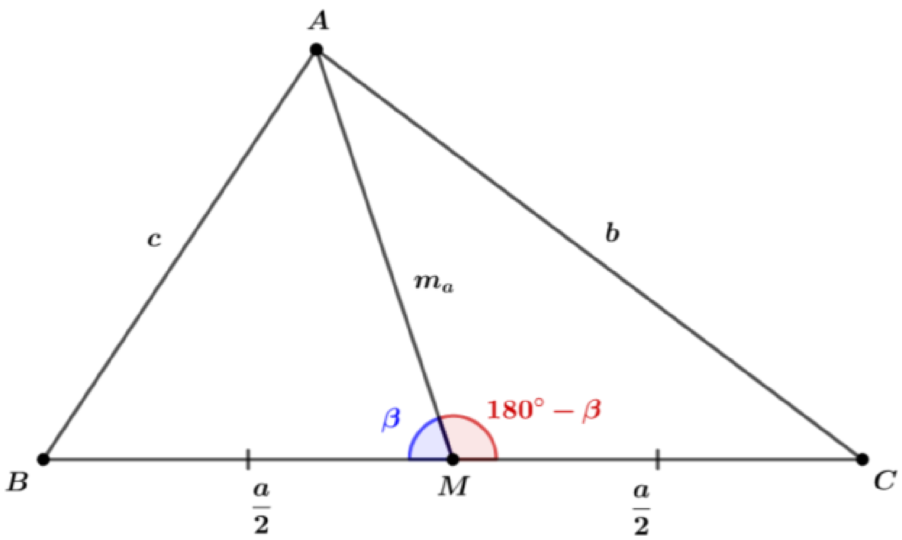
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

Demonstração:

Considere o seguinte triângulo ABC:



Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABM e AMC, obtemos:

$$\Delta ABM \Rightarrow c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)m_a\cos\beta \quad (I)$$

$$\Delta AMC \Rightarrow b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)m_a\cos(180° - \beta)$$

$$b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)m_a\cos\beta \quad (II)$$

Somando (I) e (II), temos:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

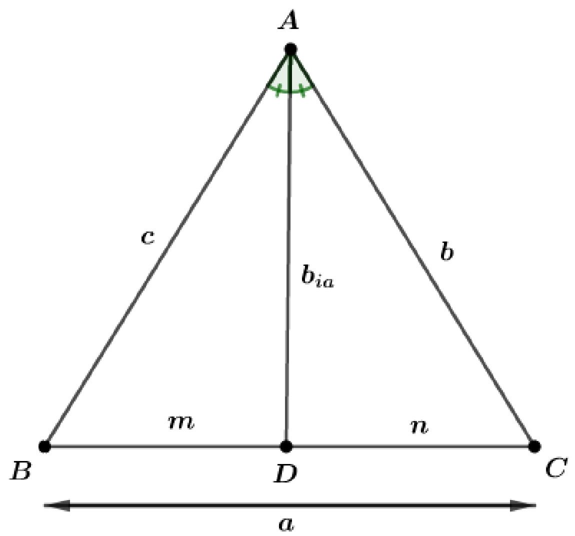
$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Podemos provar a fórmula das outras medianas analogamente.

Também é válida para triângulos obtusângulos.

5.7.3. Bissetriz Interna



$$\boldsymbol{b_{ia} = \sqrt{bc - mn}}$$

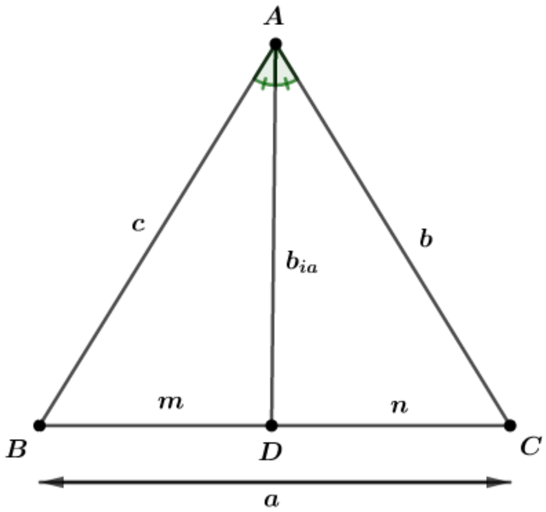
$$\boldsymbol{b_{ia} = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp(p - a)}}$$

$$\boldsymbol{b_{ib} = \frac{2}{a + c}\sqrt{acp(p - b)}}$$

$$\boldsymbol{b_{ic} = \frac{2}{a + b}\sqrt{abp(p - c)}}$$

Demonstração:

Seja ΔABC cujos lados são a, b, c:



Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{c}{m}=\frac{b}{n}$$

Usando a relação de Stewart:

$$b_{ia}^2 a + amn = b^2 m + c^2 n$$

Dividindo toda a equação por amn:

$$\frac{b_{ia}^2}{mn}+1=\frac{b^2}{an}+\frac{c^2}{am}$$

$$\frac{b_{ia}^2+mn}{mn}=\frac{b}{n}\cdot\frac{b}{a}+\frac{c}{m}\cdot\frac{c}{a}$$

Substituindo $\frac{c}{m}=\frac{b}{n}$:

$$\frac{b_{ia}^2+mn}{mn}=\frac{b}{n}\cdot\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{b_{ia}^2+mn}{m}=b\cdot\left(\frac{b+c}{a}\right)$$

$$b_{ia}^2+mn=bm\cdot\left(\frac{b+c}{a}\right)\ \ (I)$$

Pela figura, podemos ver que $n=a-m$, desse modo:

$$\frac{c}{m}=\frac{b}{n}\Rightarrow cn=bm\Rightarrow c(a-m)=bm\Rightarrow m(b+c)=ac$$

Substituindo essa identidade na equação (I):

$$b_{ia}^2+mn=\frac{b}{a}\cdot ac$$

$$\therefore b_{ia}=\sqrt{bc-mn}$$

Para provar a outra fórmula, devemos usar:

$$\begin{cases} m+n=a \ \ (I) \\ \dfrac{c}{m}=\dfrac{b}{n} \ \ (II) \\ b_{ia}^2 a+amn=b^2m+c^2n \ \ (III) \end{cases}$$

Da equação (II), temos:

$$\frac{c}{m}=\frac{b}{n} \Rightarrow \frac{b+c}{m+n}=\frac{b}{n}=\frac{c}{m} \Rightarrow \frac{b+c}{a}=\frac{b}{n}=\frac{c}{m}$$

$$\Rightarrow n=\frac{ab}{b+c}$$

$$\Rightarrow m=\frac{ac}{b+c}$$

Substituindo m e n em (III):

$$b_{ia}^2 a+a\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}=b^2\cdot\frac{ac}{b+c}+c^2\cdot\frac{ab}{b+c}$$

Como $a\neq 0$:

$$b_{ia}^2=\frac{b^2c}{b+c}+\frac{c^2b}{b+c}-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}$$

Simplificando:

$$b_{ia}^2=\frac{b^2c(b+c)+c^2b(b+c)-a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$b_{ia}^2=\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot(b^2+bc+bc+c^2-a^2)$$

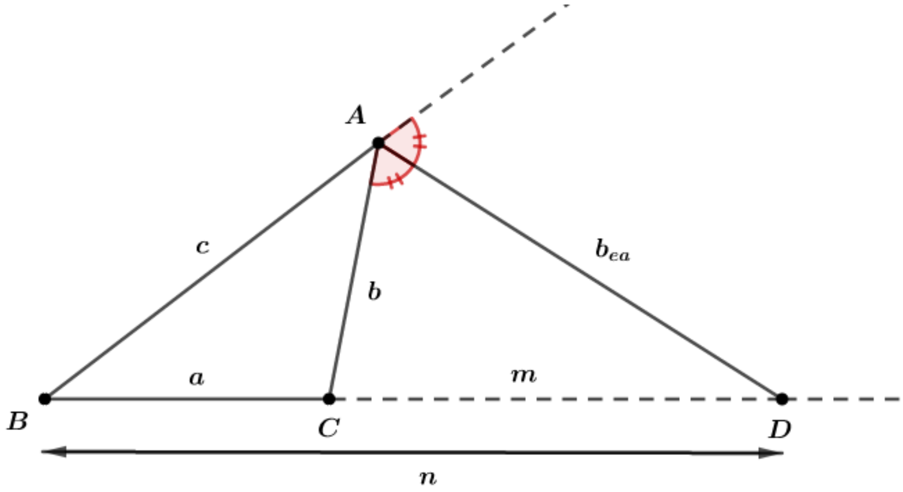
$$b_{ia}=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}$$

$$b_{ia}=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc\underbrace{(b+c-a)}_{2p-2a}\underbrace{(b+c+a)}_{2p}}$$

$$\therefore b_{ia}=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

Analogamente, obtemos a fórmula para as outras bissetrizes internas.

5.7.4. Bissetriz Externa



$$\boldsymbol{b_{ea} = mn - bc}$$

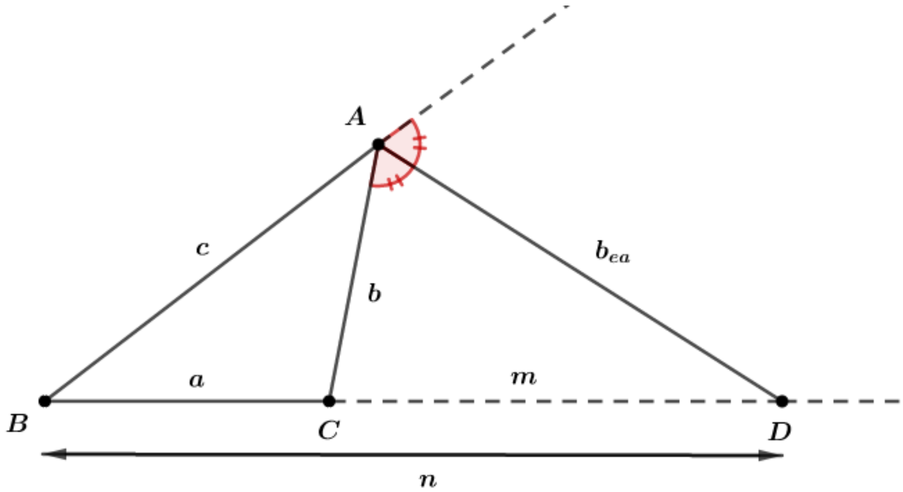
$$\boldsymbol{b_{ea} = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}$$

$$\boldsymbol{b_{eb} = \frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}}$$

$$\boldsymbol{b_{ec} = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}}$$

Demonstração:

Dados os lados a, b, c do triângulo, temos:



$$\begin{cases} n - m = a \ \ (I) \\ \dfrac{c}{n} = \dfrac{b}{m} \ \ (II) \\ b^2 n + amn = b_{ea}^2 a + c^2 m \ \ (III) \end{cases}$$

De (II):

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{m} \Rightarrow \frac{c-b}{n-m} = \frac{c}{n} = \frac{b}{m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{ab}{c-b}$$
$$\Rightarrow n = \frac{ac}{c-b}$$

Substituindo em (III):

$$b^2n + amn = b_{ea}^2 a + c^2 m$$
$$b^2n - c^2m + amn = b_{ea}^2 a$$
$$b_{ea}^2 a = b^2\left(\frac{ac}{c-b}\right) - c^2\left(\frac{ab}{c-b}\right) + a\left(\frac{ab}{c-b}\right)\left(\frac{ac}{c-b}\right)$$
$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\left(b(c-b) - c(c-b) + a^2\right)$$
$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\left(a^2 - \underbrace{(b^2 - 2bc + c^2)}_{(b-c)^2}\right)$$
$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\big(a-(b-c)\big)(a+b-c)$$
$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\underbrace{(a-b+c)}_{2p-2b}\underbrace{(a+b-c)}_{2p-2c}$$
$$b_{ea}^2 = \frac{2}{|c-b|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Também, podemos escrever a bissetriz externa de outra forma. Dividindo (III) por amn:

$$\frac{b^2}{am} + 1 = \frac{b_{ea}^2}{mn} + \frac{c^2}{an}$$
$$b_{ea}^2 = mn\left(\frac{b^2}{am} - \frac{c^2}{an} + 1\right)$$
$$b_{ea}^2 = mn\left(\frac{b^2}{am} - \frac{c^2}{an} + 1\right)$$
$$b_{ea}^2 = mn + mn\left(\frac{b^2}{am} - \frac{c^2}{an}\right)$$

Substituindo $\frac{c}{n} = \frac{b}{m}$:

$$b_{ea}^2 = mn + mn\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{m} - \frac{c}{a}\cdot\frac{b}{m}\right)$$
$$b_{ea}^2 = mn + \frac{bn(b-c)}{a} \quad (IV)$$

De (II):

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{m} \Rightarrow cm = bn \Rightarrow c(n-a) = bn \Rightarrow -ac = n(b-c)$$

Substituindo em (IV):

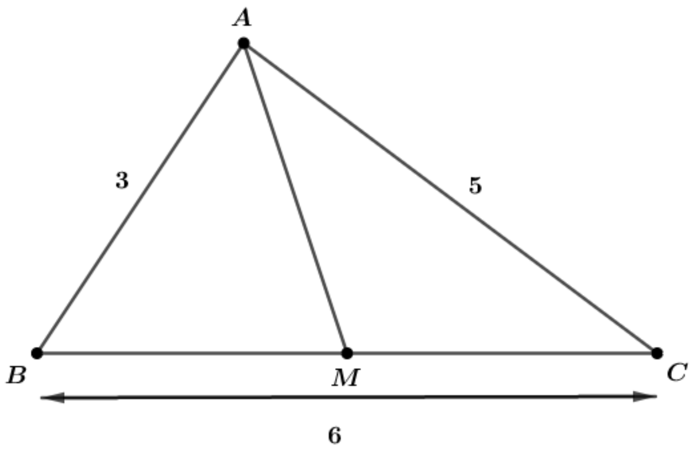
$$b_{ea}^2 = mn + \frac{b(-ac)}{a}$$

$$\therefore b_{ea} = \sqrt{mn - bc}$$

Analogamente, obtemos as outras bissetrizes externas.

Exercícios de Fixação

9. Determine a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC abaixo:



Resolução:

Vamos usar a fórmula da mediana:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(5^2 + 3^2) - 6^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{68 - 36}$$

$$m_a = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{m_a = 2\sqrt{2}}$

10. Determine a medida das alturas do triângulo de lados $6, 10$ e 12.

Resolução:

Usando as fórmulas das alturas, temos:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Calculando o semiperímetro p:

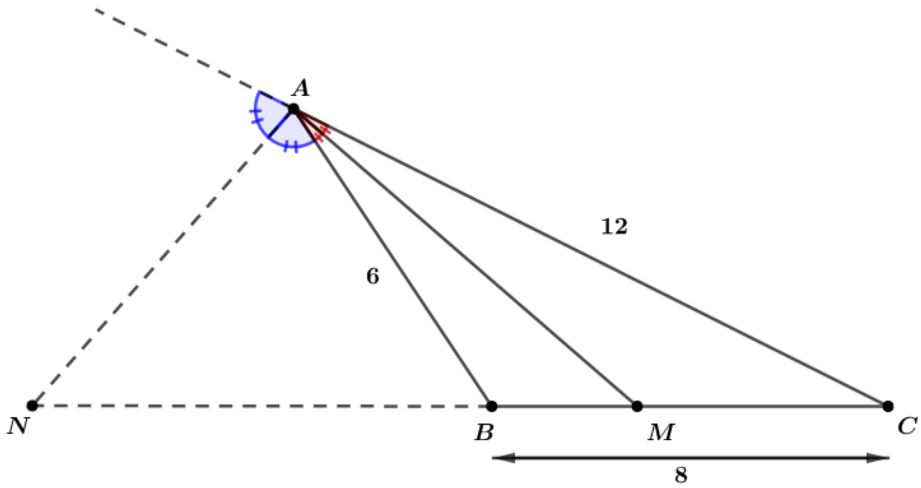
$$2p = 6 + 10 + 12$$
$$p = 14$$

Calculando o valor da expressão $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, supondo que $a = 6, b = 10$ e $c = 12$:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(14-6)(14-10)(14-12)} = \sqrt{14 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 8\sqrt{14}$$
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{6} \cdot 8\sqrt{14} = \frac{8\sqrt{14}}{3}$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{10} \cdot 8\sqrt{14} = \frac{8\sqrt{14}}{5}$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{12} \cdot 8\sqrt{14} = \frac{4\sqrt{14}}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{h_a = \frac{8\sqrt{14}}{3}; h_b = \frac{8\sqrt{14}}{5}; h_c = \frac{4\sqrt{14}}{3}}$

11. Determine a medida da bissetriz interna $\overline{AM}$ e bissetriz externa $\overline{AN}$ da figura abaixo:



Resolução:

Lembrando que a fórmula da bissetriz interna e bissetriz externa são dadas por:

$$AM = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$
$$AN = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Calculando os valores:

$$2p = a + b + c$$

$$p = \frac{6+8+12}{2} = 13$$

$$AM = \frac{2}{12+6}\sqrt{12 \cdot 6 \cdot 13 \cdot (13-8)}$$

$$AM = \frac{1}{9}\sqrt{6^2 \cdot 26 \cdot 5}$$

$$AM = \frac{2}{3}\sqrt{130}$$

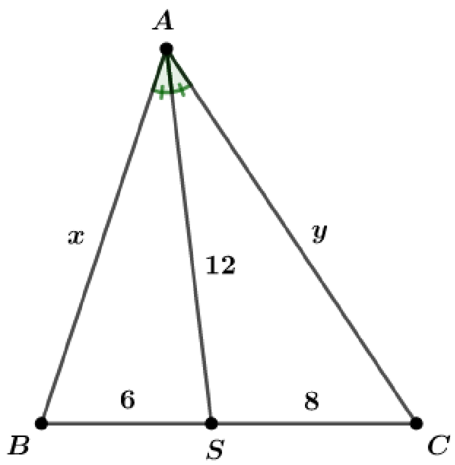
$$AN = \frac{2}{|12-6|}\sqrt{12 \cdot 6 \cdot (13-12)(13-6)}$$

$$AN = \frac{1}{3}\sqrt{6^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7}$$

$$AN = 2\sqrt{14}$$

Gabarito: $\boldsymbol{AM = \frac{2}{3}\sqrt{130}; AN = 2\sqrt{14}}$

12. Se $\overline{AS}$ é bissetriz interna do triângulo ABC, determine x e y.



Resolução:

Usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} \quad (I)$$

Aplicando a relação de Stewart no triângulo ABC:

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = x^2 \cdot 8 + y^2 \cdot 6 \quad (II)$$

Elevando (I) ao quadrado:

$$x^2 = y^2 \cdot \frac{9}{16}$$

Substituindo x^2 em (II):

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \cdot \frac{9}{16} \cdot 8 + y^2 \cdot 6$$

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \cdot \frac{9}{2} + y^2 \cdot 6$$

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2\left(\frac{21}{2}\right)$$

$$y^2 = \frac{2}{21} \cdot \left(\underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{14}_{2 \cdot 7} + \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{6}_{2 \cdot 3} \cdot \underbrace{8}_{2^3} \right)$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 7} \cdot 2^5 \cdot (3^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 2)}$$

$$y = 2^3 \sqrt{\frac{1}{7}(3 \cdot 7 + 3 \cdot 2)}$$

$$y = 8\sqrt{\frac{28}{7}}$$

$$y = 16$$

$$x = \frac{3}{4} y \Rightarrow x = 12$$

Gabarito: $x = 12$ e $y = 16$

13. Deduza as fórmulas das medianas de um triângulo em função dos seus lados a, b, c.

Resolução: Demonstração vista na teoria.

Gabarito: Demonstração

14. Deduza as fórmulas das alturas de um triângulo em função dos seus lados a, b, c.

Resolução: Demonstração vista na teoria.

Gabarito: Demonstração

15. Deduza as fórmulas das bissetrizes internas e externas de um triângulo em função dos seus lados a, b, c.

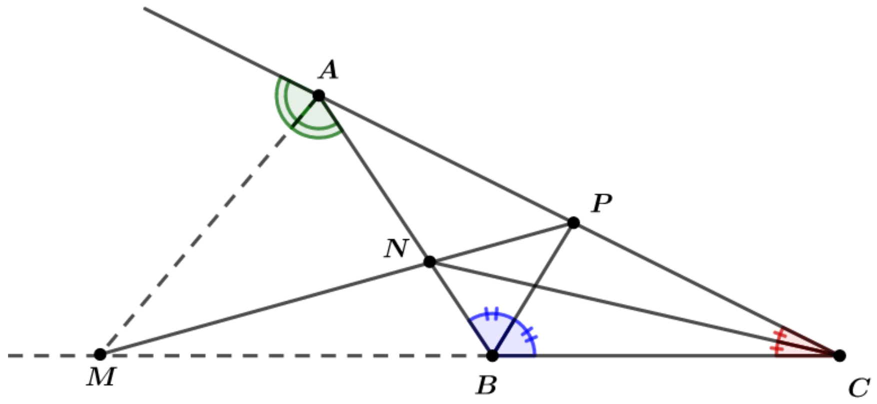
Resolução: Demonstração vista na teoria.

Gabarito: Demonstração

16. Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

Resolução:

Vamos supor que o triângulo ABC é representado pela figura abaixo:



Aplicando o teorema da bissetriz interna no triângulo ABC:

$$\hat{B} \Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{AN+NB}{AP} = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{BC}{AN+NB}$$

$$\hat{C} \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AP+PC}{AN} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AP+PC}{BC}$$

Usando o teorema da bissetriz externa em $\hat{A}$:

$$\hat{A} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{AB}{MB} \Rightarrow \frac{AP+PC}{MC} = \frac{AN+NB}{MB} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AN+NB}{AP+PC}$$

Para provar que M, N, P são colineares, podemos usar o teorema de Menelaus. Assim, devemos provar que:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

Vamos calcular o valor da expressão da esquerda:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB}$$

Substituindo cada razão pelos valores encontrados usando o teorema das bissetrizes interna e externa, encontramos:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{AN+NB}{AP+PC} \cdot \frac{BC}{AN+NB} \cdot \frac{AP+PC}{BC} = 1$$

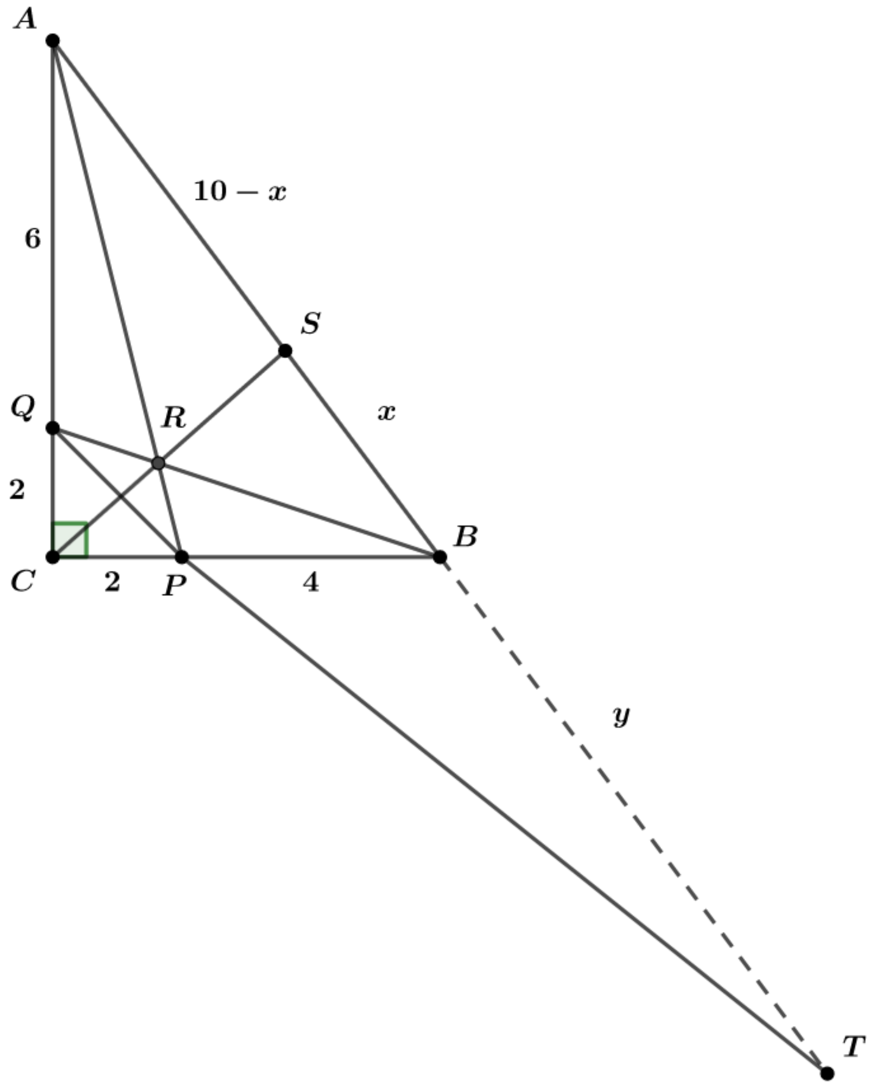
Portanto, os pontos M, N, P satisfazem ao teorema de Menelaus, logo, são colineares.

Gabarito: Demonstração

17. No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se a hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre TS.

Resolução:

Como ABC é retângulo com hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, temos pelo teorema de Pitágoras $BC = 6$. Desenhando a figura do texto, temos:



R é ponto de concorrência do triângulo ABC, assim, podemos usar o teorema de Ceva:

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BS}{SA}=1$$

$$\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{x}{10-x}=1$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{10-x}=1$$

$$3x=20-2x$$

$$5x=20$$

$$\therefore x=4$$

Como T é prolongamento de PQ, temos que Q, P, T são colineares, logo, podemos aplicar o teorema de Menelaus:

$$\frac{TB}{TA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}=1$$

$$\frac{y}{10+y}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}=1$$

$$\frac{y}{10+y}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$$3y = 20 + 2y$$

$$\therefore y = 20$$

Portanto, TS é dado por:

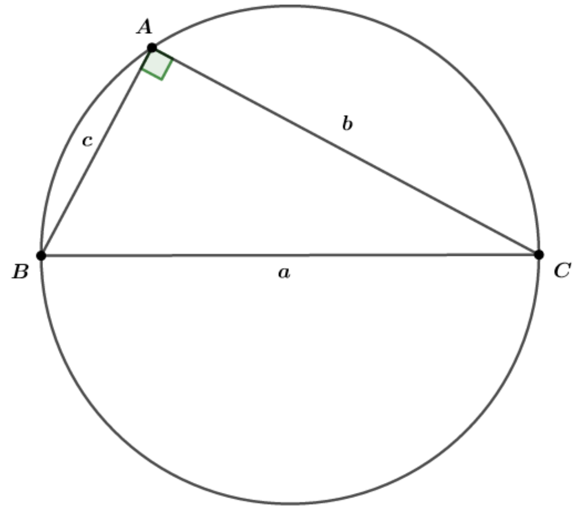
$$TS = x + y = 4 + 20 = 24$$

Gabarito: $\boldsymbol{TS = 24}$

6. Triângulo Retângulo

6.1. Pontos Notáveis no Triângulo Retângulo

A hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência possui medida igual à diagonal da circunferência.



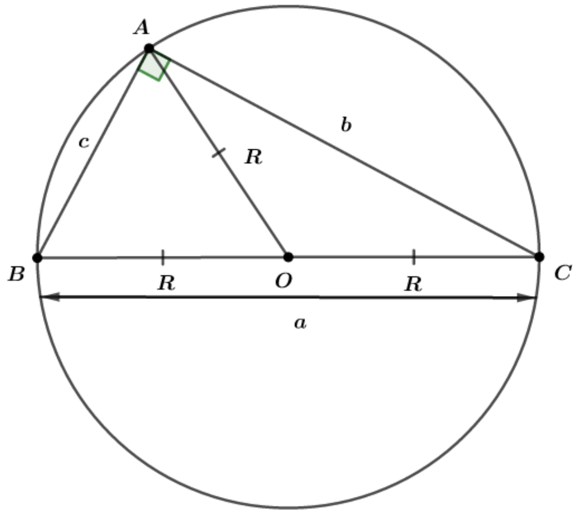
Demonstração:

Vimos no tópico de arco capaz que $\hat{A} = \widehat{BC}/2$. Desse modo:

$$\widehat{BC} = 2\hat{A}$$

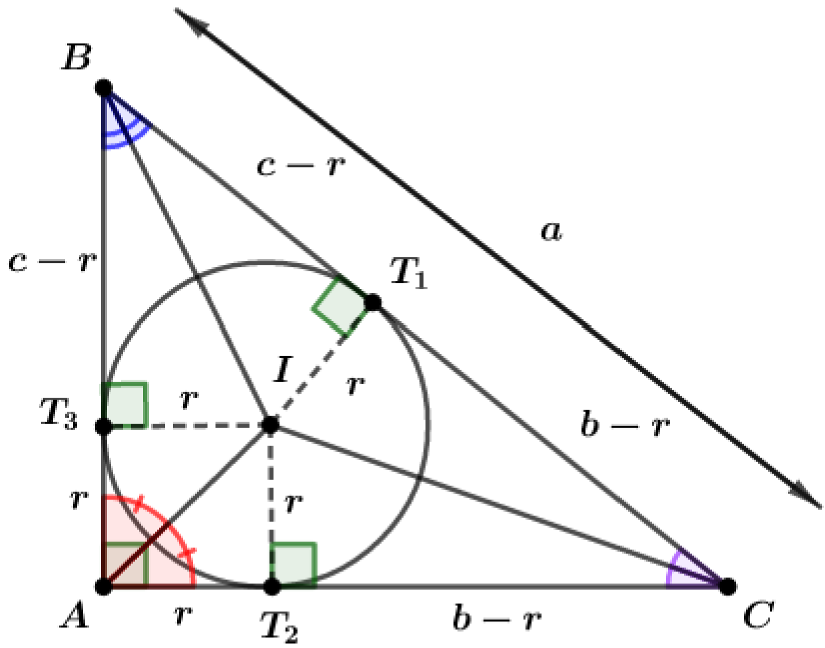
$$\widehat{BC} = 180°$$

Assim, o segmento $\overline{BC}$ é a diagonal da circunferência. O centro dessa circunferência é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo:



$$\Rightarrow a = 2R$$

Para uma circunferência inscrita em um triângulo retângulo, temos:



T_1, T_2, T_3 são os pontos de tangência da circunferência inscrita. Vimos no tópico de incentro que esses pontos de tangência possuem a seguinte relação:

$$BT_1 = BT_3$$
$$AT_2 = AT_3$$
$$CT_1 = CT_2$$

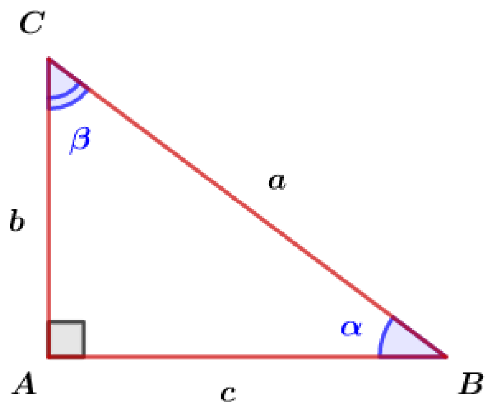
Observando a figura, podemos ver que:

$$a = c - r + b - r$$
$$a + 2r = b + c$$

Como o triângulo ABC é retângulo com hipotenusa BC, ele é circunscritível e a sua hipotenusa é a diagonal da circunferência que a circunscreve. Seja R, o raio dessa circunferência. Assim, podemos escrever:

$$a = 2R \Rightarrow 2R + 2r = b + c$$

6.2. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo



No triângulo retângulo, chamamos de hipotenusa o lado BC e de catetos os lados AB e AC.

Na trigonometria temos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Além dessas, temos as razões secante, cossecante e cotangente. Elas são dadas por:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Perceba que também podemos escrever tangente como:

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

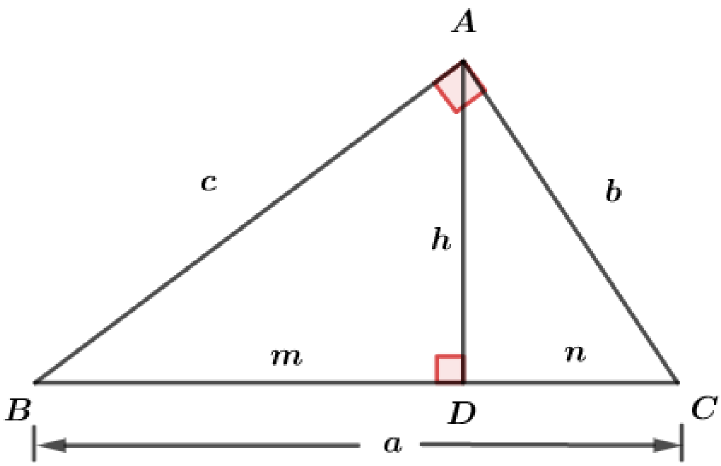
Ainda, das relações do triângulo retângulo, temos o **Teorema de Pitágoras**:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

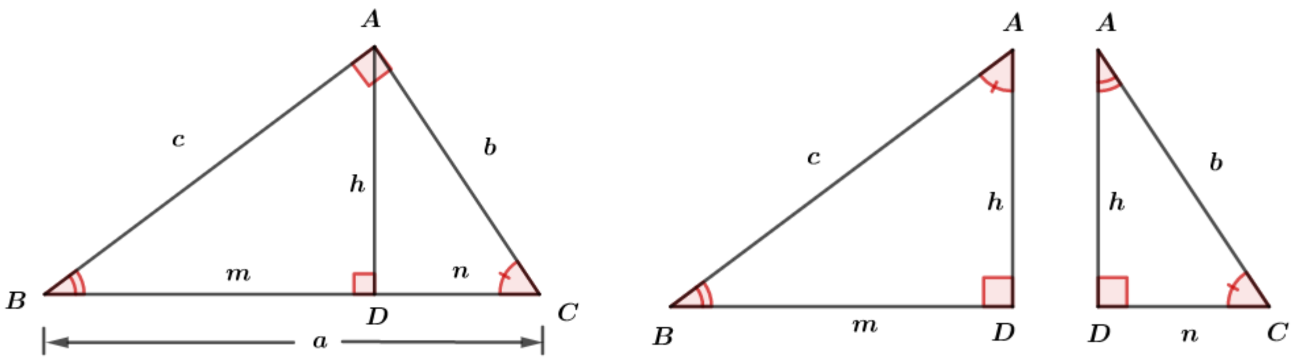
O Teorema de Pitágoras afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração:

Considere o seguinte triângulo ABC:



Note que os triângulos ABC, ABD, CAD são semelhantes:



Assim, podemos escrever a seguinte razão de proporção entre os triângulos semelhantes:

$$ABC \sim ADC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an$$

$$ABC \sim ABD \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am$$

Somando essas duas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am$$

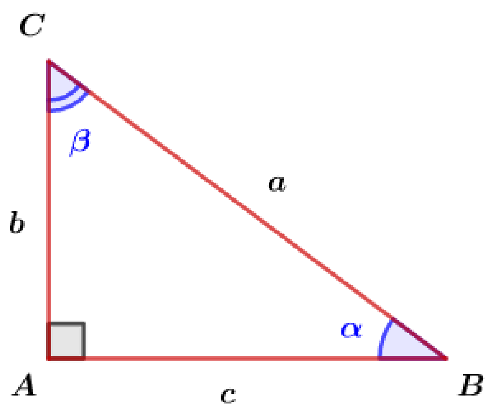
$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $m + n = a$, substituindo na equação, obtemos:

$b^2 + c^2 = a^2$

6.2.1. Relação Fundamental

Dado o seguinte triângulo retângulo, temos:



$$sen\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\ sen\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\ cos\alpha$$

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos a relação fundamental entre seno e cosseno:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (asen\alpha)^2 + (acos\alpha)^2$$

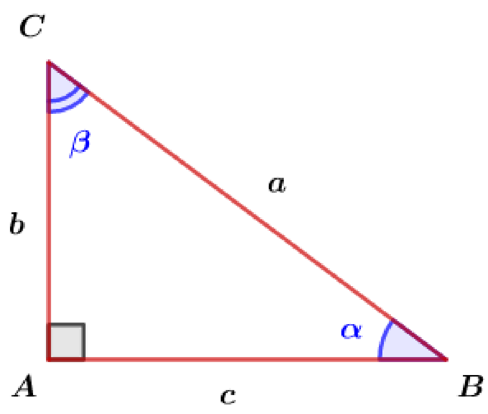
$$a^2 = a^2 sen^2\alpha + a^2 \cos^2 \alpha$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1}}$$

Podemos, então dizer que a soma dos quadrados do seno e cosseno de um ângulo vale 1.

6.2.2. Ângulos Complementares

Das relações do triângulo, temos:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

Na figura, $\hat{A} = \pi/2$. Substituindo na equação acima:

$$\frac{\pi}{2} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\hat{B}}\ \textbf{e}\ \boldsymbol{\hat{C}}\ \textbf{são complementares}$$

Dessa relação, temos as seguintes consequências:

$$sen\alpha = \frac{b}{a}\ e\ cos\beta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = cos\beta$$

$$sen\beta = \frac{c}{a}\ e\ cos\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow sen\beta = cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{b}{c}\ e\ cotg\beta = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = cotg\beta = \frac{1}{tg\beta}$$

$$tg\beta = \frac{c}{b}\ e\ cotg\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow tg\beta = cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

ESQUEMATIZANDO

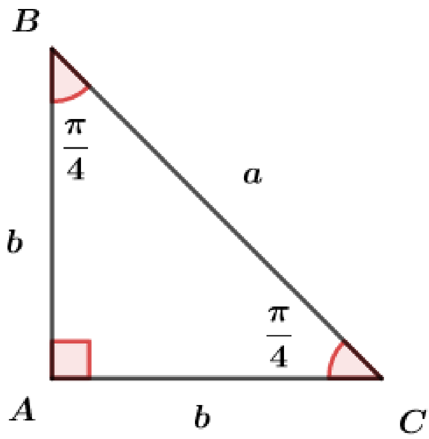
$\boldsymbol{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}}$
$sen\alpha = cos\beta$
$sen\beta = cos\alpha$
$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$
$tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$

6.2.3. Ângulos Notáveis

Os ângulos $\pi/6, \pi/4$ e $\pi/3$ são considerados ângulos notáveis. Vamos calcular o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

1) $\pi/4$:

Considere o seguinte triângulo isósceles:



Através do Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

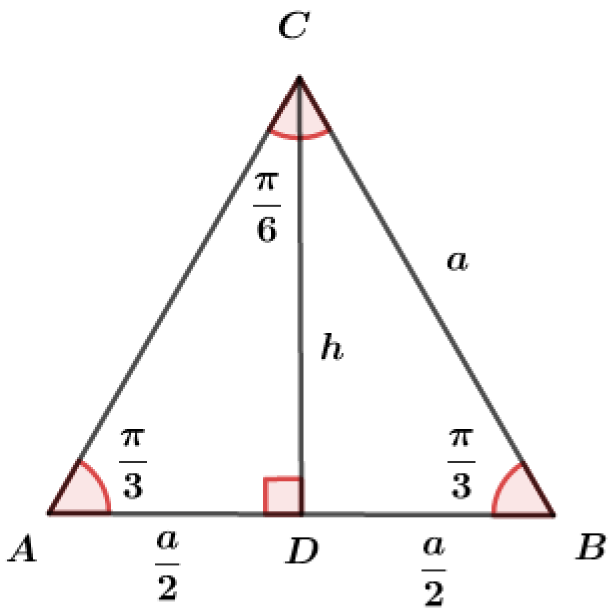
$$a^2 = b^2 + b^2$$
$$a^2 = 2b^2$$
$$a = \sqrt{2}b$$

Usando a definição de seno, cosseno e tangente, obtemos:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{b} = 1$$

2) $\pi/6$ e $\pi/3$:

Agora, considere o triângulo equilátero:



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Calculando o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\pi/6$ e $\pi/3$:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

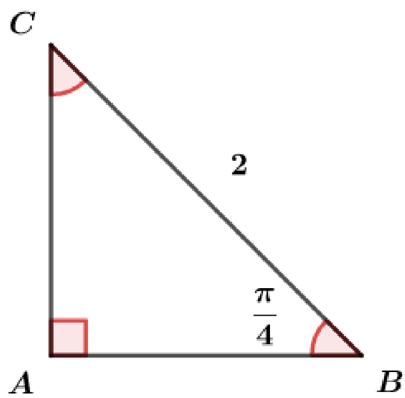
Podemos construir a tabela dos ângulos notáveis:

	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

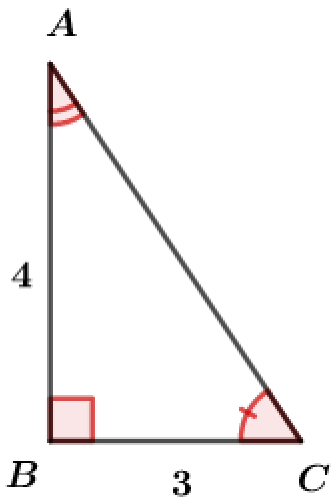
Exercícios de Fixação

18. Dados os triângulos abaixo, calcule o valor dos lados que faltam:

a)



b)



Resolução:

a) Conhecemos o valor do $sen(\pi/4)$, podemos calcular o valor dos catetos usando a seguinte razão:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$AB = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b) Basta aplicar o Teorema de Pitágoras:

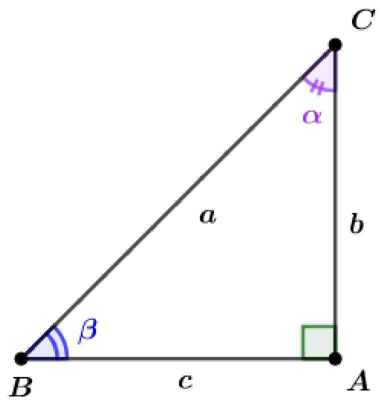
$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AC = \sqrt{25} = 5$$

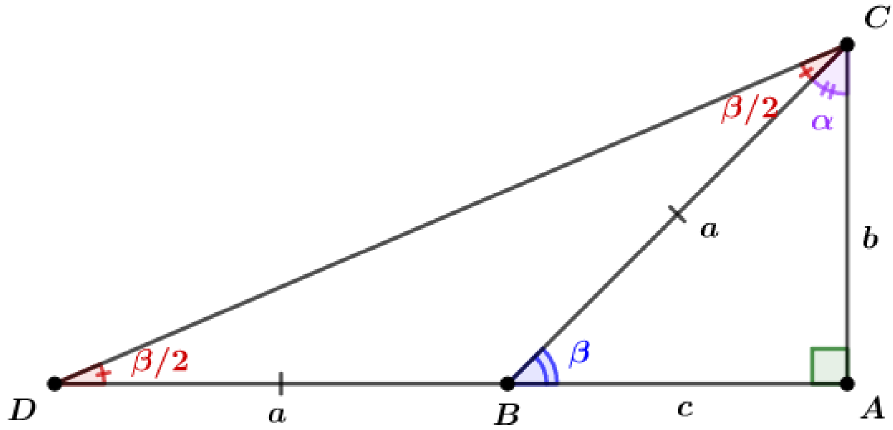
Gabarito: a) $AB = \sqrt{2}$ b) $AC = 5$

6.3. Relação Trigonométrica no Triângulo Retângulo

Podemos usar a geometria plana para encontrar algumas razões trigonométricas não triviais. O bizu para isso é usar a propriedade do triângulo isósceles. Seja o triângulo ABC dado abaixo:



Vamos prolongar o segmento $\overline{AB}$ de modo a obter um triângulo isósceles com $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$.



Perceba que pela propriedade do ângulo externo, temos $B\hat{D}C \equiv B\hat{C}D = \beta/2$.

Podemos calcular as tangentes do triângulo ADC:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{b}{a+c}$$

Dividindo o lado direito da equação por a, temos:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{c}{a}}$$

Do triângulo ABC, podemos escrever:

$$sen\beta = \frac{b}{a}$$

$$cos\beta = \frac{c}{a}$$

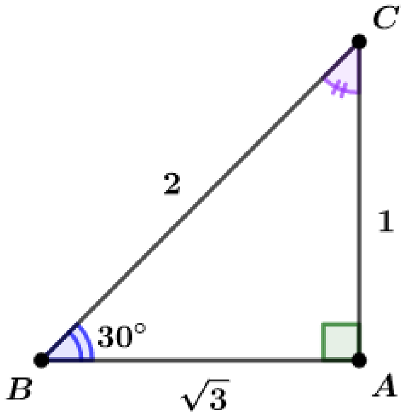
Substituindo na equação da tangente:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{sen\beta}{1+cos\beta}$$

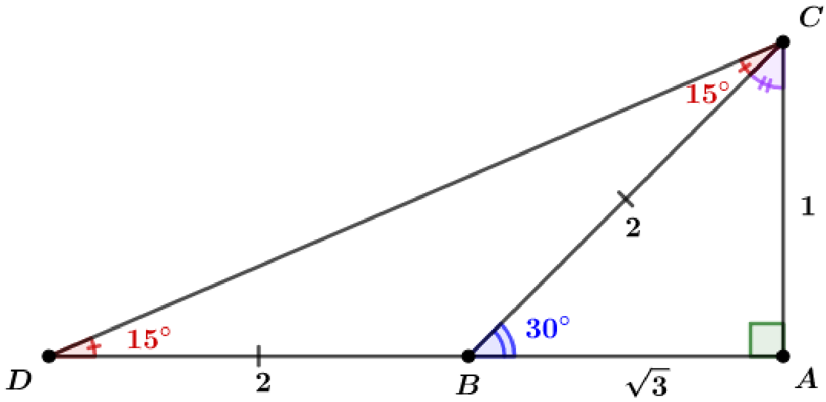
Usando essa ideia, podemos calcular o valor das razões trigonométricas para os ângulos de $15°$ e $22{,}5°$.

6.2.1. $15°$

Vamos construir o triângulo retângulo ABC com $\hat{B} = 30°$. Sabemos que $sen(30°) = 1/2$ e $\cos(30°) = \sqrt{3}/2$:



Prolongando o lado AB de modo a obter um triângulo isósceles, encontramos:



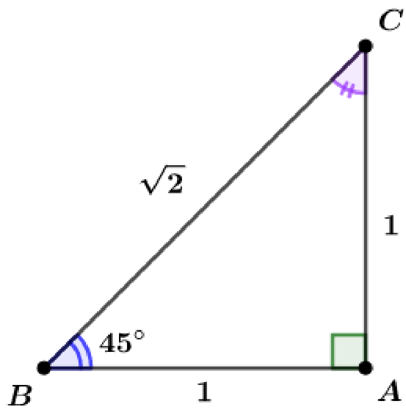
Assim, podemos notar que:

$$tg(15°) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

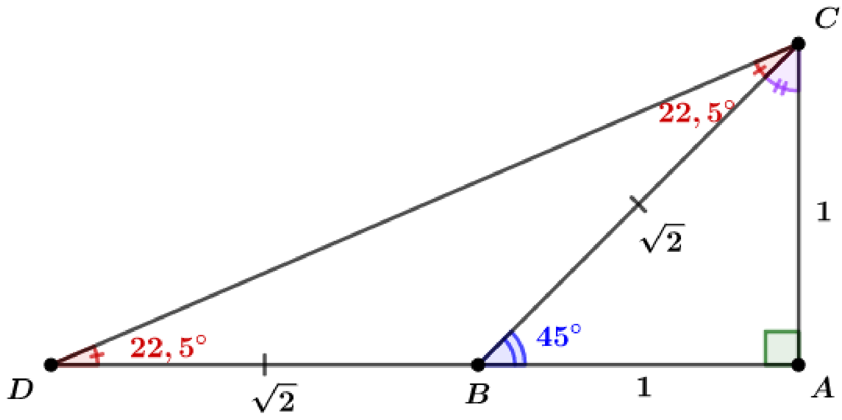
$$tg(15°) = 2-\sqrt{3}$$

6.2.2. $22,5°$

Usando a mesma ideia do item acima, temos:



Prolongando o lado AB:



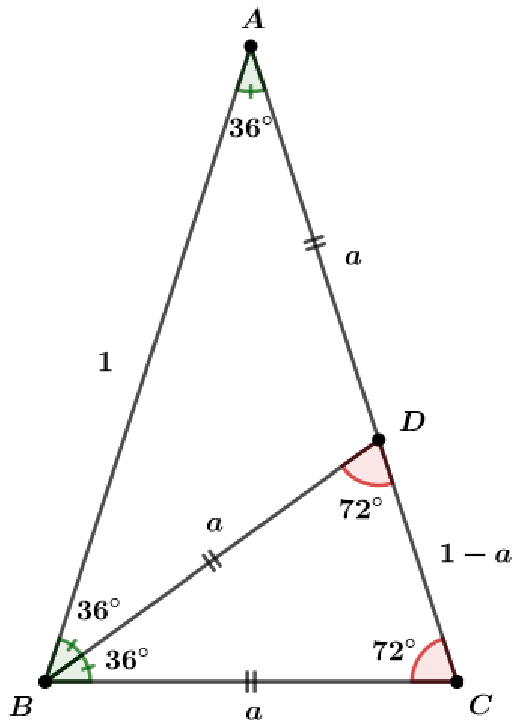
Assim, vemos que:

$$tg(22{,}5°) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$tg(22{,}5°) = \sqrt{2} - 1$$

6.2.3. $36°$

Nesse caso, devemos usar o seguinte triângulo isósceles de lados $AB = AC = 1$:



Note que $\overline{BD}$ é a bissetriz do triângulo ABC no vértice B.

ΔABC e ΔBCD são isósceles.

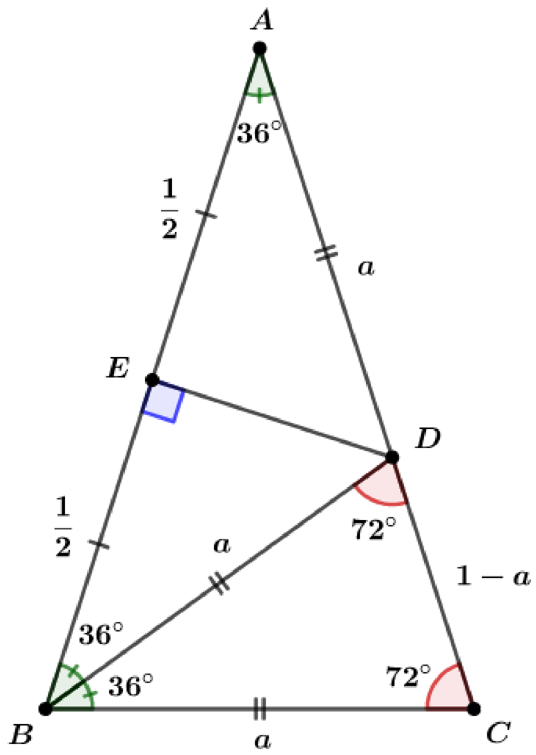
Vamos calcular o valor da base. Usando a semelhança de triângulos:

$$\Delta ABC \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$$

$$1 - a = a^2$$
$$a^2 + a - 1 = 0$$
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Agora, podemos calcular o valor do cosseno de $36°$. Como ΔABD é isósceles com base AB, temos que ED é a sua mediatriz. Assim, temos:



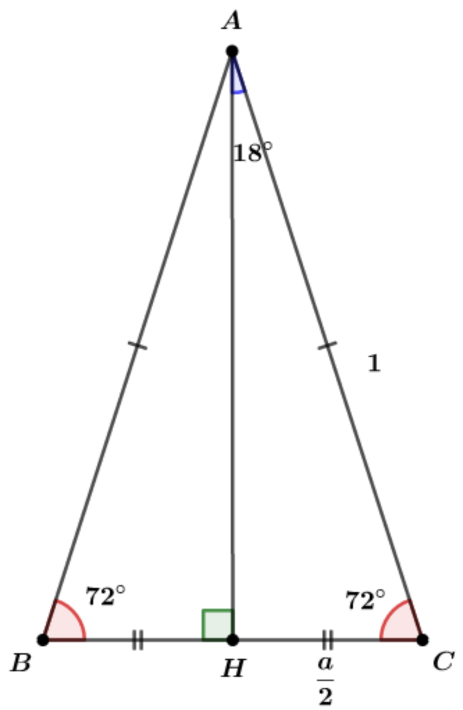
Do triângulo BED, podemos escrever:

$$\cos(36°) = \frac{\frac{1}{2}}{a}$$
$$\cos(36°) = \frac{1}{2a}$$
$$\cos(36°) = \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)}$$
$$\cos(36°) = \frac{1}{\sqrt{5} - 1}$$
$$\therefore \cos(36°) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

Para calcular o valor do seno, basta aplicar o teorema de Pitágoras e encontrar o valor do lado ED.

6.2.4. $18°$

Podemos calcular o valor do seno de $18°$ através do mesmo triângulo do item anterior:



Como ΔABC é isósceles com base BC, temos que AH é a mediatriz do triângulo. Assim, H é o ponto médio da base BC. Desse modo:

$$sen(18°) = \frac{\frac{a}{2}}{1}$$

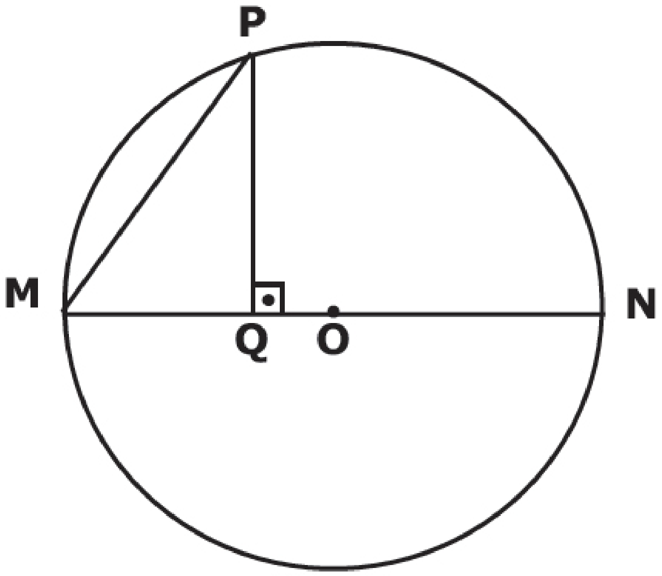
$$sen(18°) = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}$$

$$\therefore sen(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

7. Lista de Questões

19. (EsPCEx/2016)

Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm.



desenho ilustrativo-fora de escala

A medida, em centímetros, do segmento PQ é

a) $\frac{25}{2}$

b) 10

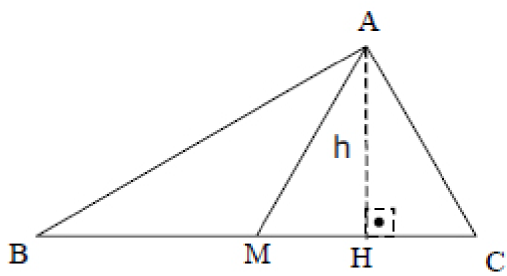
c) $5\sqrt{21}$

d) $\sqrt{21}$

e) $2\sqrt{21}$

20. (EsPCEx/2007)

No triângulo ABC, a base $\overline{BC}$ mede 8 cm, o ângulo $\hat{B}$ mede $30°$ e o segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MC}$, sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$. A medida, em centímetros, da altura h, relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, é de



a) $\sqrt{2}$ cm

b) $2\sqrt{2}$ cm

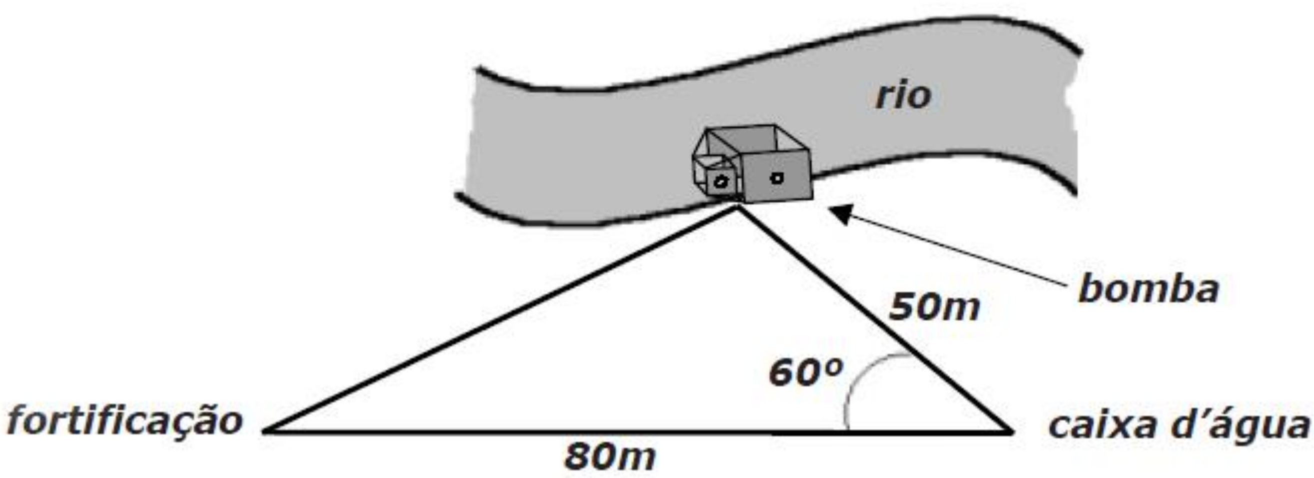
c) $\sqrt{3}$ cm

d) $2\sqrt{3}\ cm$

e) $3\sqrt{3}\ cm$

21. (EsPCEx/2005)

A água utilizada em uma fortificação é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água localizada a $50\ m$ de distância da bomba. A fortificação está a $80\ m$ de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções bomba – caixa d'água e caixa d'água – fortificação é de $60°$, conforme mostra a figura abaixo.



Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a fortificação, quantos metros de tubulação são necessários?

a) 54 metros.

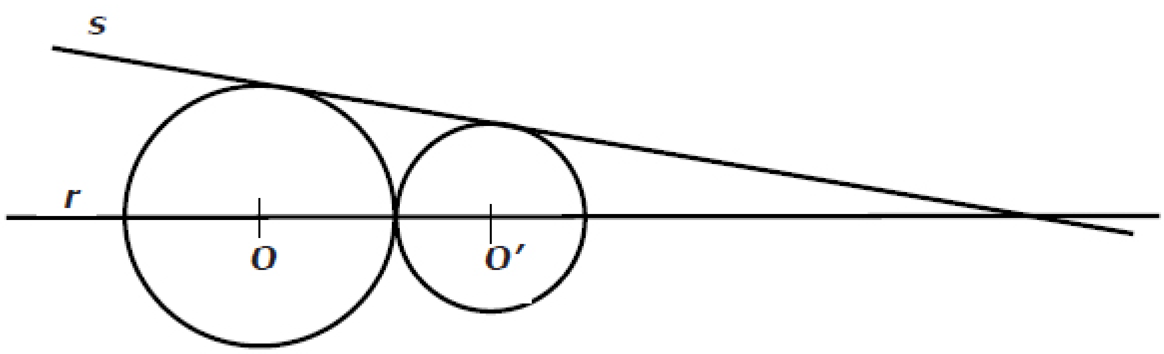
b) 55 metros.

c) 65 metros.

d) 70 metros.

e) 75 metros.

22. (EsPCEx/2005)



Na figura, as circunferências são tangentes entre si e seus raios estão na razão $\frac{1}{3}$. Se a reta r passa pelos centros O e O' das duas circunferências, e a reta s é tangente a ambas, então o menor ângulo formado por essas duas retas mede

a) $\text{arcsen}\,\frac{1}{3}$

b) $\text{arctg}\,\frac{1}{2}$

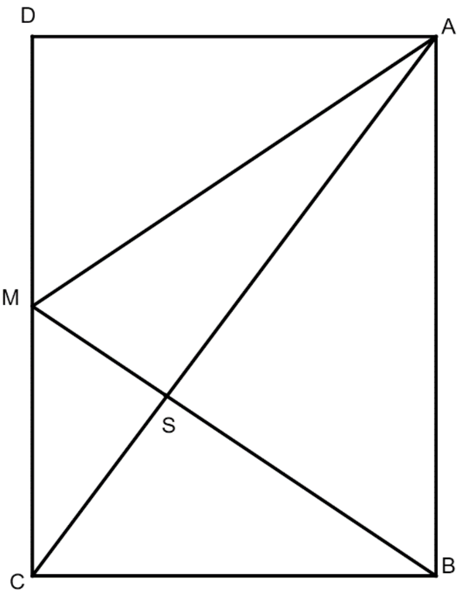
c) $60°$

d) $45°$

e) $30°$

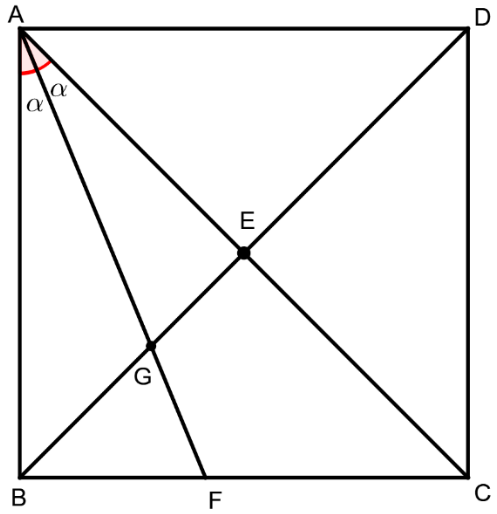
23. (Tópicos de Matemática)

Na figura $\boldsymbol{ABCD}$ é um retângulo, $\boldsymbol{M}$ é o ponto médio de $\boldsymbol{CD}$ e o triângulo $\boldsymbol{ABM}$ é equilátero. Se $\boldsymbol{AB = 15m}$, calcule $\boldsymbol{BS}$.



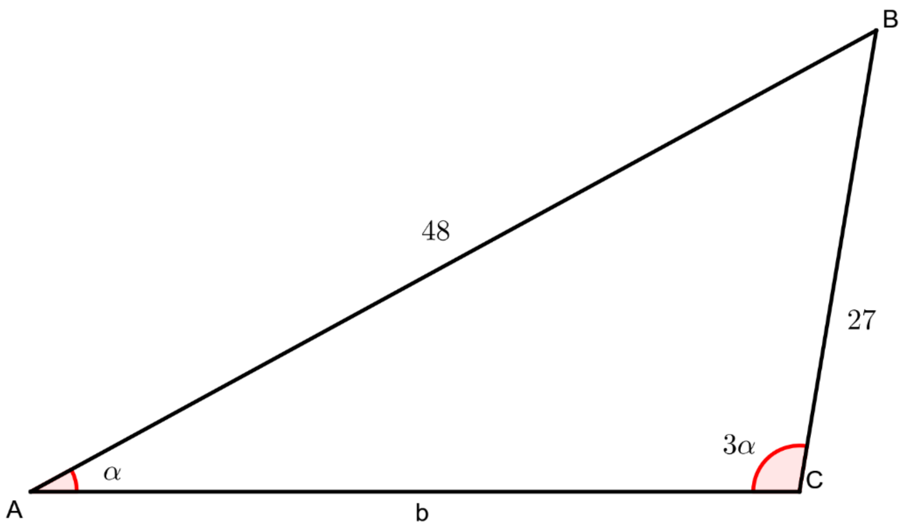
24. (Tópicos de Matemática)

Em um quadrado $\boldsymbol{ABCD}$, $\boldsymbol{AC}$ e $\boldsymbol{BD}$ se interceptam em $\boldsymbol{E}$. O ponto $\boldsymbol{F}$ sobre $\boldsymbol{BC}$ é tal que os ângulos $\boldsymbol{C\hat{A}F}$ e $\boldsymbol{F\hat{A}B}$ são iguais, se $\boldsymbol{AF}$ intersecta $\boldsymbol{BD}$ em $\boldsymbol{G}$ e se $\boldsymbol{EG = 24}$, determine $\boldsymbol{CF}$.



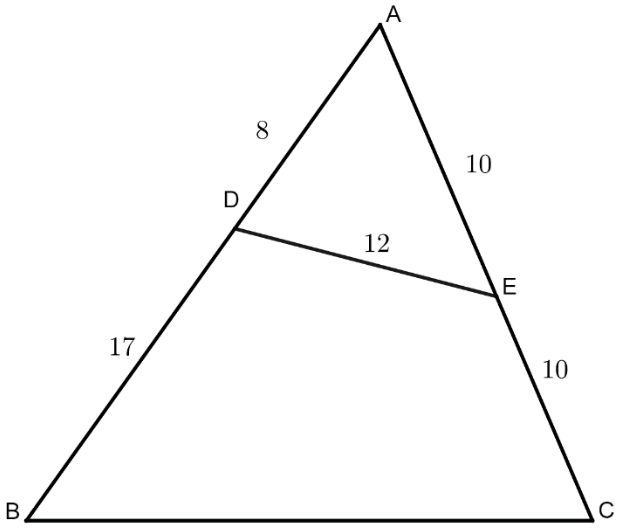
25. (Tópicos de Matemática)

No triângulo $\boldsymbol{ABC}$ (obtusângulo) da figura abaixo, determine a medida $\boldsymbol{b}$ do lado $\boldsymbol{AC}$.



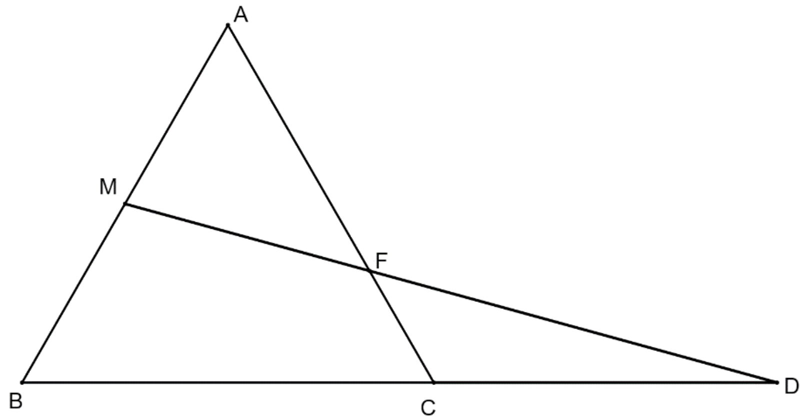
26. (Tópicos de Matemática)

No triângulo $\boldsymbol{ABC}$ da figura abaixo, determine a medida do lado $\boldsymbol{BC}$.



27. (Mack/1978)

O triângulo $\boldsymbol{ABC}$ da figura é equilátero. $\boldsymbol{AM = MB = 10}$ e $\boldsymbol{CD = 12}$. Calcule o valor de $\boldsymbol{FC}$.



28. (CN/2019)

A circunferência λ, inscrita no triângulo retângulo ABC, tangencia a hipotenusa BC, dividindo-a em dois segmentos de reta de medidas $'p'$ e $'q'$, a partir desse ponto de tangência. A média geométrica dos catetos $'b'$ e $'c'$ desse triângulo é igual a:

a) $(pq)^2$

b) $(2pq)^2$

c) $\sqrt{pq}$

d) $\sqrt{2pq}$

e) $\sqrt{\frac{pq}{2}}$

29. (CN/2017)

Analise as afirmativas a seguir.

I. Sejam a, b e c lados de um triângulo, com $c > b > a$. Pode-se afirmar que $c^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se, o triângulo for retângulo.

II. Se um triângulo é retângulo, então as bissetrizes internas dos ângulos agudos formam entre si um ângulo de 45° ou 135°.

III. O centro de um círculo circunscrito a um triângulo retângulo está sobre um dos catetos.

IV. O baricentro de um triângulo retângulo é equidistante dos lados do triângulo.

Assinale a opção correta.

a) Somente I e II são verdadeiras.

b) Somente II e III são verdadeiras.

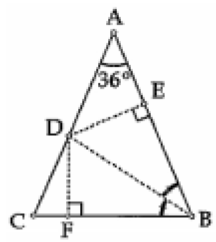
c) Somente I e IV são verdadeiras.

d) Somente I, II e IV são verdadeiras.

e) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.

30. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura a acima mostra um triângulo isósceles ABC, com BÂC = 36° e AB = AC = 1 m. A bissetriz interna de B corta AC em D. Por D, traçam-se as distâncias até AB e até BC, determinando os pontos E e F, respectivamente. Sendo assim, é correto afirmar que o valor do produto $\frac{DE}{AD} \cdot \frac{DF}{BF}$ é

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{5}-1}{2}$

e) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

31. (CN/2016)

Analise as afirmativas abaixo:

I. Todo triângulo retângulo de lados inteiros e primos entre si possui um dos lados múltiplo de 5.

II. Em um triângulo retângulo, o raio do círculo inscrito é igual ao perímetro do triângulo menos a hipotenusa.

III. Há triângulos que não admitem triângulo órtico, ou seja, o triângulo formado pelos pés das alturas.

IV. O raio do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o dobro da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

b) Apenas as afirmativas I e IV são verdadeiras.

c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.

32. (CN/2015)

Qual a medida da maior altura de um triângulo de lados 3, 4 e 5?

a) $\frac{12}{5}$

b) 3

c) 4

d) 5

e) $\frac{20}{3}$

33. (CN/2014)

Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados AC = b e BC = a. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

a) $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{a^3}{b^2}$

c) $\frac{a^2}{b^3}$

d) $\frac{a^3}{b^3}$

e) $\frac{a}{b}$

34. (CN/2013)

Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III. Se M é ponto médio de BC e $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, ABC é retângulo.

IV. Se ABC é retângulo, então o raio do seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

35. (CN/2010)

Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é k, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

a) $\frac{5k}{2}$

b) $\frac{4k}{3}$

c) $\frac{4k}{5}$

d) $\frac{k}{2}$

e) $\frac{k}{3}$

36. (CN/2009)

Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{med(BH)}{med(IH)}$ é igual a:

a) $\frac{med(BC)}{med(AH)}$

b) $\frac{med(BC)}{med(AD)}$

c) $\frac{med(BC)}{med(CD)}$

d) $\frac{med(AD)}{med(AI)}$

e) $\frac{med(AD)}{med(IH)}$

37. (CN/2008)

Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a

a) 6,5

b) 7,0

c) 7,5

d) 8,0

e) 8,5

38. (CN/2008)

Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P coplanar com ABC. Sabendo-se que P é equidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo BPC tem medida igual a 25°, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:

a) 25°

b) 45°

c) 50°

d) 65°

e) 85°

39. (CN/2005)

No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre

a) 0 e 1

b) 1 e 2

c) 2 e 3

d) 3 e 4

e) 4 e 5

40. (CN/2005)

Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo BAC é igual a 90°. Sabe-se que AB = c, AC = b e BC = a. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP = \frac{(c+b)\cdot(c-b)}{a}$, o perímetro do triângulo a APC é dado pela expressão:

a) $\frac{2b\cdot(a+b)}{a}$

b) $\frac{2c\cdot(a+b)}{a}$

c) $\frac{2b\cdot(b+c)}{a}$

d) $\frac{2c\cdot(b+c)}{a}$

e) $\frac{2b\cdot(a+c)}{a}$

41. (CN/2003)

Quantos são os pontos de um plano α que estão equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC contido em α?

a) Um.

b) Dois.

c) Três.

d) Quatro.

e) Cinco.

42. (CN/1998)

Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5cm e base medindo 8cm. A distância entre seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:

a) 0,1 cm

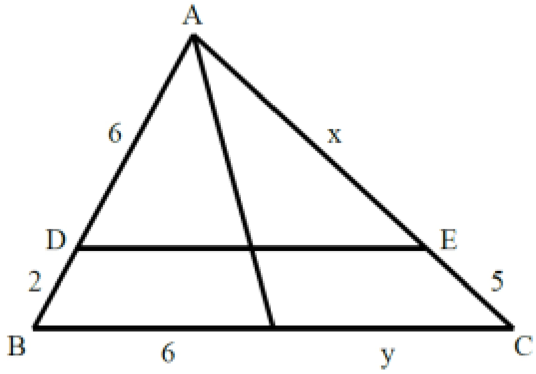
b) 0,3 cm

c) 0,5 cm

d) 0,7 cm

e) 0,9 cm

43. (CN/1998)



Na figura acima, DE é paralelo a BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC. Então $x + y$ é igual a:

a) 15

b) 20

c) 25

d) 30

e) 35

8. Gabarito

GABARITO

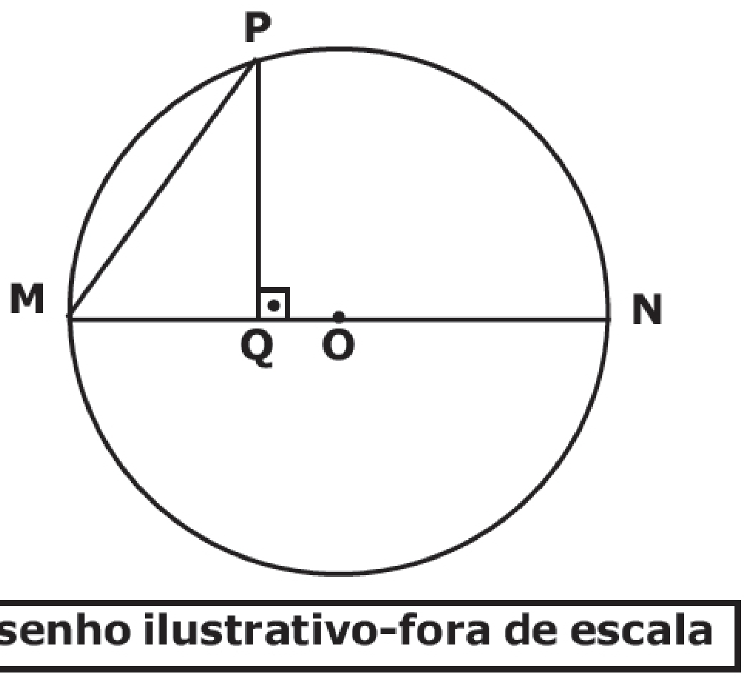
19. e
20. d
21. d
22. e
23. $BS = 10$
24. $CF = 48$
25. $b = 35$
26. $BC = 30$
27. $FC = 60/11$
28. d
29. a
30. b
31. a
32. c
33. a
34. d
35. e

36. c
37. c
38. Anulada
39. b
40. a
41. d
42. b
43. d

9. Lista de Questões Comentadas

19. (EsPCEx/2016)

Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm.



A medida, em centímetros, do segmento PQ é

a) $\frac{25}{2}$

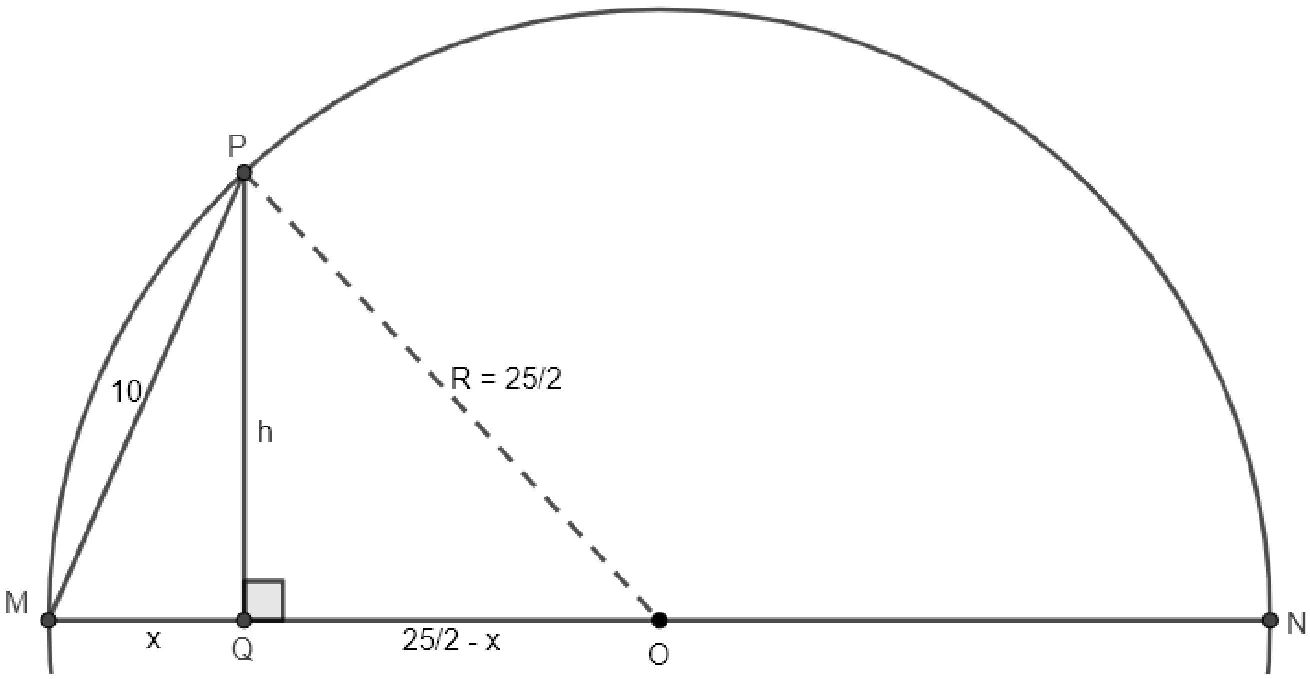
b) 10

c) $5\sqrt{21}$

d) $\sqrt{21}$

e) $2\sqrt{21}$

Comentário:



Vamos calcular o valor de $h = PQ$ utilizando o teorema de Pitágoras.

No triângulo ΔMQP:

$$10^2 = h^2 + x^2$$

No triângulo ΔOQP:

$$\left(\frac{25}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{25}{2} - x\right)^2$$

Fazendo a diferença entre as duas equações, e usando que $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$, temos:

$$10^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2 = x^2 - \left(\frac{25}{2} - x\right)^2 \Leftrightarrow \left(10 - \frac{25}{2}\right)\left(10 + \frac{25}{2}\right) = \left(x - \left(\frac{25}{2} - x\right)\right)\left(x + \left(\frac{25}{2} - x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\cdot\frac{45}{2} = \left(2x - \frac{25}{2}\right)\cdot\frac{25}{2} \Leftrightarrow -225 = (4x - 25)\cdot 25 \Leftrightarrow -9 = 4x - 25 \Leftrightarrow 4x = 16$$

$$\therefore x = 4.$$

Retornando esse valor na primeira equação, temos:

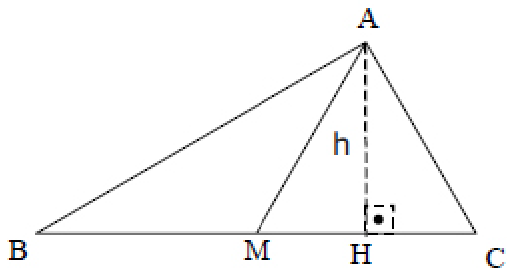
$$10^2 = h^2 + 4^2 \Leftrightarrow 100 = h^2 + 16 \Leftrightarrow h^2 = 84 \therefore h = 2\sqrt{21}.$$

Gabarito: “e”.

---

20. (EsPCEx/2007)

No triângulo ABC, a base $\overline{BC}$ mede $8\ cm$, o ângulo $\hat{B}$ mede $30°$ e o segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MC}$, sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$. A medida, em centímetros, da altura h, relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, é de



a) $\sqrt{2}\ cm$

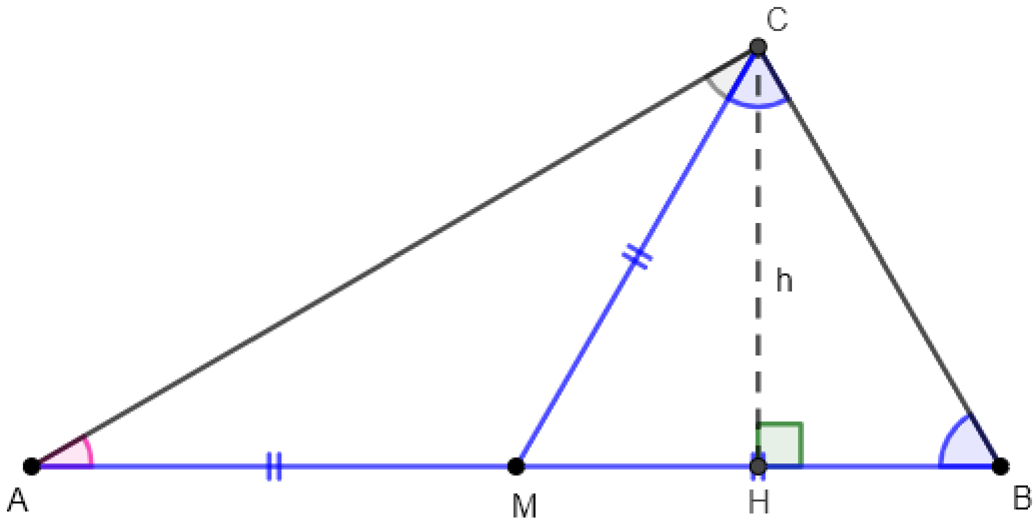
b) $2\sqrt{2}\ cm$

c) $\sqrt{3}\ cm$

d) $2\sqrt{3}\ cm$

e) $3\sqrt{3}\ cm$

Comentário:



Sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overline{BM} = \overline{MC}$.

Do enunciado, $\overline{AM} = \overline{MC}$. Portanto, $\overline{AM} = \overline{BM} \Rightarrow \Delta MAB$ é isósceles de base $\overline{AB} \Rightarrow M\hat{A}B = M\hat{B}A = 30°$.

Pelo teorema do ângulo externo, temos que $C\widehat{M}A = M\hat{A}B + M\hat{B}A = 30° + 30° = 60°$.

Como $\overline{AM} = \overline{MC}$, temos que ΔMAC é isósceles de base $\overline{AC} \Rightarrow M\hat{A}C = M\hat{C}A = \alpha$.

A soma dos ângulos do ΔMAC deve ser $180° \Rightarrow 180° = M\hat{A}C + M\hat{C}A + C\widehat{M}A = \alpha + \alpha + 60° \Leftrightarrow 2\alpha + 60° = 180° \therefore \alpha = 60°$. Portanto, o triângulo ΔMAC é equilátero.

Como $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\overline{BC}$ mede $8\ cm$, temos que $MC = 4\ cm$ é o lado do triângulo equilátero ΔMAC.

A altura de um triângulo equilátero, dado seu lado l, é $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Portanto $h = \overline{AH}$, na figura, vale:

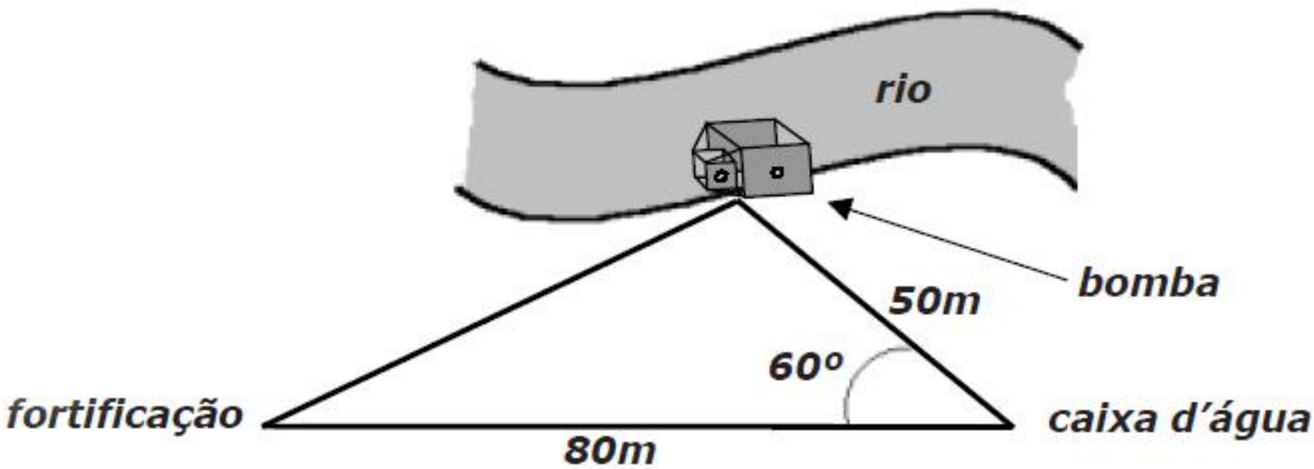
$$h = \frac{\overline{MC}\sqrt{3}}{2} = \frac{(4\ cm) \cdot \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ cm.$$

Gabarito: “d”.

---

21. (EsPCEx/2005)

A água utilizada em uma fortificação é captada e bombeada do rio para uma caixa d’água localizada a $50\ m$ de distância da bomba. A fortificação está a $80\ m$ de distância da caixa d’água e o ângulo formado pelas direções bomba – caixa d’água e caixa d’água – fortificação é de $60°$, conforme mostra a figura abaixo.



Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a fortificação, quantos metros de tubulação são necessários?

a) 54 metros.

b) 55 metros.

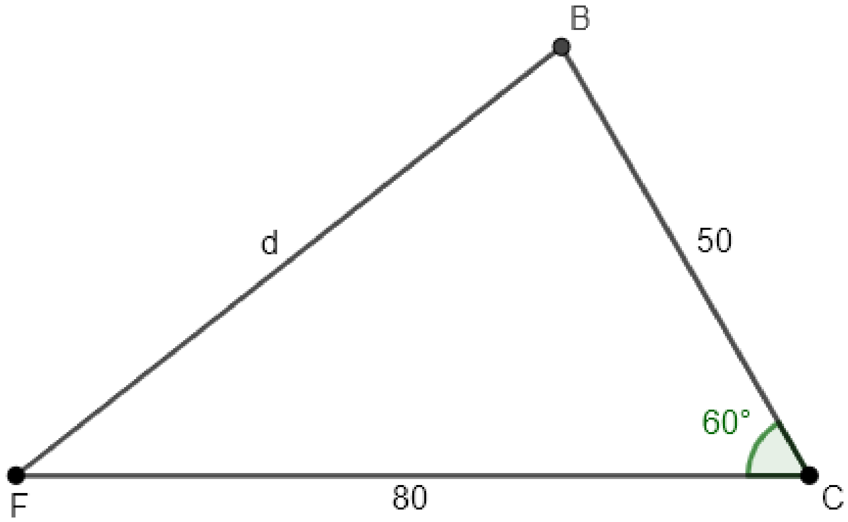
c) 65 metros.

d) 70 metros.

e) 75 metros.

Comentário:

O resultado segue pela lei dos cossenos. Na figura a seguir, B é a bomba, C é a caixa d’agua e F é a fortificação.



Pela lei dos cossenos,

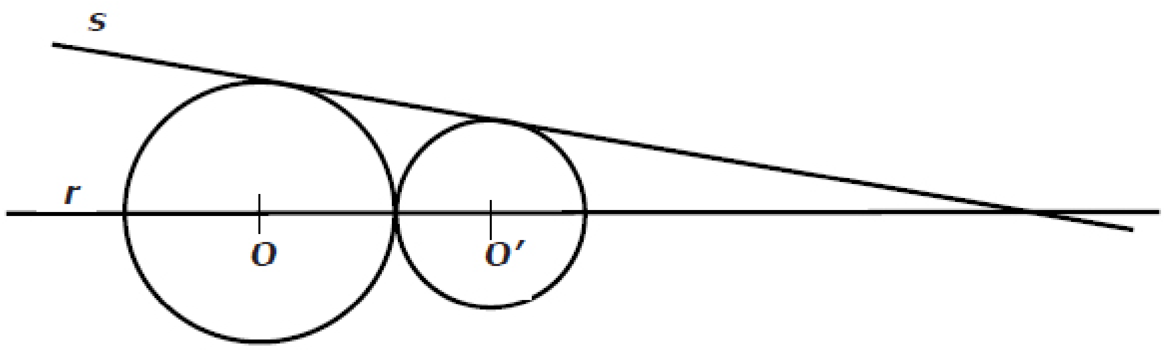
$$d^2 = \overline{BC}^2 + \overline{FC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{FC} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow d^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$$
$$= 2500 + 6400 - 8000 \cdot \frac{1}{2} = 4900 \therefore d = \sqrt{4900} = 70.$$

Resposta: a distância d entre a bomba e a fortificação é, em linha reta, de 70 metros.

Gabarito: "d".

---

22. (EsPCEx/2005)



Na figura, as circunferências são tangentes entre si e seus raios estão na razão $\frac{1}{3}$. Se a reta r passa pelos centros O e O' das duas circunferências, e a reta s é tangente a ambas, então o menor ângulo formado por essas duas retas mede

a) $\text{arcsen}\frac{1}{3}$

b) $\text{arctg}\frac{1}{2}$

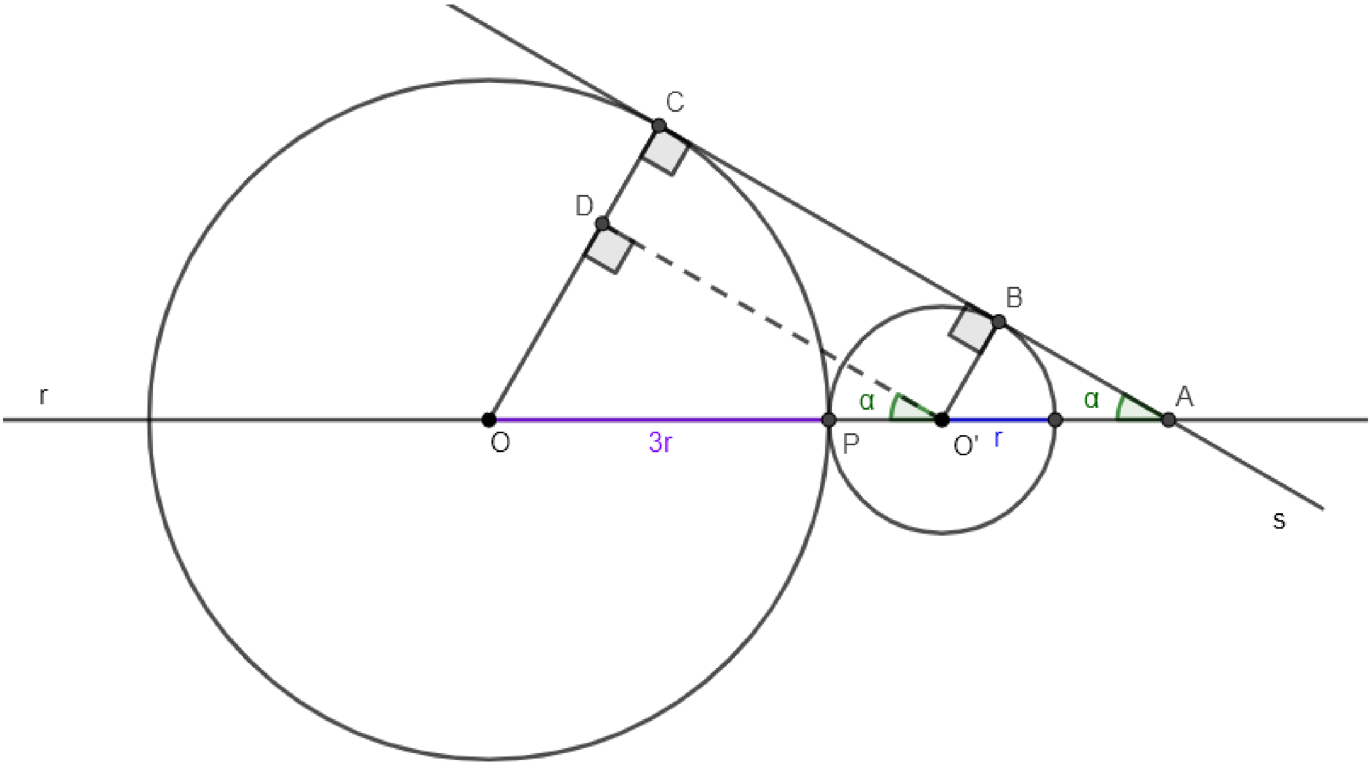
c) $60°$

d) $45°$

e) $30°$

Comentário:

Uma representação mais fidedigna da situação seria:



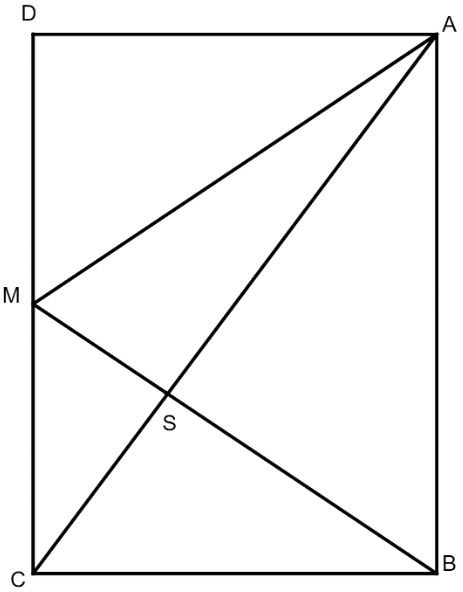
Sendo a razão entre os raios $\frac{1}{3}$, podemos dizer que o menor mede r e o maior mede $3r$. Sejam B e C os pontos de tangência na reta s das circunferências menor e maior, respectivamente. Seja D a projeção sobre OC de O'. Temos $O\widehat{O'}D = O\hat{A}C = \alpha$. Então:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{OD}{OO'} = \frac{OC - DC}{OP + PO'} = \frac{OC - O'B}{OP + O'P} = \frac{3r - r}{3r + r} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2} \therefore \alpha = 30°$$

Gabarito: “e”.

23. (Tópicos de Matemática)

Na figura $\boldsymbol{ABCD}$ é um retângulo, $\boldsymbol{M}$ é o ponto médio de $\boldsymbol{CD}$ e o triângulo $\boldsymbol{ABM}$ é equilátero. Se $\boldsymbol{AB = 15m}$, calcule $\boldsymbol{BS}$.



Comentários

Como o triângulo ABM é equilátero, temos $BM = MA = AB = 15$.

Além disso, dado que M é ponto médio de CD, temos $DM = MC = 7{,}5$.

Seja $BS = x$, então $MS = BM - BS = 15 - x$.

Veja que os triângulos ABS e CSM são semelhantes pelo caso AA, então temos:

$$\frac{MS}{BS} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{15 - x}{x} = \frac{7{,}5}{15} = \frac{1}{2} \Rightarrow 30 - 2x = x \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$$

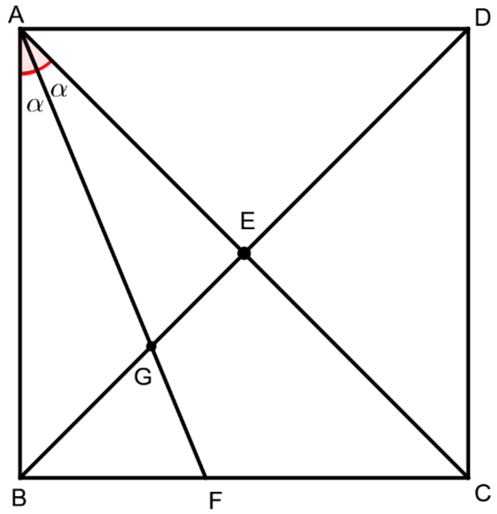
Portanto $BS = 10$.

Gabarito: $\boldsymbol{BS = 10}$

---

24. (Tópicos de Matemática)

Em um quadrado $\boldsymbol{ABCD}$, $\boldsymbol{AC}$ e $\boldsymbol{BD}$ se interceptam em $\boldsymbol{E}$. O ponto $\boldsymbol{F}$ sobre $\boldsymbol{BC}$ é tal que os ângulos $\boldsymbol{C\hat{A}F}$ e $\boldsymbol{F\hat{A}B}$ são iguais, se $\boldsymbol{AF}$ intersecta $\boldsymbol{BD}$ em $\boldsymbol{G}$ e se $\boldsymbol{EG = 24}$, determine $\boldsymbol{CF}$.



Comentários

Como AC é diagonal do quadrado, temos $2\alpha = 45°$ e o ΔABE é retângulo em E. Dessa forma, temos:

$$\Delta ABF \Rightarrow tg\alpha = \frac{BF}{AB}\ (I)$$

$$\Delta AEG \Rightarrow tg\alpha = \frac{EG}{EA}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{BF}{AB} = \frac{EG}{EA}$$

Mas $EA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ e $EG = 24$, logo:

$$\frac{BF}{AB} = \frac{24}{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{BF = 24\sqrt{2}}$$

Além disso, de (I):

$$AB = \frac{BF}{tg\alpha}\ (II)$$

Sabendo que:

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga\, tgb}$$

Sendo $a = b = 22{,}5° = \alpha$, temos:

$$tg\ 45° = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$$

$$tg\alpha = -1 \pm \sqrt{2}$$

Mas $0° < \alpha < 90°$, logo, $tg\alpha > 0$. Assim:

$$tg\alpha = \sqrt{2} - 1$$

Substituindo em (II):

$$AB = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\boxed{AB = 24 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) = BC}$$

Por fim:

$$CF = BC - BF = 24 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) - 24\sqrt{2}$$

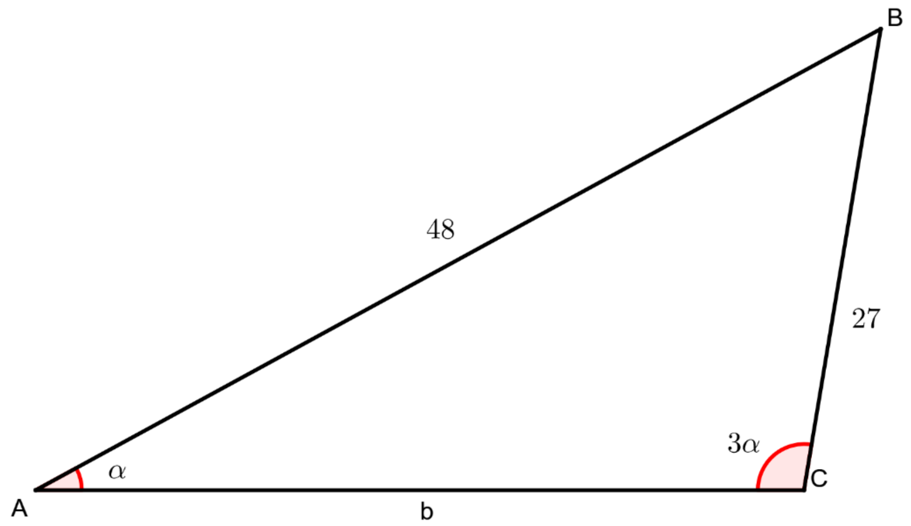
$$\boxed{CF = 48}$$

Gabarito: $CF = 48$

---

25. (Tópicos de Matemática)

No triângulo ABC (obtusângulo) da figura abaixo, determine a medida b do lado AC.



Comentários

Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{27}{sen\ \alpha} = \frac{48}{sen\ 3\alpha} = \frac{b}{sen\ (180 - 4\alpha)} = \frac{b}{sen\ 4\alpha}$$

Mas $sen\ 3\alpha$ pode ser escrito como:

$$sen\ 3\alpha = sen\ \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot sen\ 2\alpha$$

$$sen\ 3\alpha = sen\ \alpha \cdot (2cos^2\ \alpha - 1) + 2\ sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha$$

$$\Rightarrow sen\ 3\alpha = sen\ \alpha \cdot (4cos^2\ \alpha - 1)$$

Substituindo $sen\ 3\alpha$ na razão encontrada acima, temos:

$$\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{48}{sen\ 3\alpha}\Rightarrow\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{48}{sen\ \alpha\cdot(4cos^2\ \alpha-1)}$$

Sendo α ângulo interno do triângulo, temos $sen\ \alpha\neq 0$, logo:

$$4cos^2\ \alpha-1=\frac{48}{27}=\frac{16}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{5}{6}$$

Podemos escrever $sen\ 4\alpha$ como:

$$sen\ 4\alpha=2sen\ 2\alpha\cos 2\alpha$$

$$sen\ 4\alpha=4\ sen\ \alpha\cdot\cos\alpha\cdot(2cos^2\ \alpha-1)$$

Substituindo $sen\ 4\alpha$ e $cos\ \alpha$ temos:

$$\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{b}{sen\ 4\alpha}\Rightarrow\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{b}{4\ sen\ \alpha\cdot\cos\alpha\cdot(2cos^2\ \alpha-1)}$$

$$b=4\cdot 27\cdot\cos\alpha\cdot(2cos^2\ \alpha-1)$$

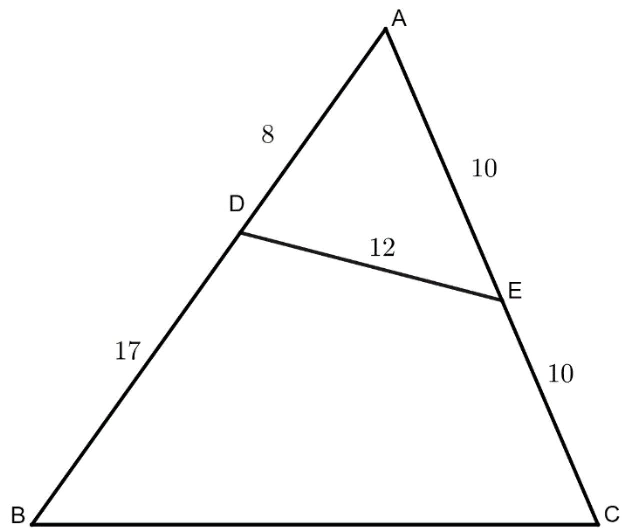
$$b=4\cdot 27\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(2\frac{25}{36}-1\right)=35$$

Gabarito: $b=35$

---

26. (Tópicos de Matemática)

No triângulo $\boldsymbol{ABC}$ da figura abaixo, determine a medida do lado $\boldsymbol{BC}$.



Comentários

Perceba as seguintes relações:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{10}{8+17}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

Então, pelo caso LAL, os triângulos ADE e ACB são semelhantes. Portanto:

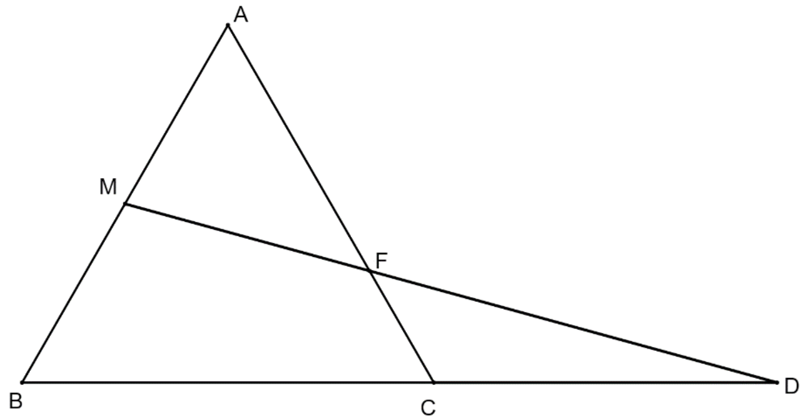
$$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{12}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 30$$

Gabarito: $\boldsymbol{BC = 30}$

---

27. (Mack/1978)

O triângulo $\boldsymbol{ABC}$ da figura é equilátero. $\boldsymbol{AM = MB = 10}$ e $\boldsymbol{CD = 12}$. Calcule o valor de $\boldsymbol{FC}$.



Comentários

Como o triângulo ABC é equilátero, temos:

$$AB = BC = CA = 20$$

Assim:

$$BD = BC + CD = 20 + 12 = 32$$

Pelo teorema de Menelaus, temos que:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{32}{12} \cdot \frac{CF}{20 - CF} \cdot \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow 8CF = 3(20 - CF) \Rightarrow \boxed{FC = \frac{60}{11}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{FC = \frac{60}{11}}$

---

28. (CN/2019)

A circunferência λ, inscrita no triângulo retângulo ABC, tangencia a hipotenusa BC, dividindo-a em dois segmentos de reta de medidas $'p'$ e $'q'$, a partir desse ponto de tangência. A média geométrica dos catetos $'b'$ e $'c'$ desse triângulo é igual a:

a) $(pq)^2$

b) $(2pq)^2$

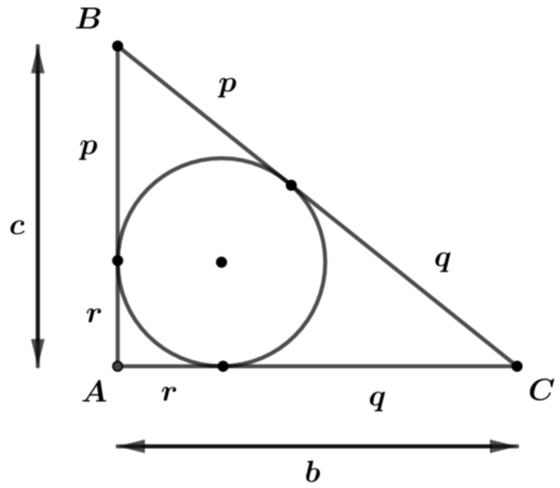
c) $\sqrt{pq}$

d) $\sqrt{2pq}$

e) $\sqrt{\frac{pq}{2}}$

Comentários

Observe a seguinte figura:



Queremos:

$$\sqrt{bc}$$

Da figura, podemos escrever:

$$r = c - p = b - q \Rightarrow c - b = p - q \Rightarrow c^2 + b^2 - 2bc = (p - q)^2$$

Além disso, do teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = (p + q)^2$$

Logo, temos que:

$$(p + q)^2 - 2bc = (p - q)^2 \Rightarrow (p + q)^2 - (p - q)^2 = 2bc$$

Fatorando o lado esquerdo:

$$(p + q + p - q)(p + q - p + q) = 2bc \Rightarrow 4pq = 2bc \Rightarrow bc = 2pq$$

Do que segue que:

$$\sqrt{bc} = \sqrt{2pq}$$

Gabarito: "d".

---

29. (CN/2017)

Analise as afirmativas a seguir.

I. Sejam a, b e c lados de um triângulo, com $c > b > a$. Pode-se afirmar que $c^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se, o triângulo for retângulo.

II. Se um triângulo é retângulo, então as bissetrizes internas dos ângulos agudos formam entre si um ângulo de 45° ou 135°.

III. O centro de um círculo circunscrito a um triângulo retângulo está sobre um dos catetos.

IV. O baricentro de um triângulo retângulo é equidistante dos lados do triângulo.

Assinale a opção correta.

a) Somente I e II são verdadeiras.

b) Somente II e III são verdadeiras.

c) Somente I e IV são verdadeiras.

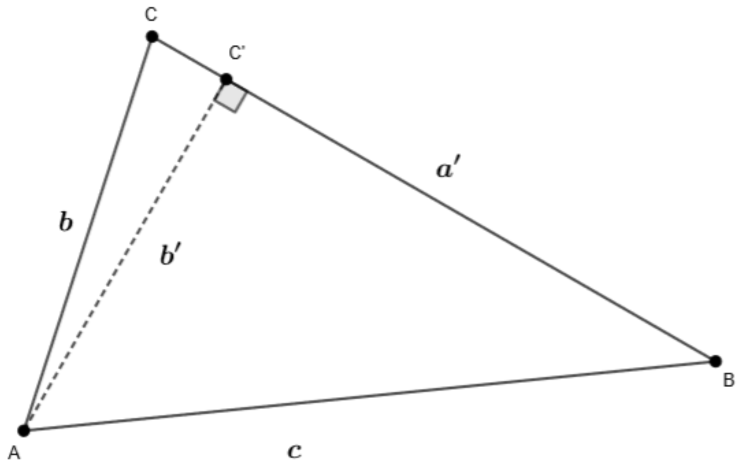
d) Somente I, II e IV são verdadeiras.

e) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.

Comentários

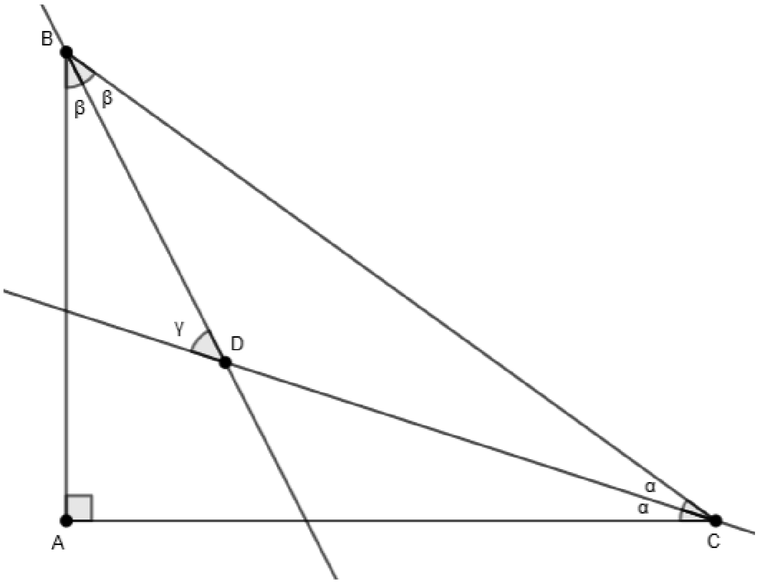
Vamos analisar cada afirmativa.

I. Se um triângulo é retângulo, o teorema de Pitágoras nos garante que $c^2 = a^2 + b^2$. Suponha então, por absurdo, que $c^2 = a^2 + b^2$ e o triângulo é acutângulo:



Veja que $b' < b$ e $a' < BC = a$, ou seja, $a'^2 + b'^2 < a^2 + b^2 = c^2$. Mas isso é um absurdo, pois no triângulo retângulo $\Delta ABC'$ também vale que $a'^2 + b'^2 = c^2$.
Um argumento análogo funciona para um triângulo obtusângulo.
Portanto, a afirmativa é verdadeira.

II. Observe a figura abaixo:

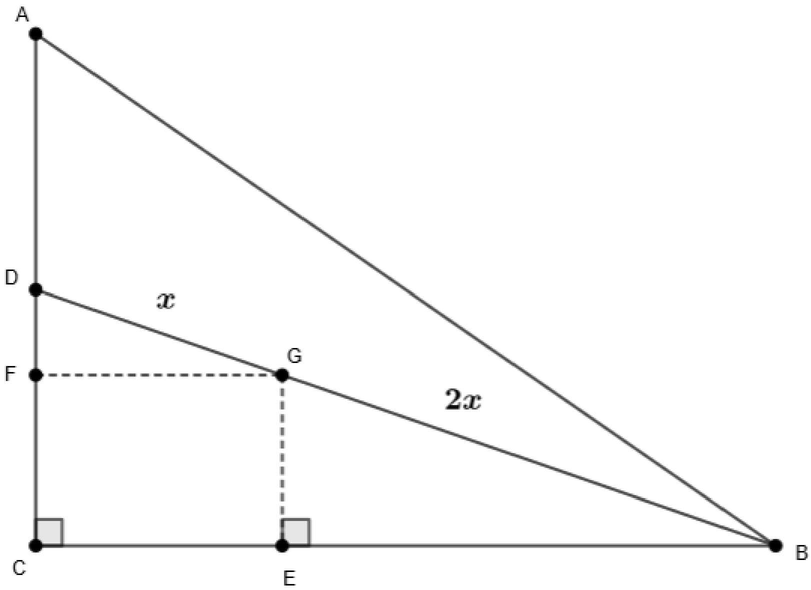


Temos que $2\beta + 2\alpha = 90 \Rightarrow \beta + \alpha = 45°$. Além disso, pela propriedade do ângulo externo $\beta + \alpha = \gamma = 45°$.

Logo, é verdadeira.

III. Do estudo da geometria plana, sabemos que o centro está sobre a hipotenusa. Portanto, falsa.

IV. Observe o seguinte esquema:



Veja que a distância do baricentro G ao lado AC é a medida do seguimento $GF = CE$.

Seja $BC = a$, da semelhança entre os triângulos ΔDCB e ΔEBG, temos:

$$\frac{BE}{a} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow BE = \frac{2}{3}a$$

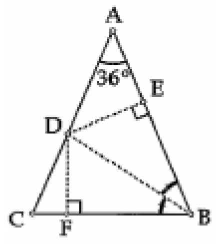
Mas $BE + CE = BC \Rightarrow \frac{2}{3}a + CE = a \Rightarrow CE = \frac{a}{3} \Rightarrow GF = \frac{a}{3}$.

Se $AC = b$, podemos concluir, com argumento análogo, que a distância do baricentro ao lado BC vale $\frac{b}{3}$. Logo, se $a \neq b$, a afirmação é falsa.

Gabarito: "a".

30. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura a acima mostra um triângulo isósceles ABC, com BÂC = 36° e AB = AC = 1 m. A bissetriz interna de B corta AC em D. Por D, traçam-se as distâncias até AB e até BC, determinando os pontos E e F, respectivamente. Sendo assim, é correto afirmar que o valor do produto $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}} \cdot \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{BF}}$ é

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

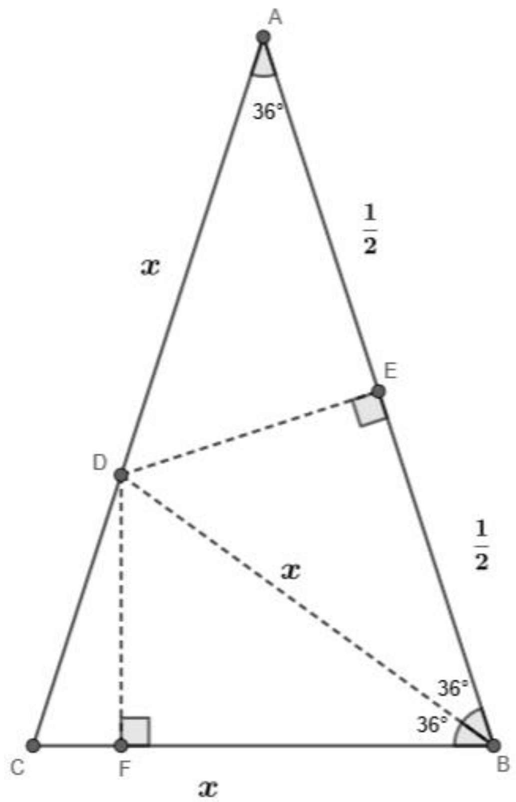
c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{5}-1}{2}$

e) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

Comentários

Observe a figura abaixo:



Nela, foram destacadas algumas relações provenientes da construção fornecida no enunciado.

Os triângulos ΔABC e ΔCBD são semelhantes pelo caso AAA. Disso, podemos escrever que:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow x^2+x-1=0\ eq.01$$

Resolvendo para $x>0$, temos:

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Queremos $\frac{DE}{AD}\cdot\frac{DF}{BF}$. Pela congruência entre os triângulos $\Delta FDB, \Delta BDE\ e\ \Delta DEA$, temos que:

$$DE=DF=y$$

$$AD=x\ e\ BF=\frac{1}{2}$$

Ou seja, queremos na verdade:

$$\frac{y^2}{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Por Pitágoras no ΔDEB, vem:

$$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2$$

Da $eq.01$:

$$x^2=1-x\Rightarrow x^2=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ou seja:

$$y^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5-2\sqrt{5}}{4}$$

Logo:

$$\frac{y^2}{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

Gabarito: "b".

---

31. (CN/2016)

Analise as afirmativas abaixo:

I. Todo triângulo retângulo de lados inteiros e primos entre si possui um dos lados múltiplo de 5.

II. Em um triângulo retângulo, o raio do círculo inscrito é igual ao perímetro do triângulo menos a hipotenusa.

III. Há triângulos que não admitem triângulo órtico, ou seja, o triângulo formado pelos pés das alturas.

IV. O raio do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o dobro da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

b) Apenas as afirmativas I e IV são verdadeiras.

c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.

Comentários

Vamos analisar cada afirmação.

Afirmação I:

Verdadeira. Perceba que os restos possíveis da divisão de um quadrado perfeito por 5 são 0, 1 e 4:

$$1^2 = 1 \to resto\ 1$$
$$2^2 = 4 \to resto\ 1$$
$$3^2 = 9 \to resto\ 4$$
$$4^2 = 16 \to resto\ 1$$
$$5^2 = 25 \to resto\ 0$$
$$\vdots$$

Vamos supor que para tal triângulo não tenhamos lados múltiplo de 5, assim, temos que os restos possíveis serão 1 e 4. Pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Da divisão de b^2 e c^2 por 5, temos como possíveis restos:

b^2	c^2
1	1
4	1
1	4
4	4

Assim, os restos possíveis de $a^2 = b^2 + c^2$ são:

b^2	c^2	$a^2 = b^2 + c^2$

1	1	2
4	1	0
1	4	0
4	4	3

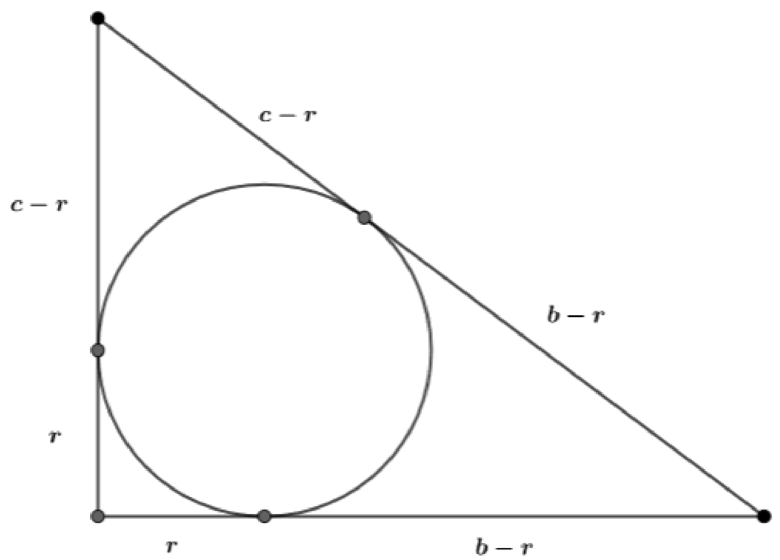
Perceba que o primeiro e o último restos não são valores válidos da divisão por 5, e o segundo e o terceiro mostram que o número é divisível por 5, o que é absurdo por hipótese. Portanto, concluímos que dadas as condições da afirmação, temos que um dos lados do triângulo sempre será múltiplo de 5.

Afirmação II:

Sejam b e c os catetos do triângulo retângulo e a sua hipotenusa. O perímetro do triângulo menos a hipotenusa corresponde à soma dos catetos, isto é, sendo r o raio dessa circunferência, teríamos:

$$r = b + c$$

Observe a figura:



Disso, segue que

$$c - r + b - r = a \Rightarrow r = \frac{c + b - a}{2}$$

Comparando as duas formas de calcular o raio:

$$b + c = \frac{c + b - a}{2} \Rightarrow c + b = -a < 0$$

Que é um absurdo, pois $c + b > 0$.

Afirmação III:

É verdadeira, pois o triângulo retângulo possui duas alturas com pés coincidentes, do que não é possível formar um triângulo.

Afirmação IV:

O raio do círculo circunscrito é a METADE da hipotenusa. Logo, é falsa.

Gabarito: “a”.

---

32. (CN/2015)

Qual a medida da maior altura de um triângulo de lados 3, 4 e 5?

a) $\frac{12}{5}$

b) 3

c) 4

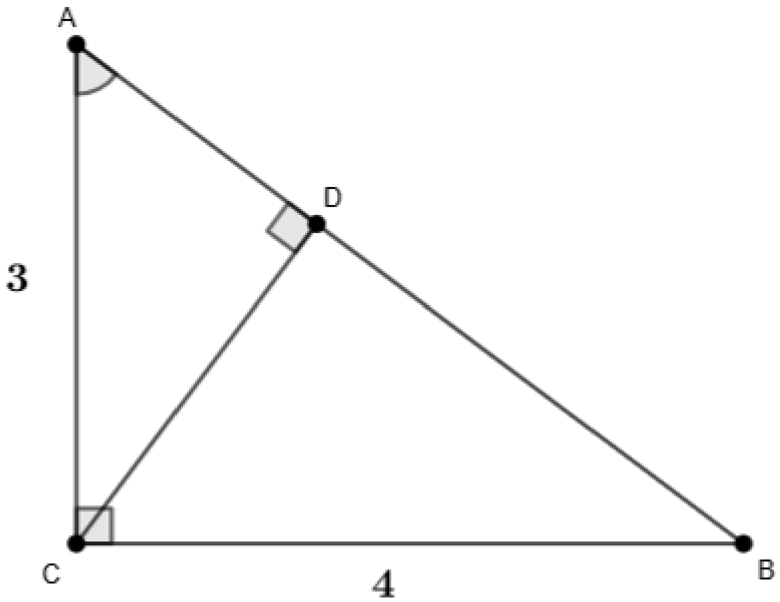
d) 5

e) $\frac{20}{3}$

Comentários

Duas das alturas já são dadas pelo fato de o triângulo ser retângulo: os catetos.

Observe o esquema a seguir:



Da semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔADC:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow CD = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

Veja que:

$$4 > 3 > \frac{12}{5}$$

Gabarito: “c”.

---

33. (CN/2014)

Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados AC = b e BC = a. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

a) $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{a^3}{b^2}$

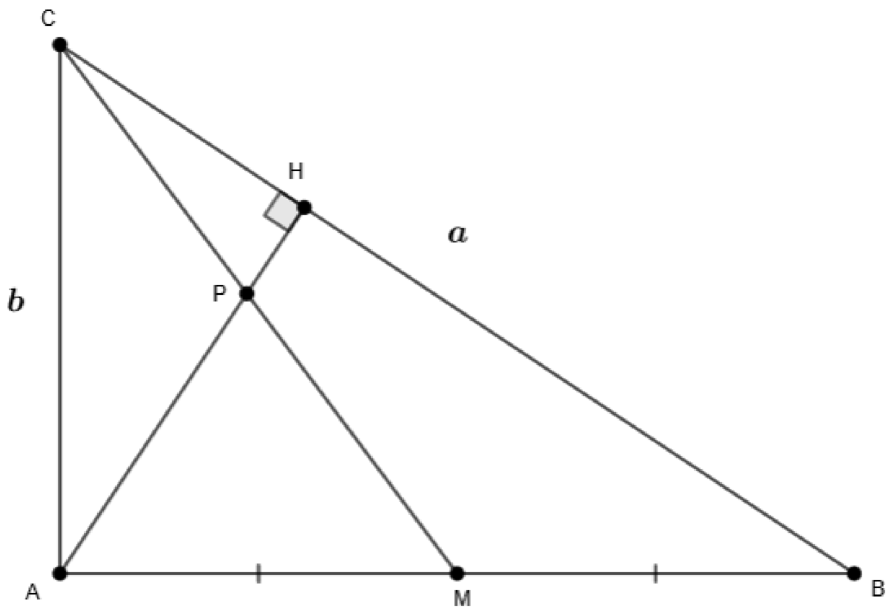
c) $\frac{a^2}{b^3}$

d) $\frac{a^3}{b^3}$

e) $\frac{a}{b}$

Comentários

Observe a figura abaixo:



Essa questão é uma aplicação direta do teorema de Menelaus ao triângulo ΔABH, isto é:

$$\frac{BC}{CH} \cdot \frac{HP}{PA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

Veja que, como M é ponto médio:

$$AM = MB \Rightarrow \frac{AM}{MB} = 1$$

Além disso, da semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔAHC:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{BC}{CH} = \frac{a^2}{b^2}$$

Por fim, temos que:

$$\frac{BC}{CH} \cdot \frac{HP}{PA} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PH} = \frac{BC}{CH} = \frac{a^2}{b^2}$$

Gabarito: “a”.

34. (CN/2013)

Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III. Se M é ponto médio de BC e $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, ABC é retângulo.

IV. Se ABC é retângulo, então o raio do seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

Comentários

Vamos analisar cada afirmativa.

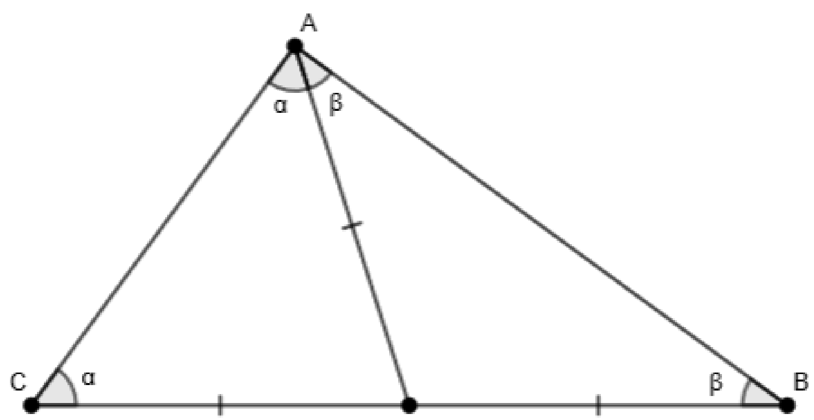
Afirmativa I:

Segue do próprio teorema de Pitágoras o resultado. Logo, é verdadeiro.

Afirmativa II:

Essa é a volta do Teorema de Pitágoras, logo, verdadeiro.

Afirmativa III:



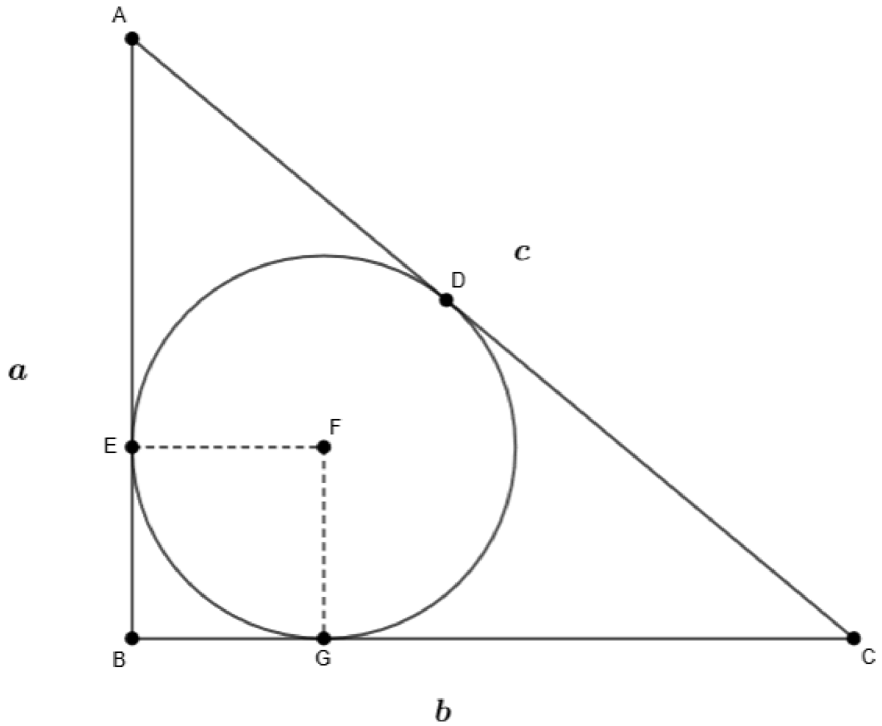
Do triângulo acima, temos:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Ou seja, o ângulo $B\hat{A}C$ é reto. Portanto, a alternativa é verdadeira.

Afirmativa IV:

Suponha que seja possível.



Observe a figura. Do teorema do bico, temos que:

$$AE = AD \ e \ GC = CD$$

Mas:

$$EB = BG = \frac{3}{4}c$$

Ou seja:

$$AE = a - \frac{3}{4}c \ e \ GC = b - \frac{3}{4}c$$

Como $AD + CD = c \Rightarrow a - \frac{3}{4}c + b - \frac{3}{4}c \Rightarrow a + b = \frac{5}{2}c$.

Disso, temos que:

$$(a+b)^2 = \frac{25}{4}c^2 \Rightarrow ab = \frac{21}{8}c^2$$

Da desigualdade das médias:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = ab = \frac{21}{8}c^2$$

Do teorema de Pitágoras:

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{c^2}{2}\geq\frac{21}{8}c^2\Rightarrow 0\geq c^2$$

Que é absurdo, pois $c>0$. Logo, é falsa.

Gabarito: "d".

---

35. (CN/2010)

Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é k, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

a) $\frac{5k}{2}$

b) $\frac{4k}{3}$

c) $\frac{4k}{5}$

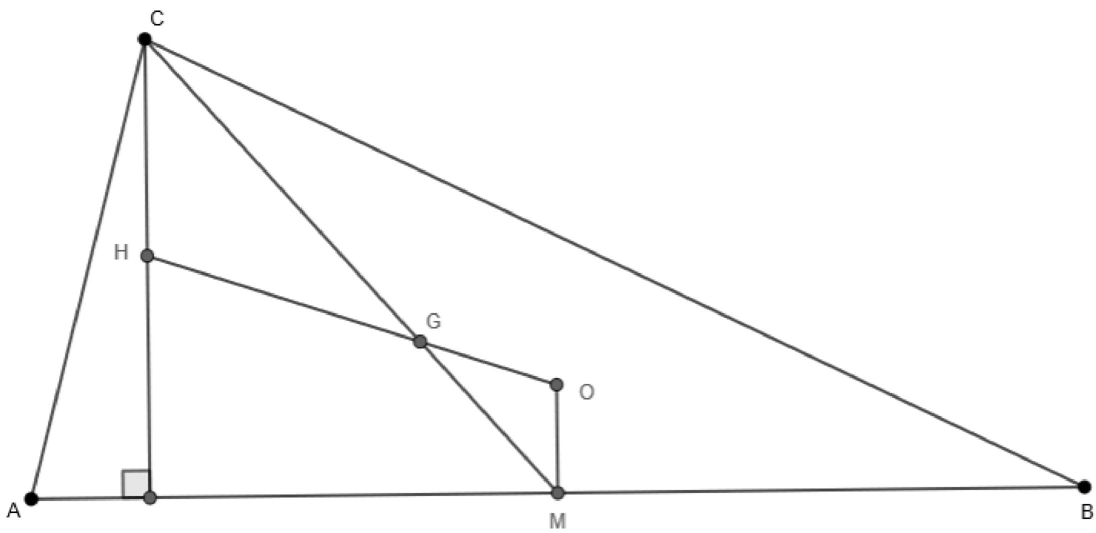
d) $\frac{k}{2}$

e) $\frac{k}{3}$

Comentários

O resultado de que os pontos notáveis do triângulo estão alinhados é conhecido como reta de Euler.

Sabe-se, do estudo da geometria plana, que o baricentro divide a mediana na razão de $2:1$. Dessa forma, observe a figura abaixo:



Do enunciado:

$$HO=k$$

Além disso, do que foi dito acima:

$$\frac{CG}{GM}=2$$

Os triângulos ΔHGC e ΔGMO são semelhantes pelo caso LLL. Disso, temos:

$$\frac{CG}{GM} = \frac{GH}{GO} = 2 \Rightarrow GH = 2GO$$

Mas:

$$GH + GO = k \Rightarrow 2GO + GO = k \Rightarrow GO = \frac{k}{3}$$

Gabarito: "e".

---

36. (CN/2009)

Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{med(BH)}{med(IH)}$ é igual a:

a) $\frac{med(BC)}{med(AH)}$

b) $\frac{med(BC)}{med(AD)}$

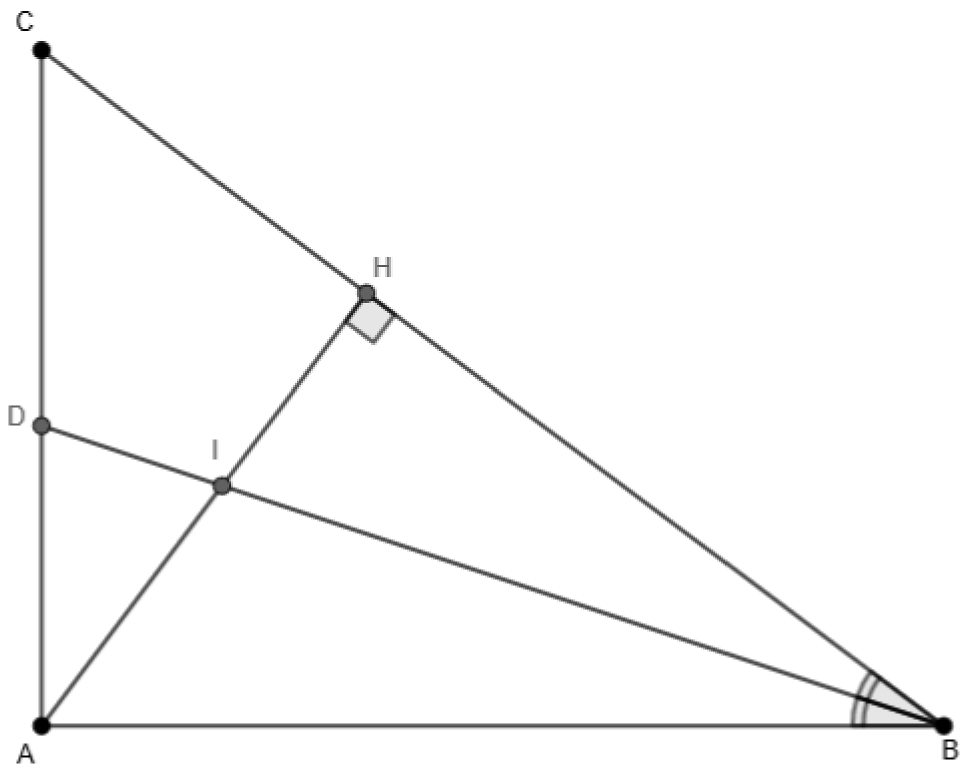
c) $\frac{med(BC)}{med(CD)}$

d) $\frac{med(AD)}{med(AI)}$

e) $\frac{med(AD)}{med(IH)}$

Comentários

Observe o esquema abaixo:



Os triângulos ΔHIB e ΔABD são semelhantes (AA), logo:

$$\frac{BH}{HI}=\frac{BA}{AD}$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ΔABC, temos:

$$\frac{BA}{AD}=\frac{BC}{CD}$$

Por fim:

$$\frac{BH}{HI}=\frac{BA}{AD}=\frac{BC}{CD}$$

Gabarito: “c”.

---

37. (CN/2008)

Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a

a) 6,5

b) 7,0

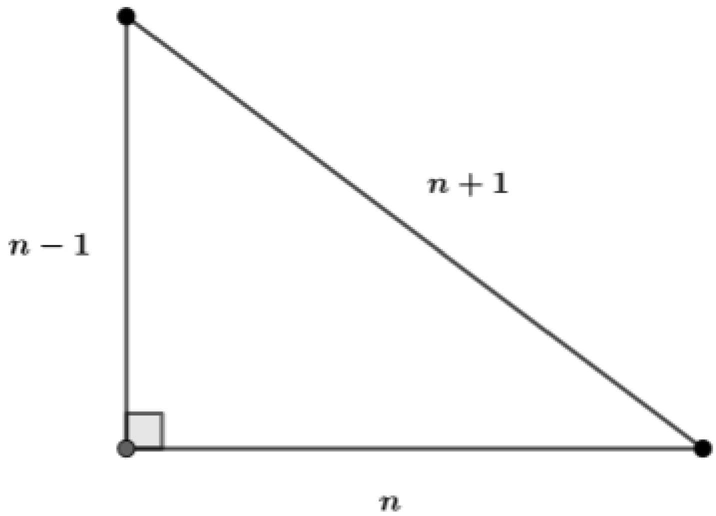
c) 7,5

d) 8,0

e) 8,5

Comentários

O primeiro passo é descobrir os lados do triângulo retângulo:



Do teorema de Pitágoras:

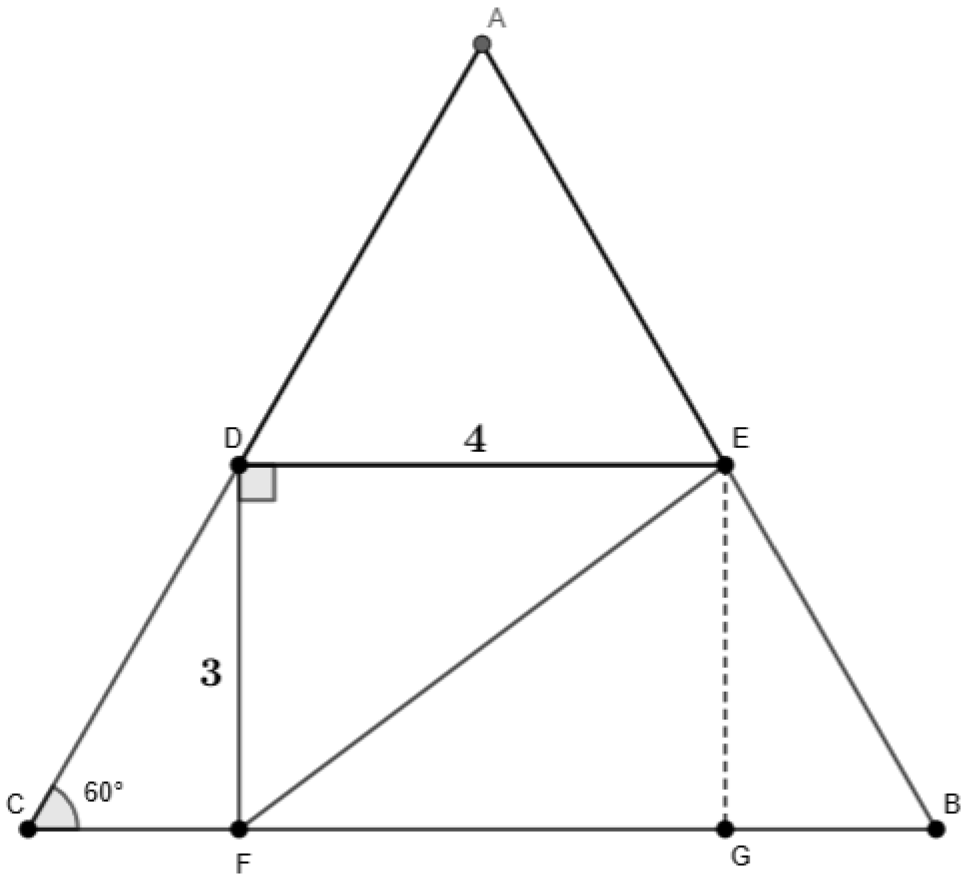
$$(n-1)^2+n^2=(n+1)^2$$

$$n^2-2n+1+n^2=n^2+2n+1\Rightarrow n^2-4n=0\Rightarrow n(n-4)=0$$

Como $n \neq 0$:

$$n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$$

Esse triângulo está inscrito em outro, equilátero, de modo que seu cateto maior seja paralelo a um dos lados deste. Disso, temos a seguinte figura:



Da trigonometria aplicada à geometria, temos:

$$\tan 60° = \frac{DF}{CF} \Rightarrow CF = \frac{DF}{\tan 60°} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Por simetria, $CF = GB = \sqrt{3}$.

Como o lado do triângulo vale x, temos:

$$x = CB = CF + FG + GB = \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46$$

Gabarito: "c".

---

38. (CN/2008)

Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P coplanar com ABC. Sabendo-se que P é equidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo BPC tem medida igual a 25°, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:

a) 25°

b) 45°

c) 50°

d) 65°

e) 85°

Comentários

Não é possível determinar um dos ângulos desse triângulo, pois todo triângulo possui um ponto sobre a bissetriz de um dos ângulos, ou seja, o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas suporte dos lados, tal que a reta PC faz um ângulo de $25°$ com essa bissetriz, isto é, o ponto P não tem nada de especial que determine um dos ângulos do triângulo.

Gabarito: Anulada.

---

39. (CN/2005)

No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre

a) 0 e 1

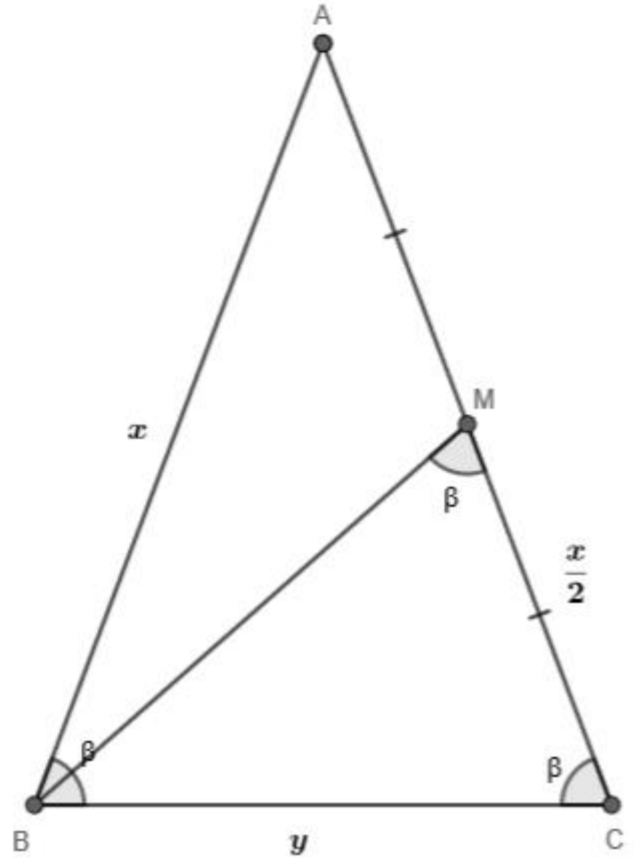
b) 1 e 2

c) 2 e 3

d) 3 e 4

e) 4 e 5

Comentários



Os $\Delta ABC\ e\ \Delta BMC$ são semelhantes pelo caso AAA, já que eles compartilham o ângulo $B\hat{C}A$ e são ambos isósceles.

Dessa forma, podemos dizer que:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CM}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{y}{\frac{x}{2}}\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}=2\Rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{2}$$

Sabemos que $1<\sqrt{2}<2$.

Gabarito: "b".

---

40. (CN/2005)

Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo BAC é igual a 90°. Sabe-se que AB = c, AC = b e BC = a. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP=\frac{(c+b)\cdot(c-b)}{a}$, o perímetro do triângulo a APC é dado pela expressão:

a) $\frac{2b\cdot(a+b)}{a}$

b) $\frac{2c\cdot(a+b)}{a}$

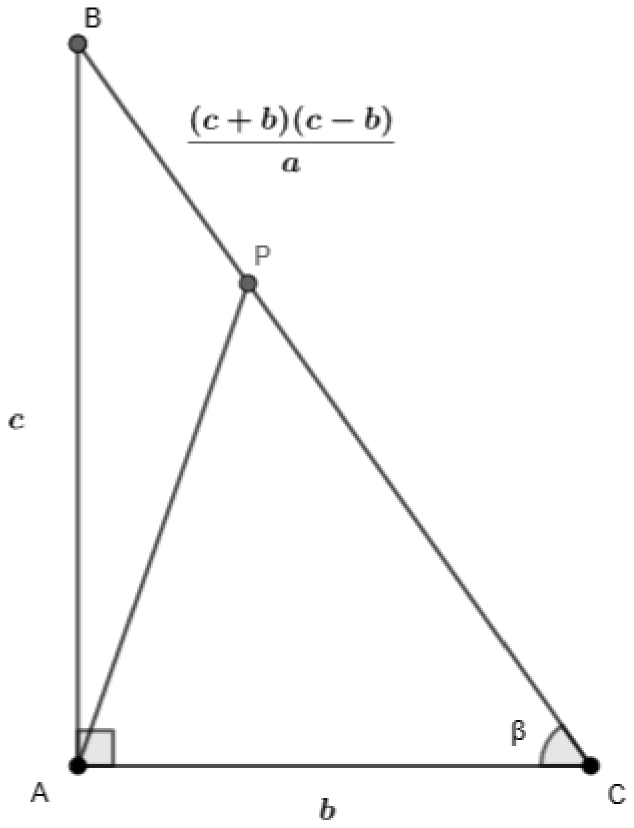
c) $\frac{2b\cdot(b+c)}{a}$

d) $\frac{2c\cdot(b+c)}{a}$

e) $\frac{2b\cdot(a+c)}{a}$

Comentários

A situação é representada como segue:



Veja que:

$$CP = BC - BP = a - \frac{(c+b)(c-b)}{a} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}$$

Aplicando o teorema dos cossenos ao ΔAPC, temos:

$$AP^2 = b^2 + \left(\frac{2b^2}{a}\right)^2 - 2\cdot b\cdot\left(\frac{2b^2}{a}\right)\cos\beta$$

Mas:

$$\cos\beta = \frac{b}{a}$$

Logo:

$$AP^2 = b^2 + \frac{4b^4}{a} - \frac{4b^4}{a} = b^2 \Rightarrow AP = b$$

Disso, temos que o perímetro do ΔAPC é dado por:

$$b + b + \frac{2b^2}{a} = \frac{2b(a+b)}{a}$$

Gabarito: “a”.

41. (CN/2003)

Quantos são os pontos de um plano α que estão equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC contido em α?

a) Um.

b) Dois.

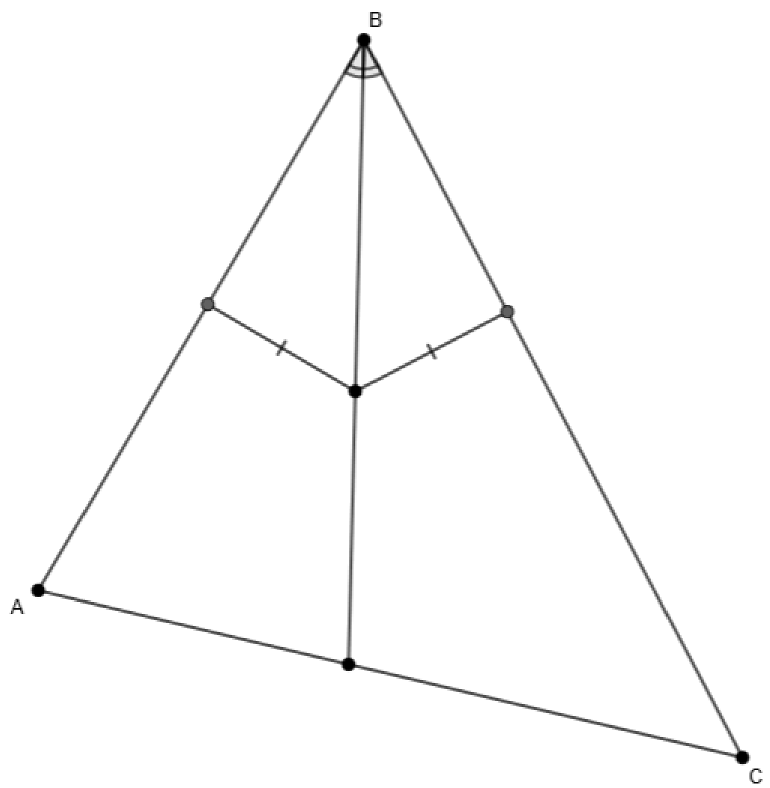
c) Três.

d) Quatro.

e) Cinco.

Comentários

Dado um triângulo qualquer, o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas suportes dos lados que formam um ângulo desse triângulo são as bissetrizes internas e externas desse ângulo. Isto é, seja o ângulo $A\hat{B}C$, a bissetriz interna desse ângulo é equidistante das retas suporte de $BA\ e\ BC$. Veja:



Dessa forma, o ponto de encontro de duas bissetrizes (Incentro e Ex-incentros) são equidistantes dos três lados ao mesmo tempo.

Para cada triângulo, temos 3 Ex-incentros e 1 incentro, ou seja, $1+3=4$ pontos equidistantes das retas suportes dos lados do triângulo.

Gabarito: “d”.

42. (CN/1998)

Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5cm e base medindo 8cm. A distância entre seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:

a) 0,1 cm

b) 0,3 cm

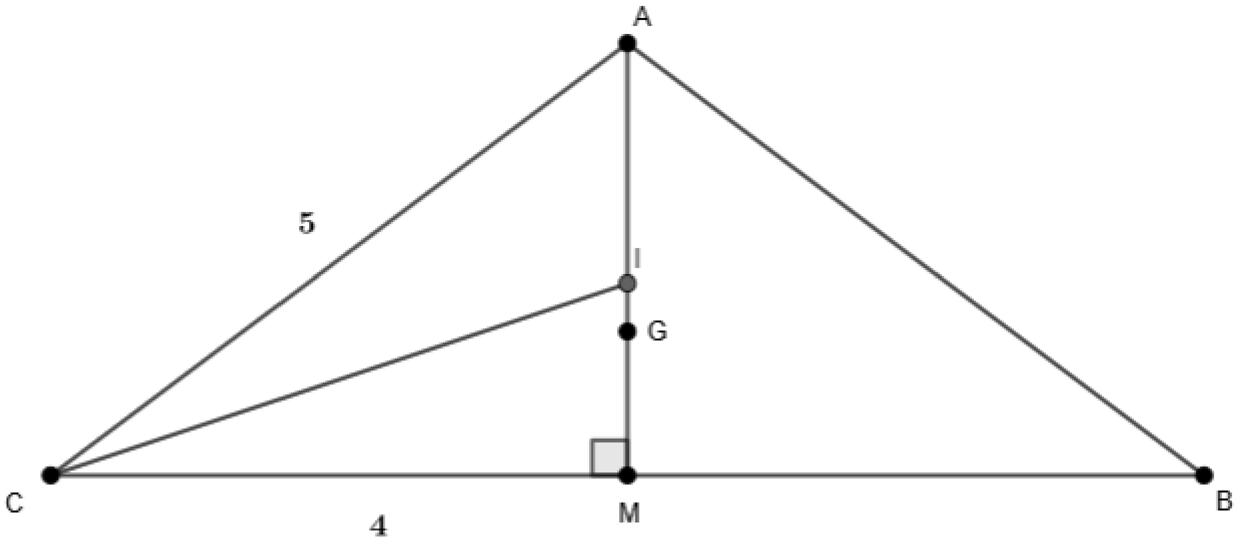
c) 0,5 cm

d) 0,7 cm

e) 0,9 cm

Comentários

A figura abaixo representa a situação:



Como ΔAMC é retângulo, temos:

$$5^2 = 4^2 + AM^2 \Rightarrow AM = 3$$

Do estudo da geometria plana, sabemos que:

$$AG = 2GM \Rightarrow GM + 2GM = 3 \Rightarrow GM = 1$$

Como I é o incentro do triângulo ABC, CI é bissetriz de $A\hat{C}M$, do que podemos aplicar o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{CM}{MI} = \frac{CA}{AI} \Rightarrow AI = MI \cdot \frac{CA}{CM} = \frac{5}{4}MI$$

Mas:

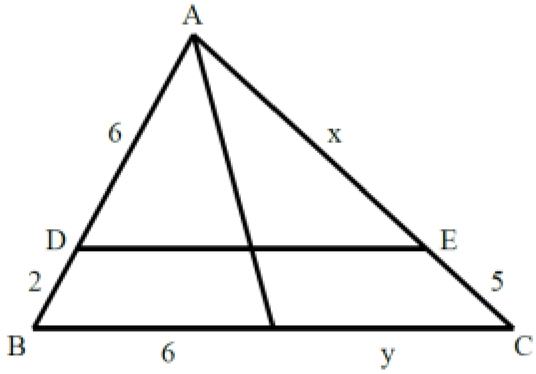
$$MI + AI = AM = 3 \Rightarrow MI + \frac{5}{4}MI = 3 \Rightarrow MI = \frac{4}{3}$$

Queremos:

$$IG = MI - GM = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}3$$

Gabarito: "b".

43. (CN/1998)



Na figura acima, DE é paralelo a BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC. Então $x + y$ é igual a:

a) 15

b) 20

c) 25

d) 30

e) 35

Comentários

Como DE é paralelo a BC, podemos aplicar o teorema de Tales:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 15$$

Como AM é bissetriz interno do triângulo ABC, podemos aplicar o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{20}{y} \Rightarrow y = 15$$

Por fim, temos que:

$$x + y = 15 + 15 = 30$$

Gabarito: "d".

10. Considerações Finais da Aula

Chegamos ao final da aula.

Nessa aula, vimos como calcular as cevianas de um triângulo qualquer e também alguns teoremas que podem ser úteis na resolução das questões. Os teoremas de Ceva e Menelaus podem ajudar-nos a resolver algumas questões mais difíceis das provas. Veremos que, normalmente, as bancas cobram questões sobre os pontos notáveis do triângulo e o cálculo das suas cevianas.

Normalmente, as questões de geometria das provas costumam misturar figuras geométricas, então, tente aprender a trabalhar com cada uma delas.

Caso fique alguma dúvida ou tenha alguma crítica/sugestão, pode entrar em contato:

11. Referências Bibliográficas

[1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.

[2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.

[3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.

[4] Rufino, Marcelo. Rodrigues, Márcio. Elementos da Matemática volume 2 – Geometria Plana. 3 ed. Vestseller, 2010. 344p.

[5] Barbosa, João Marques Lucas. Geometria Euclidiana Plana. 11 ed. SBM, 2012. 257p.

[6] Gomes, Carlos A. Tópicos de Matemática Volume 3 – Geometria Plana. 1 ed. Vestseller, 2016. 669p.